

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

5.51

Τα βάρη 1500 πακέτων τσιγάρων είναι κανονικά κατανεμημένα με μέση τιμή 22,40 gr και τυπική απόκλιση 0,048 gr. Υπολογίστε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των μέσων τιμών 300 δειγμάτων με 36 πακέτα το καθένα και με δειγματοληψία (a) με επανατοποθέτηση, (b) χωρίς επανατοποθέτηση.

Λύση

(a) Το πλήθος των δειγμάτων μεγέθους 36, που μπορούμε να πάρουμε χωρίς επανατοποθέτηση είναι $(1500)^{36}$, πολύ μεγάλο σε σχέση με τα 300 δείγματα που παίρνουμε. Επομένως από αυτά τα δείγματα μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο μια πειραματική μέση τιμή. Επειδή όμως τα δείγματα είναι πολλά, περιμένουμε οι πειραματικές τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης να είναι περίπου ίδιες με τις αντίστοιχες δειγματοληπτικές. Άρα

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 22,4 \text{ και } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{0,048}{\sqrt{36}} = 0,008$$

(b) Το πλήθος των δειγμάτων μεγέθους 36, που μπορούμε να πάρουμε με επανατοποθέτηση είναι ${}_{1500}C_{36}$, πολύ μεγάλο σε σχέση με τα 300 δείγματα που παίρνουμε και επομένως ισχύουν τα ίδια με το προηγούμενο ερώτημα. Άρα

$$\mu_{\bar{X}} = \mu = 22,4 \text{ και } \sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1500 - 36}{1500 - 1}} = 0,008 \cdot \sqrt{\frac{1200}{1499}} = 0,0079$$

5.57

Εάν δεχτούμε ότι οι πιθανότητες να γεννηθεί αγόρι ή κορίτσι είναι ίσες, υπολογίστε την πιθανότητα στις 200 επόμενες γεννήσεις (a) λιγότερο από 40% να είναι αγόρια, (b) από 43% έως 57% να είναι κορίτσια (c) περισσότερο από 54% να είναι αγόρια.

Λύση

$$p = \frac{1}{2}, q = \frac{1}{2} \text{ και } n = 200$$

(a) Ζητάμε την πιθανότητα από τις 200 γεννήσεις λιγότερο από 40% να είναι αγόρια, δηλαδή να έχουμε λιγότερα από 80 αγόρια. Χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή αντί την διωνυμική και επειδή το πλήθος των αποτελεσμάτων "αγόρι" είναι διακριτή μεταβλητή, ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε τιμή μικρότερη του 79,5. Μέση τιμή $\mu=np=100$ και τυπική

$$\text{απόκλιση } \sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = 7,07$$

$$79,5 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } = \frac{79,5-100}{7,07} = -2,89$$

Ζητούμενη πιθανότητα=(εμβαδόν κανονικής καμπύλης αριστερά του $z=-2,89=0,5-0,4981=0,0019$

(b) Ζητάμε την πιθανότητα από τις 200 γεννήσεις να είναι από 43% έως 57% κορίτσια, δηλαδή να έχουμε περισσότερα 86 και λιγότερα από 114 κορίτσια. Χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή αντί την διωνυμική και επειδή το πλήθος των αποτελεσμάτων "κορίτσι" είναι διακριτή μεταβλητή, ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε τιμή μικρότερη του 114,5 και μεγαλύτερη του 85,5.

$$85,5 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } = \frac{85,5-100}{7,07} = -2,05$$

$$114,5 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } = \frac{114,5-100}{7,07} = 2,05$$

Ζητούμενη πιθανότητα =(εμβαδόν κανονικής καμπύλης από $z=-2,05$ έως $z=2,05$)= $2 \cdot (0,4798)=0,9596$

(c) Ζητάμε την πιθανότητα από τις 200 γεννήσεις περισσότερο από 54% να είναι αγόρια, δηλαδή να έχουμε περισσότερα από 108 αγόρια. Χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή αντί την διωνυμική και επειδή το πλήθος των αποτελεσμάτων "αγόρι" είναι διακριτή μεταβλητή, ζητάμε την πιθανότητα να έχουμε τιμή μεγαλύτερη του 108,5.

$$108,5 \text{ σε τυπικές μονάδες είναι } = \frac{108,5-100}{7,07} = 1,2$$

Ζητούμενη πιθανότητα=(εμβαδόν κανονικής καμπύλης δεξιά του $z=1,2$)= $(0,5-\text{εμβαδόν από } z=0 \text{ έως } z=1,2)=0,5-0,3849=0,1151$

5.65

Το μέσο αποτέλεσμα σε ένα τεστ νοημοσύνης είναι 72 μονάδες με τυπική απόκλιση 8 μονάδες. Ποια η πιθανότητα τα μέσα αποτελέσματα δύο ομάδων με 28 και 36 φοιτητές αντίστοιχα να διαφέρουν (α) 3 ή περισσότερες μονάδες, (b) 6 ή περισσότερες μονάδες, (c) 2 έως 5 μονάδες;

Λύση

$\mu=72$, $\sigma=8$ ομάδα A=28 φοιτητές ομάδα B=36 φοιτητές

$$(a) \mu_A=\mu_B=\mu=72, \sigma_{\hat{A}-\hat{B}} = \sqrt{\frac{8^2}{28} + \frac{8^2}{36}} = 2,015 \text{ Η τυποποιημένη μεταβλητή είναι } Z =$$

$$\frac{(\hat{X}_A - \hat{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{A} + \frac{\sigma_B^2}{B}}} = \frac{2,5}{2,015} = 1,24 \text{ . Άρα θα πρέπει } Z \geq 1,24 \text{ ή } Z \leq -1,24 \text{ Συνεπώς}$$

$$P(Z \geq 1,24 \text{ ή } Z \leq -1,24) = P(Z \geq 1,24) + P(Z \leq -1,24) = 2 \cdot (0,5 - 0,3925) = 2 \cdot 0,1075 = 0,215$$

$$(b) \mu_A=\mu_B=\mu=72, \sigma_{\hat{A}-\hat{B}} = \sqrt{\frac{8^2}{28} + \frac{8^2}{36}} = 2,015 \text{ Η τυποποιημένη μεταβλητή είναι } Z =$$

$$\frac{(\hat{X}_A - \hat{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{A} + \frac{\sigma_B^2}{B}}} = \frac{5,5}{2,015} = 2,73 \text{ . Άρα θα πρέπει } Z \geq 2,73 \text{ ή } Z \leq -2,73 \text{ Συνεπώς}$$

$$P(Z \geq 2,73 \text{ ή } Z \leq -2,73) = P(Z \geq 2,73) + P(Z \leq -2,73) = 2 \cdot (0,5 - 0,4968) = 2 \cdot 0,0032 = 0,0064$$

(c) Η τυποποιημένη μεταβλητή για διαφορά 1,5 μονάδες είναι $Z_2 = \frac{(\widehat{X}_A - \widehat{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{A} + \frac{\sigma_B^2}{B}}} = \frac{1,5}{2,015} = 0,74$ και για διαφορά 5,5 μονάδες είναι $Z_5 = \frac{(\widehat{X}_A - \widehat{X}_B) - (\mu_A - \mu_B)}{\sqrt{\frac{\sigma_A^2}{A} + \frac{\sigma_B^2}{B}}} = \frac{5,5}{2,015} = 2,73$

Επομένως η πιθανότητα από 2 έως 5 μονάδες είναι το εμβαδόν της κανονικής καμπύλης από Z_2 έως Z_5 =εμβαδόν Z_5 -εμβαδόν Z_2 =0,4968-0,2704=0,2264. Άρα η πιθανότητα $\widehat{X}_1 - \widehat{X}_2$ ή $\widehat{X}_2 - \widehat{X}_1$ είναι $2 \cdot 0,2264 = 0,4528$

5.75

Οι λυχνίες τηλεόρασης που φτιάχνει μια εταιρεία έχουν μέση ζωή 2000 ώρες και τυπική απόκλιση 60 ώρες. Εάν πάρουμε 10 τυχαίες λυχνίες, ποια είναι η πιθανότητα η τυπική απόκλιση του δείγματος να είναι (α) μικρότερη από 50 ώρες, (β) από 50 έως 70 ώρες;

Λύση

Θεωρούμε την κατανομή $\frac{nS^2}{\sigma^2} = \frac{10 \cdot S^2}{60^2}$ η οποία είναι χ^2 -κατανομή.

(α) $\mu=2000$, $\sigma=60$ και $n=10$, και θέλουμε $S^2 < 50^2$ το οποίο αντιστοιχεί στην πιθανότητα $P(S^2 < 50^2) = P\left(\chi^2 < \frac{10 \cdot 50^2}{60^2}\right) = P(\chi^2 < 6,94) = 0,36$ όπως προκύπτει από τον πίνακα χ^2 -κατανομής για 9 βαθμούς ελευθερίας. Άρα η πιθανότητα η τυπική απόκλιση του δείγματος να είναι μικρότερη από 50 ώρες είναι 36%

(β) Η πιθανότητα $S^2 < 70^2$ είναι $P(S^2 < 70^2) = P\left(\chi^2 < \frac{10 \cdot 70^2}{60^2}\right) = P(\chi^2 < 13,61) = 0,85$ Άρα η πιθανότητα η τυπική απόκλιση του δείγματος να είναι από 50 έως 70 ώρες είναι $85 - 36 = 49\%$