

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

6.35

Η τυπικά απόκλιση της ζωής ενός τύπου λυχινιών είναι 100 ώρες. Πόσο μεγάλο πρέπει να είναι ένα δείγμα ώστε να είμαστε (a) 95%, (b) 90%, (c) 99% και (d) 99.73% βέβαιοι ότι το σφάλμα στην εκτίμηση της μέσης ζωής δεν υπερβαίνει τις 20 ώρες;

Λύση

(a) Τα 95% όρια εμπιστοσύνης είναι $\hat{X} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ και το σφάλμα στην εκτίμηση είναι $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ με $\sigma=100$. Το σφάλμα αυτό θα είναι 20 αν $1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow 1.96 \frac{100}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow \sqrt{n} = 1.96 \cdot 5 \Rightarrow n = 96,04$. Επομένως το δείγμα μας πρέπει να είναι τουλάχιστον 96 λυχινίες.

(b) Τα 90% όρια εμπιστοσύνης είναι $\hat{X} \pm 1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ και το σφάλμα στην εκτίμηση είναι $1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ με $\sigma=100$. Το σφάλμα αυτό θα είναι 20 αν $1,645 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow 1,645 \frac{100}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow \sqrt{n} = 1,645 \cdot 5 \Rightarrow n = 67,65$. Επομένως το δείγμα μας πρέπει να είναι τουλάχιστον 68 λυχινίες.

(c) Τα 99% όρια εμπιστοσύνης είναι $\hat{X} \pm 2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ και το σφάλμα στην εκτίμηση είναι $2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ με $\sigma=100$. Το σφάλμα αυτό θα είναι 20 αν $2,58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow 2,58 \frac{100}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow \sqrt{n} = 2,58 \cdot 5 \Rightarrow n = 166,41$. Επομένως το δείγμα μας πρέπει να είναι τουλάχιστον 167 λυχινίες.

(d) Τα 95% όρια εμπιστοσύνης είναι $\hat{X} \pm 3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ και το σφάλμα στην εκτίμηση είναι $3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ με $\sigma=100$. Το σφάλμα αυτό θα είναι 20 αν $3 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow 3 \frac{100}{\sqrt{n}} = 20 \Rightarrow \sqrt{n} = 3 \cdot 5 \Rightarrow n = 225$. Επομένως το δείγμα μας πρέπει να είναι τουλάχιστον 225 λυχινίες.

6.37

Δώδεκα μετρήσεις της αντοχής ενός σπάγκου έδωσαν μέση τιμή μέγιστου φορτίου 7,38 κιλά και τυπική απόκλιση 1,24 κιλά. Υπολογίστε τα (a) 95% και (b) 99% όρια εμπιστοσύνης για το πραγματικό μέγιστο φορτίο.

Λύση

Το δείγμα μας έχει 12 μετρήσεις επομένως θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους για μικρά δείγματα. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε την κατανομή t για να πάρουμε τα όρια εμπιστοσύνης. Έχουμε μέση τιμή $\hat{x}=7,38$ τυπική απόκλιση $s=1,24$ και μετρήσεις $n=12$,

(a) Τα 95% όρια εμπιστοσύνης είναι $\hat{X} \pm t_{.975} \cdot \frac{s}{\sqrt{n-1}}$. Επειδή $v=n-1=12-1=11$, έχουμε από τον πίνακα του παραρτήματος D $t_{.975}=2.20$ άρα τα ζητούμενα ορια είναι $\hat{X} \pm 2,20 \cdot \frac{1,24}{\sqrt{11}} = 7,38 \pm 2,20 \cdot 0,3738 = 7,38 \pm 0,82$

(b) Τα 99% όρια εμπιστοσύνης είναι $\hat{X} \pm t_{.995} \cdot \frac{S}{\sqrt{n-1}}$. Επειδή $v=n-1=12-1=11$, έχουμε από τον πίνακα του παραρτήματος D $t_{.995}=3.11$ άρα τα ζητούμενα όρια είναι $7,38 \pm 3,11 \cdot \frac{1,24}{\sqrt{11}} = 7,38 \pm 3,11 \cdot 0,3738 = 7,38 \pm 1,16$

6.38

Να λυθεί το πρόβλημα 6.37 με τις μεθόδους της θεωρίας για μεγάλα δείγματα. Να συγκριθούν τα αποτελέσματα αυτά με εκείνα του προηγούμενου προβλήματος.

Λύση

Βρίσκουμε πρώτα την αμερόληπτη και αποτελεσματική εκτίμηση της διασποράς, η οποία είναι $\hat{s}^2 = \frac{n}{n-1} s^2 = \frac{12}{11} 1,24^2 \Rightarrow \hat{s} = \sqrt{\frac{12}{11}} \cdot 1,24 = 1,295$ Οι τύποι για μεγάλα δείγματα είναι για το 95% $\hat{X} \pm z_c \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 7,38 \pm 1,96 \cdot \frac{1,295}{\sqrt{12}} = 7,38 \pm 1,96 \cdot 0,3738 = 7,38 \pm 0,73$ και για το 99% $\hat{X} \pm z_c \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} = 7,38 \pm 2,58 \cdot \frac{1,295}{\sqrt{12}} = 7,38 \pm 2,58 \cdot 0,3738 = 7,38 \pm 0,96$

6.40

Ένα κουτί περιέχει κόκκινες και άσπρες σφαίρες σε άγνωστη αναλογία. Παίρνουμε με επανατοποθέτηση ένα τυχαίο δείγμα με 60 σφαίρες. Εάν το 70% από αυτές είναι κόκκινες, υπολογίστε τα (a) 95%, (b) 99% και (c) 99,73% όρια εμπιστοσύνης για την αναλογία των κόκκινων σφαιρών στο κουτί. Το πρόβλημα να λυθεί και προσεγγιστικά και με τον ακριβέστερο τύπο του Προβλ. 6.27

Λύση

Προσεγγιστικά

Αφού το 70% των σφαιρών που πήραμε είναι κόκκινες, πήραμε 42 κόκκινες σφαίρες.

(a) Για 95% εμπιστοσύνη είναι $z_c=1,96$ και $P=0,7$ και $n=60$. Έχουμε τα όρια $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/n} = 0,7 \pm 1,96 \sqrt{0,7(1-0,7)/60} = 0,7 \pm 1,96 \sqrt{0,0035} = 0,7 \pm 1,96 \cdot 0,059 = 0,7 \pm 0,12$

(b) Για 99% εμπιστοσύνη είναι $z_c=2,58$ και $P=0,7$ και $n=60$. Έχουμε τα όρια $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/n} = 0,7 \pm 2,58 \sqrt{0,7(1-0,7)/60} = 0,7 \pm 2,58 \sqrt{0,0035} = 0,7 \pm 0,15$

(c) Για 99,73% εμπιστοσύνη είναι $z_c=3$ και $P=0,7$ και $n=60$. Έχουμε τα όρια $p = P \pm z_c \sqrt{P(1-P)/n} = 0,7 \pm 3 \sqrt{0,7(1-0,7)/60} = 0,7 \pm 3 \sqrt{0,0035} = 0,7 \pm 0,18$

Με τον τύπο του Προβλ. 6.27 $p = \frac{P + \frac{z_c^2}{2n} \pm z_c \sqrt{\frac{P(1-P)}{n} + \frac{z_c^2}{4n^2}}}{1 + \frac{z_c^2}{n}}$

(a) Για 95% $p = \frac{0,7 + \frac{1,96^2}{2 \cdot 60} \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{60} + \frac{1,96^2}{4 \cdot 60^2}}}{1 + \frac{1,96^2}{60}} = 0,69 \pm 0,11$

(b) Για 99%

$$p = \frac{0,7 + \frac{2,58^2}{2 \cdot 60} \pm 2,58 \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{60} + \frac{2,58^2}{4 \cdot 60^2}}}{1 + \frac{2,58^2}{60}} = 0,68 \pm 0,15$$

(c) Για 99.73

$$p = \frac{0,7 + \frac{3^2}{2 \cdot 60} \pm 3 \sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{60} + \frac{3^2}{4 \cdot 60^2}}}{1 + \frac{3^2}{60}} = 0,67 \pm 0,17$$