

3.52

Οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε τις (α) $E(X)$, (b) $E(Y)$, (c) $E(X+Y)$, (d) $E(XY)$.

Λύση

$$(α) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x \cdot 4xy dx dy = \frac{2}{3}$$

$$(b) E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} yf(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 y \cdot 4xy dx dy = \frac{2}{3}$$

$$(c) E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx dy + \int_0^1 \int_0^1 x \cdot 4xy dx dy = \frac{4}{3}$$

$$(d) E(XY) = E(X) \cdot E(Y) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

3.77

Εάν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y έχουν κοινή συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Υπολογίστε τις (α) $Var(X)$, (b) $Var(Y)$, (c) σ_X , (d) σ_Y , (e) σ_{XY} , (f) ρ ,

Λύση

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x(x + y) dx dy = \frac{7}{12}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 x^2(x + y) dx dy = \frac{10}{24}$$

$$(α) Var(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{10}{24} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

$$(b) Var(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{10}{24} - \frac{49}{144} = \frac{11}{144}$$

$$(c) \sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \frac{\sqrt{11}}{12}$$

$$(d) \sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \frac{\sqrt{11}}{12}$$

$$(e) \sigma_{XY} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y)f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 \left(x - \frac{7}{12}\right) \left(y - \frac{7}{12}\right) (x + y) dx dy = -\frac{1}{144}$$

$$(f) \rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = -\frac{1}{11}$$

3.78

Να λυθεί το Προβλ. 3.77 με $f(x, y) = \begin{cases} e^{-(x+y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$

Λύση

$$\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-(x+y)} dx dy = 1$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-(x+y)} dx dy = 2$$

$$(a) \text{Var}(X) = E[(X - \mu_X)^2] = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2 - 1 = 1$$

$$(b) \text{Var}(Y) = E[(Y - \mu_Y)^2] = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = 2 - 1 = 1$$

$$(c) \sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)} = 1$$

$$(d) \sigma_Y = \sqrt{\text{Var}(Y)} = 1$$

$$(e) \sigma_{XY} =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f(x, y) dx dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (x - 1)(y - 1) e^{-(x+y)} dx dy = 0$$

$$(f) \rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{0}{1} = 0$$

3.104

Υπολογίστε τα (α) 25το και (β) 75το εκατοστιαία σημεία μιας τυχαίας μεταβλητής με συνάρτηση πυκνότητας

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Λύση

$$P(X \leq a) = \int_0^a 2(1-x) dx = 2a - a^2$$

(α) το 25^ο εκατοστιαίο σημείο ικανοποιεί την εξίσωση $2a - a^2 = 0,25$ από όπου προκύπτει ότι

$$a = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

(β) το 75^ο εκατοστιαίο σημείο ικανοποιεί την εξίσωση $2a - a^2 = 0,75$ από όπου προκύπτει ότι

$$a = \frac{1}{2}$$

3.108

Υπολογίστε (α) το πλάτος, (b) το μισοκεντρικό πλάτος και (c) τη μέση απόλυτη απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής του Προβλ. 3.104

Λύση

(α) Επειδή όλες οι τιμές οι μεγαλύτερες από το 1 και οι μικρότερες από το 0 έχουν πιθανότητα 0 παίρνουμε ως ελάχιστη δυνατή τιμή την 0 και μέγιστη την 1. Άρα το πλάτος είναι $1-0=1$

(b) Από την προηγούμενη άσκηση βρήκαμε ότι το 25° εκατοστιαίο σημείο είναι $\alpha = \frac{2-\sqrt{3}}{2}$ και το 75° εκατοστιαίο σημείο είναι $\alpha = \frac{1}{2}$. Άρα το Μισοκεντρικό πλάτος $= \frac{\frac{1}{2} - \frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{2}} = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$

(c) $M.A.A. = E(|X - \mu|)$

$$\mu = \int_0^1 x 2(1-x) dx = \frac{1}{3}$$

Άρα

$$M.A.A. = E\left(\left|X - \frac{1}{3}\right|\right) = \int_0^{1/3} \left(-x + \frac{1}{3}\right) \cdot 2 \cdot (1-x) dx + \int_{1/3}^1 \left(x - \frac{1}{3}\right) \cdot 2 \cdot (1-x) dx = \frac{16}{81}$$

3.126

Κάθε μια από τις ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές X και Y έχει συνάρτηση πυκνότητας

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}, \quad -\infty < u < \infty. \text{ Υπολογίστε τις (α) } E(X^2 + Y^2), \text{ (b) } E(\sqrt{X^2 + Y^2}).$$

Λύση

Η συνάρτηση πυκνότητας της μεταβλητής X είναι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ και της Y είναι

$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. Επειδή X και Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ισχύει η ισότητα $f(x,y)=f(x)f(y)$ (Κεφ 2, Λυμένες Ασκήσεις 2.11, 2.13)

$$\text{Άρα } f(x, y) = f(x)f(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$(a) E(X^2 + Y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2) \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = 2$$

$$(b) E(\sqrt{X^2 + Y^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(x^2 + y^2)} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$