

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

2.41

Η τυχαία μεταβλητή Z παριστάνει το πλήθος των αποτελεσμάτων «κεφάλι» μείον το πλήθος των αποτελεσμάτων «γράμματα» σε δύο ρίψεις ενός νομίσματος. Βρείτε την κατανομή πιθανότητας της Z . Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με αυτά των Παρ. 2.1 και 2.2.

Λύση

Τα πιθανά αποτελέσματα είναι $\{KK, KG, GK, GG\}$ $Z = \{\text{«πλήθος αποτελεσμάτων κεφάλι»} - \text{«πλήθος αποτελεσμάτων γράμματα»}\}$ $Z(KK)=2, Z(KG)=0, Z(GK)=0, Z(GG)=-2$ $P(Z=0)=1/2$

$$P(Z=2)=1/4, P(Z=-2)=1/4 \text{ άρα η συνάρτηση κατανομής } f(z)=P(z) = \begin{cases} \frac{1}{4} & z = -2 \\ \frac{1}{2} & z = 0 \\ \frac{1}{4} & z = 2 \end{cases}$$

2.52

Μπορεί η συνάρτηση

$$F(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

να παριστάνει συνάρτηση κατανομής; Γιατί;

Λύση

Για να παριστάνει η $F(x)$ συνάρτηση κατανομής θα πρέπει η παράγωγος της $f(x)$ να

$$\text{ικανοποιεί τις ιδιότητες } \begin{cases} 1. & f(x) \geq 0 \\ 2. & \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \end{cases}$$

$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = -2cx, \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_0^1 -2cxdx = -2c \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1 = -c$ Για να ικανοποιείται η ιδιότητα 2, θα πρέπει $c=-1$. Επομένως αν $c=-1$ ικανοποιούνται οι ιδιότητες 1 και 2 της $f(x)$ και η $F(x)$ παριστάνει συνάρτηση κατανομής.

2.54

Η κοινή συνάρτηση πιθανότητας δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών X και Y είναι $f(x,y)=cxy$ για $x=1,2,3$ και $y=1,2,3$ και μηδέν για άλλες τιμές. Να υπολογιστούν (α) η σταθερή c και οι (b) $P(X=2,Y=3)$, (c) $P(1 \leq X \leq 2, Y \leq 2)$, (d) $P(X \geq 2)$, (e) $P(Y < 2)$, (f) $P(X=1)$, (g) $P(Y=3)$.

Λύση

$$f(x,y) = \begin{cases} cxy, & x = 1,2,3, \quad y = 1,2,3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

(α) Αφού X και Y είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές και $f(x,y)$ η συνάρτηση πιθανότητας, θα πρέπει $\sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^3 cxy = 1 \Rightarrow c \cdot 36 = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{36}$

$$(b) P(X=2, Y=3) = \frac{1}{36} \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned}
(c) \quad & P(1 \leq X \leq 2, Y \leq 2) = \frac{1}{36} 3 \cdot 3 = \frac{1}{4} \\
(d) \quad & P(X \geq 2) = \frac{1}{36} \sum_{x=2}^3 \sum_{y=1}^3 xy = \frac{1}{36} \cdot 5 \cdot 6 = \frac{5}{6} \\
(e) \quad & P(Y < 2) = \frac{1}{36} \sum_{x=1}^3 \sum_{y=1}^1 xy = \frac{1}{36} \cdot 6 \cdot 1 = \frac{1}{6} \\
(f) \quad & P(X = 1) = \frac{1}{36} 1 \cdot \sum_{y=1}^3 y = \frac{1}{36} \cdot 1 \cdot 6 = \frac{1}{6} \\
(g) \quad & P(Y = 3) = \frac{1}{36} \cdot \sum_{x=1}^3 x \cdot 3 = \frac{1}{36} \cdot 6 \cdot 3 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

2.55

Να βρεθούν οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας (α) της X και (β) της Y του Προβλ. 2.54. Είναι οι X και Y ανεξάρτητες;

Λύση

(α) Οι περιθώριες συναρτήσεις πιθανότητας είναι

$$\begin{aligned}
P(X=x) = f_1(x) &= \begin{cases} \frac{1}{6}, & x=1 \\ \frac{2}{6}, & x=2 \\ \frac{3}{6}, & x=3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x, & x=1,2,3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \text{ και } P(Y=y) = \\
f_2(y) &= \begin{cases} \frac{1}{6}, & y=1 \\ \frac{2}{6}, & y=2 \\ \frac{3}{6}, & y=3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases} \Rightarrow f_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}y, & y=1,2,3 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad & P(X=x, Y=y) = \frac{1}{36} xy = \frac{1}{6} x \cdot \frac{1}{6} y = \\
& P(X=x) \cdot P(Y=y); \text{ άρα οι } X \text{ και } Y \text{ είναι ανεξάρτητες}
\end{aligned}$$

2.74

Έστω ότι οι X και Y έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Εάν $U=X/Y$, $V=X+Y$, ποια είναι η κοινή συνάρτηση πυκνότητας των U και V ;

Λύση

$$\begin{aligned}
U &= \frac{X}{Y} \text{ και } V = X + Y \text{ λύνοντας το σύστημα αυτό παίρνουμε } X = \frac{UV}{U+1} \text{ και } Y = \frac{V}{U+1} \\
\Rightarrow X+Y &= V, f_1(u, v) = \begin{cases} e^{-v}, & v > -1, u > -1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}
\end{aligned}$$

η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι $g(u, v) = f_1(u, v) \frac{dx dy}{du dv}$ η Ιακωβιανή του

$$\text{μετασχηματισμού είναι } J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{v}{(u+1)^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{u}{u+1}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v}{(u+1)^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{u+1} \Rightarrow$$

$$J = \frac{v}{(u+1)^2} \Rightarrow g(u, v) = \begin{cases} e^{-v} \cdot \frac{v}{(u+1)^2}, & u \geq 0, v \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$