

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ



Μοντέλα δίσκων προσάυξησης σε μελανές οπές με γενικευμένη κατανομή στροφορμής

Ευθυμιάδου Αναστασία

Επιβλέποντες καθηγητές:
Νικόλαος Στεργιούλας
José Antonio Font

ARISTOTLE UNIVERSITY OF THESSALONIKI
DEPARTMENT OF PHYSICS



Models of accretion disks around black holes with generalized angular momentum distribution

Efthymiadou Anastasia

Supervisors:
Nikolaos Stergioulas
José Antonio Font

Πείληψη

Κατασκευάζουμε μοντέλα ισορροπίας δίσκων γύρω από μελανές οπές, στην πλήρη γενική θεωρία σχετικότητας. Τα μοντέλα βασίζονται σε μια τρι-παραμετρική κατανομή της ειδικής στροφορμής, που προτάθηκε από τους Abramowicz et al. Βρίσκουμε πλήρη συμφωνία με τα μοντέλα που έχουν δημοσιευθεί και κατασκευάζουμε νέα μοντέλα σε ισοτροπικές συντεταγμένες. Τα μοντέλα αυτά είναι χρήσιμα για την κατασκευή αρχικών δεδομένων για τρισδιάστατες προσομοιώσεις με κώδικες της αριθμητικής σχετικότητας.

Abstract

We construct equilibrium models of tori around black holes in full general relativity. The models are based on a tri-parametric distribution of the specific angular momentum, that was proposed by Abramowicz et al. We find full agreement with published models and construct new models in isotropic coordinates. The latter ones are useful for constructing initial data for simulations in numerical relativity.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου Νικόλαο Στεργιούλα για την καθοδήγηση του και τη συμβολή του στην ολοκλήρωση της εργασίας. Ακόμη, ευχαριστώ τον καθηγητή μου José Antonio Font, ο οποίος ήταν υπεύθυνος για την επίβλεψη της εργασίας μου κατά τη διάρκεια των σπουδών μου ως φοιτήτρια Erasmus στο Πανεπιστήμιο της Βαλένθια (Universitat de València). Επίσης, ευχαριστώ τους Χρήστο Γεωργίου και Χρήστο Βουρέλλη για τη βοήθειά που μου προσέφεραν.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	11
Εισαγωγή	11
1.1 Μελανές οπές	11
1.2 Ο χωροχρόνος της μελανής οπής Kerr	14
Κεφάλαιο 2	18
Δίσκοι προσαύξησης και ισοδυναμικές επιφάνειες	18
2.1 Δίσκοι προσαύξησης σε στάσιμο, αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο	18
2.2 Σταθερή ειδική στροφορμή	21
2.3 AJS δίσκοι σε Schwarzschild περιβάλλον	23
2.4 Πυκνοί δίσκοι και Polish Doughnuts	26
2.5 Αριθμητικά αποτελέσματα	29
Κεφάλαιο 3	36
Ανάλυση σε ισοτροπικές συντεταγμένες	36
3.1 Μοντέλα σε ισοτροπικές συντεταγμένες	36
Συμπεράσματα	40
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α	41
Αναφορές	49

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Οι δίσκοι προσαύξησης μάζας γύρω από μια μελανή οπή είναι δομές που δημιουργούνται από την τροχιακή κίνηση της ύλης γύρω από τη μελανή οπή, η οποία ύλη συνήθως προέρχεται από ένα συνοδό αστέρα. Διάφοροι μηχανισμοί διάχυσης που σχετίζονται με αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων στο δίσκο, προκαλούν τη μείωση της ενέργειας και της στροφορμής των τελευταίων με βραδύ ρυθμό με τελικό αποτέλεσμα να κατευθύνονται σταδιακά προς τη μελανή οπή σε σπειροειδή τροχιά. Η σπειροειδής κίνηση γίνεται με αργό ρυθμό σε τροχιές περίπου κυκλικές μέχρι να φτάσουν στην εσώτατη κυκλική τροχιά. Μόλις την ξεπεράσουν πέφτουν ταχέως πάνω στη μελανή οπή. Η ενέργεια που χάνουν εγκαταλείπει το δίσκο με μορφή ακτινοβολίας της οποίας η συχνότητα εξαρτάται από τη μάζα του κεντρικού σώματος, και στην περίπτωση της μελανής οπής έχει μήκος κύματος στην περιοχή των ακτίνων-X.

Όσον αφορά στην κατανομή της στροφορμής των σωματιδίων της ύλης στο δίσκο προσαύξησης, η πιο απλή υπόθεση είναι αυτή που αντιστοιχεί σε σταθερή στροφορμή. Πάνω στο ισημερινό επίπεδο και μακριά από τη μελανή οπή η στροφορμή των σωματιδίων είναι ελαφρώς μικρότερη από αυτή που έχουν ελεύθερα σωματίδια που κινούνται σε κυκλικές τροχιές. Σε μικρότερες αποστάσεις από τη μελανή οπή η στροφορμή γίνεται μεγαλύτερη από αυτή των σωματιδίων σε κυκλικές τροχιές και ακόμη πιο κοντά γίνεται πάλι μικρότερη της και σχεδόν σταθερή. Καθώς απομακρυνόμαστε από το ισημερινό επίπεδο, η στροφορμή μειώνεται σημαντικά και γίνεται πολύ χαμηλή, σχεδόν μηδενική σε κάποιες περιπτώσεις [1]. Γενικά, η κατανομή της στροφορμής που λαμβάνουμε υπ' όψιν για τη μελέτη των μοντέλων των δίσκων προσαύξησης παίζει ουσιαστικό ρόλο στη μορφή και τη θέση των ισοδυναμικών επιφανειών που προκύπτουν.

1.1 Μελανές οπές

Στην ενότητα αυτή παραθέτονται ορισμένα βασικά στοιχεία για τις μελανές οπές, με βάση το άρθρο επισκόπησης των Abramowicz, M.A.& Fragile, P.C. [2].

Παρ' όλο που τα μοντέλα των μελανών οπών μελετήθηκαν με ενδιαφέρον, η ουσιαστική ύπαρξή τους αμφισβητήθηκε από πολλούς, συμπεριλαμβανομένου και του A. Einstein. Η κατάσταση άλλαξε όταν στα τέλη του 20^{ου} αιώνα έγιναν σαφείς ανιχνεύσεις υποψηφίων μελανών οπών στο εσωτερικό του Γαλαξία μας και σε πολλούς άλλους. Μέχρι σήμερα παρατηρήθηκαν από τους αστρονόμους δύο κατηγορίες μελανών οπών.

1) Quasars και άλλα παρόμοια υπερβαρή αντικείμενα, τα οποία ονομάζονται Ενεργοί Πυρήνες Γαλαξιών και έχουν μάζες της τάξης $10^6 M_{\odot} < M < 10^9 M_{\odot}$. Βρίσκονται στα κέντρα των γαλαξιών και αυτά που είναι ενεργά αποτελούν τις πιο ισχυρές γνωστές πηγές ενέργειας στο Σύμπαν.

2) Microquasars και άλλες μελανές οπές με μάζα $M \sim 10 M_{\odot}$. Η ονομασία τους υποδηλώνει πως αποτελούν μικρής κλίμακας εκδοχές των Quasars. Η φυσική κλίμακα χρόνου-μάζας φανερώνει πως οι ίδιες διαδικασίες που χρειάζονται εκατοντάδες χρόνια για να πραγματοποιηθούν στα Quasars, χρειάζονται μόνο κάποια λεπτά στα Microquasars.

Υπάρχει η ελπίδα πως οι παρατηρήσεις των Quasars και των Microquasars, μαζί με την κατάλληλη θεωρητική ερμηνεία, θα εξετάσουν στην ουσία τη φυσική των μελανών οπών και κατ' επέκταση, θα εξασφαλίσουν τη γνώση σχετικά με τις θεμελιώδεις ιδιότητες του χώρου και του χρόνου.

Σχετικά με το κομμάτι της βαρύτητας, υπάρχουν τρεις πολύ βασικές ιδιότητες των μελανών οπών, οι οποίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στη θεωρία των δίσκων προσαύξεσης των μελανών οπών.

- a) Ορίζοντας γεγονότων. Είναι μια σφαίρα ακτίνας περίπου GM/c^2 που περικυκλώνει την ανωμαλία της μελανής οπής, λειτουργώντας σαν μια μονόδρομη μεμβράνη, από το εσωτερικό της οποίας τίποτα δεν μπορεί να διαφύγει. Ο ορίζοντας γεγονότων αποτελεί ένα μοναδικό χαρακτηριστικό των μελανών οπών και μόνο αυτών.
- b) Εργόσφαιρα. Είναι μια περιοχή γύρω από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή όπου ο χωροχρόνος παρασύρεται τόσο πολύ προς τη διεύθυνση της περιστροφής ώστε δε μπορεί να υπάρξουν στατικοί παρατηρητές εντός αυτής. Σε αυτή την περιοχή, είναι δυνατόν να υπάρξουν καταστάσεις αρνητικής ενέργειας, που σημαίνει πως η ενέργεια περιστροφής της μελανής οπής μπορεί να αξιοποιηθεί μέσω διαφόρων εκδηλώσεων της «διαδικασίας Penrose»
- c) Οριακή ευσταθής τροχιά ή αλλιώς, τελευταία εσωτερική ευσταθής κυκλική τροχιά (Innermost Stable Circular Orbit). Είναι ο μικρότερος κύκλος ($r = r_{ms}$), πάνω στον οποίο κινούνται τα ελεύθερα σωματίδια διαγράφοντας σταθερή τροχιά γύρω από τη μελανή οπή. Δεν είναι δυνατή η ύπαρξη

ευσταθών κυκλικών τροχιών για $r < r_{ms}$, γεγονός που αποτελεί μοναδικό χαρακτηριστικό της σχετικότητας αφού στη Νευτώνεια μηχανική δεν υπάρχει περιορισμός, σε οποιαδήποτε ακτίνα μπορούν να υπάρξουν ευσταθείς τροχιές (σε ένα σφαιρικά-συμμετρικό δυναμικό).

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι δύσκολο να επιβεβαιωθούν, αφού η ακτινοβολία που λαμβάνουμε από τα Quasars και Microquasars, δεν προέρχεται από τις ίδιες τις μελανές οπές, αλλά πηγάζει από τον δίσκο προσαύξεσης που τα περιβάλλει. Στους δίσκους, η στροφορμή προκαλεί την σπειροειδή τροχιά και τελικά, την πτώση της ύλης πάνω στη μελανή οπή, μετατρέποντας τη βαρυτική της ενέργεια σε θερμότητα, και έπειτα, μέσω ορισμένων διεργασιών, την εκπομπή σε μορφή ακτινοβολίας της ενέργειας αυτής. Στη συνέχεια, η ακτινοβολία διαδίδεται μέσω του δίσκου και ταξιδεύει κατά μήκος τροχιών, οι οποίες είναι καμπυλωμένες από την ισχυρή βαρύτητα της μελανής οπής.

Για τη μελέτη της προσαύξεσης μάζας στις μελανές οπές λαμβάνονται υπ' όψιν ορισμένες διαδικασίες, εκ των οποίων οι εξής δύο είναι πολύ βασικές. Πρώτον, η μεταφορά στροφορμής και η μείωση ενέργειας. Συγκεκριμένα, η αργή προσαύξεση ενός σωματιδίου μάζας m σε κυκλική τροχιά, από μια μεγάλη ακτίνα r_{out} σε μια μικρότερη r_{in} , προϋποθέτει τη μείωση της ενέργειας του κατά $0.1 mc^2$ και της στροφορμής του κατά $(GMr_{out})^{1/2}$. Αυτή τη διαδικασία της μεταφοράς μάζας στο εσωτερικό, μεταφοράς στροφορμής στο εξωτερικό και μείωσης της ενέργειας διευκολύνουν οι δυνάμεις ιξώδους του ρευστού, οι οποίες δεν προέρχονται μόνο από το σύνηθες μοριακό ιξώδες (το οποίο είναι ασθενές στους αστροφυσικούς δίσκους προσαύξεσης), αλλά κυρίως από την τύρβη που λειτουργεί ως ένα ενεργό ιξώδες.

Τη δεύτερη σημαντική διαδικασία αποτελούν η μεταφορά της ακτινοβολίας, καθώς και διαδικασίες που εξαρτώνται από τη θερμοδυναμική κατάσταση της ύλης, την κίνηση, το μαγνητικό πεδίο, κυρίως όμως, από το αν η ύλη είναι αδιαφανής ή διαφανής στην ακτινοβολία, αν δηλαδή το οπτικό βάθος είναι μεγάλο ($\tau \gg 1$) ή μικρό ($\tau \ll 1$). Γενικά, αν η ύλη είναι οπτικά πυκνή τότε ο δίσκος γίνεται φωτεινός και ψύχεται από την απώλεια ακτινοβολίας, ενώ αν το οπτικό βάθος είναι μικρό τότε η ακτινοβολία διαφεύγει εύκολα και επομένως δεν είναι πολύ φωτεινός.

Σε ένα δίσκο προσαύξεσης μιας μελανής οπής συμβαίνουν τρεις γενικοί τύποι φυσικών διεργασιών: οι «δυναμικές» διαδικασίες με χαρακτηριστική χρονική κλίμακα $t_{dyn} \sim 1/\Omega$, όπου Ω είναι η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα, οι «θερμικές» διαδικασίες με αντίστοιχη χρονική κλίμακα $t_{th} \sim c_s^2/\nu_* \Omega^2$, όπου c_s είναι η ταχύτητα του ήχου και ν_* είναι το κινηματικό ιξώδες, και οι διαδικασίες ιξώδους με κλίμακα χρόνου $t_{vis} \sim r^2/\nu_*$, όπου r είναι η ακτινική απόσταση από τη μελανή οπή. Συνήθως ισχύει $t_{dyn} \ll t_{th} \ll t_{vis}$ και επειδή οι δυναμικές διαδικασίες πραγματοποιούνται γρηγορότερα από τις άλλες, με μια πρώτη προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε μόνο δυναμικές δομές στο δίσκο, οι οποίες διέπονται από τρεις δυνάμεις: τη βαρύτητα, η οποία καθορίζεται από τη γεωμετρία Kerr, τη βαθμίδα της πίεσης και τις κεντρόφυγες δυνάμεις. Η σχετική σπουδαιότητα της κάθε δύναμης εξαρτάται από τη

προκειμένη αστροφυσική κατάσταση. Έτσι, υπάρχουν τέσσερις τύποι δυναμικών καταστάσεων και οι τέσσερις τύποι δίσκων προσαύξεσης που περιγράφονται παρακάτω εντάσσονται στις τρεις από τις τέσσερις αυτές περιοχές. Ο χαρακτηρισμός των τεσσάρων τύπων δίσκων προσαύξεσης γίνεται σε σχέση με τη σχετική τους πυκνότητα- h , τον αδιάστατο ρυθμό προσαύξεσης- $\dot{m}$, το οπτικό βάθος- τ , το ρυθμό της οριζόντιας μεταφοράς- q , την παράμετρο της πίεσης της ακτινοβολίας- β , το σημείο της ενδότερης άκρης- r_{in} και του ρυθμού της προσαύξεσης μάζας- η . Οι τέσσερις τύποι είναι:

- 1) Πυκνοί δίσκοι για τους οποίους ισχύει $h > 1$, $\dot{m} > 1$, $\tau > 1$, $q \sim 1$, $\beta < 1$, $r_{in} \sim r_{mb}$ και $\eta < 0.1$
- 2) Αραιοί δίσκοι με τα εξής χαρακτηριστικά $h < 1$, $\dot{m} < 1$, $\tau > 1$, $q = 0$, $\beta \sim 1$, $r_{in} = r_{mb}$ και $\eta \sim 0.1$
- 3) Λεπτοί δίσκοι με $h \sim 1$, $\dot{m} \geq 1$, $\tau > 1$, $q \sim 1$, $\beta < 1$, $r_{mb} < r_{in} < r_{ms}$ και $\eta < 0.1$
- 4) Ροή προσαύξεσης που διέπεται από οριζόντια μεταφορά (ADAF) και περιγράφεται ως εξής $h < 1$, $\dot{m} < 1$, $\tau < 1$, $q \sim 1$, $\beta = 1$, $r_{mb} < r_{in} < r_{ms}$ και $\eta < 0.1$

Υπάρχουν αναλυτικά ή ημι-αναλυτικά μοντέλα για κάθε ένα τύπο δίσκων προσαύξεσης, γεγονός όμως που δεν εγγυάται ότι αυτά είναι ευσταθή. Γενικότερα, η ανάλυση της ευστάθειας είναι σημαντική διότι η διαφορική περιστροφή, που είναι ένα από τα χαρακτηριστικά που προσδιορίζουν τους δίσκους, είναι ένας ενδεχόμενος αποσταθεροποιητικός παράγων. Επίσης, οι δίσκοι προσαύξεσης έχουν φυσικούς τρόπους ταλάντωσης, των οποίων οι συχνότητες συνδέονται με τις ιδιότητες του χωροχρόνου της μελανής οπής. Αν οι τρόποι ταλάντωσης διεγερθούν αποκτώντας ένα αξιόλογο πλάτος, τότε ίσως καθίστανται ικανοί να τροποποιήσουν με διάφορους τρόπους την καμπύλη του παρατηρημένου φωτός του δίσκου. Ακόμη, οι δίσκοι συνδέονται με τους πίδακες, οι οποίοι είναι στενά, ταχύτατα και μεγάλου μήκους ρεύματα ύλης, αναδύομενα από πυκνές περιοχές των μελανών οπών, συνήθως σε αντίθετες κατευθύνσεις. Παίζουν σημαντικό ρόλο στη μεταφορά ενέργειας και στροφορμής μακριά από τους δίσκους και στη διαμόρφωση του περιβάλλοντος μιας μελανής οπής πολύ μακριά από την περιοχή έντονης βαρύτητας, επηρεάζοντας τη γαλακτική εξέλιξη, τη σωματιδιακή επιτάχυνση και το διαγαλαξιακό ιονισμό.

1.2 Ο χωροχρόνος της μελανής οπής Kerr

Στις σφαιρικές συντεταγμένες Boyer-Lindquist η μετρική Kerr έχει τη μορφή

$$g^{tt} = -\frac{(a^2 + r^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2}, \quad g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right),$$

$$\begin{aligned}
g^{\varphi\varphi} &= \frac{\Delta - \alpha^2 \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}, & g_{\varphi\varphi} &= \left(r^2 + \alpha^2 + \frac{2M\alpha^2 r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta, \\
g^{t\varphi} &= -\frac{2Mr\alpha}{\Delta \rho^2}, & g_{t\varphi} &= -\frac{2Mar \sin^2 \theta}{\rho^2}, \\
g^{\theta\theta} &= \frac{1}{\rho^2}, & g_{\theta\theta} &= \rho^2, \\
g^{rr} &= \frac{\Delta}{\rho^2}, & g_{rr} &= \frac{\rho^2}{\Delta},
\end{aligned} \tag{1}$$

όπου $\rho^2 = r^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta$ και $\Delta = r^2 - 2Mr + \alpha^2$.¹ Η μετρική Kerr δεν εξαρτάται από το συντεταγμένο χρόνο t , ούτε από τη γωνία φ γύρω από τον άξονα συμμετρίας και επομένως, ορίζουμε αυτές τις συμμετρίες μέσω των διανυσμάτων Killing $\eta^\mu = \delta_t^\mu$ και $\xi^\mu = \delta_\varphi^\mu$. Έτσι, οι συνιστώσες t και φ της μετρικής Kerr μπορούν να εκφραστούν ως εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων Killing.

$$g_{tt} = \eta^\mu \eta_\mu, \quad g_{t\varphi} = \eta^\mu \xi_\mu, \quad g_{\varphi\varphi} = \xi^\mu \xi_\mu. \tag{2}$$

Επίσης, μέσω των διανυσμάτων αυτών ορίζονται οι σταθερές της κίνησης για ένα σωματίδιο ή φωτόνιο με τετρα-ορμή p_μ : $E \equiv -\eta^\mu p_\mu = -p_t$ (ενέργεια), $L \equiv \xi^\mu p_\mu = p_\varphi$ (στροφορμή) και $l \equiv \frac{L}{E} = -\frac{p_\varphi}{p_t} = -\frac{u_\varphi}{u_t}$ (ειδική στροφορμή).

Στη συνέχεια μελετάται κατά πόσο μπορεί η θεωρία προσαύξησης δίσκων να αποδείξει με σαφήνεια την ύπαρξη των τριών βασικών στοιχείων βαρύτητας Kerr που συνδέονται με τη θεωρία προσαύξησης δίσκων σε μελανές οπές.

1. Ο ορίζοντας γεγονότων

Οι συντεταγμένες Boyer-Lindquist διαιρούν το χωροχρόνο Kerr σε μια χρονική συνιστώσα t και ένα τριδιάστατο χώρο που ορίζεται από τις υπερεπιφάνειες $t = \text{const}$. Η οικογένεια των μη-γεωδαισιακών παρατηρητών που είναι κάθετοι στις χωρικές υπερεπιφάνειες $t = \text{const}$, ορίζεται ως

$$N^\mu \equiv e^{-\Phi} \tilde{\eta}^\mu, \tag{3a}$$

όπου $\tilde{\eta}^\mu = \eta^\mu + \omega \xi^\mu$ και

$$\omega \equiv -\frac{\eta^\nu \xi_\nu}{\xi^\mu \xi_\mu} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \text{ (συρμός των αδρανειακών παρατηρητών)}. \tag{3b}$$

Οι παρατηρητές αυτοί ονομάζονται παρατηρητές-μηδενικής-στροφορμής (ZAMO-zero-angular-momentum-observers) διότι για αυτούς ισχύει $L = N_\varphi = 0$. Ακόμη, ορίζεται το βαρυτικό δυναμικό στο ZAMO σύστημα ως εξής:

¹ Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το ρ και για την πυκνότητα μάζας ηρεμίας ενός ρευστού.

$$\Phi \equiv -\frac{1}{2} \ln \left[\frac{\xi^\mu \xi_\mu}{(\eta^\nu \xi_\nu)^2 - (\eta^\nu \eta_\nu)(\xi^\mu \xi_\mu)} \right] = -\frac{1}{2} \ln |g^{tt}|. \quad (4)$$

Από την (3a) φαίνεται πώς στην επιφάνεια $1/g^{tt} = 0$, το διάνυσμα $\tilde{\eta}^\mu$ είναι μηδενικό, $\tilde{\eta}^\mu \tilde{\eta}_\mu = 0$. Άρα, οι ZAMO παρατηρητές που παρέχουν το πρότυπο ηρεμίας στο τριδιάστατο χώρο, κινούνται πάνω σε αυτήν την επιφάνεια με την ταχύτητα του φωτός. Για να μείνει κανείς ακίνητος σε αυτή τη θέση πρέπει να κινηθεί ακτινικά προς τα έξω με την ταχύτητα του φωτός. Από την (1) φαίνεται πώς το $1/g^{tt} = 0$ ισοδυναμεί με $\Delta = 0$, απ' όπου προκύπτει η παρακάτω διπλή λύση

$$r = r_H = r_G \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\alpha}{M}} \right), \quad (5)$$

όπου, r_H είναι η ακτίνα που προσδιορίζει τον ορίζοντα γεγονότων και $r_G = GM/c^2$ αποτελεί την βαρυτική ακτίνα.

Για $r < r_+$ οι ZAMO παρατηρητές είναι χωροειδείς (το να μένουν ακίνητοι σε μια ακτινική θέση συνεπάγεται το να κινούνται πάνω σε χωροειδείς τροχιές), όπως και όλες οι τροχιές που κινούνται ακτινικά προς τα έξω. Έτσι, η εξωτερική ρίζα $r = r_+$ ορίζει τον ορίζοντα γεγονότων μιας μελανής οπής Kerr: μια μηδενική επιφάνεια, που περιβάλλει μια περιοχή από την οποία τίποτα δεν μπορεί να διαφύγει.

2. Η εργόσφαιρα

Στη Νευτώνεια βαρύτητα η ειδική στροφορμή l συνδέεται με τη γωνιακή ταχύτητα Ω μέσω της σχέσης $l = r^2 \Omega$. Ωστόσο, στη γεωμετρία Kerr ισχύει $l \propto (\Omega - \omega)$ και επομένως, όταν $\Omega = 0$ δεν συνεπάγεται πως $l = 0$. Έτσι, προκύπτουν δύο πρότυπα περιστροφικής ηρεμίας: ο παρατηρητής-μηδενικής-γωνιακής-ταχύτητας (ZAVO-zero-angular-velocity-observer) και ο παρατηρητής-μηδενικής-στροφορμής (ZAMO),

$$\text{ZAVO σύστημα } (\Omega = 0): n^\mu = (-\eta^\nu \eta_\nu)^{-1/2} \eta^\mu,$$

$$\text{ZAMO σύστημα } (l = 0): N^\mu = e^\Phi (\eta^\mu + \omega \xi^\mu). \quad (6)$$

Το ZAMO σύστημα ορίζει ένα τοπικό πρότυπο ηρεμίας σε σχέση με το τοπικό όριο αδράνειας. Τα διανύσματα ZAMO N^μ και $\tilde{\eta}^\mu$ είναι χρονοειδή παντού έξω από τον ορίζοντα, πράγμα που σημαίνει ότι η ενέργεια ενός σωματιδίου ή ενός φωτονίου με τετρα-ορμή p_μ μετρούμενη από τον παρατηρητή ZAMO είναι θετική, δηλαδή $E_{\text{ZAMO}} \equiv N^\mu p_\mu > 0$. Το ZAVO σύστημα ορίζει ένα παγκόσμιο πρότυπο ηρεμίας όσον αφορά μακρινούς αστέρες. Στο άπειρο, π.χ. για $r \rightarrow \infty$, είναι $(\eta^\nu \eta_\nu) = g_{tt} \rightarrow -1$ και έτσι, $n^\mu \rightarrow \eta^\mu$. Για αυτό το λόγο το η^μ ονομάζεται στάσιμος παρατηρητής στο άπειρο. Τα διανύσματα ZAVO η^μ και n^μ είναι χρονοειδή έξω από την περιοχή που περιβάλλεται από την επιφάνεια $g_{tt} = 0$, η

οποία ονομάζεται εργόσφαιρα. Μέσα στην εργόσφαιρα, τα διανύσματα αυτά είναι χωροειδή, γεγονός που σημαίνει πως στο εσωτερικό της εργόσφαιρας, η διατηρούμενη ενέργεια ενός σωματιδίου μπορεί να είναι αρνητική. Ο Penrose θεώρησε μια διαδικασία κατά την οποία, στο εσωτερικό της εργόσφαιρας, ένα σωματίδιο με θετική ενέργεια $E^\infty > 0$ διασπάται σε δύο άλλα σωματίδια με ενέργειες $E_+^\infty > 0$ και $E_-^\infty = -|E_-^\infty| < 0$. Το σωματίδιο με τη θετική ενέργεια διαφεύγει στο άπειρο, ενώ το σωματίδιο με την αρνητική ενέργεια απορροφάται από τη μελανή οπή. Επειδή συμβαίνει $E_+^\infty = E - E_-^\infty = E + |E_-^\infty| > E$ στο άπειρο φτάνει μια καθαρή τιμή θετικής ενέργειας και η πηγή ενέργειας της διαδικασίας Penrose είναι η περιστροφική ενέργεια της μελανής οπής.

3. ISCO: η οριακή ευσταθής τροχιά

Η τετρα-ταχύτητα που αντιστοιχεί στην κυκλική γεωδαισιακή κίνηση ορίζεται

$$u^\mu = u^t(\eta^\mu + \Omega\xi^\mu), \quad (7)$$

όπου $\Omega = u^\varphi/u^t$ είναι η γωνιακή ταχύτητα μετρούμενη από το στάσιμο παρατηρητή ZAVO. Ακόμη, ορίζεται το ενεργό δυναμικό ως εξής

$$W = -\frac{1}{2}\ln|g^{tt} - 2lg^{t\varphi} + l^2g^{\varphi\varphi}|. \quad (8)$$

Όπως στη Νευτώνεια μηχανική, οι ελαφρώς μη-κυκλικές τροχιές προσδιορίζονται πλήρως από τις εξισώσεις της απλής αρμονικής ταλάντωσης,

$$\delta\ddot{r} + \omega_r^2\delta r = 0 \text{ και } \delta\ddot{\theta} + \omega_\theta^2\delta\theta = 0, \quad (9)$$

όπου οι, ακτινική ω_r και κάθετη ω_θ , επικυκλικές συχνότητες αποτελούν τις δεύτερες παραγώγους του ενεργού δυναμικού

$$\omega_r^2 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r_*^2}\right)_l \text{ και } \omega_\theta^2 = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \theta_*^2}\right)_l, \quad (10)$$

όπου $\partial x_*^2 = -g_{xx}\partial x^2$. Από τα παραπάνω φαίνεται πως όταν $(\omega_r)^2 < 0$ οι ακτινικές επικυκλικές ταλαντώσεις είναι ασταθείς και αντιστοιχούν στο μέγιστο του ενεργού δυναμικού. Αυτό συμβαίνει για όλες τις κυκλικές τροχιές με ακτίνα μικρότερη της $r = r_{ms}$, και αυτό το όριο στην ακτίνα ονομάζεται ISCO (innermost stable circular orbit), δηλαδή η εσωτερη ευσταθής κυκλική τροχιά. Ελεύθερες κυκλικές τροχιές με ακτίνα $r > r_{ms}$ είναι ευσταθείς, ενώ αυτές με $r < r_{ms}$ είναι ασταθείς. Έτσι, οι ροές προσαύξησης σχεδόν ελεύθερης ύλης μοιάζουν με σχεδόν κυκλικές κινήσεις για $r > r_{ms}$ και με σχεδόν ελεύθερης ακτινικής πτώσης για $r < r_{ms}$.

Κεφάλαιο 2

Δίσκοι προσαύξησης και ισοδυναμικές επιφάνειες

Παρακάτω αναπτύσσουμε τις βασικές ιδιότητες των δίσκων προσαύξησης σε μελανές οπές με βάση κυρίως την εργασία του Stergioulas. [3]

Η δημιουργία ενός συμπαγούς σχετικιστικού δίσκου προσαύξησης ή τόρου² γύρω από μια μελανή οπή αποτελεί πιθανό αποτέλεσμα της κατάρρευσης του πυρήνα συμπαγών αστερών και της συγχώνευσης ενός αστερά νετρονίων ή ενός διπλού συστήματος αστερά νετρονίων-μελανής οπής. Η μάζα του δίσκου ενός συστήματος αστερά νετρονίων-αστέρα νετρονίων ή μελανής οπής-αστέρα νετρονίων προκύπτει, μέσω προσφάτων αριθμητικών προσομοιώσεων, πως είναι της τάξης $\sim 0.01-0.2 M_{\odot}$. Οι αξονικά συμμετρικές και οι μη-αξονικά συμμετρικές αστάθειες, στις οποίες συχνά υπόκεινται οι δίσκοι προσαύξησης, μπορούν να οδηγήσουν σε εξαιρετικά μεταβαλλόμενες και ασταθείς τιμές προσαύξησης. Για την εξασφάλιση μιας πλήρους και ολοκληρωμένης εικόνας είναι αναγκαία η μελέτη όλων των παραμέτρων που επηρεάζουν τη σταθερότητα των δίσκων.

2.1 Δίσκοι προσαύξησης σε στάσιμο, αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο

Η μετρική που περιγράφει το στάσιμο, αξονικά συμμετρικό χωρόχρονο έχει την εξής γενική μορφή

$$ds^2 = g_{tt} dt^2 + 2g_{t\varphi} dt d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2 + g_{rr} dr^2 + g_{\theta\theta} d\theta^2, \quad (11)$$

(υποθέτοντας την υπογραφή $-, +, +, +$ και θέτοντας $c = G = 1$).

Για ένα στάσιμο δίσκο, όσον αφορά στη τετρα-ταχύτητά του, ισχύει

$$u^{\alpha} = (u^t, 0, 0, u^{\varphi}), \quad (12)$$

ή αλλιώς

² Στην παρούσα εργασία υιοθετούμε τον όρο «δίσκος» και για τόρους, δηλαδή και για δίσκους μη-αμελητέου πάχους.

$$u^\alpha = u^t(1,0,0,\Omega), \quad (13)$$

η οποία προκύπτει από το γεγονός ότι η γωνιακή ταχύτητα μετρούμενη από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο άπειρο είναι

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{u^\varphi}{u^t}. \quad (14)$$

Κατά μήκος κάθε τροχιάς στο ρευστό, η ύπαρξη ενός διανύσματος Killing t^α , που περιγράφει τη συμμετρία του χρόνου, συνεπάγεται τη διατήρηση της ενέργειας ανά μονάδα μάζας ηρεμίας $E = -hu_t$, ενώ η ύπαρξη ενός διανύσματος Killing φ^α , που περιγράφει τη φ -συμμετρία, συνεπάγεται τη διατήρηση της στροφορμής ανά μονάδα μάζας ηρεμίας $j = hu_\varphi$, όπου $h = \frac{\epsilon+P}{\rho}$ είναι η ειδική ενθαλπία, ρ είναι η πυκνότητα μάζας ηρεμίας, P είναι η πίεση και ϵ είναι η πυκνότητα ενέργειας. Όταν υπάρχουν και τα δυο διανύσματα t^α και φ^α , τότε και ο λόγος

$$\frac{j}{E} = -\frac{u_\varphi}{u_t} := l, \quad (15)$$

(δηλαδή η στροφορμή ανά μονάδα ενέργειας) διατηρείται. Χρησιμοποιώντας την έκφραση της μετρικής και τους γραμμικούς συνδυασμούς $-E = g_{tt}u^t + g_{t\varphi}u^\varphi$ και $j = g_{t\varphi}u^t + g_{\varphi\varphi}u^\varphi$, προκύπτει

$$l = \frac{j}{E} = -\frac{g_{t\varphi}u^t + g_{\varphi\varphi}u^\varphi}{g_{tt}u^t + g_{t\varphi}u^\varphi} = -\frac{g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} + \Omega g_{t\varphi}}, \quad (16)$$

$$\text{και άρα } \boxed{l = -\frac{g_{t\varphi} + \Omega g_{\varphi\varphi}}{g_{tt} + \Omega g_{t\varphi}}} \text{ και } \boxed{\Omega = -\frac{g_{t\varphi} + l g_{tt}}{g_{\varphi\varphi} + l g_{t\varphi}}}. \quad (17a, 17b)$$

Η κανονικοποίηση της τετρα-ταχύτητας μας δίνει

$$\begin{aligned} u^\alpha u_\alpha = -1 &\Rightarrow g_{tt}(u^t)^2 + 2g_{t\varphi}u^t u^\varphi + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = -1 \Rightarrow \\ g_{tt} + 2\Omega g_{t\varphi} + \Omega^2 g_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{(u^t)^2} \Rightarrow \\ \boxed{u^t = (-g_{tt} - 2\Omega g_{t\varphi} - \Omega^2 g_{\varphi\varphi})^{-1/2}}, \end{aligned} \quad (18)$$

ή ομοίως

$$u_t = (-g^{tt} + 2lg^{t\varphi} - l^2 g^{\varphi\varphi})^{-1/2} = -\left[-\frac{g_{\varphi\varphi} + 2lg_{t\varphi} + l^2 g_{tt}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2} \right]^{-1/2}, \quad (19)$$

όπου οι συνιστώσες της αντίστροφης μετρικής είναι

$$g^{tt} = \frac{1}{g_{tt} - (g_{t\varphi})^2 / g_{\varphi\varphi}}, \quad (20)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{1}{g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2 / g_{tt}}, \quad (21)$$

$$g^{t\varphi} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{tt}g_{\varphi\varphi} - (g_{t\varphi})^2}. \quad (22)$$

Η επιλογή του προσήμου της ρίζας στις (18), (19) γίνεται σε συμφωνία με το πρόσημο της u^α στο όριο Minkowski.

Από την κανονικοποίηση προκύπτει ακόμη ότι

$$\begin{aligned} u^\alpha u_\alpha &= -1 \Rightarrow u^t u_t + u^\varphi u_\varphi = -1 \Rightarrow u^t u_t = \\ &-1 - u^\varphi u_\varphi = -1 - \Omega u^t u_\varphi = -1 + \Omega l u^t u_t = \\ &u^t u_t (1 - \Omega l) = -1, \end{aligned} \quad (23)$$

και τελικά

$$\boxed{u^t u_t = -\frac{1}{1 - \Omega l}}, \quad (24)$$

από την οποία παίρνουμε

$$\begin{aligned} u^t \left(-\frac{u_\varphi}{l} \right) &= -\frac{1}{1 - \Omega l} \Rightarrow \\ \boxed{u^t u_\varphi &= \frac{l}{1 - \Omega l}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Η εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας είναι

$$\begin{aligned} \frac{\nabla P}{\epsilon + P} &= \nabla \ln u^t - u^t u_\varphi \nabla \Omega = \\ &= \nabla \ln u^t - \frac{l \nabla \Omega}{1 - \Omega l} = \\ &= -\nabla \ln(-u_t) + \frac{\Omega \nabla l}{1 - \Omega l}, \end{aligned} \quad (26a, 26b, 26c)$$

και έχει ένα πρώτο ολοκλήρωμα μόνο υπό ειδικές συνθήκες. Για μια καταστατική βαροτροπική εξίσωση της μορφής $P = P(\rho)$ η «λογαριθμική» ενθαλπία (στη συνέχεια θα αναφέρεται απλώς ως ενθαλπία) ορίζεται ως

$$H(P) := \int_0^P \frac{dP'}{\epsilon(P') + P'}. \quad (27)$$

Έτσι προκύπτει $\frac{dH}{dP} = (\epsilon + P)^{-1}$ και το αριστερό μέλος της σχέσης (26a) γίνεται

$$(\epsilon + P)^{-1} \nabla P = \nabla H, \quad (28)$$

ενώ αν και μόνο αν η ειδική στροφορμή είναι συνάρτηση της Ω , δηλαδή $l = l(\Omega)$, το δεξί μέλος της (26a) μπορεί να γραφεί σε μορφή της κλίσης ενός δυναμικού. Ισοδύναμα, γράφουμε το δεξί μέλος της (26c) ως εξής

$$-\nabla \ln(-u_t) + \frac{\Omega \nabla l}{1-\Omega l} := -\nabla W, \quad (29)$$

μόνο αν $\Omega = \Omega(l)$. Στην παραπάνω σχέση η ποσότητα $-\nabla W$ μπορεί να ονομαστεί *ενεργός βαρύτητα*, η οποία δίνεται από την κλίση του *υποθετικού δυναμικού*

$$W = \ln(-u_t) - \int^l \frac{\Omega}{1-\Omega l} dl + \text{const.} \quad (30)$$

Για μηδενική πίεση ισχύει ότι $H(0) = 0$, ενώ το W ορίζεται από μια σταθερά, η οποία μπορεί να προσδιοριστεί θεωρώντας πως το W μηδενίζεται στο άπειρο. Κάτω από αυτές τις συνθήκες, προκύπτει πως

$$\boxed{\nabla H = -\nabla W}. \quad (31)$$

και οι επιφάνειες σταθερής πίεσης συμπίπτουν με τις ισοδυναμικές επιφάνειες. Στα ακρότατα της πυκνότητας ισχύει $\nabla H = \nabla W = 0$.

Το πρώτο ολοκλήρωμα της (26c) είναι

$$H + \ln(-u_t) - \int^l \frac{\Omega}{1-\Omega l} dl = \text{const.} \quad (32)$$

ή, ισοδύναμα, το πρώτο ολοκλήρωμα της (26b) είναι

$$H - \ln(u^t) + \int^\Omega \frac{l}{1-\Omega l} d\Omega = \text{const.} \quad (33)$$

Για μια ομοεντροπική ροή, δηλαδή για ομοιόμορφη εντροπία στο ρευστό, η ενθαλπία απλουστεύεται ως εξής

$$H = \ln\left(\frac{h}{h_{min}}\right). \quad (34)$$

όπου $h_{min} = 1$ είναι η ειδική ενθαλπία στο όριο της μηδενικής πίεσης. Στην επιφάνεια του δίσκου ισχύει $h = h_{min}$ και $H = 0$.

2.2 Σταθερή ειδική στροφορμή

Επιλέγοντας σταθερή κατανομή της ειδικής στροφορμής πάνω στο δίσκο, δηλαδή υποθέτοντας πως $l = \text{const.}$ η (33) γίνεται

$$H - \ln(u^t) + \int^{\Omega} \frac{l}{1 - \Omega l} d\Omega = \text{const.} \Rightarrow H - \ln(u^t) - \ln(1 - l\Omega) = \text{const.} \Rightarrow$$

$$H - \ln[u^t(1 - l\Omega)] = \text{const.} \quad (35)$$

ή η (32) γίνεται, χρησιμοποιώντας την (εξ. 24)

$$H - \ln[u^t(1 - l\Omega)] = \text{const.} \Rightarrow H - \ln(-1/u_t) = \text{const.}$$

$$\boxed{H + \ln(-u_t) = \text{const.}} \quad (36)$$

Αν ο δίσκος περατώνεται σε κάποιο $r = r_{in}$, τότε το πρώτο ολοκλήρωμα γίνεται

$$H = \ln\left(\frac{u^t}{u_{in}^t}\right) + \ln\left(\frac{1-l\Omega}{1-l\Omega_{in}}\right) = \ln\left(\frac{u_{t,in}}{u_t}\right), \quad (37)$$

ενώ μια παρόμοια σχέση ισχύει όταν χρησιμοποιούμε μια εξωτερική ακτίνα περάτωσης $r = r_{out}$. Η εξωτερική και εσωτερική ακτίνα του δίσκου δεν είναι ανεξάρτητες, αλλά βρίσκονται πάνω στην ίδια ισοβαρή-ή ισοδυναμική-επιφάνεια και ισχύει $\ln(-u_{t,in}) = \ln(-u_{t,out})$. Αν χρησιμοποιήσουμε την ακτίνα $r = r_{max}$ της μέγιστης πυκνότητας ρ_{max} τότε

$$H - H_{max} = \ln\left(\frac{u^t}{u_{max}^t}\right) + \ln\left(\frac{1-l\Omega}{1-l\Omega_{max}}\right) = \ln\left(\frac{u_{t,max}}{u_t}\right), \quad (38)$$

όπου οι δείκτες in , out και max υποδηλώνουν τιμές στις αντίστοιχες ακτίνες.

Για την ομοεντροπική, πολυτροπική καταστατική εξίσωση

$$P = K\rho^{\Gamma}, \quad \epsilon = \rho + \frac{P}{\Gamma-1}, \quad (39a, 39b)$$

όπου K είναι η πολυτροπική σταθερά και Γ ο πολυτροπικός εκθέτης, προκύπτει

$$H = \ln h = \ln \frac{\epsilon + P}{\rho} = \ln \frac{\rho + \frac{P}{\Gamma-1} + P}{\rho} = \ln \left[1 + \frac{P(1 + \Gamma - 1)}{\rho(\Gamma - 1)} \right] =$$

$$= \ln \left[1 + \frac{P\Gamma}{\rho(\Gamma-1)} \right] = \ln \left[1 + \frac{K\Gamma\rho^{\Gamma}}{\rho(\Gamma-1)} \right]. \quad (40)$$

Άρα

$$\boxed{H = \ln \left[1 + \frac{K\Gamma\rho^{\Gamma-1}}{(\Gamma-1)} \right]}. \quad (41)$$

Τέλος, από την (37) λύνοντας αλγεβρικά για την κατανομή της πυκνότητας, συναρτήσει του Ω , για μια καταστατική εξίσωση, για δεδομένα l_0 , r_{in} και σε στάσιμο, αξονικά συμμετρικό χωροχρόνο, έχουμε

$$\frac{K\Gamma\rho^{\Gamma-1}}{(\Gamma-1)} = e^H - 1 = \left[\frac{u^t}{u_{in}^t} \left(\frac{1-l\Omega}{1-l\Omega_{in}} \right) - 1 \right] \Rightarrow$$

$$\rho = \left\{ \frac{\Gamma-1}{K\Gamma} \left[\frac{u^t}{u_{in}^t} \left(\frac{1-l\Omega}{1-l\Omega_{in}} \right) - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\Gamma-1}}, \quad (42)$$

ή στην παρακάτω μορφή

$$\boxed{\rho = \left\{ \frac{\Gamma-1}{K\Gamma} \left[\frac{u_{t,in}}{u_t} - 1 \right] \right\}^{\frac{1}{\Gamma-1}}}. \quad (43)$$

Η σταθερά στην έκφραση του ενεργού δυναμικού μπορεί να οριστεί θεωρώντας ότι $W(r = \infty) = 0$. Τότε, το υποθετικό δυναμικό είναι $W = \ln\left(\frac{u_t}{u_{t,\infty}}\right)$.

2.3 AJS δίσκοι σε Schwarzschild περιβάλλον

Σε σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο, η μετρική σε συντεταγμένες Schwarzschild³ $(t, \underline{r}, \theta, \varphi)$ είναι

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{\underline{r}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{\underline{r}}\right)^{-1} d\underline{r}^2 + \underline{r}^2 d\theta^2 + \underline{r}^2 \sin^2\theta d\varphi^2, \quad (44)$$

όπου M είναι η συνολική μάζα-ενέργεια. Σε αυτή τη μετρική είναι

$$u_t = -\left[\left(1 - \frac{2M}{\underline{r}}\right)^{-1} - \frac{l^2}{\underline{r}^2 \sin^2\theta}\right]^{-1/2}, \quad (45)$$

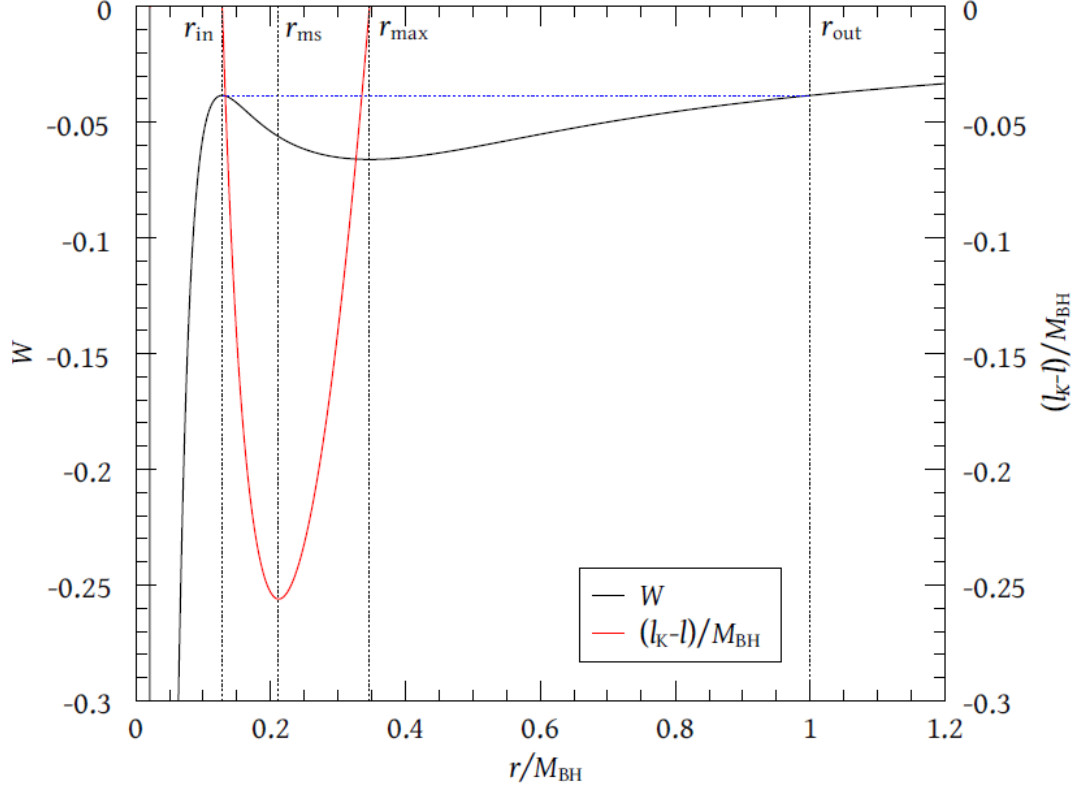
και $u_{t,\infty} = -1$ ώστε το υποθετικό δυναμικό για δίσκο με $l = \text{const.}$ είναι

$$W = \ln(-u_t). \quad (46)$$

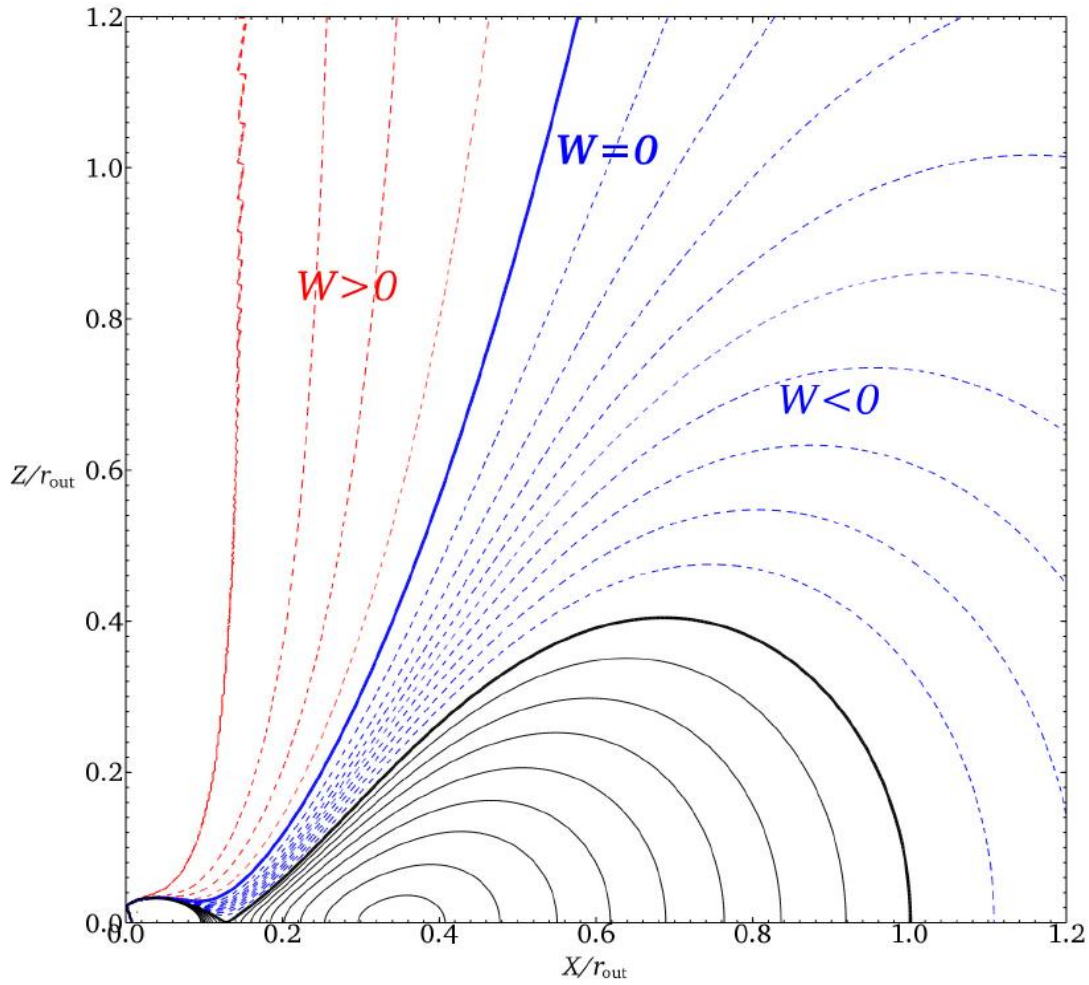
Ένας δίσκος πεπερασμένου μεγέθους εκτείνεται μεταξύ $\underline{r} = \underline{r}_{in}$ και $\underline{r} = \underline{r}_{out}$ πάνω στο ισημερινό επίπεδο. Στο σημείο όπου παρουσιάζει μέγιστο η πυκνότητα, ισχύει $\nabla_{\underline{r}} P = 0$ και εκεί τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σαν ελεύθερα σωματίδια σε κυκλική τροχιά, γεγονός το οποίο επιβάλλει $\underline{r}_{max} > \underline{r}_{ms}$, όπου $\underline{r}_{ms} = 6M$ είναι η ακτίνα της τελευταίας σταθερής κυκλικής τροχιάς των δοκιμαστικών σωματιδίων. Η

³ Σε αυτή την ενότητα χρησιμοποιείται το σύμβολο $\underline{r}$ για να δηλώσουμε ότι πρόκειται συγκεκριμένα για την ακτινική συντεταγμένη Schwarzschild (ενώ στην ενότητα 3.1 η ακτινική συντεταγμένη r είναι ισοτροπική).

γωνιακή ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς είναι $\Omega_K = \sqrt{M/r^3}$ και η αντίστοιχη στροφορμή είναι $l_K = \frac{\sqrt{Mr^3}}{r-2M}$ που έχει ελάχιστο στο $r = r_{ms}$ ώστε να ισχύει $r_{max} > r_{ms} \Rightarrow l > l_{ms} = 3.674M$. Για μια τιμή του l , η μεγαλύτερη από τις τρεις ρίζες του $l = l_K$ αντιστοιχεί στο $r = r_{max}$. Η μεσαία ρίζα, $r = r_{cusp}$, αντιστοιχεί σε ένα οξύ άκρο, όπου πάλι ισχύει $\nabla_r P = 0$ και εκεί τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σαν ελεύθερα σωματίδια σε κυκλική τροχιά. Έτσι, για μια καταστατική εξίσωση, μια μάζα μελανής οπής M και για συγκεκριμένη τιμή της l , υπάρχει μια μονοπαραμετρική οικογένεια από διαφορετικούς πεπερασμένου μεγέθους δίσκους με $r_{cusp} < r_{in} < r_{max}$, οι οποίοι όλοι έχουν το ίδιο r_{max} . Τα μέλη αυτής της μονοπαραμετρικής οικογένειας διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το μέγιστο της πυκνότητας και τη συνολική μάζα. Ένας άλλος παράγοντας που περιορίζει τον παραμετρικό χώρο των πιθανών καταστάσεων ισορροπίας είναι η ύπαρξη της εσώτατης δέσμιας τροχιάς, η οποία για μη περιστρεφόμενες μελανές οπές βρίσκεται σε $r_{mb} = 4M$. Για $l = l_{mb} = 4M$ το οξύ άκρο βρίσκεται στο $r = r_{mb}$. Συγχρόνως, η θέση στην οποία ισχύει $W = 0$ πάνω στο ισημερινό επίπεδο παίζει ρόλο. Για $l < l_{mb}$, το υποθετικό δυναμικό W είναι πάντα αρνητικό πάνω στο ισημερινό επίπεδο. Για $l = l_{mb}$, το $W = 0$ σε $r_{mb} = 4M$, ενώ για $l > l_{mb}$ υπάρχει μια περιοχή όπου το ενεργό δυναμικό είναι θετικό, $W > 0$. Έτσι, για $l > l_{mb}$ μπορούν να υπάρξουν μόνο δίσκοι που δεν παρουσιάζουν οξύ άκρο, με την εσωτερική ακτίνα να περιορίζεται από τη θέση όπου $W = 0$. Σε κάθε οικογένεια δίσκων με την ίδια στροφορμή, οι δίσκοι με τη μικρότερη εσωτερική ακτίνα r_{in} παρουσιάζουν τη μέγιστη πυκνότητα ρ_{max} . Μεταξύ όλων των μοντέλων για τα οποία ισχύει $r_{in} = r_{cusp}$, η ρ_{max} αυξάνεται αυξανόμενης της στροφορμής l . Για $l > l_{mb}$ το μέγιστο ρ_{max} μειώνεται αυξανόμενης της στροφορμής l . Άρα, μεταξύ όλων των πεπερασμένου μεγέθους δίσκων, το μέγιστο της ρ_{max} επιτυγχάνεται για το μοντέλο στο οποίο ισχύει $r_{in} = r_{mb}$. Η παραπάνω ανάλυση φαίνεται στο Σχ.1, όπου φαίνεται πως το ισημερινό επίπεδο, εκεί όπου η κλίση της πίεσης μηδενίζεται, τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σαν ελεύθερα δοκιμαστικά σωματίδια και η σταθερή στροφορμή της ύλης ισούται με την στροφορμή ελευθέρων σωματιδίων σε κυκλική τροχιά. Μπορούν να υπάρξουν δυο τέτοια σημεία, εκ των οποίων εκεί που μεγιστοποιείται η πυκνότητα υπάρχει το κέντρο (r_{max}), ενώ στο άλλο δημιουργείται ένα οξύ άκρο (r_{cusp}). Αυτό το οξύ άκρο βρίσκεται μεταξύ της εσώτατης σταθερής κυκλικής τροχιάς ($r_{ms} \equiv ISCO$) και της τελευταίας δέσμιας τροχιάς (r_{mb}), δηλαδή ισχύει $r_{mb} < r_{cusp} < r_{ms}$. Στο Σχ.2 δείχνουμε ένα παράδειγμα ισοδυναμικών καμπυλών του υποθετικού δυναμικού W σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου ο τόρος γεμίζει πλήρως το λοβό Roche (έντονη μαύρη γραμμή με οξύ άκρο στο ισημερινό επίπεδο). Στο εσωτερικό του λοβού, οι καμπύλες του δυναμικού συμπίπτουν με αυτές της πυκνότητας. Οι καμπύλες του δυναμικού έξω από τον τόρο μπορούν να έχουν αρνητικές ή θετικές τιμές (διακεκομμένες γραμμές), οι οποίες χωρίζονται μεταξύ τους από την τελευταία δέσμια επιφάνεια, για την οποία ισχύει $W = 0$.



Σχήμα 1. Στο ισημερινό επίπεδο, εκεί όπου η κλίση της πίεσης μηδενίζεται, τα σωματίδια του ρευστού κινούνται σαν ελεύθερα δοκιμαστικά σωματίδια και η σταθερή στροφορμή της ύλης ισούται με την στροφορμή ελευθέρων σωματιδίων σε κυκλική τροχιά. Μπορούν να υπάρξουν δυο τέτοια σημεία, εκ των οποίων εκεί που μεγιστοποιείται η πυκνότητα υπάρχει το κέντρο (r_{max}), ενώ στο άλλο δημιουργείται ένα οξύ άκρο (r_{cusp}). Αυτό το οξύ άκρο βρίσκεται μεταξύ της εσώτατης σταθερής κυκλικής τροχιάς ($r_{ms} \equiv ISCO$) και της τελευταίας δέσμιας τροχιάς (r_{mb}), δηλαδή ισχύει $r_{mb} < r_{cusp} < r_{ms}$. Η οριζόντια γραμμή συνδέει τα άκρα του τόρου, το εσωτερικό σημείο r_{in} και το εξωτερικό r_{out} , όπου η τιμή του δυναμικού είναι η ίδια. Το σχήμα προέρχεται από την εργασία [4].



Σχήμα 2. Παράδειγμα ισοδυναμικών καμπυλών του υποθετικού δυναμικού W σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, όπου ο τόρος γεμίζει πλήρως το λοβό Roche (έντονη μαύρη γραμμή με οξύ άκρο στο ισημερινό επίπεδο). Στο εσωτερικό του λοβού, οι καμπύλες του δυναμικού συμπίπτουν με αυτές της πυκνότητας. Οι καμπύλες του δυναμικού έξω από τον τόρο μπορούν να έχουν αρνητικές ή θετικές τιμές (διακεκομμένες γραμμές), οι οποίες χωρίζονται μεταξύ τους από την τελευταία δέσμια επιφάνεια, για την οποία ισχύει $W = 0$. Το σχήμα προέρχεται από την εργασία [4].

2.4 Πυκνοί δίσκοι και Polish Doughnuts

Μαθηματικά, η πιο απλή υπόθεση για την κατανομή της ειδικής στροφορμής είναι να είναι σταθερή, δηλαδή $l = \text{const.}$ Πυκνοί δίσκοι με $l = \text{const.}$ έχουν χαρακτηριστικά σχήματα που μοιάζουν με doughnuts, και για αυτό ονομάστηκαν Polish doughnuts, αφού εισήχθησαν από τον Paczyński και τους Πολωνούς συνεργάτες του [5, 6, 7, 8, 9,]. Πιο συγκεκριμένα, ανέπτυξαν μια πολύ γενική μέθοδο

κατασκευής ισορροπίας της ύλης ιδανικού ρευστού σε τροχιά γύρω από μια μελανή οπή Kerr.

Στην προσέγγιση που μπορούμε να αγνοήσουμε την ιδιο-βαρύτητα του τόρου, υποθέτοντας ότι έχουμε ιδανικό ρευστό ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι

$$T^{\alpha\beta} = (\epsilon + P)u^\alpha u^\beta + P g^{\alpha\beta}, \quad (47)$$

ενώ η 4-ταχύτητα δίνεται από τη (13).

Η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$, δίνει (για στάσιμη και αξονικά συμμετρική κατανομή)

$$\frac{\nabla P}{\epsilon + P} = \nabla \ln u^t - \frac{l \nabla \Omega}{1 - \Omega l}. \quad (48)$$

Στην περίπτωση βαροτροπικού ρευστού, δηλαδή για ρευστό που ισχύει $P = P(\epsilon)$, το αριστερό μέλος της σχέσης (48) είναι η κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης, της ενθαλπίας H και έτσι θα πρέπει και στο αριστερό μέλος να έχουμε το ίδιο, δηλαδή την κλίση ενός βαθμωτού μεγέθους, πράγμα που ισχύει αν και μόνο αν $l = l(\Omega)$. Η παραπάνω συνθήκη αποτελεί μία έκφραση του Θεωρήματος von Zeipel για να υπάρχει λύση ισορροπίας. Επίσης, οι επιφάνειες σταθερής πίεσης συμπίπτουν με τις επιφάνειες σταθερής πυκνότητας.

Σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist⁴, η εξίσωση για μια ισοβαρή επιφάνεια $P = P(r, \theta) = \text{const.}$, μπορεί να γραφεί ως $r_p = r_p(\theta)$, όπου η συνάρτηση $r_p(\theta)$ δίνεται από τη σχέση [2]

$$dP = 0 \Rightarrow -\frac{dr_p}{d\theta} = \frac{\partial_\theta P}{\partial_r P} = \frac{(1-l\Omega)\partial_\theta \ln u^t + l\partial_\theta \Omega}{(1-l\Omega)\partial_r \ln u^t + l\partial_r \Omega}. \quad (49)$$

Γνωρίζοντας τις σχέσεις $u^t = u^t(r, \theta)$, $\Omega = \Omega(r, \theta)$ και $l = l(r, \theta)$ και ολοκληρώνοντας τη σχέση (49) προκύπτουν οι ισοβαρείς επιφάνειες.

Στην περίπτωση των μοντέλων των λεπτών δίσκων [10] η κατανομή της στροφορμής θεωρείται πως είναι αυτή ενός δίσκου με ελεύθερα σωματίδια σε κυκλικές τροχιές (δίσκοι Kepler), δηλαδή [1]

$$l(r, \theta) = l_K(r) \equiv \frac{M^{1/2}(r^2 - 2\alpha M^{1/2} r^{1/2} + \alpha^2)}{r^{3/2} - 2M r^{1/2} + \alpha M^{1/2}}, \quad (50)$$

ενώ στο γνωστό μοντέλο ψυχρού-δίσκου-υπέρθερμης-κορώνας θεωρούμε έναν επίπεδο δίσκο χαμηλής εντροπίας περικυκλωμένο από μια πιο σφαιρική κορώνα, υψηλής εντροπίας. Αυτά τα μοντέλα συνέβαλλαν σημαντικά στην κατανόηση της προσαύξης σε μελανές οπές.

⁴Όπως και την ενότητα 2.3, χρησιμοποιώ το σύμβολο r για την ακτινική συντεταγμένη διότι οι συντεταγμένες Boyer-Lindquist ανάγονται στις συντεταγμένες Schwarzschild, εξ. (44), για μηδενική περιστροφή.

Στην εργασία [1] κατασκευάστηκε μια νέα οικογένεια αναλυτικών μοντέλων για δίσκους προσαύξησης σε μελανές οπές σε ισορροπία και παρουσιάστηκε η μορφή των ισοβαρών επιφανειών [1], θεωρώντας πως η ροή προσαύξησης είναι σταθερή και αξονικά συμμετρική. Μία ακόμη παραδοχή ήταν πως η δυναμική κλίμακα χρόνου είναι πολύ μικρότερη από τη θερμική. Έτσι, ο τανυστής ενέργειας-ορμής μπορεί να θεωρηθεί αυτός ενός ιδανικού ρευστού, εξ.(47).

Η τετρα-ταχύτητα της ύλης θεωρείται μόνο περιστροφική όπως στην εξ.(13). Η τελευταία θεώρηση δεν ισχύει κοντά στο οξύ άκρο, όπου συμβαίνει μια μετάβαση από «σχεδόν κυκλική» σε τροχιές σχεδόν ακτινικής «ελεύθερης πτώσης». Η ειδική στροφορμή l και η γωνιακή ταχύτητα Ω δίνονται από τις (15) και (14) αντίστοιχα, ενώ η διατηρήσιμη στροφορμή ανά μονάδα μάζας ηρεμίας είναι $j = hu_\varphi = El = -hu_t l$.

Ο σκοπός της εργασίας [1] ήταν να προταθεί μια τρι-παραμετρική έκφραση για τη συνάρτηση $l(\underline{r}, \theta)$, η οποία να επιτρέπει την κατασκευή μοντέλων ισορροπίας που να έρχονται κοντά σε ημι-στάσιμες λύσεις που προκύπτουν από αριθμητικές προσομοιώσεις. Έτσι, εισήχθη η παρακάτω τρι-παραμετρική μορφή για την κατανομή της στροφορμής:

$$l(\underline{r}, \theta) = \begin{cases} l_0 \left(\frac{l_K(\underline{r})}{l_0} \right)^\beta \sin^{2\gamma} \theta, & \text{για } \underline{r} \geq \underline{r}_{ms} . \\ l_{ms}(\underline{r}) \sin^{2\gamma} \theta, & \text{για } \underline{r} < \underline{r}_{ms} . \end{cases} \quad (51)$$

Η σταθερά l_0 ορίζεται ως $l_0 \equiv \eta l_K(\underline{r}_{ms})$. Για μοντέλα χωρίς μαγνητικό πεδίο προκύπτει $l_{ms}(\underline{r}) = l_0 \left(\frac{l_K(\underline{r}_{ms})}{l_0} \right)^\beta = \text{const.}$

Οι τρεις αδιάστατες παράμετροι του μοντέλου β , γ και η μπορούν να πάρουν τιμές $0 \leq \beta \leq 1$, $-1 \leq \gamma \leq 1$ και $1 \leq \eta \leq \eta_{max}$, όπου $\eta_{max} = l_K(\underline{r}_{mb})/l_K(\underline{r}_{ms})$. Για $\beta = 0, \gamma = 0$ και $\eta = \eta_{max}$ μια ισοβαρής επιφάνεια που ξεκινά από το οξύ άκρο είναι οριακά δέσμια.

Η μορφή και η θέση των ισοβαρών επιφανειών $P(\underline{r}, \theta) = \text{const.}$, για ύλη ιδανικού ρευστού που περιφέρεται σε κυκλικές τροχιές γύρω από μελανή οπή, προκύπτουν μόνο από τη θεώρηση της κατανομής της στροφορμής $l = l(\underline{r}, \theta)$, χωρίς να χρειάζεται να λυθούν οι εξισώσεις υδροστατικής ισορροπίας, όταν αγνοούμε την ιδιοβαρύτητα του δίσκου. Η εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας (48) γίνεται

$$\frac{\partial_i P}{P + \epsilon} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_i g^{tt} - 2l \partial_i g^{t\varphi} + l^2 \partial_i g^{\varphi\varphi}}{g^{tt} - 2l g^{t\varphi} + l^2 g^{\varphi\varphi}} . \quad (52)$$

Ακόμη και για δι-διάστατη κατανομή $l = l(\underline{r}, \theta)$ η συνθήκη για να έχει η εξ.(48) λύσεις ισορροπίας είναι να ισχύει $l = l(\Omega)$, δηλαδή οι επιφάνειες $l(\underline{r}, \theta) = \text{const.}$ να συμπίπτουν με αυτές όπου $\Omega = \Omega(\underline{r}, \theta) = \text{const.}$

Ακόμη και για μια μη βαροτροπική ροή, γράφοντας την εξ. (52) για $i = r$ και $i = \theta$ και διαιρώντας κατά μέλη, προκύπτει [7]

$$\frac{\partial_r P}{\partial_\theta P} = \frac{\partial_r g^{tt} - 2l \partial_r g^{t\varphi} + l^2 \partial_r g^{\varphi\varphi}}{\partial_\theta g^{tt} - 2l \partial_\theta g^{t\varphi} + l^2 \partial_\theta g^{\varphi\varphi}} \equiv -F(r, \theta). \quad (53)$$

Με δεδομένη τη μετρική Kerr και για τη συνάρτηση $l = l(r, \theta)$, η $F(r, \theta)$ μπορεί να υπολογισθεί. Έστω ότι $\theta = \theta(r)$ είναι η εξίσωση μιας ισοβαρούς επιφάνειας και ισχύει $d\theta/dr = -\partial_r P / \partial_\theta P$, βλ. εξ. (49). Αν η συνάρτηση $F(r, \theta)$ είναι γνωστή, τότε η εξ. (53) παίρνει τη μορφή μιας συνηθισμένης διαφορικής εξίσωσης για την ισοβαρή επιφάνεια, $\theta = \theta(r)$

$$\frac{d\theta}{dr} = F(r, \theta), \quad (54)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί ώστε να ληφθούν όλες οι πιθανές θέσεις των ισοβαρών επιφανειών.

2.5 Αριθμητικά αποτελέσματα

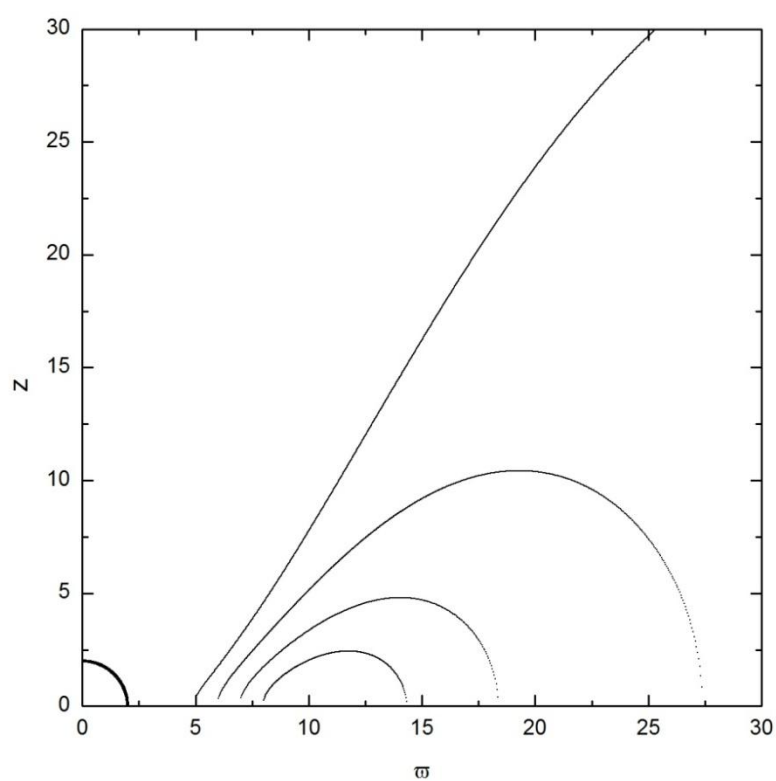
Ακολουθώντας την παραπάνω μέθοδο, επιβεβαιώθηκαν τα αποτελέσματα των θέσεων και της μορφής των ισοβαρών επιφανειών των δίσκων προσαύξησης.

Πιο συγκεκριμένα, για μελανή οπή Schwarzschild, μέσω της σχέσης (53) υπολογίστηκε η $F(r, \theta)$, όπου οι απαραίτητες ανταλλοίωτες συνιστώσες της μετρικής είναι οι εξής

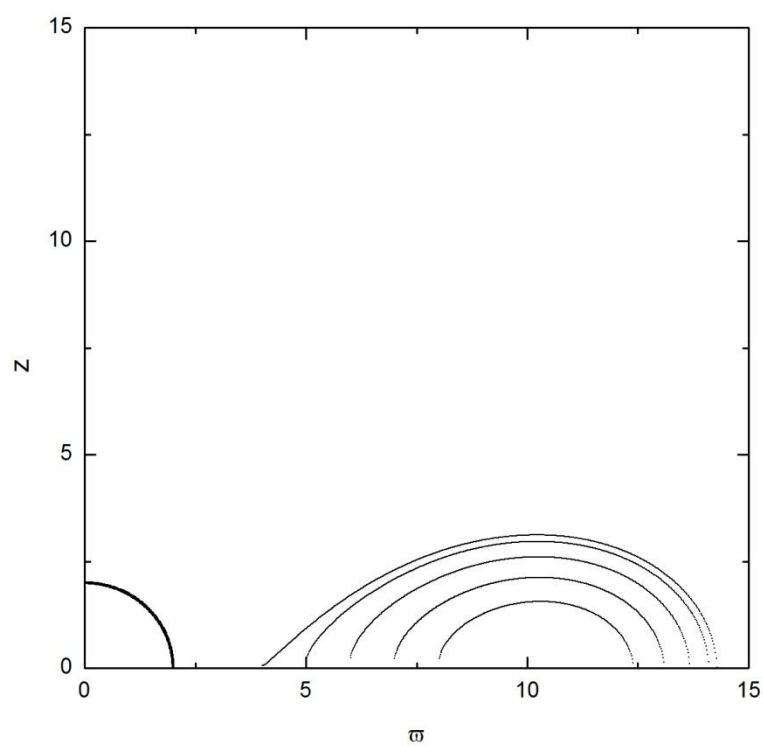
$$g^{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \text{ και } g^{\varphi\varphi} = (r \sin \theta)^{-2}. \quad (55a, 55b)$$

Επίσης, θεωρήθηκε $\alpha = 0$ (μηδενική περιστροφή), $\eta = \eta_{max} = 1.085$ ενώ $r_{ms} = 6M$. Η επεξεργασία έγινε μέσω του προγράμματος Mathematica εκτελώντας την σειρά εντολών που παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

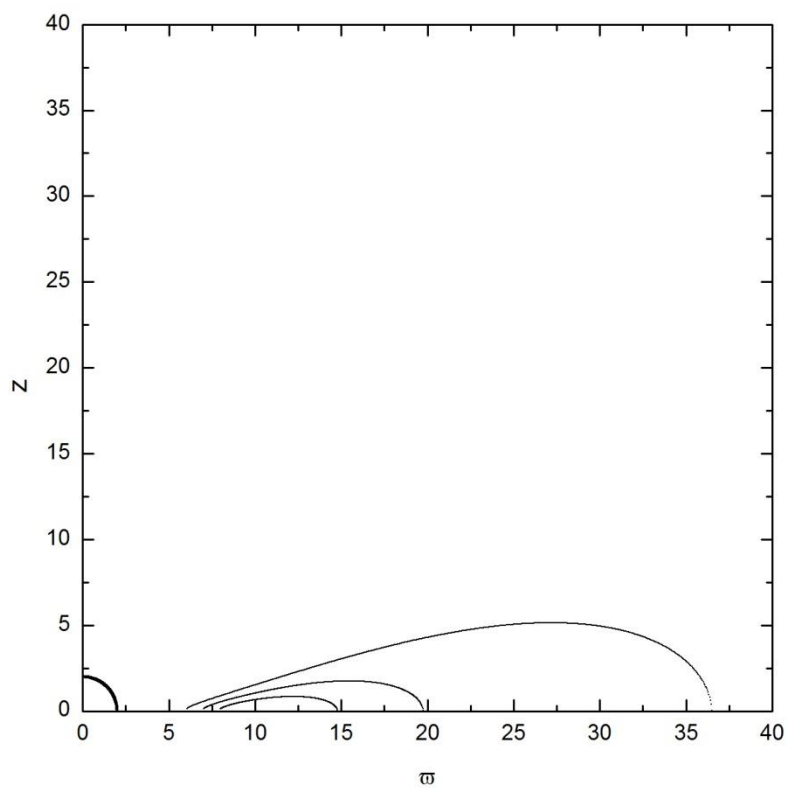
Παρακάτω παρουσιάζονται τα διαγράμματα που απεικονίζουν τη μορφή και τη θέση των ισοβαρών επιφανειών των δίσκων προσαύξησης για διάφορες τιμές των παραμέτρων β και γ (Σχήματα 3, 4, 5 και 6), θεωρώντας $M = 1$. Τα μεγέθη στους άξονες των σχημάτων είναι (ϖ, z) , όπου $\varpi = r \sin \theta$ και $z = r \cos \theta$.



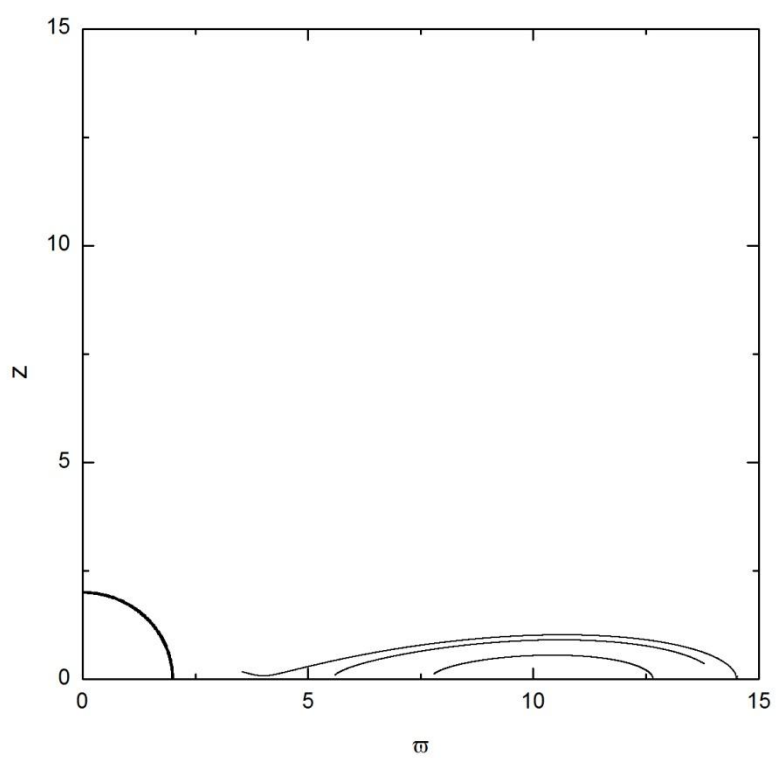
Σχήμα 3. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0$ και $\gamma = 0$. Η συγκεκριμένη περίπτωση αντιπροσωπεύει ένα κλασσικό “Polish doughnut”.



Σχήμα 4. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0$ και $\gamma = 0.9$.



Σχήμα 5. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0.9$ και $\gamma = 0$.



Σχήμα 6. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0.9$ και $\gamma = 0.9$.

Παρατηρούμε ότι η μορφή και η θέση των ισοβαρών επιφανειών αλλάζει αναλόγως με τις τιμές των β και γ . Με την αύξηση της παραμέτρου β συμβαίνει αύξηση της ελάχιστης τιμής στην οποία μπορεί να φτάσει η γωνία θ . Ακόμη, όταν η εξάρτηση της στροφορμής από το θ είναι ισχυρή, όταν δηλαδή το γ παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 0.5, οι ισοβαρείς επιφάνειες φαίνεται πως ίσως να μπορούν να διασχίσουν τον άξονα συμμετρίας. Τα Σχ.3-6 επιβεβαιώνουν τα αντίστοιχα σχήματα στην εργασία [1].

Για μελανή οπή Kerr οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της μετρικής σε συντεταγμένες Boyer-Lindquist⁵ είναι [11]

$$g^{tt} = -\frac{(\alpha^2 + \underline{r}^2)^2 - \alpha^2 \Delta \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2}, \quad (56)$$

$$g^{\varphi\varphi} = \frac{\Delta - \alpha^2 \sin^2 \theta}{\Delta \rho^2 \sin^2 \theta}, \quad (57)$$

$$g^{t\varphi} = -\frac{2\underline{r}\alpha}{\Delta \rho^2}, \quad (58)$$

όπου $\rho^2 = \underline{r}^2 + \alpha^2 \cos^2 \theta$ και $\Delta = \underline{r}^2 - 2\underline{r} + \alpha^2$, έχοντας θεωρήσει $M = 1$. Ως παράδειγμα, θεωρήθηκε $\eta = \eta_{max} = 1.079$, $\alpha = 0.5$ και η θέση $\underline{r}_{ms}$ προκύπτει

$$z_1 = 1 + \left(1 - \frac{\alpha^2}{M^2}\right)^{1/3} \left[\left(1 + \frac{\alpha}{M}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{\alpha}{M}\right)^{1/3} \right], \quad (59)$$

$$z_2 = \sqrt{3 \frac{\alpha^2}{M^2} + z_1^2}, \quad (60)$$

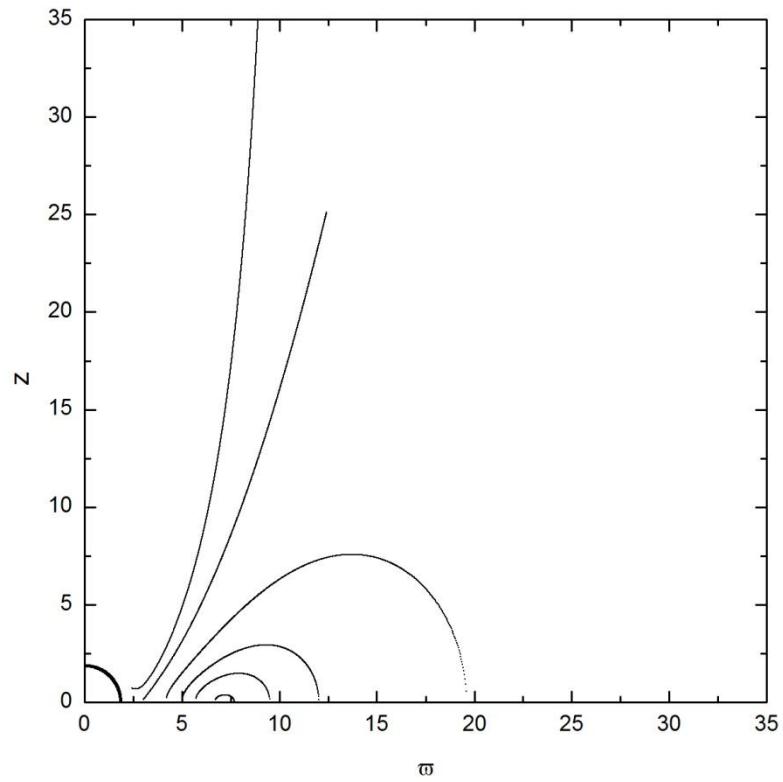
$$\underline{r}_{ms} = M(3 + z_2 - \sqrt{(3 - z_1)(3 + z_1 + 2z_2)}) \Rightarrow \quad (61)$$

$$\Rightarrow \underline{r}_{ms} = 4.233.$$

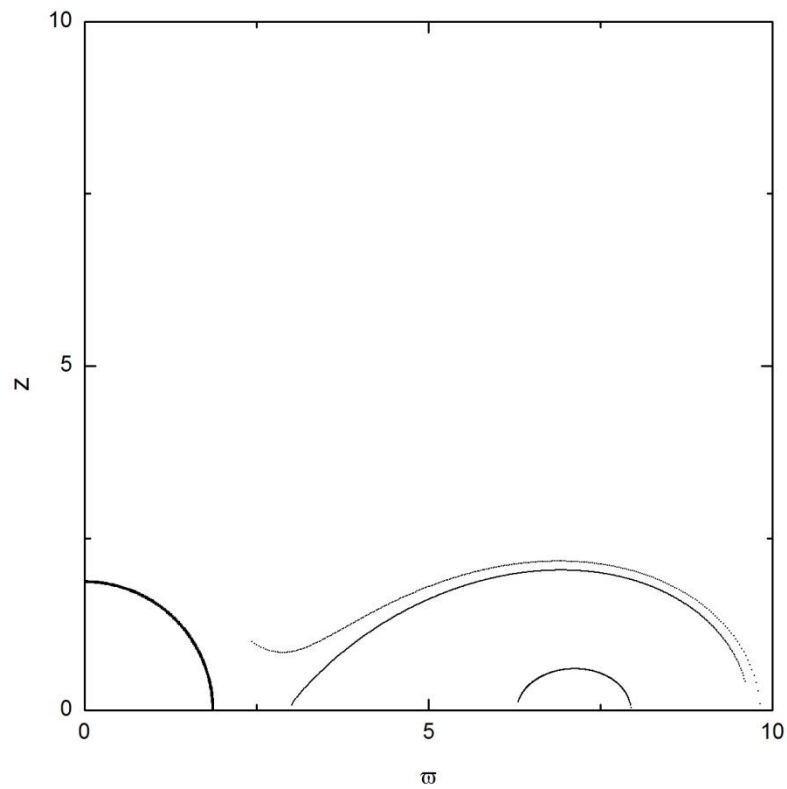
Το αντίστοιχο πρόγραμμα υπολογισμού σε Mathematica παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

Τα διαγράμματα των ισοβαρών επιφανειών για την προαναφερθείσα περίπτωση, παρουσιάζονται παρακάτω, στα σχήματα 7, 8, 9 και 10). Τα μεγέθη στους άξονες των σχημάτων είναι (ϖ, z) , όπου $\varpi = \underline{r} \sin \theta$ και $z = \underline{r} \cos \theta$.

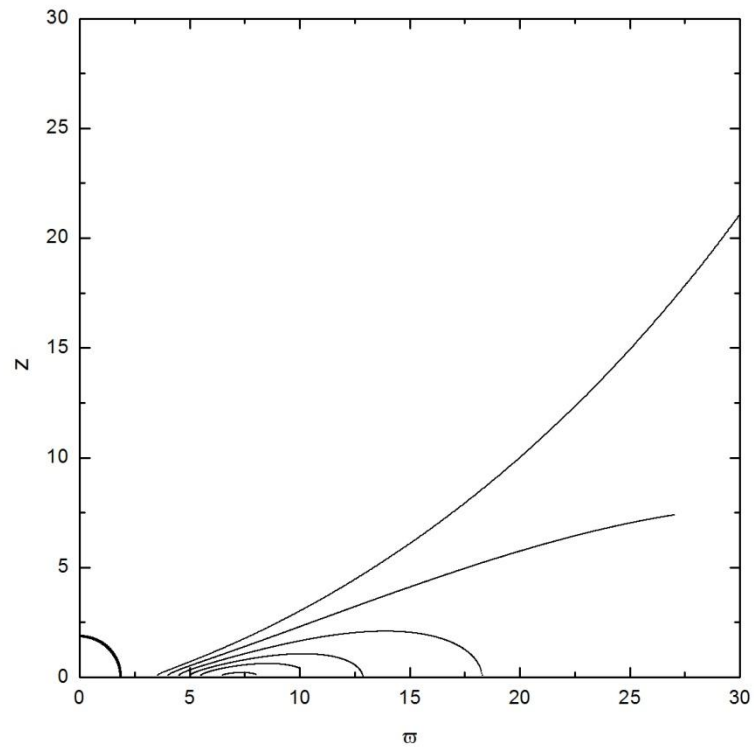
⁵ Όπως και την ενότητα 2.3, χρησιμοποιώ το σύμβολο $\underline{r}$ για την ακτινική συντεταγμένη διότι οι συντεταγμένες Boyer-Lindquist ανάγονται στις συντεταγμένες Schwarzschild, εξ. (44), για μηδενική περιστροφή.



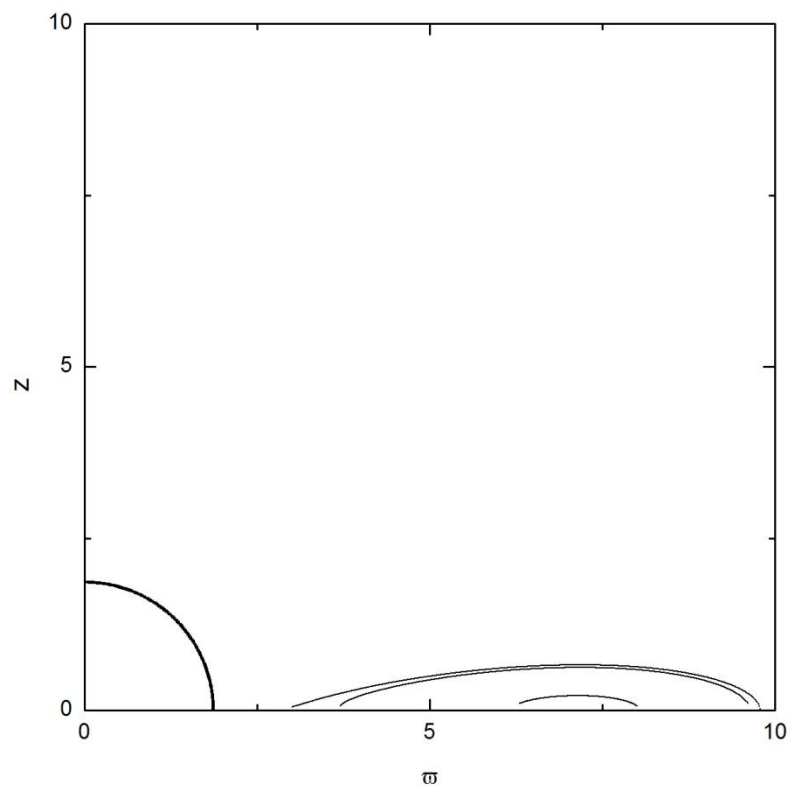
Σχήμα 7. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0$ και $\gamma = 0$. Η περίπτωση αυτή αντιπροσωπεύει ένα κλασσικό “Polish doughnut” για μελανή οπή.



Σχήμα 8. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0$ και $\gamma = 0.9$.



Σχήμα 9. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0.9$ και $\gamma = 0$.



Σχήμα 10. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0.9$ και $\gamma = 0.9$.

Και σε αυτή την περίπτωση, οι παράμετροι β και γ επηρεάζουν τη θέση και τη μορφή των ισοβαρών επιφανειών. Για σημαντικές τιμές του γ οι ισοβαρείς επιφάνειες ίσως να μπορούν να διασχίσουν τον άξονα συμμετρίας, ενώ μια τιμές $\gamma < 0.5$ αυτό δεν φαίνεται να είναι εφικτό. Η ελάχιστη τιμή που φτάνει η γωνία θ είναι μεγάλη για μεγάλες τιμές του β από την αντίστοιχη ελάχιστη τιμή που παίρνει για μικρές τιμές της ίδιας παραμέτρου. Δηλαδή, όσο μικρότερη είναι η τιμή του β τόσο πιο μικρή τιμή μπορεί να πάρει η γωνία θ . Τα Σχ.7-10 επιβεβαιώνουν τα αντίστοιχα σχήματα, που παρουσιάζουν τις ισοβαρείς επιφάνειες για μελανή οπή Kerr, της εργασίας [1].

Κεφάλαιο 3

Ανάλυση σε ισοτροπικές συντεταγμένες

3.1 Μοντέλα σε ισοτροπικές συντεταγμένες

Η μετρική του χωροχρόνου Schwarzschild σε ισοτροπικές συντεταγμένες (t, r, θ, φ) είναι [3]

$$ds^2 = -\left[\frac{1-M/2r}{1+M/2r}\right]^2 dt^2 + \left(1 + \frac{M}{2r}\right)^4 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (62)$$

ενώ η ισοτροπική ακτινική συντεταγμένη r συνδέεται με τη Schwarzschild ακτινική συντεταγμένη $\underline{r}$ μέσω της παρακάτω σχέσης

$$r = \frac{1}{2} \left[\underline{r} - M + \sqrt{\underline{r}^2 - 2M\underline{r}} \right], \quad (63)$$

ή αλλιώς

$$\underline{r} = \frac{M^2}{4r} + M + r. \quad (64)$$

Σε αυτή την περίπτωση για την στροφορμή Kepler βρίσκουμε

$$L_K = \frac{\sqrt{M}(1+M/2r)^6 r^2}{(1-M/2r)^2 (M+M^2/4r+r)^{3/2}}. \quad (65)$$

Επίσης, είναι $u_t = -\left[\left(\frac{M+2r}{M-2r}\right)^2 - \frac{16l^2 r^2}{(M+2r)^4 \sin^2 \theta}\right]^{-1/2}$, ενώ η θέση της τελευταίας σταθερής τροχιάς είναι

$$r_{ms} = \frac{1}{2} (5 + 2\sqrt{6}) \cong 4.950,$$

και $r_{mb} \cong 2.914$, η οποία προκύπτει από το γεγονός πως σε αυτή τη θέση ισχύει $W = 0$ για $l = 4$.

Επομένως, για μελανή οπή Schwarzschild σε ισοτροπικές συντεταγμένες υπολογίσαμε τις θέσεις και τη μορφή των ισοβαρών επιφανειών του δίσκου ακολουθώντας την ίδια διαδικασία όπως στην ενότητα 2.5.

Πάλι θεωρήθηκε $\alpha = 0$ (μηδενική περιστροφή), $\eta = \eta_{max} = 1.085$ και $M = 1$ αλλά για την στροφορμή Kepler χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (65). Οι ανταλλοίτωτες συνιστώσες που χρειαζόμαστε είναι οι

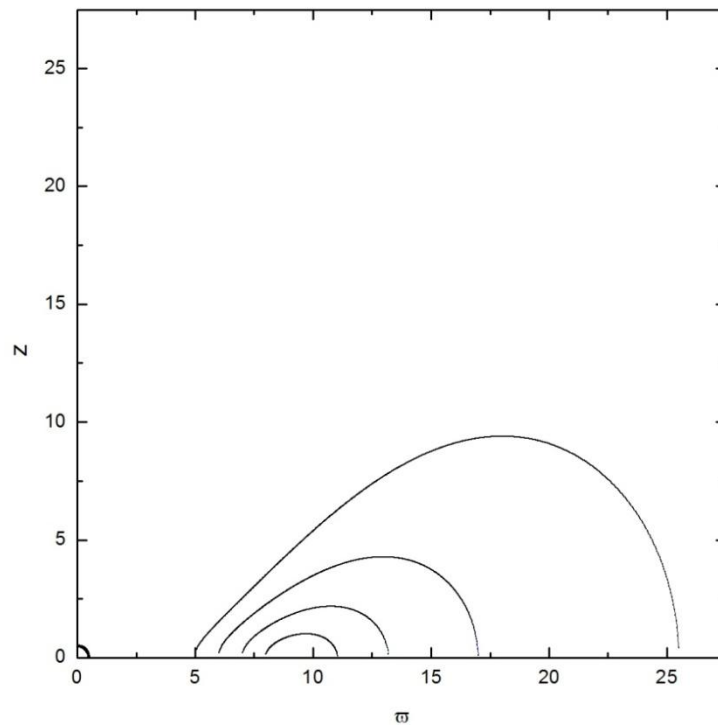
$$g^{tt} = - \left[\frac{1-M/2r}{1+M/2r} \right]^{-2}, \quad (66)$$

$$g^{t\varphi} = 0, \quad (67)$$

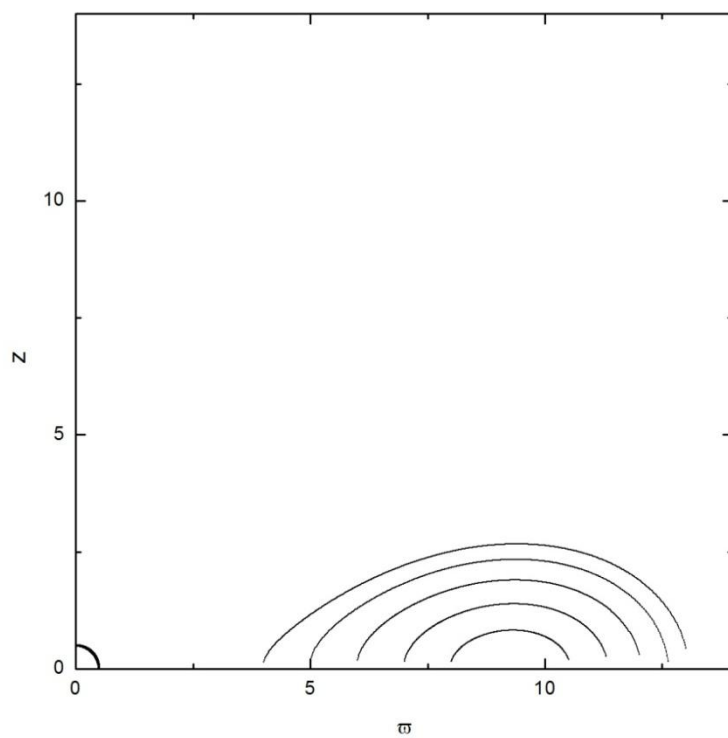
$$g^{\varphi\varphi} = \left(1 + \frac{M}{2r} \right)^{-4} r^{-2} \sin^{-2} \theta. \quad (68)$$

Το αντίστοιχο πρόγραμμα Mathematica παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.

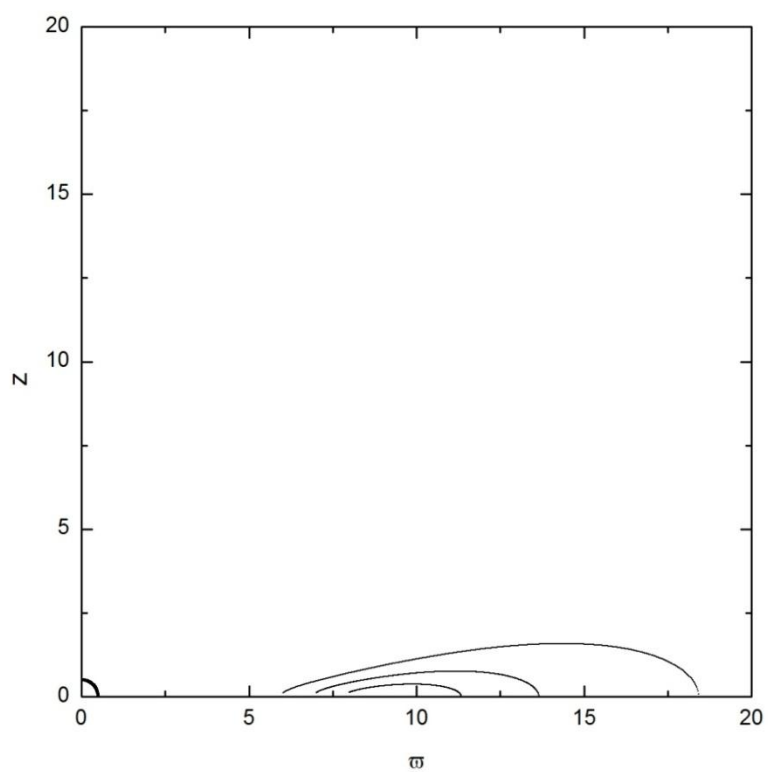
Στη συνέχεια, παρουσιάζονται διαγράμματα των ισοβαρών επιφανειών για την προαναφερθείσα περίπτωση για διάφορες τιμές των β και γ . (Σχήματα 11, 12, 13 και 14). Τα μεγέθη στους άξονες των σχημάτων είναι (ϖ, z) , όπου $\varpi = r \sin \theta$ και $z = r \cos \theta$.



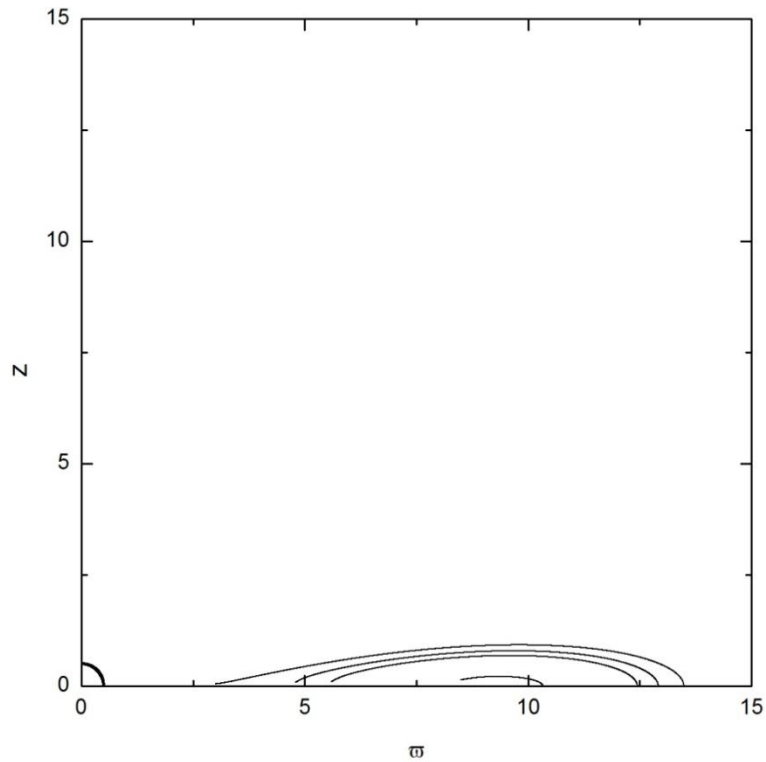
Σχήμα 11. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0$ και $\gamma = 0$.



Σχήμα 12. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0$ και $\gamma = 0.9$.



Σχήμα 13. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0.9$ και $\gamma = 0$.



Σχήμα 14. Ισοβαρείς επιφάνειες για $\beta = 0.9$ και $\gamma = 0.9$.

Παρατηρούμε πως στα Σχ.11-14 οι ισοβαρείς επιφάνειες έχουν την ίδια μορφή με αυτές στα Σχ.3-6. Δηλαδή, η μορφή των επιφανειών παραμένουν αμετάβλητες είτε η μελέτη γίνεται χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες Schwarzschild είτε τις ισοτροπικές συντεταγμένες. Τα μοντέλα στις ισοτροπικές συντεταγμένες είναι χρήσιμα διότι συνήθως οι αριθμητικές προσομοιώσεις γίνονται σε τέτοιες συντεταγμένες, παρά σε συντεταγμένες Schwarzschild. Οι παράμετροι β και γ επηρεάζουν με τον ίδιο τρόπο τη μορφή και τη θέση των επιφανειών όπως και στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις.

Συμπεράσματα

Τα Σχήματα 3-14 δείχνουν πως η συμπεριφορά των ισοβαρών επιφανειών επηρεάζεται από τις τιμές των παραμέτρων β και γ . Καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου β , που αντιστοιχεί στην εξάρτηση της στροφορμής από το r , η ελάχιστη τιμή της γωνίας θ αυξάνεται και οι καμπύλες παρουσιάζονται πιο χαμηλωμένες. Για τιμές του $\gamma > 0.5$, όταν δηλαδή η εξάρτηση της στροφορμής από το θ είναι ισχυρή, οι ισοβαρείς επιφάνειες ίσως να μπορούν να διασχίσουν τον άξονα συμμετρίας, ενώ για μικρότερες τιμές του γ αυτό δεν φαίνεται να είναι εφικτό. Οι ισοβαρείς επιφάνειες, και κατ'επέκταση οι δίσκοι προσαύξησης έχουν την ίδια μορφή, είτε η μελέτη τους γίνεται χρησιμοποιώντας τις συντεταγμένες Schwarzschild, είτε τις αντίστοιχες ισοτροπικές.

Όμως, είναι σημαντικό να υπάρχουν τα μοντέλα στις ισοτροπικές συντεταγμένες διότι συνήθως, οι αριθμητικές προσομοιώσεις γίνονται σε αυτές τις συντεταγμένες, και λιγότερο συχνά στις συντεταγμένες Schwarzschild. Επομένως, τα μοντέλα στις ισοτροπικές συντεταγμένες είναι πιο χρήσιμα.

Τα Σχ.3-10 επιβεβαιώνουν πλήρως τα αντίστοιχα σχήματα της εργασίας [1].

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Εντολές στο πρόγραμμα Mathematica

Περίπτωση $\beta = 0.9, \gamma = 0.9$ για μελανή οπή Schwarzschild.

```
Clear["Global`*"];
```

```
(*Ορίζουμε μηδενική περιστροφή*)  
a=0.;
```

```
(*Για μελανή οπή Schwarzschild γνωρίζουμε πως ισχύει  $r_{ms}=6M$ , όπου έχουμε  
θεωρήσει ότι  $M=1$ *)  
rms=6.;
```

```
(*Ορίζουμε τον παράγοντα  $\eta$ *)  
 $\eta=1.085$ ;
```

```
(*Ορίζουμε τη στροφορμή Kepler, εξ .50, όπου  $M=1$ *)  
Lk[r_]=(r^2-2*a*r^0.5+a^2)/(r^(3/2)-2*r^0.5+a);
```

```
(*και τη σταθερά  $l_0$ *)  
L0= $\eta$ *Lk[rms];
```

```
(*Ορισμός της τρι-παραμετρικής σχέσης για την κατανομή της στροφορμής,  
εξ .51*)  
L[r_,u_]=L0*(Lk[r]/L0)^b*Sin[u]^(2*g);
```

```
(*Ορισμός των συνιστωσών της μετρικής Schwarzschild*)  
gtt[r_]=-(1-2/r)^(-1);  
gff[r_,u_]=(r*Sin[u])^(-2);  
gtf[r_,u_]=0;
```

```
(*Υπολογισμός της  $F(r,\theta)$  χρησιμοποιώντας την εξ .53*)  
F[r_,u_]=-(D[gtt[r],r]-2*L[r,u]*D[gtf[r,u],r]+L[r,u]^2*D[gff[r,u],r])/(D[gtt[r],u]-  
2*L[r,u]*D[gtf[r,u],u]+L[r,u]^2*D[gff[r,u],u]);
```

```
(* Ορίζουμε τον αριθμό των σημείων της ισοδυναμικής καμπύλης*)  
Np=1300;
```

(*Ορίζουμε το βήμα*)
 $dr=(12.7-7.8)/(Np-1);$

(*Δημιουργία ενός πίνακα για την καταχώρηση των σημείων της καμπύλης*)
 $tab=Table[\{\},\{i,Np\}];$

(*Ορίζουμε το αρχικό θ_0 από το οποίο θα ξεκινήσει η διαδικασία ώστε να πάρουμε τα σημεία της καμπύλης*)
 $u0=0.99*Pi/2.;$

(*Ορίζουμε το αρχικό r_0 *)
 $r0=7.8;$

(*Κάνουμε χρήση της μεθόδου Euler και ορίζουμε τις τιμές των παραμέτρων β και γ *)
 $For[i=1,i\leq Np,i++,$
 $r0=r0+dr;$
 $u0=u0+(F[r0,u0]/\{b\rightarrow 0.9,g\rightarrow 0.9\})*dr;$

(*Προσδιορίζουμε το περιεχόμενο του αρχικού πίνακα ώστε να αντιπροσωπεύει τα σημεία της ισοδυναμικής καμπύλης*)
 $AppendTo[tab[[i]],\{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]\}]]$

(*Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για την εύρεση και άλλων ισοδυναμικών καμπυλών*)
 $Np=1400;$
 $dr=(13.8-5.6)/(Np-1);$
 $tab1=Table[\{\},\{i,Np\}];$
 $u0=0.99*Pi/2.;$
 $r0=5.6;$
 $For[i=1,i\leq Np,i++,$
 $r0=r0+dr;$
 $u0=u0+(F[r0,u0]/\{b\rightarrow 0.9,g\rightarrow 0.9\})*dr;$
 $AppendTo[tab1[[i]],\{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]\}]]$

 $Np=1500;$
 $dr=(14-5)/(Np-1);$
 $tab2=Table[\{\},\{i,Np\}];$
 $u0=0.99*Pi/2.;$
 $r0=5.0;$
 $For[i=1,i\leq Np,i++,$
 $r0=r0+dr;$
 $u0=u0+(F[r0,u0]/\{b\rightarrow 0.9,g\rightarrow 0.9\})*dr;$
 $AppendTo[tab2[[i]],\{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]\}]]$

```

Np=1600;
dr=(15.9-3)/(Np-1);
tab3=Table[{},{i,Np}];
u0=0.99*Pi/2.;
r0=3.0;
For[i=1,i≤Np,i++,
r0=r0+dr;
u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;
AppendTo[tab3[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]

```

```

Np=1600;
dr=(20.3-3)/(Np-1);
tab4=Table[{},{i,Np}];
u0=0.99*Pi/2.;
r0=3.0;
For[i=1,i≤Np,i++,
r0=r0+dr;
u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;
AppendTo[tab4[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]

```

(*Εκτύπωση των σημείων στους πίνακες που ορίσαμε*)
Print[tab,tab1, tab2, tab3,tab4]

(*Τέλος, τοποθετούμε τα σημεία των πινάκων σε σχήμα ώστε να εξασφαλίσουμε τη μορφή των ισοδυναμικών καμπυλών, η κάθε μια εκ των οποίων έχει διαφορετικό χρώμα ώστε να ξεχωρίζουν μεταξύ τους*)
Show[ListPlot[tab,PlotStyle→ Red],ListPlot[tab1,PlotStyle→ Blue],ListPlot[tab2,PlotStyle→ Black],ListPlot[Abs[tab3],PlotStyle→ Green],ListPlot[Abs[tab4],PlotStyle→ Orange]]

Περίπτωση $\beta = 0.9, \gamma = 0.9$ για μελανή οπή Kerr.

```
Clear["Global`*"];
```

(*Ορίζουμε τον παράγοντα περιστροφής*)
a=0.5;

(*Ορισμός των συνιστωσών της μετρικής Boyer-Lindquist*)
ρ[r_,u_]=Sqrt[r^2+(a^2)*(Cos[u]^2)];
Delta[r_]=(r^2)-2*r+a^2;
gtt[r_,u_]=-((r^2+a^2)^2-(a^2)*Delta[r]*(Sin[u]^2))/(Delta[r]*(ρ[r,u]^2));
gff[r_,u_]=(Delta[r]-(a^2)*(Sin[u]^2))/(Delta[r]*(ρ[r,u]^2)*(Sin[u]^2))
gtf[r_,u_]=-(2*a*r)/(Delta[r]*(ρ[r,u]^2))

```

(*Υπολογίζουμε το σημείο  $r_{ms}$  σύμφωνα με τις εξ.(59-61)*)
z1=1+(1-a^2)^(1/3)*((1+a)^(1/3)+(1-a)^(1/3));
z2=Sqrt[3*a^2+z1^2];
rms=3+z2-Sqrt[(3-z1)*(3+z1+2*z2)];

(*Ορίζουμε τον παράγοντα  $\eta$ *)
η=1.079;

(*Ορίζουμε τη στροφορμή Kepler, εξ .50, όπου  $M=1$ *)
Lk[r_]=(r^2-2*a*(r^0.5)+a^2)/(r^(3/2)-2*(r^0.5)+a);

(*και τη σταθερά  $l_0$ *)
L0=η*Lk[rms];

(*Ορισμός της τρι-παραμετρικής σχέσης για την κατανομή της στροφορμής,
εξ .51*)
L[r_,u_]=L0*(Lk[r]/L0)^b*Sin[u]^(2*g);

(*Υπολογισμός της  $F(r,\theta)$  χρησιμοποιώντας την εξ .53*)
F[r_,u_]=- (D[gtt[r,u],r]-2*L[r,u]*D[gtf[r,u],r]+L[r,u]^2*D[gff[r,u],r])/(D[gtt[r,u],u]-
2*L[r,u]*D[gtf[r,u],u]+L[r,u]^2*D[gff[r,u],u]);

(* Ορίζουμε τον αριθμό των σημείων της ισοδυναμικής καμπύλης*)
Np=300;

(*Ορίζουμε το βήμα*)
dr=(8-6.3)/(Np-1);

(*Δημιουργία ενός πίνακα για την καταχώρηση των σημείων της καμπύλης*)
tab=Table[{},{i,Np}];

(*Ορίζουμε το αρχικό  $\theta_0$  από το οποίο θα ξεκινήσει η διαδικασία ώστε να
πάρουμε τα σημεία της καμπύλης*)
u0=0.99*Pi/2.;

(*Ορίζουμε το αρχικό  $r_0$ *)
r0=6.3;

(*Κάνουμε χρήση της μεθόδου Euler και ορίζουμε τις τιμές των παραμέτρων  $\beta$ 
και  $\gamma$ *)
For[i=1,i≤Np,i++,
r0=r0+dr;
u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;

(*Προσδιορίζουμε το περιεχόμενο του αρχικού πίνακα ώστε να
αντιπροσωπεύει τα σημεία της ισοδυναμικής καμπύλης*)
AppendTo[tab[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]

```

(*Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για την εύρεση και άλλων ισοδυναμικών καμπυλών*)

```
Np=600;  
dr=(9.6-3.7)/(Np-1);  
tab1=Table[{},{i,Np}];  
u0=0.99*Pi/2.;  
r0=3.7;  
For[i=1,i≤Np,i++,  
  r0=r0+dr;  
  u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;  
  AppendTo[tab1[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]
```

```
Np=800;  
dr=(12-3)/(Np-1);  
tab2=Table[{},{i,Np}];  
u0=0.99*Pi/2.;  
r0=3.0;  
For[i=1,i≤Np,i++,  
  r0=r0+dr;  
  u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;  
  AppendTo[tab2[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]
```

```
Np=1000;  
dr=(16-2)/(Np-1);  
tab3=Table[{},{i,Np}];  
u0=0.99*Pi/2.;  
r0=2.0;  
For[i=1,i≤Np,i++,  
  r0=r0+dr;  
  u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;  
  AppendTo[tab3[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]
```

```
Np=1000;  
dr=(28-2)/(Np-1);  
tab4=Table[{},{i,Np}];  
u0=0.99*Pi/2.;  
r0=2.0;  
For[i=1,i≤Np,i++,  
  r0=r0+dr;  
  u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;  
  AppendTo[tab4[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]
```

(*Εκτύπωση των σημείων στους πίνακες που ορίσαμε*)

```
Print[tab,tab1, tab2, tab3,tab4]
```

(*Τέλος, τοποθετούμε τα σημεία των πινάκων σε σχήμα ώστε να εξασφαλίσουμε τη μορφή των ισοδυναμικών καμπυλών, η κάθε μια εκ των οποίων έχει διαφορετικό χρώμα ώστε να ξεχωρίζουν μεταξύ τους*)
`Show[ListPlot[tab, PlotStyle→ Red],ListPlot[tab1,PlotStyle→ Blue],ListPlot[tab2, PlotStyle→ Black],ListPlot[tab3, PlotStyle→ Green],ListPlot[tab4,PlotStyle→ Orange]]`

Περίπτωση $\beta = 0.9, \gamma = 0.9$ για μελανή οπή Schwarzschild σε ισοτροπικές συντεταγμένες.

`Clear["Global`*"];`

(*Ορίζουμε τη θέση της τελευταίας κυκλικής τροχιάς όπως υπολογίστηκε στην ενότητα 3.1*)
`rms=4.950;`

(*Ορίζουμε τον παράγοντα η *)
 `$\eta$ =1.085;`

(*Ορίζουμε τη στροφορμή Kepler, εξ .65, όπου $M=1$ *)
`Lk[r_]=((1+1/(2*r))^6*r^2)/((1-1/(2*r))^2*(1+1/(4*r)+r)^(3/2));`

(*και τη σταθερά l_0 *)
`L0= $\eta$ *Lk[rms];`

(*Ορισμός της τρι-παραμετρικής σχέσης για την κατανομή της στροφορμής, εξ .51*)
`L[r_,u_]=L0*(Lk[r]/L0)^b*Sin[u]^(2*g);`

(*Ορισμός των συνιστωσών της μετρικής Schwarzschild σε ισοτροπικές συντεταγμένες*)
`gtt[r_]=-((1-1/(2*r))/(1+1/(2*r)))^(-2);`
`gtf=0;`
`gff[r_,u_]=(1+1/(2*r))^(-4)*(r*Sin[u])^(-2);`

(*Υπολογισμός της $F(r,\theta)$ χρησιμοποιώντας την εξ .53*)
`F[r_,u_]=-(D[gtt[r],r]-2*L[r,u]*D[gtf,r]+(L[r,u]^2)*D[gff[r,u],r])/(D[gtt[r],u]-2*L[r,u]*D[gtf,u]+(L[r,u]^2)*D[gff[r,u],u]);`

(* Ορίζουμε τον αριθμό των σημείων της ισοδυναμικής καμπύλης*)
`Np=1600;`

(*Ορίζουμε το βήμα*)
`dr=(13-8.5)/(Np-1);`

(*Δημιουργία ενός πίνακα για την καταχώρηση των σημείων της καμπύλης*)
`tab=Table[{},{i,Np}];`

(*Ορίζουμε το αρχικό θ_0 από το οποίο θα ξεκινήσει η διαδικασία ώστε να πάρουμε τα σημεία της καμπύλης*)
`u0=0.99*Pi/2.;`

(*Ορίζουμε το αρχικό r_0 *)
`r0=8.5;`

(*Κάνουμε χρήση της μεθόδου Euler και ορίζουμε τις τιμές των παραμέτρων β και γ *)
`For[i=1,i≤Np,i++,
 r0=r0+dr;
 u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;`

(*Προσδιορίζουμε το περιεχόμενο του αρχικού πίνακα ώστε να αντιπροσωπεύει τα σημεία της ισοδυναμικής καμπύλης*)
`AppendTo[tab[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]`

(*Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για την εύρεση και άλλων ισοδυναμικών καμπυλών*)
`Np=1600;
 dr=(13-5.6)/(Np-1);
 tab1=Table[{},{i,Np}];
 u0=0.99*Pi/2.;;
 r0=5.6;
 For[i=1,i≤Np,i++,
 r0=r0+dr;
 u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;
 AppendTo[tab1[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]`

`Np=1600;
 dr=(13-4.8)/(Np-1);
 tab2=Table[{},{i,Np}];
 u0=0.99*Pi/2.;;
 r0=4.8;
 For[i=1,i≤Np,i++,
 r0=r0+dr;
 u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;
 AppendTo[tab2[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]`
`Np=1600;
 dr=(14-3)/(Np-1);
 tab3=Table[{},{i,Np}];`

```

u0=0.99*Pi/2.;
r0=3.0;
For[i=1,i≤Np,i++,
r0=r0+dr;
u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;
AppendTo[tab3[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]

```

```

Np=1600;
dr=(14-3)/(Np-1);
tab4=Table[{},{i,Np}];
u0=0.99*Pi/2.;
r0=3.0;
For[i=1,i≤Np,i++,
r0=r0+dr;
u0=u0+(F[r0,u0]/.{b→0.9,g→0.9})*dr;
AppendTo[tab4[[i]],{r0*Sin[u0],r0*Cos[u0]}]]

```

(*Εκτύπωση των σημείων στους πίνακες που ορίσαμε*)
Print[tab,tab1, tab2, tab3,tab4]

(*Τέλος, τοποθετούμε τα σημεία των πινάκων σε σχήμα ώστε να εξασφαλίσουμε τη μορφή των ισοδυναμικών καμπυλών, η κάθε μια εκ των οποίων έχει διαφορετικό χρώμα ώστε να ξεχωρίζουν μεταξύ τους*)
Show[ListPlot[Abs[tab],PlotStyle→ Red],ListPlot[tab1,PlotStyle→ Blue],ListPlot[tab2,PlotStyle→ Black],ListPlot[Abs[tab3],PlotStyle→ Green],ListPlot[Abs[tab4],PlotStyle→ Orange]]

Αναφορές

- [1] “The Polish doughnuts revisited. I. The angular momentum distribution and equipressure surfaces, Qian, L., Abramowicz, M.A., Fragile, P.C., et al., *Astronomy & Astrophysics*, **498**, 471 (2009)
- [2] “Foundations of Black Hole Accretion Disk Theory”, Abramowicz, M.A.& Fragile, P.C., *Living Reviews, Relativity* **16**, 1 (2013)
- [3] “Black hole spacetimes with self-gravitating, massive accretion tori”, Stergioulas, N., *Journal of Physics: Conference Series*, **283**, 012036 (2011)
- [4] “An improved method for constructing models of self gravitating tori around black holes”, Stergioulas, N., *International Journal of Modern Physics D*, **20**, 1251-1263 (2011)
- [5] “Relativistic accretion disks”, Abramowicz, M.A., Jaroszyński, M., Sikora, M., *Astronomy & Astrophysics*, **63**, 221 (1978)
- [6] Abramowicz, M.A., *Nature*, **294**, 235 (1981)
- [7] Jaroszyński M., Abramowicz, M.A. & Paczyński B., *Acta Astr.*, **30**, 1 (1980)
- [8] Paczyński B. & Wiita, *A&A*, **88**, 23 (1980)
- [9] Paczyński B., *Astr. Gesellschaft*, 57, 27 (1982)
- [10] Shakura N.I. & Sunyaev R.A., *A&A*, **24**, 337 (1973)
- [11] “The runaway instability of thick discs around black holes-II.Non-constant angular momentum discs”, Daigne, F.& Font, J.A., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **349**, 841 (2004)