ΤΟ ΝΕΥΤΩΝΕΙΟ ΟΡΙΟ

Θεωρούμε ότι $M/R \ll 1$ και $v/c \ll 1$.

Οπότε η εξίσωση των γεωδαισιακών

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}\frac{dx^\beta}{d\tau}\frac{dx^\gamma}{d\tau} = 0$$

θα γίνει ως εξής:

Επειδή $$\frac{dx^0}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau} \gg \frac{dx^i}{d\tau} \sim v \quad \text{όταν } v \ll c$$

ο κυρίαρχος όρος στο διπλό άθροισμα είναι ο $\Gamma^\alpha{}_{00}$, δηλ.

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha{}_{00}\left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 = 0$$

κι επειδή $\tau \to t$

$$\frac{d^2x^\alpha}{dt^2} + \Gamma^\alpha{}_{00}\left(\frac{dx^0}{dt}\right)^2 = 0$$

Από τον ορισμό των $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$:

$$\Gamma^\alpha{}_{00} = \frac{1}{2}g^{\alpha\delta}\left(2g_{\delta 0,0} - g_{00,\delta}\right)$$

$$\simeq -\frac{1}{2}g^{\alpha\delta}g_{00,\delta} \quad \text{, επειδή } g_{\delta 0} \ll g_{00}$$

$$\simeq -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\delta}g_{00,\delta} \quad \text{(ως όρους ανώτερης τάξης)}$$

$$\simeq -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}g_{00}$$

Οπότε η εξίσωση των γεωδαισιακών γίνεται

$$\ddot{x}^{\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} g_{00} \qquad (1)$$

Γνωρίζουμε ότι στο Νευτώνειο όριο ισχύει

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\varphi$$

$$\Rightarrow \ddot{x}^{\alpha} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^{\alpha}} \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις (1),(2) βλέπουμε πως

$$g_{00} = -2\Phi + \text{σταθ.}$$

Για να είναι $g_{00}(r=\infty) = -1 = \eta_{00}$ (Minkowski) (και εφ' όσον $\Phi(r=\infty)=0$)

Θα πρέπει σταθ. $=1$, δηλ.:

$$\boxed{g_{00} = -(1+2\Phi)}$$

ΓΡΑΜΜΙΚΟΠΟΙΗΜΕΝΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑ

Πιο γενικά μπορούμε να γράψουμε

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \qquad (\eta_{\alpha\beta} = \text{Minkowski})$$

Ο τανυστής $h_{\alpha\beta}$ είναι η <u>διαταραχή της μετρικής</u>

Αν με "δ" συμβολίζουμε τη γραμμική διαταραχή μιας ποσότητας, τότε

$$h_{\alpha\beta} \equiv \delta g_{\alpha\beta}$$

Ενώ οι διαταραχή των εξισώσεων πεδίου στο κενό ($R_{\alpha\beta}=0$) είναι

$$\delta R_{\alpha\beta} = 0$$

Ο τανυστής του Ricci μπορεί να γραφεί απ' ευθείας σαν έκφραση των συμβόλων Christoffel

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial \Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}\Gamma^{\delta}_{\gamma\delta} - \Gamma^{\gamma}_{\alpha\delta}\Gamma^{\delta}_{\beta\gamma}$$

[ΑΣΚΗΣΗ]

οπότε

$$\delta R_{\alpha\beta} = \frac{\partial\, \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} - \frac{\partial\, \delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}}$$

(οι υπόλοιποι όροι είναι τετραγωνικοί ως προς $h_{\alpha\beta}$!)

Από τον ορισμό των $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$, η διαταραχή τους είναι

$$\delta\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial h_{\delta\alpha}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial h_{\delta\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^{\delta}}\right)$$

Μετά από πράξεις [ΑΣΚΗΣΗ]

$$\boxed{\delta R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left[-\Box h_{\alpha\beta} + V_{\beta,\alpha} + V_{\alpha,\beta}\right]}$$

όπου

$$\boxed{\Box \equiv \eta^{\alpha\beta}\partial_{\alpha}\partial_{\beta} = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \vec{\nabla}^2}$$

και

$$\boxed{V_{\alpha} = h^{\gamma}{}_{\alpha,\gamma} - \frac{1}{2}h_{\gamma}{}^{\gamma}{}_{,\alpha}}$$

όπου

$$h^{\gamma}{}_{\alpha} = \eta^{\gamma\delta}h_{\delta\alpha}\,.$$

(στη γραμμική προσέγγιση ανεβοκατεβάζουμε δείκτες με την $\eta_{\alpha\beta}$).

Μπορεί εύκολα να επαληθευθεί ότι η $\delta R_{\alpha\beta}=0$ συμπίπτει με την εξίσωση Poisson

$$\nabla^2\Phi=0$$

στο Νευτώνειο όριο, εάν η μετρική είναι

$$\boxed{g_{\alpha\beta}=\mathrm{diag}\left[-(1+2\varphi),\ 1-2\varphi,\ 1-2\varphi,\ 1-2\varphi\right]}$$

ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ ΒΑΘΜΙΔΑΣ

Θεωρείστε έναν απειροστό μετασχηματισμό συντεταγμένων

$$x'^{\alpha}=x^{\alpha}+\xi^{\alpha}(x^{\beta})$$

όπου $\xi^{\alpha}<<x^{\alpha}$.

Μια μετρική $g_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h_{\alpha\beta}$ θα μετασχηματιστεί στην

$$g'_{\alpha\beta}=\eta_{\alpha\beta}+h'_{\alpha\beta}$$

όπου $\boxed{h'_{\alpha\beta}=h_{\alpha\beta}-\xi_{\beta,\alpha}-\xi_{\alpha,\beta}}$

Δηλαδή η αδιατάρακτη μετρική ($\eta_{\alpha\beta}$) δεν επηρεάζεται από έναν απειροστό μετασχηματισμό συντεταγμένων

Αυτό δείχνει ότι η $h_{\alpha\beta}$ δεν καθορίζεται από δέκα ανεξάρτητες συνθήκες αλλά υπάρχουν τέσσερις συνθήκες που αποτελούν καθαρή επιλογή συντεταγμένων. Οι 4 συνθήκες αυτές αποτελούν την

ελεύθερη επιλογή του ξ^α (ελευθερία βαθμίδας).
Διάφορες επιλογές βαθμίδας δίνουν διαφορετικά $h_{\alpha\beta}$, τα οποία όμως όλα αντιστοιχούν στην ίδια φυσική (η φυσική δεν εξαρτάται από τα συστήματα συντεταγμένων).

ΒΑΘΜΙΔΑ LORENTZ

Μπορούμε π.χ. να απαιτήσουμε να είναι

$$\boxed{V_\alpha = h^\gamma{}_{\alpha,\gamma} - \frac{1}{2} h^\gamma{}_{\gamma,\alpha} = 0}$$

4 συνθήκες

Οι 4 αυτές συνθήκες καθορίζουν πλήρως τη βαθμίδα (μπορεί να βρεθεί και το αντίστοιχο ξ^α). Κατ' αναλογία με τον Η/Μ, η επιλογή αυτή ονομάζεται βαθμίδα Lorentz.

Σ' αυτή τη βαθμίδα:

$$\boxed{\delta R_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \Box h_{\alpha\beta} = 0}$$

10 εξισ.
− 4 συνθήκ.
6 ανεξ. εξισ. (το πολύ)

ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΥΜΑΤΑ

Η γενική λύση της $\Box h_{\alpha\beta} = 0$ είναι ένα γραμμικό άθροισμα επιπέδων κυμάτων της μορφής

$$h_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} \, e^{i \eta_{\alpha\beta} k^\alpha x^\beta}$$

όπου $\alpha_{\alpha\beta}$ είναι τα διάφορα πλάτη και

$$k^\alpha = \left(|\vec{k}|, \vec{k}\right)$$ = κυματο~~δι~~-διάνυσμα

με $k^\alpha k_\alpha = 0$

Επειδή $c=1$, είναι

$$\omega = |\vec{k}|$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|}$$

ορίζε $k^a = (\omega, \vec{k})$

και $x^\alpha = (t, \vec{x})$

και $\eta_{\alpha\beta} k^\alpha \cdot x^\beta = -\omega t + \vec{k}\vec{x}$

Για ένα τέλειο επίπεδο διάνυσμα οι βαθμοί ελευθερίας είναι μόνο 2. Υπάρχουν δηλ. 4 ακόμα συνθήκες που μπορεί να επιλέξει κανείς και που ικανοποιούν τη βαθμίδα Lorentz.

Εάν επιλέξει $\begin{cases} \alpha_{ti} = 0 \\ \alpha_\beta{}^\beta = 0 \end{cases}$ $i=1,2,3$ → traceless (μηδενικού ίχνους)

τότε από τη βαθμίδα Lorentz προκύπτει ότι

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{tt} = 0 \\ k^j a_{ij} = 0 \end{cases}$$ → transverse (εγκάρσια)

Υποθέτουμε ότι $\vec{k} \parallel \hat{z} \Rightarrow \vec{k} = (0,0,\omega) \Rightarrow a_{zi} = 0$

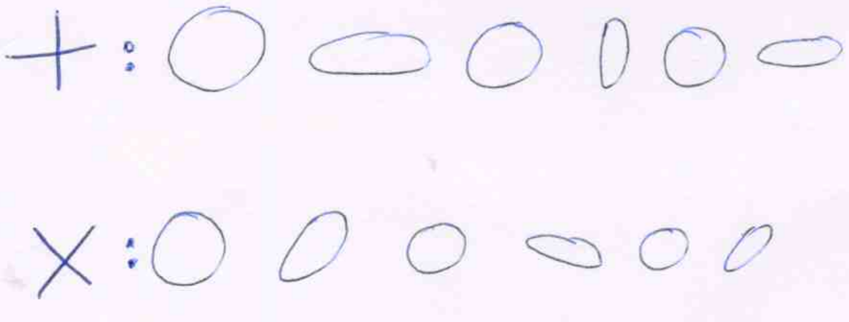
οπότε, η πιο γενική μορφή είναι

$$\boxed{h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & a & b & 0 \\ & b & -a & 0 \\ \text{sym.} & & & 0 \end{pmatrix}}$$

και η βαθμίδα ($\underline{\text{Lorentz}} + \underline{h_{ti} = 0,\ h_\beta{}^\beta = 0}$) ονομάζεται Transverse-Traceless (TT) gauge.

συνήθως συμβολίζουμε $a \to h_+$

$b \to h_\times$



ΠΗΓΕΣ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Στην περιοχή όπου $T_{\alpha\beta} \neq 0$ είναι

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

Αν κάνουμε την προσέγγιση $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, τότε

$$\delta R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \delta R = 8\pi T_{\alpha\beta}$$, όπου $T_{\alpha\beta}$ μικρό $O(h_{\alpha\beta})$

Ορίζουμε

$$\boxed{\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h}$$

Η βαθμίδα Lorentz γράφεται:

$$\bar{h}^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$$

Ενώ οι γραμμ. εξ. πεδίου γίνονται

$$\boxed{\Box \bar{h}_{\alpha\beta} = -16\pi T_{\alpha\beta}}$$

Γενική λύση:

$$\boxed{\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = 4 \int \frac{T^{\alpha\beta}(t', \vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3x'}$$

όπου $\boxed{t' = t - |\vec{x} - \vec{x}'|}$ (retarded time)

ΜΑΚΡΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΠΗΓΗ

Αν $r \gg R_{πηγής}$ και $\lambda \gg R_{πηγής}$ τότε παίρνουμε την ασυμπτωτική λύση $|\vec{x}-\vec{x}'| \to r$

$$\boxed{\bar{h}^{\alpha\beta}(t,\vec{x}) = \frac{4}{r}\int T^{\alpha\beta}(t-r,x')\,d^3x'}$$

Αν ορίσουμε τον τανυστή 2ης ροπής μάζας

$$I^{ij}(t) = \int \rho(t,\vec{x})\,x^i x^j\,d^3x \qquad , \rho = \text{πυκνότητα μάζας}$$

τότε αποδεικνύεται ότι ασυμπτωτικά:

$$\boxed{\bar{h}^{ij}(t,\vec{x}) = \frac{2}{r}\ddot{I}^{ij}(t-r)} \qquad \dot{} = \frac{d}{dt}.$$

Η σχέση αυτή ισχύει για ασθενή βαρυτικά πεδία που κινούνται μη-σχετικιστικά.

ΙΣΧΥΣ ΒΑΡΥΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Αν ορίσουμε τον τανυστή τετραπολικής ροπής ως

$$\boxed{\mathcal{I}^{ij} = I^{ij} - \frac{1}{3}\delta^{ij} I^{k}{}_{k}}$$

τότε η ισχύς που εκπέμπεται σε βαρυτικά κύματα είναι

$$\boxed{L_{GW} = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{5}\langle \dddot{\mathcal{I}}_{ij}\dddot{\mathcal{I}}^{ij}\rangle}$$