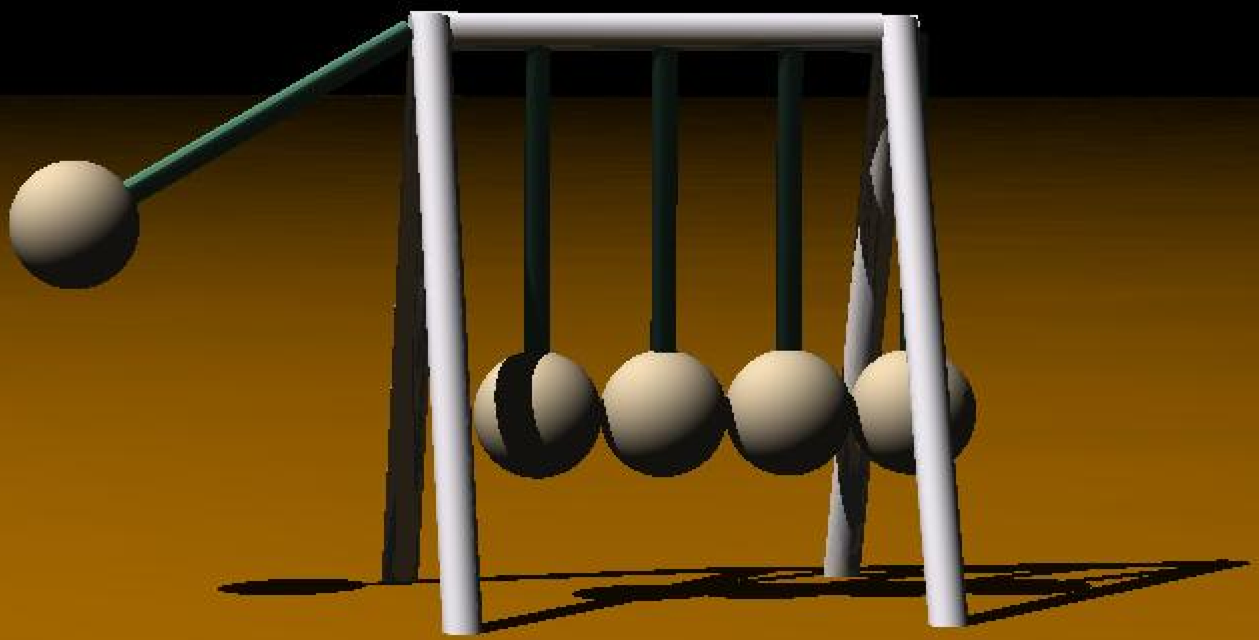
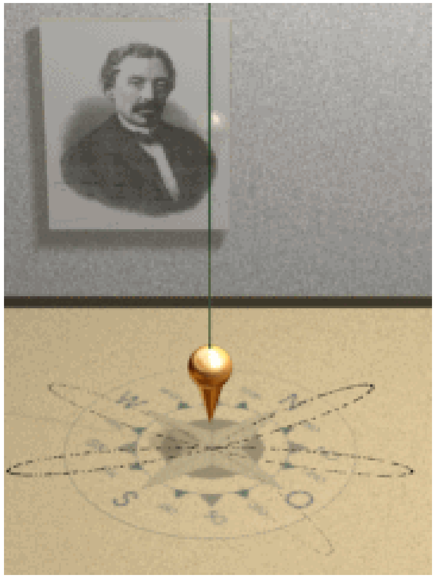
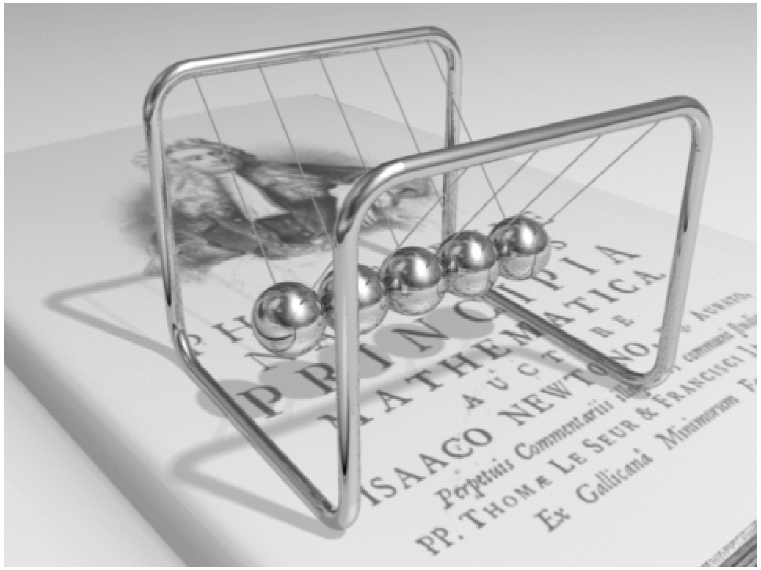
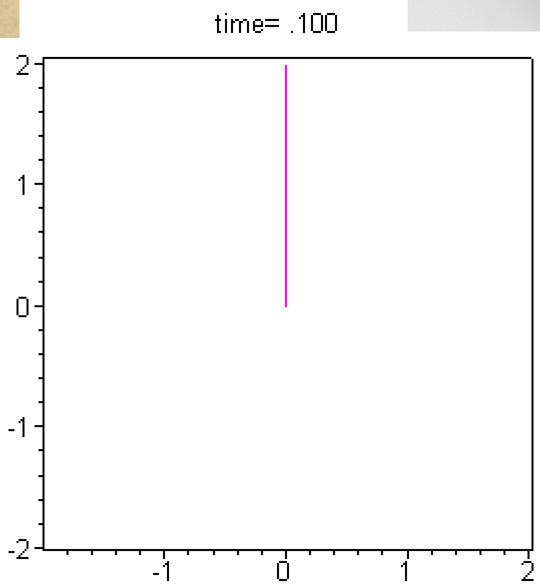


Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας
Ταλαντώσεις

▪ Παραδείγματα







▪ Προσεγγίσεις!

- Η δύναμη εξαρτάται **ΜΟΝΟ** από τη **ΘΕΣΗ**: ***F*=*F*(*r*)**

- Το σύστημα έχει **ΕΝΑ** βαθμό ελευθερίας
  => Κίνηση σε **ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ**: *F=F(x)*

- Εξίσωση κίνησης: $m\ddot{x} = F(x)$

▪ Γενική Λύση της Δ.Ε. της κίνησης

- **ΠΡΟΣΟΧΗ:**

F=F(x) => *Η δύναμη προέρχεται από δυναμικό:* $F(x) = -dV/dx$

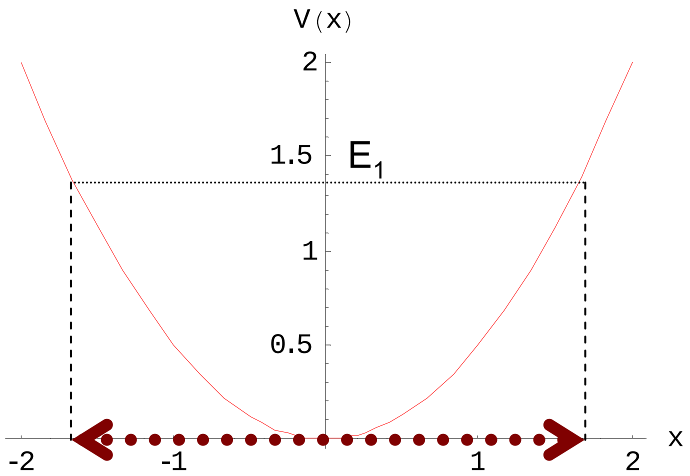
=> *Υπάρχει το ολοκλήρωμα της ενέργειας*: $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$

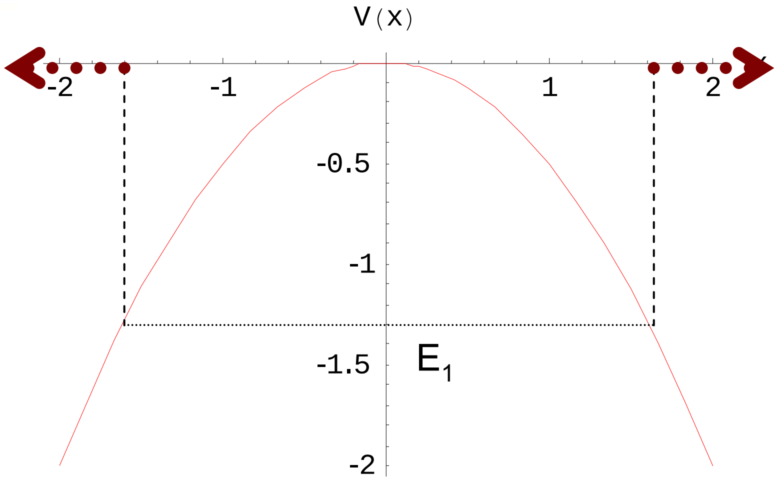
$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}} \Rightarrow t - t_o = \pm\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_o}^{x} (E - V(x))^{-1/2} dx$$

- **ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΑΠΟ ΤΙΣ Α.Σ.:**

Λύση ισορροπίας: $x=x_o$, $v=v_o$, $F(x_o)=0$, ακρότατη τιμή του δυναμικού

▪ Όρια κίνησης





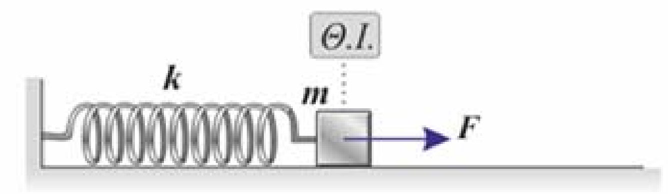
$$E_1 - V(x) \geq 0$$

$$x_1 \leq x \leq x_2$$

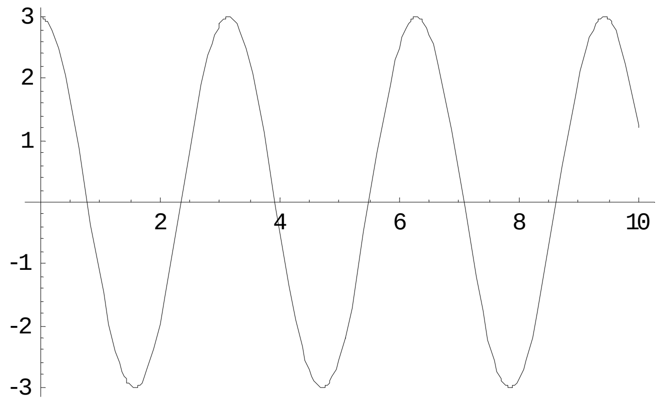
$$x \leq x_1,\ x \geq x_2$$

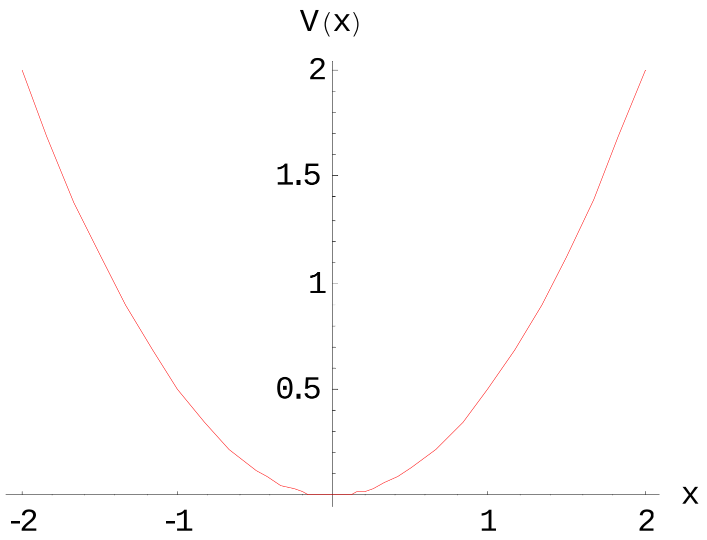
▪ Απλή αρμονική ταλάντωση

- Δύναμη - δυναμικό: $F(x) = -kx \quad (\mathrm{k} > 0)$



- Δυναμικό: $\mathrm{V} = \frac{1}{2}\mathrm{kx}^2$
- Εξ. κίνησης: $m\ddot{x} + kx = 0$
- Λύση: x = D cos(ωt-θ), D: πλάτος ταλάντωσης, θ: φάση
- T = 2π/ω, ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΗ του D
- Όρια κίνησης: $-\mathrm{x}_1 \le x \le \mathrm{x}_1,\ \mathrm{x}_1 = \sqrt{\frac{2E_1}{k}} = D$
- Ενέργεια: $E_1 = \frac{1}{2}kD^2$





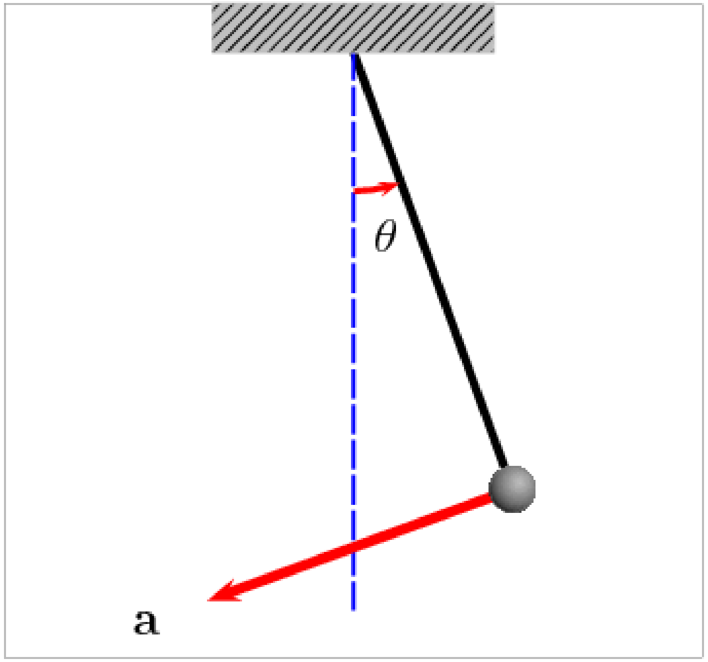
▪ Μη γραμμική ταλάντωση (η κίνηση δεν γίνεται σε ευθεία γραμμή)

- *F(x)*: **ΜΗ** γραμμική συνάρτηση του *x*, π.χ. $F(x)=-kx+ax^2$

  (ή του θ στην περίπτωση του εκκρεμούς)

- Περιοδική κίνηση, ***T~ D***!, $D=|x_2-x_1|/2$

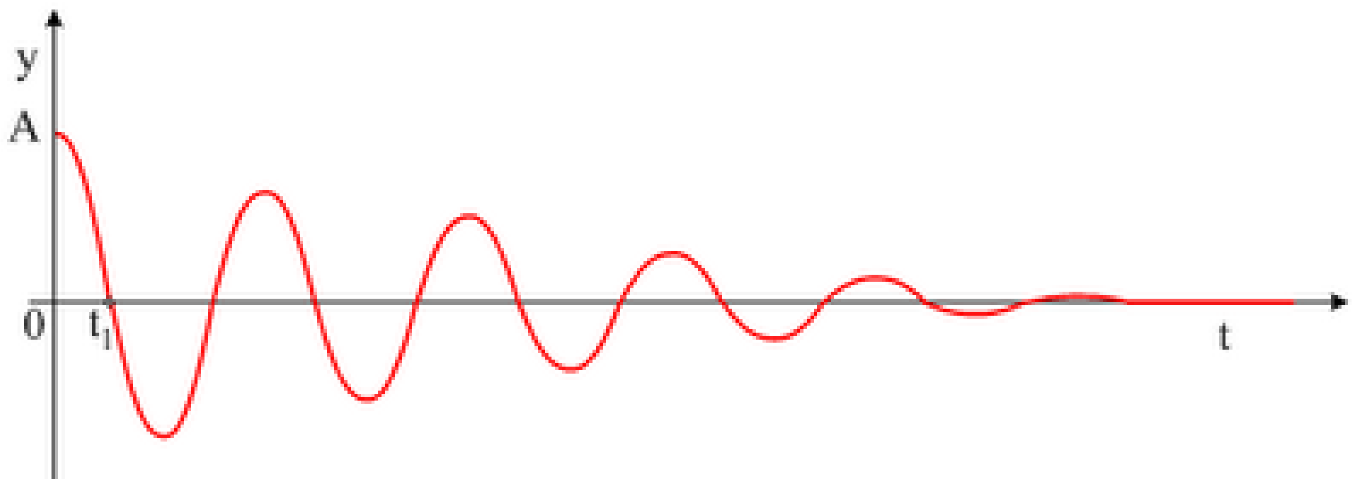
$$T = 2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}(E-V(x))^{-1/2}\,dx$$



▪ Αρμονική ταλάντωση με αντίσταση

$F(x) = -kx, \quad R(x) = -b\dot{x}$ ⇒ ΔΕΝ ΠΡΟΕΡΧΕΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ!

Εξίσωση κίνησης: $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$



▪ Επίλυση ασκήσεων - μεθοδολογία

- **Σχήμα** – σημειώνω πάνω τις δυνάμεις – ορίζω θετική φορά (συνήθως προς την κατεύθυνση της κίνησης)

- Γράφω την εξίσωση κίνησης $m\ddot{\vec{x}} = \sum \vec{F}$ **(προσοχή στα πρόσημα των δυνάμεων)**

*Όταν **η δύναμη προέρχεται από δυναμικό**, μπορώ να λύσω εναλλακτικά το **ολοκλήρωμα της ενέργειας** (επόμενη διαφάνεια) και να βρω την εξίσωση της κίνησης (είναι πιο εύκολο έτσι, γιατί έχω παράγωγο πρώτης τάξης)*

- **Επίλυση** της διαφορικής εξίσωσης που προκύπτει, εύρεση της ταχύτητας *v(t)* και στη συνέχεια εύρεση της διανυσθείσας απόστασης *x(t)*

- Χρησιμοποίηση των **αρχικών συνθηκών** για να βρω τις σταθερές ολοκλήρωσης

ΣΟΣ: Όταν υπάρχει αντίσταση, **ΔΕΝ** υπάρχει το ολοκλήρωμα της ενέργειας, όταν η δύναμη είναι της μορφής *F=F(x)*, τότε προέρχεται από δυναμικό και **ΥΠΑΡΧΕΙ** το ολοκλήρωμα της ενέργειας.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E \Rightarrow \dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2(\mathrm{E} - V(x))}{m}} \Rightarrow t - t_o = \pm\sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_o}^{x}(E - V(x))^{-1/2}dx$$

- **Όρια κίνησης:** $E - V(x) \geq 0$

- **Σημεία ισορροπίας:** επίλυση της $F(x_o)=0$

- **Ορική ταχύτητα**: η μέγιστη ταχύτητα που αποκτά ένα σώμα

▪Ελατήρια