

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

4.68

Ένας ασφαλιστής ασφαλίζει 5 άνδρες με την ίδια ηλικία και κατάσταση υγείας. Σύμφωνα με τα στατιστικά στοιχεία η πιθανότητα ένας άνδρας αυτής της κατηγορίας (ηλικίας, υγείας, κτλ.) να ζει μετά από 30 χρόνια είναι $\frac{2}{3}$. Υπολογίστε την πιθανότητα να ζουν μετά 30 χρόνια (α) και οι 5 άνδρες, (b) τουλάχιστον 3, (c) μόνο 2, (d) τουλάχιστον 1.

Λύση

Τα ενδεχόμενα που έχουμε είναι να ζει ή να μην ζει κάποιος. Επομένως έχουμε διωνυμική κατανομή με $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$ και $n = 5$

$$(a) P(X = 5) = \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{32}{243}$$

$$(b) P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \binom{5}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \binom{5}{5} \left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{80}{243} + \frac{80}{243} + \frac{32}{243} = \frac{192}{243}$$

$$(c) P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243}$$

$$(d) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{1}{243} = \frac{242}{243}$$

4.83

Σε μια τελική εξέταση ο μέσος βαθμός είναι 72 και η τυπική απόκλιση 9. Οι φοιτητές του ανωτέρου 10% πρόκειται να πάρουν ένα χρηματικό βραβείο. Ποιος είναι ο μικρότερος βαθμός των φοιτητών που θα πάρουν χρηματικό βραβείο;

Λύση

Εφαρμόζουμε κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu=72$ και τυπική απόκλιση $\sigma=9$. Έστω x ο μικρότερος βαθμός και z η αντίστοιχη τιμή σε τυπικές μονάδες. Αφού είμαστε στο ανώτερο 10% δηλαδή το εμβαδόν από το 0 μέχρι το z είναι 0.40 άρα από τον πίνακα C του παραρτήματος έχουμε ότι το $z=1.28$ οπότε $\frac{x-72}{9} = 1.28 \Rightarrow x = 83.52$

4.88

Ένας φοιτητής απαντάει στην τύχη σε ερωτήσεις με δύο δυνατές απαντήσεις, υπολογίστε την πιθανότητα να απαντήσει σωστά (α) 12 ερωτήσεις από 20 συνολικά (b) τουλάχιστον 24 από 40.

Λύση

Αφού οι δυνατές απαντήσεις είναι 2 έχουμε επιτυχή απάντηση $p = \frac{1}{2}$ και ανεπιτυχή $q = \frac{1}{2}$

(α) 20 ερωτήσεις, επομένως $n=20$ και θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα να είναι 12 σωστά. Επειδή $np=10 > 5$ θα προσεγγίσουμε την διωνυμική κατανομή με κανονική

κατανομή, επομένως ψάχνουμε την πιθανότητα να απαντήσει σωστά από 11,5 μέχρι 12,5 ερωτήσεις.

$$\text{Το σημ. } x_1 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } z_1 = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{11,5 - 10}{\sqrt{5}} = \frac{1,5}{\sqrt{5}} = 0,67$$

$$\text{και το σημ. } x_2 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } z_2 = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{12,5 - 10}{\sqrt{5}} = \frac{2,5}{\sqrt{5}} = 1,12$$

Επομένως ψάχνουμε το εμβαδόν της καμπύλης από το 0,45 μέχρι το 1,34 το οποίο ισούται με $E(1,12) - E(0,67) = 0,3686 - 0,2486 = 0,12$.

(b) τουλάχιστον 24 από 40, δηλαδή $n=40$, και ζητάμε την πιθανότητα $P(X \geq 24)$. Επειδή $np=40 \cdot (1/2)=20 > 5$ θα προσεγγίσουμε την διωνυμική κατανομή με κανονική κατανομή, επομένως ψάχνουμε την πιθανότητα να απαντήσει σωστά από 23,5 μέχρι 40,5 ερωτήσεις.

$$\text{Το σημ. } x_1 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } z_1 = \frac{x - np}{\sqrt{npq}} = \frac{23,5 - 20}{\sqrt{10}} = \frac{3,5}{3,16} = 1,107$$

Επομένως ψάχνουμε το εμβαδόν της καμπύλης δεξιά από το 1,107 δηλαδή $0,5 - E_{1,107} = 0,5 - 0,3665 = 0,1335$

4.91

Εάν 3 στους 100 λαμπτήρες μιας εταιρίας είναι ελαττωματικοί, υπολογίστε την πιθανότητα να είναι σ' ένα δείγμα 100 λαμπτήρων (α) 0, (b) 1, (c) 2, (d) 3 (c) 4, (f) 5 ελαττωματικοί.

Λύση

Η πιθανότητα να είναι ελαττωματικός ένας λαμπτήρας είναι $p=0,03$ άρα $q=0,97$ Το δείγμα είναι 100 λαμπτήρες δηλαδή $n=100$. Επειδή το δείγμα μας είναι μεγάλο και η πιθανότητα επιτυχίας πολύ μικρή θα προσεγγίσουμε την διωνυμική κατανομή με κατανομή Poisson όπου $\lambda=np=3$.

$$(a) P(X = 0) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^0 e^{-3}}{0!} = e^{-3} = 0,04979$$

$$(b) P(X = 1) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 3e^{-3} = 0,14937$$

$$(c) P(X = 2) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = \frac{9}{2} e^{-3} = 0,224$$

$$(d) P(X = 3) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = \frac{9}{2} e^{-3} = 0,224$$

$$(e) P(X = 4) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^4 e^{-3}}{4!} = \frac{27}{8} e^{-3} = 0,168$$

$$(f) P(X = 5) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^5 e^{-3}}{5!} = \frac{81}{40} e^{-3} = 0,1008$$

4.125

Δείξτε ότι η κατανομή βήτα έχει μια μόνο πιθανότερη τιμή $\chi = (\alpha - 1) / (\alpha + \beta - 2)$.

Λύση

4.129

(a) Υπολογίστε τα χ_1^2 και χ_2^2 , εάν το μεταξύ τους εμβαδό είναι 0,95 για κατανομή χ^2 με $\nu=20$ βαθμούς ελευθερίας και τα υπόλοιπα δύο εμβαδά ίσα. (b) Εάν δεν υποθέσουμε ότι τα δύο (δεξιό και αριστερό) εμβαδά είναι ίσα, υπολογίζονται τα χ_1^2 και χ_2^2 ;

Λύση

(a) Εστω E_1 το εμβαδόν του χ_1^2 , E_2 το εμβαδόν του χ_2^2 και E_3 το μεταξύ τους εμβαδόν

$E_3=0,95$, $E_1=E_2$ και $E_1+E_2+E_3=1 \Rightarrow E_1=E_2=0,025 \Rightarrow E_1+E_3=0,975$ άρα το εμβαδόν μέχρι το χ_1^2 είναι 0,025 και το εμβαδόν μέχρι το χ_2^2 είναι 0,975. Από τον πίνακα του Παραρτήματος Ε για $\nu=20$ βαθμούς ελευθερίας, βρίσκουμε ότι $\chi_1^2 = \chi_{0,025}^2 = 9,59$ και $\chi_2^2 = \chi_{0,975}^2 = 34,2$

(b) Όχι

4.148

Υπολογίστε προσεγγιστικά την παράσταση

$$\binom{300}{2} (0.02)^2 (0.98)^{298} + \binom{300}{3} (0.02)^3 (0.98)^{297}$$

Και δώστε μια ερμηνεία με πιθανότητες.

Λύση

Η παραπάνω παράσταση μπορεί να είναι μία διωνυμική κατανομή με $n=300$, $p=0,02$, $q=0.98$. Επειδή η πιθανότητα επιτυχίας p είναι πολύ μικρή σε σχέση με το δείγμα μας, μπορούμε να την προσεγγίσουμε με κατανομή Poisson, όπου $\lambda=np=300 \cdot 0,02=6$

$$P(X = 2) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = 18e^{-6} = 18 \cdot 0,00247875 = 0,0446 \text{ και}$$

$$P(X = 3) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \frac{6^3 e^{-6}}{3!} = 36 \cdot e^{-6} = 0,0892$$

$$\text{επομένως } P(X = 2) + P(X = 3) = 0,0446 + 0,0892 = 0,1338$$