

**Σημειώσεις για το μάθημα της  
ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ  
(Ειδικά Θέματα)**

**Λουκάς Βλάχος**  
Τμήμα Φυσικής  
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

20 Δεκεμβρίου 2006



# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Εισαγωγή</b>	<b>1</b>
1.1	Υδροδυναμική . . . . .	3
1.2	Υδροδυναμική . . . . .	4
1.2.1	Εισαγωγικές έννοιες . . . . .	4
1.2.2	Βασικές έννοιες από την Κινητική Θεωρία και τη Θερμοδυναμική . . . . .	5
1.3	Βασικές εξισώσεις της υδροδυναμικής . . . . .	10
1.3.1	Νόμοι διατήρησης . . . . .	12
1.3.2	Άνωση και Τριβή: Εφαρμογές . . . . .	13
1.3.3	Περιστρεφόμενα συστήματα συντεταγμένων . . . . .	14
1.4	Συμπεράσματα . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Πρότυπα αστέρων</b>	<b>19</b>
2.1	Υδροστατική ισορροπία . . . . .	20
2.1.1	Θερμοκρασία και πίεση στο κέντρο του Ήλιου . . . . .	20
2.1.2	Ισόθερμη ατμόσφαιρα . . . . .	21
2.1.3	Σχέση μάζας-ακτίνας . . . . .	21
2.1.4	Μη ομογενή πρότυπα αστέρων . . . . .	22
2.2	Ακουστικές ταλαντώσεις αστέρων . . . . .	24
2.3	Πηγές ενέργειας των αστέρων . . . . .	25
2.3.1	Δυναμική ενέργεια αστέρα . . . . .	25
2.3.2	Θερμοπυρηνική σύντηξη . . . . .	26
2.4	Πρότυπα αστέρων . . . . .	27
2.5	Συμπεράσματα . . . . .	31
2.6	Ασκήσεις . . . . .	31
<b>3</b>	<b>Δημιουργία πρωτοαστέρων</b>	<b>33</b>
3.1	Η ελεύθερη πτώση . . . . .	33
3.2	Αστάθεια <i>Jeans</i> . . . . .	35
3.3	Περιστροφή του νέφους . . . . .	38

3.4	Η βαρυτική συστολή ενός απομονωμένου νέφους . . . . .	41
3.5	Συμπεράσματα . . . . .	43
3.6	Ασκήσεις . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Αστρικοί Άνεμοι και σφαιρική πρόσπτωση μάζας</b>	<b>45</b>
4.1	Εισαγωγή . . . . .	45
4.2	Ισόθερμοι αστρικοί άνεμοι . . . . .	45
4.3	Δυναμική της ισόθερμης ροής . . . . .	47
4.4	Φωτεινότητα από τη σφαιρική συσσώρευση . . . . .	49
4.5	Χρονικά μεταβαλλόμενοι αστρικοί άνεμοι και σφαιρική πρόσπτωση μάζας . . . . .	50
4.6	Ασκήσεις . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Δίσκοι προσαύξησης</b>	<b>57</b>
5.1	Εισαγωγή . . . . .	57
5.2	Θερμοκρασία και φωτεινότητα του δίσκου . . . . .	58
5.2.1	Ο δίσκος ως μέλαν σώμα . . . . .	58
5.2.2	Εφαρμογή σε λευκό νάνο και αστέρα νετρονίων. . . . .	59
5.3	Ελαχιστοποίηση ενέργειας και διατήρηση της στροφορμής. . . . .	60
5.3.1	Δίσκος αποτελούμενος από σώματα σε στερεά κατάσταση. . . . .	60
5.3.2	Δίσκος αποτελούμενος από αέριο. . . . .	62
5.4	Η προσέγγιση του λεπτού δίσκου. . . . .	63
5.4.1	Διατήρηση μάζας και στροφορμής. . . . .	63
5.4.2	Οι εξισώσεις για την επιφανειακή πυκνότητα, την ακτινική ταχύτητα και το ρυθμό προσαύξησης της μάζας. . . . .	64
5.5	Η φύση του ιξώδους. . . . .	65
5.5.1	Το πρόβλημα με το ιξώδες. . . . .	65
5.5.2	Η βαρυτική αστάθεια. . . . .	66
5.6	Σταθεροί Δίσκοι σε συμπαγείς Αστέρες . . . . .	68
5.6.1	Μαθηματική μοντελοποίηση σταθερών δίσκων . . . . .	68
5.7	Συμπεράσματα . . . . .	71
5.8	Ασκήσεις . . . . .	71
<b>6</b>	<b>Μαγνητικά πεδία στην αστροφυσική</b>	<b>73</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	73
6.2	Η φύση των μαγνητικών πεδίων . . . . .	74
6.3	Πως μετράμε τα μαγνητικά πεδία στη φύση; . . . . .	77
6.3.1	Φαινόμενο Zeeman . . . . .	77
6.3.2	Ακτινοβολία σύγχροτρον . . . . .	81
6.4	Μαγνητοϋδροδυναμική ( <i>MHD</i> ) . . . . .	83

---

6.5	Θεώρημα <i>Virial</i> . . . . .	86
6.6	Κύματα <i>Alfven</i> . . . . .	89
6.7	Ο ρόλος του μαγνητικού πεδίου στην κατάρρευση ενός νεφους	90
	6.7.1 Διάχυση του μαγνητικού πεδίου . . . . .	91
	6.7.2 Μια εφαρμογή του Θεωρήματος <i>Virial</i> . . . . .	92
6.8	Συμπεράσματα . . . . .	93



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

Η αστροφυσική ασχολείται με την ερμηνεία των αστρονομικών παρατηρήσεων αξιοποιώντας τα μαθηματικά, τους νόμους της φυσικής και τους ηλεκτρονικούς υπολογιστές. Πολλά από τα παρατηρούμενα φαινόμενα στο σύμπαν συνδέονται με την δυναμική των ρευστών και τον ηλεκτρομαγνητισμό. Φαινόμενα, όπως η μεταβλητότητα της λαμπρότητας των αστέρων, η γένεση και ο θάνατος των αστέρων, ο εντεκαετής κύκλος μεταβολής των ηλιακών κηλίδων, οι σχετικιστικές ροές ύλης από τους συμπαγείς αστέρες, η ραδιοφωνική εκπομπή από τους γαλαξίες, αποτελούν ένα μικρό δείγμα από τα θέματα που ερμηνεύονται με βάση την ρευστομηχανική και την μαγνητοϋδροδυναμική.

*Με τι ασχολείται η αστροφυσική;*

Στις σημειώσεις αυτές θα μελετήσουμε επιλεκτικά μερικά θέματα που ενδιαφέρουν την αστροφυσική. Θα ασχοληθούμε με τα πρότυπα των αστέρων, την δημιουργία τους, τους αστρικούς ανέμους και τις σχετικιστικές ροές και τους δίσκους προσαύξησης γύρω από μια μελανή οπή ή έναν αστέρα νετρονίων.

Τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσουμε θα προσπαθήσουμε να είναι όσο το δυνατόν απλοποιημένα, ενώ οι εξισώσεις θα προσαρμοστούν στο αστροφυσικό αντικείμενο που θα αναλύουμε κάθε φορά.

Ο αστροφυσικός προτείνει και αναπτύσσει πρότυπα για να προσημειώσει τις αστρονομικές παρατηρήσεις. Για παράδειγμα προτείνει και επεξεργάζεται το πρότυπα του περιστρεφόμενου μαγνητικού διπόλου για να ερμηνεύσει την περιοδική εκπομπή ραδιοφωνικής ακτινοβολίας από τους πάλσαρς, μελετά το τρόπο δημιουργίας αστέρων από τα μεσοαστικά νέφη ή το θάνατο ενός αστέρα όταν τελειώσουν τα πυρηνικά του καύσιμα ή την εξέλιξη ενός συστήματος δύο αστέρων κλπ.

*Ποιά είναι η δουλειά του αστροφυσικού;*

Στους πίνακες που ακολουθούν παραθέτουμε μερικές χαρακτηριστικές σταθερές.

Πίνακας 1.1: Μερικές τυπικές τιμές χρήσιμων παραμέτρων (ταχύτητα του ήχου, πυκνότητα, συχνότητα συγκρούσεων).

	Αέρας	Ήλιος (επιφάνεια)	Ήλιος (κέντρο)	Γαλαξίας
$c_s^{ad} [ms^{-1}]$	344	$10^4$	$3 \times 10^5$	$10^{4...5}$
$\rho [kgm^{-3}]$	1.21	$10^{-3}$	$10^{+5}$	$10^{-21}$
$\nu [m^2s^{-1}]$	$1.5 \times 10^{-5}$	$10^{+2}$	$10^{-2}$	$10^{17}$

Πίνακας 1.2: Μερικές χρήσιμες μονάδες που χρησιμοποιούνται στην αστροφυσική και οι μετατροπές τους στο σύστημα μονάδων SI.

$1 Mm$	$=$	$10^6 m$
$1 AU$	$=$	$1.5 \times 10^{11} m$
$1 pc$	$=$	$3.1 \times 10^{16} m$
$1 M_\odot$	$=$	$2.0 \times 10^{30} kg$
$1 yr$	$=$	$3.2 \times 10^7 s$
$1 Myr$	$=$	$10^6 yr$

Μερικές μονάδες χρησιμοποιούνται μόνο σε σχέση με συγκεκριμένα αστρονομικά σώματα. Για παράδειγμα χρησιμοποιούμε την μονάδα  $1AU$  (τη μέση απόσταση Γης-Ήλιου) για τη μέτρηση αποστάσεων μέσα στο Ηλιακό σύστημα. Για την μέτρηση αποστάσεων μέσα στο Γαλαξία μας χρησιμοποιούμε το kiloparsec (kpc). Για παράδειγμα η απόσταση του Ήλιου από το κέντρο του γαλαξία μας είναι  $10Kpc$ , ενώ, για τη μέτρηση αποστάσεων μεταξύ γαλαξιών, την απόσταση που διανύει το φως σε ένα χρόνο (light year). Για τη μέτρηση του χρόνου χρησιμοποιούμε το έτος ( $1yr = 3.16 \times 10^7 s$ ) και για τη μέτρηση της μάζας τη μάζα του Ηλίου ( $M_\odot = 2 \times 10^{30} kg$ ).

Είναι πολύ διαδεδομένο στην αστρονομία, αλλά και γενικά στην επιστημονική κοινότητα να χρησιμοποιούνται μερικές συντομογραφίες για να επιταχύνουμε την επικοινωνία. Μερικές από αυτές παρατίθενται στη συνέχεια

AGN	Ενεργοί Γαλαξιακοί πυρήνες
SN	Υπερκαινοφανείς
BH	Μελανές Οπές
WD	Λευκός Νάνος (συμπαγείς, εκφυλισμένοι αστέρες)
CV	Cataclysmic Variable (ασταθείς δίσκοι γύρω από WD )



Πίνακας 1.3: Ακτίνες μερικών αστρονομικών αντικειμένων.

Γη	6 $Mm$
Δίας	70 $Mm$
Ήλιος	700 $Mm$
Ασταθής Δίσκος (CV)	10 – 1000 $Mm$
Γαλαξίας	15 $kpc$

Πίνακας 1.4: Χρήσιμες σταθερές.

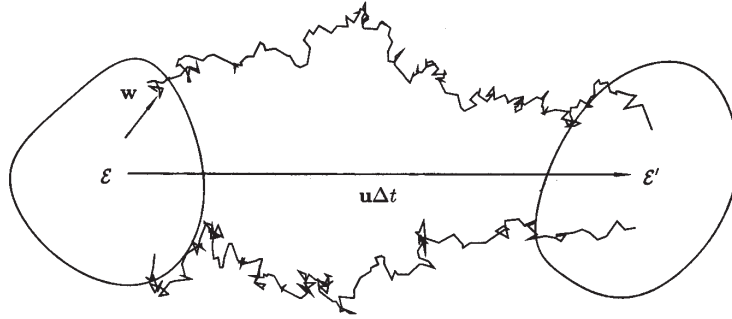
Σταθερά	Σύμβολο	τιμή	μονάδες
Σταθερά του Νεύτωνα	$G$	$6.673 \times 10^{-11}$	$m^3 kg^{-1} s^{-2}$
Σταθερά Stefan-Boltzmann	$k_B$	$5.67 \times 10^{-8}$	$kg s^{-3} K^{-4}$
Παγκόσμια σταθερά των αερίων	$\mathcal{R}$	8,314	$m^2 s^{-2} K^{-1}$
Ταχύτητα του φωτός	$c$	$3 \times 10^8$	$m s^{-1}$
Σταθερά επαγωγής	$\mu_0$	$4\pi \times 10^{-7}$	$V s A^{-1} m^{-1}$

## 1.1 Υδροδυναμική

Η ρευστομηχανική περιγράφει τη συλλογική κίνηση ενός μεγάλου αριθμού σωματιδίων. Η ροή του νερού σε ένα ποτάμι, τα επιφανειακά κύματα στη θάλασσα, η κίνηση των ατμοσφαιρικών ρευμάτων και ο άνεμος αποτελούν μόνο μερικά από τα αντικείμενα έρευνας της ρευστομηχανικής. Η ρευστομηχανική αποτελεί ειδικό ερευνητικό κλάδο για τους φυσικούς και τους μηχανικούς.

Στην αστροφυσική δεν συναντάμε μόνο ουδέτερα σωματίδια (άτομα, μόρια), αλλά και ιονισμένα αέρια (πλάσμα) και οι δυνάμεις που καθορίζουν την κίνηση τους δεν είναι μόνο οι μεταξύ τους συγκρούσεις αλλά και η δύναμη της βαρύτητας και η ηλεκτρομαγνητική δύναμη (γνωστή ως δύναμη Lorentz).

Μια ενδιαφέρουσα **ερώτηση** είναι: Πότε μπορούμε να μελετήσουμε μια συλλογή από διακριτά σωματίδια (ένα αέριο ή πλάσμα) ως συνεχές μέσο (ρευστό); Η **απάντηση** είναι: όταν η μέση *ελεύθερη διαδρομή*  $\ell$  των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερη από τη χαρακτηριστική διάσταση ( $L$ ) του συστήματος που μελετάμε ( $\ell \ll L$ ). Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να ορίσουμε ένα *στοιχείο*  $\mathcal{E}$  του ρευστού (ένα στοιχειώδη όγκο  $\Delta V \ll L^3$ ) που θα περιγράφει την κίνηση του ρευστού. Η ταχύτητα ενός σωματιδίου  $\vec{v} = \vec{w} + \vec{u}$ , όπου  $\vec{u}$  είναι



Σχήμα 1.1: Οι συχνές συγκρούσεις αναγκάζουν το σωματίδιο να εκτελεί τυχαίο βηματισμό γύρω από τη τροχιά του στοιχείου  $\mathcal{E}$  του ρευστού

η ταχύτητα του στοιχείου  $\mathcal{E}$  και  $\vec{w}$  τυχαία απόκλιση του κάθε σωματιδίου από τη μέση ταχύτητα  $\vec{u}(\vec{x}, t)$ . (βλέπε Σχ. (1.1) )

Η μέση ελεύθερη διαδρομή  $\ell$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\ell = (n\sigma)^{-1}$$

όπου  $n$  είναι η αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων και  $\sigma$  η ενεργός διατομή για τις ελαστικές συγκρούσεις. Το  $\sigma \sim 10^{-15} \text{cm}^2$  και για το αέριο στο δωμάτιο μας η αριθμητική πυκνότητα είναι  $n \sim 10^{19} \text{cm}^{-3}$ , άρα  $\ell \sim 10^{-4} \text{cm}$ . Η πυκνότητα για τα μεσοαστρικά νέφη είναι  $n \sim 10 \text{cm}^{-3}$  και η μέση ελεύθερη διαδρομή  $\ell \sim 10^{14} \text{cm}$  (περίπου ίση με την απόσταση Ηλίου-Δια), αλλά οι διαστάσεις των μεσοαστρικών νεφών ξεπερνούν τα  $10^{19} \text{cm}$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η μηχανική των ρευστών αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση για πολλά αστροφυσικά αντικείμενα και αξίζει να κατανοήσουμε μερικά βασικά της συμπεράσματα πριν μελετήσουμε συγκεκριμένα αστροφυσικά αντικείμενα.

## 1.2 Υδροδυναμική

### 1.2.1 Εισαγωγικές έννοιες

Η υδροδυναμική αποτελεί ισχυρό εργαλείο στα χέρια του αστροφυσικού για την ανάλυση πολλών αστρονομικών φαινομένων. Η κατανόηση της δυναμικής κατάστασης ενός ρευστού απαιτεί την ταυτόχρονη γνώση της χωροχρονικής εξέλιξης των μακροσκοπικών παραμέτρων του (της πυκνότητας  $\rho(\vec{x}, t)$ , της

πίεσης  $P(\vec{x}, t)$ , της θερμοκρασίας  $T(\vec{x}, t)$ , και της ταχύτητας  $\vec{u}(\vec{x}, t)$  του ρευστού.

Υπάρχουν δύο συστήματα συντεταγμένων για την περιγραφή της εξέλιξης του ρευστού. Οι συντεταγμένες Euler αναφέρονται σε έναν ακίνητο παρατηρητή σε συγκεκριμένη θέση ( $\vec{x} = \vec{x}_0$ ) μέσα στο ρευστό, ενώ αντίθετα οι συντεταγμένες Lagrange (που είναι και οι περισσότερες εύχρηστες) αναφέρονται σε κινούμενο με το ρευστό παρατηρητή. Άρα η αρχή συντεταγμένων του συστήματος κινείται στο χώρο ( $\vec{x}(t)$ ). Η ολική μεταβολή μίας από τις μακροσκοπικές ποσότητες που αναφέραμε ήδη θα είναι για το σύστημα συντεταγμένων του Euler

$$\frac{dQ}{dt} = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{\vec{x}_0} \quad (1.1)$$

ενώ στο σύστημα συντεταγμένων του Lagrange

$$\frac{DQ(\vec{x}(t), t)}{Dt} = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_{\vec{x}_0} + \vec{u} \cdot \nabla Q(\vec{x}(t), t). \quad (1.2)$$

Η παράγωγος αυτή είναι γνωστή και ως μεταφορική παράγωγος (convective derivative).

Πρόβλημα 2.1: Δείξτε ότι η χρονική μεταβολή του στοιχειώδους όγκου  $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$  όταν κινείται με το υγρό είναι

$$\frac{D(\Delta V)}{Dt} = (\nabla \cdot \vec{u}) \Delta V. \quad (1.3)$$

Αν το υγρό είναι ασυμπίεστο ( $\Delta V = \text{σταθ.}$ ), τότε η μεταβολή του όγκου είναι μηδέν και

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0.$$

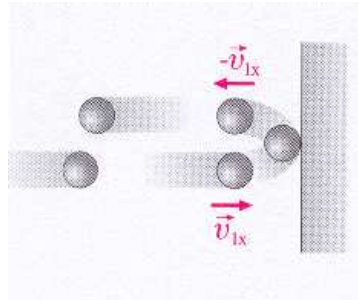
Πρόβλημα 2.2: Δείξτε επίσης ότι αν το ρευστό κινείται κατά μήκος μια ευθείας ( $Ox$ ) θα ισχύει η σχέση

$$\nabla \times \vec{u} = 0.$$

και θα ονομάζεται αστρόβιλο.

### 1.2.2 Βασικές έννοιες από την Κινητική Θεωρία και τη Θερμοδυναμική

Η πίεση ενός ρευστού ορίζεται ως το μέτρο της ορμής που μεταφέρουν τα σωματίδια όταν προσπίπτουν σε μια τυχαία επιφάνεια μέσα στο ρευστό.



Σχήμα 1.2: Σωματίδια μάζας  $m$  συγκρούονται συνεχώς με τα τοιχώματα μεταφέροντας ορμή  $2mv_x$ .

Ένας απλός τρόπος να υπολογίσουμε την πίεση, διατηρώντας ταυτόχρονα και τη φυσική της σημασία, θα ήταν να υπολογίσουμε την ορμή που μεταφέρεται στην επιφάνεια ( $yz$ ) ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου από τα σωματίδια που κινούνται κατά μήκος του άξονα  $x$ . Η αλλαγή της ορμής ενός σωματιδίου μάζας  $m$  θα είναι  $2p_x$ , ενώ η ορμή που μεταφέρεται ανά μονάδα χρόνου θα είναι  $(2p_x n_0 v_x)$ , όπου  $n$  είναι η αριθμητική πυκνότητα των σωματιδίων και  $v_x$  ή μέση ταχύτητα του σωματιδίου (βλέπε Σχ. (1.2)). Η διεύθυνση  $x$  είναι μία από τις 6 δυνατές διευθύνσεις που μπορούν να κινηθούν τα σωματίδια, άρα μπορούμε να γενικεύσουμε το αποτέλεσμα μας αν διαιρέσουμε το  $(2p_x n_0 v_x)$  με το 6,

$$P = \frac{2nmv_x^2}{6} = \frac{nmv_x^2}{3}.$$

Αν ορίσουμε την θερμοκρασία ως μέτρο της μέσης κινητικής ενέργειας των σωματιδίων τότε

$$\frac{3}{2}k_B T = \frac{mv^2}{2}$$

άρα

$$PV = Nk_B T, \tag{1.4}$$

όπου  $N = nV$  είναι ο συνολικός αριθμός των σωματιδίων μέσα στον όγκο  $V$  και  $k_B$  η σταθερά του Boltzmann. Η εξίσωση αυτή μας είναι γνωστή ως η *καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων*. Η καταστατική εξίσωση μπορεί επίσης να συνδεθεί με την πυκνότητα  $\rho = M/V = Nm/V$

Η καταστατική  
εξίσωση αερίων

$$P = \frac{\rho}{m} k_B T \quad (1.5)$$

αν το αέριο αποτελείται από ένα μίγμα αερίων (Υδρογόνου, Ηλίου και 'μέταλλα') ο τύπος αυτός γενικεύεται

$$P = \frac{\rho}{\mu m} k_B T = \frac{\mathcal{R}}{\mu} \rho T \quad (1.6)$$

όπου  $\mu$  είναι το μέσο μοριακό βάρος και  $\mathcal{R}$  η παγκόσμια σταθερά των αερίων. *Μέσο μοριακό βάρος*  
 Το μέσο μοριακό βάρος ορίζεται ως η συνολική μάζα (σε ατομικές μονάδες) των σωματιδίων του μείγματος στη μονάδα του όγκου, διαιρεμένη με την αριθμητική πυκνότητα  $n$ . Αν το αέριο αποτελείται από ένα στοιχείο και είναι πλήρως ιονισμένο (πλάσμα) το μοριακό βάρος ορίζεται από τη σχέση

$$\mu = \frac{A}{Z + 1}$$

όπου  $A$  είναι το ατομικό βάρος και  $Z$  ο ατομικός αριθμός.

Πρόβλημα 2.3: Αν ένα γραμμάριο ενός μείγματος ιονισμένου αερίου που αποτελείται από  $X$  γραμμάρια υδρογόνου,  $Y$  γραμμάρια ηλίου και  $Z$  γραμμάρια από 'μέταλλα' ( $A_m = 2Z_m, Z_m \gg 1$ ) τότε δείξτε ότι το μέσο μοριακό βάρος υπολογίζεται από τη σχέση

$$\mu = \frac{1}{2X + \frac{3Y}{4} + \frac{Z}{2}}$$

### Στοιχεία στατιστικής μηχανικής

Στην καταστατική εξίσωση μπορούμε να φτάσουμε ακολουθώντας έναν διαφορετικό δρόμο. Ας θεωρήσουμε ότι ένα ιδανικό αέριο σωματιδίων μάζας  $m$  είναι αναγκασμένο να κινείται σε μία διάσταση. Ο Maxwell, κάνοντας χρήση της συνάρτησης κατανομής του Boltzmann υπολόγισε ότι η πιθανότητα να έχει ένα σωματίδιο του αερίου ταχύτητα στο διάστημα  $v_x$  και  $v_x + dv_x$  όταν βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία (βλέπε [; , ΒΕΡ] για τον ακριβή ορισμό της θερμοδυναμικής ισορροπίας) είναι (το σύστημα είναι χωρικά ομογενές και άπειρο)

$$f_M(v_x) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp \left[ \frac{-mv_x^2}{2k_B T} \right]. \quad (1.7)$$

*Η συναρτηση  
κατανομής ταχυτήτων  
Maxwell-Boltzmann*

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται *συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων*. Ολοκληρώνοντας τη συνάρτηση  $f_M$  για όλες της πιθανές ταχύτητες πρέπει να βρίσκουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_M(v_x) dv_x = 1.$$

Η πιθανότητα να πάρει το ένα σωματίδιο ταχύτητα μεταξύ του μηδενός και του απείρου είναι βεβαιότητα. Η πίεση με τη βοήθεια της συνάρτησης κατανομής υπολογίζεται από τη σχέση

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} 2nv_x^2 f_M(v_x) dv_x = nk_B T = \frac{N}{V} k_B T. \quad (1.8)$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα στις τρεις διαστάσεις χρησιμοποιώντας την συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων

$$f_M(v) = \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} e^{-\left( \frac{mv^2}{2k_B T} \right)}. \quad (1.9)$$

Η μέση τετραγωνική ταχύτητα  $\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$  υπολογίζεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle &= \int v^2 f_M(v) d^3v = 4\pi \int_0^{\infty} v^2 f_M(v^2) dv \\ &= \frac{3k_B T}{m} \end{aligned}$$

άρα η μέση κινητική ενέργεια (εσωτερική ενέργεια) του αερίου είναι

$$U = \frac{1}{2} mn \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} nk_B T.$$

Η *ενεργός ταχύτητα* του αερίου ορίζεται από τη σχέση

$$V_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \left( \frac{3k_B T}{m} \right)^{1/2}.$$

*Θερμική ταχύτητα*

Η πιθανότερη ταχύτητα των σωματιδίων είναι

$$V_m = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (1.10)$$

(η ταχύτητα  $V_m$  είναι γνωστή και ως θερμική ταχύτητα του αερίου) ενώ η μέση ταχύτητα ορίζεται από τη σχέση

$$\langle v \rangle = 4\pi \int_0^\infty v f_m(v) (v^2 dv) = \left( \frac{8k_B T}{\pi m} \right)^{1/2}.$$

### Στοιχεία Θερμοδυναμικής

Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: *‘Η θερμότητα είναι μια μορφή ενέργειας, και η ενέργεια διατηρείται.’* Αν σε ένα αέριο προσθέσουμε θερμότητα  $dQ$  τότε, στη γενικότερη περίπτωση, θα αυξηθεί ταυτόχρονα και η εσωτερική του ενέργεια κατά  $dU$  και θα μεταβληθεί ο όγκος του κατά  $dV$  καταναλώνοντας ενέργεια  $dW = -PdV$ . Δείξαμε ήδη ότι το  $U = \frac{3}{2}Nk_B T$  άρα  $dU = (3/2)Nk_B dT$ .

Το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα με βάση τα παραπάνω μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

*Το πρώτο  
θερμοδυναμικό αξίωμα*

$$dU = dQ + dW = dQ - PdV. \quad (1.11)$$

Ορίζουμε ως *ειδική θερμότητα υπό σταθερό όγκο* ενός ιδανικού του αερίου την ποσότητα

$$C_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2}Nk_B.$$

και την *ειδική θερμότητα υπό σταθερή πίεση* τη ποσότητα

$$C_P = \left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P.$$

Η εξίσωση (1.11) μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial T} \right)_P = C_V + P \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = C_V + Nk_B \quad (1.12)$$

ή

$$C_P = C_V + Nk_B.$$

Η θερμότητα  $dQ$  συνδέεται με την *εντροπία*  $S$ , με τη σχέση  $dQ = TdS$ .

Θα ονομάζουμε μια μεταβολή **αδιαβατική** όταν το αέριο δεν ανταλλάσσει *Αδιαβατική μεταβολή*

θερμότητα με το περιβάλλον ( $dS = dQ = 0$ ).

Με βάση όλα τα παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε την σχέση πίεσης και πυκνότητας για μια αδιαβατική μεταβολή του ιδανικού αερίου όταν βρίσκεται στην κατάσταση της θερμοδυναμικής ισορροπίας. Συνδυάζοντας το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα και την καταστατική εξίσωση έχουμε

$$C_V dT = -PdV = Nk_B T \frac{dV}{V}. \quad (1.13)$$

Ολοκληρώνοντας την Εξ. (1.13) έχουμε  $\ln(T^{C_V} V^{NK}) = \text{σταθερό}$  ή

$$TV^{\frac{Nk_B}{C_V}} = TV^{\gamma-1} = \text{σταθ.} \quad (1.14)$$

όπου  $\gamma = \frac{C_V + Nk_B}{C_V} = \frac{C_P}{C_V} = 5/3$ . Κάνοντας χρήση της καταστατικής εξίσωσης για μια ακόμα φορά η Εξ. (2.13) μετατρέπεται στην σχέση

$$P = k\rho^\gamma. \quad (1.15)$$

Αν η μεταβολή είναι ισόθερμη το  $\gamma = 1$ , ενώ για τα πολυτροπικά αέρια η τιμή του  $\gamma$  πρέπει να ορισθεί προσεκτικά.

Μία ακόμα χρήσιμη παράμετρος που θα εμφανίζεται συχνά στη συνέχεια είναι η ταχύτητα του ήχου

$$c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}. \quad (1.16)$$

Αν η μεταβολή του ρευστού είναι αδιαβατική τότε  $c_s^2 = \gamma P/\rho$ , ενώ, αν χρησιμοποιήσουμε την καταστατική εξίσωση,  $c_s^2 = \mathcal{R}T/\mu = P/\rho$ .

Στη συνέχεια προς χάριν της απλότητας θα μελετήσουμε μοντέλα από μονατομικά αέρια κοντά στην θερμοδυναμική ισορροπία και οι μεταβολές τους θα υποθέσουμε ότι είναι 'αδιαβατικές'.

### 1.3 Βασικές εξισώσεις της υδροδυναμικής

Από την καθημερινή μας εμπειρία γνωρίζουμε ότι, αν ένα ρευστό είναι χωρικά ανομοιογενές, θα κινηθεί προς την κατεύθυνση της χαμηλής πίεσης για να εξομαλύνει την ασυνέχεια, δηλαδή, η απλούστερη εξίσωση κίνησης του ρευστού έχει την μορφή

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P.$$



Η παρουσία μιας εξωτερικής δύναμης  $\vec{F}$  (για παράδειγμα της βαρύτητας) θα αναγκάσει μαζί με την κλίση της πίεσης το ρευστό να κινηθεί άρα η εξίσωση κίνησης γενικεύεται

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P + \vec{F} \quad (1.17)$$

και μας είναι γνωστή ως εξίσωση του Euler. Οι δυνάμεις που συναντάμε συνήθως στην αστροφυσική παρουσιάζονται στον πίνακα 1.5,

Πίνακας 1.5: Πίνακας με τις γνωστότερες δυνάμεις επηρεάζουν την κίνηση του στοιχειώδους όγκου  $\Delta V$  του ρευστού όταν αποτελείται από μόρια μάζας  $m$ , ηλεκτρικού φορτίου  $q$ , ακτίνας  $r$ , όγκου  $V$ , παρουσία της βαρύτητας  $\vec{g}$ , μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$ , και περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\Omega}$ , παρουσία δυναμικής τριβής  $\mu$ , και πυκνότητας  $\rho_K$ .

βαρύτητα	$\vec{F}_g$	=	$m\vec{g}$
δύναμη Lorentz	$\vec{F}_m$	=	$q\vec{u} \times \vec{B}/c$
Coriolis	$F_C$	=	$-2m\vec{\Omega} \times \vec{u}$
κεντρομόλος	$F_{cf}$	=	$-m\Omega^2 r$
αντίσταση τριβής	$\vec{F}_D$	=	$-6\pi\mu\rho_K\vec{u}$
άνωση	$\vec{F}_b$	=	$-\Delta\rho V\vec{g}$

Στη συνέχεια θα συζητήσουμε τη δύναμη της βαρύτητας και θα αναφέρουμε μερικές απλές εφαρμογές των δυνάμεων της δυναμικής τριβής και της άνωσης. Για τη δύναμη Lorentz, την φυγόκεντρο και την Coriolis θα μιλήσουμε στις παραγράφους που ακολουθούν.

Η δύναμη της βαρύτητας για ένα σφαιρικά συμμετρικό ρευστό πυκνότητας  $\rho(r)$  θα έχει τη μορφή

$$\vec{F} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}\hat{e}_r = -\rho\nabla U_g \quad (1.18)$$

όπου  $U_g$  είναι το δυναμικό της βαρύτητας,

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

και  $r$  η απόσταση από το την αρχή του συστήματος συντεταγμένων.

### 1.3.1 Νόμοι διατήρησης

- **Διατήρηση μάζας:** Η μάζα  $\Delta m = \rho \Delta V$  που περικλείει ο στοιχειώδης όγκος  $\Delta V$  παραμένει σταθερά κατά τη κίνηση του ρευστού, αν το ρευστό είναι μη σχετικιστικό (η ταχύτητα του ρευστού είναι πολύ μικρότερη από τη ταχύτητα του φωτός),

$$\frac{D(\rho \Delta V)}{Dt} = \rho \frac{D(\Delta V)}{Dt} + (\Delta V) \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

ή κάνοντας χρήση της Εξ. (1.3) έχουμε

$$(\Delta V) \frac{D\rho}{Dt} + (\Delta V) \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

και τέλος

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.19)$$

Η Εξ. (1.19) είναι γνωστή ως *εξίσωση συνέχειας*.

- **Διατήρηση ενέργειας:** Τέλος θα δείξουμε ότι η ολική ενέργεια της στοιχειώδους μάζας  $dm = \rho \Delta V$  διατηρείται. Πολλαπλασιάζουμε εσωτερικώς την Εξ. (1.17) με το  $(\Delta V \vec{u})$  και έχουμε

$$(\Delta V) \rho \vec{u} \frac{D\vec{u}}{Dt} = (\vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla P) \Delta V$$

ή

$$\frac{D}{Dt} \left( \frac{1}{2} \rho u^2 \Delta V \right) = (\vec{F} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \nabla P) \Delta V.$$

Επειδή

$$\begin{aligned} \frac{D(P \Delta V)}{Dt} &= (\Delta V) \frac{DP}{Dt} + P \frac{D(\Delta V)}{Dt} \\ &= (\Delta V) \left( \frac{\partial P}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla P \right) + P (\nabla \cdot \vec{u}) \Delta V \end{aligned}$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω θα καταλήξουμε στη σχέση

$$\frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2} \rho u^2 + P \right] = \left( \vec{F} \cdot \vec{u} + \frac{\partial P}{\partial t} + P \nabla \cdot \vec{u} \right). \quad (1.20)$$

Εξίσωση  
συνέχειας

Αν το υγρό είναι ασυμπίεστο και το πεδίο δυνάμεων συντηρητικό  $\vec{F} = -\rho\nabla U_g$  τότε

$$\frac{D}{Dt} \left[ \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{P}{\rho} + \rho U_g \right] = \left( \frac{\partial P}{\partial t} - \rho \frac{\partial U_g}{\partial t} \right). \quad (1.21)$$

Η πίεση και το δυναμικό της βαρύτητας σε πολλές εφαρμογές δεν εξαρτώνται άμεσα από το χρόνο, τότε η ποσότητα

$$\left( \frac{1}{2}u^2 + \frac{P}{\rho} + U_g \right) \rho = \text{σταθ.} \quad (1.22)$$

και είναι ο γνωστός νόμος του Bernoulli.

### 1.3.2 Άνωση και Τριβή: Εφαρμογές

#### Η άνωση και το παράδειγμα του θερμού μπαλονιού

Η κίνηση των αερίων στην ατμόσφαιρα της Γης πολλές φορές οφείλεται από την άνωση. Ένα απλό και ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η κίνηση ενός μπαλονιού γεμάτο με θερμό αέρα. Η άνωση οφείλεται στη διαφορά της πυκνότητας μέσα και έξω από το μπαλόνι. Η άνωση είναι

$$F_b = \Delta\rho g$$

όπου  $g \sim 10m/s^2$  είναι η σταθερά της βαρύτητας και  $\Delta\rho = \rho_i - \rho_e$  είναι η διαφορά της πυκνότητας μέσα και έξω από το μπαλόνι. Αν υποθέσουμε ότι η πίεση είναι περίπου σταθερή μέσα και έξω από το μπαλόνι τότε

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = -\frac{\Delta T}{T}.$$

Αν η διαφορά της θερμοκρασίας είναι  $60^\circ C$  και η εξωτερική θερμοκρασία  $300K$  τότε  $\Delta\rho/\rho = 0.2$ . Η πυκνότητα του αέρα είναι περίπου  $\rho \sim 1kg/m^3$ . Αν υποθέσουμε ότι το μπαλόνι είναι σφαιρικό, τότε η άνωσης θα είναι  $\frac{4\pi}{3}R^3\Delta\rho g$  ενώ το βάρος του  $Mg$  άρα για να σηκώσει η δύναμη της άνωσης ένα μπαλόνι βάρους  $500kg$  θα πρέπει

$$\frac{4\pi}{3}R^3\Delta\rho = M$$

ή ακτίνα του μπαλονιού να είναι

$$R = \left( \frac{3M}{4\pi\Delta\rho} \right)^{1/3} = 9m.$$

### Δυναμική τριβή και η πτώση της ηφαιστειακής λάβας στην επιφάνεια της γης μετά από την έκρηξη

Θα μελετήσουμε το χρόνο που χρειάζεται ένας κόκκος άμμου να πέσει στο έδαφος από ένα ύψος  $100\text{Km}$ . Το πρόβλημα αυτό προκύπτει, όταν ένα ηφαίστειο εκτοξεύσει σε ανάλογο ύψος τη λάβα (η λάβα έχει υψηλή θερμοκρασία και η άνωση θα την σηκώσει αρχικά σε μεγάλα ύψη) και στη συνέχεια η λάβα αρχίζει σταδιακά να πέφτει στην επιφάνεια της Γης από την έλξη της βαρύτητας. Έχει παρατηρηθεί ότι 10 χρόνια μετά την έκρηξη του ηφαιστίου Krakatau, σύννεφα σκόνης παρατηρούνται στο ηλιοθασίεμα. Ο λόγος που καθυστερεί να πέσει η λάβα τόσο πολύ είναι η τριβή που υφίστανται οι κόκκοι σκόνης. Αν δεν υπήρχε η τριβή ο χρόνος πτώσης της σκόνης θα ήταν  $t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 140\text{s}$ . Η παρουσία της τριβής θα αλλάξει σημαντικά το χρόνο πτώσης. Η εξίσωση κίνησης του κόκκου είναι

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - F_D.$$

αν η δύναμη της τριβής προσεγγιστεί από τη σχέση  $F_D = 6\pi\mu\rho_K v$ , όπου  $\mu = 2 \times 10^{-5} \text{kgm}^{-1}\text{s}^{-1}$  είναι η δυναμική τριβή για τον αέρα,  $\rho_K$  είναι η ακτίνα των κόκκων,  $m$  η μάζα τους και  $v$  η ταχύτητα τους. Ο κόκκος στην αρχή θα επιταχυνθεί και σιγά-σιγά θα κινηθεί με σταθερή ταχύτητα άρα

$$0 = -\frac{4\pi}{3}r_K^3\rho_p g - 6\pi\mu\rho_K v$$

όπου  $\rho_p = 4 \times 10^3 \text{Kgm}^{-3}$  είναι η πυκνότητα του υλικού από το οποίο αποτελείται η λάβα. Η ακτίνα του κόκκου  $\rho_K = 1\mu\text{m}$  και η ταχύτητα

$$v = \frac{2\rho_K^2\rho_p g}{9\mu} \approx 4 \times 10^{-4} \text{m/s}.$$

Υπολογίζουμε ότι ο χρόνος για να πέσει στην επιφάνεια της γης ο κόκκος είναι  $t = H/v = 10$  χρόνια.

### 1.3.3 Περιστρεφόμενα συστήματα συντεταγμένων

Σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων ισχύει η Αρχή της σχετικότητας: **‘Οι εξισώσεις κίνησης ενός μηχανικού συστήματος παραμένουν αναλλοίωτες σε όλα τα αδρανειακά συστήματα συντεταγμένων’**. Στην αστροφυσική συναντάμε πολλές φορές συστήματα που περιστρέφονται γύρω από έναν άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Στα συστήματα αυτά φυσικά δεν ισχύει η αρχή της σχετικότητας που

μόλις αναφέραμε. Ο μετασχηματισμός από το μη περιστρεφόμενο στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων δημιουργεί νέους όρους στην εξίσωση κίνησης τους οποίους θα υπολογίσουμε στη συνέχεια.

Αν υποθέσουμε ότι ο άξονας περιστροφής είναι ο  $Oz$  τότε θα ορίσουμε ως  $(x, y, z)$  τις συντεταγμένες του υλικού σημείου στο περιστρεφόμενο σύστημα και  $(x', y', z')$  στο ακίνητο. Ο μετασχηματισμός από το ακίνητο στο περιστρεφόμενο σύστημα γράφεται

$$\begin{aligned}x &= x' \cos \alpha + y' \sin \alpha \\y &= -x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \\z &= z'\end{aligned}$$

όπου  $\alpha$  είναι η γωνία περιστροφής. Παραγωγίζοντας αυτές τις παραπάνω εξισώσεις και υποθέτοντας ότι  $\dot{\alpha} = \Omega$  ( $\vec{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ ) και ότι  $\dot{x}', \dot{y}', \dot{z}'$  είναι οι προβολές της ταχύτητας του σωματιδίου στο αδρανειακό σύστημα μετασχηματιζόμενες στο περιστρεφόμενο θα τις ονομάσουμε  $\dot{x}'_{rot}, \dot{y}'_{rot}, \dot{z}'_{rot}$

$$\begin{aligned}\dot{x}'_{rot} &= \dot{x} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})_x \\ \dot{y}'_{rot} &= \dot{y} + (\vec{\Omega} \times \vec{r})_y \\ \dot{z}'_{rot} &= \dot{z}.\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί εύκολα να γραφεί πάρει τη μορφή

$$\dot{\vec{r}}'_{rot} = \dot{\vec{r}} + \vec{\Omega} \times \vec{r}.$$

Είναι γνωστό ότι το τετράγωνο της ταχύτητας παραμένει αμετάβλητο και ανεξάρτητο από το σύστημα συντεταγμένων

$$\begin{aligned}(\dot{r}'_{rot})^2 &= (\dot{x}'_{rot})^2 + (\dot{y}'_{rot})^2 + (\dot{z}'_{rot})^2 \\ &= (\dot{x}')^2 + (\dot{y}')^2 + (\dot{z}')^2 = (\dot{r}')^2.\end{aligned}$$

Η συνάρτηση Lagrange στο νέο σύστημα είναι

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}')^2 - U_g = \frac{m}{2}(\dot{r}'_{rot})^2 - U_g = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \vec{\Omega} \times \vec{r})^2 - U_g,$$

αναλύοντας την σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε

$$L = \frac{m}{2}[(\dot{x} - \Omega y)^2 + (\dot{y} - \Omega x)^2 + \dot{z}^2] - U_g \quad (1.23)$$

όπου  $U_g$  είναι το δυναμικό της βαρύτητας. Οι εξισώσεις κίνησης του σωματιδίου στο περιστρεφόμενο σύστημα υπολογίζονται με τη βοήθεια της συνάρτησης Langrange και γράφονται

$$m(\ddot{x} - \Omega\dot{y}) - m\Omega(\dot{y} + \Omega x) - m\dot{\Omega}y + \frac{\partial U_g}{\partial x} = 0 \quad (1.24)$$

$$m(\ddot{y} + \Omega\dot{x}) + m\Omega(\dot{x} - \Omega y) + m\dot{\Omega}x + \frac{\partial U_g}{\partial y} = 0 \quad (1.25)$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial U_g}{\partial z} = 0 \quad (1.26)$$

Οι Εξ.(1.24)-(1.26) ) μπορούν να παρασταθούν με τη διανυσματική εξίσωση

$$m\ddot{\vec{r}} = m\vec{r} \times \dot{\vec{\Omega}} + 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega} + m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega}) - \frac{\partial U_g}{\partial \vec{r}}. \quad (1.27)$$

Ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της Εξ. (1.27) συνδέεται με την πιθανή χρονική μεταβολή της γωνιακής συχνότητας, εμφανίζονται επίσης δύο νέες δυνάμεις, η δύναμη Coriolis ( $F_C = 2m\dot{\vec{r}} \times \vec{\Omega}$ ) και η φυγόκεντρος δύναμη ( $F_{cf} = m\vec{\Omega} \times (\vec{r} \times \vec{\Omega})$ ). Οι δυνάμεις αυτές οφείλονται στο ότι το σύστημα συντεταγμένων είναι περιστρεφόμενο άρα μη αδρανειακό. (Περισσότερα για τα μη αδρανειακά συστήματα και τις δυνάμεις που συνδέονται με αυτά μπορείτε να διαβάσετε στο βιβλίο της Μηχανικής [:]).

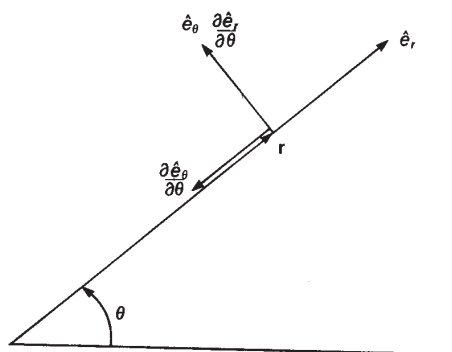
Οι εξισώσεις συνέχειας (Εξ. (1.19) ) και κίνησης του ρευστού (Εξ. (1.17) ) μπορούν να μετασχηματιστούν από το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$  σε περιστρεφόμενο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων  $(r, \theta, z)$  (βλέπε Σχ. (1.3) ).

Είναι φανερό ότι για πολλά προβλήματα οι συμμετρίες του φυσικού συστήματος είναι τέτοιες ώστε ο μετασχηματισμός αυτός να απλοποιεί σημαντικά τις παραπάνω εξισώσεις. Για παράδειγμα, για να μελετήσουμε τη δυναμική ενός σπειροειδούς γαλαξία ή ενός δίσκου προσαύξησης που σχηματίζεται γύρω από ένα υπέρπυκνο αντικείμενο (μελανή οπή ή αστέρα νετρονίων).

Αν ορίσουμε την επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma(r, \theta)$  ενός δίσκου που περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $z$  με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  και την ταχύτητα της στοιχειώδους μάζας του ρευστού  $u(r, \theta) = u_r(r, \theta)\hat{e}_r + (u_\theta(r, \theta) + r\Omega)\hat{e}_\theta$  τότε η έκφραση

$$v \cdot \nabla \sigma = u_r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + (u_\theta + r\Omega) \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta}.$$

Ο τελεστής  $\nabla$  μετασχηματίζεται στις νέες συντεταγμένες και έχει τη μορφή



Σχήμα 1.3: Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

$$\nabla = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{e}_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Υπολογίζουμε επίσης τη σχέση

$$\sigma \nabla \cdot \vec{u} = \sigma \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta + r\Omega) + \frac{u_r \sigma}{r}$$

ο τελευταίος όρος προκύπτει από την παραγωγή της διανυσματικής μονάδας  $\hat{e}_r$  ως προς  $\theta$ . δηλαδή ισχύει η σχέση ( $\partial \hat{e}_r / \partial \theta = \hat{e}_\theta$ ). Με βάση όλα τα παραπάνω η εξίσωση συνέχειας στο νέο σύστημα θα είναι

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r \sigma) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma (u_\theta + r\Omega)) = 0 \quad (1.28)$$

Όμοια μετασχηματίζουμε σε κυλινδρικές συντεταγμένες τον όρο

$$\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = u_r \frac{\partial \vec{u}}{\partial r} + \frac{u_\theta + r\Omega}{r} \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta}$$

(ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στην παραγωγή των διανυσματικών μονάδων). Οι συνιστώσες θα είναι

$$[\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]_r = u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{(u_\theta + r\Omega)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{(u_\theta + r\Omega)^2}{r}$$

και

$$[\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}]_\theta = u_r \frac{\partial((u_\theta + r\Omega))}{\partial r} + \frac{u_r(u_\theta + r\Omega)}{r} + \frac{(u_\theta + r\Omega)}{r} \frac{\partial(u_\theta + r\Omega)}{\partial \theta}$$

Οι συνιστώσες της εξίσωσης κίνησής του ρευστού στο περιστρεφόμενο σύστημα  $(r, \theta, z)$  γράφονται

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{(u_\theta + r\Omega)}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{(u_\theta + r\Omega)^2}{r} \\ = F_r - \frac{\partial P}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.29)$$

και

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial((u_\theta + r\Omega))}{\partial r} + \frac{u_r(u_\theta + r\Omega)}{r} \\ + \frac{(u_\theta + r\Omega)}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = F_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (1.30)$$

υποθένοντας ότι το  $r\Omega$  είναι ανεξάρτητο του  $\theta$ .

## 1.4 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε σε ένα κλειστό σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την εξέλιξη ρευστού παρουσία εξωτερικών δυνάμεων.

1. Εξίσωση συνέχειας (Εξ. 1.19 )

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0.$$

2. Εξίσωση κίνησης (Εξ. 1.17)

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P + \vec{F}.$$

3. Η πίεση συνδέεται με την πυκνότητα με τη σχέση (αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές είναι αδιαβατικές)

$$P = C\rho^\gamma$$

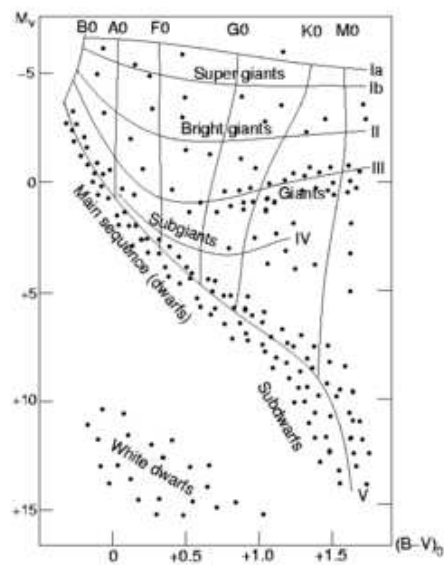
ή απλά από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων  $P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \rho$ .



## Κεφάλαιο 2

# Πρότυπα αστέρων

Οι αστέρες περνούν το μεγαλύτερο μέρος της ζωής τους στην κύρια ακολουθία (βλέπε Σχ. 2.1) σε κατάσταση ισορροπίας. Οι παρατηρήσεις μπορούν να προσδιορίσουν πολλά χαρακτηριστικά των αστέρων π.χ. την ενέργεια που ακτινοβολούν ανά μονάδα χρόνου ( $L_S$ ), την επιφανειακή θερμοκρασία, την ακτίνα και τη μάζα. Το φάσμα των αστέρων μας δίνει πληροφορίες για τη χημική σύσταση της επιφάνειάς τους.



Σχήμα 2.1: Η κύρια ακολουθία

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με τους φυσικούς νόμους που περιγράφουν την ισορροπία των αστέρων.

## 2.1 Υδροστατική ισορροπία

Οι αστέρες της κύριας ακολουθίας βρίσκονται σε κατάσταση ισορροπίας, περιστρέφονται αργά και η δυναμική τους κατάσταση περιγράφεται από την εξίσωση,

$$\boxed{\nabla P = \vec{F}_g}, \quad (2.1)$$

δηλαδή η κλίση της πίεσης είναι παντού ίση με τη δύναμη της βαρύτητας.

### 2.1.1 Θερμοκρασία και πίεση στο κέντρο του Ήλιου

**Πρόβλημα 2.1:** Αν υποθέσουμε ότι ο Ήλιος είναι σφαιρικά συμμετρικός και η πυκνότητά του στο εσωτερικό είναι σταθερή  $\rho_0 = 1.4 \text{ gr/cm}^3$  να υπολογιστεί η πίεση και η θερμοκρασία στο κέντρο του.

Ξεκινώντας από την εξίσωση της υδροδυναμικής ισορροπίας και υποθέτοντας ότι ο Ήλιος είναι σφαιρικά συμμετρικός, τότε

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_{\odot}\rho_0}{R_{\odot}^2}$$

$$dP \Big|_{P_c}^0 = -\frac{GM_{\odot}\rho_0}{R_{\odot}^2} dr \Big|_0^{R_{\odot}}$$

$$P_c = G\frac{M_{\odot}\rho_0}{R_{\odot}} = 2.7 \times 10^{15} \text{ dynes/cm}^2$$

Χρησιμοποιώντας ακριβέστερους υπολογισμούς βρίσκουμε ότι  $P_c = 1.4 \times 10^{17} \text{ dynes cm}^{-2}$ . Η διαφορά είναι σημαντική, αλλά η προσεγγιστική τιμή πλησιάζει την πραγματικότητα. Χρησιμοποιώντας την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων θα έχουμε (βλέπε εξ. 1.5)

$$P_c = \left( \frac{\rho_0 k_B}{\mu m} \right) T_c \quad (2.2)$$

και θεωρώντας ότι το αέριο είναι πλήρως ιονισμένο ( $\mu=0.62$ ) καταλήγουμε στον υπολογισμό της θερμοκρασίας

$$T_c = 1.4 \times 10^7 K.$$

### 2.1.2 Ισόθερμη ατμόσφαιρα

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας (Εξ. (2.1)» είναι η μελέτη της ισόθερμης ατμόσφαιρας των αστερών. Η δύναμη βαρύτητας κοντά στην επιφάνεια του αστέρα έχει τη μορφή  $\vec{F}_g = \rho \vec{g}$ , όπου  $\vec{g}$  είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας. Η εξ. (2.1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

αν υποθέσουμε ότι η πίεση  $P = c_s^2 \rho$  τότε

$$c_s^2 \frac{d\rho}{dz} = -g\rho$$

ή

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = -g/c_s^2$$

άρα

$$\rho(z) = \rho_0 e^{-z/H} \quad (2.3)$$

όπου  $H = c_s^2/g$ .

### 2.1.3 Σχέση μάζας-ακτίνας

Αν προσπαθήσουμε να φτιάξουμε ένα απλοϊκό μοντέλο 'αστέρα' από μια ισόθερμης και ομογενή σφαίρα, τότε η πίεση που ασκεί η δύναμη της βαρύτητας θα είναι

$$\begin{aligned} P_g = \frac{F_g}{4\pi r^2} &= - \int_0^R G \frac{(4\pi r^2 \rho_0 dr) (\frac{4}{3}\pi r^3 \rho_0)}{4\pi r^2 r^2} \\ &= -\frac{2}{3}\pi G \rho^2 R^2 = -\frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} \end{aligned}$$

ενώ η θερμική πίεση του αερίου στο εσωτερικό του αστέρα (θεωρούμε ότι αποτελείται από υδρογόνο θερμοκρασίας  $T$ ) θα δίνεται από τη σχέση

$$P = nk_B T = \frac{Mk_B T}{\frac{4}{3}\pi R^3 m_H}.$$

Αν εξισώσουμε τις δύο πιέσεις

$$\frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4} = \frac{Mk_B T}{\frac{4}{3}\pi R^3 m_H}$$

έχουμε

$$\boxed{M \sim \frac{2k_B T}{Gm_H} R} \quad (2.4)$$

και για τον Ήλιο θα είναι  $M = 2 \times 10^{33} \text{gr} \sim M_\odot$ . Παρατηρούμε ότι η μάζα συνδέεται με την ακτίνα του αστέρα όταν βρίσκεται σε ισοροπία.

#### 2.1.4 Μη ομογενή πρότυπα αστέρων

Οι πραγματικοί αστέρες αποκλίνουν αρκετά από το μοντέλο της ισόθερμης και ομογενούς σφαίρας. Η παραγωγή θερμοπυρηνικής ενέργειας στο κέντρο τους και η διάδοση ενέργειας δημιουργούν ανομοιογένειες στη πυκνότητα, την πίεση και τη θερμοκρασία στο εσωτερικό του αστέρα. Αν υποθέσουμε ότι ένα σφαιρικό κέλυφος του αστέρα έχει πάχος  $dr$ , απόσταση από το κέντρο  $r$  και πυκνότητα  $\rho(r)$ , τότε η βαρύτητα από τα εσωτερικά στρώματα θα έλκει το συγκεκριμένο κέλυφος προς το κέντρο με δύναμη

$$\frac{m(r)G}{r^2} 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

ενώ η πίεση που υποθασιάζει το σφαιρικό κέλυφος θα είναι

$$4\pi R^2 dP$$

όπου  $dP$  η διαφορά πίεσης κατά μήκος του κελύφους. Θεωρώντας ότι αυτές οι δύο δυνάμεις είναι ίσες έχουμε

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho, \quad (2.5)$$

όπου

$$m(r) = \int_0^r 4\pi (r')^2 \rho(r') dr'. \quad (2.6)$$

Αν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα μεταβάλλεται γραμμικά με την ακτίνα

$$\rho = \rho_{ce} \left( 1 - \frac{r}{R_c} \right)$$

όπου  $\rho_{ce}$  είναι η πυκνότητα στο κέντρο του αστέρα.

Από την εξ. (2.6) υπολογίζουμε

$$m(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_{ce} - \frac{\pi r^4}{R_c} \rho_{ce} \quad (2.7)$$

και η ολική μάζα του αστέρα θα είναι

$$M = m(R_c) = \frac{\pi R_c^3}{3} \rho_{ce}$$

άρα

$$m(r) = M \left[ \frac{4r^3}{R_c^3} - \frac{3r^4}{R_c^4} \right]. \quad (2.8)$$

Αν εισάγουμε το  $m(r)$  στην εξ. (2.5) και ολοκληρώσουμε έχουμε

$$P = P_{ce} - \pi G \rho_{ce}^2 \left[ \frac{2}{3} r^2 - \frac{7}{9} \frac{r^3}{R_c} + \frac{r^4}{4R_c^2} \right] \quad (2.9)$$

όπου  $P_{ce}$  είναι η πίεση στο κέντρο και επειδή  $P(R_c) = 0$  έχουμε

$$P_{ce} = \frac{5}{36} \pi G \rho_{ce}^2 R_c^2 = \frac{5M^2 G}{4\pi R_c^4}.$$

Η πίεση στο σημείο  $r$  είναι

$$P(r) = \frac{5\pi G \rho_{ce}^2 R_c^2}{36} \left[ 1 - \frac{24r^2}{5R_c^2} + \frac{28r^3}{5R_c^3} - \frac{9r^4}{5R_c^4} \right]. \quad (2.10)$$

αγνοώντας την πίεση της ακτινοβολίας που διαδίδεται στο εσωτερικό του αστέρα και θεωρώντας ότι το αέριο είναι ιδανικό ( $P(r) = nk_b T(r)$ ) υπολογίζουμε την θερμοκρασία στο σημείο  $r$

$$T(r) = \frac{\mu m_H P(r)}{k_B \rho(r)} = \frac{5\pi}{36} \frac{G \mu m_H}{k_B} \rho_{ce} R_c^2 \left[ 1 + \frac{r}{R_c} - \frac{19r^2}{5R_c^2} + \frac{9r^3}{5R_c^3} \right].$$

Για να ολοκληρωθεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν τη δομή στο εσωτερικό του αστέρα θα πρέπει να συμπληρώσετε τις εξ. (2.5) και (2.6) με τις εξισώσεις παραγωγής και διάδοσης ενέργειας (βλέπε το βιβλίο Bowers and Deeming, Vol. 1, Chapter 7 για περισσότερες πληροφορίες).

## 2.2 Ακουστικές ταλαντώσεις αστέρων

Αν διαταράξουμε ελαφρά την υδροστατική ισορροπία ενός αστέρα θα τον αναγκάσουμε να πάλλεται με συχνότητα  $\omega = c_s k$  (ακουστικές ταλαντώσεις). Χρησιμοποιώντας την εξίσωση κίνησης και υποθέτοντας ότι  $(P = P_0 + \epsilon P_1, \rho = \rho_0 + \epsilon \rho_1, u = \epsilon u_1$  και  $\nabla P_0 = \vec{F}$  θα έχουμε από την εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot u_1 = 0 \quad (2.11)$$

και από την εξίσωση κίνησης

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \nabla P_1 = 0. \quad (2.12)$$

Αν η μεταβολή είναι αδιαβατική  $P = c_s^2 \rho$

$$\nabla P_1 = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)_0 \nabla \rho_1 = c_s^2 \nabla \rho_1 \quad (2.13)$$

Συνδυάζοντας τις εξ. (2.11), (2.12) και (2.13) έχουμε

$$\frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \rho_1 = 0 \quad (2.14)$$

που είναι η γνωστή εξίσωση κύματος. Τα κύματα διαδίδονται με την ταχύτητα του ήχου  $c_s$ . Αναζητώντας λύσεις της μορφής

$$\rho_1 = \rho_{10} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

καταλήγουμε στην σχέση διασποράς

$$\boxed{\omega = c_s k} \quad (2.15)$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο αστέρας αν διαταραχθεί από ένα εξωτερικό παλμό θα αρχίσει να πάλλεται γύρω από την ισορροπία με συχνότητα  $\omega$  (ακουστικές ταλαντώσεις). Η ταχύτητα του ήχου υπολογίζεται από τη σχέση (αν η μεταβολή είναι αδιαβατική)

$$c_s^{ad} = \left( \frac{5P}{3\rho} \right)^{1/2} = \left( \frac{5k_B T}{3\mu m_H} \right)^{1/2} \quad (2.16)$$

και η αριθμητική τιμή της ταχύτητας του ήχου είναι  $c_s = 10 \left( \frac{T}{10^4 K} \right)^{1/2} \frac{Km}{s}$ .

## 2.3 Πηγές ενέργειας των αστέρων

### 2.3.1 Δυναμική ενέργεια αστέρα

Έχουμε ήδη υπολογίσει την δυναμική ενέργεια ενός σφαιρικού και ομογενούς αστέρα (βλέπε Εξ. 6.18)

$$W = -\frac{16\pi^2\rho_0^2G}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}.$$

**Πρόβλημα 2.2:** Με βάση την εξίσωση 6.18 και το θεώρημα Virial, μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό με τον οποίο πρέπει να συστέλλεται ο Ήλιος για να ακτινοβολεί με τη σημερινή του φωτεινότητα  $L_\odot = 3.0 \times 10^{33} \text{ ergs/sec}$ .

Η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας λόγω συστολής θα είναι

$$\frac{dW}{dt} \sim \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt}$$

και από το θεώρημα Virial έχουμε ότι  $W = -2U$ , άρα

$$\frac{dW}{dt} \sim \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} \frac{dR}{dt} \sim 2L$$

(αν υποθέσουμε ότι η μεταβολή της εσωτερικής ενέργειας ( $U$ ) είναι ανάλογη της φωτεινότητας ( $L$ ) και συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{dR}{dt} \sim 2.38 \times 10^{-5} \text{ cm/sec}$$

Η μεταβολή είναι πολύ μικρή, αλλά μπορεί να παρατηρηθεί. Οι σημερινές παρατηρήσεις ωστόσο δεν δείχνουν συστηματική συστολή στον Ήλιο, άρα πρέπει να αναζητήσουμε αλλού την πηγή της ενέργειας που ακτινοβολεί ο Ήλιος.

**Πρόβλημα 2.3:** Αν ο Ήλιος δημιουργήθηκε από ένα νέφος ακτίνας  $R_0 \gg R_\odot$  και η ενέργεια που ακτινοβολεί όλο αυτό το διάστημα είναι σταθερή και ίση με το αποτέλεσμα της αρχικής του συστολής από  $R_0$  σε  $R_\odot$ , ποιά θα πρέπει να είναι η ηλικία του Ήλιου;

Η ολική ενέργεια ενός νέφους είναι το άθροισμα της εσωτερικής και της βαρυτικής ενέργειας  $E = W + U$ , αλλά από το θεώρημα Virial γνωρίζουμε ότι  $W = -2U$ , άρα  $E = -U$ . Ή

$$\Delta U = -\frac{1}{2}\Delta W = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{5} \frac{GM^2}{R} \right) \sim 10^{48} \text{ ergs}$$

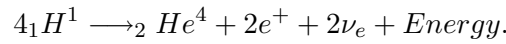
άρα

$$t_k = \frac{10^{48} \text{ ergs}}{10^{33} \text{ ergs/sec}} \sim 10^7 \text{ yrs}$$

Η ηλικία του Ήλιου είναι μεγαλύτερη από την ηλικία της Γης, που από τον υπολογισμό της ηλικίας των πετρωμάτων φαίνεται να ξεπερνά τα  $10^9$  χρόνια.

### 2.3.2 Θερμοπυρηνική σύντηξη

Αν υποθέσουμε ότι η καύση του υδρογόνου στο κέντρο του αστέρα είναι ο βασικός μηχανισμός παραγωγής ενέργειας των αστέρων, τότε προέρχεται από την μετατροπή του υδρογόνου σε ήλιο



Γνωρίζουμε ότι  $4_1H^1 \longrightarrow 4(1.0078 \text{ amu})$  και  $2_2He^4 \longrightarrow 4.0026 \text{ amu}$  (1 amu (atomic mass unit) =  $1/12$  της μάζας του ατόμου του  $^{12}C$ ). Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα έλλειμμα μάζας  $\Delta M = 0.0286 \text{ amu}$ , άρα από τη συνολική μάζα του Ήλιου το

$$\frac{0.0286}{4.0312} = 0.71\%$$

μεταφέρεται στην ακτινοβολία. Με βάση τα παραπάνω και επειδή οι αντιδράσεις συμβαίνουν στον πυρήνα του αστέρα ( $0.1M_\odot$ )

$$E_\odot = 0.71 \times (0.1M_\odot)c^2 = 1.27 \times 10^{51} \text{ ergs}$$

άρα ο χρόνος ζωής του Ήλιου είναι  $t_n = \frac{t_0}{L_\odot} = 10^{10} \text{ yrs}$  που είναι συγκρίσιμος με τα δεδομένα των παρατηρήσεων από την ανάλυση των πετρωμάτων της Γης.



## 2.4 Πρότυπα αστέρων

Αξίζει να ανακεφαλαιώσουμε στο σημείο αυτό τις βασικές εξισώσεις που καθορίζουν τα πρότυπα των αστέρων

### Υδροστατική ισορροπία

Αν θεωρήσουμε ένα μικρό όγκο σε απόσταση  $r$  από το κέντρο ενός σφαιρικά συμμετρικού αστερά με διαστάσεις  $\delta V = \delta r \times \delta S$  τότε

$$[P(r + \delta r) - P(r)] \delta S + \frac{GM(r)\rho(r)\delta S\delta r}{r^2} = 0$$

Άρα καταλήγουμε στην υδροστατική ισορροπία που αναφέραμε ήδη

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2}\rho(r).$$

### Διατήρηση μάζας

Η μάζα στο εσωτερικό του αστερά

$$M(r + \delta r) - M(r) = 4\pi r^2 \rho(r) \delta r$$

ή

$$\boxed{\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)}$$

Μια πολύ σημαντική ιδιότητα των αστέρων είναι ότι έχουν "αρνητική ολική ενέργεια" και θερμαίνονται όταν η ολική τους ενέργεια ελαττώνεται. Η ολική ενέργεια

$$E = U + U_g$$

και από το θεώρημα Virial  $2U + U_g = 0$  άρα

$$E = -U = \frac{U_g}{2}$$

### Διάδοση ενέργειας με ακτινοβολία

Οι αστέρες ακτινοβολούν μεγάλα ποσά ενέργειας άρα πρέπει η ενέργεια αυτή να αναπληρώνεται για να διατηρούνται σε ισορροπία. Αν υποθέσουμε ότι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας  $\frac{dL(r)}{dr}$  αναπληρώνεται από την εσωτερική καύση του υδρογόνου  $4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$ , για ένα στοιχειώδη δακτύλιο θα έχουμε

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r)$$

Αν θεωρήσουμε έναν φλοιό στο εσωτερικό του αστέρα σε απόσταση  $r$  από το κέντρο, επιφάνειας  $A = 4\pi r^2$  και ακτίνας  $\delta r$  και επειδή η πίεση της ακτινοβολίας είναι  $P_{rad} = \frac{1}{3} \alpha T^4$ , τότε ο ρυθμός εναπόθεσης ενέργειας θα είναι

$$- \frac{dP_{rad}}{dr} dr 4\pi r^2$$

Αν η διαφάνεια του υλικού είναι  $\kappa [m^2/kg]$  τότε η απορρόφηση θα είναι  $L(r)/c\kappa\rho dr$ . Για να είναι ο αστέρας σε ισορροπία

$$L(r)c\kappa\rho dr = - \frac{dP_{rad}}{dr} dr 4\pi r^2$$

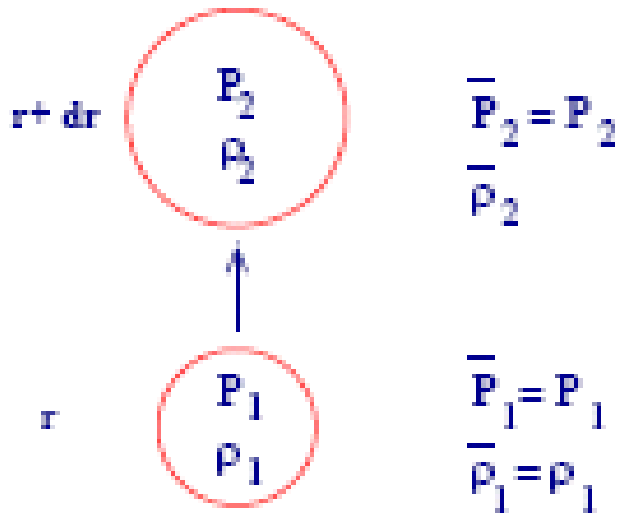
$$\boxed{L(r) = 4\pi r^2 \frac{4\alpha c}{3\kappa\rho} T^3 \frac{dT}{dr}} \quad (2.17)$$

### Διάδοση ενέργειας με μεταφορά

Υποθέτουμε ότι αρχικά μια νοητή σφαίρα του υλικού από το οποίο αποτελείται ο αστέρας μεταφέρεται από τη θέση 1 στη θέση 2 (βλέπε Σχ. 2.2). Η σφαίρα έχει πυκνότητα  $\rho_1(r)$  και πίεση  $P_1(r)$  στη θέση 1 και ανέρχεται μια απόσταση  $r + \delta r$ , όπου η πυκνότητα και η πίεση στη νέα θέση είναι  $\rho_2(r), P_2(r)$ . Η πίεση και η πυκνότητα στο περιβάλλον είναι  $\bar{\rho}(r), \bar{P}(r)$ . Εάν η σφαίρα εκτονωθεί αδιαβατικά

$$P_2 = P_1 \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma$$

( $\gamma$  ο συντελεστής αδιαβατικής εκτόνωσης). Τότε



Σχήμα 2.2: Η αδιαβατική εκτόνωση της φουσαλίδας

$$P_2 = \bar{P}_2 = \overline{P(r + \delta r)} \simeq P_1 + \left( \frac{dP}{dr} \right) dr$$

$$\rho_2 = \rho_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \simeq \rho_1 \left( 1 + \frac{1}{P} \frac{dP}{dr} dr \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\rho_2 \simeq \rho_1 + \frac{\rho_1}{\gamma P} \frac{dP}{dr} dr$$

Για να μη συρρικνωθεί η σφαίρα θα πρέπει  $\rho_2 - \bar{\rho}_2 > 0$  ή

$$\frac{\rho}{\gamma \rho} \frac{dP}{dr} - \frac{d\rho}{dr} > 0. \quad (2.18)$$

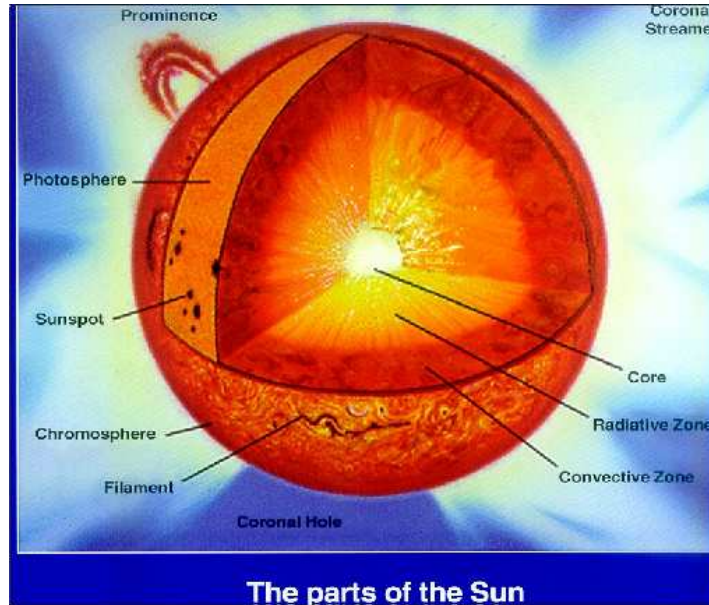
Αν υποθέσουμε ότι το αέριο στο εσωτερικό του αστέρα είναι ιδανικό ( $P = \rho kT / \mu m_p$ ) και θεωρώντας ότι  $\mu$ =σταθερό θα έχουμε

$$\frac{P}{T} \frac{dT}{dP} < \frac{\gamma - 1}{\gamma}.$$

Η συνθήκη αυτή πρέπει να ελέγχεται στο εσωτερικό του αστέρα γιατί καθορίζει το τρόπο που μεταφέρεται η ενέργεια (ακτινοβολία η μεταφορά ύλης) στα διάφορα στρώματα. Στον Ήλιο, αν κινηθούμε ακτινικά από το κέντρο, μετά το

πυρήνα συναντάμε τη ζώνη ακτινοβολίας και στη συνέχεια τη ζώνη μεταφοράς (βλέπε Σχ. 2.3).

Η προσεγγιστική θεωρία που παρουσιάσαμε δεν μπορεί να θεωρηθεί πλήρης εξήγηση για το φαινόμενο της μεταφοράς στους αστέρες. Μια σειρά από ανοιχτά προβλήματα παραμένουν (αξίζει να ασχοληθείτε με αυτά περισσότερο).



Σχήμα 2.3: Το εσωτερικό του Ήλιου

### Οι βασικές εξισώσεις

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τα πρότυπα αστέρων είναι:

$$\begin{aligned} \frac{dP(r)}{dr} &= -\frac{GM(r)\rho(r)}{r^2} \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \\ \frac{dL(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r) \epsilon(r) \\ \frac{dT(r)}{dr} &= -\frac{3\kappa(r)L(r)\rho(r)}{16\pi\alpha c r^2 T(r)} \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση θα αντικατασταθεί από την εξίσωση

$$\frac{dT(r)}{dr} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( \frac{T}{P} \right) \left( \frac{dP(r)}{dr} \right)$$

όταν η διάδοση της ενέργειας γίνεται με μεταφορά μάζας.

Οι συναρτήσεις  $P(r), \kappa(r), \epsilon(r)$  συνδέονται με την πυκνότητα και τη θερμοκρασία και προκύπτουν από την ανάλυση των φυσικών διεργασιών στο εσωτερικό του αστέρα. Συνολικά έχουμε ένα σύστημα τεσσάρων μη-γραμμικών εξισώσεων (και τριών σχέσεων) που συνδέουν τους επτά αγνώστους  $\rho(r), T(r), P(r), \epsilon(r), \kappa(r), L(r)$ .

## 2.5 Συμπεράσματα

Μελετήσαμε τους αστέρες της κύριας ακολουθίας, αστέρες που βρίσκονται σε υδροστατική ισορροπία και δείξαμε ότι μπορούμε

1. Να υπολογίσουμε προσεγγιστικά (για ομογενή και σφαιρικά συμμετρικό αστέρα) τη θερμοκρασία και πίεση στο κέντρο του αστέρα
2. Να δημιουργήσουμε απλά (μη ομογενή) πρότυπα αστέρων
3. Να δημιουργήσουμε ένα μοντέλο για την ισόθερμη ατμόσφαιρα των αστέρων
4. Να βρούμε μια απλή σχέση μάζας-ακτίνας
5. Να δείξουμε ότι η δυναμική ενέργεια δεν είναι αρκετή για να ερμηνεύσει τη μακροβιότητα των αστέρων στην κύρια ακολουθία και χρειαζόμαστε τη βοήθεια της θερμοπυρηνικής σύντηξης του υδρογόνου σε Ήλιο.
6. Να παρουσιάσουμε τις βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τα πρότυπα των αστέρων.

## 2.6 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε, όχι προσεγγιστικά, τη δυναμική ενέργεια ενός αστέρα όταν η πυκνότητά του δίνεται (α) από τη σχέση  $\rho = \langle \rho \rangle$  και (β) από τη σχέση  $\rho = 4 \langle \rho \rangle (1 - r/R_{\odot})$ . Πόσο διαφέρουν τα αποτελέσματα των περιπτώσεων (α) και (β) (i) συναρτησιακά (ii) αριθμητικά

2. (α) Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση

$$f(r) = P(r) + GM^2(r)/8\pi r^4$$

(όπου  $P(r)$  είναι η πίεση σε απόσταση  $r$  και  $M(r)$  η μάζα που περιέχεται σε σφαίρα ακτίνας  $r$ ) είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση στο εσωτερικό ενός σφαιρικά συμμετρικού και μη περιστρεφόμενου αστέρα. (β) Με τη βοήθεια του παραπάνω αποτελέσματος να υπολογίσετε την ελάχιστη δυνατή πίεση στο κέντρο του Ήλιου.

3. Υποθέτουμε ότι στα πρώτα στάδια εξέλιξης του Ήλιου η πυκνότητά του παραμένει σταθερή αλλά η ακτίνα του μεταβάλλεται με το χρόνο εξ αιτίας της συστολής του, με ταχύτητα  $dr/dt = -5r^4$ . Αν η ενέργεια της συστολής ήταν η μοναδική πηγή ενέργειάς του, να εκφραστούν, ως συναρτήσεις του χρόνου, (α) η δυναμική του ενέργεια (β) η ενέργεια η οποία απελευθερώνεται ανά μονάδα χρόνου (γ) η θερμοκρασία του Ήλιου.
4. Αν ο Ήλιος ήταν αρχικά ομογενής σφαίρα ακτίνας ίσης με το μεγάλο άξονα της τροχιάς του Πλούτωνα ( $39.52AU$ ) και συστελλόταν παραμένοντας πάντοτε ομογενής, πόση ενέργεια θα είχε παραχθεί μέχρις ότου φτάσει στις σημερινές του διαστάσεις·
5. Αν ο Ήλιος μάζας  $M_{\odot}$  περιβαλλόταν από σφαιρικό νέφος σκόνης πυκνότητας  $\rho_0$ =σταθ., ποιά θα ήταν η ένταση του πεδίου βαρύτητας στο εσωτερικό του νέφους·
6. (α) Να αποδειχθεί ότι όταν το δυναμικό εξαρτάται μόνο από την απόσταση,  $V = V(r)$  τότε η εξίσωση Poisson παίρνει τη μορφή

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dV}{dr} \right) = 4\pi G\rho$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rV) = 4\pi G\rho$$

(β) Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω τύπους να βρεθεί το δυναμικό ομογενούς σφαιρικής κατανομής της πυκνότητας ( $\rho$ =σταθ.) (γ) Επαναλάβετε το (β) αν  $\rho = r h_0 e^{-\alpha r}$ ,  $\alpha$ =σταθ. Ποιά θα είναι η συνολική μάζα αν η ύλη επεκτείνεται στο άπειρο·

## Κεφάλαιο 3

# Δημιουργία πρωτοαστέρων

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της αστροφυσικής είναι η δημιουργία πρωτοαστέρων από μεσοαστρικά νέφη. Οι πρωτοαστέρες δημιουργούνται συνεχώς στις σπείρες των γαλαξιών ή σε περιοχές που σχηματίζονται απότομες συμπυκνώσεις μοριακών νεφών π.χ από εκρήξεις υπερκαινοφανών.

Στη συνέχεια θα αναλύσουμε μερικά βασικά χαρακτηριστικά από την αρχική συστολή αστρικών νεφών για τη δημιουργία στη συνέχεια πρωτοαστέρων.

### 3.1 Η ελεύθερη πτώση

Ένα σφαιρικό και ομογενές νέφος με αρχική ακτίνα  $R_c$  αρχίζει να συστέλλεται όταν η δύναμη της βαρύτητας γίνεται μεγαλύτερη από την κλίση της πίεσης. Υποθέτουμε επίσης ότι το μαγνητικό πεδίο είναι αμελητέο και ότι το νέφος δεν περιστρέφεται. Είναι ενδιαφέρον να υπολογίσουμε το χρόνο που θα χρειαστεί για να σχηματιστεί ένας νέος πρωτοαστέρας με ακτίνα πολύ μικρότερη από την ακτίνα του νέφους.

Η εξίσωση ακτινικής κίνησης της στοιχειώδους μάζας στα εξωτερικά στρώματα θα είναι

$$\ddot{r} = -\frac{GM}{r^2} \quad (3.1)$$

όπου  $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο του σφαιρικού νέφους,

$$M = \frac{4\pi}{3} R_c^3 \rho_0$$

η μάζα του και  $\rho_0$  η σταθερή πυκνότητά του. Κανονικοποιώντας την εξ. (3.1) έχουμε

$$\frac{\ddot{r}}{R_c} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_0 \left(\frac{r}{R_c}\right)^{-2}. \quad (3.2)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε αδιάστατες μονάδες ( $\xi = r/R_c, \tau = t/t_0, t_0 = [(4\pi/3)G\rho_0]^{-1/2}$ ) τότε

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} = -\xi^{-2}. \quad (3.3)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με  $\dot{\xi}$  και ολοκληρώνοντας έχουμε

$$\frac{1}{2}\dot{\xi}^2 = \xi^{-1} - 1. \quad (3.4)$$

Η σταθερά της ολοκλήρωσης είναι ίση την μονάδα γιατί  $\dot{\xi} = 0$  όταν  $\xi = 1$ . Απλουσιεύεται σημαντικά η λύση της εξ. (3.4) αν αλλάξουμε μεταβλητές,  $\xi = \cos^2 \theta$  οπότε η εξίσωση κίνησης (3.2) παίρνει τη μορφή

$$2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta - \cos^{-2} \theta = 0. \quad (3.5)$$

Ολοκληρώνοντας την εξ. (3.5) έχουμε

$$\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta = 2^{-1/2}\tau. \quad (3.6)$$

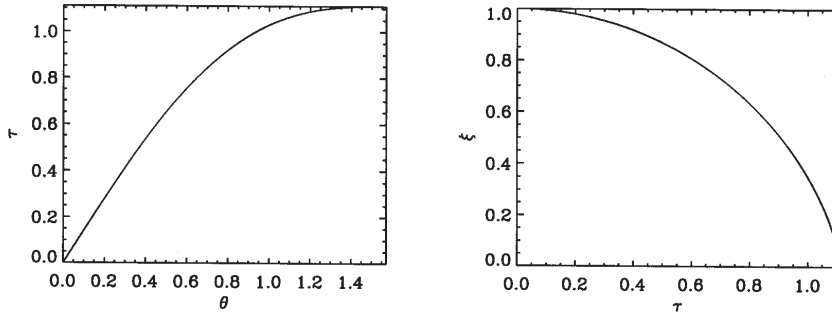
Στο Σχ. (3.1) παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της λύσης της Εξ. (3.6). Ο χρόνος της ελεύθερης πτώσης υπολογίζεται από την Εξ. (3.6) για  $\theta = \pi/2$  ( $\xi = 0$ )

$$t_{ff} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\rho_0}}. \quad (3.7)$$

Είναι ενδιαφέρον ότι ο χρόνος  $t_{ff}$  δεν εξαρτάται από την αρχική ακτίνα αλλά μόνο από την αρχική πυκνότητα. Για νέφη με χαρακτηριστική πυκνότητα  $\rho \sim 2 \times 10^{-20} \text{ Kg/m}^3$ , ο χρόνος βαρυτικής συστολής του νέφους είναι περίπου  $t_{ff} \sim 10^6$  χρόνια.

Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το χρόνο της ελεύθερης πτώσης και με ένα απλούστερο τρόπο. Η εξ. (3.1) μπορεί επίσης να γραφεί





Σχήμα 3.1: Γραφική παράσταση της λύσης της εξ. (3.6).

$$\frac{R_c}{t_{ff}^2} \sim \frac{4\pi G \rho_0}{3} R_c$$

άρα

$$t_{ff} \sim \sqrt{\frac{R_c^3}{GM}}$$

Ο χρόνος  
βαρυτικής συστολής

(3.8)

που αποτελεί μια καλή προσέγγιση της Εξ. (3.7).

### 3.2 Αστάθεια *Jeans*

Ένας εύκολος τρόπος για να μελετήσουμε την ευστάθεια ενός μεσοαστρικού νέφους είναι να διαταράξουμε τις εξισώσεις της υδροδυναμικής γύρω από μια λύση ισορροπίας. Αν υποθέσουμε ότι αρχικά το νέφος είναι σε ισορροπία και η πίεση, η πυκνότητα, το δυναμικό βαρύτητας και η ταχύτητα, έχουν τιμές  $P_0, \rho_0, \Phi_0, u_0 = 0$  αντίστοιχα (Το μαγνητικό πεδίο θεωρούμε ότι είναι αμελητέο). Διαταράσσουμε τις παραπάνω τιμές

$$\begin{aligned} P &= P_0 + \epsilon P_1 \\ \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 \\ u &= \epsilon u_1 \\ \Phi &= \Phi_0 + \epsilon \Phi_1 \end{aligned}$$

όπου  $\epsilon \ll 1$ . Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις της υδροδυναμικής τις παραπάνω τιμές και κρατώντας όρους γραμικούς ως προς  $\epsilon$  έχουμε

$$\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1 = -\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -\nabla(\Phi_1 + P_1/\rho_0) \quad (3.10)$$

$$\nabla^2 \Phi_1 = 4\pi G \rho_1 \quad (3.11)$$

$$P_1 = c_s^2 \rho_1 \quad (3.12)$$

Παραγωγίζοντας τις εξισώσεις (3.9), (3.10) έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{u}_1) = -\nabla^2 \Phi_1 - \left(\frac{c_s^2}{\rho_0}\right) \nabla^2 \rho_1 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{u}_1) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}. \quad (3.14)$$

Αν αντικαταστήσουμε τον όρο  $\nabla^2 \Phi_1$  από την Εξ. (3.11) και συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.13) και (3.14) έχουμε

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{4\pi G \rho_0}{c_s^2}\right) \rho_1 = 0. \quad (3.15)$$

Η Εξ. (3.15) αποτελεί μια γενίκευση της κυματικής εξίσωσης

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \rho_1 = 0 \quad (3.16)$$

που προκύπτει από τη διαταραχή των εξισώσεων της υδροδυναμικής αν θεωρήσουμε ότι όλες οι δυνάμεις είναι μηδέν  $\nabla P_0 = \vec{F}$ . Αν από τις εξισώσεις 3.15 και 3.16 αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

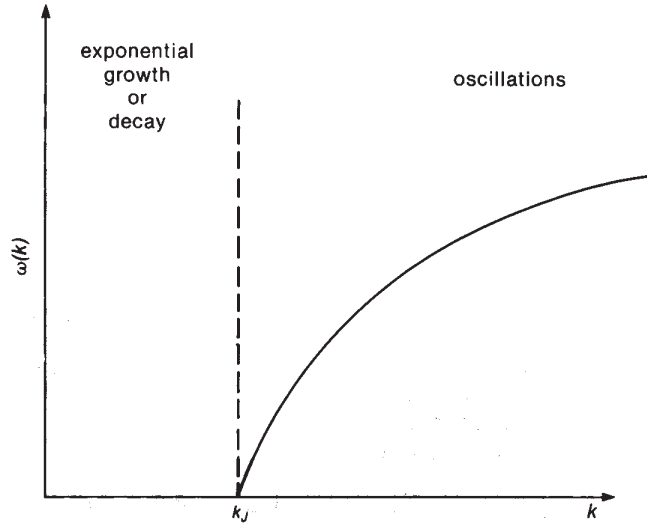
$$\rho_1 = \rho_{10} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

(αναζητούμε λύσεις επιπέδου κύματος με κυματάρυθμο  $\vec{k}$  και συχνότητα  $\omega$ ) τότε η εξ. (3.15) παίρνει τη μορφή

$$D(\vec{k}, \omega) = \omega^2 - k^2 c_s^2 + 4\pi G \rho_0 = 0 \quad (3.17)$$

ενώ η εξ. (3.16)

$$D(\vec{k}, \omega) = \omega^2 - k^2 c_s^2 = 0. \quad (3.18)$$



Σχήμα 3.2: Η γραφική παράσταση των ταλαντώσεων του μεσοαστρικού νέφους. Για  $k \leq k_J$  το νέφος αρχίζει να συστέλεται ενώ για  $k > k_J$  ταλαντεύεται με χαρακτηριστική συχνότητα  $\omega = kc_s$ .

Η συνάρτηση  $D(\vec{k}, \omega)$  είναι γνωστή ως **συνάρτηση διασποράς** και οι λύσεις της εξίσωσης  $D(\vec{k}, \omega) = 0$  προσδιορίζουν τις συχνότητες ταλάντωσης του νέφους. Διαπιστώνουμε από την εξ. (3.17) ότι, αν  $k^2 < 4\pi G\rho_0/c_s^2$  τότε το  $\omega^2 < 0$  και άρα η συχνότητα είναι φανταστική ( $\omega = \pm i\gamma$ ) και η δε ταλάντωση της πυκνότητας θα έχει τη μορφή

$$\rho_1 = \rho_{10} e^{\gamma t} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}.$$

Συμπεραίνουμε ότι με το πέρασμα του χρόνου οι ταλαντώσεις με μήκος κύματος

*Αστάθεια Jeans*

$$\lambda_J = \frac{2\pi c_s}{\sqrt{4\pi G\rho_0}} = \frac{2\pi}{k_J} \quad (3.19)$$

είναι πιθανόν να οδηγήσουν το νέφος σε συστολή. Για νέφη με πυκνότητα  $10^{-20} \text{Kgr/m}^3$ ,  $c_s = 1 \text{Km/s}$  το  $\lambda_J = 20pc$ .

Στο Σχ. (3.2) διακρίνουμε δύο περιοχές ταλάντωσης του νέφους (1) για  $k \ll k_J$  η διαταραχή οδηγεί το νέφος σε αστάθεια και πιθανή συστολή για

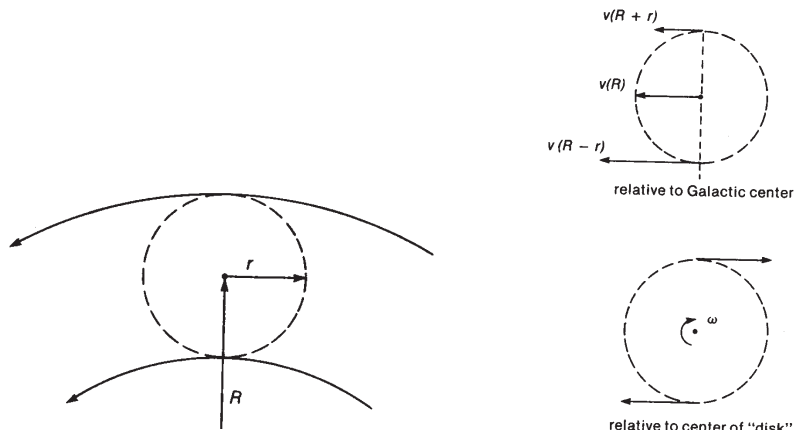
τη δημιουργία πρωταστέρων, (2) για  $k \gg k_J$  η διαταραχή θα αναγκάσει το νέφος να πάλλεται με χαρακτηριστική συχνότητα  $\omega = kc_s$ .

### 3.3 Περιστροφή του νέφους

Τα μεσοαστρικά νέφη πριν αρχίσουν να συστέλλονται για να δημιουργήσουν πρωταστέρες συμμετέχουν στην διαφορική περιστροφή  $V_R(r)$  του δίσκου του γαλαξία (βλέπε Σχ. (3.3)). Το νέφος θα ξεκινήσει τη συστολή του με γωνιακή ταχύτητα

$$\omega = \frac{V_R(R+r) - V_R(R-r)}{r}.$$

Για το δικό μας γαλαξία και για νέφος που απέχει  $R = 150pc$  από το κέντρο



Σχήμα 3.3: Το νέφος πριν αρχίσει να συστέλλεται συμμετέχει στη διαφορική περιστροφή  $V(R)$  του γαλαξία. Τα σημεία που είναι πλησιέστερα στο κέντρο του γαλαξία περιστρέφονται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα.

του γαλαξία, η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής είναι  $\omega = 2 \times 10^{-15} sec^{-1}$ . Η φυγόκεντρος δύναμη  $F_c = m\omega^2 r$  μπορεί να εμποδίσει την έναρξη της συστολής του, αν η δύναμη της βαρύτητας γίνει ίση με την φυγόκεντρο

$$\frac{GM_c}{R_c^2} \sim \omega^2 R_c$$

ή

$$\omega = \left( \frac{M_c G}{R_c^3} \right)^{1/2} \quad (3.20)$$

Αν υποθέσω ότι το νέφος είναι σφαιρικό η Εξ. (3.20) μας οδηγεί σε έναν περιορισμό για την πυκνότητα

$$\rho > \frac{3\omega^2}{4\pi G} = \rho_c = 3.6 \times 10^6 \omega^2 \text{ gr/cm}^3$$

που πρέπει να έχει το νέφος για να αρχίσει τη συστολή. Άρα νέφη με πυκνότητα μικρότερη από τη  $\rho_c = 10^{-23} \text{ g/cm}^3$  δεν θα συσταθούν να δημιουργήσουν πρωτοαστέρες. Η πυκνότητα αυτή είναι 5 φορές μεγαλύτερη από την μέση πυκνότητα του μεσοαστρικού αερίου στον γαλαξία μας ( $\rho \sim 2 \times 10^{-24} \text{ g/cm}^3$ ). Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η συστολή του μεσοαστρικού νέφους είναι δυνατή μόνο αν η πυκνότητα του είναι 5-10 φορές μεγαλύτερη από την μέση μεσοαστρική πυκνότητα.

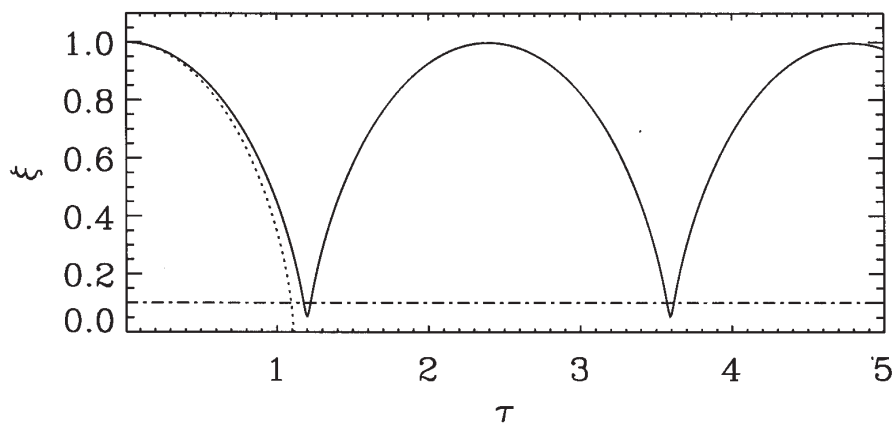
*Συστολή  
περιστρεφόμενου νέφους*

Αν επιστρέψουμε στην ελεύθερη πτώση του νέφους που μελετήσαμε ήδη στην παράγραφο 3.1 και επαναλάβουμε την ανάλυση υποθέτοντας ότι το νέφος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  η κεντρομόλος δύναμη είναι  $F_c = m\omega^2 r$  και η εξίσωση κίνησης έχει τη μορφή

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L^2}{r^3} \quad (3.21)$$

όπου  $L = \omega r^2$  σταθερά είναι η στροφορμή της στοιχειώδους μάζας και παραμένει σταθερά. Στο Σχ. (3.4) παρουσιάζουμε τη λύση της εξ. (3.21) για  $L^2/(GM_c R_c) = 0.1$

Η γραφική παράσταση των λύσεων της Εξ. (3.4) για την κατάρρευση χωρίς περιστροφή ή της ισορροπίας  $r_{eq} = L^2/GM_c$  παρουσιάζονται επίσης για σύγκριση στο Σχ. (3.4).



Σχήμα 3.4: Η ελεύθερη πτώση ενός απομονωμένου νέφους όταν περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ .

**Πρόβλημα 3.1:** Υποθέτουμε ότι ο Ήλιος είναι μια ομογενής σφαίρα, η οποία συστέλλεται αργά και χωρίς να μεταβάλλεται η στροφορμή της, για να καταλήξει σε ένα υπέρπυκνο αστέρα ακτίνας  $10\text{Km}$ . Να υπολογισθεί η τελική περίοδος περιστροφής του, αν η αρχική του είναι 25 ημέρες.

**Λύση:** Η στροφορμή,  $L = I\omega$ , ενός στερεού το οποίο περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και η ροπή αδράνειας του είναι

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

και επειδή η στροφορμή δέν μεταβάλλεται

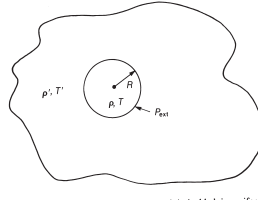
$$\frac{2}{5}MR^2\omega = \frac{2}{5}MR_f^2\omega_f$$

άρα

$$T_f = \left(\frac{R_f}{R}\right)^2 T = 0.1\text{msec.} \quad (3.22)$$

### 3.4 Η βαρυτική συστολή ενός απομονωμένου νέφους

Ας θεωρήσουμε ότι ένα 'ψυχρό' και 'πυκνό' νέφος με πυκνότητα  $\rho'$  και θερμοκρασία  $T'$  βρίσκεται μέσα σε μεσοαστρικό αέριο πυκνότητας  $\rho$  και θερμοκρασίας  $T$ .



Σχήμα 3.5: Ένα πυκνό και ψυχρό σφαιρικό απομονωμένο νέφος βρίσκεται μέσα στο μεσοαστρικό αέριο

Υποθέτουμε επίσης, για να απλουστευτούν οι υπολογισμοί, ότι το νέφος δεν περιστρέφεται, είναι σφαιρικό με ακτίνα  $R_c$ , και ότι το μαγνητικό πεδίο του είναι αμελητέο. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Virial (βλέπε Εξ. (6.16) ),

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2U + U_g - 4\pi R^3 P_{ext} \quad (3.23)$$

για να μελετήσουμε την εξέλιξη του. Η δυναμική ενέργεια

$$U_g = -\frac{3M_c^2 G}{5R_c}$$

έχει ήδη υπολογισθεί (βλέπε Εξ. (6.18)). Η πίεση που ασκείται στην επιφάνεια του νέφους είναι ίση με την εξωτερική πίεση του μεσοαστρικού αερίου ( $P_{ext}$ ). Η πυκνότητα του αερίου μέσα στο νέφος είναι  $\rho_c = M_c / (4\pi R_c^3)$  και η εσωτερική του ενέργεια

$$U = \frac{3}{2} \frac{M k_B T}{\mu m_H}$$

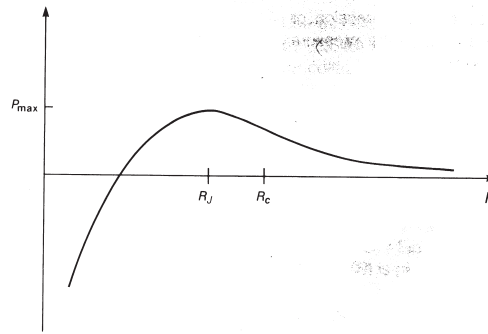
Η συστολή θα ξεκινήσει αν

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 0$$

άρα από την εξ. (3.23) έχουμε

$$P_{ext}(R) = \frac{3k_B T M_c}{4\pi m_H R_c^3} - \frac{3M_c^2 G}{20\pi R_c^4}. \quad (3.24)$$

Στο Σχ. (3.6) παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση της εξωτερικής πίεσης ως



Σχήμα 3.6: Η σχέση πίεσης ακτίνας για ένα μεσοαστρικό νέφος σε ισορροπία με το περιβάλλον του

συνάρτησης της ακτίνας  $R_c$ . Η πίεση γίνεται μεγίστη όταν η ακτίνα προσεγγίζει την τιμή

$$R_J = \left[ \frac{3}{\pi} \frac{15}{16} \frac{k_B T}{\mu m_H \rho_c G} \right]^{1/2} \quad (3.25)$$

Η ακτίνα αυτή είναι συγκρίσιμη με το μήκος Jeans. Αν η ακτίνα του αρχικού νέφους είναι  $R > R_J$  και η πίεση στο περιβάλλον αυξηθεί, το νέφος θα οδηγηθεί σε συστολή μέχρι η ακτίνα του να φτάσει στην τιμή  $R_J$ . Αν το νέφος συνεχίσει να συστέλλεται, η πίεση θα συνεχίσει να ελαττώνεται και θα απομονωθεί βαρυτικά από το περιβάλλον του.

Η ολική ενέργεια του νέφους είναι

$$W = U + U_g = \frac{3M_c k_B T}{2\mu m_H} - \frac{3M_c^2 G}{5R_c} \quad (3.26)$$



Η ενέργεια του γίνεται αρνητική (δυναμική απομόνωση) όταν  $R < R_{cr} = (2/\sqrt{3})R_J$ . Αν στην εξ. (3.24) θέσουμε την ακτίνα  $R_{cr}$  τότε υπολογίζουμε την μέγιστη πίεση για να είναι το νέφος σε ισορροπία

$$P_{max} \sim 3.14 \left( \frac{k_B T}{\mu m_H} \right)^4 \left( \frac{1}{M_c^2 G^2} \right). \quad (3.27)$$

Το νέφος θα αρχίσει να συστέλλεται αν η πίεση στο περιβάλλον υπερβεί την τιμή  $P_{max}$ . Η δυναμική εξέλιξη της αρχικής συστολής μπορεί να περιγραφεί και από τη λύση της εξ. (3.23), αν η πίεση στο περιβάλλον του νέφους υπερβεί την τιμή  $P_{ext} > P_{max}$ .

Η ενέργεια που παράγει η βαρυτική συστολή ενός μεσοαστρικού νέφους είναι

$$\Delta U_g = \frac{3}{5} G M^2 \left[ \frac{1}{R_f} - \frac{1}{R} \right].$$

Η ενέργεια αυτή μετατρέπεται εν μέρει σε εσωτερική θερμική ενέργεια και μαζί με την αύξηση της πίεσης θα δημιουργήσουν τις συνθήκες για την έναρξη των πυρηνικών αντιδράσεων στο κέντρο του **πρωτοαστέρα**.

### 3.5 Συμπεράσματα

Τα πρότυπα που χρησιμοποιήσαμε μέχρι τώρα σε αυτό το κεφάλαιο για την δημιουργία των πρωτοαστέρων αλλά και για τους αστέρες σε ισορροπία είναι προσεγγιστικά. Μας δίνουν μόνο μερικές ποιοτικές πληροφορίες για το τι συμβαίνει στα αστρικά νέφη πριν αρχίσουν να συστέλλονται για να δημιουργήσουν πρωτοαστέρες αλλά και για τη δομή της ατμόσφαιρας και του εσωτερικού των αστέρων.

Οι μέσες τιμές της μεσοαστρικής ύλης είναι: Πυκνότητα  $\rho_0 = 10^{-24} g/cm^3$ , μαγνητικό πεδίο  $B = 3\mu G$  και γωνιακή ταχύτητα  $\omega = 8 \times 10^{-16} - 2 \times 10^{-15} sec^{-1}$ . Με βάση όλα τα παραπάνω καταλήξαμε σε μερικά χρήσιμα συμπεράσματα

1. Υπολογίσαμε ότι ο χρόνος δημιουργίας ενός (ή περισσότερων) πρωτοαστέρα είναι περίπου ένα εκατομμύριο χρόνια.
2. Υπολογίσαμε την χαρακτηριστική πυκνότητα, ακτίνα, μάζα και πίεση που θα απαιτηθούν για να ξεκινήσει η συστολή ενός μεσοαστρικού νέφους.

3. Υπολογίσαμε τα χαρακτηριστικά της ισόθερμης ατμόσφαιρας ενός αστέρα σε ισορροπία
4. Μελετήσαμε μερικά απλά μοντέλα αστέρων
5. Δείξαμε ότι αστέρες σε υδροστατική ισορροπία πάλλονται με χαρακτηριστική συχνότητα  $\omega = kc_s$  (ακουστικές ταλαντώσεις).

Απουσιάζει ακόμα και σήμερα μια ολοκληρωμένη θεωρία για την δημιουργία αστέρων από την μεσοαστρική ύλη. Η πρόοδος είναι μεγαλύτερη στη έρευνα για τη δημιουργία αστρικών προτύπων αλλά και εκεί παραμένουν πολλά προβλήματα ανοιχτά. Η ανάπτυξη τα τελευταία χρόνια της υπολογιστικής αστροφυσικής είναι ραγδαία και πιστεύουμε ότι σύντομα θα μάθουμε πολλά από την προσομοίωση στον υπολογιστή ρεαλιστικών προτύπων για τη δημιουργία πρωτοαστέρων και τη δομή των αστέρων.

### 3.6 Ασκήσεις

1. Υπολογίστε το δυναμικό χρόνο συστολής  $t_{ff} = [3\pi/32G\rho_0]^{1/2}$  για αρχική πυκνότητα του νέφους  $\rho_0 = 2 \times 10^{-24} \text{gcm}^{-3}$  και  $4 \times 10^{-23} \text{gcm}^{-3}$ . Να συζητήσετε δύο τουλάχιστον φαινόμενα που δεν έχουν χρησιμοποιηθεί στον υπολογισμό του  $t_{ff}$  και προσπαθήστε να υπολογίσετε την επιρροή που θα είχαν στα αποτελέσματα.
2. Θα μπορούσε ο Ήλιος να έχει προέλθει από τη συστολή μεσοαστρικού νέφους αρχικής ακτίνας  $r = 0.1 \text{pc}$ , πυκνότητας  $\rho = 4 \times 10^{-23} \text{gcm}^{-3}$  και αρχικής γωνιακής ταχύτητας  $\omega = 2 \times 10^{-15} \text{s}^{-1}$ . Πόσο θα πρέπει να ελαττωθεί η γωνιακή του ταχύτητα για να φτάσει τις σημερινές τιμές της ταχύτητας περιστροφής στον ισημερινό του Ήλιου ( $30 \text{Kms}^{-1}$ )
3. Να βρεθεί η ακτίνα ενός σφαιρικού και ισόθερμου νέφους για την οποία η ολική του ενέργεια είναι  $E = U + W$  είναι μηδέν και δείξτε ότι συνδέεται με την ακτίνα Jeans με τη σχέση
 
$$R_c^2 = (4/3)R_J^2$$
4. (α) Ένα γιγάντιο σε μέγεθος μεσοαστρικό νέφος υδρογόνου θερμοκρασίας  $T = 50 \text{K}$  και πυκνότητας  $\rho_0 = 8.4 \times 10^{-22} \text{gcm}^{-3}$ . Θα συσταθεί το νέφος για να δημιουργηθεί αστέρας (β) Το αρχικό νέφος αποτελείται από μικρότερους πυρήνες θερμοκρασίας  $T = 150 \text{K}$  και πυκνότητας  $\rho_0 = 2 \times 10^{-16} \text{gcm}^{-3}$ . Ποιά θα είναι κατά τη γνώμη σας η τύχη αυτών των πυρήνων, θα αποτελέσουν τα λίκνα νέων άστρων

## Κεφάλαιο 4

# Αστρικοί Άνεμοι και σφαιρική πρόσπτωση μάζας

### 4.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα της απώλειας μάζας από τους αστέρες είναι αρκετά σύνθετο. Οι γενικές αρχές που μετατρέπουν μια ροή από υποηχητική σε υπερηχητική (χωρίς τις εμφανίσεις κρουστικού κύματος) έχει εξαιρετικό ενδιαφέρον. Ο τρόπος που οι ροές ανέμων ξεκινούν από την επιφάνεια των αστέρων με ταχύτητα κοντά στο μηδέν και σταδιακά μετατρέπονται σε υπερηχητικές έχει εφαρμογή και στους αστροφυσικούς πίδακες (jets) που εμφανίζονται συγχρόνως με τους δίσκους προσαύξησης. Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των πιδάκων είναι η μεγάλη συγκέντρωση της ροής γύρω από τον άξονά της, που πιστεύουμε σήμερα ότι οφείλεται στα μαγνητικά πεδία. Η σχετικιστική παραλλαγή των ανέμων και πιδάκων έχει ενδιαφέρον και εμφανίζεται στους Ενεργούς Γαλαξίες και στις αναλαμπές ακτίνων- $\gamma$  (Gamma Ray Bursts) .

### 4.2 Ισόθερμοι αστρικοί άνεμοι

Ας υποθέσουμε ότι ένας αστέρας μάζας  $M$  και ακτίνας  $R$  περιβάλλεται από χαμηλής πυκνότητας ατμόσφαιρα. Η ατμόσφαιρα μπορεί να μην είναι σε ισορροπία και ύλη να ρέει συνεχώς από την επιφάνεια του αστέρα.

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι για να δείξουμε πώς δημιουργούνται οι αστρικοί άνεμοι. Ας δούμε δύο από αυτούς:

1. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση κατανομής ταχυτήτων των φορτίων στην ατμόσφαιρα του αστέρα είναι  $f(v)$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε τον αριθμό των σωματιδίων που έχουν ταχύτητα μεγαλύτερη από  $v > v_\infty$ , όπου  $v_\infty$  είναι

η ταχύτητα διαφυγής. Το ρεύμα που ρέει στην ατμόσφαιρα του αστέρα θα είναι

$$J = \frac{1}{2} n_0(t) \int_{v_\infty}^{\infty} f(v) v(v^2 dv) \quad (4.1)$$

Αν η κατανομή ταχυτήτων είναι Maxwellian και η  $v_\infty$  πλησιάζει τη θερμική ταχύτητα, σχετικά μεγάλα ποσά μάζας θα διαφύγουν από την ατμόσφαιρα του αστέρα. Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο μηχανισμός θέρμανσης της ατμόσφαιρας μπορεί να παίζει σοβαρό ρόλο στη δημιουργία ή όχι ισχυρών ή μη ανέμων από την επιφάνεια του αστέρα, αν για παράδειγμα:

$$kT_* = \frac{GM}{R} \quad (4.2)$$

όπου  $T_*$  η μέση θερμοκρασία της ατμόσφαιρας, τότε η θερμική ταχύτητα γίνεται ίση με την ταχύτητα διαφυγής. Για τον Ήλιο είναι  $T_* \sim 10^7 K$ , άρα το στέμμα έχει θερμοκρασία  $\sim 10^6 K$  και μόνο ένα μικρό ποσοστό των φορτίων θα έπρεπε να διαφεύγει.

2. Υποθέτοντας σφαιρική συμμετρία και ότι η ατμόσφαιρα είναι σε υδροστατική ισορροπία

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM}{R} \rho(r) \quad (4.3)$$

Αν η ατμόσφαιρα είναι ισόθερμη τότε  $P = nk_B T = \frac{\rho}{m_p \mu} k_B T$

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\frac{GM}{R} \frac{m_p \mu}{k_B T} P$$

άρα

$$\frac{dP(r)}{dr} = -\lambda P$$

όπου  $\lambda = (GMm_p/k_B T R)$  και

$$P(r) = P_0 e^{-\lambda(1-R/r)} \quad (4.4)$$

για  $r \rightarrow \infty$ ,  $P = P_0 e^{-\lambda}$  και εφαρμόζοντας τα παραπάνω στον Ήλιο θα έχουμε  $P(r \rightarrow \infty) = 10^{-5} \text{ dynes/cm}^2$  που είναι πολύ μεγαλύτερη από την πίεση στον

μεσοαστρικό χώρο  $P_c = 10^{-12} \text{ dynes/cm}^2$ . Η κλίση της πίεσης θα αναγκάσει την ατμόσφαιρα να ρέει μακριά από την επιφάνεια του Ήλιου με μεγάλες ταχύτητες (Ηλιακός άνεμος)

Είναι εύκολο να υπολογίσουμε το ρυθμό με τον οποίο χάνει μάζα ο Ήλιος από τον ηλιακό άνεμο από την εξίσωση διατήρησης της μάζας,

$$dM = 4\pi r^2 \rho(r) dr$$

ή

$$\dot{M} = 4\pi r^2 v(r) \rho(r)$$

Γνωρίζουμε ότι σε απόσταση  $1AU$  το  $n_0 = 7$  πρωτόνια ανά  $cm^3$ ,  $\rho_0 = n_0 m_p$  και ότι  $v(r = 1AU) = 400 \text{ km/sec}$  άρα  $\dot{M} = 3 \times 10^{-14} M_\odot / \text{χρόνο}$ . Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι ο ηλιακός άνεμος δεν επηρεάζει σημαντικά την εξέλιξη του Ήλιου.

### 4.3 Δυναμική της ισόθερμης ροής

Επιστρέφουμε στις γνωστές μας εξισώσεις

1. Συνέχεια μάζας

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \quad (4.5)$$

2. Διατήρηση ορμής

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = -\nabla P - \rho \nabla U_g \quad (4.6)$$

3. Διατήρηση της ενέργειας

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathfrak{E}) + \nabla \left[ \rho \vec{u} \left( \mathfrak{E} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} - \frac{GM}{R} \right) \right] = 0 \quad (4.7)$$

όπου  $\mathfrak{E} = \frac{1}{2} v^2$ , θεωρώντας ότι δεν έχουμε άλλες μορφές απώλειας ενέργειας εκτός από την εκτόνωση του ανέμου και η εσωτερική ενέργεια παραμένει σταθερή.

Υποθέτουμε ότι ο άνεμος είναι μία ανεξάρτητη από το χρόνο ροή και έχει σφαιρική συμμετρία. Τότε οι βασικές εξισώσεις διατήρησης μάζας, διατήρησης ορμής και ενέργειας γράφονται

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 v \rho) = 0 \quad (4.8)$$

$$v \frac{dv}{dr} = -c_s^2 \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{GM}{r^2} \quad (4.9)$$

Από την εξίσωση (4.8) έχουμε

$$\frac{d \ln \rho}{dr} = -\frac{2}{r} - \frac{d \ln |v|}{dr}$$

και συνδυάζοντάς την με την (5.2)

$$(v^2 - c_s^2) \frac{d \ln |v|}{dr} = \frac{2c_s^2}{r} - \frac{GM}{r^2}$$

Η ταχύτητα του ανέμου μετατρέπεται σε υπερηχητική όταν  $v > c_s$  στο σημείο

$$r_* = \frac{GM}{2c_s^2}$$

(Για τον Ήλιο  $r_* = 0.1AU$ . Η εξίσωση (4.7) περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας (διαιρεμένης με την πυκνότητα)

$$\mathbb{B}(r) = \frac{1}{2}v^2(r) + \frac{\gamma}{\gamma-1}c_s^2 - \frac{GM}{r} \quad (4.10)$$

Στο σημείο  $r = r_*$ ,  $v(r_*) = c_s$  και  $GM/r_* = 2c_s^2$ , άρα η ενέργεια θα είναι (για  $\gamma = 5/3$ ),  $\mathbb{B}(r = r_*) = c_s^2$ . Στην επιφάνεια του αστέρα η ενέργεια είναι  $\mathbb{B}(r = R) = -GM/R$  και στο άπειρο (υποθέτοντας ότι  $v(r \rightarrow \infty) \gg c_s$ ) θα είναι  $\mathbb{B}(r \rightarrow \infty) = v_0^2/2$ , άρα  $\Delta\mathbb{B} = \mathbb{B}(r \rightarrow \infty) - \mathbb{B}(r = R) = 1/2v_0^2 + GM/R$

Μια σειρά από ενδιαφέροντα προβλήματα μπορούν να μελετηθούν με τις βασικές εξισώσεις της υδροδυναμικής ή της μαγνητοϋδροδυναμικής. Για παράδειγμα, το πώς θα συμπεριφέρεται ο αστρικός άνεμος αν υπάρχει κλίση στη θερμοκρασία ή αν το μαγνητικό πεδίο παίζει σοβαρό ρόλο στην εξέλιξή του. Τα προβλήματα αυτά ξεφεύγουν από τα πλαίσια των μαθημάτων αυτών αλλά αποτελούν ενδιαφέροντα θέματα για εργασίες.

#### 4.4 Φωτεινότητα από τη σφαιρική συσσώρευση

Αν υποθέσουμε ότι η ατμόσφαιρα γύρω από ένα σφαιρικό συμπαγές αντικείμενο (compact object) δηλαδή αστέρα νετρονίων ή μελανή οπή, αρχίζει να ρέει ακτινικά. Είναι φανερό ότι για να διατηρηθεί σταθερός ο ρυθμός προσαύξησης

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho(r) v(r) = \text{const.} \quad (4.11)$$

θα πρέπει η πυκνότητα  $\rho(r) = (m_p + m_e)n_0$  (όπου  $n_0$  είναι η αριθμητική πυκνότητα) και η ταχύτητα του πλάσματος  $v(r)$  να αυξάνουν όσο πλησιάζουμε το συμπαγές αντικείμενο.

Η ακτινοβολία που εκπέμπει το πλάσμα λόγω των συγκρούσεων ηλεκτρονίων και ιόντων (φαινόμενο σκέδασης) είναι ανάλογη του τετραγώνου της αριθμητικής πυκνότητας και η φωτεινότητα του όγκου  $V$  θα είναι

$$L = V n_0^2 \Lambda \quad (4.12)$$

όπου  $\Lambda = \alpha \sigma_T m_e c^2$  ( $\alpha$ ,  $\sigma_T$  σταθερές) είναι ο συντελεστής μετατροπής της ενέργειας των ηλεκτρονίων σε φωτόνια λόγω σκέδασης.

Η ταχύτητα πρόσπτωσης του πλάσματος υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{2} v^2(r) = \frac{GM}{r} \quad (4.13)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.11) και (4.13) υπολογίζουμε το  $n_0$

$$n_0 = \frac{\dot{M}}{4\pi r^2 (m_e + m_p) (2GM/r)^{1/2}}$$

και από την εξίσωση (4.12) θα έχουμε ( $m_p \gg m_e$ ),

$$L = \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) \left[ \frac{\dot{M}^2}{(4\pi r^2)^2 m_p^2 \frac{2GM}{r}} \right] \sigma_T \alpha m_e c^2 = \frac{\dot{M}^2 \sigma_T \alpha m_e c^2}{12\pi m_p^2 2GM} \quad (4.14)$$

Από την εξίσωση (4.14) μπορούμε να υπολογίσουμε το ρυθμό πρόσπτωσης μάζας για να γίνει το  $L$  ανάλογο της φωτεινότητας Eddington

$$L_E \sim \frac{4\pi GMc}{\sigma_T} \sim \frac{\dot{M}^2 \sigma_T \alpha m_e c^2}{24\pi m_p^2 GM}$$

άρα

$$\dot{M}_E^2 = \frac{96\pi^2 G^2 M^2 m_p}{\sigma_T \alpha m_e c} \quad (4.15)$$

Συγκρίνοντας την ακτινοβολία που χάνεται από την πρόσπτωση μάζας με την ενέργεια που καταναλώνεται από την πρόσπτωση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{L}{L_G} &= \frac{\left[ \frac{\sigma_T \alpha m_e c^2}{24\pi m_p GM} \right] \dot{M}^2}{\frac{GM\dot{M}}{r}} \\ &= \left( \frac{\sigma_T \alpha m_e c^2 r}{24\pi m_p G^2 M^2} \right) \dot{M} = \frac{4c}{\dot{M}_E} \frac{\dot{M}}{\dot{M}_E} = 10^{-4} \frac{\dot{M}}{\dot{M}_E} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Παρατηρούμε ότι ένα μικρό ποσοστό της βαρυτικής ενεργειας που απελευθερώνεται από τη σφαιρική πρόσπτωση θα πάει στην ακτινοβολία.

## 4.5 Χρονικά μεταβαλλόμενοι αστρικοί άνεμοι και σφαιρική πρόσπτωση μάζας

Οι βασικές εξισώσεις που περιγράφουν τη χρονικά μεταβαλλόμενη σφαιρική συσσώρευση ή τον αστρικό άνεμο είναι

$$\frac{\partial \rho(r)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho(r) v) = 0 \quad (4.17)$$

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\rho k_B T}{\mu m_p} \right) + \rho \frac{GM}{r} = 0 \quad (4.18)$$

και η εξίσωση διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[ \rho r^2 \left( \frac{5k_B T}{2\mu m_p} + E - \frac{GM}{r} \right) \right] = -\Lambda(\rho, T) \quad (4.19)$$

όπου  $E = \frac{1}{2}v^2 + \epsilon$ ,  $\epsilon$  εσωτερική ενέργεια και  $\Lambda(\rho, T)$  συμβολίζει την απώλεια ενέργειας σε ακτινοβολία και είναι  $\Lambda(\rho, T) = \alpha \rho^2 T^{1/2}$

Από τη λύση του συστήματος των εξισώσεων (4.17), (4.18) και (4.19) υπολογίζουμε τις ποσότητες  $v(r, t)$ ,  $\rho(r, t)$  και  $T(r, t)$ .



## 4.6 Ασκήσεις

- Μελετήστε τον στάσιμο ( $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ ) ισόθερμο άνεμο σε επίπεδο, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες και
  - Βρείτε τη χαρακτηριστική απόσταση από τον αστέρα  $r_*$  στην οποία γίνεται υπερηχητικός
  - Υπολογίστε το  $r_*$  σε απόσταση  $1AU$  υποθέτοντας ότι  $c_s = 100km/sec$
  - Συγκρίνετε το  $r_*$  που βρήκατε με το αντίστοιχο του σφαιρικού ανέμου
- Στο ηλιακό στέμμα η θερμότητα διαδίδεται με αγωγιμότητα και η ροή θερμικής ενέργειας (heat flux) είναι

$$\vec{F} = -\kappa \nabla T$$

όπου  $\kappa = \kappa_0(T/T_0)^{5/2}$  και  $T_0, \kappa_0$  είναι οι τιμές στην επιφάνεια του Ήλιου.

(α) Χρησιμοποιήστε τη σχέση  $\nabla \cdot \vec{F} = 0$  για να δείξετε ότι

$$T = T_0(r/r_0)^{-2/7}$$

(β) Υποθέτοντας ότι το αέριο στο στέμμα συμπεριφέρεται ως ιδανικό αέριο  $P = k_B T \rho$  δείξτε ότι

$$P = P_0 \exp \left[ \frac{7r_0}{5H_0} \left[ \left( \frac{r}{r_0} \right)^{-5/7} - 1 \right] \right]$$

Υπολογίστε την έκφραση για την κλίμακα απόστασης από την επιφάνεια του Ήλιου  $H_0$  (scale height)

(γ) Δείξτε ότι το αποτέλεσμα σας δεν μπορεί να είναι σωστό και συζητήστε τις συνέπειες που αυτό έχει για τον ηλιακό άνεμο και το στέμμα.

- Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις συνέχειας, ενέργειας και Euler

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) &= 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} + \nabla p &= 0 \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \epsilon + \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

Για να καταλήξετε στις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) &= -\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j + \delta_{ij} p) \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon\right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ v_j \left( \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho \epsilon + p \right) \right]\end{aligned}\quad (4.20)$$

Προσέξτε ότι υποτίθεται άθροιση στους επαναλαμβανόμενους δείκτες.

4. Οι εξισώσεις της ρευστομηχανικής σε μία διάσταση, χωρίς επιπλέον δυνάμεις, είναι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) &= 0 \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} &= -c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}\end{aligned}\quad (4.21)$$

(α) Γραμμικοποιήστε αυτές τις εξισώσεις γύρω από την κατάσταση  $\rho = \bar{\rho}$  και  $v_x = v_0$

(β) Υποθέστε ότι οι διαταραχές  $\rho'$  και  $v'_x$  είναι ανάλογες του  $e^{i(kx - \omega t)}$  και βρείτε τη σχέση διασποράς  $\omega = \omega(k)$ .

(γ) Βρείτε λύσεις για τα  $\rho'$  και  $v'_x$  που κινούνται είτε στη θετική είτε στην αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $x$ . Επίσης βρείτε τη λύση για στάσιμο κύμα.

5. Επαναλάβετε την άσκηση 4, αυτή τη φορά θεωρώντας και τον όρο της βαρύτητας παρόντα στις εξισώσεις
6. Επαναλάβετε την άσκηση 4, θεωρώντας και τη μαγνητική δύναμη.
7. Αν ένας αέριος πλανήτης (σαν το Δία για παράδειγμα) τοποθετηθεί πολύ κοντά σε έναν αστέρα, τότε θα "εξατμιστεί": Θα αναπτυχθεί μια ροή παρόμοια με τον αστρικό άνεμο, υποκινούμενη από την υπεριώδη ακτινοβολία του αστέρα. Αυτό περιορίζει τον χρόνο επιβίωσης μερικών από τους εξωηλιακούς πλανήτες που ανακαλύφθηκαν πρόσφατα σε τροχιές πολύ μικρής περιόδου.
- (α) Θεωρήστε μια σταθερή ροή ιδανικού αερίου από ένα σφαιρικό αέριο πλανήτη. Δείξτε ότι το σχετικό σύστημα εξισώσεων (ενέργειας, ορμής και συνέχειας) μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned} \rho u \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} - \frac{GM}{r} \right) &= \Lambda(r) \\ u \frac{du}{dr} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} - \frac{GM}{r^2} \\ \frac{dM}{dt} &= -4\pi \rho(r) u(r) r^2 \end{aligned} \quad (4.22)$$

όπου  $u$  είναι η ακτινική ροή του αερίου,  $\rho$  η πυκνότητα του αερίου,  $p$  είναι η πίεση,  $\gamma$  ο λόγος των ειδικών θερμοτήτων,  $M$  η μάζα του πλανήτη (ο οποία θεωρείται ότι βρίσκεται σχεδόν ολόκληρη μέσα στην ακτίνα που μας ενδιαφέρει) και  $\Lambda$  είναι ο ρυθμός θέρμανσης ανά μονάδα όγκου (που προκαλείται από την υπεριώδη ακτινοβολία). Σταθερή ροή σημαίνει ότι  $\frac{dM}{dt} = \text{const.}$  (σε μια δυναμική κλίμακα χρόνου, όχι απαραίτητα σε μεγάλες κλίμακες χρόνου)

(β) Από αυτές τις εξισώσεις, καταλήξτε σε μια εξίσωση (του τυπικού ηλιακού ανέμου ή τη μορφή για ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του ήχου)

$$\begin{aligned} (u^2 - c^2) \frac{1}{u} &= \text{something} \\ c^2 &= \frac{\gamma p}{\rho} \end{aligned}$$

από τις οποίες μπορείτε να εξάγετε τις συνθήκες για τη ροή κοντά στην ταχύτητα του ήχου (η μόνη λύση που περνά από  $u < c$  σε  $u > c$  όταν το  $r$  αυξάνει):

$$c_s^2 = u_s^2 = \frac{GM}{2r_s} + \frac{\gamma - 1}{2} \left( \frac{\Gamma r}{\rho u} \right)$$

όπου ο δείκτης  $s$  σημαίνει ότι η ποσότητα υπολογίζεται από την κρίσιμη (για τον ήχο) ακτίνα  $r_s$  (της οποίας η τιμή καθορίζεται εν γένει από αυτή την εξίσωση)

(γ) Από την εξίσωση ενέργειας και της συνεχούς ροής της μάζας, καταλήξτε στο προσεγγιστικό αποτέλεσμα

$$\left| \frac{dM}{dt} \right| = \int_{r_m}^{r_s} 4\pi r^2 \Lambda(r) dr / \left[ \frac{GM}{r_m} + \frac{5 - 3\gamma}{4(\gamma - 1)} \frac{GM}{r_s} + \frac{\gamma + 1}{4} \left( \frac{\Lambda r}{\rho u} \right)_s \right]$$

(δ) Για  $r > r_m$  είναι  $\Lambda \sim \kappa \rho F_{UV}$ , όπου  $\kappa$  είναι η αδιαφάνεια στην υπεριώδη περιοχή του φάσματος και  $F_{UV}$  είναι η ροή υπεριώδους ακτινοβολίας (αυτό προϋποθέτει μεγάλη απόδοση στη μετατροπή υπεριώδους ροής σε θερμότητα, το οποίο ανταποκρίνεται συχνά στην πραγματικότητα). Έχουμε επίσης και τον ορισμό της  $r_m$ :

$$\int_{r_m}^{\infty} \rho \kappa dr \sim 1$$

Υποστηρίξτε ότι μια λογική προσέγγιση είναι

$$\left| \frac{dM}{dt} \right| = \frac{4\pi r_m^3 F_{UV}}{GM}$$

και δώστε μια απλή φυσική ερμηνεία αυτού του αποτελέσματος. ("Λογική προσέγγιση" σημαίνει ότι θα πρέπει να εξηγήσετε γιατί οι υπόλοιποι όροι μπορούν να αγνοηθούν)

8. Ένα σφαιρικό σώμα ακτίνας  $r$  και πυκνότητας  $\rho_0 = 3g/cm^3$  μπαίνει στην ατμόσφαιρα της Γης, κινούμενο κάθετα και προς τα κάτω με αρχική ταχύτητα  $15km/sec$ . Η ατμόσφαιρα θεωρείται ισόθερμη:  $\rho = \rho_g e^{-z/H}$ , όπου  $\rho_g = 10^{-3}g/cm^3$ ,  $z$  είναι το ύψος από την επιφάνεια της Γης και  $H = 10km$  είναι η ατμοσφαιρική κλίμακα ύψους (atmospheric scale height). Η πίεση σε ύψος  $z = 0$  είναι  $1 bar (10^6 dynes/cm^2)$ . Αφού το  $H$  είναι μικρό σε σχέση με την ακτίνα της Γης, η επιτάχυνση της βαρύτητας δεν θα είναι σημαντική κατά την διέλευσή του μέσω της ατμόσφαιρας. Μπορείτε να αντιμετωπίσετε την επιβράδυνση του σώματος από την αρχική του ταχύτητα σαν να προέρχεται από μια δύναμη που δημιουργείται από το κρουστικό κύμα που σχηματίζεται ακριβώς μπροστά από το σώμα.

(α) Γράψτε και δικαιολογήστε μια προσεγγιστική εξίσωση κίνησης για το σώμα. (Δεν θα μπορέσετε να υπολογίσετε τη δύναμη καλύτερα από έναν παράγοντα  $\sim 2$ )

(β) Λύστε την εξίσωση κίνησης (δηλαδή να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σαν συνάρτηση του ύψους από το έδαφος)

(γ) Δείξτε ότι, αν το σώμα είναι αρκετά μικρό, τότε η εφαρμογή της μέγιστης δύναμης από το αέριο στο σώμα συμβαίνει σε κάποιο πεπερασμένο ύψος αντί για λίγο πριν τη σύγκρουση. Εξηγήστε γιατί τα μικρά σώματα (π.χ. μετεωρίτες στο μέγεθος μιας γροθιάς) μπορούν να φτάσουν στο έδαφος άθικτα, ενώ μεγαλύτερα σώματα από το ίδιο υλικό διαλύονται (εκρήγνυνται στον αέρα). Η τάση που απαιτείται για τη διάλυση είναι μέσα στο φάσμα  $100-1000bar$ .

9. Ένα απλό μοντέλο για να περιγράψουμε τις ταλαντώσεις των αστέρων θα μπορούσε να είναι το εξής: Υποθέστε ότι ολόκληρη η μάζα  $M$  του αστέρα είναι συγκεντρωμένη στο κέντρο μιας σφαίρας. Ένα σφαιρικό κέλυφος ακτίνας  $R$  και μάζας  $m$  περιβάλλει τη μάζα  $M$ . Μεταξύ του κέντρου και του σφαιρικού κελύφους υπάρχει αβαρές αέριο πίεσης  $P$  που συγκρατεί σε ισορροπία το κέλυφος έναντι της δύναμης που ασκεί η μάζα  $M$  που βρίσκεται στο κέντρο. Εφαρμόζοντας τη θεωρία διαταραχών γύρω από το σημείο ισορροπίας  $(R_0, P_0)$  και υποθέτοντας ότι οι διαταραχές είναι αδιαβατικές ( $PV^\gamma = \text{σταθερά}$ ) δείξτε ότι η κίνηση του κελύφους θα περιγράφεται από απλή αρμονική ταλάντωση γύρω από το σημείο ισορροπίας του με συχνότητα

$$\omega = (3\gamma - 1) \frac{GM}{R_0^3}$$



## Κεφάλαιο 5

# Δίσκοι προσαύξησης

### 5.1 Εισαγωγή

Ο ιδανικός δίσκος γύρω από ένα συμπαγές αντικείμενο (αστέρα νετρονίων ή μελανή οπή) αποτελείται από αέριο που εκτελεί κυκλικές τροχιές. Οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε υλικό σημείο του είναι η βαρύτητα και η φυγόκεντρος, άρα

$$\frac{GMm}{r^2} = m\Omega^2(r)r$$

ή

$$\Omega^2(r) = \frac{GM}{r^3}$$

Οι δίσκοι που ακολουθούν τον παραπάνω νόμο ονομάζονται δίσκοι Kepler γιατί  $\Omega(r) \sim 1/r^{3/2}$ , που είναι ο γνωστός νόμος του Kepler .

Αν μια στοιχειώδης μάζα κινηθεί ακτινικά από το άπειρο μέχρι την επιφάνεια ενός αστέρα ακτίνας  $10Km$  και μάζας  $M_\odot$ , τότε η ενέργεια που θα απελευθερωθεί, σε μονάδες  $mc^2$ , θα είναι

$$\frac{GMm}{a} \sim \frac{GM}{ac^2}(mc^2) \sim 0.15mc^2$$

Συμπεραίνουμε ότι σημαντικό ποσοστό από τη μάζα ηρεμίας μετατρέπεται από βαρυτική ενέργεια σε ακτινοβολία. Η προσαύξηση μάζας συνεισφέρει σημαντικά στην παρατηρούμενη ακτινοβολία από τους δίσκους προσαύξησης.

Αν ο ρυθμός προσαύξησης μάζας σε συμπαγές αντικείμενο είναι  $\dot{m}$ , να υπολογισθεί το  $\dot{m}_E$  που απαιτείται ώστε η φωτεινότητα του δίσκου να είναι κοντά στη φωτεινότητα Eddington .

$$L_E \sim \frac{4\pi G m_p M_c}{\sigma_T} \sim 1.3 \times 10^{38} \left( \frac{M}{M_\odot} \right) \text{ erg/sec}$$

Εξισώνοντας το  $Gm\dot{m}/r$  με την φωτεινότητα Eddington καταλήγουμε στη σχέση

$$\dot{m}_E = 9.5 \times 10^{11} r_0 \text{ gr/sec}$$

Για αστέρες νετρονίων η τυπική προσαύξηση είναι  $\dot{m}_E \sim 10^{17} \text{ gr/sec}$ . Είναι όμως δύσκολο να πετύχουμε τόσο μεγάλα  $\dot{m}$  αν το ιξώδες του δίσκου δεν είναι πολύ μεγάλο, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

## 5.2 Θερμοκρασία και φωτεινότητα του δίσκου

### 5.2.1 Ο δίσκος ως μέλαν σώμα

Όπως είναι γνωστό, το υλικό σε ένα δίσκο προσαύξησης ακολουθεί σπειροειδή τροχιά και καταλήγει στο κεντρικό σώμα μάζας  $M$ . Η διαδικασία αυτή μειώνει τη δυναμική ενέργεια του συστήματος και έτσι αφού αυτή, με βάση το θεώρημα Virial , μετατρέπεται σε εσωτερική ενέργεια. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την άνοδο της θερμοκρασίας του δίσκου και την αποβολή ενέργειας με τη μορφή ακτινοβολίας. Σε μια πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο δίσκος ακτινοβολεί σαν μέλαν σώμα. Η προσέγγιση αυτή μας επιτρέπει να κάνουμε μια πρώτη εκτίμηση της θερμοκρασίας και της λαμπρότητας του δίσκου.

Το υλικό του δίσκου σε κάθε σημείο, κατά την ακτινική διεύθυνση, έχει μια συγκεκριμένη θερμοκρασία και εκπέμπει το συνεχές φάσμα του μέλανος σώματος το οποίο αντιστοιχεί στη θερμοκρασία αυτή. Για να απλοποιήσουμε τα πράγματα, θα υποθέσουμε ότι η ακτινική ταχύτητα του υλικού του δίσκου είναι πολύ μικρή συγκρινόμενη με την ταχύτητα περιφοράς του γύρω από το κεντρικό αστέρι. Έτσι αγνοούμε τα φαινόμενα που σχετίζονται με το ιξώδες.

Θα χωρίσουμε τον δίσκο σε κυκλικούς δακτύλιους ακτίνας  $R$  και πλάτους  $\Delta R$ . Μελετώντας μια τέτοια περιοχή βρίσκουμε, σύμφωνα με το νόμο των Stefan-Boltzmann, ότι ακτινοβολεί ενέργεια ανά μονάδα χρόνου:

$$\Delta L_{ring} = 2 \times 2\pi r \sigma T^4 \Delta R \quad (5.1)$$



Η συνολική εσωτερική ενέργεια που έχει η μάζα  $m$  είναι, κάνοντας χρήση του θεωρήματος Virial :

$$U = -G \frac{Mm}{2r} \quad (5.2)$$

Αν υποθέσουμε ότι η μεταφορά μάζας από το συνοδό αστέρα είναι σταθερή και ίση με  $\dot{M}$ , τότε στη μονάδα του χρόνου ποσότητα μάζας  $M$  εισέρχεται στον κυκλικό δακτύλιο από το εξωτερικό του σύνορο και στο ίδιο χρονικό διάστημα, ίση μάζα εξέρχεται από τον κυκλικό δακτύλιο, μέσω του εσωτερικού του συνόρου, έτσι ώστε να μην έχουμε συσσώρευση μάζας μέσα στον κυκλικό δακτύλιο. Έτσι σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της ενέργειας, η ενέργεια η οποία ακτινοβολείται είναι:

$$\frac{GMM\dot{M}}{2r} \frac{\Delta R}{r} \sim 4\pi R\Delta R\sigma T_D^4$$

ή

$$T_D = \left( \frac{GMM\dot{M}}{8\pi\sigma r^3} \right)^{1/4} \quad (5.3)$$

### 5.2.2 Εφαρμογή σε λευκό νάνο και αστέρα νετρονίων.

Η σχέση (5.3) μπορεί να γραφτεί και με τη μορφή:

$$T(r) = \left( \frac{GMM\dot{M}}{8\pi\sigma R^3} \right)^{1/4} \left( \frac{R}{r} \right)^{3/4} = T_{disc} \left( \frac{R}{r} \right)^{3/4}$$

Όπου  $T_{disc}$  μια χαρακτηριστική θερμοκρασία του δίσκου. Η μέγιστη θερμοκρασία του δίσκου υπολογίζεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:

$$T_{max} \sim T_{disc} \quad (5.4)$$

Αν εφαρμόσουμε όλα τα παραπάνω σε έναν τυπικό λευκό νάνο με τα εξής χαρακτηριστικά:  $M = 0.85M_{\odot}$ ,  $R = 0.0095R_{\odot}$  και  $\dot{M} = 10^{16}g s^{-1} = 1.6 \times 10^{-10}M_{\odot} yr^{-1}$  τότε παίρνουμε:

$$\begin{aligned} T_{max} &\sim 2.62 \times 10^4 K \\ \lambda_{max} &\sim 1110 \text{ \AA} \\ L_{disc} &\sim 8.55 \times 10^{32} \text{ erg s}^{-1} = 0.22L_{\odot} \end{aligned}$$

Όπου το  $\lambda_{max}$  υπολογίστηκε από τον νόμο μετατόπισης του Wien. Αντίστοιχα για έναν αστέρα νετρονίων με:  $M = 1.4M_{\odot}$ ,  $R = 10km$  και  $\dot{M} = 10^{17}g s^{-1} = 1.6 \times 10^{-9}M_{\odot} yr^{-1}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} T_{max} &= 6.86 \times 10^6 K \\ \lambda_{max} &= 4.23 \text{ \AA} \\ L_{disc} &= 9.29 \times 10^{36} \text{ erg s}^{-1} \sim 2400L_{\odot} \end{aligned} \quad (5.5)$$

Δηλαδή οι εσωτερικές περιοχές των δίσκων γύρω από λευκούς νάνους εκπέμπουν στο υπεριώδες, ενώ οι δίσκοι των αστέρων νετρονίων αποτελούν ισχυρές πηγές ακτίνων X.

### 5.3 Ελαχιστοποίηση ενέργειας και διατήρηση της στροφορμής.

#### 5.3.1 Δίσκος αποτελούμενος από σώματα σε στερεά κατάσταση.

Προκειμένου να μελετήσουμε τις βασικές διεργασίες, με βάση τις οποίες γίνεται η προσαύξηση μάζας σε έναν αστέρα, θεωρούμε δύο μικρά σώματα με μάζες  $m_1$  και  $m_2$  τα οποία περιστρέφονται γύρω από μια κεντρική μάζα  $M$ . Υποθέτουμε ότι οι τροχιές των σωμάτων υπακούουν στον τρίτο νόμο του Kepler, δηλαδή ισχύει:

$$\Omega = (GM/r^3)^{1/2} \quad (5.6)$$

όπου  $\Omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής των σωμάτων. Η ενέργεια του συστήματος τότε γράφεται:

$$E = -\frac{GM}{2} \left( \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} \right) \quad (5.7)$$

ενώ η στροφορμή, χρησιμοποιώντας και την (5.6), είναι:

$$J = (GM)^{1/2} (m_1 r_1^{1/2} + m_2 r_2^{1/2}) \quad (5.8)$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι διαταράσσουμε λίγο τις τροχιές των δύο σωμάτων, διατηρώντας παράλληλα σταθερή τη συνολική στροφορμή του συστήματος παίρνουμε:

$$m_1 r_1^{-1/2} \Delta r_1 = -m_2 r_2^{-1/2} \Delta r_2 \quad (5.9)$$

οπότε η (5.7) θα μας δώσει τη συνολική μεταβολή στην ενέργεια του συστήματος και αν σε αυτήν αντικαταστήσουμε το  $\Delta r_2$  από την (5.9) θα πάρουμε:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \frac{GM}{2} \left( \frac{m_1}{r_1^2} \Delta r_1 + \frac{m_2}{r_2^2} \Delta r_2 \right) \Rightarrow \\ \Delta E &= -\frac{GMm_1 \Delta r_1}{2r_1^2} \left( \left( \frac{r_1}{r_2} \right)^{3/2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι το σώμα 1 ήταν αρχικά σε μεγαλύτερη απόσταση από την κεντρική μάζα, σε σχέση με το σώμα 2, για να μειωθεί η ενέργεια του συστήματος θα πρέπει το  $\Delta r_1$  να είναι θετικό, άρα το σώμα 1 θα μετακινηθεί σε ακόμα μεγαλύτερες ακτινικές αποστάσεις. Αν όμως το σώμα 1 βρισκόταν αρχικά πιο κοντά στο κεντρικό σώμα, τότε από την (5.10) φαίνεται ότι  $\frac{r_1}{r_2} < 1$  συνεπώς το  $\Delta r_1$  πρέπει να γίνει αρνητικό, το σώμα 1 δηλαδή να μετακινηθεί σε μικρότερες αποστάσεις. Βλέπουμε συνεπώς ότι σε κάθε περίπτωση για να μειωθεί η ενέργεια του συστήματος και παράλληλα να διατηρηθεί η συνολική στροφορμή του, πρέπει το σώμα που βρίσκεται κοντύτερα στο κεντρικό να πλησιάσει ακόμη περισσότερο, ενώ το σώμα που βρίσκεται πιο μακριά να κινηθεί ακόμη μακρύτερα. Αυτή είναι και η βασική διαδικασία, που συμβαίνει σε έναν δίσκο προσαύξησης.

Αν εξετάσουμε την κίνηση περισσότερων σωμάτων σε ένα δίσκο προσαύξησης, τότε διαπιστώνουμε ότι είναι δυνατόν να ελαχιστοποιηθεί η ενέργεια του συστήματος και παράλληλα να διατηρηθεί η στροφορμή του, αν τα περισσότερα σώματα κινηθούν προς την κεντρική μάζα, ενώ κάποια λίγα κινηθούν σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από αυτήν. Για να συμβεί όμως κάτι τέτοιο θα πρέπει τα σωματίδια στο δίσκο να μπορούν να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους. Η αλληλεπίδραση αυτή πετυχαίνεται μέσω της μεταξύ τους τριβής. Αν χωρίσουμε τον δίσκο σε κυκλικούς δακτυλίους και εξετάσουμε δύο γειτονικούς δακτυλίους, τότε υποθέτοντας ότι η περιστροφή τους γίνεται με βάση την (5.6), διαπιστώνουμε ότι ο εξωτερικός δακτύλιος περιστρέφεται πιο αργά από τον εσωτερικό. Έτσι λόγω της τριβής που αναπτύσσεται μεταξύ τους, ο εσωτερικός δακτύλιος τείνει να επιβραδυνθεί, ενώ ο εξωτερικός τείνει να επιταχυνθεί. Έχουμε, δηλαδή, μεταφορά στροφορμής από το εσωτερικό του δίσκου προς το εξωτερικό. Αυτή η μεταφορά στροφορμής αναγκάζει την μάζα από τον εσωτερικό δακτύλιο να κινηθεί προς το εσωτερικό του δίσκου και τη μάζα από τον εξωτερικό δακτύλιο προς το εξωτερικό του δίσκου.

### 5.3.2 Δίσκος αποτελούμενος από αέριο.

Η κατάσταση είναι πιο περίπλοκη για έναν δίσκο που αποτελείται από αέριο, γιατί το υλικό διαχέεται και προς τις δύο κατευθύνσεις. Αυτό σημαίνει ότι γίνεται ανάμιξη των αερίων που βρίσκονται σε γειτονικούς κυκλικούς δακτυλίους και κατά συνέπεια έχουμε και μεταφορά στροφορμής, αφού η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αερίου εξαρτάται από την ακτίνα.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την μεταφορά της στροφορμής, ως συνάρτηση του ιξώδους  $\nu$ . Θα υποθέσουμε ότι τα σωματίδια του αερίου κινούνται με μια τυπική ταχύτητα  $w$  και διανύουν μια μέση ελεύθερη διαδρομή  $\lambda$ , πριν συγκρουστούν με άλλα σωματίδια. Η μεταφορά της στροφορμής συμβαίνει από την ανάμιξη του αερίου που βρίσκεται σε ακτίνα  $R-\lambda/2$  και κινείται προς το εξωτερικό του δίσκου, με το αέριο που βρίσκεται σε ακτίνα  $R+\lambda/2$  και κινείται προς το εσωτερικό του δίσκου. Όσον αφορά στο πρώτο αέριο, έχει στροφορμή:

$$J_{in} = (R - \lambda/2)^2 \Omega(R - \lambda/2) = (R - \lambda/2)^2 [\Omega(R) - (\lambda/2)(d\Omega/dR)] \quad (5.11)$$

ενώ η αντίστοιχη σχέση για το δεύτερο είναι:

$$J_{out} = (R + \lambda/2)^2 \Omega(R + \lambda/2) = (R + \lambda/2)^2 [\Omega(R) + (\lambda/2)(d\Omega/dR)] \quad (5.12)$$

Οπότε η μεταφορά στροφορμής σε ακτίνα  $R$  από το κεντρικό σώμα, ανά μονάδα μήκους και για ένα δίσκο με επιφανειακή πυκνότητα  $\Sigma$  είναι:

$$\Sigma w [(R - \lambda/2)^2 (-\lambda/2) d\Omega/dR - (R + \lambda/2)^2 (\lambda/2) d\Omega/dR] = -\Sigma w \lambda R^2 d\Omega/dR \quad (5.13)$$

όπου έχουμε υποθέσει ότι το  $\lambda$  είναι μικρό σε σχέση με μια τυπική απόσταση στην οποία αλλάζει το  $\Omega$  σημαντικά. Από την σχέση αυτή συμπεραίνουμε ότι η ροπή στρέψεως  $g$  από τον εσωτερικό κυκλικό δακτύλιο, στην ακτίνα  $R$ , προς τον εξωτερικό, είναι:

$$g = -2\pi R \Sigma \nu R^2 d\Omega/dR \quad (5.14)$$

όπου το ιξώδες είναι:  $\nu = \lambda w$ . Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι αν η παράγωγος  $d\Omega/dR$  είναι αρνητική τότε η μεταφορά της στροφορμής

γίνεται από το εσωτερικό του δίσκου προς το εξωτερικό, όπως είχαμε βρει πιο πριν, με ένα πιο ποιοτικό τρόπο.

Επίσης πρέπει να αναφέρουμε ότι μέχρι στιγμής δεν καθορίσαμε επακριβώς τη φύση του ιξώδους  $\nu$ . Αν αυτό είναι απλά μοριακής φύσεως, οφείλεται δηλαδή στις τυχαίες κινήσεις των μορίων ενός αερίου, τότε δυστυχώς, εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι αυτό είναι πολύ μικρό για να έχει κάποιο πρακτικό αποτέλεσμα σε ένα δίσκο προσαύξησης. Παρόλα αυτά εικάζεται ότι άλλες διαδικασίες, όπως τυρβώδεις κινήσεις του υλικού του δίσκου, μπορούν να αυξήσουν σημαντικά το ιξώδες. Οι διαδικασίες αυτές μπορούν να μοντελοποιηθούν επιλέγοντας κατάλληλες τιμές για τα μεγέθη  $w$ ,  $\lambda$ .

## 5.4 Η προσέγγιση του λεπτού δίσκου.

### 5.4.1 Διατήρηση μάζας και στροφορμής.

Θεωρούμε ένα λεπτό δίσκο, στον οποίο όλα τα σωματίδια υποθέτουμε ότι κινούνται σε κυκλικές τροχιές και βρίσκονται πάνω σε ένα συγκεκριμένο επίπεδο. Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ χρήσιμη, αφού μας επιτρέπει να φτιάξουμε μοντέλα για δίσκους, τα οποία φαίνεται να επαληθεύονται από τις παρατηρήσεις. Υποθέτουμε επίσης ότι οι ακτινικές κινήσεις των σωμάτων είναι πολύ μικρές, ενώ θεωρούμε ότι οι ακτινικές ταχύτητες εξαρτώνται τόσο από την ακτίνα, όσο και από τον χρόνο, έτσι ώστε να μπορούμε να χειριστούμε και χρονοεξαρτημένες καταστάσεις. Θεωρώντας τώρα έναν κυκλικό δακτύλιο σε απόσταση  $R$  και πλάτους  $\Delta R$ , η συνολική μάζα του δακτυλίου αυτού είναι:  $2\pi R\Delta R\Sigma$  και η συνολική του στροφορμή:  $2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega$ . Οπότε η εξίσωση της διατήρησης της μάζας γράφεται:

$$\frac{\partial}{\partial t}(2\pi R\Delta R\Sigma) = U_R(R, t)2\pi R\Sigma(R, t) - U_R(R+\Delta R, t)2\pi(R+\Delta R)\Sigma(R+\Delta R, t) \Rightarrow$$

$$R\frac{\partial\Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma U_R) = 0 \quad (5.15)$$

όπου για να εξαγάγουμε την (5.15) πήραμε το όριο για πολύ μικρά  $\Delta R$ . Να διευκρινίσουμε στο σημείο αυτό ότι η ταχύτητα  $U_R$  είναι η ακτινική ταχύτητα του υλικού, χωρίς όμως να συμπεριλαμβάνονται σε αυτήν τυχόν τυρβώδεις κινήσεις του υλικού, αφού αυτές δεν συνεισφέρουν στη συνολική ροή της μάζας προς μια συγκεκριμένη διεύθυνση. Παρόμοια η εξίσωση για τη διατήρηση της στροφορμής γράφεται:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(2\pi R\Delta R\Sigma R^2\Omega) &= U_R(R,t)2\pi R\Sigma(R,t)R^2\Omega(R) \\
&\quad -U_R(R+\Delta R,t)2\pi(R+\Delta R)\Sigma(R+\Delta R,t) \\
&\quad (R+\Delta R)^2\Omega(R+\Delta R) - \frac{\partial g}{\partial R}\Delta R \Rightarrow \\
R\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2\Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma U_R R^2\Omega) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g}{\partial R} \quad (5.16)
\end{aligned}$$

#### 5.4.2 Οι εξισώσεις για την επιφανειακή πυκνότητα, την ακτινική ταχύτητα και το ρυθμό προσαύξησης της μάζας.

Χρησιμοποιώντας τις (5.15) και (5.16) για να απαλοίσουμε την  $U_R$  παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
R\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma U_R) \Rightarrow \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= -\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{2\pi(R^2\Omega)'}\frac{\partial g}{\partial R}\right) \Rightarrow \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{((RGM)^{1/2})'}\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{3}{2}\frac{\Sigma\nu R^3(GM)^{1/2}}{R^{5/2}}\right)\right) \Rightarrow \\
\frac{\partial \Sigma}{\partial t} &= \frac{3}{R}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^{1/2}\frac{\partial}{\partial R}(\nu\Sigma R^{1/2})\right) \quad (5.17)
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την υπόθεση ότι για την γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  ισχύει η (5.6). Η (5.17) είναι η βασική εξίσωση που καθορίζει την χρονική εξέλιξη της επιφανειακής πυκνότητας σε έναν δίσκο. Αποτελεί μια μη γραμμική εξίσωση διάχυσης για το  $\Sigma$  και αυτό γιατί το  $\nu$  μπορεί να εξαρτάται από τα  $\Sigma, R, t$ .

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (5.16),(5.17) παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
R\frac{\partial}{\partial t}(\Sigma R^2\Omega) + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma U_R R^2\Omega) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial g}{\partial R} \Rightarrow \\
R^2\Omega\left[R\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial R}(R\Sigma U_R)\right] + R\Sigma\frac{\partial}{\partial t}(R^2\Omega) + R\Sigma U_R(R^2\Omega)' &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R} \Rightarrow \\
R\Sigma U_R(R^2\Omega)' &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial G}{\partial R} \quad (5.18)
\end{aligned}$$

όπου υποθέσαμε ότι  $\frac{\partial \Omega}{\partial t} = 0$ . Συνδυάζοντας την εξίσωση (5.14) με την (5.18) μπορούμε να υπολογίσουμε την  $U_R$ :

$$U_R = -\frac{3}{\Sigma R^{1/2}} \frac{\partial}{\partial R} [\nu \Sigma R^{1/2}] \quad (5.19)$$

Έτσι αν στην (5.19) αντικαταστήσουμε το  $\Sigma$ , από τη λύση της (5.17), θα έχουμε μια έκφραση για την ακτινική ταχύτητα του υλικού του δίσκου.

Γνωρίζοντας τώρα τα μεγέθη της επιφανειακής πυκνότητας και της ακτινικής ταχύτητας, μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\dot{M}$ , μέσω της εξίσωσης:

$$\dot{M} = -2\pi R \Sigma U_R \quad (5.20)$$

Είναι φανερό ότι για να προχωρήσουμε παραπέρα στη μελέτη μας, θα πρέπει να κάνουμε κάποιες υποθέσεις για το  $\nu$ , το οποίο όπως προαναφέραμε μπορεί να σχετίζεται με διεργασίες στον δίσκο που μας είναι τελείως άγνωστες. Αν υποθέσουμε ότι το  $\nu$  είναι σταθερό, τότε η (5.17) μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Στην περίπτωση αυτή απλά θα αναφέρουμε, χωρίς να μπούμε σε περαιτέρω λεπτομέρειες, ότι ο τυπικός χρόνος στον οποίο διαχέεται το υλικό του δίσκου που βρίσκεται αρχικά σε ακτίνα  $R$  είναι:

$$t_{visc} \sim R^2/\nu$$

## 5.5 Η φύση του ιξώδους.

### 5.5.1 Το πρόβλημα με το ιξώδες.

Ένα από τα άλυτα προβλήματα μέχρι στιγμής στους δίσκους προσαύξησης είναι η φύση του ιξώδους. Όπως έχουμε αναφέρει ήδη, το μοριακό ιξώδες έχει πολύ μικρή επίδραση στα φαινόμενα που διαδραματίζονται σε έναν δίσκο, οπότε αναζητούνται καινούριοι μηχανισμοί που να είναι ικανοί να ερμηνεύσουν το απαιτούμενο ιξώδες για την κατασκευή ενός αυτοσυνεπούς μοντέλου που θα περιγράψει τις βασικές διαδικασίες σε έναν δίσκο προσαύξησης.

Η τυρβώδης ροή της ύλης ήταν για αρκετό καιρό ένας δημοφιλής μηχανισμός προς αυτήν την κατεύθυνση. Παρόλα αυτά υιοθετώντας ένα τέτοιο μοντέλο, βρέθηκε ότι η μεταφορά της στροφορμής γίνεται πιο εύκολα προς το εσωτερικό του δίσκου, παρά προς το εξωτερικό. Εξίσου σημαντικά προβλήματα αντιμετώπισαν και άλλα θεωρητικά μοντέλα, τα οποία λάμβαναν υπόψη το βαρυτικό πεδίο ενός συνοδού αστέρα.

### 5.5.2 Η βαρυτική αστάθεια.

Το γεγονός ότι, τουλάχιστον αρχικά, το μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας ενός αστέρα βρίσκεται στον δίσκο, υποδεικνύει ότι κατά τα αρχικά στάδια της προσαύξησης οι βαρυτικές αστάθειες μπορούν να αποτελέσουν ξεχωριστό μηχανισμό για μεταφορά της στροφορμής.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες μπορεί να εμφανιστεί η βαρυτική αστάθεια. Παρόλο που μια τέτοια αστάθεια δεν πρέπει να είναι αξονικά συμμετρική, αποδεικνύεται ότι το κριτήριο για την εμφάνιση της είναι σχεδόν το ίδιο με την περίπτωση της αξονικά συμμετρικής αστάθειας. Η σχέση διασποράς για συμμετρικούς τρόπους δόνησης σε έναν λεπτό, περιστρεφόμενο δίσκο είναι:

$$\omega^2 = \kappa^2 + c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma |k| \quad (5.21)$$

(όταν αναφερόμαστε σε δίσκους Kepler  $\kappa = \Omega$ ). Για αρνητικά  $\omega^2$ , οι διαταραχές αυξάνουν εκθετικά και ο δίσκος είναι ασταθής. Η οριακή συνθήκη εμφανίζεται όταν  $\omega = 0$ . Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$Q = \frac{c_s k}{\pi G \Sigma} < 1 \quad (5.22)$$

Η σχέση (5.10) βέβαια είναι προσεγγιστική και η ακριβής τιμή της αριθμητικής σταθεράς εξαρτάται από τις υποθέσεις που θα κάνουμε. Για να καταλάβουμε όμως καλύτερα τη φυσική που κρύβεται πίσω από τη σχέση (5.10), θα πρέπει να μελετήσουμε την κίνηση μιας μικρής περιοχής του δίσκου. Όταν η περιοχή αυτή συμπιέζεται το βαρυτικό της πεδίο γίνεται πιο ισχυρό, ταυτόχρονα όμως περιστρέφεται πιο γρήγορα, με αποτέλεσμα να αυξάνει η φυγόκεντρος δύναμη που αντιτίθεται στην βαρύτητα. Η ισορροπία μεταξύ των δύο αυτών ανταγωνιστικών φαινομένων, οδηγεί στο κριτήριο της αστάθειας.

Για μια πιο ποσοτική περιγραφή της βαρυτικής αστάθειας θα θεωρήσουμε το υλικό του δίσκου, το οποίο αρχικά ισορροπεί μέσα στην περιοχή  $\Delta R$ , ενώ στη συνέχεια συμπιέζεται στην περιοχή  $\Delta R - \delta R$ . Η μεταβολή στη δύναμη της βαρύτητας ανά μονάδα μάζας από αυτήν την αλλαγή είναι:

$$F_G = \frac{GM}{(\Delta R - \delta R)^2} \approx \frac{GM}{(\Delta R)^2} \left(1 - 2 \frac{\delta R}{\Delta R}\right) \quad (5.23)$$

ενώ η αρχική στροφορμη της περιοχής που μελετάμε ήταν:



$$l \sim \Omega \Delta R^2 \quad (5.24)$$

Μετά τη συστολή η νέα γωνιακή ταχύτητα γίνεται:

$$\Omega' \sim \frac{l}{(\Delta R - \delta R)^2} \sim \Omega \left(1 + 2 \frac{\delta R}{\Delta R}\right) \quad (5.25)$$

ενώ για τη νέα φυγόκεντρο επιτάχυνση θα έχουμε:

$$\frac{u'^2}{(\Delta R - \delta R)^2} \sim \Omega'^2 (\Delta R - \delta R) \sim \Omega^2 \Delta R \left(1 + 3 \frac{\delta R}{\Delta R}\right) \quad (5.26)$$

Οπότε, επειδή για να έχουμε ευστάθεια θα πρέπει η φυγόκεντρος δύναμη να υπερिσχύει της βαρύτητας, προκύπτει από τις (5.23),(5.26) η εξής συνθήκη:

$$\begin{aligned} 3\Omega^2 \delta R &> 2 \frac{GM\delta R}{(\Delta R)^3} \Rightarrow \\ 3\Omega^2 \delta R &> 2\pi G\Sigma \delta R / \Delta R \Rightarrow \\ \Delta R &> \frac{2\pi G\Sigma}{3\Omega^2} \end{aligned} \quad (5.27)$$

Επίσης με μια παρόμοια ανάλυση, κάνοντας χρήση του κριτηρίου Jeans (βλ. εξίσωση (5.22), όπου  $k \sim 1/\Delta R$ ) μπορεί να δειχθεί ότι:

$$\Delta R < \frac{c_s^2}{\pi G\Sigma} \quad (5.28)$$

Από τις (5.27),(5.28) προκύπτει:

$$\frac{3\Omega^2 c_s^2}{2(\pi G\Sigma)^2} > 1 \quad (5.29)$$

και έτσι, αν το  $\Omega$  είναι ανάλογο του  $k$ , καταλήγουμε ξανά στην σχέση (5.22).

## 5.6 Σταθεροί Δίσκοι σε συμπαγείς Αστέρες

### 5.6.1 Μαθηματική μοντελοποίηση σταθερών δίσκων

Για να περιγράψουμε τη δομή ενός Νευτώνειου δίσκου προσαύξησης γύρω από ένα συμπαγή αστέρα μάζας  $M$  θα υποθέσουμε ότι το αέριο προσαυξάνεται στον δίσκο από τον συνοδό αστέρα με σταθερό ρυθμό  $\dot{M}$  και με τον ίδιο ρυθμό από τον δίσκο στον συμπαγή αστέρα. Θα αγνοήσουμε παλιρροιογόνες δυνάμεις που ασκούνται στον δίσκο και θα υποθέσουμε ότι το κεντρικό επίπεδο του δίσκου βρίσκεται στο ισημερινό επίπεδο του συμπαγούς αστέρα ( $z = 0$ ). Αν το πάχος του δίσκου είναι  $2h$  τότε ισχύει:

$$\Sigma = \int_{-h}^h \rho dz \approx 2h\rho \quad (5.30)$$

Θα υποθέσουμε επίσης ότι ο δίσκος είναι λεπτός, δηλαδή  $h(r) \ll r$ . Η σχέση αυτή απαιτεί η θερμοκρασία του δίσκου να είναι χαμηλή έτσι ώστε η θερμότητα που παράγεται να ακτινοβολείται και να μην αποθηκεύεται στον δίσκο.

Επίσης μια άλλη εξίσωση που θα χρησιμοποιήσουμε προέρχεται από την ολοκλήρωση της εξίσωσης συνέχειας και είναι:

$$\dot{M} = 2\pi r \Sigma U = \sigma \tau \alpha \theta. \quad (5.31)$$

Έστω τώρα ότι  $\dot{J}^+ = \dot{M}(GMr)^{1/2}$  είναι ο ρυθμός προσαύξησης στροφορμής στον δίσκο και  $\beta \dot{J}^+ = \dot{M}(GMr_I)^{1/2}$  όπου  $r_I$  είναι η εσωτερική ευσταθής κυκλική τροχιά και  $|\beta| \leq 1$ , είναι ο ρυθμός με τον οποίο αφαιρείται στροφορμή από τον δίσκο και προστίθεται στον αστέρα. Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής θα πρέπει ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής να ισούται με τη ροπή στρέψης, δηλαδή με την δύναμη  $f_\phi$  ανά επιφάνεια κατά την γωνιακή διεύθυνση επί την επιφάνεια επί την ακτίνα  $r$ :

$$(f_\phi)(2\pi r \cdot 2h)(r) = \dot{M} \left( (GMr)^{1/2} - \beta (GMr_I)^{1/2} \right) \quad (5.32)$$

Η δύναμη ανά επιφάνεια  $f_\phi$  καθορίζεται μόνο από τα  $M$  και  $\dot{M}$ .

Από την υπόθεση ότι η θερμότητα που απελευθερώνεται ακτινοβολείται και δεν αποθηκεύεται στον δίσκο παίρνουμε την εξίσωση:

$$F(r) = \frac{3\dot{M}}{8\pi r^2} \frac{GM}{r} \left[ 1 - \beta \left( \frac{r_I}{r} \right)^{1/2} \right] \quad (5.33)$$

όπου  $F(r)$  είναι η ροή της ενέργειας που ακτινοβολείται από την πάνω και την κάτω πλευρά του δίσκου.

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής κατά την κάθετη στο επίπεδο του δίσκου διεύθυνση γράφεται:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} = -\frac{GM}{r^2} \frac{z}{r} \quad (5.34)$$

όπου  $z \ll r$ . Κάνοντας τις αντικαταστάσεις  $\Delta P \approx P$  και  $\Delta z \approx h$  παίρνουμε:

$$h \approx \left(\frac{P}{\rho}\right)^{1/2} \left(\frac{r^3}{GM}\right)^{(1/2)} \approx \frac{c_s}{\Omega} \quad (5.35)$$

Όσον αφορά στο  $\alpha$  παράμετρος, η φύση του όπως αναφέραμε και πιο πριν είναι πολύ δύσκολο να καθορισθεί και αποτελεί ένα ανοιχτό πρόβλημα. Εύκολα όμως μπορεί να αποδειχθεί ότι  $f_\phi \approx P$  (Black holes, white dwarfs and neutron stars, Shapiro and Teukolsky σελ. 437). Οπότε μπορούμε να γράψουμε γενικά:

$$f_\phi = \alpha P \quad (5.36)$$

όπου  $\alpha$  μια αδιάστατη παράμετρος που ικανοποιεί τη σχέση  $\alpha \leq 1$ . Η παράμετρος  $\alpha$  δεν μπορεί να καθορισθεί με τις γνώσεις που διαθέτουμε και γι' αυτό αποτελεί μια ελεύθερη παράμετρο για το σύστημα των εξισώσεων που θα κατασκευάσουμε. Τα μοντέλα των δίσκων που κατασκευάζουμε με τον τρόπο αυτό καλούνται  $\alpha$ -δίσκοι.

Η αδιαφάνεια  $\kappa$  σε έναν δίσκο προσαύξησης που οφείλεται στην απορρόφηση των φωτονίων, για τυπικές τιμές προσαύξησης σε έναν συμπαγή αστέρα μάζας περίπου  $1M_\odot$  δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{\kappa}_{abs} \simeq 0.64 \times 10^{23} (\rho[g\text{ cm}^{-3}])(T[K])^{-7/2} \text{ cm}^2\text{ g}^{-1} \quad (5.37)$$

όσον αφορά στη σκέδαση των φωτονίων κυριαρχεί η σκέδαση *Thomson* για την οποία ισχύει:

$$\bar{\kappa}_{scatt} \simeq 0.40 \text{ cm}^2\text{ g}^{-1} \quad (5.38)$$

Γενικά η απορρόφηση κυριαρχεί ως φαινόμενο της σκέδασης στα κρύα εξωτερικά στρώματα του δίσκου στις μεγάλες ακτίνες, ενώ το αντίθετο

συμβαίνει στις θερμές εσωτερικές περιοχές. Η μέση αδιαφάνεια  $\bar{k}(\rho, T)$  δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{1}{\bar{k}(\rho, T)} \approx \frac{1}{\bar{k}_{abs}} + \frac{1}{\bar{k}_{scatt}} \quad (5.39)$$

Η συνολική πίεση του υλικού του δίσκου είναι το άθροισμα της θερμικής πίεσης του αερίου και της πίεσης της ακτινοβολίας. Για ιονισμένο υδρογόνο έχουμε:

$$P(\rho, T) \simeq \frac{2\rho kT}{m_p} + \frac{1}{3}aT^4 \quad (5.40)$$

Για τυπικές τιμές των παραμέτρων του προβλήματος η διάδοση της ενέργειας προς την επιφάνεια του δίσκου γίνεται κυρίως με την ακτινοβολία παρά με άλλους μηχανισμούς. Αν το οπτικό βάθος του δίσκου (κατά την κάθετη στο επίπεδο του δίσκου διεύθυνση) είναι μεγαλύτερο της μονάδας, τα φωτόνια μεταφέρονται στην επιφάνεια του δίσκου με διάχυση. Στην περίπτωση αυτή ισχύει:

$$F(r) \approx \frac{\alpha c T^4}{\bar{k}\Sigma}, \quad \tau(r) > 1 \quad (5.41)$$

Αν πάλι το οπτικό βάθος είναι μικρότερο από τη μονάδα ο δίσκος γίνεται οπτικά διαφανής στα εξερχόμενα φωτόνια και αυτά μπορούν να διαφύγουν ελεύθερα προς την επιφάνεια του χωρίς να υποστούν σκέδάσεις ή απορροφήσεις. Έτσι η πιο πάνω σχέση μπορεί να αντικατασταθεί από την:

$$F(r) \approx h\Lambda(\rho, T), \quad \tau(r) < 1 \quad (5.42)$$

όπου  $\Lambda(\rho, T)$  ( $erg\ s^{-1}\ cm^{-3}$ ) είναι η μέση εκπομπή των φωτονίων στον δίσκο.

Οι εξισώσεις (5.30) μέχρι (5.40) και (5.41) ή (5.42) αποτελούν ένα αλγεβρικό σύστημα 9 εξισώσεων για τις 9 συναρτήσεις:  $\rho(r)$ ,  $h(r)$ ,  $\Sigma(r)$ ,  $u_r(r)$ ,  $P(r)$ ,  $T(r)$ ,  $f_\phi(r)$ ,  $\bar{k}(r)$  και  $F(r)$  που εξαρτώνται από τα  $r$ ,  $M$  και  $\dot{M}$ . Το παραπάνω σύστημα έχει λυθεί το 1973 από τους Shakura and Sunyaev καθώς και από τους Novikov and Thorne. Το αποτέλεσμα ήταν ότι για σταθερές τιμές των  $M$  και  $\dot{M}$ , ο δίσκος μπορεί να χωρισθεί σε τρεις ξεχωριστές περιοχές που εξαρτώνται από το  $r$ . Αυτές είναι:

1. Μια εξωτερική περιοχή, για μεγάλα  $r$ , στην οποία η πίεση του αερίου κυριαρχεί της πίεσης της ακτινοβολίας και στην οποία η αδιαφάνεια οφείλεται στην απορρόφηση.
2. Μια ενδιάμεση περιοχή, σε μικρότερα  $r$ , στην οποία η πίεση του αερίου κυριαρχεί της πίεσης της ακτινοβολίας, αλλά η αδιαφάνεια οφείλεται κυρίως στη σκέδαση.
3. Μια εσωτερική περιοχή, για πολύ μικρά  $r$ , στην οποία η πίεση της ακτινοβολίας κυριαρχεί της πίεσης του αερίου και η αδιαφάνεια οφείλεται κυρίως στη σκέδαση παρά στην απορρόφηση.

## 5.7 Συμπεράσματα

Οι δίσκοι προσαύξησης είναι γενικά ένα πολύ συνηθισμένο φαινόμενο στην αστροφυσική. Η ενεργειακή τους απόδοση είναι αρκετά υψηλή και κατά συνέπεια η φωτεινότητα τους μπορεί να φτάσει πολύ μεγάλες τιμές. Η βασική διεργασία που συμβαίνει σε έναν δίσκο προσαύξησης είναι η μεταφορά της στροφορμής από τα εσωτερικά στρώματα του δίσκου προς το εξωτερικό του. Το γεγονός αυτό επιτρέπει σε κάποιο ποσοστό του υλικού του δίσκου να κινηθεί προς το εσωτερικό του, ενώ μέρος του υλικού του θα κινηθεί και προς μεγαλύτερες αποστάσεις. Άγνωστη παραμένει όμως μέχρι στιγμής η φύση του ιξώδους, η οποία επιτρέπει την μεταφορά της στροφορμής. Διάφοροι μηχανισμοί έχουν προταθεί όπως η τυρβώδης ροή της ύλης, η βαρυτική αστάθεια και η μαγνητική αστάθεια. Παρόλα αυτά είμαστε σε θέση κάνοντας απλές υποθέσεις για την δομή του δίσκου καθώς και για τις βασικές φυσικές διεργασίες που συμβαίνουν σε αυτόν να κατασκευάσουμε διάφορα μοντέλα εξισώσεων και να περιγράψουμε έναν δίσκο προσαύξησης.

## 5.8 Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι η σχέση διασποράς για συμμετρικούς τρόπους δόνησης σε έναν λεπτό περιστρεφόμενο δίσκο είναι

$$\omega^2 = \kappa^2 + c_s^2 k^2 - 2\pi G \Sigma |k|$$

(Εξίσωση (5.21)»

2. Να μετατραπούν οι εξισώσεις συνέχειας και κίνησης του ρευστού από τις καρτεσιανές συντεταγμένες στις κυλινδρικές  $(r, \theta, z)$  για δίσκο προσαύξησης. Υποθέστε ότι η πυκνότητα

$$\Sigma(r, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r, \theta, z) dz$$

και

$$\vec{u} = u_r \hat{e}_r + (u_\theta + r\Omega) \hat{e}_\theta$$

3. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση Navier-Stokes για ένα δίσκο προσαύξησης σε ισορροπία (αγνοήστε το ιξώδες) δείξτε ότι  
 (α) Στους λεπτούς δίσκους (το πάχος  $H$  είναι πολύ μικρότερο από την ακτίνα  $R$ ) ισχύει η σχέση

$$c_s^2 \ll R^2 \Omega^2$$

όπου  $c_s$  είναι η ταχύτητα του ήχου και  $\Omega$  η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του δίσκου.

(β) Στους λεπτούς δίσκους η κλίση της πίεσης είναι αμελητέα

(γ) Αν υποθέσουμε ότι η κυκλική συνιστώσα της ταχύτητας  $u_\theta$  είναι πολύ μικρότερη από την ακτινική  $u_r$ , τότε η κίνηση υπακούει στο νόμο του Kepler .

4. Να μελετήσετε το άρθρο των Lynden-Bell and Pringle, 1974, M.N.R.A.S, 168, 603 και να υπολογίσετε ότι η ροπή που ασκεί ο εσωτερικός δακτύλιος στον εξωτερικό ενός λεπτού δίσκου προσαύξησης είναι

$$\mathcal{G} = -2\pi r^3 \Sigma \nu \frac{d\Omega}{dr}$$

## Κεφάλαιο 6

# Μαγνητικά πεδία στην αστροφυσική

### 6.1 Εισαγωγή

Οι ιδιότητες των μαγνητικών πεδίων που συναντάμε είτε στην καθημερινή μας ζωή, είτε στο εργαστήριο μας είναι καλά γνωστές. Στην Αστροφυσική όμως, οι μεγάλες διαστάσεις των αντικειμένων (αστέρες, γαλαξίες) δίνουν ένα άλλο, πολύ διαφορετικό χαρακτήρα στα μαγνητικά πεδία.

Στο Σύμπαν τα μαγνητικά πεδία έχουν τη μορφή "οργανισμού" που τροφοδοτείται με ενέργεια από τους αστέρες και τους γαλαξίες. Όπως θα συζητήσουμε στη συνέχεια ένα ασθενές μαγνητικό πεδίο μπορεί να ενισχυθεί, ενώ τα ισχυρά πεδία που προκύπτουν γίνονται με τη σειρά τους αφορμή για μία σειρά εκρηκτικών φαινομένων στο Σύμπαν.

Γνωρίζουμε ότι η βαρυτική κατάρρευση ενός μεσοαστρικού νέφους θα σημάνει την έναρξη των πυρηνικών αντιδράσεων στο κέντρο του δημιουργούμενου από την κατάρρευση αστέρα. Η ακτινοβολία που παράγεται στο κέντρο του αστέρα θα θέσει σε κίνηση τα εξωτερικά του στρώματα. Η κίνηση αυτή θα ενισχύσει το προϋπάρχον από το μεσοαστρικό νέφος μαγνητικό πεδίο. Έτσι, μέρος της κινητικής ενέργειας του ρευστού θα μετατραπεί σε μαγνητική ενέργεια. Θα ισχυριστούμε ότι: **Τα μαγνητικά πεδία στο διάστημα δημιουργούνται από την κίνηση του πλάσματος.**

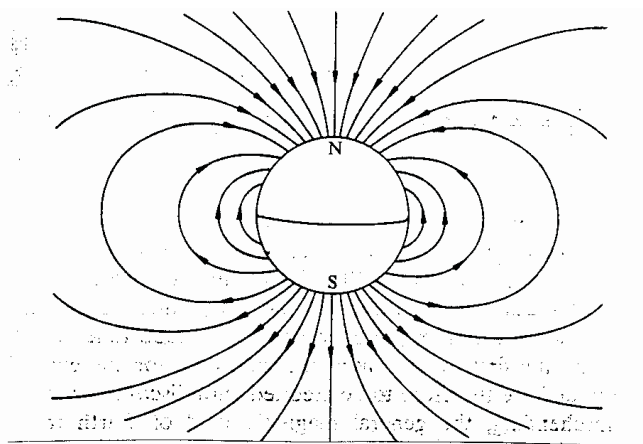
Το κέντρο της Γης, η ζώνη μεταφοράς στους αστέρες, οι δίσκοι προσαύξησης γύρω από τα συμπαγή αντικείμενα, το μεσοαστρικό αέριο, είναι μερικά από τα πιο γνωστά αστροφυσικά αντικείμενα που παράγουν συνεχώς νέα μαγνητικά πεδία (Κοσμικές Μαγνητικές Γεννήτριες).

Τα μαγνητικά πεδία καταστρέφονται με αργούς ρυθμούς, η δε ενέργειά

τους είτε μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια του πλάσματος (θέρμανση του πλάσματος) ή εκλύεται εκρηκτικά (εκλάμψεις) επιταχύνοντας ένα μικρό αριθμό φορτίων (κοσμικές ακτίνες).

## 6.2 Η φύση των μαγνητικών πεδίων

Ο Θαλής ο Μιλήσιος είναι ο πρώτος που αναφέρει αμοιβαία έλξη μεταξύ μαγνητών ενώ ο Πλάτωνας αναφέρει την έλξη του σιδήρου από μαγνήτες. Οι Κινέζοι φαίνεται να είναι οι πρώτοι που αξιοποίησαν τις ιδιότητες του μαγνήτη στη ναυσιπλοΐα. Στο Σχήμα 6.1 σχεδιάσαμε τη διεύθυνση που δείχνει η μαγνητική βελόνα υπό την επίδραση του μαγνητικού πεδίου της Γης.



Σχήμα 6.1: Οι μαγνητικές γραμμές στο διπολικό μαγνητικό πεδίο της Γης

Η διεύθυνσή της μεταβάλλεται συνεχώς από το ένα σημείο στο άλλο. Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιήσαμε μια οικογένεια καμπυλών που ονομάζουμε μαγνητικές γραμμές. Οι μαγνητικές γραμμές είναι μια χρήσιμη γραφική απεικόνιση που εισήγαγε πρώτος ο Faraday το δέκατο ένατο αιώνα. Θα κάνουμε ευρεία χρήση των μαγνητικών γραμμών σε τούτο το μάθημα. Η μαγνητική επαγωγή του πεδίου  $\vec{B}$  αποτελεί ένα μέτρο της δύναμης που ασκείται στη μαγνητική βελόνα κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών και συμβολίζεται με  $B_0$ . Η διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου σε κάθε σημείο προσδιορίζεται από τη διεύθυνση της μαγνητικής βελόνας. Η μονάδα μέτρησης της έντασης του μαγνητικού πεδίου στο σύστημα CGS είναι το Gauss. Ενδεικτικές τιμές του μαγνητικού πεδίου σε διάφορα αστροφυσικά αντικείμενα δίνονται στον Πίνακα 1.



Αστροφυσικά αντικείμενα	Ισχύς μαγνητικών πεδίων (Gauss)
Ηλιος	10- 1000
Δίας	10
Γη	0.6
Αστέρας HD 215441	32000
Αστέρες Νετρονίων	$10^{12}$

Πίνακας 6.1: Τιμές μαγνητικού πεδίου σε διάφορα Αστροφυσικά αντικείμενα

Εκτός από το μαγνητικό πεδίο βέβαια, υπάρχει και το ηλεκτρικό πεδίο. Αντιλαμβανόμαστε συνήθως αυτά τα πεδία ως δύο διαφορετικές οντότητες, ίσως ακριβώς λόγω της διαφορετικής φύσης των πηγών τους καθώς και των υποθεμάτων στα οποία αυτά τα πεδία ασκούν δυνάμεις: το μεν μαγνητικό πεδίο παράγεται από μαγνήτες ή ρεύματα και ασκεί δυνάμεις σε μαγνήτες και ρεύματα, το δε ηλεκτρικό παράγεται από φορτία και ασκεί δυνάμεις σε φορτία. Εντούτοις, όπως θα διαπιστώσουμε και πιο κάτω, το αν θα ανιχνεύσουμε ηλεκτρικό ή μαγνητικό πεδίο είναι καθαρά θέμα επιλογής του συστήματος αναφοράς στο οποίο θα κάνουμε τη μελέτη μας. Θα δούμε δηλαδή ότι τελικά τα δύο αυτά πεδία είναι αλληλένδετα, με την έννοια ότι αν μετακινηθούμε σε σχέση με το ένα, συναντάμε το άλλο. Ο νόμος του Ohm παρουσία μαγνητικού πεδίου παίρνει τη μορφή

$$\vec{J} = \sigma \left[ \vec{E} + \frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \right] \quad (6.1)$$

όπου με  $\sigma$  συμβολίζουμε την ειδική αγωγιμότητα και με  $v$  την ταχύτητα του πλάσματος. Η ειδική αγωγιμότητα στο πλάσμα είναι άπειρη άρα για να είναι η πυκνότητα του ρεύματος πεπερασμένη θα πρέπει να ισχύει

$$\vec{E} = -\frac{\vec{v} \times \vec{B}}{c} \quad (6.2)$$

Άρα ήδη από αυτή τη σχέση γίνεται φανερό ότι το μαγνητικό και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αλληλένδετα. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι βρισκόμαστε μέσα σε ένα ηλεκτρικά μονωμένο μεταλλικό κουτί. Τοποθετούμε ένα μικρό μαγνήτη εντός του κουτιού. Το ηλεκτρικό πεδίο εντός του κουτιού είναι παντού μηδέν. Εάν κινηθούμε με ταχύτητα  $v$  κάθετα στο μαγνητικό πεδίο μέσα στο μεταλλικό κουτί θα παρατηρήσουμε ένα ηλεκτρικό πεδίο.

Ένα φορτίο  $q$ , εάν κινηθεί κάθετα στις μαγνητικές γραμμές του μαγνήτη, θα αισθανθεί μια δύναμη  $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})/c$ , που είναι κάθετη προς τη ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο (η δύναμη αυτή είναι γνωστή ως δύναμη Lorentz). Η ισχύς του ηλεκτρικού πεδίου είναι  $v \cdot B$  Volt/m (αν η ταχύτητα μετρηθεί σε  $m/s$  και το μαγνητικό πεδίο σε Gauss). Άρα μπορεί να βρισκόμαστε ακίνητοι μπροστά στο μαγνήτη και να μην αισθανόμαστε κανένα ηλεκτρικό πεδίο ενώ όλα τα άλλα συστήματα αναφοράς που κινούνται αισθάνονται τη παρουσία ηλεκτρικού πεδίου. Είναι λοιπόν δύσκολο να απαντήσουμε το ερώτημα: Υπάρχει η όχι ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο μεταλλικό κουτί; Το ερώτημα αυτό δεν έχει μια γενική απάντηση, θα πρέπει να προσδιορισθεί το σύστημα στο οποίο θα κάνουμε τη μέτρηση. Το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο, αρκεί το σύστημα αναφοράς να κινείται με αρκετά μεγάλη ταχύτητα. Φυσικά το πεδίο αυτό δεν έχει καμιά αξία γιατί το πεδίο που μας ενδιαφέρει προσδιορίζεται από το συγκεκριμένο σύστημα που έχει φυσική σημασία για το πρόβλημα μας.

Στην αστροφυσική η διαφορά δυναμικού μπορεί να γίνει πολύ μεγάλη λόγω των μεγάλων διαστάσεων. Η διαφορά δυναμικού που προκύπτει όμως δεν έχει καμιά φυσική σημασία εκτός και δείξουμε ότι το σύστημα αναφοράς που υπολογίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο έχει κάποια ιδιαίτερη αξία. Η αλληλεπίδραση του ηλιακού ανέμου με το μαγνητικό πεδίο της Γης είναι ένα καλό παράδειγμα. Ο Ηλιακός άνεμος αποτελείται από πλάσμα και σαρώνει το μαγνητικό πεδίο της Γης ( $3 \times 10^{-5} G$ ) με ταχύτητα  $400 Km/s$ , δημιουργώντας στο σύστημα αναφοράς της Γης ένα ηλεκτρικό πεδίο  $1.2 \times 10^{-3} V/m$ . Για την απόσταση Γης-Ηλίου το δυναμικό είναι  $1.8 \times 10^8 V$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορες τιμές του ηλεκτρικού πεδίου αν χρησιμοποιήσουμε διαφορετικά συστήματα αναφοράς π.χ στο σύστημα αναφοράς που κινείται με τον ηλιακό άνεμο το ηλεκτρικό πεδίο είναι μηδέν, ενώ στο σύστημα που κινείται προς τον ήλιο με ταχύτητα  $400 Km/s$  το δυναμικό είναι  $3 \times 10^6 V$ .

Είμαστε συνηθισμένοι στην ιδέα ότι το μαγνητικό πεδίο δημιουργείται από τα ρεύματα. Η ενέργεια που κουβαλάνε τα ρεύματα τροφοδοτεί το μαγνητικό πεδίο. Ας κάνουμε όμως ένα πείραμα. Ας φτιάξουμε ένα μεγάλο ηλεκτρομαγνήτη που περιτυλίσει ένα κομμάτι σίδηρο για να δουλεύει καλύτερα. Περνάμε ένα ισχυρό ρεύμα και δημιουργείται γύρω από τον κύλινδρο του σιδήρου ένα ισχυρό μαγνητικό πεδίο. Ξαφνικά ανοίγουμε το διακόπτη και σταματάμε τη παροχή ρεύματος στον ηλεκτρομαγνήτη, παρατηρούμε όμως ότι ένα πολύ ισχυρό ρεύμα αναπτύσσεται στο διακόπτη, τόσο ισχυρό που μπορεί να τον καταστρέψει. Ο λόγος είναι απλός. Το ρεύμα δεν μπορεί να σταματήσει μέχρι να μηδενιστούν τα μαγνητικά πεδία, και τα μαγνητικά πεδία δεν μπορούν να μηδενιστούν μέχρι να καταναλωθεί η ενέργεια που έχουν αποθηκεύσει. Στο δεύτερο όμως σκέλος του πειράματος

είναι αδιανόητο να υποστηρίξουμε ότι το ρεύμα προκαλεί το μαγνητικό πεδίο. Η ενέργεια που αποθηκεύσαμε στο πεδίο δημιούργησε το ρεύμα που κατάστρεψε το διακόπτη την ώρα που τον ανοίγαμε.

Στην αστροφυσική δεν υπάρχουν σύρματα και μπαταρίες, σε πολύ λίγες περιπτώσεις μπορούμε να μιλήσουμε για ρεύματα που προκαλούν τα μαγνητικά πεδία. Κινήσεις ιονισμένων αερίων προκαλούν, αποθηκεύουν και καταστρέφουν το μαγνητικό πεδίο σε μια διαρκεί πορεία στο χρόνο. Γι' αυτό το "ζωντανό οργανισμό" που λέγεται μαγνητικό πεδίο θα μιλήσουμε σε τούτο το μάθημα.

### 6.3 Πως μετράμε τα μαγνητικά πεδία στη φύση ;

Η παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου προκαλεί το διαχωρισμό των γραμμών του φάσματος. Το φαινόμενο είναι γνωστό ως φαινόμενο Zeeman. Το ασθενές μαγνητικό πεδίο μπορεί να ανιχνευθεί με την μέτρηση της πόλωσης της διασπασμένης γραμμής. Στη παρούσα παράγραφο θα περιγράψουμε το διαχωρισμό και την πόλωση των γραμμών που του φάσματος λόγω της παρουσίας του μαγνητικού πεδίου στη πηγή που εκπέμπει το φως, και πώς θα βγάλουμε συμπεράσματα για την τιμή του μαγνητικού πεδίου. Θα περιγράψουμε επίσης την ακτινοβολία συγχροτρον των σχετικιστικών ηλεκτρονίων και τον τρόπο προσδιορισμού ασθενούς μαγνητικού πεδίου σε πολύ απομακρυσμένα αντικείμενα στο σύμπαν.

#### 6.3.1 Φαινόμενο Zeeman

Η κίνηση φορτισμένων σωματιδίων παρουσία ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου περιγράφεται από την εξίσωση

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)}{c} \right]$$

όπου  $m$  είναι η μάζα του φορτίου,  $c$  η ταχύτητα του φωτός. Η λύση της εξίσωσης αυτής απουσία ηλεκτρικού πεδίου και για σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο ( $\vec{B} = B_0 \hat{z}$ ) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} m\dot{v}_x &= \frac{qB_0}{c} v_y \\ m\dot{v}_y &= -\frac{qB_0}{c} v_x \\ m\dot{v}_z &= 0 \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να συμπεράνουμε από τις παραπάνω εξισώσεις ότι το φορτίο εκτελεί μια περιοδική κίνηση μέσα στο σταθερό μαγνητικό πεδίο με συχνότητα

$$\omega_B = \frac{qB_0}{mc} \quad (6.3)$$

Η συχνότητα αυτή ονομάζεται κυκλοτρονική συχνότητα ή συχνότητα Larmor. Το επόμενο βήμα είναι η μελέτη της κίνησης ενός ηλεκτρονίου παγιδευμένου στο πεδίο Coulomb ενός πρωτονίου και παρουσία σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Απουσία μαγνητικού πεδίου η κίνηση του ηλεκτρονίου είναι περιοδική με συχνότητα περιστροφής  $\omega_0$ . Οι εξισώσεις που θα περιγράψουν τη κίνηση φορτίου στο ελκτικό δυναμικό του πυρήνα είναι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x \\ m\ddot{y} &= -m\omega_0^2 y \\ m\ddot{z} &= -m\omega_0^2 z \end{aligned}$$

Η παρουσία ενός σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου  $\vec{B} = B_0\hat{z}$  θα προσθέσει και την επίδραση της δύναμης Lorentz στις παρακάτω σχέσεις,

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -m\omega_0^2 x + \frac{e}{c} B_0 \dot{y} \\ m\ddot{y} &= -m\omega_0^2 y - \frac{e}{c} B_0 \dot{x} \\ m\ddot{z} &= -m\omega_0^2 z \end{aligned}$$

Η κίνηση στη διεύθυνση  $z$  δεν εξαρτάται από το μαγνητικό πεδίο. Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να λυθούν εύκολα αν θέσουμε  $x = ae^{i\omega t}$  και  $y = be^{i\omega t}$ . Τότε

$$\begin{aligned} a(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega \frac{eB_0}{mc} b &= 0 \\ b(\omega_0^2 - \omega^2) + i\omega \frac{eB_0}{mc} a &= 0 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη εξίσωση με  $i$  και αφαιρώντας την από την πρώτη, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(a \pm ib)(\omega_0^2 - \omega^2) \mp (a \pm ib)\omega\omega_B = 0 \quad (6.4)$$

ή  $\omega_0^2 - \omega^2 \pm \omega\omega_B = 0$ . Θεωρώντας ότι  $\omega_B \ll \omega_0$  και ότι  $\omega \simeq \omega_0$  έχουμε  $\omega = \omega_0 \pm \omega_B$ .

Η κίνηση του φορτίου στο επίπεδο  $(x, y)$  θα είναι περιοδική με

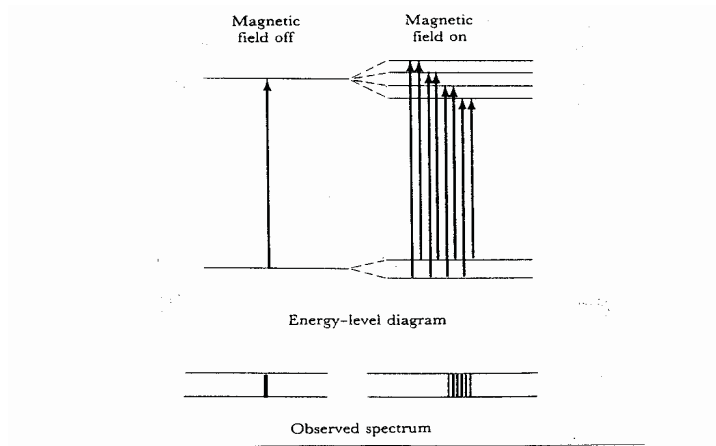
$$x = a \cos(\omega_0 \mp \omega_B)t$$

$$y = a \sin(\omega_0 \pm \omega_B)t$$

Ένα φορτίο που εκτελεί την κίνηση που περιγράψαμε θα εκπέμπει:

- Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με τη μορφή επίπεδων κυμάτων συχνότητας  $\omega_0$ , λόγω της κίνησης του κατά μήκος του άξονα  $z$
- Ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με τη μορφή κυκλικά πολωμένων κυμάτων με συχνότητες  $\omega_0 + \omega_B$  και  $\omega_0 - \omega_B$ , που διαδίδονται κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, λόγω της κίνησής του στο επίπεδο  $(x, y)$

Εάν η γραμμή που ενώνει την πηγή με τον παρατηρητή (γραμμή παρατήρησης) είναι παράλληλη με τον άξονα  $z$ , θα παρατηρήσουμε δύο νέες συχνότητες  $\omega_0 \pm \omega_B$ . Εάν η γραμμή παρατήρησης είναι κάθετη στον άξονα  $z$  τότε θα παρατηρήσουμε τρεις γραμμές (Zeeman triplet)  $\omega_0 - \omega_B$  (κυκλικά πολωμένη),  $\omega_0$  (γραμμικά πολωμένη) και  $\omega_0 + \omega_B$  (κυκλικά πολωμένη). Αυτός ο διαχωρισμός αποτελεί έναν τρόπο μελέτης του τοπικού μαγνητικού πεδίου στην αστροφυσική (βλέπε Σχήμα 6.2)



Σχήμα 6.2: Ο διαχωρισμός των γραμμών λόγω του ισχυρού μαγνητικού πεδίου πάνω από τις κηλίδες στον Ήλιο. Το μαγνητικό πεδίο είναι  $4000G$ .

Η κβαντική περιγραφή του φαινομένου Zeeman είναι περισσότερο σύνθετη (και αρκετά πιο ακριβής). Η μελέτη της συμπεριφοράς του δεσμευμένου ηλεκτρονίου παρουσία ενός εξωτερικού σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου καταλήγει στο διαχωρισμό των ενεργειακών σταθμών

$$\Delta E = \beta B_0 J_z g$$

όπου  $\beta$  σταθερά και

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) - S(S+1)}{2J(J+1)}$$

ο παράγοντας Lande (Lande factor).

Η κίνηση ηλεκτρονίου παγιδευμένου στο πεδίο του πυρήνα και παρουσία σταθερού και ομογενούς μαγνητικού πεδίου προσδιορίζεται από τέσσερις κβαντικούς αριθμούς

$L$  κβαντικός αριθμός της τροχιακής στροφορμής

$S$  κβαντικός αριθμός του spin

$J$  κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής

$J_z$  μαγνητικός κβαντικός αριθμός

(προβολή του  $J$  στη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου)

Η μετάπτωση ενός ηλεκτρονίου από τη στάθμη  $(g, J_z) \rightarrow (g', J'_z)$  θα καταγραφεί με μετατόπιση

$$\Delta \lambda_B = \left( \frac{e}{4\pi c m_e} \right) J_z g \lambda^2 B_0$$

Όταν το μαγνητικό πεδίο μετρηθεί σε Gauss και το μήκος κύματος σε εκατοστά τότε

$$\Delta \lambda_B = 4.67 \times 10^{-5} g^* \lambda^2 B$$

όπου  $g^* = J_z g$ . Στην απλούστερη περίπτωση που το spin είναι μηδέν ( $S = 0$ ) το  $g = 1$ . Αν και οι δύο καταστάσεις έχουν  $S = 0$  τότε οι επιλογές για το  $J_z = (1, 0, 1)$  και το αποτέλεσμα είναι ο κανονικός διαχωρισμός Zeeman (Zeeman triplet). Στις περισσότερες περιπτώσεις ο διαχωρισμός των γραμμών είναι αρκετά πιο σύνθετος, παρουσιάζονται πολλαπλότητες και "ανωμαλίες" που χρειάζονται αρκετά πολύπλοκους υπολογισμούς. Συνήθως οι υπολογισμοί αυτοί προσδιορίζουν με ακρίβεια το  $\gamma$ .

Στην απλή περίπτωση που η μία γραμμή του φάσματος μετατρέπεται σε τρεις, η γραμμή που υπήρχε και πριν την εφαρμογή του μαγνητικού πεδίου  $J_z = 0$  συμβολίζεται με  $\pi$  και είναι γραμμικά πολωμένη, ενώ οι δύο άλλες με  $\sigma$  και είναι κυκλικά πολωμένες. Οι κανόνες που αναφέραμε για την απλή τριάδα εμφανίζονται και στις πολύπλοκες περιπτώσεις απλά τώρα η συνεισφορά της κάθε συνισταμένης έχει έναν παράγοντα βάρους.

Είναι φανερό ότι οι φασματικές γραμμές παρουσιάζουν ένα εύρος λόγω του φαινομένου Doppler ή των συγκρούσεων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να μη μπορούμε να διαγνώσουμε μετατοπίσεις που προκαλούνται από ασθενή μαγνητικά πεδία. Στον Ήλιο δεν είναι εύκολο να διακρίνουμε το διαχωρισμό φασματικών γραμμών που προέρχονται από μαγνητικά πεδία ασθενέστερα από  $0.15T$ . Εάν το πεδίο είναι ασθενέστερο, το φαινόμενο Zeeman συμμετέχει στην πλάτυνση των γραμμών του φάσματος, επειδή όμως οι γραμμές  $\sigma$  έχουν διαφορετική πολικότητα και ο διαχωρισμός είναι εύκολος αν μπορούμε να μετρήσουμε την πολικότητα. Η μέτρηση της πολικότητας των γραμμών του φάσματος μας οδηγεί σε ένα νέο θέμα.

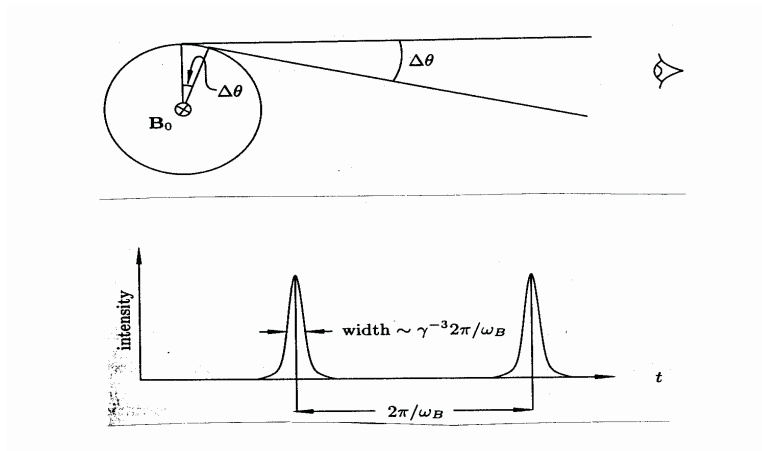
### 6.3.2 Ακτινοβολία σύγχροτρον

Έχουμε ήδη δείξει ότι το ελεύθερο ηλεκτρόνιο εκτελεί μια ελικοειδή κίνηση μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο. Εάν το ηλεκτρόνιο έχει ταχύτητα κάθετη προς το μαγνητικό πεδίο πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός ( $v_{\perp} \simeq c$ ) (και α υποθέσουμε ότι  $v_{\parallel} \simeq 0$ ) τότε η ακτινοβολία που εκπέμπει συγκεντρώνεται σε ένα μικρό κώνο που έχει άνοιγμα  $\Delta\theta \sim (1/\gamma)$ , όπου  $\gamma$  είναι ο σχετικιστικός παράγοντας (βλέπε Σχήμα 6.3(α)). Ο παρατηρητής θα καταγράψει τη χρονοσειρά που φαίνεται στο Σχήμα 6.3(β).

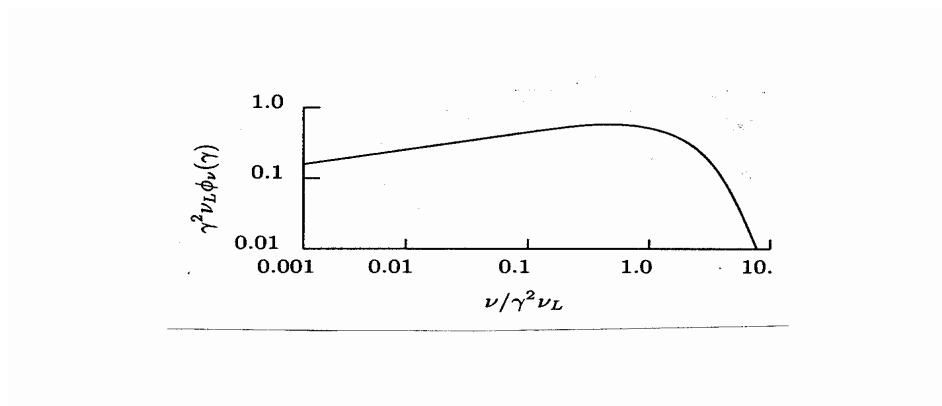
Το φάσμα της ακτινοβολίας που θα καταγράψουμε από μια μονοενεργειακή κατανομή από ηλεκτρόνια με ενέργεια ( $m_0c^2\gamma$ ) φαίνεται στο Σχήμα 6.4.

Από αυτό το φάσμα εύκολα προσδιορίζουμε το μαγνητικό πεδίο γιατί το μέγιστο παρουσιάζεται κοντά στην κυκλοτρονική συχνότητα (η αναλυτική περιγραφή αυτών των αποτελεσμάτων ξεφεύγει από τα πλαίσια του μαθήματος και προτείνεται για εργασία.)

Εάν η κατανομή των ηλεκτρονίων δεν είναι μονοενεργειακή, τότε για να υπολογίσουμε το φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον θα πρέπει να προσθέσουμε τη συνεισφορά όλων των ηλεκτρονίων στο χώρο των ταχυτήτων (δηλαδή να θεωρήσουμε την κατανομή των ταχυτήτων σαν άθροιση μονοενεργειακών κατανομών με διαφορετική πυκνότητα). Σε μια τέτοια περίπτωση η ενεργειακή κατανομή των σχετικιστικών ηλεκτρονίων θα έχει τη μορφή



Σχήμα 6.3: (α) Η ακτινοβολία από ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα μέσα σε σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο. (β) Η χρονοσειρά της ακτινοβολίας που θα καταγράψει ο παρατηρητής που βρίσκεται μακριά από την πηγή.



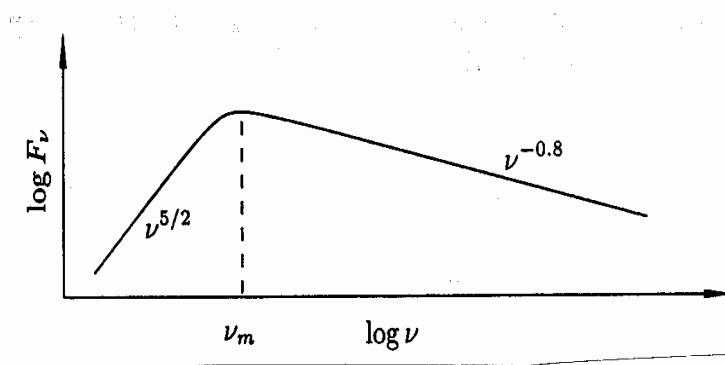
Σχήμα 6.4: Ακτινοβολία σύγχροτρον από μονοενεργειακή κατανομή ηλεκτρονίων.

$$f_b(\gamma) \sim \gamma^{-p}$$

όπου  $p$  σταθερά. Το φάσμα έχει επίσης τη μορφή νόμου δύναμης  $I_\nu \sim n^{-(p-1)/2}$ .



Αν τα σχετικιστικά ηλεκτρόνια δεν είναι στο κενό, το πλάσμα που τα περιβάλλει θα απορροφήσει τις χαμηλές συχνότητες και η κατανομή  $f(\gamma)$  θα έχει τη μορφή  $f(\gamma) = f_M + f_b$ , όπου  $f_M$  είναι η κατανομή Maxwell για το πλάσμα, όπου υποθέτουμε ότι βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Στην περίπτωση αυτή το φάσμα της ακτινοβολίας σύγχροτρον της κατανομής  $f(\gamma)$  έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 6.5.



Σχήμα 6.5: Η αναμενόμενη ραδιοφωνική εκπομπή από μια συμπαγή ραδιοπηγή. Η ακτινοβολία γίνεται οπτικά αδιαφανής κάτω από μια χαρακτηριστική συχνότητα

Στις "χαμηλές" συχνότητες έχει τη μορφή του μελανού σώματος (optically thick)  $I_\nu \sim \nu^{5/2}$  ενώ στις "υψηλές" συχνότητες ακολουθεί το νόμο που περιγράψαμε πιο πάνω (optically thin). Η σχέση που συνδέει την πυκνότητα ροής ακτινοβολίας, τη συχνότητα και τη γωνιακή στροφορμή της πηγής  $\theta_s = R_s/r$ , ( $R_s$  είναι η ακτίνα της πηγής και  $r$  η απόσταση του παρατηρητή από την πηγή) είναι  $F_{\nu_m} \sim B_0^{-1/2} \nu_m^{5/2} \theta_s^2$ . Τα  $\nu_m$ ,  $\theta_s$  και  $F_{\nu_m}$  μπορεί να μετρηθούν από τις παρατηρήσεις, άρα έμμεσα μπορούμε να προσδιορίσουμε και την τιμή του μαγνητικού πεδίου.

## 6.4 Μαγνητοϋδροδυναμική (MHD)

Η μαγνητοϋδροδυναμική (θα χρησιμοποιούμε στη συνέχεια την συντομογραφία MHD) αποτελεί την επέκταση της υδροδυναμικής στο ιονισμένο αέριο (πλάσμα). Βασική προϋπόθεση στη μαγνητοϋδροδυναμική είναι ότι το μέσο ηλεκτρικό πεδίο μέσα στο ρευστό είναι μηδέν. Θεωρούμε ότι

η κλίμακα χρόνου των μεταβολών που μελετάμε είναι πολύ μεγαλύτερη από τη κλίμακα χρόνου των μεταβολών του ηλεκτρικού πεδίου.

Αν υποθέσουμε ότι το ιονισμένο ρευστό κινείται μέσα σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  η ηλεκτρομαγνητική δύναμη που επιδρά στον στοιχειώδη όγκο  $\Delta V$  του ρευστού είναι

$$\vec{F}_m = \frac{\vec{j} \times \vec{B}}{c} \quad (6.5)$$

όπου  $\vec{j}$  είναι η πυκνότητα του ηλεκτρικού ρεύματος. Η Εξ. (6.5) συνοδεύεται από τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \quad (6.6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (6.7)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6.8)$$

(το ρεύμα μετατόπισης είναι μηδέν για τους λόγους που περιγράψαμε ήδη), και το νόμο του Ohm:

$$\vec{j} = \sigma \left[ \vec{E} + \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} \right] \quad (6.9)$$

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (6.5) και (6.6) έχουμε

$$F_m = \frac{(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \left[ (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \nabla^2 B \right] \quad (6.10)$$

όπου  $B = |\vec{B}|$  είναι το μέτρο του διανύσματος του μαγνητικού πεδίου.

Συνδυάζοντας τις Εξισώσεις (6.6), (6.7) και (6.9) έχουμε

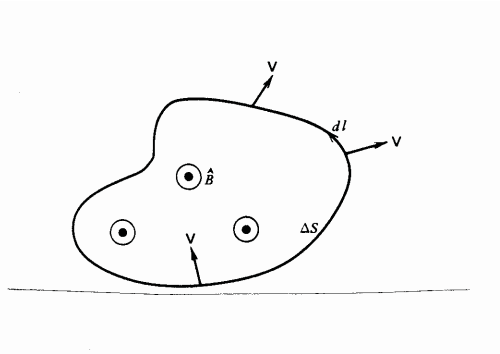
$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) &= \frac{4\pi}{c} [\nabla \times \vec{j}] \\ &= \frac{4\pi\sigma}{c} \left[ \nabla \times \vec{E} + \nabla \times \left( \frac{\vec{u} \times \vec{B}}{c} \right) \right] \\ &= \frac{4\pi\sigma}{c^2} \left[ -\frac{\partial B}{\partial t} + \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) \right] \end{aligned}$$

Κανοντας χρήση της ταυτότητας  $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \vec{B}(\nabla \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = -\nabla^2 \vec{B}$  καταλήγουμε σε μια πολύ χρήσιμη διαφορική εξίσωση που περιγράφει τη χωροχρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου μέσα στο ρευστό.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (6.11)$$

όπου  $\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma}$  είναι η ειδική αντίσταση του πλάσματος.

Μια ακόμα ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι αν η αγωγιμότητα στο πλάσμα είναι άπειρη τότε το μαγνητικό πεδίο είναι παγωμένο μέσα στο πλάσμα και κινούνται μαζί.



Σχήμα 6.6: Η επιφάνεια  $\Delta S$  είναι κάθετη προς τις μαγνητικές γραμμές και κινείται με ταχύτητα  $u$ .

Εάν υποθέσουμε ότι μέσα σε μαγνητισμένο πλάσμα υπάρχει μια επιφάνεια  $\Delta S$  (Σχ. 6.6), η ροή του μαγνητικού πεδίου που περνάει μέσα από την επιφάνεια αυτή είναι ίση με  $\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$ . Αν η περίμετρος της επιφάνειας μετακινηθεί με ταχύτητα  $\vec{u}$  τότε η ροή  $\Phi_m$  θα αλλάξει με ρυθμό

$$\dot{\Phi}_m = \int_{\Delta S} d\vec{A} \cdot \dot{\vec{B}} + \int_{\Delta S} d\vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (6.12)$$

Γνωρίζουμε ότι η αγωγιμότητα στο πλάσμα είναι πάρα πολύ μεγάλη, άρα ο όρος  $(c^2/4\pi\sigma)\nabla^2 \vec{B} \simeq 0$ , τότε

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (6.13)$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (6.13) την εξίσωση (6.12) και επειδή  $d\vec{A} = \vec{u} \times d\vec{l}$  (βλέπε Σχ. 6.6) έχουμε

$$\dot{\Phi}_m = \int_{\Delta S} d\vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times (\vec{u} \times \vec{B})) + \int_c \vec{B} \cdot (\vec{u} \times d\vec{l}). \quad (6.14)$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Stokes και της ταυτότητας  $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot \vec{C}$  υπολογίζουμε εύκολα ότι το  $\dot{\Phi}_m = 0$ , άρα οι μαγνητικές γραμμές είναι 'παγωμένες' μέσα στο πλάσμα (frozen in), όταν η αγωγιμότητα είναι 'άπειρη' (collisionless plasma).

## 6.5 Θεώρημα *Virial*

Είναι χρήσιμο για πολλές εφαρμογές της μαγνητουδροδυναμικής να υπολογίσουμε μερικές μακροσκοπικές ποσότητες που ισχύουν για ολόκληρο το σύστημα που μελετάμε και να βρούμε τις μεταξύ τους σχέσεις. Η σχέση που συνδέει τις μικροσκοπικές ποσότητες του συστήματος ονομάζεται Θεώρημα *Virial* και είναι ιδιαίτερα χρήσιμο όταν παρακολουθούμε την χωροχρονική εξέλιξη του συστήματος λύνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις της μαγνητουδροδυναμικής.

Πολλαπλασιάζοντας εσωτερικά την Εξ. (1.17) με το διάνυσμα  $\vec{r}$  και ολοκληρώνοντας για ολόκληρη τη μάζα του έχουμε

$$\int dm \vec{r} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \int dm (\vec{r} \cdot \vec{f}) - \int \vec{r} \cdot \nabla P \frac{dm}{\rho}$$

όπου  $f = F/\rho$  είναι η δύναμη ανά μονάδα μάζας. Ο πρώτος όρος παίρνει τη μορφή

$$\vec{r} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right) - \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{r^2}{2} \right) - u^2.$$

Η ροπή αδράνειας ορίζεται από τη σχέση

$$I = \int r^2 dm$$

και η ολική κινητική ενέργεια

$$2 \langle T \rangle = \int u^2 dm$$

άρα

$$\int dm \vec{r} \cdot \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} - 2 \langle T \rangle . \quad (6.15)$$

Ο όρος

$$\begin{aligned} \int \vec{r} \cdot \nabla P \frac{dm}{\rho} &= \int \nabla(\vec{r}P) dV - 3 \int P dV \\ &= \oint P(\vec{r} \cdot d\vec{S}) - 3 \int P dV \end{aligned}$$

(για να φτάσουμε σε αυτό το αποτέλεσμα κάναμε χρήση της ταυτότητας  $(\nabla \cdot (P\vec{r})) = (\nabla \cdot \vec{r})P + (\vec{r} \cdot \nabla)P$  και ότι  $\nabla \cdot \vec{r} = 3$ )

Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στο θεώρημα Virial

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} &= 2 \langle T \rangle + 3 \int P dV + \int (\vec{r} \cdot \vec{f}) dm \\ &\quad - \oint P \vec{r} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$U = \frac{3}{2} \int P dV$$

όπου  $U$  είναι η εσωτερική ενέργεια του ρευστού και ότι ο τελευταίος όρος μπορεί να αγνοηθεί αν η πίεση στην επιφάνεια του ρευστού δεν είναι σημαντική, άρα

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} = 2 \langle T \rangle + 2U + \int (\vec{r} \cdot \vec{f}) dm \quad (6.17)$$

όπου ο όρος  $\vec{r} \cdot \vec{f}$  περιέχει όλες τις δυνάμεις πλην της κλίσης της πίεσης.

Είναι ενδιαφέρον να αναλύσουμε περισσότερο τον τελευταίο όρο χρησιμοποιώντας δύο πολύ συνηθισμένες δυνάμεις όπως τη δύναμη της βαρύτητας ( $f_g$ ) και τη δύναμη που οφείλεται στη παρουσία του μαγνητικού πεδίου ( $f_m$ ).

$$\vec{f}_g = - \int dV \frac{G\rho(r)\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

και

$$\int (\vec{f} \cdot \vec{r}) dm = - \int \frac{Gm(r)dm(r)}{|\vec{r}|} = U_g$$

όπου  $U_g$  είναι δυναμική ενέργεια. Για έναν ομογενή και σφαιρικό αστέρα

$$\begin{aligned} U_g &= -G \int_0^R \frac{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}{r} 4\pi r^2 \rho dr \\ &= -\frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \int_0^R r^4 dr = -\frac{16\pi^2 \rho^2}{3} \frac{R^5}{5} \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Όμοια υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int (\vec{J}_m \cdot \vec{r}) dm &= \int dm \frac{\vec{r} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})}{\rho c} \\ &= \int dV \frac{\vec{r} \cdot (\vec{j} \times \vec{B})}{c} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int dV \vec{r} \cdot [(\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}] \\ &= \int \frac{dV}{4\pi} [\vec{r} \cdot (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} - \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \nabla B^2] \\ &= \int \frac{dV}{4\pi} \left[ \frac{B^2}{2} + \nabla \cdot [\vec{B}(\vec{B} \cdot \vec{r})] - \frac{B^2}{2} \vec{r} \right] \\ &= \Phi_m + \int_S (\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B} \cdot d\vec{S}}{4\pi} - \int_S B^2 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{8\pi} \end{aligned}$$

όπου  $\Phi_m$  είναι η πυκνότητα της μαγνητικής ενέργειας. (Για να φτάσουμε στη τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα Gauss.) Το θεώρημα Virial παίρνει τώρα τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dt^2} &= 2 \langle T \rangle + 2U + U_g + \Phi_m + \int_S (\vec{B} \cdot \vec{r}) \frac{\vec{B} \cdot d\vec{S}}{4\pi} \\ &\quad - \int_S B^2 \frac{\vec{r} \cdot d\vec{S}}{8\pi} - \oint P \vec{r} \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Στα κεφάλαια που ακολουθούν θα μας δοθεί πολλές φορές η ευκαιρία να αξιοποιήσουμε το θεώρημα Virial.

## 6.6 Κύματα *Alfven*

Στην παράγραφο 3.2 μελετήσαμε τις διαταραχές των μακροσκοπικών ποσοτήτων του ρευστού απουσία μαγνητικού πεδίου. Θα επαναλάβουμε την ίδια διαδικασία κάνοντας χρήση των εξισώσεων της Μαγνητουδροδυναμικής. Οι εξισώσεις MHD είναι

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} = -c_s^2 \nabla \rho - \nabla (B^2/8\pi) + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (6.20)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0 \quad (6.21)$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}). \quad (6.22)$$

Διαταράσσοντας τις παραπάνω εξισώσεις

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \epsilon \rho_1 \\ \vec{u} &= \epsilon \vec{u}_1 \\ \vec{B} &= \vec{B}_0 + \epsilon \vec{B}_1 \end{aligned}$$

και κρατώντας όρους γραμικούς ως προς  $\epsilon$  έχουμε

$$\rho \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial t} = -c_s^2 \nabla \rho_1 - \nabla \left( \frac{B_0 B_1}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\vec{B}_0 \cdot \nabla) \vec{B}_1 \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + (\rho_0 \nabla \cdot \vec{u}_1) = 0 \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u}_1 \times \vec{B}_0). \quad (6.25)$$

Αν αναζητήσουμε λύσεις της μορφής

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \rho_{10} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ B_1 &= B_{10} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \\ u_1 &= u_{10} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

και για να απλοποιήσουμε τις πράξεις θα θεωρήσουμε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει τη διεύθυνση του άξονα  $z$  ( $\vec{B} = B_0 \hat{e}_z$ ), οι διαταραχές διαδίδονται παράλληλα προς τις μαγνητικές γραμμές ( $\vec{k} = k \hat{e}_z$ ) με ταχύτητα  $u_1 = (u_{1x}, 0, 0)$  ενώ η διαταραχή του μαγνητικού πεδίου είναι  $B_1 = (B_{1x}, 0, 0)$ . Από τις εξ. (6.23) και (6.25) έχουμε

$$-i\omega u_{1x} = ikB_{1x} \frac{B_0}{8\pi\rho_0} \quad (6.26)$$

$$-i\omega B_{1x} = ikB_0 u_{1x} \quad (6.27)$$

και αντικαθιστώντας το  $B_{1x}$  από την εξ. (6.27) στην εξ. (6.26) καταλήγουμε στην **εξίσωση διασποράς**

$$(\omega^2 - k^2(B_0^2/(4\pi\rho_0)))u_{1x} = 0. \quad (6.28)$$

Επειδή το  $u_{1x}$  είναι διάφορο του μηδενός θα πρέπει,

$$\omega^2 = k^2 u_A^2 \quad (6.29)$$

όπου  $u_A = \sqrt{B_0^2/(4\pi\rho_0)}$  η ταχύτητα Alfven. Συμπεραίνουμε ότι τα κύματα Alfven διαδίδονται κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών με ταχύτητα  $u_A$ .

Τα κύματα ήχου δημιουργούνται γιατί η κλίση της πίεσης λειτουργεί σαν την δύναμη επαναφοράς στην εξωτερική διαταραχή ενώ για τα κύματα Alfven η δύναμη επαναφοράς προέρχεται από την κλίση της μαγνητικής πίεσης. Μια άλλη σημαντική διαφορά τους είναι ότι τα κύματα ήχου είναι **διαμήκη** (η ταχύτητα διάδοσης είναι παράλληλη με το διάνυσμα διάδοσης) ενώ τα κύματα Alfven είναι **εγκάρσια** δηλαδή διαδίδονται κάθετα στις μαγνητικές γραμμές ( $\vec{u}_1 \perp \vec{k}$ ).

## 6.7 Ο ρόλος του μαγνητικού πεδίου στην κατάρρευση ενός νεφους

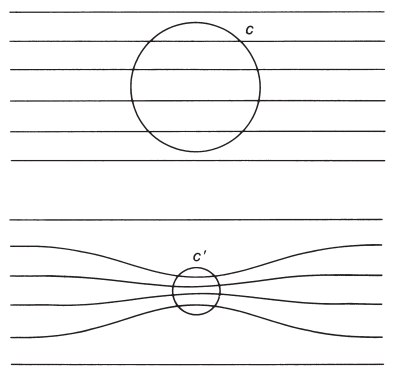
Το μαγνητικό πεδίο στο μεσοαστρικό χώρο είναι ασθενές ( $B \sim 10^{-6} Gauss$ ), αλλά μπορεί να επιφέρει σοβαρές αλλαγές στην δυναμική εξέλιξη της συστολής των μεσοαστρικών νεφών. Είναι εύκολο να εκτιμήσουμε τη σημασία του μαγνητικού πεδίου με το να υπολογίσουμε την ενέργεια του μαγνητικού πεδίου και να την συγκρίνουμε με την βαρυτική ενέργεια

$$\Phi_M = \frac{B^2}{8\pi} V \sim (10^{-6})^2 \times (10pc)^3 > U_g \quad (6.30)$$

Η μαγνητική πίεση διαφέρει από την πίεση του αερίου, γιατί δεν είναι ισοτροπική και μπορεί να είναι αρνητική στη μία διεύθυνση και θετική στην άλλη. Για παράδειγμα στο Σχ. (6.7) η πίεση κάθετα στις μαγνητικές γραμμές



## 6.7 Ο ρόλος του μαγνητικού πεδίου στην κατάρρευση ενός νέφους 91



Σχήμα 6.7: Η συστολή ενός μαγνητισμένου νέφους

( $P_{\perp} = \frac{B^2}{8\pi}$ ) θα αντιστέκεται στη δύναμη της βαρύτητας ενώ παράλληλα προς τις μαγνητικές γραμμές του μαγνητικού πεδίου θα βοηθάει τη συστολή.

Η μελέτη της συστολής ενός νέφους γίνεται ιδιαίτερα δύσκολη όταν το μεσοαστρικό νέφος είναι μαγνητισμένο. Η ανομοιογένεια της πίεσης δημιουργεί νηματώδεις δομές κατά μήκος των μαγνητικών γραμμών. Οι δομές αυτές είναι ορατές στα υπολείμματα των υπερκαινοφανών που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Στο σημείο αυτό θα εγκαταλείψουμε το φιλόδοξο σχέδιο της πλήρους κατανόησης του ρόλου του μαγνητικού πεδίου στη δημιουργία των πρωτοαστέρων και θα αρκεστούμε στη συλλογή πληροφοριών που σίγουρα θα μας είναι χρήσιμες αν επιχειρήσουμε κάποτε να μελετήσουμε τη συστολή ενός περιστρεφόμενου μαγνητισμένου νέφους σε τρεις διαστάσεις με τη χρήση της μαγνητουδροδυναμικής.

### 6.7.1 Διάχυση του μαγνητικού πεδίου

Η χωροχρονική εξέλιξη του μαγνητικού πεδίου περιγράφεται από την εξ. (6.11)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

Στη παράγραφο 6.4 δείξαμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι παγωμένο μέσα στο πλάσμα αν η αγωγιμότητα είναι άπειρη (η ειδική αντίσταση είναι μηδέν ( $\eta \rightarrow 0$ )). Αξίζει να δούμε τώρα και την άλλη προσέγγιση, δηλαδή αν το μαγνητικό πεδίο είναι ασθενές ή η ταχύτητα του ρευστού πλησιάζει το μηδέν και ο δεύτερος όρος στην εξ. (6.11) είναι μεγαλύτερος από τον πρώτο

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \sim \eta \nabla^2 \vec{B}. \quad (6.31)$$

ή

$$\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} \sim \eta \frac{\vec{B}(\vec{r}, t)}{R_c^2}$$

όπου  $R_c$  είναι το χαρακτηριστικό μήκος του νέφους. Το μαγνητικό πεδίο σταδιακά διαχέεται στο χώρο και σε κάθε σημείο του χώρου η ένταση του μειώνεται εκθετικά

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \sim \vec{B}(\vec{r}, t) e^{-t/\tau_D}$$

όπου  $\tau_D = R_c^2/\eta$ . Ο χαρακτηριστικός χρόνος διάχυσης είναι ανάλογος του τετραγώνου της ακτίνας του πρωτοαστέρα.

### 6.7.2 Μια εφαρμογή του Θεωρήματος *Virial*

Έαν εφαρμόσουμε το θεώρημα *Virial* (βλέπε Εξ. (6.19)) για ένα μαγνητισμένο σφαιρικό και ομογενές νέφος, η εξ. (3.24) παίρνει τώρα τη μορφή

$$P_{ext} = \frac{1}{4\pi} \left[ -\alpha \frac{GM^2}{R^4} + \beta \frac{\Phi_m^2}{R^4} + 3 \frac{3\alpha^2 M}{R^3} \right] \quad (6.32)$$

όπου  $\alpha^2 = k_B T/m_H$ ,  $\beta = 1/(6\pi^2)$ ,  $\Phi_m = \pi B R^2$ ,  $B$  είναι το τυπικό μαγνητικό πεδίο. Αν εξισώσουμε τη βαρυτική με τη μαγνητική ενέργεια τότε

$$\alpha \frac{GM^2}{R^4} \sim \beta \frac{\Phi_m^2}{R^4}$$

τότε η ελάχιστη μάζα που απαιτείται για να υπερβεί η βαρυτική την μαγνητική ενέργεια είναι

$$M_{cr} \sim \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) G^{-1/2} \Phi_m$$

ή

$$M_{cr} \sim 10^3 M_\odot \left( \frac{B}{30 \mu G} \right) \left( \frac{R}{2 pc} \right)^2 \quad (6.33)$$

όπου  $M_{\odot}$  είναι η μάζα του Ήλιου. Η εξ. (6.32) παίρνει τη μορφή

$$P_{ext} = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{\alpha G}{R^4} (M_{cr}^2 - M^2) + 3 \frac{\alpha^2 M}{R^3} \right] \quad (6.34)$$

και εάν  $M < M_{cr}$  το μαγνητικό πεδίο εμποδίζει τη συστολή, αντίθετα για  $M \gg M_{cr}$  το μαγνητικό πεδίο δεν παίζει κανένα ρόλο και μπορούμε να το αγνοήσουμε.

Αν το αέριο βρίσκεται σε τυρβώδη κατάσταση ο όρος  $2 \langle T \rangle$  στην εξ. (6.16) δεν είναι μηδέν και μπορεί να παρέμβει και να εμποδίσει τη συστολή του αρχικού νέφους.

## 6.8 Συμπεράσματα

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω καταλήγουμε σε ένα κλειστό σύστημα μη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων που περιγράφει την εξέλιξη ενός μαγνητισμένου βαρυτικού ρευστού.

1. Εξίσωση συνέχειας (Εξ. 1.19 )

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{u}) = 0.$$

2. Εξίσωση κίνησης (Εξ. 1.17)

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla P + \vec{F}.$$

3. Η πίεση συνδέεται με την πυκνότητα με τη σχέση (αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές είναι αδιαβατικές)

$$P = C\rho^\gamma$$

ή απλά από την καταστατική εξίσωση των ιδανικών αερίων  $P = \frac{\mathcal{R}T}{\mu} \rho$ .

4. Η δύναμη  $\vec{F}$  για ένα μαγνητισμένο βαρυτικό (μη περιστρεφόμενο) ρευστό είναι

$$\vec{F} = -\rho \nabla U_g - \frac{1}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{1}{4\pi} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B}$$

5. Το δυναμικό της βαρύτητας και το μαγνητικό πεδίο συνδέονται με την πυκνότητα και την κίνηση με τις σχέσεις

$$\nabla^2 U_g = 4\pi G\rho$$

και

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{u} \times B) + \eta \nabla^2 \vec{B}.$$

Αν το ρευστό περιστρέφεται ή εάν δεν είναι εύκολο να το προσεγγίσουμε ως ιδανικό αέριο τότε νέες δυνάμεις εμφανίζονται και θα συζητηθούν όταν θα το επιβάλει η μελέτη του συγκεκριμένου αστροφυσικού προβλήματος. Σε πολλά θέματα θα χρειαστεί επίσης να κάνουμε χρήση των εξισώσεων διατήρησης της ενέργειας ή του θεωρήματος Virial για να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την πορεία του συστήματος ως σύνολο.

Θα προσπαθήσουμε στη συνέχεια να κρατήσουμε τη συζήτησή μας στο απλούστερο δυνατόν επίπεδο. Τα πρότυπα που θα χρησιμοποιήσουμε θα είναι μεν 'ιδανικά' αλλά θα μπορούν να περιγράψουν σε ένα πρώτο επίπεδο ποσοτικά τα ειδικά αστροφυσικά φαινόμενα που θα μας απασχολήσουν στο μάθημα αυτό.

# Βιβλιογραφία

- [1] Βάρβογλης, Χ. και Σειραδάκης, Ι., (1994), *‘Εισαγωγή στη σύγχρονη αστρονομία’*, Εκδόσεις Γαρταγάνη, (Τα κεφάλαια 1, και 7 συνδέονται με την ύλη των σημειώσεων)
- [2] Βάρβογλης, Χ., Σπυρου, Ν. και Μπαρμπάνης, Β., (1996), *‘Προβλήματα αστρονομίας’*, Εκδόσεις Πήγασος 2000. (Το Κεφάλαιο 4 περιλαμβάνει ενδιαφέροντα προβλήματα στα θέματα των σημειώσεων. Σας προτείνω να το μελετήσετε!)
- [3] Βλάχος, Λ., (2000), *‘Φυσική Πλάσματος’*, Εκδ. Τζιόλα, Θεσσαλονικη.
- [4] Bowers, R. and Deeming, T., (1984), *“Astrophysics I, II”*, Jones and Brtlettt Pub., Boston. (Ένα σύγγραμμα υψηλού επιπέδου αλλά με αρκετά λάθη. Προτείνω να διαβαστεί με προσοχή. Τα κεφάλαια 1, 21, 22 και 23 συνδέονται άμεσα με την ύλη των σημειώσεων )
- [5] Carroll, B.W. and Ostlie, D.A., (1995) *“Introduction to Modern Astrophysics”*, Addison Wesley, 2nd Ed. Ένα πολύ ενδιαφέρον βιβλίο που συνηστω ανεπιφυλακτα. Στο μαθημα αυτο καλύψαμεμόνο λιγα κεφάλαια 10, 11 και 12
- [6] Mandle, F., () *‘Στατιστική Φυσική’*, Γ. Πνευματικός, Αθήνα.
- [7] Shu, F., (1992), *“The Physics of Astrophysics, Volume II: Gass Dynamics”*, University Science Books, Mill Valley, California.
- [8] Σπύρου, Ν. (1986) *‘Αρχές Αστρικής Εξέλιξης’* (Τα κεφάλαια 1 και 2 πραγματεύονται θέματα που συνδέονται με τις σημειώσεις.)

