Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης
Σχολη Θετικων Επιστημων
Τμημα Φυσικης

Πτυχιακη εργασια

Τροχιές υλικού σημείου σε διδιάστατα ευθειοπαραγωγά δυναμικά

Νίκος Κυριακόπουλος
Α.Ε.Μ.: 11887

Επιβλέπουσα καθηγήτρια
Ευθυμία Μελετλίδου
υπό την επίβλεψη του ομ. καθηγητή
Γεωργίου Μπόζη

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2010

Περίληψη

Στη Δυναμική, σε αντίθεση με το ευθύ πρόβλημα, κατά το οποίο, έχοντας γνωστά τα πεδία δυνάμεων, ψάχνουμε να βρούμε τις τροχιές που αυτά δημιουργούν, ως αντίστροφο χαρακτηρίζεται το πρόβλημα της εύρεσης της αιτίας (πεδίου δυνάμεων) που αναγκάζει ένα σύστημα να κινηθεί με ένα συγκεκριμένο τρόπο.
Σε αυτή την εργασία θα ασχοληθούμε με την επίπεδη κίνηση ενός υλικού σημείου σε πεδία δυνάμεων τα οποία προέρχονται από κάποιο δυναμικό της μορφής $V = V(x, y)$. Δε θα μελετήσουμε συστήματα σημείων, ούτε σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις.
Αρχικά, παρουσιάζονται τα εργαλεία (διαφορικές εξισώσεις) που θα χρησιμοποιηθούν. Το ερώτημα που θέτουμε είναι 'Εκτός των ευθειών, τι οικογένειες παράγει ένα ευθειοπαραγωγό δυναμικό;' και την απάντηση τη δίνουμε μελετώντας το πρόβλημα σε δύο μέρη:
Στο πρώτο μέρος παρουσιάζονται οι συνθήκες-εξισώσεις που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε στις οικογένειες τροχιών που παράγει ένα δυναμικό να συμπεριλαμβάνεται και μία **οικογένεια ευθειών** (Family of Straight Lines - FSL). Στη συνέχεια, γίνεται χρήση τους ώστε να εξαγάγουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα, δηλαδή την απάντηση στην ερώτηση.
Το δεύτερο μέρος της εργασίας είναι αφιερωμένο στις **μεμονωμένες ευθείες** (Isolated Straight Lines - ISLs), ευθείες, δηλαδή, οι οποίες δεν ανήκουν αναγκαστικά σε κάποια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών την οποία δημιουργεί το υπόψιν δυναμικό. Μελετούμε την ειδική περίπτωση ισοενεργειακής οικογένειας τροχιών και βρίσκουμε τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί μια τέτοια οικογένεια ώστε να παράγεται από το ίδιο -ομογενές- δυναμικό που παράγει και μια μεμονωμένη ευθεία $y = \lambda x$.

Abstract

In Dynamics, in opposition to the direct problem, which is finding the orbits that the known force fields produce, the problem of determining the cause (the force field) that makes a system move in a certain way is known as the inverse problem.
In the present thesis we will deal with the planar movement of a point particle in force fields produced by a potential of the form $V = V(x, y)$. We will not deal with systems of particles or bodies with finite dimensions.
In the introduction, we present the tools (differential equations) we are going to use. The question we ask is "Apart from straight lines, what families can a straight line producing potential create?" and we give the answer by examining the problem in two parts:
In the first part we present the conditions-equations that need to be satisfied for a potential to create one family of straight lines (FSL) among the other families it creates. Then, we use them to produce our result, which is the answer to the above question.
In the second part of the thesis, we deal with isolated straight lines (ISLs), which are straight lines that do not necessarily belong to a whole FSL produced by the potential. We study the special case of isoenergetic families and we find the condition that has to be satisfied by a family, so that it is produced by the same -homogenous- potential as an ISL of the form $y = \lambda x$.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Το διδιάστατο αντίστροφο πρόβλημα της Δυναμικής τίθεται ως εξής (βλ. [7]):
Δίνεται μία μονοπαραμετρική οικογένεια τροχιών της μορφής

$$f(x,y)=c \tag{1.1}$$

την οποία διαγράφει στο επίπεδο ένα υλικό σημείο με μοναδιαία μάζα και προκαθορισμένη κατανομή τής ενέργειας για κάθε μέλος τής οικογένειας

$$E=E(f(x,y)) \tag{1.2}$$

Ζητάμε όλα τα δυναμικά που παράγουν την (1.1).

1.1 Η πρώτης τάξης μερική διαφορική εξίσωση (Szebehely's equation)

Παραγωγίζοντας τήν (1.1) ως προς το χρόνο έχουμε:

$$f_x\dot{x}+f_y\dot{y}=0 \tag{1.3}$$

όπου οι δείκτες σημαίνουν παραγώγιση ως προς την αντίστοιχη μεταβλητή και οι τελείες παραγώγιση ως προς το χρόνο. Παραγωγίζοντας και δεύτερη φορά παίρνουμε την παρακάτω σχέση:

$$f_{xx}\dot{x}^2+2f_{xy}\dot{x}\dot{y}+f_{yy}\dot{y}^2+\ddot{x}f_x+\ddot{y}f_y=0 \tag{1.4}$$

Εξάλλου έχουμε:

$$E=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+V \tag{1.5}$$

και

$$\ddot{x}=-V_x \qquad \text{και} \qquad \ddot{y}=-V_y \tag{1.6}$$

Η (1.5) δίνει το ολοκλήρωμα της ενέργειας και οι (1.6) τις εξισώσεις κίνησης υλικού σημείου μοναδιαίας μάζας για δύναμη που προέρχεται από δυναμικό. Από τις (1.5) και (1.3) έχουμε:

$$\dot{x}=\pm f_y\sqrt{\frac{2(E-V)}{f_x^2+f_y^2}} \qquad \text{και} \qquad \dot{y}=\mp f_x\sqrt{\frac{2(E-V)}{f_x^2+f_y^2}} \tag{1.7}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις κίνησης (1.6) και τις ταχύτητες (1.7) με την (1.4) προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$f_x V_x + f_y V_y = 2W(E - V) \tag{1.8}$$

όπου

$$W(x, y) = \frac{f_{xx} f_y^2 - 2f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_x^2 + f_y^2}$$

Η (1.8) είναι πρώτης τάξης διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, γραμμική ως προς V και είναι γνωστή ως *εξίσωση του Szebehely.*

Ο F. Morrison (βλ. [6]) επεσήμανε ότι η (1.8) συνδέει δυναμικά $V(x, y)$, με μονοπαραμετρικές οικογένειες τροχιών $f(x, y) = c$ που δημιουργούνται από τα δυναμικά αυτά και τη συνάρτηση $E = E(f(x, y))$, που δίνει την κατανομή της ενέργειας του κινούμενου υλικού σημείου στα διάφορα μέλη της οικογένειας. Η εξίσωση αυτή τροποποιήθηκε από τον G. Bozis (βλ. [1]) και γράφτηκε ως:

$$V_x + \gamma V_y + \frac{2\Gamma}{1 + \gamma^2}(E - V) = 0 \tag{1.9}$$

όπου

$$\gamma = \frac{f_y}{f_x} \qquad \text{και} \qquad \Gamma = \gamma\gamma_x - \gamma_y \tag{1.10}$$

Στην εξίσωση (1.9), αντί της οικογένειας, εμφανίζεται η 'συνάρτηση κλίσης' $\gamma = \gamma(x, y)$. Αυτή η συνάρτηση είναι σε ένα προς ένα αντιστοιχία με την οικογένεια των τροχιών. Πράγματι, είναι προφανές ότι σε δοθείσα οικογένεια (1.1) αντιστοιχεί μία μόνο συνάρτηση κλίσης γ (1.10α). Αντίστροφα, αν δοθεί μια συνάρτηση κλίσης γ, η αντίστοιχη οικογένεια $f(x, y) = c$ θα βρεθεί ως λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\gamma(x, y)}$$

η οποία θα εισαγάγει τη σταθερά c της (1.1).

1.2 Η δεύτερης τάξης μερική διαφορική εξίσωση (Bozis' equation)

Η ενέργεια (1.2) διατηρείται σταθερή κατά μήκος κάθε τροχιάς της οικογένειας (1.1). Είναι, δηλαδή, $E = E(f)$, οπότε, παραγωγίζοντας ως προς x και y, έχουμε:

$$E_x = E_f f_x \qquad \text{και} \qquad E_y = E_f f_y$$

και, τελικά:

$$\begin{aligned} E_f &= \frac{E_x}{f_x} = \frac{E_y}{f_y} \Rightarrow \\ \frac{E_y}{E_x} &= \gamma \end{aligned} \tag{1.11}$$

Από τις (1.11) και (1.9), προκύπτει (βλ. [2]) η δεύτερης τάξης διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους

$$-V_{xx} + kV_{xy} + V_{yy} = \lambda V_x + \mu V_y \tag{1.12}$$

με

$$k(x,y) = \frac{1-\gamma^2}{\gamma} \qquad \lambda(x,y) = \frac{\Gamma_y - \gamma\Gamma_x}{\gamma\Gamma} \qquad \mu(x,y) = \lambda\gamma + \frac{3\Gamma}{\gamma} \tag{1.13}$$

όπου τα γ και Γ δίνονται από τις (1.10).

Η ΔΕΜΠ (1.12) σχετίζει οικογένειες $\gamma(x,y)$ και δυναμικά $V(x,y)$. Όταν ένα ζεύγος $\{\gamma, V\}$ είναι συμβατό (ικανοποιεί την (1.12)), η ολική ενέργεια με την οποία το κινούμενο υλικό σημείο διαγράφει κάθε τροχιά, βρίσκεται από την εξίσωση του Szebehely (1.9).

1.3 Ευθειοπαραγωγά δυναμικά

Χαρακτηρίζουμε ως ευθειοπαραγωγά τα δυναμικα $V(x,y)$ τα οποία, μεταξύ όλων των ∞^3 τροχιών που δημιουργούν, έχουν και μία τουλάχιστον ευθεία ή μία μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών. Έτσι, για παράδειγμα, το δυναμικό $V(x,y) = 3x^2y + y^3$ έχει ως λύσεις τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$, ενώ κάθε κεντρικό δυναμικό $V = V(r)$ έχει ως λύση κάθε ευθεία $y = \lambda x$ που διέρχεται από το κέντρο O. Τα θεωρούμε, λοιπόν, ευθειοπαραγωγά δυναμικά.

Στο πρώτο μέρος θα ασχοληθούμε με δυναμικά που υιοθετούν *μονοπαραμετρικές οικογένειες* ευθειών και στο δεύτερο μέρος με δυναμικά που έχουν *μεμονωμένες ευθείες* ως λύσεις.

Οι G. Bozis και M.-C. Anisiu (βλ. [4]) έδειξαν ότι όλα τα δυναμικά τα οποία παράγουν μονοπαραμετρικές οικογένειες ευθειών στο επιπεδο Oxy ικανοποιούν τη σχέση

$$V_xV_y(V_{xx} - V_{yy}) = V_{xy}(V_x^2 - V_y^2) \tag{1.14}$$

η οποία προκύπτει ως εξής:

Το Γ, από τις (1.10), δίνεται από τη σχέση

$$\Gamma = \frac{2f_{xy}f_xf_y - f_{xx}f_y^2 - f_{yy}f_x^2}{f_x^3}$$

και η καμπυλότητα των τροχιών της (1.1) δίνεται από τη σχέση

$$\kappa = \frac{\Gamma}{(1+\gamma^2)^{3/2}}$$

Για να αποτελείται μια οικογένεια από ευθείες, πρέπει να ισχύει $\Gamma = 0$, ή, αλλιώς, $\gamma\gamma_x - \gamma_y = 0$. Έτσι, από την εξίσωση του Szebehely (1.9), προκύπτει (με $V_y \neq 0$)[i]:

$$V_x + \gamma V_y = 0 \Rightarrow \gamma = -\frac{V_x}{V_y} \tag{1.15}$$

Εισάγοντας το αποτέλεσμα αυτό στη σχέση $\Gamma = 0 \Rightarrow \gamma\gamma_x - \gamma_y = 0$ παίρνουμε τη σχέση (1.14).

[i]Για $V_y = 0$ και $\Gamma = 0$, από την (1.9) προκύπτει $V_x = 0$, δηλαδή $V =$ σταθερό. Σε αυτή την ειδική (τετριμμένη) περίπτωση όλες οι τροχιές είναι ευθείες.

Κεφάλαιο 2

Οικογένειες αδελφικές προς οικογένειες ευθειών

Με τον όρο ‘αδελφικές οικογένειες’, εννοούμε δύο μονοπαραμετρικές οικογένειες που παράγονται από το ίδιο δυναμικό $V(x, y)$.
Στο κεφάλαιο αυτό θα θεωρήσουμε ότι η μία από τις δύο αυτές οικογένειες είναι οικογένεια ευθειών και θα επιδιώξουμε να απαντήσουμε στο ερώτημα ‘Συνοδεύεται αυτή η οικογένεια από κάποια άλλη δεδομένη οικογένεια τροχιών $\gamma = \gamma(x, y)$ (γενικά, όχι ευθειών);’ Ή, αλλιώς, ‘Υπάρχουν κριτήρια (ΙΚΑΣ) με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να αποφανθούμε αν δεδομένη οικογένεια $\gamma = \gamma(x, y)$ είναι αδελφική προς ήδη υπάρχουσα οικογένεια ευθειών;’
Μια σαφέστερη διατύπωση του παραπάνω ερωτήματος θα έπρεπε να περιλαμβάνει και την πληροφορία του κατά πόσο η προϋπάρχουσα οικογένεια ευθειών μας είναι ή όχι γνωστή. Διακρίνουμε, λοιπόν, και μελετούμε δύο κύριες περιπτώσεις.

(α) Μάς είναι γνωστή, και

(β) Απλώς γνωρίζουμε ότι υπάρχει, δε γνωρίζουμε όμως ποια ακριβώς είναι αυτή.

Η πρώτη περίπτωση έχει ήδη μελετηθεί από τους G. Bozis και M.-C. Anisiu (βλ. [4]) και θα την εκθέσουμε εδώ εν συντομία. Τη δεύτερη περίπτωση τη μελετήσαμε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας.

2.1 Γνωστή οικογένεια ευθειών

Θεωρούμε γνωστή οικογένεια (1.1) ευθειών, με συνάρτηση κλίσης γ^*. Το δυναμικό που την παράγει, θα ικανοποιεί την εξίσωση (1.9) του Szebehely, η οποία γίνεται

$$V_x + \gamma^* V_y = 0 \tag{2.1}$$

αφού $\Gamma^* = 0$. Μια αδελφική προς αυτήν οικογένεια, θα χαρακτηρίζεται από μια συνάρτηση κλίσης $\gamma \neq \gamma^*$. Η εξίσωση τού Bozis, (1.12), σε συνδυασμό με την (2.1), μας δίνει

$$-V_{xx} + kV_{xy} + V_{yy} = (\mu - \lambda\gamma^*)V_y \tag{2.2}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

$\gamma^* = 0$ Η διδόμενη οικογένεια αποτελείται από ευθείες παράλληλες στον άξονα Oy. Η εξίσωση (2.1) δίνει $V_x = 0 \Rightarrow V = v(y)$ και η (2.2) γίνεται $\frac{V_{yy}}{V_y} = \mu$. Για την αδελφική οικογένεια $\gamma(x, y)$ που συνυπάρχει με την οικογένεια ευθειών $\gamma^*(x, y)$ σε ένα τέτοιο δυναμικό θα ισχύει

$$\mu_x = 0 \tag{2.3}$$

$\gamma^* \neq 0$ Παραγωγίζοντας την (2.1) προς x και y, παίρνουμε δύο δευτεροτάξιες ΔΕΜΠ. Μαζί με την (2.2), παίρνουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους, τα V_{xx}, V_{xy} και V_{yy}. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned} V_{xx} + \gamma^* V_{xy} &= -\gamma^*_x V_y \\ V_{xy} + \gamma^* V_{yy} &= -\gamma^*_y V_y \\ -V_{xx} + kV_{xy} + V_{yy} &= (\mu - \lambda\gamma^*)V_y \end{aligned} \tag{2.4}$$

Αντικαθιστώντας τα V_{xx} και V_{yy} από τις πρώτες δύο εξισώσεις στην τρίτη και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\gamma^*\gamma^*_x - \gamma^*_y = \Gamma^* = 0$, παίρνουμε

$$(1 - k\gamma^* - \gamma^{*2})V_{xy} = -\gamma^*(\mu - \lambda\gamma^*)V_y \tag{2.5}$$

Θέτουμε

$$1 - k\gamma^* - \gamma^{*2} = \delta \tag{2.6}$$

και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

1. $\delta = 0$
   Επειδή $\gamma \neq \gamma^*$ και $k = \frac{1-\gamma^2}{\gamma} = \frac{1-\gamma^{*2}}{\gamma^*}$, συμπεραίνουμε ότι $\gamma = -\frac{1}{\gamma^*}$. Από την (2.5) παίρνουμε $\mu - \lambda\gamma^* = 0$ και αντικαθιστώντας το γ με $-\frac{1}{\gamma^*}$, μετά από αρκετές πράξεις, παίρνουμε

   $$\gamma^*_{xx}(1 + \gamma^{*2})^2 = 0 \Rightarrow \gamma^*_{xx} = 0$$

   Επειδή επιπλέον ισχύει και $\gamma^*\gamma^*_x - \gamma^*_y = 0$ έχουμε μια ειδική οικογένεια ευθειών

   $$\gamma^* = -\frac{x + c_1}{y + c_2} \tag{2.7}$$

   Το δυναμικό που την παράγει βρίσκεται από την (2.1) και είναι το

   $$V = v\left(\frac{x^2 + y^2}{2} + c_1 x + c_2 y\right) \tag{2.8}$$

   όπου v αυθαίρετη συνάρτηση του ορίσματος $\frac{x^2+y^2}{2} + c_1 x + c_2 y$.

2. $\delta \neq 0$
   Θέτουμε

   $$\begin{aligned} \delta_1 &= (\mu - \lambda\gamma^*)\gamma^{*2} - \delta\gamma^*_x \\ \delta_2 &= -(\mu - \lambda\gamma^*)\gamma^* \\ \delta_3 &= \mu - \lambda\gamma^* - \delta\gamma^*_x \end{aligned} \tag{2.9}$$

οπότε, από το συστημα (2.4) παίρνουμε τους λόγους

$$\frac{V_{xx}}{V_y} = \frac{\delta_1}{\delta}, \qquad \frac{V_{xy}}{V_y} = \frac{\delta_2}{\delta} \qquad \text{και} \qquad \frac{V_{yy}}{V_y} = \frac{\delta_3}{\delta} \tag{2.10}$$

Από τις συνθηκες συμβατότητας μεταξύ των (2.10) και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν και την (2.1), έχουμε:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta_1}{\delta\gamma^*}\right)_y &= \left(\frac{\delta_2}{\delta\gamma^*}\right)_x \\ \left(\frac{\delta_2}{\delta}\right)_y &= \left(\frac{\delta_3}{\delta}\right)_x \end{aligned} \tag{2.11}$$

Οι δύο αυτές συνθήκες, καταλήγουν σε μία μόνο συνθήκη, την εξής:

$$\left(\frac{\mu - \lambda\gamma^*}{\delta}\right)_x = \left(\frac{\gamma^*_x}{\gamma^*} - \frac{(\mu - \lambda\gamma^*)\gamma^*}{\delta}\right)_y \tag{2.12}$$

Τα λ και μ αναφέρονται στην ελεγχόμενη οικογένεια και δίνονται από τις (1.13) Εφόσον η οικογένεια με συνάρτηση κλίσης γ ικανοποιεί την (2.12), προχωρούμε και, από τις (2.10β,γ), παίρνουμε το V_y (με αυθαιρεσία μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς) Στη συνέχεια, από την (2.1), βρίσκουμε το V_x. Το δυναμικό που βρίσκουμε έτσι, ικανοποιεί και την (2.1) και την (2.2), άρα οι γ και γ^* συνυπάρχουν και μάς 'αποκαλύπτουν' και το δυναμικό που τις δημιουργεί.

Παράδειγμα 1

Ερωτάται: Είναι η οικογένεια των κύκλων $\gamma = \frac{y}{x}$ συμβατή με την (παρατηρούμενη) οικογένεια ευθειών $\gamma^* = -\frac{x}{y}$; Αν ναι, ποιο δυναμικό παράγει τις δύο οικογένειες;
Απαντούμε: Από τη (2.7) φαίνεται ότι η διδόμενη (παρατηρούμενη) οικογένεια αντιστοιχεί σε $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Εξάλλου, $\gamma = -\frac{1}{\gamma^*}$, δηλαδή $\delta = 0$. Σύμφωνα με τη (2.8), και όπως αναμένεται να βρεθεί, οι δύο οικογένειες είναι συμβατές και παράγονται από το (κεντρικό) δυναμικό $V = v(x^2 + y^2)$.

Παράδειγμα 2

Ερωτάται: Είναι οι οικογένειες $\gamma^* = -\frac{x}{y}$ και $\gamma = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ (που αντιπροσωπεύει τις παραβολές $r\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = c$) συμβατές;
Απαντούμε: Σε αυτήν την περίπτωση είναι $\delta = \frac{x^2+y^2}{y^2}$. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα λ και μ και διαπιστώνουμε ότι ισχύει η συνθήκη συμβατότητας (2.12). Συμπεραίνουμε ότι οι δύο οικογένειες είναι συμβατές. Τέλος, από τις εξισώσεις (2.11) βρίσκουμε ότι το δυναμικό που τις δημιουργεί είναι το Νευτώνειο $V = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Αντιπαραδείγματα

Μπορεί να ελεγχθεί ότι η συνθήκη (2.12) δεν ισχύει για το ζεύγος οικογενειών $\gamma^* = -\frac{x}{y}$ και $\gamma = \frac{2y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$, ότι, δηλαδή, οι δύο αυτές οικογένειες δεν είναι δυνατό να συνυπάρχουν.

Επίσης, μπορεί να ελεγχθεί ότι οι οικογένειες $\gamma^* = -\frac{x}{y}$ και $\gamma = -\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$ συνυπάρχουν μεν (ικανοποιείται η (2.12)), αλλά δε δημιουργούνται από το Νευτώνειο δυναμικό $V = -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (δεν ικανοποιείται, για παράδειγμα, η (2.11α)).

2.2 Άγνωστη οικογένεια ευθειών

Το ερώτημα που τίθεται είναι: Τι άλλες οικογένειες τροχιών (εκτός από ευθείες) παράγει ένα ευθειοπαραγωγό δυναμικό; Γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι το Νευτώνειο δυναμικό

$$V(x,y) = -\frac{1}{r} \tag{2.13}$$

το οποίο **είναι** ευθειοπαραγωγό (ελέγχεται αμέσως ότι ικανοποιεί την εξίσωση (1.14)), εκτός από τις ευθείες, παράγει και την τριπαραμετρική οικογένεια κωνικών τομών

$$r = \frac{\alpha(1-e^2)}{1+e\cos(\theta-\theta_0)}$$

όπου α ο μεγάλος ημιάξονας, e η εκκεντρότητα και θ_0 είναι η γωνία που σχηματίζει με τον πολικό άξονα η διεύθυνση τού περιηλίου τής τροχιάς.
Στην τριπαραμετρική αυτή οικογένεια, θέτοντας $\theta_0 = 0$ και $e = \frac{1}{2}$, παίρνουμε την μονοπαραμετρική οικογένεια ελλείψεων

$$r = \frac{\frac{3}{4}\alpha}{1+\frac{1}{2}\cos\theta} \tag{2.14}$$

με παράμετρο το μεγάλο ημιάξονα, α, όλων των κωνικών τομών (2.14). Επειδή $\cos\theta = \frac{x}{r}$ και $r = \sqrt{x^2+y^2}$, η οικογένεια (2.14) έρχεται στη μορφή

$$f(x,y) = x + 2\sqrt{x^2+y^2} = c \tag{2.15}$$

Οι Καρτεσιανές συντεταγμένες αναφέρονται σε σύστημα με αρχή τη μία εστία της έλλειψης.
Στην οικογένεια (2.15) αντιστοιχεί συνάρτηση κλίσης

$$\gamma(x,y) = \frac{2y}{2x+\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.16}$$

Το παράδειγμα αυτό το χρησιμοποιούμε ως οδηγό στη σχετική θεωρία. Οι διαδοχικοί, ενδιάμεσοι τύποι που προκύπτουν, ελέγχονται με βάση αυτό το παράδειγμα. Στα αρχικά βήματα, υποθέτουμε σιωπηρά ότι **και** το δυναμικό (2.13) **και** η οικογένεια (2.14) μας είναι γνωστά, τελικά, όμως, το ερώτημα θα τεθεί -και θα απαντηθεί- με δεδομένη **μόνο την οικογένεια**:
'Προκύπτει αυτή η οικογένεια από κάποιο ευθειοπαραγωγό δυναμικό, και ποιό είναι αυτό το δυναμικό;' Όταν το δυναμικό βρεθεί, στο ερώτημα 'Ποια είναι η αδελφική οικογένεια ευθειών προς την οικογένεια (2.14);' η απάντηση δίνεται από τον τύπο (1.15).

2.2.1 Δημιουργία τού συστήματος

Δεδομένης μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας τροχιών, η εξίσωση (1.12), εφόσον, βέβαια, μπορεί να λυθεί, μάς δίνει όλα τα δυναμικά τα οποία μπορούν να την παράγουν. Από αυτά τα δυναμικά, μόνο όσα ικανοποιούν και την (1.14) είναι ευθειοπαραγωγά. Έτσι, για να βρούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται ώστε η οικογένεια τροχιών να προέρχεται από κάποιο ευθειοπαραγωγό δυναμικό, πρέπει να λύσουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων

$$\begin{aligned} -V_{xx} + kV_{xy} + V_{yy} &= \lambda V_x + \mu V_y \\ V_x V_y (V_{xx} - V_{yy}) &= (V_x^2 - V_y^2) V_{xy} \end{aligned} \tag{2.17}$$

Έχουμε δύο ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης, με άγνωστη μία συνάρτηση $V(x, y)$ δύο μεταβλητών. Στην πρώτη από αυτές οι συντελεστές k, λ και μ εξαρτώνται από την τροχιά και δίνονται από τις σχέσεις (1.13).

Γενικά, το σύστημα (2.17) δεν αναμένεται να είναι συμβατό. Γνωρίζουμε, όμως, ότι για κάποιες οικογένειες $\gamma(x, y)$, κάποια από τα δυναμικά που τις δημιουργούν είναι ευθειοπαραγωγά, πράγμα που σημαίνει ότι, σε κάποιες περιπτώσεις, το σύστημα είναι συμβατό. Αυτές ακριβώς τις περιπτώσεις θέλουμε να βρούμε.

Από πλευράς άλγεβρας, οι **δύο** εξισώσεις (2.17) δεν είναι αρκετές για να εκφράσουμε τις **τρεις** παραγώγους V_{xx}, V_{xy} και V_{yy} συναρτήσει παραγώγων πρώτης τάξης και να συνεχίσουμε. Για το λόγο αυτό, παραγωγίζουμε ως προς x και y κάθε μία από τις εξισώσεις (2.17) και δημιουργούμε ένα νέο σύστημα τεσσάρων εξισώσεων με τέσσερις αγνώστους (V_{xxx}, V_{xxy}, V_{xyy} και V_{yyy}). Λύνοντας αλγεβρικά αυτό το σύστημα ως προς τους τέσσερις αγνώστους παίρνουμε τις παραγώγους τρίτης τάξης του V συναρτήσει των x, y και των παραγώγων δεύτερης και πρώτης τάξης, δηλαδή:

$$\begin{aligned} V_{xxx} &= V_{xxx}(x, y, V_x, V_y, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}) \\ V_{xxy} &= V_{xxy}(x, y, V_x, V_y, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}) \\ V_{xyy} &= V_{xyy}(x, y, V_x, V_y, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}) \\ V_{yyy} &= V_{yyy}(x, y, V_x, V_y, V_{xx}, V_{xy}, V_{yy}) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Από τις συνθήκες συμβατότητας, έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{xxx}}{\partial y} &= \frac{\partial V_{xxy}}{\partial x} \\ \frac{\partial V_{xxy}}{\partial y} &= \frac{\partial V_{xyy}}{\partial x} \\ \frac{\partial V_{xyy}}{\partial y} &= \frac{\partial V_{yyy}}{\partial x} \end{aligned} \tag{2.19}$$

Στις εξισώσεις (2.19) αντικαθιστούμε τις παραγώγους τρίτης τάξης όπως αυτές προέκυψαν και εκφράστηκαν με τις (2.18). Έτσι, αναμένεται να προκύψουν τρεις νέες εξισώσεις, οι οποίες θα περιέχουν μερικές παραγώγους τού δυναμικού μέχρι και δεύτερης τάξης. Μας είναι, βέβαια, εκ των προτέρων άγνωστο το κατά πόσο αυτές οι τρεις ΔΕΜΠ θα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

Εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις με τη βοήθεια της Mathematica, διαπιστώνουμε ότι η δεύτερη από τις εξισώσεις (2.19) ικανοποιείται ταυτοτικά (δεν προσφέρει, λοιπόν, καμία

πληροφορία), ενώ η πρώτη και η τρίτη οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα. Πρόκειται για μια ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης και μάλιστα μη γραμμική και αρκετά εκτενή. Ισχυρή ένδειξη της ορθότητάς της είναι ότι ικανοποιείται από το παράδειγμα-οδηγό που προαναφέραμε. Εξάλλου, η νέα εξίσωση είναι ανεξάρτητη από τις δύο προηγούμενες, όπως και αναμένεται. Δεν μπορεί, δηλαδή, να συνισχύουν οι (2.17), παρά μόνο υπό προϋποθέσεις, τις οποίες ακριβώς επιδιώκουμε να βρούμε. Τη νέα αυτή εξίσωση, ας την ονομάσουμε 'ΔΕΜΠ Ε1-3', για να θυμίζει ότι προέκυψε από την απαίτηση συμβατότητας των εξισώσεων (2.18) υπ′ αριθμόν 1 και 3.
Έτσι όπως εμφανίζεται αρχικά η Ε1-3 περιέχει παραγώγους V_{xx}, V_{xy} και V_{yy} μέχρι και τρίτου βαθμού (όπως π.χ. όρους $V_{xy}^2 V_{yy}$, $V_{xx}^2 V_{xy}$ κλπ.) με συντελεστές που εξαρτώνται, βέβαια, από παραγώγους πρώτης τάξης, αλλά ακόμη υψηλότερου βαθμού. Το αποτέλεσμα αυτό προοιωνίζεται πολύ δύσκολη τη συνέχιση του έργου από πλευράς μαθηματικών πράξεων. Πάντως, ή εξίσωση Ε1-3 είναι η μόνη που μπορεί να συμπληρώσει το σύστημα (2.17), το οποίο, μάλιστα, το ξαναγράφουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} -V_{xx} + kV_{xy} + V_{yy} &= \lambda V_x + \mu V_y \\ -V_{xx} + LV_{xy} + V_{yy} &= 0 \end{aligned}$$

όπου

$$L = \frac{V_x^2 - V_y^2}{V_x V_y} \tag{2.20}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις έχουμε:

$$(k - L)V_{xy} = \lambda V_x + \mu V_y \tag{2.21}$$

Το σύστημα που θα λύσουμε θα είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} -V_{xx} + LV_{xy} + V_{yy} &= 0 \\ (k - L)V_{xy} &= \lambda V_x + \mu V_y \\ \text{ΔΕΜΠ Ε1-3} & \end{aligned} \tag{2.22}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις (2.22) λύνουμε ως προς V_{xy} και V_{yy} και παίρνουμε:

$$V_{xy} = \frac{\lambda V_x + \mu V_y}{k - L} \tag{2.23}$$

και

$$V_{yy} = V_{xx} - L\frac{\lambda V_x + \mu V_y}{k - L} \tag{2.24}$$

Εισάγουμε τις (2.23) και (2.24) στην τρίτη εξίσωση (2.22) (δηλαδή στην ΔΕΜΠ Ε1-3) και παίρνουμε μια εξίσωση με μόνο άγνωστο το V_{xx}. Οι συντελεστές του V_{xx} είναι συναρτήσεις των x, y και των παραγώγων πρώτης τάξης τού δυναμικού, V_x και V_y. Εκείνο, όμως, το οποίο μειώνει εξαιρετικά τις επίπονες πράξεις που ακολουθούν, είναι το γεγονός ότι η εξίσωση ως προς V_{xx} που τελικά προκύπτει είναι **δεύτερου** (και όχι τρίτου) βαθμού.

2.2.2 Λύση τής εξίσωσης με άγνωστο το V_{xx}

Συγκεκριμένα, με χρήση της Mathematica, προκύπτει ότι η προς λύση εξίσωση E1-3 είναι της μορφής

$$s_2 V_{xx}^2 + s_1 V_{xx} + s_0 = 0 \tag{2.25}$$

με

$$\begin{aligned} s_0 &= s_0(x, y, V_x, V_y) \\ s_1 &= s_1(x, y, V_x, V_y) \\ s_2 &= s_2(x, y, V_x, V_y) \end{aligned}$$

η λύση της οποίας δίνεται από τη γνωστή σχέση

$$V_{xx} = \frac{-s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 4s_2 s_0}}{2s_2} \tag{2.26}$$

Η εξίσωση (2.25) είναι, βεβαίως, ένα κομβικό αποτέλεσμα. Για το λόγο αυτό, ως ισχυρή ένδειξη της ορθότητας των πράξεων που γίναν ως εδώ και της συγκεκριμένης εξίσωσης, την επαληθεύσαμε και αυτή για το παράδειγμα που αναφέρθηκε στην αρχή τής παραγράφου §2.2. Στην επαλήθευση αυτή, σιωπηρά δεχόμαστε ότι *και* το δυναμικό είναι γνωστό, ενώ σκοπός μας είναι, με μόνη δεδομένη την οικογένεια τροχιών, να απαντήσουμε στο ερώτημα του κατά πόσο το δυναμικό που την παράγει είναι ευθειοπαραγωγό και ποιο είναι αυτό.

Προκύπτει, επίσης, ότι, ως προς τις μεταβλητές V_x και V_y, η s_0 είναι ομογενής βαθμού 9, η s_1 ομογενής βαθμού 8 και η s_2 ομογενής βαθμού 7. Έτσι, για παράδειγμα, ο συντελεστής s_2 είναι της μορφής

$$s_2 = s_{27}V_x^7 + s_{26}V_x^6 V_y + s_{25}V_x^5 V_y^2 + \ldots + s_{21}V_x V_y^6 + s_{20}V_y^7 \tag{2.27}$$

όπου

$$\begin{aligned} s_{27} &= -2(k\lambda + \mu) \\ s_{26} &= 2(2k^2\lambda - 3\lambda + 2k\mu) \\ s_{25} &= 2(8k\lambda - k^3\lambda - \mu - k^2\mu) \\ s_{24} &= 10[\lambda(k^2 - 1) - k\mu] \\ s_{23} &= -10(k\lambda - \mu + k^2\mu) \\ s_{22} &= -2[(1 + k^2)\lambda - k\mu(k^2 - 8)] \\ s_{21} &= 2(2k^2\mu - 2k\lambda - 3\mu) \\ s_{20} &= 2(k\mu - \lambda) \end{aligned} \tag{2.28}$$

Αντίστοιχες εκφράσεις έχουμε και για τους συντελεστές s_1 και s_0.

$$\begin{aligned} s_1 &= s_{18}V_x^8 + s_{17}V_x^7 V_y + s_{16}V_x^6 V_y^2 + \ldots + s_{11}V_x V_y^7 + s_{10}V_y^8 \\ s_0 &= s_{09}V_x^9 + s_{08}V_x^8 V_y + s_{07}V_x^7 V_y^2 + \ldots + s_{01}V_x V_y^8 + s_{00}V_y^9 \end{aligned}$$

Η ομογένεια ως προς V_x και V_y των συντελεστών s_2, s_1 και s_0 της δευτεροβάθμιας (ως προς V_{xx}) εξίσωσης (2.25) δε μας είναι αδιάφορη, αφού, από την (2.26), προκύπτει ότι η λύση θα είναι ομογενής συνάρτηση βαθμού 1 ως προς V_x, V_y.[i] Την πληροφορία αυτή την εκμεταλλευόμαστε ως εξής: Θέτουμε

$$\rho = \frac{V_y}{V_x} \tag{2.29}$$

[i]Ο αριθμητής θα προκύψει ομογενής συνάρτηση βαθμού 8 και ο παρονομαστής ομογενής βαθμού 7.

και σπεύδουμε να πούμε ότι αυτός ο λόγος ρ θα παίξει ένα διαμεσολαβητικό ρόλο στην ανάλυση που ακολουθεί. Όπως φαίνεται από την εξίσωση (2.1), σχετίζεται ουσιαστικά με τη συνάρτηση κλίσης γ^* της οικογένειας ευθειών, την οποία τώρα **δε θεωρούμε δεδομένη**, αλλά απλώς **δεχόμαστε ότι υπάρχει**.
Πράγματι, με την εισαγωγή του ρ, οι συναρτήσεις s_i $(i = 0, 1, 2)$ μπορούν να γραφούν ως εξής:

$$s_2 = \sigma_2 V_x^7 \qquad s_1 = \sigma_1 V_x^8 \qquad s_0 = \sigma_0 V_x^9 \tag{2.30}$$

Οι τρεις νέες συναρτήσεις σ_2, σ_1 και σ_0 που μόλις εισαγάγαμε είναι πολυώνυμα ως προς ρ, βαθμού 7, 8 και 9 αντίστοιχα, με συντελεστές σ_{ij} που εξαρτώνται αποκλειστικά από τα x και y μέσω των στοιχείων k, λ και μ της οικογένειας και παραγώγων τους μέχρι και δεύτερης τάξης (ή, αλλιώς, μέχρι και τέταρτης τάξης ως προς γ).
Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \sigma_{27}\rho^7 + \sigma_{26}\rho^6 + \ldots + \sigma_{21}\rho + \sigma_{20} \\ \sigma_1 &= \sigma_{18}\rho^8 + \sigma_{17}\rho^7 + \ldots + \sigma_{11}\rho + \sigma_{10} \\ \sigma_0 &= \sigma_{09}\rho^9 + \sigma_{08}\rho^8 + \ldots + \sigma_{01}\rho + \sigma_{00} \end{aligned} \tag{2.31}$$

Συγκρίνοντας, για παράδειγμα, την πρώτη από τις εξισώσεις (2.31) με την εξίσωση (2.27), μπορούμε να εκφράσουμε τους συντελεστές σ_{2i} $(i = 0, 1, \ldots, 7)$ της σ_2 με τους συντελεστές s_{2i} $(i = 0, 1, \ldots, 7)$, όπως οι τελευταίοι δίνονται από την (2.28). Έχουμε, π.χ.

$$\begin{aligned} \sigma_{27} &= s_{20} \\ \sigma_{26} &= s_{21} \\ &\vdots \\ \sigma_{20} &= s_{27} \end{aligned} \tag{2.32}$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε και όλους τους συντελεστές σ_{1i} $(i = 0, 1, \ldots, 8)$ και σ_{0i} $(i = 0, 1, \ldots, 9)$. Δε θα τους παραθέσουμε εδώ, αλλά τους κρατούμε σε notebooks της Mathematica, και τους θεωρούμε εφεξής γνωστές συναρτήσεις της διδόμενης προς έλεγχο οικογένειας τροχιών $\gamma = \gamma(x, y)$. Ενδεικτικά, αναφέρουμε ότι, π.χ., $\sigma_{09} = s_{00} = -\mu_{xy}$, όπου το μ δίνεται από την (1.13γ).
Από την άλλη μεριά, η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης (2.25), με τη βοήθεια και των σχέσεων (2.30) μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$V_{xx} = \frac{-\sigma_1 + \epsilon\sqrt{\tau}}{2\sigma_2} V_x \tag{2.33}$$

όπου $\epsilon = \pm 1$ και

$$\tau = \sigma_1^2 - 4\sigma_0\sigma_2 \tag{2.34}$$

Η νέα συνάρτηση τ είναι ένα πολυώνυμο του ρ, βαθμού 16.

$$\tau = \tau_{16}\rho^{16} + \tau_{15}\rho^{15} + \ldots + \tau_1\rho + \tau_0 \tag{2.35}$$

με συντελεστές τ_i που εξαρτώνται από την οικογένεια $\gamma(x, y)$ και δίνονται συναρτήσει των συντελεστών σ_{ij}. Έτσι, παράδειγμα, $\tau_{16} = \sigma_{18} - 4\sigma_{09}\sigma_{27}$. Τους συντελεστές τ_i, για διδόμενη οικογένεια, τους θεωρούμε επίσης γνωστούς και τους φυλάσσουμε στα notebooks μας.

Με τη βοήθεια του λόγου ρ εκφράζουμε επίσης τη συνάρτηση L που εισήχθη με την εξίσωση (2.20) και κληρονομήθηκε στις εξισώσεις (2.23) και (2.24). Είναι

$$L = \frac{1-\rho^2}{\rho} \tag{2.36}$$

2.2.3 Το σύστημα των τριών ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης

Στην §2.2.1 είχαμε γράψει τις δύο ΔΕΜΠ πρώτης τάξης (2.17) και ζητήσαμε να βρούμε τις συνθήκες συμβατότητας των δύο αυτών εξισώσεων. Ως τέτοια συνθήκη βρέθηκε η μοναδική ΔΕΜΠ (2.25), η οποία είναι επίσης δεύτερης τάξης ως προς το δυναμικό $V(x,y)$. Έχουμε, λοιπόν, τώρα στη διάθεσή μας το σύστημα των τριών ΔΕΜΠ (2.33), (2.23) και (2.24). Αυτό το σύστημα, με τη βοήθεια και του λόγου ρ, το γράφουμε ως εξής:

$$\begin{aligned} V_{xx} &= AV_x \\ V_{xy} &= BV_x = \frac{B}{\rho}V_y \\ V_{yy} &= CV_x = \frac{C}{\rho}V_y \end{aligned} \tag{2.37}$$

όπου, σύμφωνα με την (2.33), έχουμε

$$A = \frac{-\sigma_1 + \epsilon\sqrt{\tau}}{2\sigma_2}, \qquad \epsilon = \pm 1 \tag{2.38}$$

Σύμφωνα με τις (2.23), (2.29) και (2.36), γράφουμε το B ως

$$B = \frac{\lambda\rho + \mu\rho^2}{\rho^2 + k\rho - 1} \tag{2.39}$$

Επίσης, σύμφωνα με τις (2.24), (2.29) και (2.36), γράφουμε το C ως

$$C = A - \frac{L(\lambda + \mu\rho)}{k - L} \tag{2.40}$$

Οι τρεις συναρτήσεις A, B και C εξαρτώνται από την οικογένεια και από παραγώγους πρώτης τάξης τού δυναμικού, μέσω του λόγου ρ. Για τη συνάρτηση B η εξάρτηση είναι σχετικά απλή: Πρόκειται για μια ρητή συνάρτηση του ρ, ένα λόγο δύο τριωνύμων δεύτερου βαθμού ως προς ρ. Η συνάρτηση A εισάγει μια τετραγωνική ρίζα ενός πολυωνύμου βαθμού 16 ως προς ρ, όπως φαίνεται στην (2.34). Τέλος, η συνάρτηση C, στην (2.40), μπορεί και πρέπει να γραφεί ως εξής:

$$C = \frac{C_1 + \epsilon C_2\sqrt{\tau}}{C_0} \tag{2.41}$$

όπου

$$\begin{aligned} C_1 &= -(\rho^2 + k\rho - 1)\sigma_1 - 2(1-\rho^2)(\lambda + \mu\rho)\sigma_2 \\ C_2 &= \rho^2 + k\rho - 1 \\ C_0 &= 2(\rho^2 + k\rho - 1)\sigma_2 \end{aligned} \tag{2.42}$$

Χρειάζεται τώρα να διαπιστώσουμε, με τη βοήθεια των (2.31), ότι οι μερικότερες συναρτήσεις C_1, C_2 και C_0 (με τη βοήθεια των οποίων βρίσκεται η C) είναι πολυώνυμα του ρ, βαθμού 10, 2 και 9 αντίστοιχα. Είναι δηλαδή:

$$\begin{aligned} C_1 &= C_{110}\rho^{10} + C_{19}\rho^9 + \ldots + C_{11}\rho + C_{10} \\ C_2 &= \rho^2 + k\rho - 1 \\ C_0 &= C_{09}\rho^9 + C_{08}\rho^8 + \ldots + C_{01}\rho + C_{00} \end{aligned} \tag{2.43}$$

Είναι φανερό ότι οι C_{1i}, $(i = 0, 1 \ldots 10)$ και C_{0i}, $(i = 0, 1 \ldots 9)$ εξαρτώνται αποκλειστικά από την προς έλεγχο οικογένεια $\gamma(x, y)$ και εκφράζονται με τη βοήθεια των γνωστών ήδη συντελεστών σ_{ij} $(i = 0, 1, 2)$ που χρησιμοποιήθηκαν στις σχέσεις (2.31) και που, όπως προαναφέρθηκε, φυλάσσονται σε notebooks τής Mathematica. Είναι, για παράδειγμα, $C_{110} = -\sigma_{18} + 2\mu\sigma_{27}$ και $C_{09} = 2\sigma_{27} = 4(k\mu - \lambda)$.

Είναι φανερό ότι ότι οι πράξεις έχουν βαρύνει πολύ, ακόμα και για ένα πρόγραμμα όπως η Mathematica. Και αυτό για ένα ερώτημα που ακούγεται μάλλον απλό και που είναι, βέβαια, βάσιμο, έχει, δηλαδή, νόημα και είναι επιτρεπτό:

'Για ποιες οικογένειες $\gamma(x, y)$ συμβαίνει να έχουν κάποια κοινή λύση οι δύο ΔΕΜΠ (2.17) και ποια είναι αυτή η κοινή λύση;'

Δε θα φιλοδοξούσαμε, βέβαια, **να βρούμε** (όταν υπάρχουν) το σύνολο αυτών των οικογενειών $\gamma(x, y)$ και των συνοδών δυναμικών $V(x, y)$. Επιδιώκουμε, όμως, τουλάχιστον, να βρούμε τη συνθήκη (ή τις συνθήκες) που χρειάζεται να έχουμε στη διάθεσή μας, ώστε να απαντούμε σε ερωτήματα του τύπου '**Δίνεται μια συγκεκριμένη οικογένεια**. Παράγεται ποτέ αυτή οι οικογένεια από ευθειοπαραγωγό δυναμικό; Συνοδεύεται, δηλαδή, αυτή η διδόμενη οικογένεια $\gamma(x, y)$ από κάποια οικογένεια ευθειών;'

Προχωρούμε, λοιπόν, με αυτό το σκεπτικό, έχοντας μειώσει τις απαιτήσεις μας, όπως εξηγήσαμε.

2.2.4 Συμβατότητα του συστήματος

Πρώτη γραφή των συνθηκών συμβατότητας

Οι τρεις ΔΕΜΠ (2.37) με μοναδική άγνωστη συνάρτηση το δυναμικό $V(x, y)$ δεν αναμένεται να είναι, βέβαια, εν γένει συμβατές. Οι συντελεστές A, B και C εξαρτώνται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y άμεσα (μέσω της διδόμενης οικογένειας $\gamma(x, y)$) και έμμεσα (μέσω του λόγου $\rho = \frac{V_y}{V_x}$). Είναι αξιοσημείωτο ότι οι μερικές παράγωγοι ρ_x και ρ_y μπορούν να εκφραστούν (με τη βοήθεα και των συντελεστών A, B και C) και πάλι συναρτήσει του ίδιου του ρ.

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \rho_x &= \left(\frac{V_y}{V_x}\right)_x = \frac{V_{xy}V_x - V_{xx}V_y}{V_x^2} = \frac{V_{xy}}{V_x} - \frac{V_{xx}V_y}{V_x^2} = B - \rho A \\ \rho_y &= \left(\frac{V_y}{V_x}\right)_y = \frac{V_{yy}V_x - V_{xy}V_y}{V_x^2} = \frac{V_{yy}}{V_x} - \frac{V_{xy}V_y}{V_x^2} = C - \rho B \end{aligned} \tag{2.44}$$

Η συνθήκη συμβατότητας μεταξύ των δύο πρώτων εξισώσεων (2.37) είναι, προφανώς:

$$A_y = B_x \tag{2.45}$$

Αν η (2.45) ικανοποιείται, αυτές οι δύο εξισώσεις (οι δύο πρώτες των (2.37)) μάς επιτρέπουν να βρούμε τις παραγώγους $(\ln V_x)_x$ και $(\ln V_x)_y$ και, κατά συνέπεια, μάς επιτρέπουν να βρούμε το $\ln V_x$ (κατά προσέγγιση μιας προσθετικής σταθεράς).
Με παρόμοιο τρόπο, μπορούμε να βρούμε το $\ln V_y$ από τη δεύτερη και τρίτη εξίσωση (2.37), εφ΄ όσον, βέβαια, εξασφαλίσουμε ότι και αυτές είναι συμβατές. Για το σκοπό αυτό, γράφουμε αυτές τις εξισώσεις ως

$$V_{xy} = \frac{B}{\rho} V_y \qquad \text{και} \qquad V_{yy} = \frac{C}{\rho} V_y \tag{2.46}$$

και, από τη συνθήκη συμβατότητάς τους, $\left(\frac{B}{\rho}\right)_y = \left(\frac{C}{\rho}\right)_x$, με τη βοήθεια των (2.44), παίρνουμε:

$$B_y + B^2 = C_x + CA \tag{2.47}$$

Οι σχέσεις (2.45) και (2.47) είναι ικανές και αναγκαίες συνθήκες ώστε να είναι συμβατό το σύστημα (2.37) και, όπως εξηγήσαμε, να μπορούμε να υπολογίσουμε τα V_x και V_y (κατά προσέγγιση μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς, δηλαδή, τελικά, να βρούμε το δυναμικό $V(x, y)$ (κατα προσέγγιση μιας προσθετικής και μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς). Οι σχέσεις αυτές έχουν επίσης επαληθευτεί για το παράδειγμα που αναφέρθηκε στην αρχή τής παραγράφου §2.2.
Διευκρινίζεται ότι οι (2.45) και (2.47) δεν είναι οι οριστικές συνθήκες συμβατότητας για το πρόβλημά μας, όπως το θέσαμε. Διότι αυτές συνεχίζουν να έχουν τη μεταβλητή ρ, δηλαδή το επίσης άγνωστο σε εμάς δυναμικό $V(x, y)$
Επίσης, είναι απαραίτητη η εξής διευκρίνιση: Η συνθήκη (2.47) βρέθηκε από τις (2.46) με παραγώγιση των κλασμάτων $\frac{B}{\rho}$ και $\frac{C}{\rho}$ (ως προς y και x αντίστοιχα) μέσω του ρ, μόνο όσον αφορά την *άμεση παρουσία του* ρ (ώστε να φύγουν οι παρονομαστές ρ^2) και όχι την παρουσία του ρ μέσω των B και C. Επομένως, οι παράγωγοι A_y, B_x, B_y και C_x που εμφανίζονται στις (2.45) και (2.47) είναι ολικές παράγωγοι, δηλαδή πρέπει κατά τον υπολογισμό τους να ληφθεί υπ΄ όψιν και η εξάρτηση των A, B και C από τα x και y μέσω του ρ.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα, οι συνθήκες (2.45) και (2.47) γράφονται ως εξής:

$$\widetilde{A_y} + A'\rho_y = \widetilde{B_x} + B'\rho_x \tag{2.48}$$

και

$$\widetilde{B_y} + B'\rho_y + B^2 = \widetilde{C_x} + C'\rho_x + CA \tag{2.49}$$

όπου η περισπωμένη αναφέρεται στην άμεση παραγώγιση ως προς x και y και ο τόνος αναφέρεται στην παραγώγιση ως προς ρ.
Αν τώρα λάβουμε υπ΄ όψιν τις σχέσεις (2.44), οι δύο συνθήκες γράφονται, αντίστοιχα

$$\widetilde{A_y} - \widetilde{B_x} + (A'C - BB') = \rho(A'B - AB') \tag{2.50}$$

και

$$\widetilde{B_y} - \widetilde{C_x} + (B'C - BC') + (B^2 - CA) = \rho(BB' - AC') \tag{2.51}$$

Απαλλαγή από την άρρητη παράσταση $\sqrt{\tau}$

Σ΄ αυτή την τελευταία μορφή που γράφηκαν οι δύο συνθήκες, συνεχίζουν να εμφανίζουν το ρ μέσω ρητών εκφράσεων, όπως τα B, $\widetilde{B_x}$, $\widetilde{B_y}$, B', αλλά και μέσω της $\sqrt{\tau}$, λόγω της

παρουσίας των A και C. Θα επιδιώξουμε, λοιπόν, στη συνέχεια, να απαλλαγούμε από την $\sqrt{\tau}$ και να παρουσιάσουμε τις (2.50) και (2.51) ως δύο πολυωνυμικές εξισώσεις του ρ, κάποιου -έστω πολύ υψηλού- βαθμού.
Για το σκοπό αυτό, πρώτα ετοιμάζουμε, με βάση την εξίσωση (2.38), τις παραγώγους $\widetilde{A_y}$ και A'. Είναι:

$$\widetilde{A_y} = \widetilde{a}_1 + \epsilon \widetilde{a}_0 \sqrt{\tau} \qquad \text{και} \qquad A' = a_1^* + \epsilon a_0^* \sqrt{\tau} \tag{2.52}$$

όπου

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_1 &= \frac{\sigma_1 \sigma_{2y} - \sigma_{1y} \sigma_2}{2\sigma_2^2} \\ \widetilde{a}_0 &= \frac{\sigma_2 \tau_y - 2\tau \sigma_{2y}}{4\sigma_2^2 \tau} \\ a_1^* &= \frac{\sigma_1 \sigma_2' - \sigma_1' \sigma_2}{2\sigma_2^2} \\ a_0^* &= \frac{\sigma_2 \tau' - 2\tau \sigma_2'}{4\sigma_2^2 \tau} \end{aligned} \tag{2.53}$$

όπου, βέβαια, οι τόνοι δηλώνουν παραγώγιση ως προς ρ.
Αντίστοιχα, με βάση την (2.40), ετοιμάζουμε τα $\widetilde{C_x}$ και C'. Είναι:

$$\widetilde{C_x} = \widetilde{c}_1 + \epsilon \widetilde{c}_0 \sqrt{\tau} \qquad \text{και} \qquad C' = c_1^* + \epsilon c_0^* \sqrt{\tau} \tag{2.54}$$

όπου

$$\begin{aligned} \widetilde{c}_1 &= \frac{C_0 C_{1x} - C_1 C_{0x}}{C_0^2} \\ \widetilde{c}_0 &= \frac{C_0 C_2 \tau_x + 2\tau (C_0 C_{2x} - C_2 C_{0x})}{2\tau C_0^2} \\ c_1^* &= \frac{C_0 C_1' - C_1 C_0'}{C_0^2} \\ c_0^* &= \frac{C_0 C_2 \tau' + 2\tau (C_0 C_2' - C - 2C_0')}{2\tau C_0^2} \end{aligned} \tag{2.55}$$

Για τις παραγώγους $\widetilde{B_x}$, $\widetilde{B_y}$ και B' οι υπολογισμοί γίνονται με βάση την (2.39), που είναι ήδη ρητή συνάρτηση του ρ. Έχουμε:

$$\begin{aligned} \widetilde{B_x} &= \frac{\beta_4(\rho)}{(\rho^2 + k\rho - 1)^2} \\ \widetilde{B_y} &= \frac{b_4(\rho)}{(\rho^2 + k\rho - 1)^2} \\ B' &= \frac{B_3(\rho)}{(\rho^2 + k\rho - 1)^2} \end{aligned} \tag{2.56}$$

όπου τα $\beta_4(\rho)$ και $b_4(\rho)$ είναι πολυώνυμα του ρ τετάρτου βαθμού, με συντελεστές εξαρτώμενους από το γ και παραγώγους του μέχρι και τρίτης τάξης, και το $B_3(\rho)$ είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού με συντελεστές που έχουν μέχρι και δεύτερης τάξης παραγώγους του γ.
Σε αυτό το στάδιο που επιχειρούμε να απαλλαγούμε από το $\sqrt{\tau}$, κρατούμε το B και τις παραγώγους $\widetilde{B_x}$, $\widetilde{B_y}$ και B' ως έχουν.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις (2.38), (2.40), (2.53) και (2.55) στις δύο συνθήκες (2.50) και (2.51), γράφουμε αυτές τις δύο συνθήκες, αντίστοιχα, στη μορφή:

$$\epsilon p_1\sqrt{\tau} + p_0 = 0 \tag{2.57}$$

όπου

$$\begin{aligned} p_1 &= [\rho B' + 2\sigma_2(\widetilde{a_0} - Ba_0^*)]C_0 + 2\sigma_2(a_0^* C_1 + a_1^* C_2) \\ p_0 &= [-B'\rho\sigma_1 + 2\sigma_2(\widetilde{a_1} - a_1^*\rho B - BB' - \widetilde{B_x})]C_0 + 2\sigma_2(a_1^* C_1 + a_0^* C_2) \end{aligned} \tag{2.58}$$

και

$$\epsilon q_1\sqrt{\tau} + q_0 = 0 \tag{2.59}$$

όπου

$$\begin{aligned} q_1 &= [(c_1^* - c_0^*\sigma_1)\rho - 2\sigma_2(\widetilde{c_0} + Bc_0)]C_0 - C_1 + (\sigma_1 + 2B'\sigma_2)C_2 \\ q_0 &= [(c_0^*\tau - \sigma_1 c_1^*)\rho - 2\sigma_2(B^2 + \widetilde{B_y} - Bc_1^* - \widetilde{c_1} - BB'\rho)]C_0 + \\ &\qquad + (\sigma_1 + 2\sigma_2 B')C_1 - \tau C_2 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Τελικά, υψώνουμε τις δύο εξισώσεις (2.57) και (2.59) στο τετράγωνο, και παίρνουμε:

$$\begin{aligned} p_1^2\tau - p_0^2 = 0 \\ q_1^2\tau - q_0^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.61}$$

Στη μορφή (2.61), οι δύο εξισώσεις δεν έχουν πλέον άρρητο μέρος, συνεχίζουν, όμως, να είναι αθροίσματα ρητών (ως προς ρ, πάντοτε) εκφράσεων. Όπως φαίνεται από τις (2.58) και (2.60), παρονομαστές εισάγουν το B και οι παράγωγοί του, $\widetilde{B_x}$, $\widetilde{B_y}$ και B' (σχέση (2.39)), τα $\widetilde{a_1}$, $\widetilde{a_0}$, a_1^*, a_0^* (σχέσεις (2.53)) και τα $\widetilde{c_1}$, $\widetilde{c_0}$, c_1^* και c_0^* (σχέσεις (2.55)).
Πάντα με τη βοήθεια της Mathematica, απαλλασσόμαστε από όλους αυτούς τους παρονομαστές και οδηγούμαστε τελικά σε *δύο αλγεβρικές, ως προς ρ, εξισώσεις*, με συντελεστές που εξαρτώνται από την οικογένεια η οποία μας δίδεται για να ελέγξουμε κατά πόσο προκύπτει από ευθειοπαραγωγό δυναμικό.
Οι δύο σχέσεις (2.61) είναι η μετεξέλιξη των δύο συνθηκών (2.45) και (2.47). Είναι, βέβαια, απλούστερες (αλλά όχι λιγότερο εκτενείς) από τις (2.45) και (2.47) κατά το ότι είναι δύο πολυωνυμικές εξισώσεις ως προς ρ. Ο βαθμός καθενός από αυτά τα πολυώνυμα θα μπορούσε να είναι πολύ υψηλός (της τάξης τού 100). Κατά περίπτωση τής προς έλεγχο οικογένειας $\gamma(x, y)$, θα μπορούσε να είναι και αρκετά χαμηλότερος. Αυτό εξαρτάται από τα p_0, q_0, p_1 και q_1, τα οποία, με τη σειρά τους, εξαρτώνται από το $\gamma(x, y)$.
Παρακολουθώντας, στη συνέχεια, μόνο εννοιολογικά το θέμα μας, καταλήγουμε στο εξής: Αν, για την ελεγχόμενη οικογένεια, οι εξισώσεις (2.61) δεν έχουν καμία κοινή ρίζα, τότε, η υπ΄ όψιν οικογένεια δε συνυπάρχει (σε κανένα από τα άπειρα δυναμικά που την παράγουν) με οικογένεια ευθειών. Αν, όμως, οι δύο εξισώσεις (2.61) έχουν μία (ή ενδεχομένως περισσότερες) κοινή ρίζα, τότε υπάρχει δυναμικό (ή δυναμικά), ευθειοπαραγωγό που υιοθετεί την υπ΄ όψιν οικογένεια. Το δυναμικό αυτό (κατά προσέγγιση πάντοτε μιας πολλαπλασιαστικής και μιας προσθετικής σταθεράς) βρίσκεται με τη βοήθεια τών σχέσεων (2.37).
Ένα παράπλευρο συμπέρασμα αυτής της μελέτης είναι το εξής: Διδόμενη προς έλεγχο οικογένεια $\gamma(x, y)$ είτε δε συνυπάρχει ποτέ με οικογένεια ευθειών, είτε συνυπάρχει με

πεπερασμένο πλήθος τέτοιων οικογενειών, διότι, βέβαια, το πλήθος των κοινών ριζών τών (2.61) είναι πεπερασμένο. Η παρατήρηση αυτή, πρέπει να παραβληθεί με το δεδομένο ότι, γενικά, δοθείσα οικογένεια τροχιών παράγεται από μια 'διπλή απειρία' δυναμικών.
Μένει, λοιπόν, να αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα του κατά πόσο οι εξισώσεις (2.61) έχουν ή όχι κοινές ρίζες και, επιπλέον, μένει το πρόβλημα τής εύρεσης αυτών των ριζών. Ο έλεγχος αυτός γίνεται με τη βοήθεια τής απαλείφουσας (eliminant, βλ. [9], σελ. 164) των δύο αλγεβρικών εξισώσεων με άγνωστο το ρ, ή, όπως μερικές φορές αναφέρεται, τής λεγόμενης **ορίζουσας του Sylvester**.
Συγκεκριμένα, θεωρούμε δύο αλγεβρικές εξισώσεις, βαθμών n και s αντίστοιχα, με άγνωστη τη μεταβλητή ρ.

$$\begin{aligned} \alpha_n\rho^n + \alpha_{n-1}\rho^{n-1} + \ldots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \\ \beta_s\rho^s + \beta_{s-1}\rho^{s-1} + \ldots + \beta_1\rho + \beta_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.62}$$

(με $\alpha_n \neq 0$, $\beta_s \neq 0$) και σχηματίζουμε την ορίζουσα $(n+s)\times(n+s)$

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_n & \alpha_{n-1} & \ldots & \alpha_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n & \ldots & \alpha_1 & \alpha_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_n & \ldots & \alpha_1 & \alpha_0 \\ \beta_s & \beta_{s-1} & \ldots & \beta_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_s & \ldots & \beta_1 & \beta_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \beta_s & \ldots & \beta_1 & \beta_0 \end{vmatrix} \tag{2.63}$$

Γενικά, η ορίζουσα R (που ονομάζεται ορίζουσα τού Sylvester) είναι διάφορη τού μηδενός. Αν, όμως, συμβαίνει να μηδενίζεται, τότε (και μόνο τότε) οι δύο εξισώσεις (2.62) έχουν μία τουλάχιστον κοινή ρίζα. Η συνθήκη αυτή, στην περίπτωσή μας, εξαρτάται μόνο από την οικογένεια, πράγμα που σημαίνει ότι μπορούμε αμέσως να ελέγξουμε αν επαληθεύεται για κάποια διδόμενη οικογένεια. Το δυναμικό το οποίο παράγει τις δύο οικογένειες (τη διδόμενη και την οικογένεια ευθειών), σχετίζεται με τις κοινές ρίζες τών δύο εξισώσεων (2.61) και βρίσκεται με τον παρακάτω τρόπο:
Αφού επιβεβαιώσουμε ότι οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα (ή κοινές ρίζες), η επόμενη δουλειά μας είναι να βρούμε τη ρίζα αυτή (ή τις ρίζες αυτές). Αυτό γίνεται ως εξής:
Έστω $n > s$ (χωρίς περιορισμό τής γενικότητας). Αρχικά ελέγχουμε εάν η $\rho = 0$ είναι κοινή ρίζα τών δύο εξισώσεων (εάν $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, οι δύο εξισώσεις έχουν κοινή ρίζα το $\rho = 0$). Στη συνέχεια, πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση (2.62β) με $\left(\frac{\alpha_n}{\beta_s}\right)\rho^{n-s}$ (ο πολλαπλασιασμός με μια σταθερά και με το ρ δεν αλλάζει τίποτα ως προς τις ρίζες τις εξίσωσης) και τήν αφαιρούμε από την (2.62α). Έτσι, έχουμε μια νέα πολυωνυμική εξίσωση, μικρότερου βαθμού (τουλάχιστον κατά 1) από την (2.62α). Χρησιμοποιούμε, τώρα, τη νέα αυτή εξίσωση (έστω βαθμού q) με την (2.62β).

$$\begin{aligned} \beta_s\rho^s + \beta_{s-1}\rho^{s-1} + \ldots + \beta_1\rho + \beta_0 = 0 \\ \gamma_q\rho^q + \gamma_{q-1}\rho^{q-1} + \ldots + \gamma_1\rho + \gamma_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.64}$$

Έστω $s < q$. Πολλαπλασιάζουμε τη (2.64β) με $\left(\frac{\gamma_q}{\beta_s}\right)\rho^{q-s}$ και την αφαιρούμε από την (2.64α). 'Ρίχνουμε', έτσι κι άλλο το βαθμό τού συστήματός μας.

Συνεχίζουμε πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση με το μικρότερο βαθμό με τους κατάλληλους συντελεστές και αφαιρώντας, ώστε ο βαθμός τού συστήματος να 'πέφτει' κάθε φορά τουλάχιστον κατά 1. Καταλήγουμε, με αυτόν τον τρόπο, σε μία εξίσωση με ρίζες τις κοινές ρίζες των αρχικών εξισώσεων (2.62).
Βρίσκοντας με τον παραπάνω τρόπο την κοινή ρίζα (ή τις κοινές ρίζες) των εξισώσεων (2.61), και ξέροντας την εξάρτηση των A, B και C από το ρ, μπορούμε να βρούμε τις παραστάσεις αυτές συναρτήσει των x και y. Γράφουμε τις σχέσεις (2.37) ως εξής:

$$\begin{aligned} (\ln V_x)_x &= A \\ (\ln V_x)_y &= B = \rho(\ln V_y)_x \\ \rho(\ln V_y)_y &= C \end{aligned} \tag{2.65}$$

Από τις σχέσεις (2.65), υπολογίζουμε τα $\ln V_x$ και $\ln V_y$ με προσέγγιση μίας προσθετικής σταθεράς, το οποίο σημαίνει ότι βρίσκουμε τα V_x και V_y με προσέγγιση μίας πολλαπλασιαστικής σταθεράς. Ξέροντας τα V_x και V_y, με ολοκλήρωση υπολογίζουμε το δυναμικό V, με προσέγγιση μίας πολλαπλασιαστικής και μίας προσθετικής σταθεράς.

Κεφάλαιο 3

Μεμονωμένες τροχιές

Σε αυτό το μέρος της εργασίας ασχολούμαστε με μεμονωμένες ευθείες, ευθείες δηλαδή οι οποίες παράγονται από κάποιο δυναμικό, αλλά δεν εντάσσονται αναγκαστικά σε κάποια οικογένεια ευθειών την οποία παράγει εξ ολοκλήρου το δυναμικό.

Συγκεκριμένα, θέτουμε το εξής ερώτημα: 'Δίδεται μια ευθεία

$$y = \lambda x \tag{3.1}$$

και μια ισοενεργειακή οικογένεια τροχιών $\gamma = \gamma(x, y)$, τροχιών, δηλαδή, οι οποίες γράφονται με την ίδια (αριθμητικά) σταθερή ενέργεια και, μάλιστα, ίση με μηδέν. Είναι δυνατό αυτά να δημιουργούνται από κάποιο ομογενές δυναμικό (βαθμού ομογένειας κ);'

Ή, αλλιώς, 'Ποια ή ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί μια οικογένεια $\gamma(x, y)$, ώστε να είναι δυνατή η συνύπαρξή της με την ευθεία (3.1);'

Όπως βλέπουμε, το ερώτημα έχει τεθεί συνοδευόμενο από κάποιες απλουστευτικές υποθέσεις. Συγκεκριμένα:

i) ότι η ευθεία (3.1) διέρχεται από την αρχή τών αξόνων

ii) ότι η ελεγχόμενη οικογένεια γράφεται ισοενεργειακά ($E(c) = 0$) και

iii) ότι το ζητούμενο δυναμικό είναι ομογενές.

Χωρίς αυτές οι πρόσθετες υποθέσεις να είναι ιδιαιτέρως περιοριστικές από άποψη Φυσικής, μάς επιτρέπουν να γράψουμε (και να δουλέψουμε με αυτές) όσες ΔΕΜΠ χρειαζόμαστε ώστε να έχουμε μια πρώτη 'αναγνώριση εδάφους' σε τέτοια ερωτήματα.

Θα διαπιστώσουμε ότι εάν η προς έλεγχο οικογένεια $\gamma(x, y)$ ικανοποιεί μια διαφορική συνθήκη (στην οποία εισέρχονται μέχρι και δεύτερης τάξης παράγωγοι της $\gamma(x, y)$), τότε είναι δυνατή η συνύπαρξή της με την ευθεία (3.1) και, μάλιστα, αυτό συντελείται παρουσία δυναμικού $V(x, y)$ που βρίσκεται μονοσήμαντα.

3.1 Δημιουργία τού συστήματος

Έχουμε τρεις εξισώσεις που πρέπει να επαληθεύονται[i]

$$\begin{aligned} V_x + \gamma V_y - \frac{2\Gamma V}{1+\gamma^2} &= 0 \\ V_y - \lambda V_x &= (y - \lambda x) R(x,y) \\ x V_x + y V_y &= \kappa V \end{aligned} \tag{3.2}$$

Η πρώτη από τις (3.2) προκύπτει από την εξίσωση του Szebehely (1.9) για μηδενική ενέργεια και δίνει τα όλα δυναμικά που παράγουν οικογένειες γ με $E = 0$.
Η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την απαίτηση το δυναμικό V να παράγει τη μεμονωμένη ευθεία $y = \lambda x$. Για να υπάρχει η ευθεία αυτή, πρέπει η δύναμη $\mathbf{F}$ που ασκείται σε υλικό σημείο που κινείται επί της ευθείας να είναι συνεχώς παράλληλη με την ευθεία. Δηλαδή:

$$\frac{F_{(y)}}{F_{(x)}} = \lambda \tag{3.3}$$

όπου οι δείκτες σε παρένθεση συμβολίζουν τις αντίστοιχες διευθύνσεις. Επειδή η δύναμη προέρχεται από δυναμικό, έχουμε $\mathbf{F} = -\nabla V$ και η (3.3) γίνεται

$$V_y - \lambda V_x = 0 \tag{3.4}$$

Η (3.4) δίνει τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε η δύναμη να έχει **παντού** κλίση λ. Αν αυτό ίσχυε σε όλο το επίπεδο xy, θα σήμαινε πως το δυναμικό παράγει την *οικογένεια παράλληλων ευθειών* $y - \lambda x = c$. Πράγματι, για την οικογένεια αυτή, είναι $\gamma = -\frac{1}{\lambda}$ και $\Gamma = 0$, οπότε, σύμφωνα με την (1.9) προκύπτει η (3.4).
Εμείς περιοριζόμαστε στο να ζητήσουμε το μηδενισμό της παράστασης $V_y - \lambda V_x$ **μόνο** επάνω στην ευθεία, δηλαδή για $y = \lambda x$. Για να γίνει αυτό, στο δεξί μέλος τής (3.4) πρέπει να έχουμε το $y - \lambda x$ πολλαπλασιασμένο με μια αυθαίρετη συνάρτηση $R(x,y)$, η οποία, όμως, θα πρέπει **να ορίζεται επάνω στην ευθεία** $y = \lambda x$.[ii]
Τέλος, η τρίτη εξίσωση (3.2) είναι η συνθήκη ομογένειας -βαθμού κ- τού δυναμικού V.
Λύνοντας αλγεβρικά, ως προς V, V_x και V_y το σύστημα (3.2) έχουμε:

$$\begin{aligned} V &= \frac{R(\lambda x - y)(-y + x\gamma)(1+\gamma^2)}{\kappa(1+\lambda\gamma)(1+\gamma^2) - 2(x+\lambda y)\Gamma} \\ V_x &= \frac{-R(\lambda x - y)(2y\Gamma - \gamma(1+\gamma^2)\kappa)}{\kappa(1+\lambda\gamma)(1+\gamma^2) - 2(x+\lambda y)\Gamma} \\ V_y &= \frac{R(\lambda x - y)(2x\Gamma - (1+\gamma^2)\kappa)}{\kappa(1+\lambda\gamma)(1+\gamma^2) - 2(x+\lambda y)\Gamma} \end{aligned} \tag{3.5}$$

οπότε, θέτοντας

$$\begin{aligned} \Pi &= \kappa(1+\lambda\gamma)(1+\gamma^2) - 2(x+\lambda y)\Gamma \\ L_0 &= (\lambda x - y)(\gamma x - y)(1+\gamma^2) \\ L_1 &= -(\lambda x - y)(2y\Gamma - \gamma(1+\gamma^2)\kappa) \\ L_2 &= (\lambda x - y)(2x\Gamma - (1+\gamma^2)\kappa) \end{aligned} \tag{3.6}$$

[i] Υπ΄ όψιν ότι εδώ τα σύμβολα κ και λ είναι *σταθερές* και συμβολίζουν το βαθμό ομογένειας τού δυναμικού V και την κλίση τής ευθείας (3.1) αντίστοιχα, και δεν πρέπει να συγχέονται με τις συναρτήσεις $k(x,y)$ και $\lambda(x,y)$ που ορίσαμε με τις σχέσεις (1.13).

[ii] Δηλαδή, η συνάρτηση $R(x, \lambda x)$ να μην απειρίζεται.

έχουμε

$$\begin{aligned} V &= \frac{L_0}{\Pi} R \\ V_x &= \frac{L_1}{\Pi} R \\ V_y &= \frac{L_2}{\Pi} R \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2 Λύση τού συστήματος

Παρατηρούμε ότι, για να ορίζονται οι τρεις σχέσεις (3.7), πρέπει $\Pi \neq 0$. Αρχικά θα θεωρήσουμε ότι αυτό ισχύει και θα μελετήσουμε τις λύσεις που προκύπτουν. Η ειδική περίπτωση $\Pi = 0$ θα μελετηθεί ξεχωριστά στο τέλος.

3.2.1 Περιπτώσεις για $\Pi \neq 0$

Προφανώς, μεταξύ των τριών σχέσεων (3.7) πρέπει να ικανοποιούνται οι παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \frac{L_1}{\Pi} R &= \left(\frac{L_0}{\Pi} R\right)_x \\ \frac{L_2}{\Pi} R &= \left(\frac{L_0}{\Pi} R\right)_y \end{aligned} \tag{3.8}$$

Οι (3.8) οδηγούν σε ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής

$$\begin{aligned} c_{11} R_x + c_{10} R &= 0 \\ c_{22} R_y + c_{20} R &= 0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Τα c_{10} και c_{20} εξαρτώνται από την προς έλεγχο οικογένεια $\gamma(x, y)$ (και τις σταθερές κ και λ) και είναι κάπως εκτενή. Τα έχουμε αποθηκευμένα σε notebook της Mathematica και θεωρούνται γνωστά. Τα c_{11} και c_{22} είναι απλούστερες παραστάσεις. Συμβαίνει, μάλιστα, να είναι ίσα μεταξύ τους. Θέτουμε, λοιπόν $c_{11} = c_{22} = \Pi^*$, όπου

$$\Pi^* = (y - \lambda x)(\gamma x - y)(1 + \gamma^2)\Pi \tag{3.10}$$

Συνθήκη για το γ

Για $\Pi^* \neq 0$, το σύστημα (3.9) γράφεται ως

$$\begin{aligned} \frac{R_x}{R} &= -\frac{c_{10}}{\Pi^*} \\ \frac{R_y}{R} &= -\frac{c_{20}}{\Pi^*} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Επειδή

$$\frac{R_x}{R} = \frac{\partial \ln R}{\partial x} \qquad \text{και} \qquad \frac{R_y}{R} = \frac{\partial \ln R}{\partial y}$$

η συνθήκη συμβατότητας για τις εξισώσεις (3.11) δίνει:

$$\left(-\frac{c_{10}}{\Pi^*}\right)_y = \left(-\frac{c_{20}}{\Pi^*}\right)_x \tag{3.12}$$

Μετά από πράξεις, η (3.12) καταλήγει στην:

$$\begin{aligned} &2(1+\gamma^2)(y-\gamma x)(x\Gamma_x + y\Gamma_y + \Gamma) - \\ &\quad - \left[\kappa(1+\gamma^2)^2 - 2\Gamma\left[x(1+3\gamma^2) - 2\gamma y\right]\right](x\gamma_x + y\gamma_y) = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Παρατηρούμε ότι στη σχέση αυτή δεν εμφανίζεται η σταθερά λ. Αυτό σημαίνει ότι η (3.13) είναι μία αναγκαία συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η ισοενεργειακή οικογένεια γ, ώστε να είναι συμβατή *με κάποια ευθεία* $y = \lambda x$, να δημιουργείται, δηλαδή, από κάποιο ομογενές, ευθειοπαραγωγό δυναμικό.
Παρατηρούμε, επίσης, το εξής ενδιαφέρον: Εάν η οικογένεια έχει συνάρτηση κλίσης γ, ομογενή ως προς x και y, βαθμού ομογένειας 0, η συνθήκη (3.13) επαληθεύεται αμέσως. Πράγματι, αν η γ είναι ομογενής, βαθμού ομογένειας 0, θα έχουμε:

$$x\gamma_x + y\gamma_y = 0 \tag{3.14}$$

Επιπλέον, επειδή $\Gamma = \gamma\gamma_x - \gamma_y$, αν ο βαθμός ομογένειας, κ_γ, τής συνάρτησης κλίσης τής οικογένειας είναι ίσος με 0, τότε, ο βαθμός ομογένειας κ_Γ, τής συνάρτησης $\Gamma(x, y)$ που αντιστοιχεί στην οικογένεια, θα είναι ίσος με -1, που σημαίνει ότι

$$x\Gamma_x + y\Gamma_y = -\Gamma \tag{3.15}$$

Εισάγοντας τις (3.14) και (3.15) στη σχέση (3.13), βλέπουμε ότι η τελευταία επαληθεύεται. Φυσικά, η ομογένεια βαθμού 0 της γ δεν είναι ο μόνος τρόπος επαλήθευσης της (3.13). Μπορεί (και πρέπει) να επαληθεύεται και από μη ομογενή γ, ή από ομογενή με $\kappa_\gamma \neq 0$. Η (3.13) είναι μια γενική συνθήκη: Οποιαδήποτε οικογένεια τροχιών, της οποίας η συνάρτηση κλίσης επαληθεύει την (3.13), είναι αδελφική προς κάποια ευθεία $y = \lambda x$.

Υπολογισμός τού δυναμικού

Συνεχίζουμε να εργαζόμαστε με $\Pi \neq 0$ και $\Pi^* \neq 0$.
Για να βρούμε το δυναμικό, είναι απαραίτητο να προηγηθεί η λύση τού συστήματος (3.11), ώστε να υπολογίσουμε το R, το οποίο, στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε στη σχέση (3.7α).
Δεν ξεχνούμε όμως, ότι ο παράγοντας $R(x, y)$ (που εισάγεται στην εξίσωση (3.2β)) δεν πρέπει να απειρίζεται επάνω στην ευθεία $y = \lambda x$, ώστε αυτή η εξίσωση να εκπληροί την αποστολή της. Αλλά, επειδή, σύμφωνα με την (3.10), για $y = \lambda x$, είναι $\Pi^* = 0$, συμπεραίνουμε ότι οι συντελεστές c_{10} και c_{20} πρέπει να έχουν παράγοντα τη διαφορά $y - \lambda x$. Πρέπει, δηλαδή, να είναι επίσης

$$c_{10}(x, y = \lambda x) = 0 \qquad \text{και} \qquad c_{20}(x, y = \lambda x) = 0 \tag{3.16}$$

Με βάση τα c_{10} και c_{20} (που έχουμε κρατήσει στο notebook), βρίσκουμε ότι οι δύο σχέσεις επαληθεύονται *όταν και μόνο όταν*

$$(1+g^2)(1+\lambda g)\kappa = 2xG(1+\lambda^2) \tag{3.17}$$

όπου

$$g(x) = \gamma(x, y = \lambda x) \qquad \text{και} \qquad G(x) = \Gamma(x, y = \lambda x) \tag{3.18}$$

με τα $\gamma(x,y)$ και $\Gamma(x,y)$ να υπολογίζονται *για την ελεγχόμενη οικογένεια* (όχι για την ευθεία).
Σχολιάζουμε, τώρα, τη συνθήκη (3.17) ως εξής: Θεωρούμε ότι, μαζί με τη διδόμενη προς έλεγχο οικογένεια $\gamma(x,y)$, μάς δίνουν και μία συγκεκριμένη ευθεία $y = \lambda x$ και μάς ρωτούν εάν αυτά τα δύο είναι συμβατά. Τότε, με τη βοήθεια των (3.18), μπορούμε να έχουμε στη διάθεσή μας και τις συναρτήσεις $g(x)$ και $G(x)$, να έχουμε, δηλαδή, τη σχέση μεταξύ τής σταθερής κλίσης λ και τού βαθμού ομογένειας κ. Αυτό, όμως, δε σημαίνει ότι μπορούμε να ξεκινούμε με οποιοδήποτε ζεύγος $\{\gamma,\lambda\}$ και να αναμένουμε να ικανοποιηθεί η σχέση (3.17) με κάποιες σταθερές κ και λ. Για να εξασφαλίσουμε κάτι τέτοιο, πρέπει, επί πλέον, το ζεύγος $\{\gamma,\lambda\}$ να είναι τέτοιο, ώστε

$$\left(\frac{xG}{(1+g^2)(1+\lambda g)}\right)_x = 0 \tag{3.19}$$

Αυτή η τελευταία απαίτηση (όπως συνέβαινε και με την απαίτηση (3.13)) σίγουρα ικανοποιείται για οικογένειες $\gamma(x,y)$ ομογενείς, μηδενικού βαθμού ομογένειας. Διότι τότε, το $g(x)$ είναι βαθμού ομογένειας 0, το $G(x)$ είναι βαθμού ομογένειας -1 και η (3.19) προφανώς ισχύει. Τα παραδείγματα που ακολουθούν θα είναι αυτής τής μορφής.
Συνεχίζουμε με το σχολιασμό τής (3.17): Θεωρούμε τώρα ότι μοναδικό δεδομένο είναι η ισοενεργειακά ($E = 0$) γραφόμενη οικογένεια $\gamma(x,y)$ και το ερώτημα είναι εάν αυτή μπορεί να προκύψει από ομογενές ευθειοπαραγωγό δυναμικό. Η απάντηση είναι ναι, εφόσον:

1. Για το διδόμενο $\gamma(x,y)$ ικανοποιείται η (3.13).

2. Υπάρχει σταθερά λ τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (3.19). Αν η οικογένεια $\gamma(x,y)$ είναι συγκεκριμένη, τότε η (3.19) ελέγχεται αμέσως και από την (3.17) βρίσκεται η σχέση μεταξύ των κ και λ.

Συμπερασματικά, για κάθε 'κατάλληλη' οικογένεια $\gamma(x,y)$, η (3.17) συνδέει τις σταθερές κ και λ (με το γνωστό τους νόημα). Για κάθε κλίση λ δίνει ένα βαθμό ομογένειας κ. Όμως, όπως θα δούμε και στα παραδείγματα, για συγκεκριμένο κ (προκαθορισμένο βαθμό ομογένειας τού δυναμικού) η (3.17) μπορεί να ικανοποιείται από περισσότερα λ.
Σε κάθε περίπτωση, συνεχίζουμε βρίσκοντας τη συνάρτηση R από τις σχέσεις (3.11). Αφού επιβεβαιώσουμε ότι το R ορίζεται για $y = \lambda x$ (δεν απειρίζεται επάνω στην ευθεία) και απορρίψουμε τις τιμές των κ και λ για τις οποίες $R = \infty$, προχωρούμε υπολογίζοντας το δυναμικό V, από τη σχέση (3.7α).

Συνοπτική παρουσίαση της μεθόδου

1. Θεωρούμε δεδομένη μονοπαραμετρική οικογένεια τροχιών (γνωστή συνάρτηση κλίσης $\gamma(x,y)$).

2. Ελέγχουμε εάν επαληθεύεται η εξίσωση (3.13). Εάν όχι, συμπεραίνουμε ότι η οικογένεια γ δε συνυπάρχει **με καμία ευθεία** τής μορφής $y = \lambda x$ σε κάποιο ομογενές δυναμικό.

3. Εάν η (3.13) επαληθεύεται, τότε, ελέγχουμε και τη συνθήκη (3.19). Αν και αυτή ισχύει, η (3.17) δίνει όλα τα επιτρεπτά ζεύγη σταθερών $\{\kappa,\lambda\}$.

4. Από τις σχέσεις (3.11) υπολογίζουμε το $\ln R(x,y)$ και στη συνέχεια τη συνάρτηση $R(x,y)$.

5. Υπολογίζουμε το ομογενές δυναμικό που αντιστοιχεί σε αυτήν, από τη σχέση (3.7α).

3.2.2 Παραδείγματα για ομογενείς οικογένειες με $\kappa_\gamma = 0$

Σαν παραδείγματα χρησιμοποιούμε δύο γνωστές μονοπαραμετρικές οικογένειες τροχιών:

i) Την οικογένεια

$$f_1 = 3x^2 - 2y^2 = c$$

για την οποία γνωρίζουμε ότι παράγεται από το δυναμικό

$$V_1 = 9x^2y + 4y^3$$

το οποίο, εκτός άλλων, παράγει και την ευθεία

$$y = \sqrt{\frac{3}{2}}x$$

ii) Την οικογένεια

$$f_2 = x^3 + y^3 = c$$

που παράγεται από το δυναμικό

$$V_2 = \frac{x^4 + y^4}{(x-y)^4}$$

που παράγει επίσης και την ευθεία

$$y = -x$$

Στα παρακάτω, θεωρούμε άγνωστα τα δυναμικά και τις ευθείες και προσπαθούμε να τα αναπαράγουμε, έχοντας γνωστές μόνο τις οικογένειες. Και οι δύο συναρτήσεις κλίσης που αντιστοιχούν στις οικογένειες είναι ομογενείς, βαθμού ομογένειας $\kappa_\gamma = 0$, άρα η εξίσωση (3.13) επαληθεύεται σίγουρα. Αυτό που απομένει είναι να βρεθούν (εάν υπάρχουν) αδελφικές ευθείες και τα ομογενή δυναμικά που παράγουν τις οικογένειες και τις ευθείες αυτές.

Παράδειγμα (i)

Δίνεται η οικογένεια

$$f = 3x^2 - 2y^2 = c \tag{3.20}$$

Η συνάρτηση κλίσης που αντιστοιχεί στην οικογένεια είναι η

$$\gamma = -\frac{2y}{3x} \qquad \text{με} \qquad \Gamma = \frac{2(3x^2 - 2y^2)}{9x^3} \tag{3.21}$$

Αν η (3.20) συνοδεύεται (σε κάποιο από τα άπειρα δυναμικά που την παράγουν) από κάποια ευθεία $y = \lambda x$, τότε, σύμφωνα με τις (3.18), είναι:

$$\begin{aligned} g &= -\frac{2}{3}\lambda \\ G &= \frac{2(3-2\lambda^2)}{9x} \end{aligned} \tag{3.22}$$

και η (3.19) προφανώς ικανοποιείται.
Η (3.17) δίνει:

$$(9+4\lambda^2)(3-2\lambda^2)\kappa = 12(1+\lambda^2)(3-2\lambda^2) \tag{3.23}$$

η οποία, με τη σειρά της, συνεπάγεται ότι

$$\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{ή} \qquad \kappa = \frac{12(1+\lambda^2)}{9+4\lambda^2} \tag{3.24}$$

Εξετάζουμε, λοιπόν, κάθε μία από τις περιπτώσεις (3.24):

- Περίπτωση (i)

  $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

  Με αυτά τα λ και με $\gamma = -\frac{2y}{3x}$, υπολογίζουμε κατά σειρα: από την (3.10) το Π^*, από το notebook τα c_{10} και c_{20} και από την (3.11) τούς λόγους $\frac{R_x}{R}$ και $\frac{R_y}{R}$. Αυτοί οι λόγοι (πρέπει να) είναι συμβατοί και αυτό μάς επιτρέπει να βρούμε τη συνάρτηση-πολλαπλασιαστή για τυχούσα τιμή τού κ. Είναι:

$$R = x^{\frac{2\kappa-11}{5}} y^{\frac{3(\kappa-3)}{5}} [3\sqrt{6}(3\kappa-4)x^2 - 60xy + 4\sqrt{6}(\kappa-3)y^2] \tag{3.25}$$

  Στη συνέχεια, από τις (3.6), υπολογίζουμε τα Π και L_0 και από την (3.7α) βρίσκουμε το δυναμικό

$$V = x^{\frac{2(\kappa-3)}{5}} y^{\frac{3\kappa-4}{5}} (9x^2+4y^2) \tag{3.26}$$

  Για $\lambda = \sqrt{\frac{3}{2}}$ και $\kappa = 3$ το V που δίνεται από την (3.26) συμπίπτει με το γνωστό εκ των προτέρων V τού παραδείγματος, δηλαδή $V = 9x^2y + 4y^3$.

- Περίπτωση (ii)

  $\kappa = \frac{12(1+\lambda^2)}{9+4\lambda^2}$

  Για τυχόν λ με αυτό το κ, εργαζόμαστε όπως προηγουμένως και βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} R &= e^{-\frac{(4\lambda^2+15)\ln x + 9\ln[y(4\lambda^2+9)]}{4\lambda^2+9}} (3x^2\lambda - 2y^2\lambda - 6xy(1+\lambda^2)) \\ V &= x^{-\frac{6}{9+4\lambda^2}} y^{\frac{4\lambda^2}{9+4\lambda^2}} (9x^2+4y^2) \end{aligned} \tag{3.27}$$

Σχόλιο: Είναι αξιοσημείωτο ότι, για τα δύο συγκεκριμένα $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, υπάρχουν άπειρα δυναμικά (3.26), κάθε επιθυμητού βαθμού ομογένειας κ, που είναι συμβατά με την οικογένεια (3.20) και τις ευθείες $y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}x$. Έτσι, για παράδειγμα, εκτός από το τρίτου βαθμού δυναμικό $V = 9x^2y + 4y^3$, θέτοντας $\kappa = 2$ στην (3.26), παίρνουμε και το δυναμικό $V = x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}(9x^2 + 4y^2)$, που είναι δεύτερου βαθμού και επίσης είναι συμβατό.
Από την άλλη μεριά, όπως βλέπουμε από την (3.27β), σε κάθε λ αντιστοιχεί ένα μόνο δυναμικό, βαθμού $\kappa = \frac{12(1+\lambda^2)}{9+4\lambda^2}$. Βέβαια, για $\lambda = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$, προκύπτει, όπως αναμένεται, $V = x^{-\frac{2}{5}}y^{\frac{2}{5}}(9x^2 + 4y^2)$, με $\kappa = 2$.

Παράδειγμα (ii)

Δίνεται η οικογένεια

$$f = x^3 + y^3 \tag{3.28}$$

Η συνάρτηση κλίσης που αντιστοιχεί στην οικογένεια είναι η

$$\gamma = \frac{y^2}{x^2} \qquad \text{με} \qquad \Gamma = -\frac{2y}{x^2} - \frac{2y^4}{x^5} \tag{3.29}$$

Από τις (3.18) υπολογίζουμε τα g και G και ελέγχεται ότι η (3.19) ικανοποιείται, ενώ η (3.18) δίνει προς εξέταση δύο περιπτώσεις:

i)

$$\lambda = -1 \tag{3.30}$$

ii)

$$\kappa = -\frac{4\left(\lambda + \lambda^3\right)}{1 + \lambda^4} \tag{3.31}$$

- Περίπτωση (i)

  $\lambda = -1$

$$\begin{aligned} R &= x^{-1+\kappa}(x-y)^{-6-\kappa}y^{-1+\kappa}\left(\kappa\left(x^2+y^2\right)\left(x^4+y^4\right) + 4xy\left(x^4+x^3y+xy^3+y^4\right)\right) \\ V &= x^\kappa y^\kappa \frac{\left(x^4+y^4\right)}{(x-y)^{\kappa+4}} \end{aligned} \tag{3.32}$$

  Για τη λύση αυτή, και $\kappa = 3$, έχουμε $V = -5(9x^2y + 4y^3)$, δηλαδή το εκ των προτέρων γνωστό δυναμικό, με τη διαφορά μιας πολλαπλασιαστικής σταθεράς.

- Περίπτωση (ii)

  $\kappa = -\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}$

$$\begin{aligned} R &= A\left[x^{-1-\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}}(x-y)^{-5+\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}}\left(y\left(1+\lambda^4\right)\right)^{-1-\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}}\right] \\ A &= -xy^4\lambda\left(-1+\lambda^2\right) + x^5\left(1+\lambda^2\right) - x^2y^3(-1+\lambda)\left(1+\lambda^2\right) - \\ &\quad - x^3y^2(-1+\lambda)\lambda\left(1+\lambda^2\right) - y^5\lambda^2\left(1+\lambda^2\right) + x^4y\left(\lambda-\lambda^3\right) \\ V &= x^{-\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}}(x-y)^{-4+\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}}\left(x^4+y^4\right)y^{-\frac{4\left(\lambda+\lambda^3\right)}{1+\lambda^4}} \end{aligned} \tag{3.33}$$

3.2.3 Παραδείγματα για οικογένειες με $\kappa_\gamma \neq 0$

Έστω οι οικογένειες τροχιών με συναρτήσεις κλίσης

$$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha}{y^\kappa - \alpha}}$$

και

$$\gamma = \sqrt{\beta x^2 - 1}$$

όπου α, β σταθερές. Παρ΄ ότι αυτές οι συναρτήσεις κλίσης δεν είναι ομογενείς βαθμού 0, επαληθεύουν τη συνθήκη (3.13). Έτσι, συνεχίζουμε όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα.

Παράδειγμα (i)

$$\gamma = \sqrt{\frac{\alpha}{y^\kappa - \alpha}} \tag{3.34}$$

Προκύπτουν οι παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{y^{-1+\kappa}}{y - x\lambda} \\
L_0 &= \left(y - x\sqrt{\frac{\alpha}{-\alpha + y^\kappa}}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{-\alpha + y^\kappa}\right)(y - x\lambda) \\
\Pi &= k - \frac{\alpha\kappa x y^{-1+\kappa}}{\sqrt{\frac{\alpha}{-\alpha+y^\kappa}}\left(-\alpha + y^\kappa\right)^2} + \frac{\alpha\kappa}{-\alpha + y^\kappa} + \\
&\quad + \kappa\sqrt{\frac{\alpha}{-\alpha + y^\kappa}}\lambda + \kappa\left(\frac{\alpha}{-\alpha + y^\kappa}\right)^{3/2}\lambda - \frac{\alpha\kappa y^\kappa \lambda}{\sqrt{\frac{\alpha}{-\alpha+y^\kappa}}\left(-\alpha + y^\kappa\right)^2} \\
V &= y^\kappa
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Παράδειγμα (ii)

Ομοίως, για

$$\gamma = \sqrt{\beta x^k - 1} \tag{3.36}$$

προκύπτουν οι παρακάτω τιμές:

$$\begin{aligned}
R &= \frac{x^{-1+\kappa}}{-y + x\lambda} \\
L_0 &= x^\kappa \beta\left(y - x\sqrt{-1 + x^\kappa \beta}\right)(y - x\lambda) \\
\Pi &= \kappa - \kappa x^\kappa \beta + \kappa\left(-1 + x^\kappa \beta\right) - \kappa x^{-1+\kappa} y \beta \lambda + \kappa\sqrt{-1 + x^\kappa \beta}\lambda + \\
&\qquad + \kappa\left(-1 + x^\kappa \beta\right)^{3/2}\lambda \\
V &= \frac{x^\kappa}{\kappa}
\end{aligned} \tag{3.37}$$

3.2.4 Η ειδική περίπτωση $\Pi = 0$

Κατά τη δημιουργία τού συστήματος, για να λύσουμε τις εξισώσεις (3.7), θεωρήσαμε ότι $\Pi \neq 0$. Στην παράγραφο αυτή, θα μελετήσουμε την ειδική περίπτωση κατά την οποία $\Pi = 0$. Η περίπτωση αυτή εμφανίζεται όταν η τριάδα $\{\gamma, \kappa, \lambda\}$ συνδέεται με μια σχέση. Πράγματι, από την (3.6α), συνεπάγεται

$$\kappa = \frac{2(x + \lambda y)}{(1+\gamma^2)(1+\lambda\gamma)}\Gamma \tag{3.38}$$

Εφόσον ελέγχουμε συμβατότητα διδόμενης οικογένειας $\gamma(x,y)$ με συγκεκριμένη ευθεία $y = \lambda_0 x$, μπορούμε αμέσως να γνωρίζουμε εάν το δεύτερο μέλος τής (3.38) οδηγεί σε μία σταθερά. Αν αυτό πράγματι συμβαίνει, συμπεραίνουμε ότι αυτή η σταθερά $\kappa = \kappa_0$ είναι ο βαθμός ομογένειας του ζητούμενου δυναμικού $V(x,y)$.
Το ερώτημα που ακολουθεί είναι: 'Πώς θα βρεθεί αυτό το δυναμικό;' Ασφαλώς όχι από τον τύπο (3.5α), στον οποίο έχουμε εκ ταυτότητας μηδενισμένο τον παρονομαστή. Θα χρειαστεί να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα των τριών ΔΕΜΠ (3.2). Αυτή τη φορά, όμως, με την πρόσθετη γνώση ότι και ο αριθμητής στην (3.5α) μηδενίζεται (και, μάλιστα, σε όλο το επίπεδο Oxy). Αυτό το τελευταίο σημαίνει ότι είτε

i) $R(x,y) = 0$, είτε

ii) $\gamma = \frac{y}{x}$.

Εξετάζουμε, λοιπόν, τα δύο αυτά ενδεχόμενα.

Υποπερίπτωση i: Επιλέγουμε στην (3.2β) πολλαπλασιαστή $R(x,y) = 0$. Το αρχικό σύστημα εξισώσεων (3.2), ενόψει και της (3.38), γίνεται:

$$\begin{aligned} V_x + \gamma V_y &= \frac{\kappa_0(1+\lambda_0\gamma)}{x+\lambda_0 y}V \\ -\lambda_0 V_x + V_y &= 0 \\ xV_x + yV_y &= \kappa_0 V \end{aligned} \tag{3.39}$$

Εύκολα, διαπιστώνουμε ότι οι τρεις εξισώσεις τού συστήματος (3.39) ικανοποιούνται για

$$\frac{Vx}{V} = \frac{\kappa_0}{x+\lambda_0 y} \qquad \text{και} \qquad \frac{V_y}{V} = \lambda_0 \frac{\kappa_0}{x+\lambda_0 y} \tag{3.40}$$

Από τις (3.40) προκύπτει το (ομογενές, βαθμού κ_0) δυναμικό

$$V = V_0(x + \lambda_0 y)^{\kappa_0} \tag{3.41}$$

με V_0 σταθερά.

Υποπερίπτωση ii: $\gamma = \frac{y}{x}$ (δίδεται, δηλαδή, η οικογένεια ομοκέντρων κύκλων $x^2 + y^2 = c$).
Το αντίστοιχο $\Gamma = \gamma\gamma_x - \gamma_y = -\frac{x^2+y^2}{x^3}$ και, από την (3.38), προκύπτει ότι $\kappa_0 = -2$, δηλαδή το ζητούμενο δυναμικό είναι βαθμού -2.

Είναι γνωστό (βλ. [5]) ότι όλα τα δυναμικά που παράγουν κύκλους $x^2+y^2=c$ δίδονται από τη σχέση

$$V(r,\theta)=g(r)+\frac{1}{r^2}h(\theta) \tag{3.42}$$

όπου $g(r)$ και $h(\theta)$ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις τών πολικών συντεταγμένων r και θ αντίστοιχα. Από όλα τα δυναμικά (3.42), εντοπίζουμε τα ομογενή, βαθμού -2 που ικανοποιούν τις τρεις εξισώσεις (3.2). Εύκολα, προκύπτει ότι αυτά είναι τα (κεντρικά) δυναμικά

$$V(x,y)=\frac{h_0}{x^2+y^2} \tag{3.43}$$

με h_0 σταθερά.
Σημειώνεται ότι η (3.2β) ισχύει με επιλογή τής $R(x,y)=-\frac{2h_0}{(x^2+y^2)^2}$ και, φυσικά, κάθε ευθεία $y=\lambda x$ είναι δεκτή

Σχόλιο: Η σχέση (3.38) μάς επιτρέπει, επίσης, να βρούμε αναλυτικά ένα πλούσιο υποσύνολο οικογενειών $\gamma(x,y)$ που παράγονται από κάποιο ευθειοπαραγωγό και ομογενές δυναμικό (με διδόμενο βαθμό ομογένειας $\kappa=\kappa_0$) που επιδέχεται ως λύση και τη συγκεκριμένη ευθεία $y=\lambda_0 x$. Αναφερόμαστε σε υποσύνολο τροχιών, διότι η σχέση (3.38) 'εκπροσωπεί' τριάδες $\{\gamma,\kappa,\lambda\}$ που οδηγούν στην ειδική περίπτωση $\Pi=0$ που εξετάζουμε στην παράγραφο αυτή. Λέμε, δηλαδή, ότι το δυναμικό (3.41) (το οποίο έχει ως λύση κάθε ευθεία $y=\lambda_0 x$) έχει, επίσης, ως τροχιές (και, μάλιστα, γραφόμενες ισοενεργειακά, με $E=0$) και όλες τις οικογένειες $\gamma(x,y)$ που ορίζονται από την (3.38) Ενδιαφέρον έχει ότι αυτές οι οικογένειες είναι δυνατό να βρεθούν αναλυτικά, είναι, δηλαδή, δυνατό να λυθεί η ΔΕΜΠ

$$\gamma\gamma_x-\gamma_y=\frac{\kappa_0(1+\gamma^2)(1+\lambda_0\gamma)}{2(x+\lambda_0 y)} \tag{3.44}$$

Πράγματι, η (3.44) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, με άγνωστη τη συνάρτηση γ και ανεξάρτητες μεταβλητές τις x και y. Οι βοηθητικές εξισώσεις που αντιστοιχούν στην ΔΕΜΠ αυτή, είναι:

$$\frac{dx}{\gamma}=\frac{dy}{-1}=\frac{d\gamma(2(x+\lambda_0 y))}{\kappa_0(1+\gamma^2)(1+\lambda_0\gamma)} \tag{3.45}$$

Από την πρώτη ισότητα έχουμε:

$$\frac{dx}{\gamma}=\frac{dy}{-1}\Rightarrow\frac{dx}{\gamma}=\frac{\lambda_0 dy}{-\lambda_0}=\frac{dx+\lambda_0 dy}{\gamma-\lambda_0}=\frac{d(x+\lambda_0 y)}{\gamma-\lambda_0} \tag{3.46}$$

Συνδυάζοντας τις (3.45) και (3.46), έχουμε:

$$\frac{d(x+\lambda_0 y)}{x+\lambda_0 y}=\frac{2(\gamma-\lambda_0)}{\kappa_0(1+\gamma^2)(1+\lambda_0\gamma)}d\gamma \tag{3.47}$$

Ολοκληρώνοντας τα δύο μέλη τής (3.47), παίρνουμε:

$$\kappa_0\ln(x+\lambda_0 y)=\ln\left(\frac{1+\gamma^2}{(1+\lambda_0\gamma)^2}\right)+\text{σταθ.}\Rightarrow\frac{(x+\lambda_0 y)^{\kappa_0}(1+\lambda_0\gamma)^2}{1+\gamma^2}=c_1 \tag{3.48}$$

Από την εξίσωση (3.48) έχουμε

$$x + \lambda_0 y = \frac{c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}}{(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{2}{\kappa_0}\right)}}$$

ή

$$y = \frac{c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}}{\lambda_0(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}} - \frac{x}{\lambda_0} \tag{3.49}$$

από την οποία προκύπτει η σχέση

$$dy = -\frac{dx}{\lambda_0} + \frac{2c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}(\gamma-\lambda_0)(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}-1\right)}}{\kappa_0\lambda_0(1+\lambda_0\gamma)^{\frac{2}{\kappa_0}+1}}d\gamma \tag{3.50}$$

Από την πρώτη ισότητα των (3.45) έχουμε

$$\frac{dx}{\gamma} = \frac{dy}{-1} \tag{3.51}$$

Συνδυάζοντας τις (3.51) και (3.50) έχουμε:

$$\frac{dx}{\gamma} - \frac{dx}{\lambda_0} = \frac{(\lambda_0-\gamma)dx}{\lambda_0\gamma} = -\frac{2c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}(\gamma-\lambda_0)(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}-1\right)}}{\kappa_0\lambda_0(1+\lambda_0\gamma)^{\frac{2}{\kappa_0}+1}}d\gamma \tag{3.52}$$

ή

$$\frac{dx}{\gamma} = \frac{2c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}-1\right)}}{\kappa_0(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{2}{\kappa_0}+1\right)}}d\gamma \tag{3.53}$$

Η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\kappa_0 dx}{2c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}} = \frac{\gamma(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}-1\right)}}{(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{2}{\kappa_0}+1\right)}}d\gamma \Rightarrow \frac{\kappa_0 x}{2c_1^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}} = I(\gamma,\kappa_0,\lambda_0) + c_2 \tag{3.54}$$

όπου

$$I(\gamma,\kappa_0,\lambda_0) = \int \frac{\gamma(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}-1\right)}}{(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{2}{\kappa_0}+1\right)}}d\gamma \tag{3.55}$$

Το $I(\gamma,\kappa_0,\lambda_0)$ είναι μόνο η τιμή τού ολοκληρώματος, χωρίς την αυθαίρετη σταθερά ολοκλήρωσης, η οποία είναι το c_2 στη σχέση (3.54).
Αντικαθιστώντας στη σχέση (3.54) την τιμή τού c_1 από την (3.48), έχουμε:

$$c_2 = \frac{\kappa_0 x(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}}{2(x+\lambda_0 y)(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{2}{\kappa_0}\right)}} - I(\gamma,\kappa_0,\lambda_0) \tag{3.56}$$

Η γενική λύση τής (3.44) δίνεται από μια αυθαίρετη συνάρτηση των c_1 και c_2, ή:

$$\frac{\kappa_0 x(1+\gamma^2)^{\left(\frac{1}{\kappa_0}\right)}}{2(x+\lambda_0 y)(1+\lambda_0\gamma)^{\left(\frac{2}{\kappa_0}\right)}} - I(\gamma,\kappa_0,\lambda_0) = A\left(\frac{(x+\lambda_0 y)^{\kappa_0}(1+\lambda_0\gamma)^2}{1+\gamma^2}\right) \tag{3.57}$$

Σχόλιο: Μια τελευταία διευκρίνιση αφορά ακριβώς αυτή τη σχέση (3.57) και, ιδιαιτέρως, τον προηγούμενο ισχυρισμό μας ότι 'μπορούμε να βρούμε όλες τις οικογένειες $\gamma(x, y)\ldots$' Η (3.57) είναι πράγματι η γενική λύση τής (3.44), αλλά μία συγκεκριμένη λύση $\gamma(x, y)$ μπορεί να προκύψει από αυτήν υπό δύο προυποθέσεις:

- Για διδόμενα κ_0, λ_0 είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I(\gamma, \kappa, \lambda)$ στην (3.55) (Quadratures).
- Για τυχαία επιλογή τής αυθαίρετης συνάρτησης A στην (3.57), είμαστε σε θέση να λύσουμε ως προς γ την (αλγεβρική ή όχι) εξίσωση (3.57).

Έτσι, για παράδειγμα, αν επιλέξουμε $\kappa_0 = 1$, από την (3.55) έχουμε

$$I = -\frac{1 + 2\lambda_0\gamma}{2\lambda_0^2(1 + \lambda_0\gamma)^2} \tag{3.58}$$

Για $A = 0$, η (3.57) προκύπτει δευτεροβάθμια ως προς γ με λύσεις (για $\lambda_0 \neq 0$)

$$\gamma = -\frac{x\lambda_0 + y\lambda_0^2 \pm \sqrt{\lambda_0^3(xy - x^2\lambda_0 + y^2\lambda_0)}}{x\lambda_0^2} \tag{3.59}$$

Ελέγχεται ότι για V που δίνεται από την (3.41) (στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι το $V = V_0(x + \lambda_0 y))$ και $E = 0$, η εξίσωση του Szebehely επαληθεύεται.
Αν επιλέξουμε $\kappa_0 = 1$ και $A = 1$, η (3.55) μάς δίνει επίσης δεύτερου βαθμού ως προς γ εξίσωση, με λύσεις

$$\gamma = -\frac{x\lambda_0 + y\lambda_0^2 \pm \sqrt{\lambda_0^2(x + xy\lambda_0 - x^2\lambda_0^2 + y^2\lambda_0^2)}}{x\lambda_0^2} \tag{3.60}$$

ενώ αν θέσουμε

$$A = \frac{(x + \lambda_0 y)^{\kappa_0}(1 + \lambda_0\gamma)^2}{1 + \gamma^2} \tag{3.61}$$

η (3.55) μάς δίνει τετάρτου βαθμού εξίσωση ως προς γ.

Κεφάλαιο 4

Γενικές παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Στην εργασία αυτή μελετήσαμε ευθειοπαραγωγά δυναμικά. Πρόκειται για δυναμικά τα οποία δημιουργούν είτε μία μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών (αυτά που ικανοποιούν την ΔΕΜΠ (1.14)), είτε μια μεμονωμένη ευθεία (αυτά για τα οποία υπάρχει λ ώστε να ισχύει η εξίσωση (3.2β)).

Το ερώτημα που θέσαμε αναφορικά με αυτά τα δυναμικά είναι απλό: Σκεφτόμαστε μια μονοπαραμετρική οικογένεια τροχιών (όχι ευθειών). Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μια διπλή απειρία δυναμικών που, γενικά, μπορούν να αναλάβουν να δημιουργήσουν αυτήν την οικογένεια (είναι όλα τα δυναμικά που ικανοποιούν την ΔΕΜΠ (1.12)). Ρωτούμε λοιπόν: 'Είναι κάποιο, ή κάποια, από αυτά τα δυναμικά ευθειοπαραγωγό;' Ή, λίγο διαφορετικά: 'Συνυπάρχει η διδόμενη οικογένεια $f(x, y) = c$ τροχιών με οικογένεια ευθειών ή, έστω, με μεμονωμένη ευθεία;'

Για την πρώτη περίπτωση το ερώτημα 'μεταφράσθηκε' στην αναζήτηση συνθηκών (επί της διδόμενης οικογένειας), ώστε δύο ΔΕΜΠ με άγνωστη μία συνάρτηση (τη $V(x, y)$) να έχουν κοινές λύσεις.

Για τη δεύτερη περίπτωση κρίναμε σκόπιμο να θέσουμε πρόσθετες απλουστευτικές συνθήκες, τόσο για τη μορφή τού δυναμικού που ζητούμε (ομογενές), όσο και για την ευθεία $y = \lambda x$ που δίνουμε (περνάει από την αρχή τών αξόνων).

Πάντως, και στις δύο περιπτώσεις διακρίναμε ένα κοινό χαρακτηριστικό. Παρά την απλότητα τού ερωτήματος, η απάντηση είναι ιδιαιτέρως 'πολύπλοκη'. Χρησιμοποιούμε αυτόν τον όρο για να δηλώσουμε την αναγκαιότητα που παρουσιάζεται να κάνουμε ένα μεγάλο αριθμό πράξεων, κυρίως παραγωγίσεις και λύσεις συνήθων (γραμμικών ή όχι) συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων. Το μέγεθος τών απαιτούμενων πράξεων είναι αδύνατο να αντιμετωπισθεί χωρίς τη χρήση ενός υπολογιστικού πακέτου (στη συγκεκριμένη περίπτωση το πακέτο αυτό ήταν η Mathematica). Ίσως, μάλιστα, κάποιες φορές αντιμετωπίζει πρόβλημα ακόμη και ένας ισχυρός υπολογιστής. Αυτή η διαπίστωση πρέπει να συνεκτιμηθεί με το γεγονός ότι το σκεπτικό τής λύσης ενός τέτοιου προβλήματος είναι σχετικά απλό και οπωσδήποτε πειστικό.

Όσον αφορά τις απλουστευτικές υποθέσεις που 'χρειάστηκε' να κάνουμε στο δεύτερο μέρος, θα μπορούσαμε να θέσουμε το ερώτημα πιο γενικά, με διδόμενη ευθεία $y = \lambda x + \mu$ και διδόμενη οικογένεια τροχιών $\gamma = \gamma(x, y)$ και το ερώτημα εάν αυτά τα δύο είναι συμβατά, χωρίς περιορισμό στη μορφή τού δυναμικού που τα υιοθετεί. Αυτό θα σήμαινε ότι έχουμε να ελέγξουμε τη συμβατότητα (δηλαδή την εύρεση κατάλληλων πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων $R(x,y)$) ώστε οι δύο ΔΕΜΠ (3.2β) και (1.12) να έχουν κοινές λύσεις $V(x,y)$. Σχετικά εύκολα, μπορούμε να δούμε ότι αυτή η απαίτηση οδηγεί στην απαίτηση δύο ΔΕΜΠ, τρίτης τάξης (γραμμικές) ως προς $R(x,y)$, με συντελεστές εξαρτώμενους από την οικογένεια και τις σταθερές λ και μ, να συνισχύουν. Αυτό, με τη σειρά του, θα μάς δημιουργούσε την υποχρέωση να προχωρήσουμε σε εξισώσεις (γραμμικές, πάντοτε) **πέμπτης τάξης** ως προς $R(x,y)$. Βλέπουμε και πάλι πόσο 'εκθετικά' αυξάνει το πλήθος τών πράξεων. Αντ' αυτού, περιοριστήκαμε στο να έχουμε να κάνουμε με το σύστημα των ΔΕΜΠ (3.2) και το συνακόλουθο σύστημα (3.11) για τη συνάρτηση $R(x,y)$.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα τής εργασίας αυτής είναι τα εξής:
Όσον αφορά το πρώτο κομμάτι, δηλαδή το κομμάτι που αφιερώθηκε στις *οικογένειες ευθειών*, η απάντηση στο ερώτημά μας είναι ο μηδενισμός ή όχι τής ορίζουσας τού Sylvester τών δύο εξισώσεων (2.61). Εάν η ορίζουσα μηδενίζεται, τότε μπορούμε να πούμε με βεβαιότητα ότι υπάρχει οικογένεια ευθειών αδελφική προς τη διδόμενη οικογένεια $\gamma(x,y)$. Ένα σημαντικό στοιχείο που προέκυψε είναι ότι, με τη μελέτη που κάναμε, καταλήξαμε στο ότι το πλήθος των δυναμικών που μπορούν να υιοθετήσουν τις δύο οικογένειες (τη γ και την αδελφική της οικογένεια ευθειών) είναι πεπερασμένο. Έχοντας υπ' όψιν ότι μια οικογένεια, γενικά, μπορεί να υιοθετηθεί από μια διπλή απειρία δυναμικών, διαπιστώνουμε ότι η απαίτηση η οικογένεια αυτή να έχει μια αδελφική οικογένεια ευθειών περιορίζει πολύ σημαντικά το πλήθος αυτό. Το δυναμικό, καθώς και η αδελφική οικογένεια ευθειών, βρίσκονται στη συνέχεια με τον τρόπο που περιγράψαμε.
Στο δεύτερο κομμάτι της εργασίας, παρά τις περιοριστικές 'απλουστευτικές' συνθήκες που επιβάλαμε, καταλήξαμε σε μια αρκετά γενική σχέση, την (3.13). Αυτή είναι η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί μια ισοενεργειακή οικογένεια τροχιών (με μηδενική ενέργεια), που παράγεται από ομογενές δυναμικό, ώστε να είναι αδελφική με κάποια ευθεία που διέρχεται από την αρχή τών αξόνων και παράγεται από το ίδιο δυναμικό. Εάν, λοιπόν, ισχύει η σχέση (3.13), υπάρχει ζεύγος $\{\kappa,\lambda\}$ για το οποίο το ερώτημά μας να έχει θετική απάντηση. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το δυναμικό, μέσω τού υπολογισμού τής συνάρτησης $R(x,y)$.
Ενδιαφέρον έχει η ειδική περίπτωση κατά την οποία ο παρονομαστής $\Pi(x,y)$ που εισαγάγαμε μηδενίζεται. Οι τριάδες $\{\kappa,\lambda,\gamma\}$ που μηδενίζουν το Π συνδέονται με τη σχέση (3.38). Αυτή τη σχέση την εξετάζουμε από τις εξής δύο πλευρές:

α) Με διδόμενο γ και $\lambda = \lambda_0$ η (3.38) μάς δίνει το αντίστοιχο κ_0 και μάς οδηγεί στο δυναμικό (3.41)

β) Η ίδια σχέση, (3.38), γράφεται ως ΔΕΜΠ πρώτης τάξης, με άγνωστη τη συνάρτηση $\gamma(x,y)$, στη μορφή (3.44). Διαπιστώνουμε ότι η (3.44 λύνεται αναλυτικά. Μπορούμε, δηλαδή, να βρούμε όλες τις οικογένειες $\gamma(x,y)$) που (για προκαθορισμένα κ_0, λ_0) οδηγούν σε $\Pi = 0$ και, επίσης, σε ομογενή δυναμικά (3.41) ή (3.43), που τις παράγουν ισοενεργειακά. Αυτές οι οικογένειες δίνονται από τη σχέση (3.57).

Βιβλιογραφία

[1] Bozis, G.: *Inverse problem with two-parametric families of planar orbits*, Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy 31 (1983), 129-142

[2] Bozis, G.: *Szebehely's inverse problem for finite symmetrical material concentrations*, Astronomy & Astrophysics 134 (1984), 360-364

[3] Bozis, G.: *The inverse problem of dynamics: basic facts*, Inverse Problems 11 (1995), 687-708.

[4] Bozis, G. & Anisiu, M.-C.: *Families of straight lines in planar potentials*, Romanian Astronomical Journal vol. 11, no. 1 (2001), 27-43

[5] Broucke, R. & Lass, H.: *On Szebehely's equation for the potential of a prescribed family of orbits*, Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy 16 (1977), 215-225

[6] Morrison, F. : *Modification of an equation of Szebehely*, Celestial Mechanics & Dynamical Astronomy 16 (1977), 227-228

[7] Szebehely, V.: *On the determination of the potential by satellite observations* (Convegno internazionale sulla rotazione della Terra e osservazioni di satelliti artificiali, Cagliari, Italy, Apr. 16-18, 1973), Cagliari, Universita, Facolta di Scienze, seminario, rendiconti, vol. 44, supplement (1974), 31-35

[8] Galiulin, A. S.: *Inverse Problems of Dynamics*, Mir Publishers, Moscow, 1984

[9] Mishina, A. P. & Proskuryakov, I. V.: *Higher algebra*, Pergamon Press, Oxford, New York, 1965

[10] Μπόζης, Γ.: *Γενικά Μαθηματικά*, Υπηρεσία δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 1975

[11] Μπόζης, Γ.: *Διαφορικές Εξισώσεις και Εφαρμογές*, Υπηρεσία δημοσιευμάτων Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 2004

[12] Χατζηδημητρίου, Ι.: *Θεωρητική Μηχανική*, Εκδόσεις Γιαχούδη, Θεσσαλονίκη, 2000