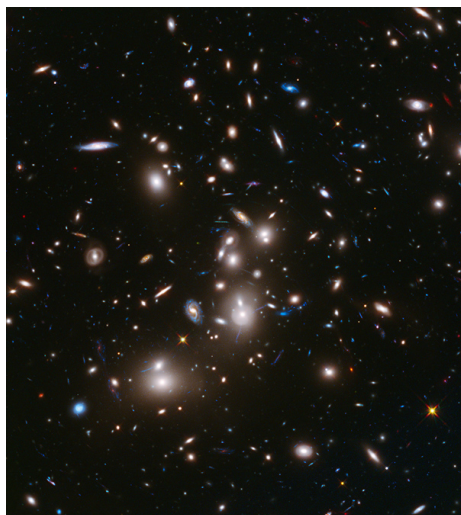


# ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ



*Τίτλος:*

”Εξέλιξη διαταραχών σε διαστελλόμενο χώρο και έλεγχος της γραμμικής προσέγγισης με δεδομένα κοσμολογικών προσομοιώσεων N-σωμάτων.”

*Δήμα Κατερίνα*

Επιβλέπων καθηγητής: Μανώλης Πλειώνης

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης  
Τμήμα Φυσικής

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Περίληψη</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Θεωρητικό υπόβαθρο</b>	<b>4</b>
2.1	Μοντέλο Einstein – de – Sitter ( $k = \Lambda = 0$ )	7
2.2	Μοντέλο με Κοσμολογική Σταθερά	8
<b>3</b>	<b>Εξέλιξη Διαταραχών Πυκνότητας στο Διαστελλόμενο Σύμπαν</b>	<b>12</b>
3.1	Εξίσωση Συνέχειας	14
3.2	Εξίσωση Poisson	15
3.3	Εξίσωση Euler	16
3.4	Γραμμικοποίηση των νέων εξισώσεων κίνησης	17
3.4.1	Λύση της διαφορικής εξίσωσης εξέλιξης διαταραχών	19
3.4.2	Σχέση ταχύτητας-επιτάχυνσης	20
<b>4</b>	<b>Έλεγχος της γραμμικής προσέγγισης με δεδομένα προσομοιώσεων N-σωμάτων</b>	<b>22</b>
4.1	Εισαγωγή	22
4.2	Προσομοιώσεις N-σωμάτων	23
4.3	Υπολογισμός της επιτάχυνσης και της αναμενόμενης σχετικής ταχύτητας των άλω	26
<b>5</b>	<b>Συμπεράσματα</b>	<b>33</b>

# Κατάλογος Σχημάτων

4.1	Κατανομή στο χώρο των άλω της προσομοίωσης . . . . .	26
4.2	Συχνοτική κατανομή μαζών άλω . . . . .	27
4.3	Μέση τιμή των προφίλ του μέτρου της επιτάχυνσης $ D(r) $ όλων των παρατηρητών συναρτήσει της απόστασης. . . . .	28
4.4	Λόγος των μέτρων των δυο ταχυτήτων σε σχέση με την μεταξύ τους γωνία. Η ευθεία αποτελεί το αποτέλεσμα της προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων (δες εξ. 4.6). . . . .	29
4.5	Συχνοτική κατανομή της ελάχιστης απόστασης μεταξύ των 'παρατηρητών' και των υπόλοιπων άλω. . . . .	30
4.6	Λόγος των μέτρων των δύο ταχυτήτων σε σχέση με την απόσταση της εγγύτερης άλω. . . . .	31

# Κεφάλαιο 1

## Περίληψη

Η παρούσα διπλωματική εργασία διαπραγματεύεται την εξέλιξη των διαταραχών πυκνότητας ύλης σε έναν διαστελλόμενο χώρο στον οποίο θεωρούμε πως ισχύουν οι εξισώσεις Friedmann. Με την βοήθεια των εξισώσεων κίνησης της ρευστοδυναμικής, δηλαδή των εξισώσεων συνέχειας και Euler καθώς και της εξίσωσης Poisson, βρίσκουμε πως εξελίσσονται χρονικά οι διαταραχές πυκνότητας στην γραμμική προσέγγιση της βαρύτητας και πως συνδέεται το διάλυσμα της ταχύτητας με αυτό της επιτάχυνσης σε αυτή την προσέγγιση. Στην συνέχεια χρησιμοποιούμε μια σύγχρονη προσομοίωση  $N$ -σωμάτων του Κοσμολογικού μοντέλου  $\Lambda$ CDM, σε κυβικό όγκο διαστάσεων  $500^3 \text{ h}^{-3} \text{ Mpc}^3$ , και επιλέγοντας παρατηρητές για τους οποίους ισχύουν οι προϋποθέσεις της γραμμικής προσέγγισης προσπαθούμε να επαληθεύσουμε την αναλυτική σχέση μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης και μέσω αυτής προσπαθούμε να υπολογίσουμε την κοσμολογική παράμετρο πυκνότητας της ύλης,  $\Omega_m$ . Επιπλέον βρίσκουμε ότι η κλίμακα πάνω από την οποία ισχύει η ομογένεια και ισοτροπία στο κοσμολογικό μοντέλο  $\Lambda$ CDM είναι  $\sim 100 - 120h^{-1} \text{ Mpc}$ .

### Abstract

In this thesis we deal with density perturbations in an expanding universe, the dynamics of which are governed by the Friedmann equations. Using also the equations of motion of fluid dynamic (continuity and Euler equations) as well as the Poisson's equation, we find how the density perturbations evolve with time in the linear regime and which is the relation between the acceleration and velocity vectors in this approximation. In the second part of the thesis, we use a modern  $N$ -body simulation of the  $\Lambda$ CDM cosmological model, realized in a box of  $500^3 \text{ h}^{-3} \text{ Mpc}^3$  and we select as "observers", those who fulfill the criteria of the linear approximation with final aim to verify the linear approximation and to calculate the cosmological density parameter,  $\Omega_m$ , which is the proportionality constant between the acceleration and the velocity. Finally, we find that the assumption of homogeneity and isotropy is fulfilled in the  $\Lambda$ CDM model for regions larger than  $\sim 100 - 120h^{-1} \text{ Mpc}$ .

## Κεφάλαιο 2

# Θεωρητικό υπόβαθρο

Σε αυτό το κομμάτι θα παραθέσω ορισμένα βασικά στοιχεία του θεωρητικού υποβάθρου της σύγχρονης Κοσμολογίας, με βάση το οποίο έκανα τους θεωρητικούς υπολογισμούς στο επόμενο κεφάλαιο. Αρχικά θα αναφερθώ σε πολύ εισαγωγικές έννοιες.

Κοσμολογία είναι η επιστήμη που μελετά την αρχή, την εξέλιξη και την δομή του Σύμπαντος και των κοσμικών δομών που το αποτελούν. Με την σύγχρονη μορφή της, η Κοσμολογία ξεκινά πριν από εκατό χρόνια περίπου με την διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας και με τις παρατηρήσεις του Hubble, σύμφωνα με τις οποίες αποδείχθηκε ότι ζούμε σε ένα διαστελλόμενο σύμπαν. Βρέθηκε δε από τον Hubble ο ομώνυμος νόμος σύμφωνα με τον οποίο η ταχύτητα απομάκρυνσης των γαλαξιών είναι ανάλογη της απόστασης τους:

$$\vec{v} = H_0 \vec{r} \quad (2.1)$$

(όπου  $H_0$  παίρνει τιμές από  $70-75 \text{ kmsec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ ).

Αυτό το αποτέλεσμα προήλθε από φασματοσκοπικές παρατηρήσεις γαλαξιών, όπου παρατηρούνταν ότι οι γραμμές εκπομπής κάποιων χαρακτηριστικών στοιχείων, ιδιαίτερα οι γραμμές Balmer του υδρογόνου ήταν μετατοπισμένες προς το ερυθρό μέρος του φάσματος σε σχέση με την αναμενόμενη εκπομπή τους σε ηρεμία. Η μετάθεση των φασματικών γραμμών ενός κινούμενου ως προς τον παρατηρητή γαλαξία, ορίζεται ως:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_r}{\lambda_r} \Rightarrow 1 + z = \frac{\lambda_0}{\lambda_r}$$

όπου  $\lambda_0$  το μήκος κύματος της φασματικής γραμμής του γαλαξία που παρατηρούμε και  $\lambda_r$  το μήκος κύματος σε ηρεμία. Όταν έχουμε  $z > 0$  μιλάμε για ερυθρομετατόπιση, ενώ όταν  $z < 0$  για κυανομετατόπιση.

Επομένως σε μεγάλες κλίμακες το σύμπαν περιγράφεται από τις απλούστερες κοσμολογικές λύσεις των εξισώσεων πεδίου του Einstein: τα ομογενή και ισότροπα μοντέλα Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Ένα βολικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα χώρο που διαστέλλεται ισοτροπικά είναι το λεγόμενο συνμετακινούμενο σύστημα συντεταγμένων, όπου η σχέση μιας φυσικής απόστασης  $r$  και της συνμετακινούμενης απόστασης  $x$  δίνεται από τον τύπο:

$$\vec{r} = a(t)\vec{x} \quad (2.2)$$

όπου  $a(t)$  είναι παράμετρος αναλογίας που είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου και ονομάζεται 'παράγοντας διαστολής' ή 'παράγοντας κλίμακας'.

Προκειμένου να μετρήσουμε αποστάσεις στο Σύμπαν πρέπει να ορίσουμε μια μετρική, δηλαδή ένα σύστημα συντεταγμένων μέσω του οποίου να ορίζεται η απόσταση δύο σημείων στον 4-D χωρόχρονο. Η μετρική που υποθέτει ομοιογένεια και ισοτροπία και που με την χρήση της λύνονται σχετικά εύκολα οι εξισώσεις πεδίου του Αϊνστάιν είναι η μετρική Robertson-Walker όπου σε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων  $(r, \theta, \phi)$  δίνεται από την:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right] \quad (2.3)$$

και περιγράφει τα κοσμολογικά μοντέλα Friedmann-RW. Λόγω της ομοιογένειας τους τα μοντέλα Friedmann παρουσιάζουν μόνο χρονική εξέλιξη, η οποία καθορίζεται από τον κοσμολογικό παράγοντα κλίμακας  $a = a(t)$ . Επίσης η παράμετρος  $k$  ονομάζεται δείκτης καμπυλότητας, παίρνει τιμές  $0, \pm 1$ , και προσδιορίζει την γεωμετρία του 3-D χώρου. Η πιθανή γεωμετρία του 3-διάστατου χώρου είναι επομένως:

- Ευκλείδεια όταν  $k = 0$ , και αντίστοιχα το κοσμολογικό μοντέλο λέγεται 'επίπεδο'.
- Σφαιρική όταν  $k = +1$ , και το κοσμολογικό μοντέλο λέγεται 'κλειστό'.
- Υπερβολική όταν  $k = -1$ , και το κοσμολογικό μοντέλο λέγεται 'ανοιχτό'.

Επίσης άμεση συνέπεια της ομοιογένειας και της ισοτροπίας των μοντέλων Friedmann είναι η απλοποιημένη μορφή των νόμων διατήρησης. Συγκεκριμένα η εξίσωση συνέχειας γράφεται:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P/c^2) \quad (2.4)$$

δηλαδή η εξέλιξη της πυκνότητας είναι ανεξάρτητη από τον δείκτη καμπυλότητας του 3-D χώρου και εξαρτάται μόνο από την πίεση.

Για να λύσουμε την εξ. (2.4) χρειαζόμαστε μια σχέση μεταξύ πυκνότητας και πίεσης του ρευστού, δηλαδή την καταστατική εξίσωση του. Ξεχωρίζουμε λοιπόν τις εξής κλασσικές περιπτώσεις:

- $P = 0$  (προσέγγιση 'σχόνης'):

$$\dot{\rho} = -3H\rho \quad (2.5)$$

από την οποία παίρνουμε με ολοκλήρωση:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (2.6)$$

δηλαδή η πυκνότητα μη-σχετικιστικής ύλης είναι αντιστρόφως ανάλογη του όγκου του σύμπαντος.

- $P = \rho c^2/3$  (ακτινοβολία):

$$\dot{\rho} = -4H\rho \quad (2.7)$$

η οποία με ολοκλήρωση γίνεται:

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \quad (2.8)$$

- $P = -\rho c^2$ : ύλη που αντιστοιχεί σε αργά κυλιόμενο 'βαθμωτό πεδίο' - που περιγράφουν τα αρχικά στάδια δημιουργίας-πληθωριστικό σύμπαν.

$$\rho = \rho_0 = \text{constant} \quad (2.9)$$

Εδώ χρησιμοποιώντας τις εξ. Friedmann καταλήγουμε στο ότι ο νόμος της μεταβολής παίρνει την εξής μορφή:

$$a = a_0 e^{H_0(t-t_0)} \quad (2.10)$$

δηλαδή οι διαστάσεις του πληθωριστικού μοντέλου αυξάνονται εκθετικά.

Οι 2 διαφορικές εξισώσεις οι οποίες καθορίζουν την εξέλιξη του κοσμολογικού παράγοντα κλίμακας στον χρόνο είναι οι γνωστές ως εξισώσεις Friedmann.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (2.11)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2 \quad (2.12)$$

Για να λύσουμε αυτές τις εξισώσεις χρειαζόμαστε μια σχέση μεταξύ της πίεσης και της πυκνότητας του κάθε ρευστού που συνεισφέρει στο συνολικό κοσμικό ρευστό, δηλαδή τις καταστατικές τους εξισώσεις, που συνδυαζόμενες με την εξίσωση συνέχειας, μας δίνει την μεταβολή με τον χρόνο της πυκνότητας κάθε ρευστού, όπως προαναφέραμε. Στις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να τις γράψουμε και χρησιμοποιώντας την παράμετρο του Hubble, αν λάβουμε υπόψιν ότι:  $H = H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$ .

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις κοσμολογικές παραμέτρους πυκνότητας κάθε συνιστώσας της δυναμικής του Σύμπαντος, προσεγγίζοντας τες ως 'εικονικά' ρευστά, δηλαδή γράφουμε την εξ.(2.11), ως:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} \quad (2.13)$$

όπου:

$$\rho_{tot} = \rho_m + \rho_r + \rho_k + \rho_\Lambda = \frac{3H^2}{8\pi G} \implies$$

$$\frac{\rho_m}{\rho_{tot}} + \frac{\rho_r}{\rho_{tot}} + \frac{\rho_k}{\rho_{tot}} + \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{tot}} = 1$$

και έτσι ορίζονται οι παραμετροποιημένες κοσμολογικές πυκνότητες των διαφορετικών ‘εικο-  
νικών’ ρευστών που συνεισφέρουν στην δυναμική του Σύμπαντος:

$$\Omega_m + \Omega_r + \Omega_k + \Omega_\Lambda = 1$$

Μια από τις σημαντικότερες επιστημονικές ερευνητικές προσπάθειες των τελευταίων δεκαετιών είναι η εύρεση των τιμών των παραπάνω παραμέτρων, με σταθμό την εύρεση του  $\Omega_k \simeq 0$  με τα αποτελέσματα της ανάλυσης των μικροκυματικών δεδομένων του πειράματος WMAP, αλλά και των τιμών  $\Omega_m \simeq 0.3$  και  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$ , με τα αποτελέσματα της ανάλυσης των υπερκαινοφανών αστέρων τύπου SNIa (Νόμπελ Φυσικής 2011).

## 2.1 Μοντέλο Einstein – de – Sitter ( $k = \Lambda = 0$ )

Το μοντέλο αυτό παρόλο που γνωρίζουμε ότι απέχει σημαντικά από το πραγματικό κοσμολογικό μοντέλο της σημερινής εποχής, προσεγγίζει την ορθή δυναμική εξέλιξη του σύμπαντος, σε σχετικά μεγάλες ερυθρομεταθέσεις (όπου η συνιστώσα της ύλης κυριαρχεί επί όλων των υπολοίπων συνιστωσών), τότε που δημιουργήθηκαν και οι περισσότερες από τις κοσμικές δομές που παρατηρούμε σήμερα. Αυτός είναι ο λόγος που το παρουσιάζουμε εδώ (και το χρησιμοποιούμε στο επόμενο κεφάλαιο). Διακρίνουμε δύο χαρακτηριστικές εποχές:

- Η εποχή της ακτινοβολίας: Με παρόμοιο τρόπο στην περίπτωση που η ενεργειακή πυκνότητα του σύμπαντος κυριαρχείται από σχετικιστική ύλη(π.χ ακτινοβολία) ισχύουν οι  $p = \rho c^2/3$  και  $\rho \propto a^{-4}$ , βρίσκουμε αντίστοιχα σχέσεις για τις εξισώσεις Friedmann και καταλήγουμε αντίστοιχα στον νόμο μεταβολής:

$$a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.14)$$

- Η εποχή της ύλης: Όταν η ύλη του σύμπαντος κυριαρχείται από μη-σχετικιστικά ασθενώς αλληλεπιδρώντα σωματίδια έχουμε  $P = 0$  και  $\rho \propto a^{-3}$ , οπότε οι εξισώσεις Friedmann γίνονται:

$$\left( \frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (2.15)$$

και

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \left( \frac{a_0}{a} \right)^3 \quad (2.16)$$

Ο νόμος μεταβολής του συντελεστή κλίμακας προσδιορίζεται με την ολοκλήρωση της (2.15) και δίνεται από την σχέση:

$$a = a_0 \left( \frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.17)$$



(Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο ρυθμός διαστολής κατά την περίοδο της ακτινοβολίας είναι μικρότερος από αυτόν της εποχής της σκόνης.)

και γνωρίζοντας ότι  $H = H(t) = \dot{a}/a$ , οδηγούμαστε στη σχέση:

$$H = \frac{2}{3t} \quad (2.18)$$

η οποία μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την ηλικία του σύμπαντος σε αυτό το μοντέλο. Συγκεκριμένα θέτοντας:  $H_0 = 75 \text{ kmsec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  και υποθέτοντας ότι η εποχή της ύλης είναι η μεγαλύτερη σε διάρκεια περίοδος ζωής του σύμπαντος, συμπεραίνουμε ότι η ηλικία του σύμπαντος είναι:  $\sim 10^{10}$  έτη.

## 2.2 Μοντέλο με Κοσμολογική Σταθερά

Οι λύσεις που εξάγονταν από τις εξισώσεις πεδίου της ΓΘΣ εφαρμοζόμενες στο κοσμολογικό υπόβαθρο με την υπόθεση ότι στο σύμπαν επικρατεί ομοιογένεια και ισοτροπία προέβλεπαν ένα δυναμικά εξελισσόμενο σύμπαν. Ο Einstein λοιπόν προκείμενου να επιτύχει στατικές λύσεις στις παραπάνω εξισώσεις εισήγαγε αυθαίρετα την έννοια της Κοσμολογικής Σταθεράς.

Η χρησιμότητά της φαίνεται καλύτερα αν θεωρήσουμε για παράδειγμα την δεύτερη εξίσωση Friedmann χωρίς τον όρο  $\Lambda$ .

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left( \rho + \frac{3P}{c^2} \right) \quad (2.19)$$

προκειμένου να πετύχουμε στατική λύση δηλαδή,  $\dot{a} = \ddot{a} = 0$  και επομένως έχουμε:

$$4\pi G (\rho c^2 + 3P) = 0$$

ή

$$\rho + \frac{3p}{c^2} = 0 \quad (2.20)$$

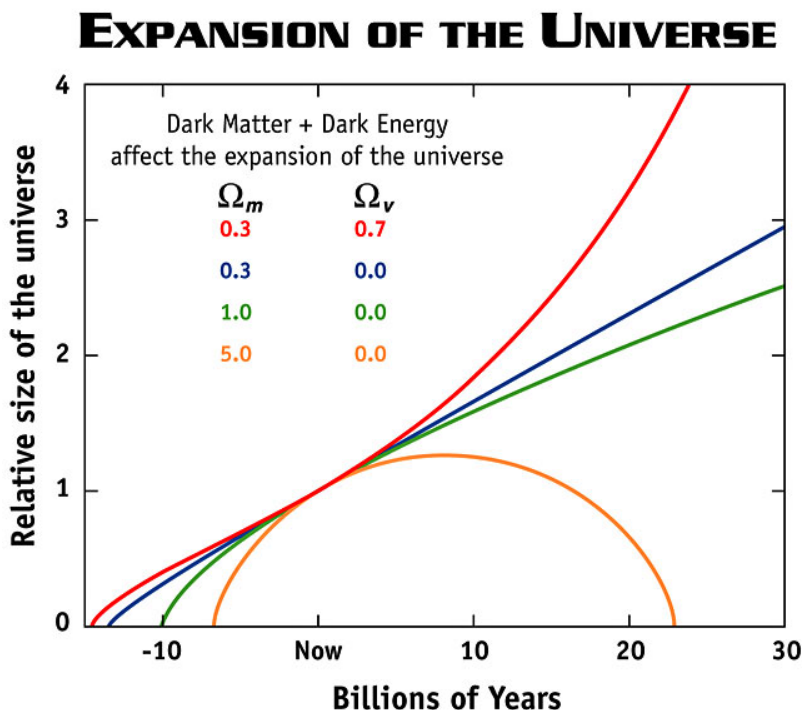
Όμως γνωρίζουμε ότι όλα τα 'κλασσικά' ρευστά έχουν καταστατική εξίσωση, με:

$$\rho + \frac{3P}{c^2} > 0$$

Έτσι λοιπόν εισάγοντας τον όρο  $\Lambda$  της Κοσμολογικής Σταθεράς στην εξ.(2.19) μπορούμε να επιτύχουμε στατική λύση, έχοντας ταυτόχρονα την αναμενόμενη καταστατική εξίσωση των κανονικών ρευστών. Πρέπει να σημειώσουμε ότι όπως απέδειξε ο Friedmann η στατική λύση πραγματώνεται μόνο σε κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή στην δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος και δεν έχει διάρκεια.

## ”Κοσμολογικό Πρότυπο”

Πρόσφατες παρατηρήσεις (1998) υπερκαινοφανών αστερών τύπου SNIa έδειξαν ότι το σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα, δηλαδή ότι ( $\Lambda > 0$ ). Απαιτείται δηλαδή μια συνιστώσα της δυναμικής εξέλιξης του σύμπαντος να έχει αρνητική πίεση  $p = -\rho c^2$  (όπως δρα η κοσμολογική σταθερά παραπάνω). Παράλληλα οι παρατηρήσεις των διαταραχών θερμοκρασίας του υποβάθρου μικροκυμάτων έχει δείξει ότι το σύμπαν έχει μηδενική καμπυλότητα ( $k = 0$ ) και επομένως η ισχύουσα γεωμετρία του 3-D χώρου είναι η Ευκλείδεια. Το μοντέλο που περιγράφεται παραπάνω, αυτό δηλαδή για το οποίο ( $\Lambda > 0$  και  $k = 0$ ) θεωρείται σήμερα το ”Κοσμολογικό Πρότυπο” και έχουν προκύψει παρατηρησιακά οι εξής τιμές για τις παραμέτρους:  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  και  $\Omega_{m,0} \simeq 0.3$ . Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι αρχικά είχαμε ένα επιβραδυνόμενο σύμπαν ( $\ddot{a} < 0$ ) λόγω της κυριαρχίας της ύλης, και στη συνέχεια όταν η παράμετρος της πυκνότητας έγινε συγκρίσιμη με την Κοσμολογική Σταθερά έχουμε το σημείο καμπής ( $\ddot{a} = 0$ ), οπότε και παύει να ισχύει η επιβράδυνση, και στην συνέχεια αρχίζει η επιτάχυνση της διαστολής ( $\ddot{a} > 0$ ).



Σχήμα 2.1: Η διαστολή του σύμπαντος σε διαφορετικές Κοσμολογίες

Σύμφωνα με την 2η εξίσωση Friedmann (2.12) και με την υπόθεση ότι είμαστε στην περιοχή κυριαρχίας της ύλης ( $P = 0$ ) στον παρόντα χρόνο( $t_0$ ), γνωρίζοντας επιπλέον ότι η πυκνότητα

του  $\Lambda$  (θεωρούμενο ως ρευστό) είναι  $\rho_\Lambda = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$  η εξίσωση (2.12) γίνεται:

$$\left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_0 = -\frac{4\pi G}{3}\rho_0 + \frac{8\pi G}{3}\rho_\Lambda = -H_0^2 \left(\frac{1}{2}\Omega_{m,0} - \Omega_{\Lambda,0}\right) \quad (2.21)$$

Γνωρίζοντας επίσης ότι η παράμετρος επιβράδυνσης που χαρακτηρίζει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται χρονικά η διαστολή του σύμπαντος δίνεται από την σχέση

$$q_0 = -\frac{1}{H_0^2} \left(\frac{\ddot{a}}{a}\right)_0 \quad (2.22)$$

Παρατηρούμε μέσω της (2.22) ότι σε σύμπαν με την παρουσία κοσμολογικής σταθεράς έχουμε επιταχυνόμενη διαστολή όταν:  $\Omega_{\Lambda,0} > \frac{\Omega_{m,0}}{2}$

Στο ισχύον κοσμολογικό μοντέλο όπου  $K = 0 \Rightarrow \Omega_k = 0$  μπορούμε να εξάγουμε την εξέλιξη της συνιστώσας της ύλης σαν συνάρτηση της ερυθρομετατόπισης:

$$\Omega_{m(z)} = \frac{\rho_m}{\rho_{cr}} = \frac{\rho_{m,0}(1+z)^3}{3H^2/8\pi G} = \frac{\Omega_{m,0}(1+z)^3}{\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda} \quad (2.23)$$

Παρατηρούμε ότι για  $z \geq 1$  το σύμπαν συμπεριφέρεται σαν να αποτελείται μόνο από ύλη και για μεγάλα  $z$ ,  $\Omega_m \rightarrow 1$ . Το συγκεκριμένο αποτέλεσμα παρατηρείται ότι ισχύει στην πραγματικότητα για οποιοδήποτε σύμπαν, ακόμα και για σύμπαν με μη μηδενική καμπυλότητα  $K \neq 0$ .

Στο σημείο αυτό, θα είχε ενδιαφέρον να βρούμε την τιμή της ερυθρομετατόπισης στην σημερινή εποχή, γνωρίζοντας ότι η 1η εξίσωση Friedmann(2.15), με την βοήθεια των σχέσεων(2.6) και της  $1+z = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}$  συναρτήσει της ερυθρομετατόπισης γράφεται για την σημερινή εποχή της ύλης συγκεκριμένα ως εξής:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \left[\Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_\Lambda\right] \quad (2.24)$$

Την εποχή ισοδυναμίας Ύλης-Κοσμολογικής σταθεράς και με ( $\Lambda > 0$ ) πρέπει  $\Omega_{m,0}(1+z)^3 = \Omega_\Lambda$  βρίσκουμε ότι η ερυθρομετατόπιση σε σχέση με την πυκνότητα ενέργειας της ύλης και της κοσμολογικής σταθεράς δίνεται από τον τύπο:

$$z_\Lambda = \left(\frac{\Omega_\Lambda}{\Omega_{m,0}}\right)^{1/3} - 1 \quad (2.25)$$

Με βάση το Κοσμολογικό Πρότυπο που θεωρείται ότι ισχύει σήμερα (όπως περιγράφεται παραπάνω) θεωρούμε  $\Omega_{m,0} \simeq 0.3$  και  $\Omega_\Lambda \simeq 0.7$  τις τιμές για την πυκνότητα ενέργειας της ύλης

την κοσμολογική σταθερά αντίστοιχα. Οπότε προκύπτει ότι για  $z_{\Lambda} \simeq 0.42$  ξεκινά να κυριαρχεί στην δυναμική του Σύμπαντος η Κοσμολογική Σταθερά, ενώ μέχρι τότε και από  $z \simeq 3390$  κυριαρχεί η ύλη.

## Φυσική ερμηνεία της Κοσμολογικής Σταθεράς

Η Κοσμολογική Σταθερά έχει ερμηνευτεί ως η "ενέργεια του κενού", η οποία δεν έχει υπόσταση στην κλασσική μηχανική (όπου πράγματι τα σωματίδια παραμένουν ακίνητα στο ελάχιστο δυναμικό), έχει όμως στην κβαντομηχανική όπου λόγω της αρχής αβεβαιότητας γνωρίζουμε ότι δεν μπορεί ταυτόχρονα να ισχύει  $E = 0$  και  $x = 0$ , αλλά η ενέργεια που έχει το σύστημα είναι πεπερασμένη. Αντίστοιχα και στην κβαντική θεωρία πεδίου η κατάσταση ελάχιστης ενέργειας είναι μη μηδενική και αντικατοπτρίζει μια κατάσταση στην οποία υπάρχει διαρκής ροή δημιουργίας και εξαύλωσης σωματιδίων.

Η παραπάνω θεώρηση παρουσιάζει ένα βασικό πρόβλημα όταν με πρόχειρο υπολογισμό της πυκνότητας της ενέργειας του κενού  $\rho_{vac}$ , σε σχέση με την μετρήσιμη από κοσμολογικές παρατηρήσεις πυκνότητα ενέργειας της Κοσμολογικής Σταθεράς  $\rho_{\Lambda}$ , βρίσκουμε ότι :

$$\frac{\rho_{vac}}{\rho_{\Lambda}} \simeq 10^{120} ,$$

δηλαδή καταλήγουμε σε τεράστια απόκλιση των δύο πυκνοτήτων, με την πρώτη να έχει τόσο μεγάλη τιμή που το Σύμπαν θα είχε διαρραγεί βαρυτικά αμέσως μετά την δημιουργία του. Ένα δεύτερο πρόβλημα που προκύπτει είναι το λεγόμενο "fine tuning problem". Πρόκειται για το ερώτημα γιατί το παρόν συμβαίνει την κοσμική εποχή που ταυτίζονται σε τάξη μεγέθους η παράμετρος της ύλης με αυτήν της Κοσμολογικής Σταθεράς, γεγονός που συμβαίνει μόνο μια φορά στην εξέλιξη του σύμπαντος.

## Κεφάλαιο 3

# Εξέλιξη Διαταραχών Πυκνότητας στο Διαστελλόμενο Σύμπαν

Στο χωρίο αυτό ξεκινάμε με την θεώρηση ότι το αρχικό σύμπαν ήταν σχεδόν ομογενές και ισότροπο και λόγω της βαρυτικής αστάθειας στο διαστελλόμενο σύμπαν ξεκίνησαν να σχηματίζονται δομές, μικρές αρχικά όπως ορίζει το μοντέλο της Ψυχρής Σκοτεινής Ύλης (CDM), οι οποίες στην συνέχεια μεγάλωσαν με αποτέλεσμα το Σύμπαν να έχει την μορφή που βλέπουμε σήμερα.

Προκειμένου να εξετάσουμε πως εξελίσσονται αρχικά οι δομές από τις οποίες προέρχονται οι γαλαξίες και τα σμήνη γαλαξιών, δηλαδή στην γραμμική περιοχή της βαρύτητας (μιας και η μη-γραμμική εξέλιξη δεν μπορεί να προσεγγιστεί αναλυτικά), θα θεωρήσουμε την συμπαντική ύλη, που κυριαρχείται από την ψυχρή σκοτεινή ύλη, ως ένα ρευστό χωρίς πίεση (προσέγγιση 'σχόνης') και θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης της ρευστοδυναμικής και την εξίσωση Poisson. Διαταράσσουμε τις εξισώσεις (μιας και επιθυμούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη διαταραχών και όχι της μέσης πυκνότητας της ύλης) και λόγω του γεγονότος ότι το συμπαντικό υπόβαθρο δεν είναι στατικό αλλά διαστέλλεται, μετασχηματίζουμε τις παραπάνω εξισώσεις σε σύστημα αναφοράς συν μετακινούμενο με τον διαστελλόμενο παρατηρητή. Μιας και επιθυμούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη των διαταραχών ύλης στην γραμμική περιοχή της βαρύτητας, γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης, δηλαδή δεν θα λάβουμε υπόψιν μας την συνεισφορά των κοντινών μαζών στην εξέλιξη του συστήματός μας. Συνδυάζοντας τις παραπάνω γραμμικοποιημένες εξισώσεις σε διαστελλόμενο υπόβαθρο και θεωρώντας την σχέση μεταξύ παράγοντα διαστολής και χρόνου ( $a(t) \propto t^{2/3}$ ) στο κοσμολογικό μοντέλο Einstein de Sitter (μιας και ανεξάρτητα του πραγματικού κοσμολογικού μοντέλου που ισχύει, αυτό το μοντέλο αποτελεί εξαιρετική προσέγγιση για ερυθρομετατοπίσεις  $z \gtrsim 0.5$ ), βρίσκουμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης που περιγράφει την διαταραχή συναρτήσεως του χρόνου και οδηγούμαστε στην λύση αυτής. Τέλος με την βοήθεια της λύσης αυτής και της διαταραγμένης εξίσωσης συνέχειας

καταλήγουμε σε μία σχέση μεταξύ ταχύτητας και επιτάχυνσης, την οποία θα επιβεβαιώσουμε χρησιμοποιώντας μια κοσμολογική προσομοίωση N-σωμάτων στο επόμενο Κεφάλαιο.

Οι βασικές εξισώσεις ρευστοδυναμικής που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

1. Εξίσωση Συνέχειας:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_r + \nabla_r \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (3.1)$$

2. Εξίσωση Euler:

$$\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}\right)_r + (\vec{u} \cdot \nabla_r) \vec{u} = -\nabla_r \Phi - \frac{1}{\rho} \nabla_r P \quad (3.2)$$

3. Εξίσωση Poisson:

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (3.3)$$

όπου  $\rho \equiv \rho(\vec{r}, t)$  είναι η πυκνότητα της ύλης, η οποία είναι ένα βαθμωτό πεδίο που εξελίσσεται στο χρόνο, το  $\Phi$  αντιπροσωπεύει το βαρυτικό δυναμικό, το  $P$  την πίεση του ρευστού και το  $u$  την ταχύτητα. Για την μελέτη μας είναι αναγκαία η χρήση συνμετακινούμενων συντεταγμένων ώστε να πάρουμε υπόψιν μας ότι ο χώρος διαστέλλεται. Η βασική σχέση που συνδέει τις 'φυσικές' ( $r$ , proper) και τις συνμετακινούμενες ( $x$ ) συντεταγμένες είναι:

$$\vec{r} = a(t) \vec{x} \quad (3.4)$$

όπου  $a(t)$  είναι ο παράγοντας διαστολής του σύμπαντος. Παραγωγίζοντας αυτή την εξίσωση παίρνουμε:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \dot{a} \vec{x} + a \dot{\vec{x}} = \frac{\dot{a}}{a} \vec{r} + \vec{v}_p(\vec{x}, t) \quad (3.5)$$

όπου ο πρώτος όρος του δεξιού μέρους της εξίσωσης είναι η ταχύτητα διαστολής (Hubble flow), με την παράμετρο Hubble να ορίζεται ως  $H = \dot{a}/a$ , και ο δεύτερος όρος είναι η σχετική ταχύτητα (peculiar velocity) που καθορίζεται από τις βαρυτικές αλληλεπιδράσεις των κοσμικών δομών, και θεωρείται η διαταραχή της ταχύτητας διαστολής,  $u$ .

Η διαταραχή πυκνότητας της ύλης,  $\delta$  ορίζεται ως εξής:

$$\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)} \implies \rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho}(t)[1 + \delta(\vec{r}, t)] \quad (3.6)$$

όπου  $\bar{\rho}$  είναι η μέση πυκνότητα η οποία είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου (ή αντίστοιχα του παράγοντα διαστολής) και για την οποία ισχύει:  $\bar{\rho} \propto a^{-3}$  (όπως προκύπτει από την εξ.2.5).

Επίσης για να αλλάξουμε σύστημα συντεταγμένων στο συμμετακινούμενο σύστημα, θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση μεταξύ παραγώγου μη αδρανειακού παρατηρητή (κινούμενο σύστημα αναφοράς) ή αλλιώς την Λαγκραντζιανή παράγωγο (Langrangian or convective derivative), με αυτή αδρανειακού παρατηρητή, που δίδεται από την:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r \quad (3.7)$$

Χρησιμοποιώντας ότι  $\vec{u} = \dot{a}\vec{x}$  (την ταχύτητα με την οποία κινείται το μη αδρανειακό σύστημα αναφοράς) και  $\vec{\nabla}_x = a\vec{\nabla}_r$ , παίρνω:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \vec{u} \cdot \vec{\nabla}_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x$$

Άρα

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_r = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - H\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - H\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_r \quad (3.8)$$

### 3.1 Εξίσωση Συνέχειας

Επιθυμώ να διαταράξω την εξίσωση συνέχειας, οπότε χρησιμοποιώ τις σχέσεις (3.6) και (3.5). Επειδή δε επιθυμώ να χρησιμοποιήσω συμμετακινούμενες συντεταγμένες, θα χρησιμοποιήσω και την σχέση (3.8). Η εξίσωση συνέχειας (3.1) μετασχηματίζεται επομένως ως εξής:

$$\begin{aligned} & \left[ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x \right] [\bar{\rho}(t)(1+\delta)] + \frac{1}{a}\nabla_x \cdot [\bar{\rho}(t)(1+\delta)(\dot{a}\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t))] = 0 \implies \\ & \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_x [\bar{\rho}(t)(1+\delta)] - \frac{\dot{a}}{a}\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x [\bar{\rho}(t)(1+\delta)] + \frac{\bar{\rho}(t)}{a}[\dot{a}\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t)][\vec{\nabla}_x(1+\delta)] + \\ & \frac{\bar{\rho}(t)}{a}(1+\delta)\vec{\nabla}_x \cdot [\dot{a}\vec{x} + \vec{v}(\vec{x}, t)] = 0 \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \bar{\rho}(t)}{\partial t}\right)_x (1+\delta) + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t}\right)_x - \frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho}(t)\vec{x} \cdot \vec{\nabla}_x(1+\delta) + \frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho}(t)\vec{x}\vec{\nabla}_x(1+\delta) + \\ & \frac{\bar{\rho}(t)}{a}\vec{v}(\vec{x}, t)\vec{\nabla}_x \cdot (1+\delta) + \frac{\dot{a}}{a}\bar{\rho}(t)(1+\delta)\vec{\nabla}_x \cdot \vec{x} + \frac{\bar{\rho}(t)}{a}(1+\delta)\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = 0 \end{aligned}$$

Ο τρίτος και τέταρτος όρος είναι ίσοι και με αντίθετο πρόσημο οπότε απαλείφονται. Επιπλέον, παίρνοντας υπόψιν μας ότι στο συμμετακινούμενο σύστημα αναφοράς η μέση πυκνότητα ύλης δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο, δηλαδή ότι

$$\left(\frac{\partial \bar{\rho}(t)}{\partial t}\right)_x = 0$$

και επίσης ενθυμούμενοι ότι από την εξίσωση (2.5) παίρνουμε κατόπιν παραγωγίσις της ως προς τον χρόνο και διαιρώντας με την ίδια, την:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -3\bar{\rho}\frac{\dot{a}}{a}$$

βλέπουμε ότι απαλείφονται επίσης ο πρώτος και ο έκτος όρος της παραπάνω εξίσωσης, για να καταλήξουμε στην:

$$\bar{\rho}(t) \left( \frac{\partial \delta(x, t)}{\partial t} \right)_x + \frac{\bar{\rho}(t)}{a} \vec{v}(\vec{x}, t) \vec{\nabla}_x \cdot (1 + \delta) + \frac{\bar{\rho}(t)}{a} (1 + \delta) \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) = 0$$

Απαλείφεται από όλους τους όρους η μέση πυκνότητα και καταλήγουμε στην τελική μας διαταραγμένη εξίσωση συνέχειας στο συμμετακινούμενο σύστημα αναφοράς:

$$\left( \frac{\partial \delta(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_x + \frac{1}{a} \left( \vec{v}(\vec{x}, t) \vec{\nabla}_x \cdot (1 + \delta) + (1 + \delta) \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) \right) = 0 \implies$$

$$\boxed{\left( \frac{\partial \delta}{\partial t} \right)_x + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0} \quad (3.9)$$

### 3.2 Εξίσωση Poisson

Συνεχίζουμε με την εξίσωση Poisson και με διαδοχικές ολοκληρώσεις, εξάγω το δυναμικό (το οποίο κατόπιν θα διαταράξω):

$$\nabla_r^2 \Phi = 4\pi G \rho \implies \nabla_r \Phi = \frac{4}{3} \pi G \rho \vec{r} \implies \Phi = \frac{4}{6} \pi G \rho \vec{r}^2$$

Εάν τώρα διαταράξω το δυναμικό, δηλαδή αντικαταστήσω την πυκνότητα χρησιμοποιώντας την εξ.(3.6), παίρνω:

$$\Phi = \frac{2}{3} \pi G \bar{\rho} (1 + \delta) \vec{r}^2 = \frac{2}{3} \pi G \bar{\rho} \vec{r}^2 + \frac{2}{3} \pi G \bar{\rho} \delta \vec{r}^2 = \Phi_{unp} + \phi$$

όπου το  $\Phi_{unp}$  αντιπροσωπεύει την συνιστώσα του αδιατάραχτου δυναμικού και το  $\phi = 2\pi G \bar{\rho} \delta \vec{r}^2 / 3$  την διαταραγμένη συνιστώσα.

Οπότε ακολουθώντας την αντίστροφη διαδικασία, δηλαδή εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή (ανάδελτα) διαδοχικά στο συνολικό δυναμικό:

$$\nabla_r \Phi = \nabla_r \Phi_{unp} + \nabla_r \phi = \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} \vec{r} + \frac{4}{3} \pi G \bar{\rho} \delta \vec{r} \implies$$



$$\nabla_r \cdot \nabla_r \Phi = \nabla_r^2 \Phi_{unp} + \nabla_r^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} + 4\pi G \bar{\rho} \delta$$

και μετασχηματίζοντας στο συνμετακινούμενο σύστημα αναφοράς ( $\nabla_r = \nabla_x/a$ ) παίρνουμε την επιθυμητή εξίσωση Poisson:

$$\nabla_x^2 \Phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 + \nabla_x^2 \phi \quad (3.10)$$

με το διαταραγμένο κομμάτι της να είναι:

$$\boxed{\nabla_x^2 \phi = 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta} \quad (3.11)$$

### 3.3 Εξίσωση Euler

Τώρα θα εξάγουμε την διαταραγμένη εξίσωση διατήρησης της ορμής ή αλλιώς εξίσωσης Euler . Θα θεωρήσω την περίπτωση της σκοτεινής ύλης η οποία δεν αλληλεπιδρά με άλλα μορφές ύλης παρά μόνο βαρυτικά και επομένως θα θέσω  $P = 0$ . Επομένως έχω από την εξ.(3.2):

$$\left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_r + (\vec{u} \cdot \nabla_r) \vec{u} = -\nabla_r \Phi \quad (3.12)$$

Επιθυμώ να την διαταράξω και επομένως θα χρησιμοποιήσω το ανάπτυγμα της ταχύτητας που δίδεται στην εξίσωση (3.5), δηλαδή:

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = H\vec{r} + \vec{v}(\vec{x}, t)$$

αλλά και την κλίση του βαρυτικού δυναμικού που το εξάγω από την εξ.(3.10) και δίδεται ως:

$$\nabla_x \Phi = \nabla_x \phi + \frac{4}{3}\pi G \bar{\rho} \vec{r} a^2 \quad (3.13)$$

Ξεκινώ από το αριστερό μέλος της εξ.(3.12):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla_r) \vec{u} &= \left( \frac{\partial (H\vec{r} + \vec{v})}{\partial t} \right)_r + ((H\vec{r} + \vec{v}) \cdot \nabla_r) (H\vec{r} + \vec{v}) = \\ \dot{H}\vec{r} + H \left( \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_r + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_r + H^2(\vec{r} \cdot \nabla_r) \vec{r} + H(\vec{r} \cdot \nabla_r) \vec{v} + H(\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{r} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v} = \\ \dot{H}\vec{r} + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_r + H^2 \vec{r} + H(\vec{r} \cdot \nabla_r) \vec{v} + H\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v} = \end{aligned}$$

Τώρα κάνω αλλαγή από φυσικές συντεταγμένες σε συνμετακινούμενες, χρησιμοποιώντας την εξ.(3.8). Έχουμε επομένως:

$$\dot{H}\vec{r} + \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_x - H(\vec{r} \cdot \nabla_r) \vec{v} + H^2 \vec{r} + H(\vec{r} \cdot \nabla_r) \vec{v} + H\vec{v} + (\vec{v} \cdot \nabla_r) \vec{v}$$

οπότε ο τρίτος και ο πέμπτος όρος απαλείφονται, και ολοκληρώνουμε την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων χρησιμοποιώντας το  $\nabla_r = \nabla_x/a$ :

$$\dot{H}\vec{r} + \left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_x + H^2\vec{r} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla_x)\vec{v} \quad (3.14)$$

Τώρα αναπτύσσω το δεξί μέρος της εξ.(3.12) χρησιμοποιώντας την εξ.(3.13)

$$-\nabla_r\Phi = -\nabla_r\phi - \frac{4\pi G\bar{\rho}\vec{r}}{3}$$

Επίσης από την 2η εξίσωση του Friedmann (εξ.2.12) για  $P = \Lambda = 0$  έχουμε ότι:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G\bar{\rho}}{3}$$

Οπότε η κλίση του βαρυτικού δυναμικού δίδεται από την:

$$-\nabla_r\Phi = -\nabla_r\phi + \left(\dot{H}\vec{r} + H^2\vec{r}\right) \quad (3.15)$$

Συνεπώς από το πρώτο και το δεύτερο μέλος (εξισώσεις 3.14 και 3.15) έχουμε:

$$\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_x + \dot{H}\vec{r} + H^2\vec{r} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \nabla_x)\vec{v} = -\frac{1}{a}\nabla_x\phi + \left(\dot{H}\vec{r} + H^2\vec{r}\right)$$

Επομένως απαλείφονται 2 όροι από την αριστερή μεριά με δύο αντίστοιχους όρους από την δεξιά μεριά και τελικά παίρνουμε την διαταραγμένη εξίσωση Euler:

$$\boxed{\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right)_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{v} = -\frac{1}{a}\vec{\nabla}\phi} \quad (3.16)$$

με  $\phi$  το διαταραγμένο βαρυτικό δυναμικό που δίδεται από την εξ.(3.13).

### 3.4 Γραμμικοποίηση των νέων εξισώσεων κίνησης

Επιθυμούμε τώρα να απλοποιήσουμε το πρόβλημα και να κάνουμε την προσέγγιση στη γραμμική περιοχή της βαρύτητας, όπου θα απαλείψουμε όρους δεύτερης τάξης σε διαταραχή (ταχύτητας, πυκνότητας ύλης ή συνδυασμούς τους). Δηλαδή θα απαλείψουμε όρους του τύπου  $\vec{v}\delta$ ,  $(\vec{v} \cdot \nabla_x)\vec{v}$ ,  $\delta^2$ ,  $v^2$ . Παρατηρούμε ότι τέτοιους όρους έχουν μόνο οι εξισώσεις συνέχειας και Euler. Επομένως:

1. Διαταραγμένη & Γραμμικοποιημένη Εξίσωση Συνέχειας

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_x + \frac{1}{a} \vec{\nabla} \cdot [(1 + \delta) \vec{v}] = 0 \implies \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_x + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.17)$$

2. Διαταραγμένη & Γραμμικοποιημένη Εξίσωση Euler

$$\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_x + H\vec{v} + \frac{1}{a} (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x) \vec{v} = -\frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi \implies \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_x + H\vec{v} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi = 0 \quad (3.18)$$

Τώρα επιθυμώ να συνδυάσω τις εξισώσεις κίνησης στο νέο σύστημα συντεταγμένων ώστε να μελετήσω την χρονική εξέλιξη των διαταραχών, πως δηλαδή εξελίσσονται στο διαστελλόμενο σύμπαν οι διαταραχές πυκνότητας της ύλης (εδώ μελετώ τις διαταραχές της κυρίαρχης συνιστώσας της ύλης που είναι αυτή της ψυχρής σκοτεινής ύλης). Προς το σκοπό αυτό ξεκινάω από την εξ.(3.17) από την οποία έχω

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} = -a \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_x \quad (3.19)$$

την οποία παραγωγίζω ως προς τον χρόνο και παίρνω:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( a \left(\frac{\partial \delta}{\partial t}\right)_x \right) = -\frac{\partial a}{\partial t} \frac{\partial \delta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = -\dot{a} \frac{\partial \delta}{\partial t} - a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2}$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την εξ.(3.19), παίρνω:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}) = H \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} - a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

Επίσης από την εξίσωσης (3.18) εφαρμόζοντας τον διαφορικό τελεστή (παίρνοντας την απόκλιση της σχέσης αυτής) έχουμε:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}_x \cdot \left[ \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right)_x + H\vec{v} + \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi \right] &= 0 \implies \\ \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v})_x + H \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}_x \cdot \left( \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Χρησιμοποιώντας την εξ.(3.20) παίρνω:

$$H \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} - a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + H \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} + \vec{\nabla}_x \cdot \left( \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi \right) = 0 \implies$$

$$a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} - 2H \vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} - \frac{1}{a} \vec{\nabla}_x^2 \phi = 0 \implies$$

Αντικαθιστώντας την εξ.(3.19) και χρησιμοποιώντας την διαταραγμένη εξίσωση Poisson (εξ.3.13) παίρνω:

$$a \frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2Ha \frac{\partial \delta}{\partial t} - \frac{1}{a} 4\pi G \bar{\rho} a^2 \delta = 0 \implies$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} - 4\pi G \bar{\rho} \delta = 0} \quad (3.22)$$

Η οποία είναι και η βασική διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας μας δίνει την χρονική εξέλιξη των διαταραχών της ψυχρής σκοτεινής ύλης (μιας και θεωρήσαμε ότι η πίεση  $P = 0$ ).

Εάν θα ήθελα να πάρω την περίπτωση ρευστού με μη-μηδενική πίεση, τότε θα έπρεπε να θεωρήσω και τον όρο της πίεσης στην εξίσωση Euler που ισούται, στο συμμετακινούμενο σύστημα συντεταγμένων, με:

$$-\frac{1}{a\varrho} \vec{\nabla}_x P = -\frac{dP}{d\varrho} \frac{\vec{\nabla}_x \varrho}{a} = -c_s^2 \frac{\bar{\rho}}{a} \vec{\nabla}_x \delta \quad (3.23)$$

όπου  $dP/d\varrho = c_s^2$  είναι η ταχύτητα του 'ήχου' και  $\varrho = \bar{\rho}(1 + \delta(\vec{x}, t))$ . Άρα η διαταραγμένη εξίσωση Euler θα γίνονταν:

$$\left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + H \vec{v} = -\frac{1}{a} \vec{\nabla}_x \phi - \frac{c_s^2 \bar{\rho}}{a} \vec{\nabla}_x \delta$$

και τελικά η διαφορική εξίσωση που μας δίνει την εξέλιξη των διαταραχών ενός ρευστού που είναι collisional, γίνεται:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + 2H \frac{\partial \delta}{\partial t} = 4\pi G \bar{\rho} \delta + \frac{c_s^2 \bar{\rho}}{a^2} \nabla_x^2 \delta \quad (3.24)$$

### 3.4.1 Λύση της διαφορικής εξίσωσης εξέλιξης διαταραχών

Θα λύσουμε την διαφορική εξίσωση 3.22 θεωρώντας το μοντέλο Einstein de Sitter το οποίο προσεγγίζει οποιοδήποτε άλλο κοσμολογικό μοντέλο σε υψηλές ερυθρομετατοπίσεις, δηλαδή εκεί όπου η συνιστώσα της ύλης κυριαρχεί επί των όποιων υπολοίπων συνιστωσών της δυναμικής του Σύμπαντος (καμπυλότητα ή/και Κοσμολογική σταθερά). Σύμφωνα λοιπόν με το μοντέλο Einstein de Sitter η σχέση κλίμακας διαστολής και χρόνου είναι:

$$a \propto t^{\frac{2}{3}} \quad (3.25)$$

και επομένως παραγωγίζοντας ως προς τον χρόνο, και τελικά διαιρώντας κατά μέλη με την άνω εξίσωση, παίρνω:

$$\dot{a} = \frac{2}{3}t^{\frac{2}{3}-\frac{3}{3}} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}} \implies H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3}t^{-1} = \frac{2}{3t} \quad (3.26)$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο παίρνω:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{4}{9t^2} \quad (3.27)$$

Επίσης από την εξίσωση Friedmann γνωρίζω ότι:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi G\bar{\rho} = \frac{2}{3}(4\pi G\bar{\rho}) \quad (3.28)$$

Επομένως αντικαθιστώντας τις εξ. (3.27) και (3.28) στην διαφορική μου εξίσωση, παίρνω:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} + \frac{4}{3t} \frac{\partial \delta}{\partial t} = \frac{2}{3t^2} \delta$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ως προς τον χρόνο και αναζητούμε λύση της μορφής:  $\delta = D(t) \propto t^n$ , οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$n(n-1)t^{n-2} + \frac{4}{3t}nt^{n-1} - \frac{2}{3t^2}t^n = 0 \implies$$

$$n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0$$

Οι λύσεις της οποίας είναι οι εξής δύο:  $n = -1$  και  $n = \frac{2}{3}$ , και καταλήγουμε επομένως στην λύση :

$$\delta = At^{\frac{2}{3}} + Bt^{-1} \quad (3.29)$$

με  $A, B$  σταθερές και όπου ο πρώτος όρος είναι αυξητικός και ο δεύτερος απομειωτικός (ο οποίος γρήγορα εξαφανίζεται μετά την αποδέσμευση σε ερυθρομεταθέσεις πολύ μεγάλες). Επομένως ο κυρίαρχος όρος που καθορίζει την εξέλιξη των διαταραχών είναι  $D(t) \propto t^{2/3}$ .

### 3.4.2 Σχέση ταχύτητας-επιτάχυνσης

Από την διαταραγμένη εξίσωση συνέχειας (3.17) και έχοντας θωρήσει ότι  $\delta \propto D(t)$ , έχουμε:

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} = -a \frac{\partial \delta}{\partial t} = -a\delta \frac{\partial \delta / \partial t}{\delta} = -a\delta \frac{\dot{D}}{D} \quad (3.30)$$

Έτσι λοιπόν έχουμε, από τον ορισμό της επιτάχυνσης βαρύτητας, ότι:

$$-\frac{1}{a}\vec{\nabla}_x \cdot \vec{g} = \frac{1}{a^2}\nabla_x^2\phi$$

και χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (3.13) και (3.31) παίρνουμε διαδοχικά:

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{g} = \frac{1}{a}4\pi G\bar{\rho}\delta a^2 = -4\pi G\bar{\rho}\delta a = 4\pi G\bar{\rho}\frac{D}{\dot{D}}(\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v}) \implies$$

$$\vec{\nabla}_x \cdot \vec{v} = \frac{\vec{\nabla}_x \cdot \vec{g} \dot{D}}{4\pi G\bar{\rho} D} \implies$$

Ορίζοντας την παράμετρο  $f$  ως:

$$f = \frac{a \dot{D}}{\dot{a} D} = \frac{1}{H_0} \frac{\dot{D}}{D} \quad (3.31)$$

παίρνω τη σχέση που συνδέει την ταχύτητα και την επιτάχυνση σε ένα διαστελλόμενο χώρο, σε συνμετακινούμενες συντεταγμένες και στη γραμμική προσέγγιση:

$$\boxed{\vec{v} = \frac{f H_0}{4\pi G\bar{\rho}} \vec{g}} \quad (3.32)$$

με την παράμετρο  $f$  να προσεγγίζεται με μεγάλη ακρίβεια με την:

$$f = \Omega_m^{0.6}/b$$

όπου η σταθερά  $b$  ονομάζεται bias factor και έχει την τιμή 1 για την περίπτωση γαλαξιών και τιμή  $1.2 \lesssim b \lesssim 2.5$  για σμήνη γαλαξιών διαφορετικής μάζας.

Χρησιμοποιώντας δε την κοσμολογική παράμετρο πυκνότητας  $\Omega_m$ , που δίδεται από την:

$$\Omega = \frac{8\pi G\rho_0}{3H_0^2} \implies 4\pi G\bar{\rho} = 3\Omega_m H_0^2/2$$

παίρνω μια εναλλακτική μορφή της σχέσης (3.32):

$$\vec{v} = \frac{2}{3} \frac{f}{H_0\Omega_m} \vec{g} \quad (3.33)$$

Συμπέρασμα: Βλέπω λοιπόν ότι η ταχύτητα και η επιτάχυνση, στην γραμμική προσέγγιση, είναι διανύσματα παράλληλα και επίσης ότι το μέτρο τους εξαρτάται από τη συνολική πυκνότητα της ύλης που περιέχει το σύμπαν. Εάν λοιπόν μπορώ να μετρήσω παρατηρησιακά την ταχύτητα και την επιτάχυνση ενός παρατηρητή, επιλεγμένου έτσι ώστε να ισχύουν οι προϋποθέσεις της γραμμικής προσέγγισης, τότε μπορώ να προσδιορίσω την κοσμολογική παράμετρο πυκνότητας της ύλης,  $\Omega_m$  (πχ. Basilakos & Plionis 2006 και αναφορές σε αυτή).

## Κεφάλαιο 4

# Έλεγχος της γραμμικής προσέγγισης με δεδομένα προσομοιώσεων N-σωμάτων

### 4.1 Εισαγωγή

Στο χωρίο αυτό περιγράφεται το αριθμητικό κομμάτι της εργασίας, πώς δηλαδή έγινε η προσπάθεια να επαληθευτεί το αποτέλεσμα που περιγράφεται παραπάνω θεωρητικά με την βοήθεια των δεδομένων μιας αριθμητικής προσομοίωσης και την κατάλληλη επεξεργασία τους μέσω προγράμματος που αναπτύξαμε σε γλώσσα προγραμματισμού *fortran*. Με την βοήθεια της προσομοίωσης, όπου η κατανομή της 'σκοτεινής' ύλης σε άλω καθορίζεται από την αριθμητική λύση των εξισώσεων κίνησης, δηλαδή με την πλήρη (μη-γραμμική) ανάπτυξη των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων N-σωμάτων, μας δίνεται η δυνατότητα να προσεγγίσουμε σε μεγάλο βαθμό τις πραγματικές συνθήκες. Από όλες αυτές τις άλω θα επιλέξουμε αυτές που πληρούν τις προϋποθέσεις της γραμμικής προσέγγισης, δηλαδή τις πιο απομονωμένες (μη επηρεαζόμενες από ισχυρά βαρυτικά πεδία) και αυτές για τις οποίες η γωνία μεταξύ επιτάχυνσης και ταχύτητας τείνει προς το μηδέν, προκειμένου να εξετάσουμε αν ισχύει στην πραγματικότητα η σχέση:

$$\vec{v} = \frac{fH_0}{4\pi G_e} \vec{g}.$$

## 4.2 Προσομοιώσεις N-σωμάτων

*"How "reasonable" the facsimile needs to be is dependent on the level of detail of the questions been posed and the comlexity of physics driving the processes at hand" - August E. Evrard*

Η ανάπτυξη αριθμητικών προσομοιώσεων N-σωμάτων προήλθε από την ανάγκη να μελετηθεί η δημιουργία και η δυναμική εξέλιξη των δομών στο σύμπαν στην μη γραμμική περιοχή της βαρύτητας, μιας και το πρόβλημα των N-σωμάτων δεν μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Είναι ένα σχετικά απλό και αποτελεσματικό εργαλείο για την μελέτη μη γραμμικής κοσμολογικής βαρυτικής εξέλιξης. Οι πρώτες προσπάθειες ανάπτυξης αλγορίθμου προσομοίωσης των βαρυτικών αλληλεπιδράσεων N-σωμάτων, προσομοιάζοντας όγκο κοσμικών διαστάσεων, έγιναν με επιτυχία από τους Aarseth, Turner και Gott το 1979, και έφεραν στην επιφάνεια τα ιδιαίτερα μορφολογικά χαρακτηριστικά των κοσμικών δομών, όπως σμήνη, "τοιχώματα" και μεγάλα κενά, που είναι χαρακτηριστικά της παρατηρούμενης μεγάλης κλίμακας δομής του σύμπαντος. Όμως σύντομα έγινε αντιληπτό ότι οι αρχικοί κοσμικοί όγκοι προσομοίωσης ήταν αρκετά μικροί με αποτέλεσμα να μην λαμβάνονται υπόψιν σημαντικές διαταραχές ύλης σε μεγάλες κλίμακες και έτσι να μην αποδίδεται σωστά ο πλούτος των κοσμικών δομών που υπάρχει στο σύμπαν. Επόμενα πειράματα μεγάλωσαν τον όγκο της προσομοίωσης και έτσι οι προσεγγίσεις έγιναν σταδιακά πιο ρεαλιστικές. Από το 1970 η εξέλιξη που πραγματοποιήθηκε στην τεχνολογία των υπολογιστών και των επεξεργαστών αλλά και η ανάπτυξη καλύτερων αλγορίθμων προσομοίωσης, επέτρεψαν στο να αυξηθεί ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων σωματιδίων στις προσομοιώσεις κατά έναν παράγοντα 100 κάθε δεκαετία.

Το είδος των σωματιδίων ύλης που προσομοιάζονται στις σύγχρονες Κοσμολογικές προσομοιώσεις N-σωμάτων, είναι:

- Σκοτεινής ύλης (που δεν υφίστανται χρούσεις μεταξύ τους, collisionless),
- Αερίου (όπου πρέπει να ληφθεί υπόψιν η συνιστώσα της πίεσης, collisional).

Εμείς στην παρούσα φάση θα ασχοληθούμε με την πρώτη περίπτωση, δηλαδή σωματίδια σκοτεινής ύλης.

Ο όγκος, στον οποίο πραγματοποιείται η προσομοίωση, είναι σχεδόν πάντα κυβικός με περιοδικές συνθήκες, διότι αυτός είναι ο πιο ρεαλιστικός τρόπος να προσομοιώσεις την εξέλιξη μέσα σε μια μικρή αλλά τυπική συνμετακινούμενη περιοχή από ένα σύμπαν. Ένα πλεονέκτημα είναι ότι οι επιδράσεις των αναγκαστικά περιορισμένων τοιχωμάτων ελαχιστοποιούνται σε μεγάλο βαθμό. Όμως, ακόμα και εάν σωστά υπολογίζεται η βαρυτική αλληλεπίδραση στο αναγκαστικά περιοδικό όγκο προσομοίωσης, το σύμπαν δεν είναι περιοδικό σε μικρές διαστάσεις, οπότε είναι πολύ βασικό να λαμβάνονται υπόψιν αυτές οι παράμετροι και τα αποτελέσματα να επιβεβαιώνονται συναρτήσει του μεγέθους του όγκου προσομοίωσης για να αποφεύγονται ανε-



πιθύμητα αποτελέσματα, δηλαδή αποτελέσματα που κυριαρχούνται από συστηματικά αριθμητικά λάθη.

Στο σημείο αυτό θα γίνει μια αναφορά στα υπάρχοντα είδη μεθόδων προσομοίωσης:

- Particle-Particle ( $PP$ ): είναι η πιο απλή και η πιο ακριβής μέθοδος, με την οποία υπολογίζεται η βαρυτική δύναμη που υφίσταται κάθε σωματίδιο από τα υπόλοιπα  $N - 1$ . Για τον λόγο αυτό είναι εξαιρετικά χρονοβόρα, μιας και οι αλληλεπιδράσεις είναι  $N^2$  σε κάθε χρονικό βήμα, και επομένως είναι εύχρηστη μόνο για σχετικά μικρό αριθμό σωματιδίων ( $N < 1000$ ).
- Particle-Mesh ( $PM$ ): στην συγκεκριμένη μέθοδο ο όγκος της προσομοίωσης χωρίζεται σε ένα κυβικό "πλέγμα", και επομένως υπολογίζεται η βαρυτική δύναμη που υφίσταται ένα κυβικό χωρίο του πλέγματος στα "σύνορά" του από όλα τα υπόλοιπα. Δηλαδή πρώτα υπάρχει μια λείανση της κατανομής των σωματιδίων σε ένα συνεχές πεδίο πυκνότητας (ορισμένο στα κελιά του πλέγματος) και μετά υπολογίζεται η βαρυτική αλληλεπίδραση ανάμεσα στα κελιά. Ένα βασικό πλεονέκτημα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι η ταχύτητα, καθώς είναι πολύ γρήγορη, όμως δεν είναι τόσο ακριβής όσο η προηγούμενη. Τέλος είναι κατάλληλη μόνο για την προσομοίωση βαρυτικών αλληλεπιδράσεων (σκοτεινής ύλης) και όχι για την προσομοίωση της εξέλιξης ρευστών με πίεση (βαρυονικής ύλης-αερίων).
- Particle-Mesh ( $P^3M$ ): η σημασία αυτής της μεθόδου είναι ότι λύνει το βασικό πρόβλημα που δεν μπορεί να λύσει με επάρκεια η μέθοδος  $PM$  δηλαδή αυτό του υπολογισμού της δύναμης μεταξύ γειτονικών σωματιδίων. Στην παρούσα μέθοδο η απόσταση μεταξύ δύο κοντινών γειτόνων λαμβάνεται με ακρίβεια τριπλάσια της απόστασης τους. Και εδώ ο όγκος της προσομοίωσης χωρίζεται σε πλέγμα, όπως στην μέθοδο  $PM$ , και υπολογίζεται η βαρυτική αλληλεπίδραση που υφίσταται ένα σωματίδιο σε ένα κυβικό χωρίο του πλέγματος από όλα τα υπόλοιπα κυβικά χωρία αλλά επιπλέον και ατομικά από τα σωματίδια που βρίσκονται στο ίδιο κυβικό χωρίο. Αυτή η μέθοδος υπερτερεί σε ακρίβεια αυτής του αλγορίθμου  $PM$ , αλλά έχει ως βασικό μειονέκτημα ότι η διάρκεια που απαιτείται για να τρέξει κυριαρχείται από τις κοντινές αλληλεπιδράσεις σωματιδίων (το  $PP$  μέρος του αλγορίθμου).
- Adaptive Particle-Mesh ( $AP^3M$ ): αυτή η μέθοδος είναι μια εξέλιξη της μεθόδου Particle-Mesh ( $P^3M$ ) καθώς λαμβάνει υπόψιν την πυκνότητα κάθε 'κυβικού χωρίου του πλέγματος' και αλλάζει την ανάλυση του πλέγματος (το μέγεθος των κυβικών χωρίων) έτσι ώστε στις υπέρπυκνες περιοχές να αυξάνεται η ανάλυση ενώ στις χαμηλής πυκνότητας περιοχές να μειώνεται η ανάλυση του κυβικού πλέγματος, έτσι ώστε να γίνεται καλύτερη διαχείριση του χρόνου που χρειάζεται για να 'τρέξει' κάθε φορά το τμήμα  $PP$  του αλγορίθμου προσομοίωσης.

## Η προσομοίωση που χρησιμοποιήθηκε

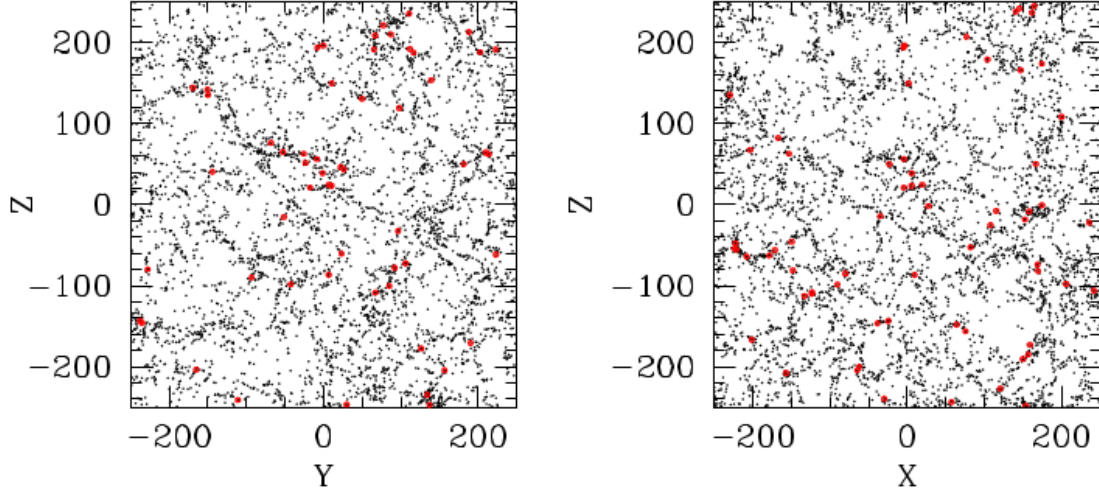
Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιείται η προσομοίωση των Ragono-Figueroa & Plionis (2006), που δημιουργήθηκε με την χρήση του κώδικα Gadget2 (Springel) μόνο με σκοτεινή ύλη. Αυτός ο παράλληλος κώδικας έτρεξε σε ένα σμήνος Beowulf με 32 Intel Xeon επεξεργαστές (3.06GHz). Το κοσμολογικό μοντέλο της προσομοίωσης είναι το επίπεδης χωρικής γεωμετρίας  $\Lambda$ CDM μοντέλο με κοσμολογικές παραμέτρους:  $\Omega_m = 0.3$ ,  $\Omega_\Lambda = 0.7$  και  $H_0 = 100h^{-1} \text{ km sec}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$  με  $h = 0.72$ . Η προσομοίωση έτρεξε σε κύβο πλευράς  $L = 500 h^{-1} \text{ Mpc}$ , χρησιμοποιώντας  $512^3$  σωματίδια, όπου η μάζα του κάθε σωματιδίου είναι  $\sim 7.7 \times 10^{10} h^{-1} M_\odot$ . Στην τελική κατανομή των σωματιδίων εφαρμόστηκε από τους Ragono-Figueroa & Plionis ο αλγόριθμος friends of friends (FoF) για να βρεθούν οι άλω σκοτεινής ύλης που έχουν καταρρεύσει βαρυτικά και το τελικό δείγμα αποτελείται από  $\sim 60036$  άλω. Για να αποφευχθούν σφάλματα στο όριο χαμηλής ανάλυσης, θα χρησιμοποιήσουμε μόνο άλω αποτελούμενες από τουλάχιστον 130 σωματίδια, δηλαδή άλω με μάζες μεγαλύτερες από  $10^{13} h^{-1} M_\odot$ .

Προκειμένου να ερευνηθεί ο ρόλος που παίζει το περιβάλλον στις άλω βρέθηκε για κάθε άλω η απόσταση από το πιο κοντινό της σμήνος και με αυτόν τον τρόπο χωρίστηκε το δείγμα της άλω σε 3 επιμέρους δείγματα σε σχέση με αυτήν την απόσταση ( $r_{cluster}$ ). Κάνοντας αυτό και για να επαληθευθεί ότι η απόσταση  $r_{cluster}$  δείχνει την επίδραση από το περιβάλλον υπολογίστηκε επίσης για κάθε απόσταση η αντίστοιχη διαταραχή της πυκνότητας  $\delta(r) = \rho(r)/\bar{\rho} - 1$  όπου  $\rho(r)$  είναι η πυκνότητα σε μια σφαίρα ακτίνας  $8h^{-1} \text{ Mpc}$  γύρω από το κέντρο της άλω και  $\bar{\rho}$  είναι η μέση πυκνότητα υποβάθρου. Όμως οποιαδήποτε εξάρτηση της άλω από το περιβάλλον δεν επηρεάζει και δεν συνεισφέρει σε υπερπληθείς περιοχές άλω υψηλής μάζας σε υπέρπυκνες περιοχές.

Έχουμε λοιπόν με την βοήθεια της προσομοίωσης τα δεδομένα 60036 άλω, δηλαδή ένα αρχείο που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$ , τις συνιστώσες της σχετικής ταχύτητας (peculiar velocity) κάθε άλου  $u_x, u_y, u_z$ , την μάζα  $M$  καθώς και την ακτίνα κάθε άλω. Για να αποκτήσουμε μια εικόνα της χωρικής κατανομής των άλω της προσομοίωσης, προβάλουμε στην εικόνα (4.1) τις συντεταγμένες  $(x, z)$  και  $(y, z)$  των άλω αλλά από μια φέτα του όγκου της προσομοίωσης πάχους  $40 h^{-1} \text{ Mpc}$ . Με χρώμα μαύρο φαίνονται όλοι οι άλω, ενώ με κόκκινο οι άλω με μάζα  $M > 10^{14} M_\odot$ .

Επιπλέον παράγουμε την συχνοτική κατανομή μαζών ώστε να αντιληφθούμε ότι υπάρχει μια ιεραρχία στα μεγέθη των άλω, με τις άλω μικρότερης μάζας να κυριαρχούν σε αριθμό. Στην εικόνα (4.2) δείχνουμε αυτή τη συχνοτική κατανομή όπου ο άξονας των  $x$  αντιπροσωπεύει την μάζα της άλω και ο άξονας των  $y$  το πλήθος των άλω.

Τώρα επιλέγω τις άλω που θα χρησιμοποιήσω ως 'παρατηρητές' επί των οποίων θα υπολογίσω την συνισταμένη βαρυτική αλληλεπίδραση στην γραμμική της προσέγγιση, από όλες τις υπόλοιπες. Τα αρχικά κριτήρια επιλογής είναι: (α) Ελάχιστης μάζας (δηλαδή επιλέγω τις πιο μαζικές άλω, με μάζα  $> 3 \times 10^{13} M_\odot$ ) έτσι ώστε να εξασφαλίσω το δυνατόν ασθενέστερες αλληλεπι-



Σχήμα 4.1: Κατανομή στο χώρο των άλω με μάζα  $M > 10^{13} M_{\odot}$  (μαύρα σημεία) και με μάζα  $M > 10^{14} M_{\odot}$  (κόκκινα σημεία).

δράσεις από τους υπόλοιπους, και (β) απόστασης από τα τοιχώματα του όγκου προσομοίωσης ( $R_{max} = 220 h^{-1} \text{ Mpc}$ ) ώστε να μειώσω προβλήματα που συναρτώνται κύρια με την περιοδικότητα του όγκου. Επιβάλλοντας τα παραπάνω κριτήρια επιλέγω τελικά 6175 ‘παρατηρητές’ για την περαιτέρω ανάλυση μου.

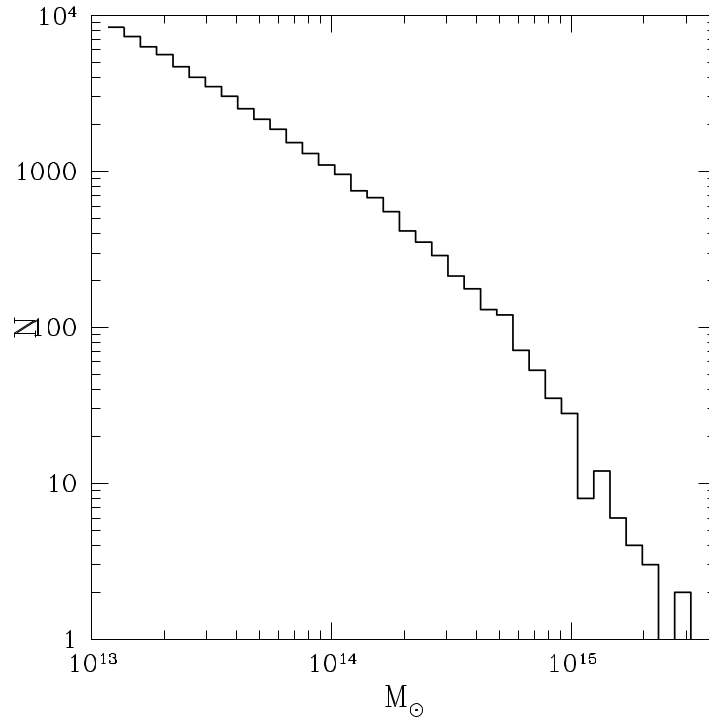
### 4.3 Υπολογισμός της επιτάχυνσης και της αναμενόμενης σχετικής ταχύτητας των άλω

Έχοντας το αρχείο που περιέχει τις καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y, z$ , την μάζα  $M$  καθώς και την ακτίνα  $r$  κάθε άλω, προχωρήσαμε στην κατασκευή του αλγορίθμου που υπολογίζει την ταχύτητα κάθε άλω από την γραμμική προσέγγιση της επιτάχυνσης βαρύτητας που δέχεται. Προς το σκοπό αυτό ορίζουμε δύο βολικές παραμέτρους: αυτή του διπολικού διανύσματος,  $\vec{D}$ , και του μονοπόλου  $\mathcal{M}$ , που ορίζονται ως εξής:

$$\vec{g} = G\vec{D} = G \int_0^{L/2} \varrho(r) \frac{\vec{r}}{|r^3|} dV = G \sum_{i=1}^N w_i \frac{\vec{r}_i}{|r_i^3|} \quad (4.1)$$

και

$$\mathcal{M} = \int_0^{L/2} \frac{\varrho(r)}{r^2} dV = 4\pi\bar{\varrho} \int_0^{L/2} dr = 4\pi\bar{\varrho}(L/2) = \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{r_i^2} \quad (4.2)$$



Σχήμα 4.2: Συχνοτική κατανομή μαζών άλω σκοτεινής ύλης.

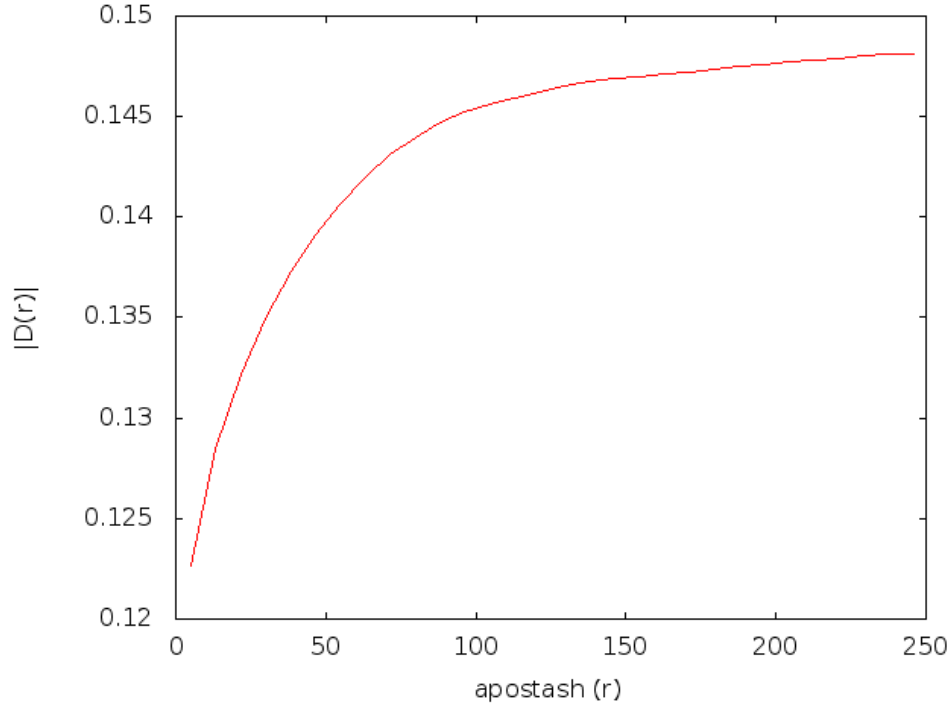
όπου  $w_i$  το ειδικό βάρος με το οποίο εισέρχεται στην άθροιση κάθε βαρυτική μάζα. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω και την βασική εξίσωση που συνδέει ταχύτητα με επιτάχυνση σε διαστελλόμενο χώρο και στη γραμμική προσέγγιση, (εξ.3.32), υπολογίζουμε για κάθε άλω την ταχύτητα του υπό αυτή την προσέγγιση (την οποία ονομάζω από τώρα ως ‘γραμμική ταχύτητα’):

$$\vec{v}_{linear} = H_0(L/2)f \frac{\vec{D}}{M} = 25000f \frac{\vec{D}}{M} = f\vec{V}_{obs} \text{ kms}^{-1} \quad (4.3)$$

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρήσουμε (διάγραμμα 4.3) την κατατομή (profile) της μέσης τιμής του μέτρου της επιτάχυνσης όλων των παρατηρητών:

Παρατηρούμε ότι το μεγαλύτερο μέρος της επιτάχυνσης προσδίδεται στον μέσο παρατηρητή από άλω που βρίσκονται σε μικρές σχετικά αποστάσεις (δηλαδή σε σφαίρα ακτίνας  $\lesssim 120 h^{-1}$  Mpc) ενώ για μεγαλύτερες ακτίνες το μέτρο της επιτάχυνσης είναι περίπου σταθερό, γεγονός που μπορεί να ειπωθεί ως ισχυρή ένδειξη ότι από αυτήν την απόσταση και μετά σε ένα  $\Lambda$ CDM σύμπαν παρατηρείται ομοιογένεια και ισοτροπία (δηλαδή επαναλαμβάνονται στατιστικά οι δομές που υπάρχουν σε σφαίρα ακτίνας  $\sim 120 h^{-1}$  Mpc).

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι το γραμμικό μοντέλο της σχετικής ταχύτητας των εξωγαλα-



Σχήμα 4.3: Μέση τιμή των προφίλ του μέτρου της επιτάχυνσης  $|D(r)|$  όλων των παρατηρητών συναρτήσει της απόστασης.

ξιακών αντικειμένων (γαλαξιών, σμηνών γαλαξιών) μπορεί να υπολογιστεί από παρατηρησιακά δεδομένα (χρησιμοποιώντας αποστάσεις και μάζες της κατανομής γαλαξιών σε σχετικά μεγάλους κοσμικούς όγκους) με μόνη άγνωστη παράμετρο την  $f = \Omega_m^{0.6}$ . Επιπλέον, για κάθε άλω έχουμε και την πραγματική ταχύτητα της, που στην περίπτωση μας δίδεται από την προσομοίωση  $N$ -σωμάτων, και έχει μέτρο:

$$\vec{v}_{real} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}, \quad (4.4)$$

αλλά σημειωτέον ότι και παρατηρησιακά μπορούμε να υπολογίσουμε, για εξωγαλαξιακούς πληθυσμούς, την  $\vec{v}_{real}$  (μόνο την ακτινική της συνιστώσα) μέσω μεθοδολογιών υπολογισμού αποστάσεων γαλαξιών.

Επομένως εάν ισχύουν οι προϋποθέσεις της γραμμικής θεωρίας διαταραχών θα πρέπει οι 2 παραπάνω ταχύτητες να είναι ίσες, δηλαδή:

$$\vec{v}_{real} \simeq \vec{v}_{linear} \simeq f\vec{V}_{obs}, \quad (4.5)$$

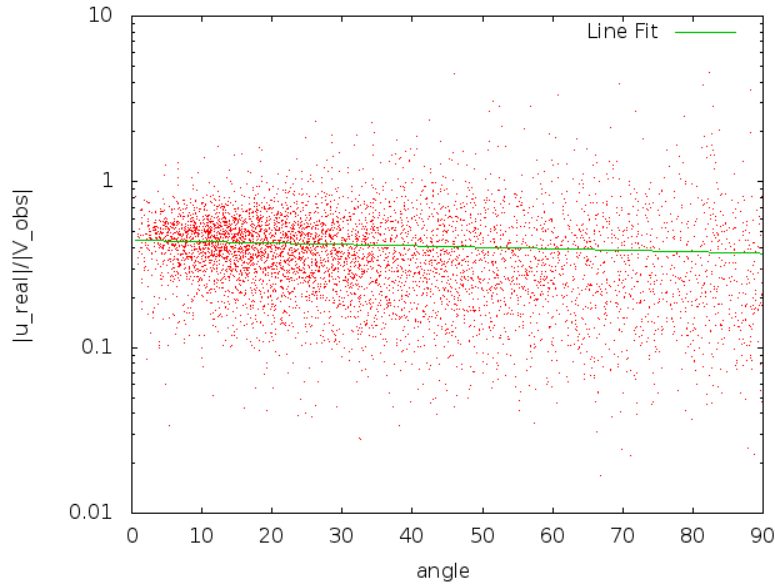
Βλέπουμε λοιπόν ότι με την παραπάνω σύγκριση ταχυτήτων **μπορούμε να υπολογίσουμε την Κοσμολογική παράμετρο πυκνότητας της ύλης,  $\Omega_m$** , μια από τις σημαντικότε-

ρες κοσμολογικές παραμέτρους, αρκεί να βρούμε τις περιοχές όπου ισχύουν οι προϋποθέσεις της γραμμικής θεωρίας διαταραχών.

Όπως είναι φανερό από την ανάλυση μας στο κεφάλαιο 3.4.2, στη γραμμική προσέγγιση της θεωρίας διαταραχών η ταχύτητα και η επιτάχυνση πρέπει να είναι ευθυγραμμισμένες και επομένως ένα προφανές κριτήριο για την ισχύ της γραμμικής προσέγγισης είναι η γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων ταχύτητας να είναι πολύ μικρή. Θα ελέγξουμε αυτό το κριτήριο στην προσομοίωση μας, και για αυτό υπολογίζουμε την γωνιακή διαφορά,  $\theta$ , μεταξύ των δύο διανυσμάτων ταχύτητας από την σχέση:

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_{real} \cdot \vec{v}_{linear}}{|\vec{v}_{real}| |\vec{v}_{linear}|}.$$

Εάν το κριτήριο αυτό είναι ικανό να ξεχωρίσει περιοχές όπου η γραμμική προσέγγιση να είναι ικανοποιητική, οι επιλεγμένοι παρατηρητές με μικρές τιμές της  $\theta$  θα πρέπει να έχουν  $|\vec{v}_{real}| \simeq |\vec{v}_{linear}|$ .



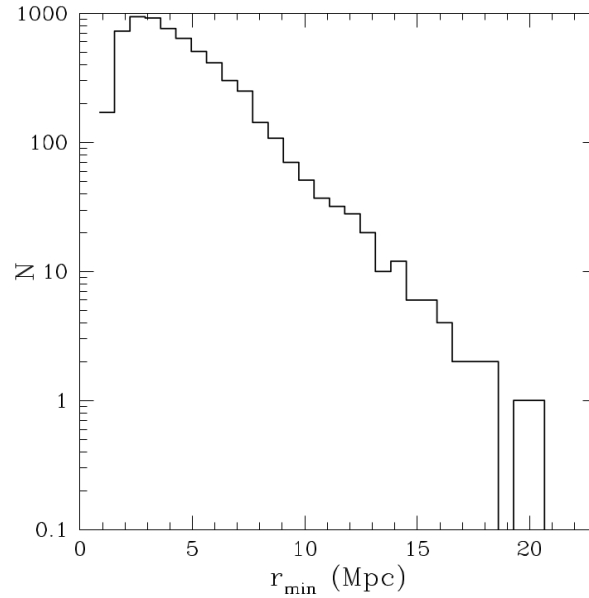
Σχήμα 4.4: Λόγος των μέτρων των δυο ταχυτήτων σε σχέση με την μεταξύ τους γωνία. Η ευθεία αποτελεί το αποτέλεσμα της προσαρμογής ελαχίστων τετραγώνων (δες εξ. 4.6).

Στην εικόνα 4.4 παρουσιάζουμε την γωνία αυτή συναρτήσει του λόγου των μέτρων των δύο ταχυτήτων ( $|v_{real}|/|V_{obs}|$ ). Βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του  $\theta$  ο λόγος  $|v_{real}|/|V_{obs}|$  παρουσιάζει σχετικά μικρή διασπορά από παρατηρητή σε παρατηρητή, ενώ όσο αυξάνει η γωνία μεταξύ των δύο ταχυτήτων παρατηρείται όλο και μεγαλύτερη διασπορά τιμών, γεγονός που είναι συμβατό με την υπόθεση ότι μεγάλες γωνίες συναρτώνται με περιοχές όπου δεν ισχύει η γραμμική προσέγγιση. Επιπλέον, όμως ακόμα και σε μικρές τιμές της  $\theta$  η διασπορά τιμών

δεν είναι αμελητέα και επιπλέον η συγκέντρωση τιμών του λόγου των ταχυτήτων δεν είναι γύρω από την τιμή  $\sim 1$ , αλλά γύρω από την τιμή 0.4-0.5. Αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της παρεμβολής της παραμέτρου  $f$  (δες εξ. 4.5), θα συζητήσουμε περί αυτής παρακάτω. Επίσης είναι ενδιαφέρον ότι πέρα από την αύξηση της διασποράς των τιμών του λόγου, συναρτήσει της μεταξύ τους γωνίας, υπάρχει και μια συστηματική συσχέτιση τους. Όσο αυξάνει η γωνία  $\theta$  μεταξύ των δύο ταχυτήτων, ο λόγος τους μειώνεται σύμφωνα με την παρακάτω σχέση, που βρέθηκε χρησιμοποιώντας την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων:

$$\frac{|\vec{v}_{real}|}{|\vec{V}_{obs}|} = -0.0008(\pm 0.0002)\theta + 0.4438(\pm 0.0067) \quad (4.6)$$

Είναι επομένως φανερό ότι το κριτήριο της μικρής γωνιακής απόκλισης δεν είναι αρκετό για να εντοπίσει τους παρατηρητές/περιοχές όπου ισχύει η γραμμική προσέγγιση της βαρύτητας.

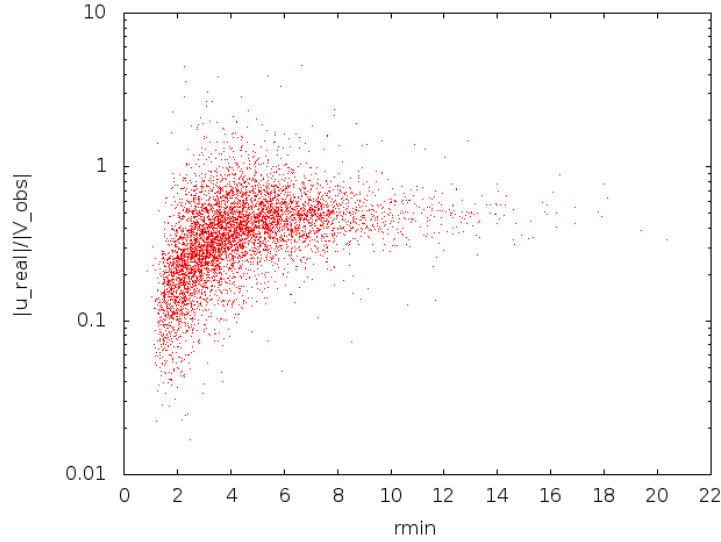


Σχήμα 4.5: Συχνοτική κατανομή της ελάχιστης απόστασης μεταξύ των ‘παρατηρητών’ και των υπόλοιπων άλω.

Θεωρούμε ότι ένα επιπλέον σημαντικό κριτήριο θα πρέπει να είναι η απόσταση μεταξύ παρατηρητή και κοντινότερης άλω, δηλαδή το κατά πόσο είναι απομονωμένος ο παρατηρητής/περιοχή. Για να εφαρμόσουμε δε αυτό το κριτήριο υπολογίσαμε τις αποστάσεις μεταξύ κάθε ‘παρατηρητή’ και όλων των υπόλοιπων άλω και εξ αυτών βρήκαμε την ελάχιστη απόσταση, δηλαδή την απόσταση της εγγύτερου άλω,  $r_{min}$ , η οποία παίρνει τιμές μεταξύ:  $0.85 \lesssim r_{min} \lesssim 20.33$ .

Επιπλέον στην εικόνα 4.5 παρατίθεται το συχνοτικό διάγραμμα της απόστασης μεταξύ κάθε παρατηρητή και της εγγύτερης του άλω.

Επόμενο βήμα στην ανάλυση μας είναι να κατατάξουμε τους ‘παρατηρητές’ σε φθίνουσα σειρά απόστασης εγγύτερης άλω.



Σχήμα 4.6: Λόγος των μέτρων των δύο ταχυτήτων σε σχέση με την απόσταση της εγγύτερης άλω.

Στην εικόνα 4.6 παρουσιάζουμε τον λόγο των δύο ταχυτήτων,  $|v_{real}|/|V_{obs}|$ , συναρτήσει της απόστασης  $r_{min}$ . Όπως βλέπουμε σε μικρές τιμές της παραμέτρου  $r_{min}$ , η διασπορά του λόγου των ταχυτήτων είναι εξαιρετικά μεγάλη αλλά όσο αυξάνεται η τιμή της  $r_{min}$  τόσο μειώνεται η διασπορά και αρχίζουν οι τιμές του  $|v_{real}|/|V_{obs}|$  να συγκλίνουν σε μια τιμή ανάμεσα  $\sim 0.4-0.5$  και όχι γύρω από την τιμή  $\sim 1$ . Υπενθυμίζω ότι αυτό είναι αναμενόμενο λόγω της παρεμβολής της παραμέτρου  $f$  (βλ. εξ. 4.5), και ουσιαστικά ο λόγος των ταχυτήτων μας δίνει την τιμή της  $f$ .

### Υπολογισμός της Κοσμολογικής Παραμέτρου $\Omega_m$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε για τους ‘παρατηρητές’ για τους οποίους ισχύουν οι προϋποθέσεις της γραμμικής προσέγγισης της βαρύτητας την τιμή της κοσμολογικής παραμέτρου

$$\Omega_m = (|v_{real}|/|V_{obs}|)^{1.666} .$$

Σε πρώτη προσέγγιση επιλέγουμε τους πιο απομονωμένους παρατηρητές με  $r_{min} = 10$  Mpc οι



οποίοι είναι  $N = 193$  το πλήθος, για τους οποίους βρίσκουμε:

$$\Omega_m = 0.35 \pm 0.23 ,$$

δηλαδή προσεγγίζουμε την τιμή εισαγωγής της προσομοίωσης ( $\Omega_m = 0.3$ ) αλλά με μεγάλη διασπορά γύρω από την μέση τιμή. Αυτό μας λέει ότι δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο το κριτήριο της 'απομόνωσης' ενός εξωγαλαξιακού ιχνηλάτη (γαλαξία, ομάδα ή σμήνος γαλαξία) για να εφαρμόσουμε αυτό το Κοσμολογικό πείραμα με επιτυχία.

Εφαρμόζω τώρα επιπλέον και το κριτήριο της μικρής γωνιακής διαφοράς μεταξύ των διανυσμάτων των δύο ταχυτήτων. Παίρνοντας τους παρατηρητές για τους οποίους η γωνιακή διαφορά είναι:  $\theta \lesssim 10^\circ$ , οι οποίοι είναι  $N = 24$  το πλήθος βρίσκω πολύ καλύτερα αποτελέσματα και σημαντικά μικρότερη διασπορά γύρω από την μέση τιμή, δηλαδή:

$$\Omega_m = 0.30 \pm 0.08 .$$

Αυτό είναι πράγματι ένα εξαιρετικά ακριβές αποτέλεσμα το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι για να εφαρμοστεί αυτού του είδους το κοσμολογικό πείραμα χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ικανός αριθμός απομονωμένων γαλαξιών, για τους οποίους το διάνυσμα της ταχύτητας τους (υπολογισμένου με κινηματικές μεθόδους) και της επιτάχυνσης τους (υπολογισμένου με δυναμικές μεθόδους) είναι παράλληλα.

## Κεφάλαιο 5

# Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία ξεκινήσαμε από τις εξισώσεις ρευστοδυναμικής και την εξίσωση Poisson σε διαστελλόμενο υπόβαθρο (στο οποίο ισχύουν οι εξισώσεις Friedmann), και εφαρμόσαμε την γραμμική θεωρία διαταραχών ώστε να καταλήξουμε σε τρεις διαταραγμένες και γραμμικοποιημένες εξισώσεις. Χρησιμοποιώντας ως βάση μια εξ' αυτών, την εξίσωση κίνησης, και συνδυάζοντας την με την διαταραγμένη εξίσωση Poisson, βρήκαμε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης της διαταραχής ως προς τον χρόνο, η λύση της οποίας ( $\delta = At^{\frac{2}{3}} + Bt^{-1}$ ) μας δείχνει πως εξελίσσονται οι διαταραχές ως προς τον χρόνο, στην γραμμική προσέγγιση. Με την βοήθεια αυτής της λύσης βρήκαμε τέλος την σχέση μεταξύ διαταραγμένης-peculiar ταχύτητας και διαταραγμένης-peculiar βαρυτικής επιτάχυνσης ( $\vec{v} = \frac{fH_0}{4\pi G\delta} \vec{g}$ ). Κατόπιν χρησιμοποιώντας μια βαρυτική Κοσμολογική προσομοίωση N-σωμάτων, και αξιοποιώντας κριτήρια εντοπισμού των περιοχών όπου ισχύουν οι προϋποθέσεις της γραμμικής προσέγγισης της βαρύτητας, επιβεβαιώσαμε την παραπάνω σχέση βρίσκοντας την τιμή της παραμέτρου κοσμολογικής πυκνότητας ύλης,  $\Omega_m$ , να προσεγγίζει με ακρίβεια την τιμή 0.3, η οποία είναι και η αρχική τιμή της προσομοίωσης.

# Βιβλιογραφία

- *"Principles of physical cosmology"*- P.J.E Peebles, Priston University Press[1993]
- *"Στοιχεία Κοσμολογίας"*-Μανώλης Πλειώνης,(σημειώσεις μεταπτυχιακού) Α.Π.Θ
- *"Εισαγωγή στην Κοσμολογία"*- Χρήστος Γ.Τσάγκας (σημειώσεις)Α.Π.Θ
- *"Cosmological Simulations"*-H.M.P Couchman,*Numerical Astrophysics : Proceedings of the International Conference on Numerical Astrophysics 1998 (NAP98), held at the National Olympic Memorial Youth Center, Tokyo, Japan, March 10-13, [1998]. Edited by Shoken M. Miyama, Kohji Tomisaka, and Tomoyuki Hanawa. Boston, Mass. : Kluwer Academic,[1999]. (Astrophysics and space science library ; 240), p.1*
- *"Simulating large-Scale Structure"*-August E.Evrard, *"Proceedings of the MPA- ESO cosmology conference, Garching, Germany, 2-7 August 1998"*, p.249, [1999]
- *"N-body simulations of galaxy clustering. I - Initial conditions and galaxy collapse times"*, Aarseth, S. J.; Turner, E. L.; Gott, J. R.,[1979], *ApJ*, 228, 664
- *"Environmental influences on morphology and dynamics of group-sized haloes"*- Ragone-Figueroa, Cinthia ; Plionis, Manolis ,*"MNRAS"*, Volume 377, Issue 4, pp. 1785-1794.[2007]
- *"The PSCz dipole revisited"*-Spyros Basilakos and Manolis Plionis, *"MNRAS"*, Volume 373, Issue 3, pp. 1112-1116.[2006]
- *"The cluster distribution as a test of dark matter models-II.The dipole structures"*-P.Tini Brunozzi, S.Borgani,M.Plionis,L.Moscardini,P.Coles, *"MNRAS"*, Volume 277, Issue 4,

*pp. 1210-1224.[1995]*

- *"The Cosmological Constant"-Sean M.Carroll,"Living Reviews in Relativity" [2001]*
- *<http://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/details.php?id=PIA17569>*