

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ  
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΕΙΣ  
ΠΡΟΣΑΥΞΗΣ ΜΑΖΑΣ ΣΕ  
ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΑΣΤΕΡΕΣ

του  
ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΗΛΩΝΙΔΗ  
Α.Ε.Μ. 10951

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ:  
José A. Font (Universidad de Valencia)  
Νικόλαος Στεργιούλας (Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης)

Θεσσαλονίκη  
Σεπτέμβριος 2006

Στην οικογένειά μου.

---

## Ευχαριστίες

Από τη θέση αυτή, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και επιβλέποντα αυτής της πτυχιακής Νικόλαο Στεργιούλα. Πρώτα από όλα θα ήθελα να τον ευχαριστήσω για τη βοήθειά του, χωρίς την οποία δε θα μπορούσα να ολοκληρώσω αυτή την εργασία. Θα ήθελα όμως να τον ευχαριστήσω και για το ενδιαφέρον που έδειξε όσες φορές χρειάστηκα τη βοήθειά του στα 4 χρόνια που τον γνωρίζω. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή και συνεπιβλέποντα αυτής της πτυχιακής, José Antonio Font, από το Πανεπιστήμιο της Valencia, για τη βοήθειά του και την πολύ θερμή φιλοξενία στο συγκεκριμένο Πανεπιστήμιο, κατά τη διάρκεια της τετράμηνης παραμονής μου στη Valencia. Η υπομονή του και οι συνεχείς ενθαρρύνσεις του δημιούργησαν το ιδανικό ίσως περιβάλλον εργασίας για την εκπόνηση μιας πτυχιακής εργασίας.

## Περίληψη

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η αριθμητική μελέτη της διδιάστατης, σχετικιστικής προσαύξησης μάζας σε μια μελανή οπή Schwarzschild. Αρχικά, γενικεύουμε κάποιες προηγούμενες εργασίες εισάγοντας μια βαθμίδα πυκνότητας στις αρχικές συνθήκες της ροής. Επίσης χρησιμοποιούμε μια σειρά τιμών για την ταχύτητα της ροής, την ταχύτητα του ήχου, τον αδιαβατικό δείκτη και τη βαθμίδα πυκνότητας. Τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας φανερώνουν ότι όχι μόνο η μορφολογία αλλά και η ευστάθεια της ροής εξαρτώνται σε μεγάλο βαθμό από τις παραπάνω παραμέτρους. Πιο συγκεκριμένα, η μελέτη μας εστιάζεται σε ένα συγκεκριμένο είδος αστάθειας, τη λεγόμενη αστάθεια flip-flop, η οποία σχετίζεται με τον κώνο προσαύξησης στο πίσω μέρος της περιοχής προσαύξησης. Σε ορισμένες περιπτώσεις εμφανίζονται σημαντικές διαφορές σε σχέση με προηγούμενες Νευτώνεις μελέτες.

# Περιεχόμενα

<b>1 Το φυσικό πρόβλημα και οι βασικές εξισώσεις.</b>	<b>6</b>
1.1 Το πρόβλημα της προσαύξησης μάζας σε συμπαγείς αστέρες. . . . .	6
1.2 Οι εξισώσεις της κλασικής υδροδυναμικής. . . . .	9
1.3 Υπερβολικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους. .	12
1.4 Οι εξισώσεις της υδροδυναμικής στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας. . . . .	13
1.5 Ο φορμαλισμός των Banyuls et al. . . . .	14
1.6 Εξισώσεις για $2D$ , μη αξονικά συμμετρική προσαύξηση μάζας σε συμπαγείς αστέρες. . . . .	17
<b>2 Περιγραφή του κώδικα.</b>	<b>19</b>
2.1 Το πρόβλημα του Riemann. . . . .	19
2.2 Κατασκευή του πλέγματος. . . . .	20
2.3 Η μέθοδος του Godunov. . . . .	21
2.4 Περιορισμοί κλίσεων. . . . .	23
2.5 Τα βασικά σημεία του κώδικα. . . . .	23
2.6 Αρχικές και οριακές συνθήκες. . . . .	24
<b>3 Αποτελέσματα.</b>	<b>25</b>
3.1 Εισαγωγικά. . . . .	25
3.2 Η εξάρτηση της ροής από το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης. . . . .	28
3.3 Η εξάρτηση της ροής από τον αριθμό Mach και τον αδιαβατικό δείκτη. .	38
3.4 Η εξάρτηση της ροής από τη βαθμιδα πυκνότητας. . . . .	47
<b>4 Συμπεράσματα.</b>	<b>63</b>

# 1 Το φυσικό πρόβλημα και οι βασικές εξισώσεις.

## 1.1 Το πρόβλημα της προσαύξησης μάζας σε συμπαγείς αστέρες.

Το 50% περίπου των αστέρων που έχουν παρατηρηθεί στη γειτονιά του Ήλιου είναι μέλη διπλών ή πολλαπλών συστημάτων. Σε πολλές περιπτώσεις τα μέλη του συστήματος είναι καλά χωρισμένα (μεγάλος ημιάξονας  $\gg$  αστρικής ακτίνας) και το κάθε αστέρι έχει από πολύ μικρή ως και μηδενική επίδραση στην δομή και την εξέλιξη του συνοδού του. Παρόλα αυτά κάποια αστροφυσικά φαινόμενα είναι άμεσες συνέπειες της πολύ μικρής απόστασης (μεγάλος ημιάξονας  $\sim$  αστρική ακτίνα) μεταξύ των μελών ενός διπλού συστήματος. Παραχάτω ότια επικεντρωθούμε σε εκείνα τα φαινόμενα που σχετίζονται με ανταλλαγή μάζας μεταξύ των μελών του συστήματος καθώς και στην περίπτωση που ένας από τους δύο αστέρες εκρήγγνυται ως υπερκαινοφανής.

Η βασική δύναμη μεταξύ των αστέρων ενός συστήματος είναι βαρυτικής φύσεως και δίνεται από τον νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα:

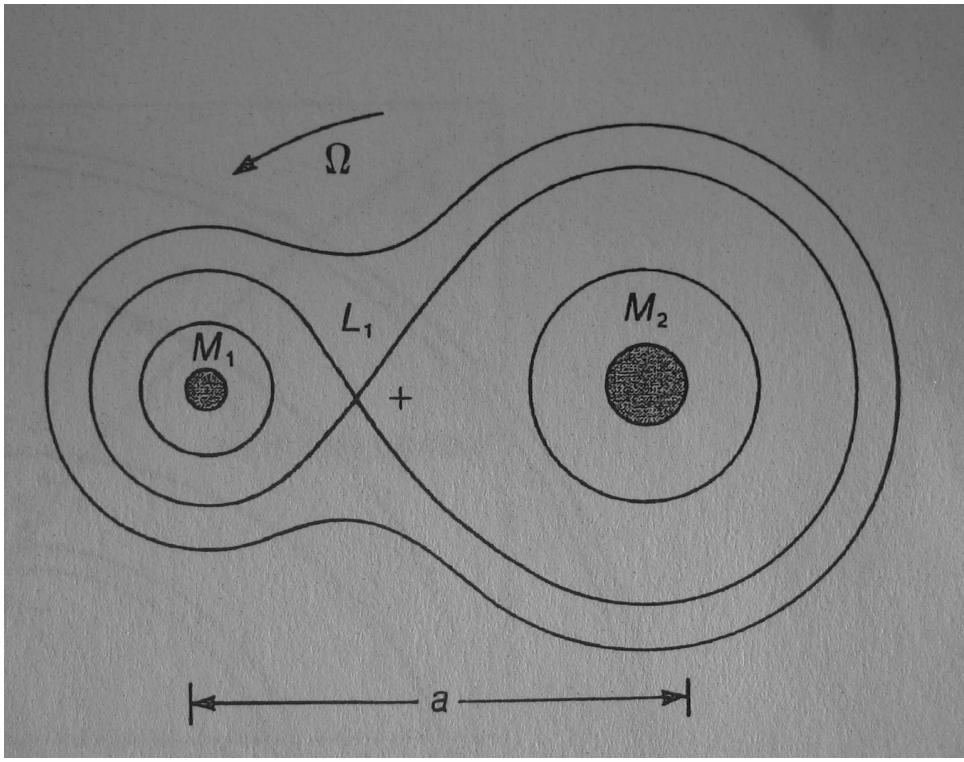
$$F = G \frac{M_1 M_2}{r^2} \quad (1)$$

όπου  $M_1, M_2$  είναι οι μάζες των δύο μελών,  $G$  η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και  $r$  η μεταξύ τους απόσταση.

Στο σχήμα 1 φαίνονται τέσσερις ισοδυναμικές επιφάνειες για ένα διπλό σύστημα αστέρων. Οι δύο εσωτερικές επιφάνειες που περιβάλλουν τους αστέρες είναι σχεδόν σφαιρικές. Όσο πλησιάζουμε τον κάθε αστέρα οι επιφάνειες αυτές διαφέρουν όλο και λιγότερο από τις αντίστοιχες ισοδυναμικές επιφάνειες για ένα απομονωμένο αστέρα. Μια μοναδική επιφάνεια τέμνει τον εαυτό της σε ένα σημείο  $L_1$  που καλείται εσωτερικό Λαγκρανζιανό σημείο. Αυτή η επιφάνεια ορίζει δύο περιοχές κάθε μια από τις οποίες περιβάλλει έναν αστέρα και οι οποίες καλούνται λοβοί του Roche.

Οι ισοδυναμικές επιφάνειες που περικλείουν μόνο ένα αστέρι βρίσκονται μέσα στο λοβό Roche του αστεριού αυτού. Οι επιφάνειες όμως που περικλείουν και τα δύο άστρα βρίσκονται έξω από τους λοβούς του Roche. Μιλώντας γενικά ένας λοβός Roche δεν είναι σφαίρα αλλά δεν διαφέρει πολύ από μια σφαίρα.

Υπάρχουν τρείς κατηγορίες διπλών συστημάτων. Τα αποχωρισμένα ζεύγη, όπου η φωτόσφαιρα κάθε αστέρα βρίσκεται μέσα στον αντίστοιχο λοβό Roche, τα ημιαποχωρισμένα ζεύγη όπου η φωτόσφαιρα του ενός μέλους ταυτίζεται με τον αντίστοιχο λοβό Roche, ενώ η φωτόσφαιρα του άλλου μέλους βρίσκεται μέσα στον αντίστοιχο λοβό Roche (τα δύο μέλη ονομάζονται μέλος επαφής και αποχωρισμένο μέλος αντίστοιχως) και τα ζεύγη σε επαφή, όπου η φωτόσφαιρα κάθε μέλους είναι ίση ή και μεγαλύτερη από το λοβό Roche. Στην περίπτωση αυτή, που είναι και η πιο συνηθισμένη, ένα κοινό κέλυφος βρίσκεται πάνω από την εσωτερική κριτική επιφάνεια που περιβάλλει τα δύο μέλη και εμποδίζει την ανεξάρτητη παρατήρηση τους. Αντιθέτως τα αποχωρισμένα μέλη είναι πολύ χρήσιμα από πλευράς παρατήρησης γιατί από τη μελέτη τους μπορούμε να αντλήσουμε χρήσιμες πληροφορίες για τις μάζες και τις ακτίνες των αστέρων. Ουσιαστικά, τα μέλη των αποχωρισμένων ζευγών εξελίσσονται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Το κύριο δυναμικό χαρακτηριστικό που διακρίνει τα αποχωρισμένα



Σχήμα 1: Ισοδυναμικές καμπύλες στο ισημερινό επίπεδο ενός διπλού συστήματος που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$  γύρω από το κέντρο μάζας του. Αναδημοσίευση από Richard Bowers, Terry Deeming, Astrophysics I, II, Jones and Bartlett publishers, inc. (1984).

από τα ημιαποχωρισμένα ζεύγη είναι η μεταφορά μάζας από το μέλος με πλήρη το λοβό του Roche προς το συνοδό του.

Θα μελετήσουμε τώρα την εξέλιξη ενός ημιαποχωρισμένου διπλού συστήματος και ότι δούμε σε ποια ακριβώς εξελικτικά στάδια έχουμε προσαύξηση μάζας σε έναν συμπαγή αστέρα. Ως παράδειγμα ότι δούμε σε ένα σύστημα που αποτελείται αρχικά από αστέρες με μάζες 20 και 6 μάζες Ήλιου που κινούνται σε κυκλική τροχιά με περίοδο 4.4 ημέρες. Θεωρούμε ότι και τα δύο αστέρια βρίσκονται αρχικά στην κύρια ακολουθία.

Σύμφωνα με παράδειγμα εξέλιξης των Richard Bowers, Terry Deeming, Astrophysics I, II, Jones and Bartlett publishers, inc. (1984), το αστέρι με τη μεγαλύτερη μάζα εξελίσσεται ταχύτερα από το συνοδό του καίγοντας το υδρογόνο του μετά από 6.16 εκατομμύρια χρόνια. Η ζωή του συνοδού αστέρα στην κύρια ακολουθία είναι περίπου 10 φορές μεγαλύτερη. Στη συνέχεια το άστρο που έχει εξελιχθεί γρηγορότερα γεμίζει το λοβό Roche του και ύλη μεταφέρεται μέσω ενός δίσκου προσαύξησης στον συνοδό αστέρα. Η διαδικασία αυτή διαρκεί περίπου 20.000 χρόνια.

Μετά από περίπου 500.000 χρόνια η ύλη που κινούνταν στο δίσκο γύρω από τον συνοδό αστέρα ότι προσαύξηθεί σε αυτόν, σχηματίζοντας έναν αστέρα μάζας 20.6 ηλιακών μαζών. Ο πρωτεύων αστέρας, που τώρα έχει μικρότερη μάζα από το συνοδό του, έχει απομείνει με 5.4 μάζες Ήλιου και συνεχίζει την εξέλιξη του χωρίς όμως να μπορεί να γεμίσει το λοβό Roche που τον περιβάλλει. Σε 600.000 χρόνια ότι κάψει το ήλιο του και στη συνέχεια ότι περάσει στην κάυση των C, O, και Si σε όλο και μικρότερες χρονικές κλίμακες. Στο στάδιο αυτό είναι έτοιμος να εκραγεί ως υπερκαιν-

οφανής. Εν τω μεταξύ, ο συνοδός αστέρας συνεχίζει την εξέλιξή του ως αστέρας της κύριας ακολουθίας με μάζα 20.6 ηλιακές μάζες. Στο σημείο αυτό να τονίσουμε και πάλι ότι στο συγκεκριμένο στάδιο εξέλιξης του συστήματος ο αστέρας με τη μεγαλύτερη μάζα είναι αυτός που ανήκει στην κύρια ακολουθία, ενώ ο αστέρας που έχει απομείνει με τη μικρότερη μάζα είναι αυτός που έχει εξελιχθεί περισσότερο.

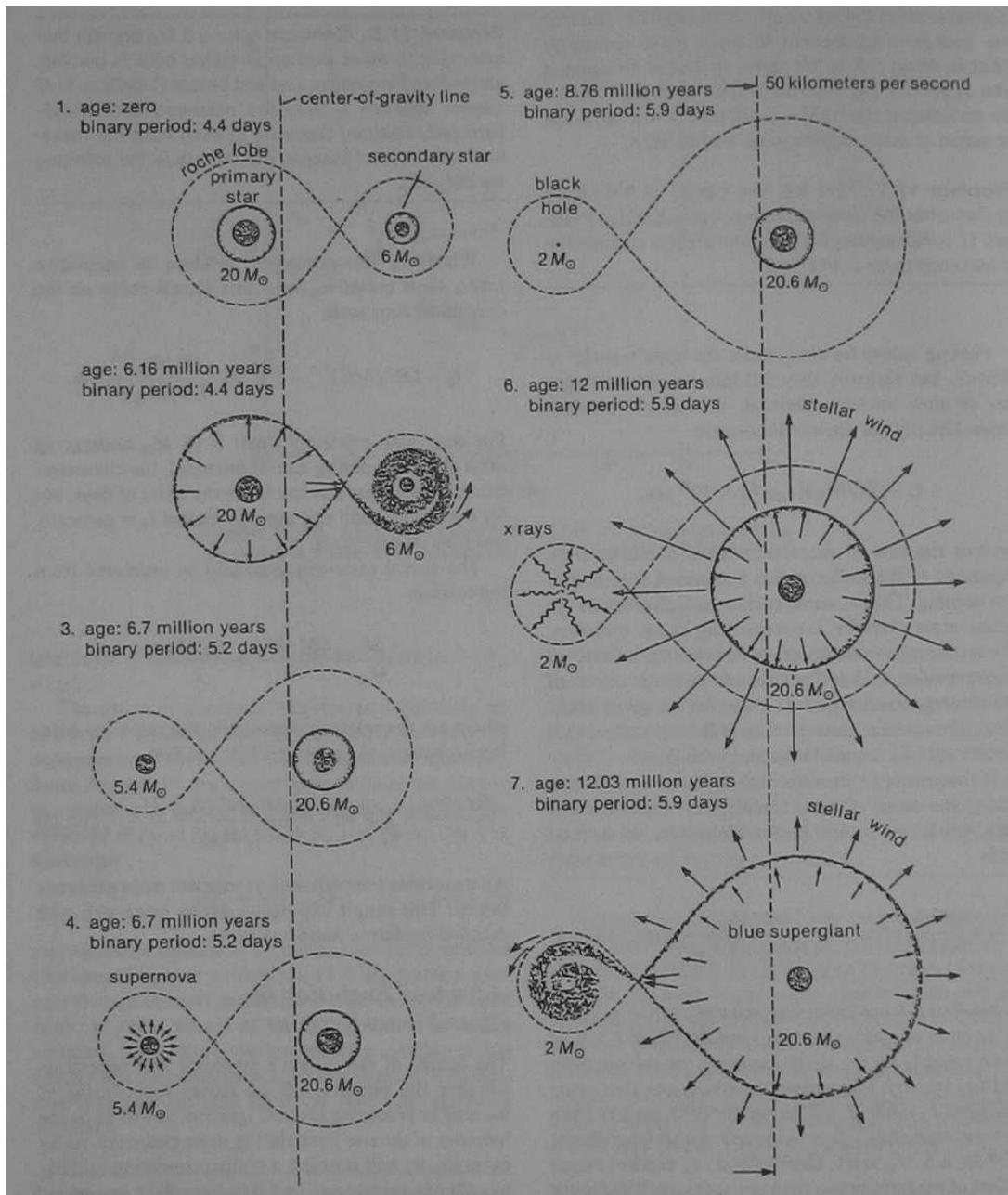
Από τη στιγμή που θα εκραγεί ο πρωτεύων αστέρας ως υπερκαινοφανής θα εκσφενδονίσει στον γύρω χώρο υλικό συνολικής μάζας 3.4 Ηλιακών μαζών και θα αφήσει ένα υπόλειμμα μάζας 2 Ηλιακών μαζών το οποίο πολύ γρήγορα θα καταρρεύσει είτε σε μελανή οπή είτε σε αστέρα νετρονίων. Η έκρηξη αυτή δε θα διαλύσει το σύστημα αλλά η απώλεια μάζας από το σύστημα θα αυξήσει την ακτίνα της τροχιάς και πιθανόν να μεταβάλλει διάφορα χαρακτηριστικά της, όπως την εκκεντρότητά της.

Τελικά αφού και τα δύο αστέρια μεταφερθούν στις νέες τους τροχιές θα δημιουργηθεί μια νέα κατάσταση ισορροπίας. Το νέο σύστημα θα είναι πλέον αποχωρισμένο και οι νέες τροχιές πιθανόν να είναι αρκετά έκκεντρες. Οι παλλιριογόνες δυνάμεις όμως θα ξανακάνουν τις τροχιές κυκλικές μετα από κάποια εκατομμύρια χρόνια.

Ο συνοδός αστέρας τώρα που όσο χρόνο παραμένει στην κύρια ακολουθία είναι φασματικού τύπου Ο ή Β, μόλις εξαντλήσει την καύση του υδρογόνου του διαστέλλεται και γίνεται ένας μπλε υπεργίγαντας. Κατά τη διάρκεια των πρώτων 30.000 ετών της φάσης της διαστολής του ο αστέρας χάνει μάζα με τη μορφή ισχυρού αστρικού ανέμου υποκινούμενου από την υψηλή πίεση της ακτινοβολίας στα εξωτερικά του στρώματα. Καθώς λοιπόν οι δύο αστέρες περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας του συστήματος ύλη προσαυξάνεται στο συμπαγή αστέρα και ένα μεγάλο μέρος της δυναμικής της ενέργειας μετατρέπεται σε ακτίνες Χ. Η ηλικία του συστήματος είναι πλέον 12 εκατομμύρια χρόνια.

Μετά από 30.000 χρόνια ο διαστελλόμενος μπλε υπεργίγαντας γεμίζει το λοβό Roche του και ένα νέο στάδιο μεταφοράς μάζας ξεκινάει. Ένας δίσκος προσαύξησης σχηματίζεται γύρω από τον συμπαγή αστέρα ο οποίος εκπέμπει κυρίως στο υπεριώδες. Αν τώρα ο συνοδός αστέρας υποστεί έκρηξη σούπερνόβα παρόμοια με αυτή του πρωτεύοντος αστέρα, τότε ένα μέρος από το υλικό που θα εκτοξευτεί στον μεσοαστρικό χώρο θα προσαυξηθεί στον συμπαγή αστέρα.

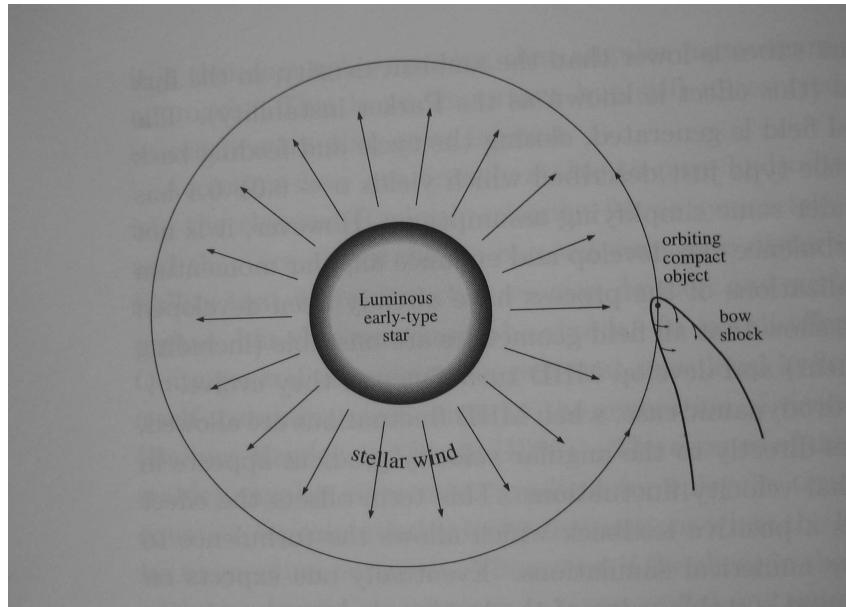
Από την παραπάνω ανάλυση παρατηρούμε ότι κατά την εξέλιξη ενός διπλού συστήματος υπάρχουν πολλά στάδια κατά τα οποία συμβαίνει προσαύξηση μάζας σε έναν συμπαγή αστέρα. Η προσαύξηση αυτή όπως είδαμε μπορεί να γίνει είτε με τη μορφή ενός ισχυρού αστρικού ανέμου, είτε με υπερχείλιση του λοβού Roche του συνοδού αστέρα, ή ακόμα και από μια άλλη περίπτωση όπου είναι δυνατόν να έχουμε προσαύξηση μάζας σε έναν συμπαγή αστέρα. Στις μεγάλης μάζας διπλές πηγές ακτίνων Χ μπορεί να μην είναι δυνατή η σύγχρονη περιστροφή του κανονικού αστέρα. Στην περίπτωση αυτή επειδή η στροφορμή του κανονικού αστέρα αποτελεί ένα μεγάλο μέρος της ολικής στροφορμής του συστήματος είναι δυνατόν ο κανονικός αστέρας να γεμίσει το λοβό Roche χωρίς να μεταφέρει μάζα στο συμπαγή συνοδό απλώς μόνο συμπεριλαμβάνοντας τον τελευταίο μέσα στο λοβό του. Το σύστημα εξελίσσεται ως διπλός πυρήνας και αν δεν διαλυθεί από μια ενδιάμεση έκρηξη οι δύο πυρήνες τελικά λόγω των δυνάμεων τριβής θα αποτελέσουν ένα μόνο σώμα. Μέχρι όμως να συμβεί αυτό ο συμπαγής αστέρας προσαυξάνει μάζα από τον κανονικό.



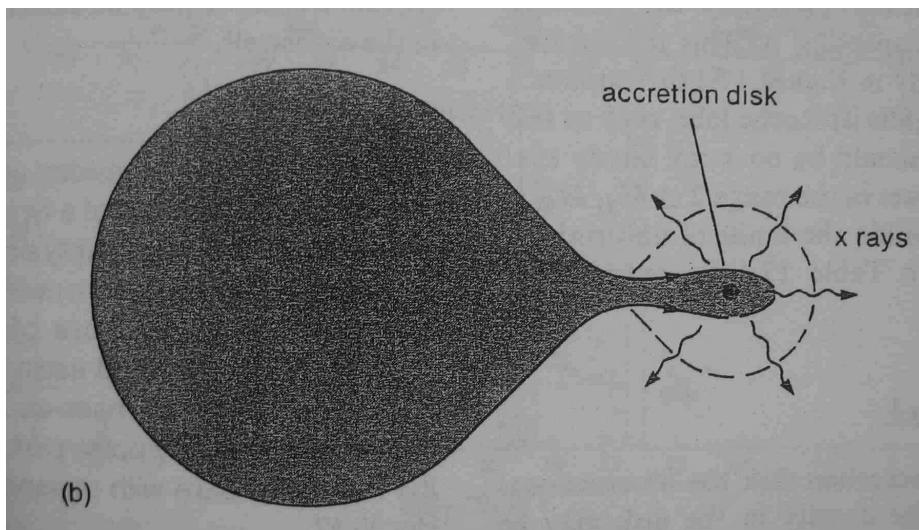
Σχήμα 2: Τα κύρια εξελικτικά στάδια ενός διπλού συστήματος που αποτελείται από έναν υπεργίγαντα και μια μελανή οπή. Αναδημοσίευση από Richard Bowers, Terry Deeming, Astrophysics I, II, Jones and Bartlett publishers, inc. (1984).

## 1.2 Οι εξισώσεις της κλασικής υδροδυναμικής.

Για να περιγράψουμε την κίνηση ενός ρευστού επιλέγουμε κάποιες συναρτήσεις που στη γενική περίπτωση εξαρτώνται από τη θέση  $\mathbf{r}$  και τον χρόνο  $t$ . Μια δυνατή επιλογή είναι να διαλέξουμε τις λεγόμενες πρωταρχικές ή φυσικές μεταβλητές που είναι η πυκνότητα  $\rho$ , η ταχύτητα  $\mathbf{V} = (u, v, w)$  και η πίεση  $p$ . Μια εναλλακτική επιλογή θα ήταν να επιλέξουμε τις λεγόμενες διατηρούμενες μεταβλητές: την πυκνότητα  $\rho$ , την ορμή  $\rho\mathbf{V} = (\rho u, \rho v, \rho w)$  και την συνολική ενέργεια ανά μονάδα μάζας  $E$ . Από φυσικής πλευράς οι διατηρούμενες μεταβλητές απορρέουν άμεσα από τις θεμελιώδεις εξισώσεις διατήρησης



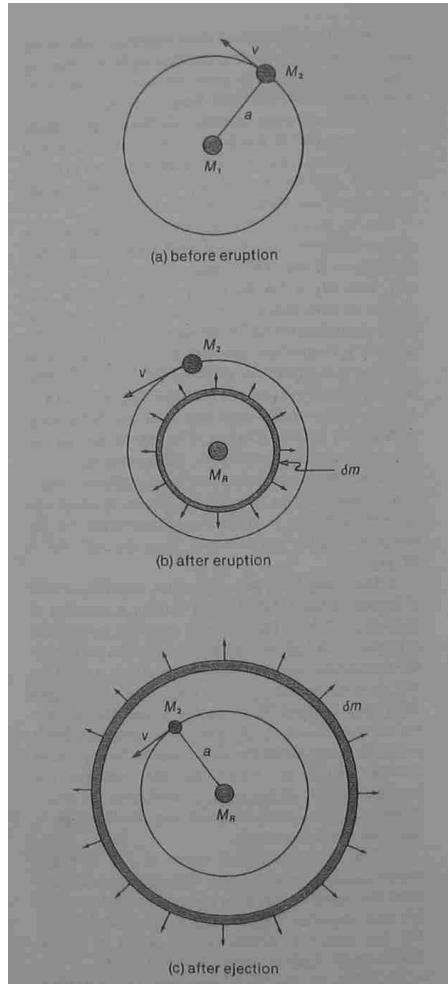
Σχήμα 3: Προσαύξηση μάζας σε συμπαγή αστέρα μέσω ισχυρού αστρικού ανέμου. Αναδημοσίευση από Juhan Frank, Andrew King, Derek Raine, Accretion Power in Astrophysics, Cambridge University Press (2002).



Σχήμα 4: Προσαύξηση μάζας σε συμπαγή αστέρα μέσω υπερχείλισης του λοβού Roche του συνοδού αστέρα. Αναδημοσίευση από Richard Bowers, Terry Deeming, Astrophysics I, II, Jones and Bartlett publishers, inc. (1984).

της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Από υπολογιστικής πλευράς υπάρχουν πολλά πλεονεκτήματα αν χρησιμοποιούμε διατηρούμενες μεταβλητές. Στο θέμα αυτό όμως θα επανέλθουμε παρακάτω.

Για να δώσουμε τώρα τις βασικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση ενός ρευστού στην κλασική υδροδυναμική θα κάνουμε τις εξής δύο υποθέσεις: 1) θα θεωρήσουμε ότι το ρευστό που θέλουμε να περιγράψουμε είναι ιδανικό, θα αγνοήσουμε δηλαδή το ιξώδες και 2) θα κάνουμε την υπόθεση των αδιαβατικών κινήσεων, δηλαδή



Σχήμα 5: Προσαύξηση μάζας σε συμπαγή αστέρα μετά από μια έκρηξη υπερκαινοφανή. Αναδημοσίευση από Richard Bowers, Terry Deeming, Astrophysics I, II, Jones and Bartlett publishers, inc. (1984).

δε θα λάβουμε υπόψη φαινόμενα μεταφοράς ωρμότητας. Τις υποθέσεις αυτές θα τις κρατήσουμε μέχρι το τέλος αυτής της εργασίας. Το ζητούμενο σύστημα των εξισώσεων είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{V} \otimes \mathbf{V} + pI) = \rho \mathbf{g} \quad (3)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla[(E + P)\mathbf{V}] = \rho \mathbf{V} \mathbf{g} \quad (4)$$

όπου  $I$  ο μοναδιαίος τανυστής,  $\mathbf{g}$  η επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας και  $E$  η συνολική πυκνότητα ενέργειας (το άθροισμα δηλαδή κινητικής και εσωτερικής πυκνότητας ενέργειας,  $E = \frac{1}{2}\rho V^2 + \rho e$ , όπου  $e$  η εσωτερική ενέργεια ανά μονάδα μάζας). Το σύμβολο  $\otimes$  χρησιμοποιείται για να δηλώσει το τανυστικό γινόμενο. Ισχύει δηλαδή:

$$\mathbf{V} \otimes \mathbf{V} = \begin{bmatrix} u^2 & uv & uw \\ vu & v^2 & vw \\ wu & wv & w^2 \end{bmatrix}$$

Η πρώτη από τις εξισώσεις αυτές είναι η γνωστή εξίσωση συνέχειας. Οι εξισώσεις (3) είναι οι επίσης γνωστές εξισώσεις του Euler ενώ η τελευταία εξίσωση εκφράζει την διατήρηση της ενέργειας. Τις εξισώσεις αυτές μπορούμε να τις γράψουμε και πιο αναλυτικά (παραλείποντας και την επιτάχυνση της βαρύτητας) ως εξής:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \quad (5)$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0 \quad (6)$$

$$(\rho v)_t + (\rho uv)_x + (\rho v^2 + p)_y + (\rho vw)_z = 0 \quad (7)$$

$$(\rho w)_t + (\rho uw)_x + (\rho vw)_y + (\rho w^2 + p)_z = 0 \quad (8)$$

$$E_t + [u(E + p)]_x + [v(E + p)]_y + [w(E + p)]_z = 0 \quad (9)$$

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφούν σε συμπαγή μορφή ορίζοντας ένα διάνυσμα στήλη  $\mathbf{U}$  διατηρούμενων μεταβλητών, τα διανύσματα στήλες  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{U})$  που είναι οι ροές στις  $x$ ,  $y$ ,  $z$  διευθύνσεις αντίστοιχα καθώς και ένα διάνυσμα στήλη  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$  για τις πηγές (οι οποίες εδώ είναι μηδέν). Οι εξισώσεις παίρνουν τώρα τη μορφή:

$$(\mathbf{U})_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x + \mathbf{G}(\mathbf{U})_y + \mathbf{H}(\mathbf{U})_z = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (10)$$

με

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ E \end{bmatrix} \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ u(E + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ v(E + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ w(E + p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Αξίζει στο σημείο αυτό να παρατηρήσουμε ότι οι ροές στο σύστημα των εξισώσεων (10) είναι συναρτήσεις των διατηρούμενων μεταβλητών. Κάθε σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής αυτής καλείται σύστημα νόμων διατήρησης. Για να κλείσει το συγκεκριμένο σύστημα των εξισώσεων πρέπει να βρούμε και μια επιπλέον εξίσωση που είναι η καταστατική εξίσωση στην οποία θα υπακούει το ρευστό. Θα θεωρήσουμε εδώ την καταστατική εξίσωση του ιδανικού ρευστού:

$$p = (\gamma - 1)\rho e \quad (11)$$

όπου γ ο αδιαβατικός δείκτης που για ένα συγκεκριμένο αέριο θα θεωρηθεί σταθερός. Τέλος, να αναφέρουμε ότι η διαφορική μορφή των υδροδυναμικών εξισώσεων που χρησιμοποιούμε προϋποθέτει ομαλές λύσεις γιατί σε περίπτωση εμφάνισης ασυνεχειών, όπως τα χρονιστικά κύματα, οι μερικές παράγωγοι απειρίζονται.

### 1.3 Υπερβολικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με συστήματα διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^m a_{ij}(x, t, u_1, \dots, u_m) \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_i(x, t, u_1, \dots, u_m) = 0 \quad (12)$$

για  $i=1,\dots,m$ . Αυτά είναι συστήματα με εξισώσεων με αγνώστους. Αν οι συντελεστές  $a_{ij}$  και  $b_i$  είναι όλοι σταθεροί τότε το σύστημα είναι γραμμικό με σταθερούς συντελεστές. Το σύστημα είναι όμως γραμμικό ακόμα και αν οι συντελεστές  $b_i$  εξαρτώνται γραμμικά από τα  $u_j$ , ενώ καλείται ημιγραμμικό αν τα  $a_{ij}$  εξαρτώνται από τα  $u_j$ .

Παρατηρούμε τώρα ότι οι νόμοι διατήρησης έτσι όπως τους ορίσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σχέση (10), μπορούν να γραφούν σε ημιγραμμική μορφή. Για απλοποίηση θα θεωρήσουμε μόνο τη διάσταση  $x$ . Έχουμε:

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}$$

Άρα η (10) γράφεται:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0 \quad (13)$$

όπου  $\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$  η Ιακωβιανή της ροής  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ . Δηλαδή:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

Θα δώσουμε τώρα δυο ορισμούς για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα ενός πίνακα. Οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  ενός πίνακα  $\mathbf{A}$  είναι οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου:

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Οι ιδιοτιμές ενός ιακωβιανού πίνακα όπως αυτός της εξίσωσης (14) καλούνται και ιδιοτιμές του αντίστοιχου συστήματος εξισώσεων. Από φυσικής πλευράς οι ιδιοτιμές αυτές αναπαριστούν ταχύτητες διάδοσης πληροφορίας. Το δεξί ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα  $\mathbf{A}$  που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  είναι ένα διάνυσμα  $\mathbf{K}^{(i)} = [k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_m^{(i)}]^T$  τέτοιο ώστε:  $\mathbf{A}\mathbf{K}^i = \lambda_i \mathbf{K}^i$ . Με αντίστοιχο τρόπο ορίζουμε και ένα αριστερό ιδιοδιάνυσμα ενός πίνακα  $\mathbf{A}$  το οποίο αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή  $\lambda_i$  του  $\mathbf{A}$ . Πρόκειται για ένα διάνυσμα  $\mathbf{L}^{(i)} = [l_1^{(i)}, l_2^{(i)}, \dots, l_m^{(i)}]^T$  τέτοιο ώστε:  $\mathbf{L}^i \mathbf{A} = \lambda_i \mathbf{L}^i$ .

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του υπερβολικού συστήματος. Ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής (12) λέγεται υπερβολικό σε ένα σημείο  $(x, t)$  αν η ιακωβιανή του έχει με πραγματικές ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  και ένα αντίστοιχο σύνολο με γραμμικά ανεξάρτητων δεξιών ιδιοδιανυσμάτων  $\mathbf{K}^{(1)}, \dots, \mathbf{K}^{(m)}$ . Το σύστημα είναι αυστηρά υπερβολικό αν οι ιδιοτιμές  $\lambda_i$  είναι όλες διαφορετικές.

## 1.4 Οι εξισώσεις της υδροδυναμικής στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας.

Αν θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός ρευστού κοντά σε έναν συμπαγή αστέρα είμαστε υποχρεωμένοι να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις της υδροδυναμικής με τη μορφή που έχουν αυτές στη γενική θεωρία σχετικότητας. Αυτό συμβαίνει επειδή εκτός από τις πολύ υψηλές ταχύτητες που αναπτύσσονται, έχουμε και ένα πολύ ισχυρό βαρυτικό πεδίο. Να σημειώσουμε στο σημείο αυτό ότι στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε

ένα σύστημα μονάδων στο οποίο  $G=c=1$ , όπου  $G$  η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και  $c$  η ταχύτητα του φωτός. Οι εξισώσεις λοιπόν που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$(\rho u^\mu)_{;\mu} = 0 \quad (15)$$

$$(T^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (16)$$

όπου  $T^{\mu\nu}$  (με  $\mu, \nu$  συμβολίζουμε τους δείκτες που παίρνουν τιμές 0, 1, 2 και 3) είναι ο τανυστής ενέργειας ορμής του ρευστού και το σύμβολο  $(;)$  εκφράζει τη συναλλοίωτη παράγωγο. Η πρώτη από αυτές είναι η εξισωση συνέχειας και η δεύτερη εκφράζει τον τοπικό νόμο διατήρησης του τανυστή ενέργειας ορμής. Ο Τανυστής ενέργειας ορμής για ένα ιδανικό ρευστό δίνεται από τη σχέση:

$$T^{\mu\nu} = (E + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (17)$$

αν λάβουμε υπόψη ότι η συνολική πυκνότητα ενέργειας του ρευστού είναι το άθροισμα της πυκνότητας ενέργειας λόγω της μάζας του και της πυκνότητας της εσωτερικής του ενέργειας, δηλαδή  $E = \rho + \rho e$ , τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται:

$$T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \quad (18)$$

όπου έχουμε εισαγάγει την ποσότητα  $h$ , που είναι η σχετικιστική ειδική ενθαλπία και ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$h = 1 + \epsilon + p/\rho \quad (19)$$

Για να κλείσει το σύστημα των εξισώσεων απαιτείται και εδώ, όπως και στην κλασική περίπτωση, να εισαγάγουμε μια καταστατική εξισωση. Θα κρατήσουμε λοιπόν την εξισωση (11) του ιδανικού ρευστού.

Μια πολύ σημαντική ποσότητα που θα προκύψει από την καταστατική εξισωση είναι η ταχύτητα του ήχου  $c_s$ , η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$hc_s^2 = x + (p/\rho^2)\kappa \quad (20)$$

με  $x = \partial p / \partial \rho |_\epsilon$  και  $\kappa = \partial p / \partial \epsilon |_\rho$ .

## 1.5 Ο φορμαλισμός των Banyuls et al.

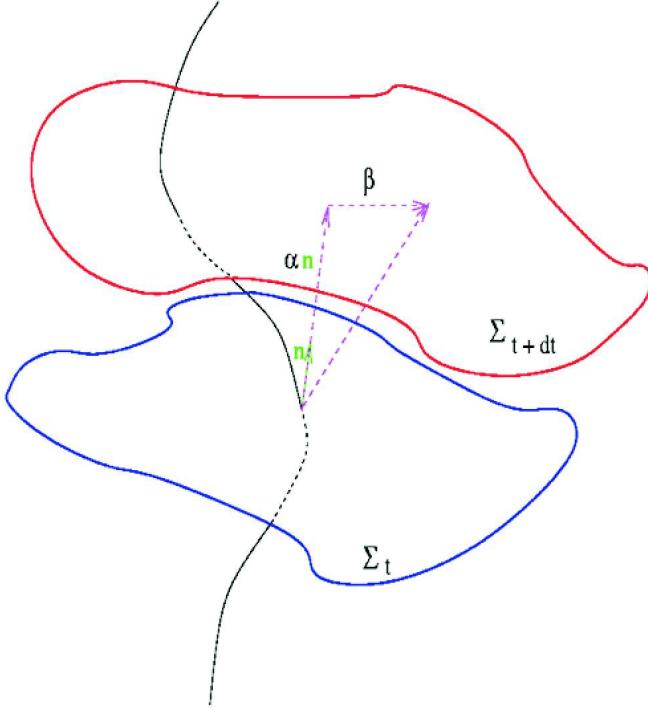
Έστω  $M$  μια γενική μορφή χωρόχρονου, η οποία περιγράφεται από ένα τετραδιάστατο μετρικό τανυστή  $g_{\mu\nu}$ . Σύμφωνα με τον φορμαλισμό 3+1 (York, 1983) το γραμμικό στοιχείο μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i)dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j \quad (21)$$

όπου  $\alpha$  η βαθμωτή συνάρτηση του χρονικού άλματος και  $\beta^i$  το διάνυσμα χωρικής μετατόπισης, ενώ  $\gamma_{ij}$  το χωρικό κομμάτι της μετρικής. Σύμφωνα με το φορμαλισμό αυτό ο χωρόχρονος υποδιαιρείται σε τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες  $\Sigma_t$  ( $t =$  σταθ.). Αν  $\mathbf{n}$  είναι ένα μοναδιαίο χρονοειδές διάνυσμα κάθετο στις υπερεπιφάνειες αυτές τότε:

$$\partial_t = \alpha \mathbf{n} + \beta^i \partial_i \quad (22)$$

με  $\mathbf{n} \cdot \partial_i = 0$ , για κάθε  $i$ . Παρατηρητές μηδενικής στροφορμής στην υπερεπιφάνεια



Σχήμα 6: Τρισδιάστατες χωροειδείς υπερεπιφάνειες στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Αναδημοσίευση από José A. Font, Numerical relativistic hydrodynamics, Lectures given at the School on “Structure and dynamics of compact objects, Albert Einstein Institute, Golm Germany, September 2004.

$\Sigma_t$  (παρατηρητές Euler), δηλαδή αυτοί που έχουν το  $\mathbf{n}$  ως τετραταχύτητα, μετράνε την ακόλουθη 3-ταχύτητα για το ρευστό:

$$v_i = \frac{\mathbf{u} \cdot \partial_i}{-\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}} \quad (23)$$

με ανταλλοίωτες συνιστώσες τις:

$$v^i = \frac{u^i}{au^t} + \frac{\beta^i}{\alpha} \quad (24)$$

και ο παρονομαστής στην εξίσωση (23) είναι ο παράγοντας Lorentz  $W = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = au^t$  που ικανοποιεί την εξίσωση:  $W = (1 - v^2)^{-1/2}$  με  $v^2 = \gamma_{ij}v^i v^j$ .

Ορίζοντας τώρα κάποιες νέες γενικευμένες μεταβλητές, οι σχετικιστικές εξισώσεις της υδροδυναμικής, σχέσεις (15) και (16), μπορούν να γραφούν ως ένα υπερβολικό σύστημα νόμων διατήρησης. Ορίζουμε λοιπόν τις εξής ποσότητες:

$$D = \rho w \quad (25)$$

$$S_j = \rho h W^2 u_j \quad (26)$$

$$E = \rho h W^2 - p \quad (27)$$

Η πρώτη από αυτές τις σχέσεις σχετίζεται με πυκνότητα μάζας ηρεμίας, η δεύτερη την πυκνότητα ορμής στην  $j$ -διεύθυνση και η τελευταία την πυκνότητα ολικής ενέργειας.

Με βάση τους παραπάνω ορισμούς το σύστημα των εξισώσεων παίρνει την παρακάτω μορφή, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε και για τις αριθμητικές εφαρμογές:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial \sqrt{\gamma} \mathbf{F}^0(\mathbf{w})}{\partial x^0} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathbf{F}^i(\mathbf{w})}{\partial x^i} \right] = \mathbf{S}(\mathbf{w}) \quad (28)$$

όπου οι ποσότητες  $\mathbf{F}^\alpha(\mathbf{w})$  είναι:

$$\mathbf{F}^0(\mathbf{w}) = (D, S_j, \tau)^T \quad (29)$$

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{w}) = \left[ D \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right), S_j \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p\delta_j^i, \tau \left( v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) + p v^i \right]^T \quad (30)$$

και οι αντίστοιχες πηγές  $\mathbf{S}(\mathbf{w})$  είναι:

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}) = \left[ 0, T^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\delta g_{\delta j} \right), \alpha \left( T^{\mu 0} \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x^\mu} - T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 \right) \right]^T \quad (31)$$

όπου  $\tau \equiv E - D$  και  $g \equiv \det g_{\mu\nu}$  η ορίζουσα του μετρικού τανυστή για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{-g} = \alpha \sqrt{\gamma} \quad (32)$$

με  $\gamma \equiv \det g_{ij}$ . Αξίζει στο σημείο αυτό να αναφέρουμε ότι οι πηγές δεν περιέχουν κανένα διαφορικό τελεστή που να επιδρά στις συνιστώσες του  $\mathbf{w}$ , το οποίο είναι μια βασική συνθήκη για να διατηρηθεί, αριθμητικά, ο υπερβολικός χαρακτήρας του συστήματος.

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (28), (29), (30) και (31) γράφουμε το σύστημα σε αναλυτική μορφή προκειμένου να δείξουμε ότι μπορούμε να πάρουμε από αυτό τις εξισώσεις της υδροδυναμικής τόσο στην ειδική θεωρία σχετικότητας, όσο και στη Νευτώνεια μηχανική, κάνοντας κάθε φορά τις απαραίτητες προσεγγίσεις. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \sqrt{\gamma} \rho W}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g} \rho W v^i}{\partial x^i} \right) = 0 \quad (33)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \sqrt{\gamma} \rho h W^2 v^j}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g} (\rho h W^2 v^i v^j + p \delta^{ij})}{\partial x^i} \right) = T^{\mu\nu} \left( \frac{\partial g_{\nu j}}{\partial x^\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\delta g_{\delta j} \right) \quad (34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left( \frac{\partial \sqrt{\gamma} (\rho h W^2 - p - \rho W)}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{-g} (\rho h W^2 - \rho W) v^i}{\partial x^i} \right) = \alpha \left( T^{\mu 0} \frac{\partial \ln \alpha}{\partial x^\mu} - T^{\mu\nu} \Gamma_{\nu\mu}^0 \right) \quad (35)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι έχουμε επίπεδο χωρόχρονο θα πρέπει το παραπάνω σύστημα εξισώσεων να αναχθεί στις εξισώσεις της υδροδυναμικής στην ειδική θεωρία σχετικότητας. Η προσέγγιση του επίπεδου χωρόχρονου μαθηματικά εκφράζεται ως εξής: θεωρούμε ότι ο μετρικός τανυστής έχει μορφή  $g = (-1, 1, 1, 1)$  όπου όλα τα μη διαγώνια στοιχεία του είναι μηδέν. Οπότε θα ισχύει:  $\sqrt{-g} = 1$  και  $\sqrt{\gamma} = 1$ . Άρα πάρνουμε:

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} + \frac{\partial \rho W v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial \rho h W^2 v^j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho h W^2 v^i v^j + p \delta^{ij})}{\partial x^i} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial (\rho h W^2 - p - \rho W)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho h W^2 - \rho W) v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (38)$$

Για να πάρουμε τώρα το Νευτώνειο όριο θεωρούμε πολύ μικρές ταχύτητες. Αναπτύσσοντας κατά Taylor τον παράγοντα Lorentz  $W$  και κρατώντας όρους μέχρι και δεύτερης τάξης παίρνουμε:  $W \simeq 1 + u^2/2$  και  $W^2 \simeq 1 + u^2$ . Επίσης στο Νευτώνειο όριο  $h \rightarrow 1$  γιατί αν αποκαταστήσουμε τις μονάδες έχουμε  $h = 1 + \epsilon/c^2 + p/(\rho c^2)$  και στη Νευτώνεια μηχανική  $c \rightarrow \infty$ . Εφαρμόζοντας όλες αυτές τις προσεγγίσεις παίρνουμε:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (39)$$

$$\frac{\partial \rho v^j}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v^i v^j + p \delta^{ij})}{\partial x^i} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial (\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 + p) v^i}{\partial x^i} = 0 \quad (41)$$

που είναι οι εξισώσεις της κλασικής υδροδυναμικής.

Οι τρεις  $5 \times 5$  Ιακωβιανοί πίνακες  $B^i$  που σχετίζονται με το σύστημα των εξισώσεων (28) είναι:

$$\mathbf{B}^i = \alpha \frac{\partial \mathbf{F}^i}{\partial \mathbf{F}^0} \quad (42)$$

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τις ιδιοτιμές και τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του πίνακα  $\mathbf{B}^x$ . Οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_0 = \alpha v^x - \beta^x (\tau \rho \nu \lambda \eta) \quad (43)$$

που σχετίζεται με τα υλικά κύματα και δύο άλλες  $\lambda_{\pm}$  που σχετίζονται με τα ακουστικά κύματα:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \{ v^x (1 - c_s^2) \pm c_s \sqrt{(1 - v^2)[\gamma^{xx}(1 - v^2 c_s^2) - v^x v^x (1 - c_s^2)]} \} - \beta^x \quad (44)$$

Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα είναι:

$$\mathbf{r}_{0,1} = \left[ \frac{\tilde{\kappa}}{hW(\tilde{\kappa} - c_s^2)}, v_x, v_y, v_z, 1 - \frac{\tilde{\kappa}}{hW(\tilde{\kappa} - c_s^2)} \right] \quad (45)$$

$$\mathbf{r}_{0,2} = [Wv^y, 2hW^2 v_x v^y, h(1 + 2W^2 v_y v^y), 2hW^2 v_z v^y, 2hW^2 v^y - Wv^y] \quad (46)$$

$$\mathbf{r}_{0,3} = [Wv^z, 2hW^2 v_x v^z, 2hW^2 v_y v^z, h(1 + 2W^2 v_z v^z), 2hW^2 v^z - Wv^z] \quad (47)$$

$$\mathbf{r}_{\pm} = \left[ 1, hW \left( v_x - \frac{v^x - \Lambda_{\pm}^x}{\gamma^{xx} - v^x \Lambda_{\pm}^x} \right), hWv_y, hWv_z, \frac{hW(\gamma^{xx} - v^x v^x)}{\gamma^{xx} - v^x \Lambda_{\pm}^x} - 1 \right]^T \quad (48)$$

με  $\tilde{\kappa} = \kappa/\rho$ ,  $\Lambda_{\pm}^i = \tilde{\lambda}_{\pm} + \tilde{\beta}^i$ ,  $\tilde{\lambda} = \lambda/\alpha$  και  $\tilde{\beta}^i = \beta^i/\alpha$ .

Η παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιείται σε προσεγγιστικές μεθόδους τύπου Godunov για να λυθούν οι σχετικιστικές εξισώσεις της υδροδυναμικής.

## 1.6 Εξισώσεις για $2D$ , μη αξονικά συμμετρική προσαύξηση μάζας σε συμπαγείς αστέρες.

Στόχος μας είναι να μελετήσουμε την προσαύξηση μάζας σε συμπαγείς αστέρες. Προκειμένου όμως η μελέτη αυτή να γίνει για μη αξονικά συμμετρικές ροές, θα περιοριστούμε σε μια διδιάστατη μελέτη του προβλήματος στο ισημερινό επίπεδο του αστέρα και γι'

αυτό θα κάνουμε χρήση μόνο των συντεταγμένων  $r$  και  $\phi$ . Έτσι από την εξίσωση (28) κρατώντας μόνο τις  $r$  και  $\phi$  συνιστώσες παίρνουμε:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[ \frac{\partial \sqrt{\gamma} \mathbf{F}^0(\mathbf{w})}{\partial x^0} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathbf{F}^r(\mathbf{w})}{\partial r} + \frac{\partial \sqrt{-g} \mathbf{F}^\phi(\mathbf{w})}{\partial \phi} \right] = \mathbf{S}(\mathbf{w}) \quad (49)$$

αν αναπτύξουμε τώρα τις μερικές παραγώγους στο αριστερό μέλος της προηγούμενης σχέσης θα πάρουμε:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^0(\mathbf{w})}{\partial x^0} + \frac{\partial \alpha \mathbf{F}^r(\mathbf{w})}{\partial r} + \frac{\partial \alpha \mathbf{F}^\phi(\mathbf{w})}{\partial \phi} = \alpha \mathbf{S}(\mathbf{w}) - \alpha \mathbf{F}^r \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial r} - \alpha \mathbf{F}^\phi \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma}}{\partial \phi} \quad (50)$$

Αν τώρα το δεξί μέλος της παραπάνω σχέσης το ονομάσουμε  $\mathbf{S}^*(\mathbf{w})$  παίρνουμε:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^0(\mathbf{w})}{\partial x^0} + \frac{\partial \alpha \mathbf{F}^r(\mathbf{w})}{\partial r} + \frac{\partial \alpha \mathbf{F}^\phi(\mathbf{w})}{\partial \phi} = \mathbf{S}^*(\mathbf{w}) \quad (51)$$

όπου το \* θα το παραλείπουμε από 'δω και πέρα εννοώντας πάντα ότι δεν χρησιμοποιούμε αυτές καθ' αυτές τις πηγές  $\mathbf{S}(\mathbf{w})$  αλλά αυτές που έχουμε ορίσει πιο πάνω ως νέες πηγές.

Εύκολα μπορεί να αποδειχθεί ότι για τις ροές και τις πηγές ισχύει:

$$\mathbf{F}^0(\mathbf{w}) = (D, S_r, S_\phi, \tau) \quad (52)$$

$$\mathbf{F}^r(\mathbf{w}) = (Dv^r, S_r v^r + p, S_\phi v^r, [\tau + p]v^r) \quad (53)$$

$$\mathbf{F}^\phi(\mathbf{w}) = (Dv^\phi, S_r v^\phi, S_\phi v^\phi + p, [\tau + p]v^\phi) \quad (54)$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} Dv^r \left[ \frac{M}{\alpha r^2} - \frac{2\alpha}{r} \right], -\frac{M}{\alpha r^2}(\tau + D) + \alpha \left[ \frac{1}{r} S_\phi v^\phi - \frac{2}{r} S_r v^r \right], \\ S_\phi v^r \left[ \frac{M}{\alpha r^2} - \frac{2\alpha}{r} \right], -\frac{2\alpha}{r} S^r - Dv^r \left[ \frac{M}{\alpha r^2} - \frac{2\alpha}{r} \right] \end{pmatrix} \quad (55)$$

$$S_\phi v^r \left[ \frac{M}{\alpha r^2} - \frac{2\alpha}{r} \right], -\frac{2\alpha}{r} S^r - Dv^r \left[ \frac{M}{\alpha r^2} - \frac{2\alpha}{r} \right] \quad (56)$$

Αυτή είναι και η τελική μορφή των εξισώσεων που θα χρησιμοποιήσουμε για το συγκεκριμένο πρόβλημα. Στο επόμενο κεφάλαιο θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή του κώδικα που χρησιμοποιήσαμε για να λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις, καθώς και όλων των στοιχείων που αναφέρονται στο υπολογιστικό μέρος της εργασίας αυτής. Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο θα παραθέσουμε και θα σχολιάσουμε τα αποτελέσματα που πήραμε καταλήγοντας σε κάποια συμπεράσματα για τη μορφολογία και τη σταθερότητα της ροής.

## 2 Περιγραφή του κώδικα.

### 2.1 Το πρόβλημα του Riemann.

Θα περιγράψουμε αρχικά το θεωρητικό πρόβλημα του Riemann το οποίο αποτελεί τη βάση για τις αριθμητικές μεθόδους τύπου Godunov. Το πρόβλημα του Riemann είναι ένα συγκεκριμένο πρόβλημα αρχικών τιμών με ασυνέχεια. Θα θεωρήσουμε ένα ιδανικό ρευστό το οποίο βρίσκεται μέσα σε ένα μονοδιάστατο σωλήνα ο οποίος χωρίζεται με ένα διάφραγμα σε δύο περιοχές. Τόσο δεξιά όσο και αριστερά του διαφράγματος το ρευστό έχει σταθερές τιμές πίεσης και πυκνότητας οι οποίες εν γένει είναι διαφορετικές. Η αρχική ταχύτητα όμως του ρευστού και στις δύο περιοχές είναι μηδέν, δηλαδή το ρευστό είναι ακίνητο τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Το πρόβλημα του Riemann αναφέρεται στη μελέτη της χρονικής εξέλιξης του ρευστού από τη στιγμή που θα αφαιρέσουμε το διάφραγμα.

Από μαθηματικής πλευράς το πρόβλημα του Riemann μπορεί να μελετηθεί ποιοτικά με την εξής απλή βαθμωτή υπερβολική εξίσωση:

$$u_t + \alpha u_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (57)$$

όπου  $\alpha$  μια σταθερά και:

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (58)$$

οι αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Στο πρόβλημα του Riemann οι αρχικές συνθήκες είναι:

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{αν } x < 0 \\ u_R & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad (59)$$

όπου  $u_L$  και  $u_R$  είναι δύο σταθερές τιμές. Η λύση του συγκεκριμένου προβλήματος είναι η:

$$u(x, t) = u_0(x - at) = \begin{cases} u_L & \text{αν } x - at < 0 \\ u_R & \text{αν } x - at > 0 \end{cases} \quad (60)$$

Δηλαδή κάθε σημείο των αρχικών συνθηκών διαδίδεται αμετάβλητο και διαγύει απόσταση  $d = at$  σε χρόνο  $t$ .

Ας γενικεύσουμε τώρα το πρόβλημα των αρχικών συνθηκών που περιγράψαμε στην αρχή θεωρώντας ένα υπερβολικό σύστημα  $m$  μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0 \quad (61)$$

όπου ο πίνακας  $\mathbf{A}$  είναι σταθερός και επειδή το σύστημα είναι υπερβολικό έχει  $m$  ιδιοτιμές  $\lambda_i$  και  $m$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα  $K^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Το πρόβλημα του Riemann σε αυτή την περίπτωση θα πάρει τη μορφή:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (62)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{αν } x < 0 \\ \mathbf{U}_R & \text{αν } x > 0 \end{cases} \quad (63)$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι αυστηρά υπερβολικό και έχει  $m$  πραγματικές και διακριτές ιδιοτιμές:  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ .

Η γενική λύση του προβλήματος αποτελείται από  $m$  κύματα, ένα για κάθε ιδιοτυπή, καθένα από τα οποία φέρει μια ασυνέχεια στο  $\mathbf{U}$  που διαδίδεται με ταχύτητα  $\lambda_i$ . Η λύση στα αριστερά του  $\lambda_1$  κύματος είναι απλώς η αρχική τιμή  $\mathbf{U}_L$  και η λύση στα δεξιά του  $\lambda_m$  κύματος είναι η  $\mathbf{U}_R$ . Εφόσον τώρα τα ιδιοδιανύσματα  $\mathbf{K}^{(1)}, \dots, \mathbf{K}^{(m)}$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα μπορούμε να γράψουμε τα  $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R$  ως γραμμικούς συνδιασμούς των ιδιοδιανύσμάτων. Έχουμε λοιπόν:

$$\mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{K}^{(i)}, \quad \mathbf{U}_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{K}^{(i)} \quad (64)$$

όπου οι συντελεστές  $\alpha_i, \beta_i$  είναι σταθεροί για  $i = 1, \dots, m$ . Οπότε μπορούμε να γράψουμε την γενική λύση στο συγκεκριμένο πρόβλημα Riemann ως:

$$\mathbf{U}(x, t) = \sum_{i=I+1}^m \alpha_i \mathbf{K}^{(i)} + \sum_{i=1}^I \beta_i \mathbf{K}^{(i)} \quad (65)$$

όπου ο ακέραιος  $I = I(x, t)$  είναι η μέγιστη τιμή του δείκτη  $i$  για την οποία  $x - \lambda_i t > 0$ .

Να σημειώσουμε εδώ ότι η συνολική μεταβολή του  $\mathbf{U}$  στη λύση του προβλήματος Riemann είναι:

$$\Delta \mathbf{U} = \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L = (\beta_1 - \alpha_1) \mathbf{K}^{(1)} + \dots + (\beta_m - \alpha_m) \mathbf{K}^{(m)} \quad (66)$$

Αυτό είναι ένα ανάπτυγμα ως προς τα ιδιοδιανύσματα με συντελεστές την ισχύ του κάθε κύματος που εμφανίζεται στο πρόβλημα Riemann. Η μεταβολή δηλαδή του  $\mathbf{U}$  κατά μήκος του κύματος  $i$  συμβολίζεται με  $(\Delta \mathbf{U})_i$  και είναι:

$$(\Delta \mathbf{U})_i = (\beta_i - \alpha_i) \mathbf{K}^{(i)} \quad (67)$$

Είδαμε μέχρι στιγμής λοιπόν ότι η γενική λύση του προβλήματος Riemann για γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές αποτελείται από  $m + 1$  σταθερές καταστάσεις που χωρίζονται από  $m$  κύματα. Στην πιο γενική περίπτωση για κάθε ιδιοτυπή  $\lambda_i$  υπάρχει μια οικογένεια κυμάτων. Όταν μιλάμε για γραμμικά συστήματα με σταθερούς συντελεστές τότε κάθε κύμα είναι μια ασυνέχεια που διαδίδεται με ταχύτητα  $\lambda_i$ . Για μη γραμμικά συστήματα, όπως είναι οι εξισώσεις της υδροδυναμικής, τα κύματα μπορεί να είναι ασυνέχειες όπως χρονιστικά κύματα και ασυνέχειες επαφής αλλά και κύματα αραίωσης.

## 2.2 Κατασκευή του πλέγματος.

Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (51) και να μελετήσουμε την προσαύξηση μάζας σε μια μελανή οπή δημιουργούμε ένα διδιάστατο πλέγμα που έχει τη μορφή κυκλικού δακτυλίου. Το πλέγμα αυτό το χωρίζουμε σε 200 ακτινικές ζώνες και 80 (ή 100) γωνιακές ζώνες. Οι γωνιακές ζώνες σε κάθε περίπτωση ισαπέχουν ενώ για τις ακτινικές ζώνες φροντίζουμε η πυκνότητα των ζωνών κοντά στο εσωτερικό όριο του πλέγματος να είναι πολύ μεγαλύτερη από ότι στο εξωτερικό του όριο. Η μεταβολή αυτή είναι απαραίτητη διότι το εσωτερικό όριο του πλέγματος είναι πολύ κοντά στον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής, η οποία στις συντεταγμένες Schwarzschild παρουσιάζει ανώμαλη συμπεριφορά (απειρισμός των συνιστωσών του μετρικού τανυστή,

του παράγοντα Lorentz κτλ). Οπότε, η ανάλυση του πλέγματος στην περιοχή αυτή θα πρέπει να είναι πολύ υψηλή, αν θέλουμε να πάρουμε σωστά αποτέλεσματα.

Για να κατασκευάσουμε λοιπόν τις ακτινικές ζώνες του πλέγματος ορίζουμε αρχικά το εσωτερικό και το εξωτερικό όριο του πλέγματος κατά την ακτινική διεύθυνση καθώς και τον αριθμό των ακτινικών ζωνών. Με τον τρόπο αυτό μπορούμε να υπολογίσουμε το μέσο ακτινικό μέγεθος του κάθε κελιού. Στη συνέχεια για να ολοκληρωθεί η κατασκευή του πλέγματος θα πρέπει να καθορίσουμε και μια τελευταία παράμετρο που θα καθορίσει πόσες φορές μικρότερο θα είναι το πρώτο κελί από το μέσο μέγεθος του κάθε κελιού. Συνήθως επιλέγουμε να είναι 10 ή 20 φορές μικρότερο. Το μέγεθος των επόμενων κελιών προκύπτει πολλαπλασιάζοντας το προηγούμενο πάντα κελί με έναν σταθερό αριθμό που καθορίζεται έτσι ώστε το εξωτερικό άκρο του τελευταίου κελιού να συμπίπτει με το εξωτερικό όριο του πλέγματος έτσι όπως το καθορίσαμε στην αρχή. Χρησιμοποιούμε δηλαδή μια σχέση της μορφής:

$$\Delta r_i = \beta \Delta r_{i-1}$$

όπου το  $\beta$  είναι τέτοιο ώστε, π.χ.:

$$\Delta r_1 + \Delta r_2 + \dots + \Delta r_{200} = \Delta r_1 + \beta \Delta r_1 + \beta^2 \Delta r_1 + \dots + \beta^{199} \Delta r_1 = r_{max} - r_{min}$$

όπου  $r_{max}$  και  $r_{min}$  το εξωτερικό και το εσωτερικό αντίστοιχα όριο του πλέγματος. Ο αριθμός  $\beta$  συνήθως βρίσκεται στο διάστημα 1.01-1.05.

### 2.3 Η μέθοδος του Godunov.

Όταν επιχειρούμε να υπολογίσουμε αριθμητικά λύσεις που περιέχουν ασυνέχειες, όπως κρουστικά κύματα, τότε θα πρέπει να προσέξουμε ιδιαίτερα τόσο το μαθηματικό φορμαλισμό των εξισώσεων που χρησιμοποιούμε όσο και τη μέθοδο επίλυσης. Όσον αφορά το φορμαλισμό, οι εξισώσεις μπορούν να βρίσκονται είτε σε διαφορική μορφή είτε σε ολοκληρωτική μορφή. Επίσης, υπάρχουν πολλές επιλογές και για τις μεταβλητές που θα χρησιμοποιήσουμε. Μια δυνατή επιλογή είναι να δουλέψουμε με τις διατηρούμενες μεταβλητές. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, μέθοδοι που δεν βασίζονται σε διατηρούμενες μεταβλητές αποτυγχάνουν στην περιγραφή των κρουστικών κυμάτων. Παρακάτω θα αναλύσουμε τη μέθοδο του Godunov στην οποία στηρίζεται ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε. Πριν περάσουμε όμως στην μέθοδο του Godunov θα δώσουμε τον ορισμό της διατηρητικής μεθόδου. Μια διατηρητική μέθοδος για μια εξισώση όπως η (57) είναι μια αριθμητική μέθοδος της μορφής:

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [f_{i-\frac{1}{2}} - f_{i+\frac{1}{2}}] \quad (68)$$

όπου  $f_{i+\frac{1}{2}} = f_{i+\frac{1}{2}}(u_{i-I_L}^n, \dots, u_{i+I_R}^n)$  και  $I_L, I_R$  δύο μη αρνητικοί ακέραιοι,  $f_{i+\frac{1}{2}}$  είναι η λεγόμενη αριθμητική ροή, η οποία διαφέρει από την πραγματική κατά όρους που προκύπτουν από την συγκεκριμένη μέθοδο.

Έστω τώρα ότι έχουμε να λύσουμε ένα μη γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους της μορφής:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \quad (69)$$

με αρχικές συνθήκες:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^0(x)$$

και οριακές συνθήκες:

$$\mathbf{U}(0, t) = \mathbf{U}_l(t), \quad \mathbf{U}(L, t) = \mathbf{U}_r(t)$$

όπου  $[0, L]$  είναι το χωρικό διάστημα στο οποίο θέλουμε να λύσουμε το σύστημα. Υποθέτουμε βέβαια ότι υπάρχει λύση στο πρόβλημα.

Αρχικά διακριτοποιούμε το χώρο  $[0, L]$  σε  $M$  υπολογιστικά κελιά  $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$  μεγέθους  $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = L/M$  με  $i = 1, \dots, M$ . Για ένα δεδομένο κελί  $I_i$ , το κέντρο του και τα σύνορα του δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = (i-1)\Delta x, \quad x_i = \left(i - \frac{1}{2}\right)\Delta x, \quad x_{i+\frac{1}{2}} = i\Delta x$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την χρονική στιγμή  $t = t^n$  τις αρχικές συνθήκες  $\tilde{\mathbf{U}}(x, t^n)$  και θέλουμε να βρούμε τη λύση τη χρονική στιγμή  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  τότε θα θεωρήσουμε μια τυμηματικά σταθερή κατανομή των αρχικών συνθηκών. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί ορίζοντας σε κάθε κελί μέσες τιμές σύμφωνα με τον τύπο:

$$\mathbf{U}_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{\mathbf{U}}(x, t^n) dx \quad (70)$$

ο οποίος παράγει την επιθυμητή τυμηματικά σταθερή κατανομή  $\mathbf{U}(x, t^n)$  με:

$$\mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}_i^n \quad (71)$$

σε κάθε κελί  $I_i = [x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}]$ . Αφού ορίσουμε την κατανομή παρατηρούμε ότι στα σύνορα των κελιών δημιουργούνται διαδοχικά τοπικά προβλήματα Riemann. Άρα, το επόμενο βήμα είναι να λύσουμε τα προβλήματα αυτά, προσέχοντας το χρονικό βήμα να είναι αρκετά μικρό ώστε να αποφύγουμε την αλληλεπίδραση κυμάτων από γειτονικά κελιά. Στη συνέχεια μπορούμε να ορίσουμε μια συνολική λύση για όλο το πλέγμα. Η μέθοδος του Godunov λοιπόν μπορεί να γραφεί σε διατηρητική μορφή:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}] \quad (72)$$

με τις αριθμητικές ροές να δίνονται από:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}(0)) \quad (73)$$

αν το χρονικό βήμα  $\Delta t$  ικανοποιεί την συνθήκη

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{S_{max}^n} \quad (74)$$

όπου με  $S_{max}^n$  συμβολίζουμε την μέγιστη ταχύτητα κύματος που υπάρχει στο πλέγμα μας τη χρονική στιγμή  $t^n$ .

## 2.4 Περιορισμοί κλίσεων.

Η συνθήκη TVD (Total Variation Diminishing) εξασφαλίζει σταθερότητα στις αριθμητικές μεθόδους. Για να δούμε ποια είναι η συνθήκη αυτή όταν ορίσουμε πρώτα την ολική απόκλιση TV μιας συνάρτησης  $u(x)$ . Η ολική απόκλιση μιας συνάρτησης  $u(x)$  ορίζεται ως:

$$TV(u) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x + \delta) - u(x)| dx \quad (75)$$

Αν η συνάρτηση  $u$  ορίζεται από διαχριτές τιμές, τότε η ολική απόκλιση της  $u^n$  ορίζεται ως:

$$TV(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad (76)$$

Η ολική απόκλιση είναι ένα μέτρο για τον αριθμό των διαταραχών που εμφανίζει η  $u$ . Αν μια αριθμητική μέθοδος εμφανίζει δυσλειτουργίες τότε είναι δυνατόν να έχουμε σχηματισμό διαταραχών που προκαλούν νέα μέγιστα και ελάχιστα. Με τον τρόπο αυτό η ολική απόκλιση της  $u$  αυξάνει.

Η συνθήκη TVD μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \quad \forall n. \quad (77)$$

και μας εξασφαλίζει ότι ο αριθμός των διαταραχών είναι φραγμένος.

Παρακάτω όταν περιγράψουμε έναν από τους πιο διαδεδομένους περιορισμούς κλίσεων, τον περιορισμό κλίσης minmod. Σύμφωνα με τον περιορισμό κλίσεων minmod οι νέες κλίσεις προκύπτουν ως εξής:

$$\sigma_i = \text{minmod}(s_{i-\frac{1}{2}}, s_{i+\frac{1}{2}}) \quad (78)$$

όπου

$$s_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\bar{u}_{i+1} - u_i}{\bar{x}_{i+1} - x_i}$$

και η συνάρτηση minmod ορίζεται ως εξής:

$$\text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sgn}(a)\min(|a|, |b|) & \text{αν } \text{sgn}(a)=\text{sgn}(b) \\ 0 & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \quad (79)$$

Οι περιορισμοί κλίσεων εφαρμόζονται κατά την αναδόμηση με μεθόδους ανώτερης τάξης, ώστε να αποφεύγονται πολύ απότομες κλίσεις κοντά σε ασυνέχειες.

## 2.5 Τα βασικά σημεία του κώδικα.

Τα κύρια σημεία του κώδικα είναι ένας προσεγγιστικός Riemann solver (Roe 1981) και μια γραμμική μέθοδος αναδόμησης των διατηρούμενων ποσοτήτων από τα κέντρα των κελιών στα σύνορα τους που ακολουθείται από ένα περιορισμό κλίσης minmod. Σε κάθε σύνορο του πλέγματος ο Ιακωβιανός πίνακας  $\mathbf{A}$  του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων,  $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$  ψεωρείται σταθερός. Με τον τρόπο αυτό το αρχικό μη γραμμικό σύστημα των διαφορικών εξισώσεων γραμμικοποιείται και ο Riemann solver βρίσκει μια ακριβή λύση στο γραμμικοποιημένο σύστημα.

Η ακριβής έκφραση για τις αριθμητικές ροές είναι:

$$\hat{\mathbf{F}}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^L) - \sum_{n=1}^4 \tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \Delta \tilde{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \tilde{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \right] \quad (80)$$

όπου  $\{\tilde{\lambda}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)}, \tilde{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)}\}$  είναι αντίστοιχα οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του Ιακωβιανού πίνακα του συστήματος. Οι ποσότητες  $\Delta \tilde{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)}$ , οι ασυνέχειες δηλαδή των μεταβλητών κατά μήκος κάθε κύματος βρίσκονται από τις:

$$\mathbf{U}_i^R - \mathbf{U}_{i+1}^L = \sum_{n=1}^4 \Delta \tilde{\omega}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \tilde{\mathbf{r}}_{i+\frac{1}{2}}^{(n)} \quad (81)$$

Για την χρονική εξέλιξη ο κώδικας χρησιμοποιεί μια μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης. Μετά από κάθε επανάληψη υπολογίζουμε τις πρωταρχικές μεταβλητές από τις διατηρούμενες χρησιμοποιώντας μια μέθοδο Newton-Raphson.

## 2.6 Αρχικές και οριακές συνθήκες.

Για να ξεκινήσουμε τις προσομοιώσεις όταν πρέπει να καθορίσουμε τις αρχικές και τις οριακές συνθήκες για τη ροή. Όσον αφορά την ταχύτητα χρησιμοποιούμε τις παρακάτω σχέσεις για να ορίσουμε τις αρχικές συνθήκες.

$$u_r = \frac{1}{\sqrt{\gamma^{rr}}} u_\infty \cos \phi \quad (82)$$

$$u_\phi = \frac{1}{\sqrt{\gamma^{\phi\phi}}} u_\infty \sin \phi \quad (83)$$

όπου  $\gamma^{rr} = 1 - 2M/r$  και  $\gamma^{\phi\phi} = 1/r^2$ . Για την πυκνότητα σε όσα μοντέλα θεωρούμε ότι η ροή αρχικά είναι ομογενής χρησιμοποιούμε τη σχέση:

$$\rho = \rho_\infty \quad (84)$$

ενώ αν θεωρήσουμε ότι έχουμε κάποια βαθμίδα πυκνότητας έχουμε:

$$\rho = \rho_\infty \left( 1 + \epsilon_\rho \frac{r}{r_\alpha} \sin \phi \right) \quad (85)$$

όπου  $\epsilon_\rho$  μια παράμετρος που ελέγχει την βαθμίδα πυκνότητας και  $r_\alpha$  η ακτίνα προσαύξησης που δίνεται από τον τύπο:

$$r_\alpha = \frac{M}{u_\infty^2 + c_{s_\infty}^2} \quad (86)$$

Για τις οριακές συνθήκες στο εξωτερικό όριο του πλέγματος διακρίνουμε περιπτώσεις για την μπροστά και πίσω πλευρά της μελανής οπής. Ως μπροστά πλευρά θεωρούμε αυτή από την οποία πλησιάζει η ροή τη μελανή οπή. Στην πλευρά αυτή χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες και ως οριακές συνθήκες. Στην πίσω πλευρά όμως κάνουμε γραμμική πρόβλεψη για όλες τις μεταβλητές. Το ίδιο κάνουμε και στο εσωτερικό σύνορο του πλέγματος. Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στον κώδικα έχουν κανονικοποιηθεί  $G = c = M = 1$ .

### 3 Αποτελέσματα.

#### 3.1 Εισαγωγικά.

Όπως αναφέραμε και σε προηγούμενο κεφάλαιο στόχος μας είναι η μελέτη της μορφολογίας της ροής κατά την προσαύξηση μάζας σε μια μελανή οπή. Η προσαύξηση θα θεωρήσουμε ότι γίνεται όχι σφαιρικά, αλλά από τη μία πλευρά της μελανής οπής. Με άλλα λόγια μπορούμε ισοδύναμα να θεωρήσουμε ότι η μελανή οπή κινείται με μια σταθερή ταχύτητα μέσα στο υλικό που προσαυξάνει. Με το ίδιο πρόβλημα έχουν ασχοληθεί μέχρι σήμερα δεκάδες ερευνητές. Παρακάτω δίνεται μια λίστα με κάποιες εργασίες που έχουν γίνει μέχρι σήμερα και στη συνέχεια σχολιάζονται τα αποτελέσματα μερικών από αυτές.

- Hoyle, Lyttleton 1939
- Bondi, Hoyle 1944
- Hunt 1971, 1979
- Shima et al. 1985
- Matsuda, Inoue, Sawada 1987
- Anzer, Borner, Monaghan 1987
- Fryxell & Taam 1988
- Sawada et al. 1989
- Petrich et al. 1989
- Taam & Fryxell 1989
- Livio et al. 1991
- Taam, Fu, Fryxell 1991
- Matsuda et al. 1991
- Ruffert & Arnett 1994
- Ruffert 1994a, 1994b, 1995, 1996, 1997
- Benenoshon, Lamb, Taam 1997
- Font & Ibanez 1998a, 1998b

Οι περισσότερες από αυτές είναι Νευτώνεις (εκτός από μία: Petrich et al. 1989 που είναι σχετικιστική). Σχετικιστικές είναι φυσικά και οι εργασίες των Font & Ibanez 1998 στα πλαίσια των οποίων γράφτηκε ο κωδικας που χρησιμοποιήσαμε. Οι εργασίες αυτές και κυρίως η δεύτερη (θα την αποκαλούμε στο εξής FI 1998b για λόγους συντομίας) στάθηκε η αφετηρία από την οποία ξεκινήσαμε τη μελέτη αυτή και ένα σταθερό σημείο αναφοράς για συγκρίσεις.

Για να μελετήσουμε τη μορφολογία της ροής σχεδιάζουμε ισοσταθμικές καμπύλες της πυκνότητας για διάφορες χρονικές στιγμές κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης. Ολές οι εργασίες που έχουν γίνει για υποηχητικές ροές δίνουν σε γενικές γραμμές όμοια αποτελέσματα. Οι ισοσταθμικές καμπύλες μοιάζουν πολύ αυτές της σφαιρικής προσαύξησης με την διαφορά ότι έχουμε μια συνολική ταχύτητα προς τη μια πλευρά. Για υπερηχητικές όμως ροές έχουμε σημαντικές διαφωνίες, όχι μόνο ποσοτικές αλλά και ποιοτικές. Αρχικά παρατηρούμε να σχηματίζεται στο πίσω μέρος της μελανής οπής (ως μπροστινό μέρος θεωρούμε αυτό από το οποίο έρχεται υλικό) ένα κρουστικό κύμα, το οποίο πολύ γρήγορα διαταράσσεται και ανοίγει. Το άνοιγμα αυτό θα συνεχιστεί μέχρι μια συγκεκριμένη γωνία στην οποία θα σταθεροποιηθεί. Από εκεί και πέρα κάποιοι ερευνητές έχουν βρει ότι το κρουστικό κύμα παραμένει ακίνητο και η ροή γίνεται σταθερή, ενώ σε άλλες εργασίες το κρουστικό κύμα φαίνεται να κινείται πάνω κάτω και η ροή δε φτάνει ποτέ σε μια σταθερή κατάσταση. Η συμπεριφορά αυτή του κρουστικού κύματος είναι ένα είδος αστάθειας που ονομάζεται αστάθεια flip-flop.

Οι πρώτες απλοποιημένες αναλυτικές μελέτες έγιναν τη δεκαετία του 1940 από τους Bondi, Hoyle και Lyttleton. Στο ίδιο ύφεμα συνέχισε να δουλεύει τη δεκαετία του 1970 ο Hunt. Αρχικές, αξονικά συμμετρικές μελέτες με χαμηλή ανάλυση πλέγματος (Shima et al. 1985, Anzer, Borner, Monaghan 1987) έδειξαν ότι η ροή φτάνει σε μια σταθερή κατάσταση. Στη συνέχεια, διδιάστατες, μη αξονικά συμμετρικές εργασίες με υψηλότερη ανάλυση (Matsuda et al. 1987, Fryxell & Taam 1988, Taam & Fryxell 1989) έδειξαν ότι το κρουστικό κύμα δε φτάνει πάντα σε μια σταθερή κατάσταση αλλά αντιθέτως παρουσιάζει συμπεριφορά flip-flop μαζί με περιόδους σχηματισμού δίσκου προσαύξησης. Αυτό το είδος της συμπεριφοράς εμφανίστηκε όχι μόνο σε προσομοιώσεις που περιλάμβαναν βαθμίδες στην αρχική πυκνότητα ή ταχύτητα αλλά και σε ομογενείς ροές (Matsuda et al. 1991), δηλαδή σε ροές όπου η αρχική πυκνότητα ήταν σταθερή.

Οι πρώτες συγκρίσεις μεταξύ διδιάστατων και τριδιάστατων μοντέλων έγιναν από τους Sawada et al 1989. Πιο πρόσφατα οι Ruffert & Arnett 1994 και Ruffert 1994a, 1994b, 1995, 1996 έκαναν τριδιάστατες προσομοιώσεις χωρίς όμως να βρουν κανένα σημαδί συμπεριφοράς flip-flop για ομογενείς αρχικές συνθήκες αλλά μόνο διαταραχές στο κρουστικό κύμα. Η αστάθεια flip-flop εμφανίστηκε μόνο θεωρώντας βαθμίδες πυκνότητας.

Η γενική εικόνα που έχει σχηματιστεί από τις Νευτώνεις προσομοιώσεις έχει φανερώσει ότι το κρουστικό κύμα που σχηματίζεται μπορεί να είναι είτε προσκολλημένο είτε αποκολλημένο από τη μελανή οπή. Στην περίπτωση που είναι αποκολλημένο ξεκινάει από το μπροστινό μέρος της μελανής οπής. Για μεγάλες τιμές του αδιαβατικού δείκτη  $\gamma$  ( $\gamma = 4/3, 5/3$ ) το κρουστικό κύμα ξεκινάει από το μπροστινό τμήμα της μελανής οπής και είναι αποκολλημένο από αυτήν, ενώ καθώς το  $\gamma$  παίρνει ολοένα και μικρότερες τιμές ( $\gamma \rightarrow 1$ ) το κρουστικό κύμα μετακινείται στο πίσω μέρος της μελανής οπής και προσκολλάται σε αυτήν. Επίσης, όσον αφορά τη σταθερότητα της ροής υπάρχει μια συσχέτιση μεταξύ αυτής, του μεγέθους του συμπαγούς αστέρα και του ασυμπτωτικού αριθμού Mach. Καθώς το μέγεθος του συμπαγούς αστέρα μειώνεται και ο αριθμός Mach αυξάνεται εμφανίζονται διαταραχές και η ροή δεν μπορεί να φτάσει σε μια σταθερή κατάσταση.

Η επέκταση όλων των παραπάνω στη σχετικότητα πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά από τους Petrich et al 1989 θεωρώντας ένα πλήθος μοντέλων για διάφορες τιμές ταχύτητας, ταχύτητας ήχου και αδιαβατικού δείκτη. Οι προσομοιώσεις τους ήταν αξ-

ονικά συμμετρικές και η ανάλυση του πλέγματος πολύ χαμηλή ( $40 \times 20$ ). Παρόλο που οι υπολογισμοί τους στο Νευτώνειο όριο αποκάλυψαν κάποια συμφωνία με προηγούμενες μελέτες, ειδικά για υποηχητικές ροές, οι ασυμφωνίες για υπερηχητικές ροές ήταν σημαντικές. Στη μελέτη τους όμως εμφανίστηκαν μόνο σταθερές ροές γεγονός το οποίο μπορεί να οφείλεται στην πολύ χαμηλή ανάλυση που χρησιμοποιήσαν.

Όπως αναφέραμε και πιο πριν μια πολύ σημαντική παράμετρος που σχετίζεται με την εμφάνιση ασταθειών είναι το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης. Φυσικά γνωρίζουμε ότι ο ορίζοντας γεγονότων μιας μελανής οπής βρίσκεται πάντα στα  $2M$ . Όταν μιλάμε όμως για μέγεθος της περιοχής προσαύξησης θα εννοούμε το λόγο  $r_{\text{acc}}/r_{\text{min}}$  όπου  $r_{\text{min}}$  είναι το εσωτερικό όριο του πλέγματος και  $r_{\text{acc}}$  είναι η ακτίνα προσαύξησης. Η σύμβαση αυτή γίνεται διότι στις προσομοιώσεις οι οριακές συνθήκες εφαρμόζονται πάντα στο εσωτερικό όριο του πλέγματος που δεν μπορεί να είναι ποτέ ακριβώς ίσο με  $2M$  (η επιφάνεια  $2M$  στις συντεταγμένες Schwarzschild παρουσιάζει ανωμαλίες) αλλά λίγο μεγαλύτερο. Έτσι, στις προσομοιώσεις το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης θα είναι πάντα μεγαλύτερο από  $r_{\text{acc}}/2M$  και ο λόγος  $r_{\text{acc}}/r_{\text{min}}$  εκφράζει το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης σε μονάδες  $r_{\text{min}}$ . Για παράδειγμα στην εργασία των Sawada et al. 1989 και Matsuda et al. 1991 ο λόγος αυτός είχε τιμή  $0.0625$ . Επίσης, βρήκαν ότι η ροή είναι σταθερή αν ο λόγος αυτός πάρει τιμή μεγαλύτερη από  $\approx 0.125$ . Πιο πρόσφατα, οι Benenoshon, Lamb & Taam πραγματοποίησαν προσομοιώσεις όπου ο λόγος αυτός είχε ακόμη μικρότερη τιμή,  $0.0375$ , βρίσκοντας επίσης αστάθειες στη ροή.

Στο σημείο αυτό όμως πρέπει να αναφέρουμε ότι ο δικός τους ορισμός για την ακτίνα προσαύξησης είναι σύμφωνα με τη Νευτώνεια φυσική και διαφέρει λίγο από αυτόν που χρησιμοποιούμε εμείς. Πιο συγκεκριμένα, ορίζουν την ακτίνα προσαύξησης με βάση τον τύπο:

$$r_a = \frac{2GM}{u_\infty^2} \quad (87)$$

ενώ εμείς χρησιμοποιούμε τον σχετικιστικό ορισμό των Petrich et al. που δίνεται από την:

$$r_a = \frac{M}{u_\infty^2 + c_{s_\infty}^2} \quad (88)$$

οι δύο ορισμοί δηλαδή διαφέρουν κατά ένα παράγοντα 2 στο Νευτώνειο όριο όπου  $c_{s_\infty} \rightarrow 0$ . Να αναφέρουμε ότι και οι δύο ορισμοί προσπαθούν να δώσουν μια εκτίμηση για το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης, δηλαδή της περιοχής όπου η ολική ενέργεια είναι αρνητική.

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης παίζει εξαιρετικά σπουδαίο ρόλο όσον αφορά τη σταθερότητα της ροής. Ο λόγος όμως  $r_{\text{min}}/r_{\text{acc}}$  δε μπορεί να παίρνει πάντα αρκούντως μικρές τιμές ώστε να έχουμε αστάθειες στη ροή. Στις σχετικιστικές μελέτες των Font, Ibanez 1998a, 1998b η ταχύτητα είναι πολύ υψηλή, για παράδειγμα  $u_\infty = 0.5$ , το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης γίνεται τεράστιο και η ροή είναι εξαιρετικά σταθερή. Στο συμπέρασμα αυτό κατέληξαν πρώτοι οι Font, Ibanez 1998a,b τρέχοντας διάφορα μοντέλα και βρίσκοντας σε κάποιες περιπτώσεις κάποιες ποσοτικές μόνο διαφορές με τους Petrich et al. 1989.

Αντιθέτως, σε Νευτώνεια μοντέλα το εσωτερικό όριο του πλέγματος βρίσκεται χιλιάδες φορές μακρύτερα από τον ορίζοντα και κατά συνέπεια πρακτικά πάντα υπάρχει η δυνατότητα να μειωθεί αρκετά ώστε ο λόγος  $r_{\text{min}}/r_{\text{acc}}$  να πάρει αρκούντως μικρή τιμή ώστε να έχουμε εμφάνιση αστάθειας. Για παράδειγμα οι Fryxell & Taam 1998

χρησιμοποίησαν ένα πλέγμα με  $r_{min} = 14.000M$ . Επιπλέον η τιμή του racc αυξάνει και από το γεγονός ότι η ταχύτητα της ροής πολύ μακριά από τον αστέρα θεωρούμε ότι είναι πολύ μικρή.

Τέλος, όσον αφορά την παράμετρο  $\epsilon_p$  που καθορίζει τη βαθμίδα πυκνότητας γνωρίζουμε από την εργασία των Fryxell & Taam (1988) ότι για μικρές και ενδιάμεσες τιμές της παραμέτρου ( $0.005 < \epsilon_p < 0.25$ ) έχουμε συμπεριφορά flip-flop κατά την οποία το χρονιστικό χύμα ταλαντώνεται από τη μια πλευρά στην άλλη. Κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης αυτής έχουμε σχηματισμό δίσκων προσαύξησης οι οποίοι περιστρέφονται είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα. Αντιθέτως, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου έχουμε μια πιο σταθερή κατάσταση κατά την οποία σχηματίζονται δίσκοι που περιστρέφονται μόνο δεξιόστροφα.

Συμπερασματικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι οι ελεύθερες φυσικές παράμετροι του προβλήματος είναι η ταχύτητα της ροής πολύ μακριά από τον αστέρα  $u_\infty$ , ο αριθμός Mach  $M_\infty$ , που ορίζεται ως η ταχύτητα της ροής πολύ μακριά από τον αστέρα δια την ταχύτητα του ήχου, ο αδιαβατικός δείκτης γ και το  $\epsilon_p$ , η παράμετρος που ελέγχει την βαθμίδα πυκνότητας. Οι δύο πρώτες παράμετροι καθορίζουν και την ταχύτητα του ήχου, την οποία δεν θεωρούμε ελεύθερη παράμετρο. Επίσης, η ταχύτητα της ροής συνδέεται άμεσα με την ακτίνα προσαύξησης γιατί το  $r_{min}$  επιλέγουμε να βρίσκεται στο διάστημα  $2M-3M$  και κατά συνέπεια μπορεί να θεωρηθεί σχεδόν σταθερό. Στα παρακάτω κεφάλαια θα εξετάσουμε πως εξαρτάται η μορφολογία της ροής από τις ελεύθερες φυσικές παραμέτρους του προβλήματος, θα δούμε δηλαδή αναλυτικά πως εξαρτάται από το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης, τον αριθμό Mach και τον αδιαβατικό δείκτη και τέλος από τον βαθμό ανομοιογένοιας της ύλης.

### 3.2 Η εξάρτηση της ροής από το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης.

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την εξάρτηση της μορφολογίας της ροής από το μέγεθος της περιοχής προσαύξησης. Για τη μελέτη αυτή χρειάστηκε να εξελίξουμε χρονικά 5 μοντέλα στα οποία αλλάζαμε μόνο την παράμετρο που σχετίζεται με το μέγεθος του αστέρα, δηλαδή την ταχύτητα της ροής. Τις υπόλοιπες φυσικές παραμέτρους του προβλήματος τις κρατήσαμε σταθερές και συγκεκριμένα επιλέξαμε τις ίδιες τιμές με αυτές των Fryxell & Taam 1988 ώστε να είναι πιο εύκολες οι συγχρίσεις. Όλα τα στοιχεία που αφορούν τα συγκεκριμένα μοντέλα δίνονται στον πίνακα 1. Παρακάτω, δίνονται επίσης οι ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για καθένα από τα μοντέλα.

Να αναφέρουμε στο σημείο αυτό ότι ο τελικός χρόνος που σταματήσαμε την προσομοίωση δεν είναι ο ίδιος για όλα τα μοντέλα. Αυτό συμβαίνει επειδή ο συνολικός χρόνος που επιλέγουμε να εξελίξουμε ένα μοντέλο εξαρτάται από τη διάσταση του πλέγματος και την ταχύτητα του ήχου. Πιο συγκεκριμένα η ακτίνα προσαύξησης αποτελεί μια χαρακτηριστική χωρική κλίμακα εξέλιξης του φαινομένου ενώ η ταχύτητα του ήχου αποτελεί μια τυπική ταχύτητα για το σύστημα. Ο λόγος αυτών των δύο ποσοτήτων θα μας δώσει ένα τυπικό χρόνο για το σύστημα. Επιλέγουμε λοιπόν ως τελικό χρόνο για μια προσομοίωση το εικοσαπλάσιο περίπου του χρόνου αυτού.

Από τα παρακάτω σχήματα φαίνεται καθαρά πόσο ισχυρά εξαρτάται η μορφολογία της ροής από το μέγεθος του συμπαγούς αστέρα. Παρατηρούμε καταρχάς ότι για όλα τα μοντέλα οι ισοσταθμικές καμπύλες στην μπροστά πλευρά (η πλευρά από την οποία

Mοντέλο	$u_\infty$	$c_{s_\infty}$	$M_\infty$	$\gamma$	rmin(racc)	rmax(racc)	$\epsilon_\rho$
M1	0.4	0.1	4	4/3	0.5	8.5	0.005
M2	0.3	0.075	4	4/3	0.25	8.5	0.005
M3	0.2	0.05	4	4/3	0.125	8.5	0.005
M4	0.1	0.025	4	4/3	0.043	8.5	0.005
M5	0.06	0.015	4	4/3	0.0125	8.5	0.005

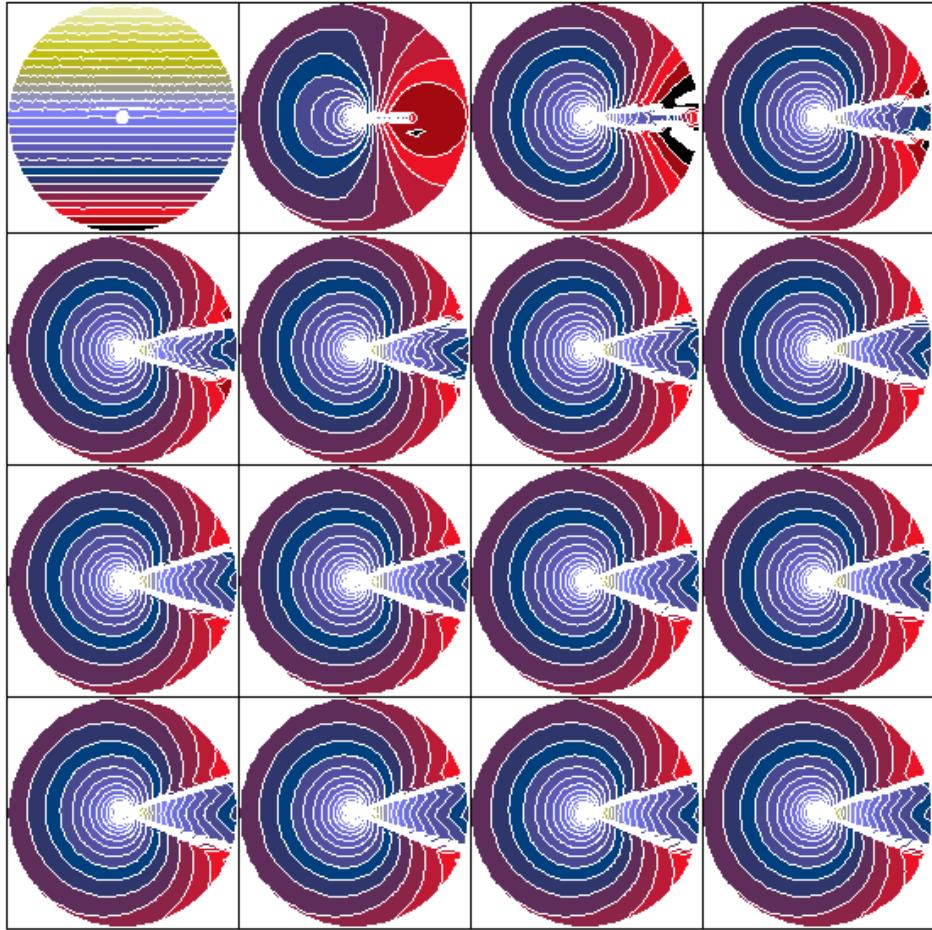
Πίνακας 1: Μοντέλα για τη μελέτη της επίδρασης του μεγέθους του συμπαγούς αστέρα στην μορφολογία της ροής.

έρχεται η ύλη) είναι κυκλικές ενώ στην πίσω πλευρά κυριαρχεί ένα κρουστικό κύμα χαρακτηριστικό των υπερηχητικών ροών. Στο μοντέλο 1, που είναι το μεγαλύτερο σε μέγεθος, η ροή είναι εξαιρετικά σταθερή και δεν υπάρχει κανένα ίχνος αστάθειας στο κρουστικό κύμα. Όσον αφορά το μοντέλο 2, όπου η περιοχή προσαύξησης έχει μεγαλύτερο μέγεθος, παρατηρούμε ότι παρόλο που δεν είναι εμφανής μια αστάθεια τύπου flip-flop το κρουστικό κύμα φαίνεται να είναι διαταραγμένο. Ιδιαίτερα εμφανής είναι η διαταραχή για  $t = 1080M$  και για  $t = 1260M$ . Να σημειώσουμε εδώ, ότι οι ισοσταθμικές καμπύλες που παρουσιάζονται στη συνέχεια καλύπτουν όχι όλο το πλέγμα αλλά μια πολύ μικρή περιοχή κοντά στην μελανή οπή, διότι αυτό που μας ενδιαφέρει σε αυτό το κεφάλαιο είναι η εμφάνιση αστάθειας flip-flop που είναι πολύ εμφανής κοντά στον αστέρα.

Από τις ισοσταθμικές καμπύλες του μοντέλου 3 παρατηρούμε ότι πλέον το κρουστικό κύμα έχει αρχίσει να παρουσιάζει συμπεριφορά flip-flop. Η ταλάντωση βέβαια έχει ακόμα πολύ μικρό πλάτος αλλά παρόλα αυτά μπορεί να διακριθεί πολύ καθαρά. Για παράδειγμα για  $t = 6000M$  και για  $t = 6600M$  ή για  $t = 7200M$  και για  $t = 7800M$  βλέπουμε το κρουστικό κύμα να έχει μετακινηθεί ολόκληρο στην πάνω και στην κάτω πλευρά αντίστοιχα του συμπαγούς αστέρα. Για ακόμα μεγαλύτερες περιοχές προσαύξησης, όπως βλέπουμε στα μοντέλα 4 και 5, η συμπεριφορά flip-flop αποτελεί πια κυρίαρχο στοιχείο της ροής.

Παρόλα αυτά μια σημαντική διαφορά έχει ήδη εμφανιστεί σε σχέση με Νευτώνειες προσομοιώσεις, όπως αυτές των Fryxell & Taam 1988 και Beneshon et al. (1997). Σε κανένα μοντέλο μέχρι στιγμής δεν είχαμε εμφάνιση δίσκου προσαύξησης. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή στα μοντέλα των Fryxell & Taam 1988 εκτός από την εμφάνιση της flip-flop συμπεριφοράς είχαμε και σχηματισμό δίσκων προσαύξησης που περιστρέφονται είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα. Μάλιστα, ενώ η ταλάντωση του κρουστικού κύματος μοιάζει ημιπεριοδική, ο σχηματισμός δίσκων προσαύξησης δεν είναι, διότι η ταλάντωση δεν έχει πάντα αρκετά μεγάλο πλάτος για να σχηματίσει ένα δίσκο. Οι Fryxell & Taam όμως στην ίδια εργασία αναφέρουν ότι αν ο συμπαγής αστέρας είχε επιλεγεί έτσι ώστε να έχει 3 φορές μικρότερο μέγεθος, δηλαδή αν  $rmin/racc = 0.0125$  αντί για  $rmin/racc = 0.0375$ , τότε σε κάθε ταλάντωση θα είχαμε και σχηματισμό δίσκου προσαύξησης.

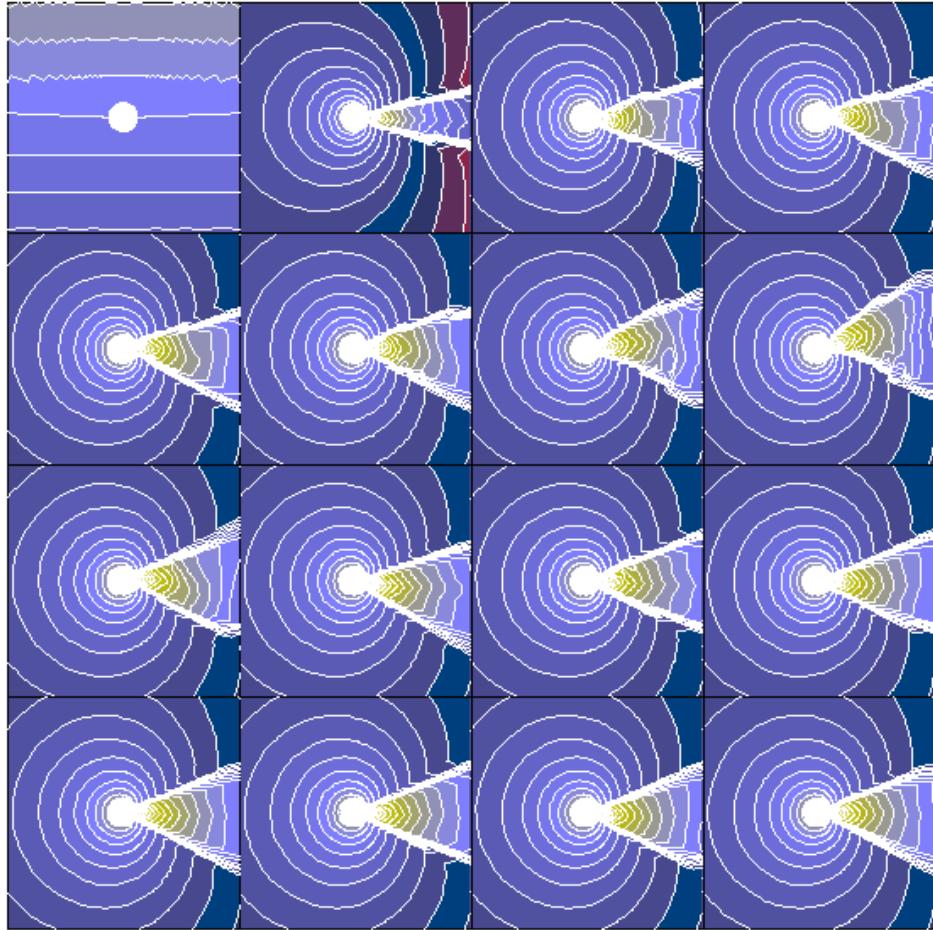
Σε αυτή την εργασία ακόμα για το μοντέλο 5, που έχει τη μεγαλύτερη περιοχή προσαύξησης, ( $rmin/racc = 0.0125$ ) δεν παρατηρήσαμε σχηματισμό δίσκου προσαύξησης. Αν και απευθύνεις συγκρίσεις με αποτελέσματα Νευτώνειων εργασιών δε μπορούν να γίνουν διότι χρησιμοποιούμε διαφορετικούς ορισμούς για την ακτίνα προσαύξησης, παρόλα αυτά η τιμή του λόγου  $rmin/racc$  στο μοντέλο 5 υπερκαλύπτει την διαφορά του παράγοντα 2 που εμφανίζουν οι δύο ορισμοί για την ακτίνα προσαύξησης και έτ-



Σχήμα 7: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 1. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες  $M$ , είναι  $t=0, 60, 120, \dots, 900$ .

σι μπορούμε με σχετική ασφάλεια να πούμε ότι η απουσία δίσκων προσαύξησης, για τις τιμές  $r_{min}/r_{acc}$  που μελετήσαμε εδώ, μπορεί να είναι καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο που δεν εμφανίζεται σε Νευτώνειες προσομοιώσεις. Ο ισχυρισμός αυτός θα γίνει ακόμα πιο πειστικός στη συνέχεια, όπου θα εξελίξουμε μοντέλα που το πλάτος της αστάθειας flip-flop θα γίνει πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο που εμφανίζεται στο μοντέλο των Fryxell & Taam (1988) αλλά και πάλι δεν θα έχουμε εμφάνιση δίσκου προσαύξησης.

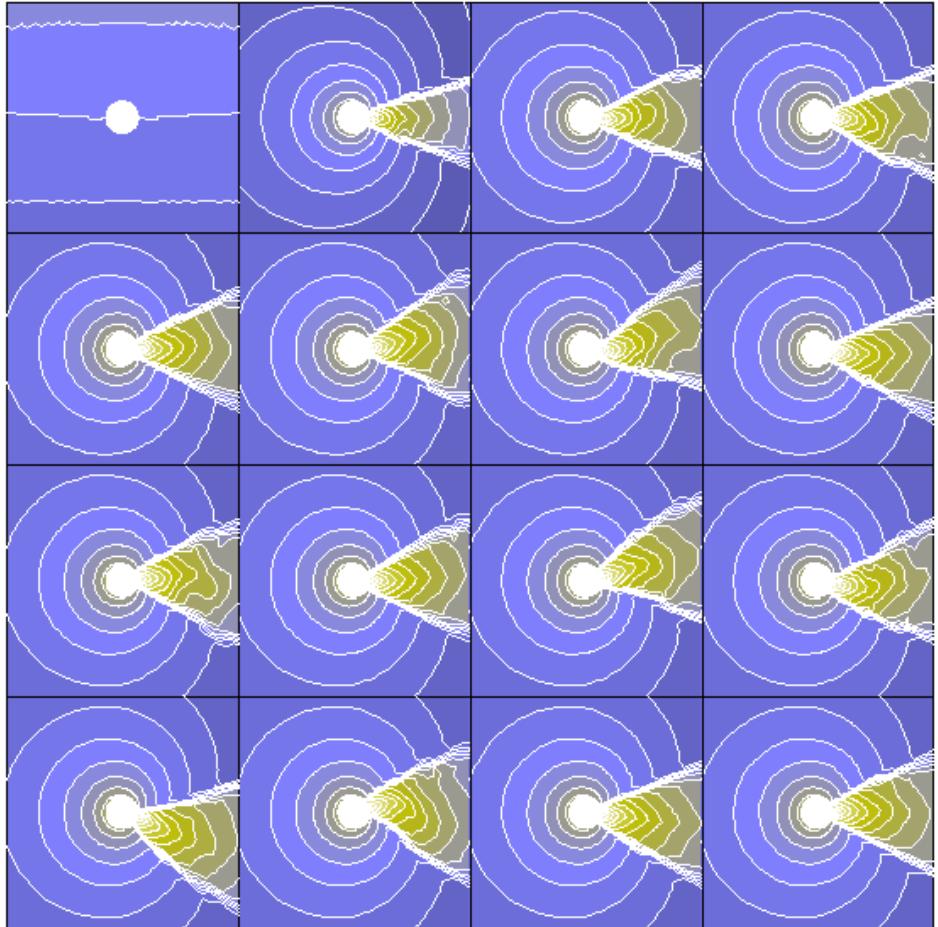
Βρίσκουμε λοιπόν ότι η εμφάνιση της αστάθειας flip-flop συντελείται για  $r_{min}/r_{acc} \approx$



Σχήμα 8: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 2. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι  $t=0, 180, 360, \dots, 2700$ .

0.125. Η τιμή αυτή είναι ίδια με αυτήν που βρήκαν και οι Sawada et al. 1989 και Matsuda et al. 1991. Αν λάβουμε βέβαια υπόψη και πάλι το ότι ο σχετικιστικός ορισμός της ακτίνας προσαύξησης διαφέρει από τον αντίστοιχο Νευτώνειο θα μπορούσαμε να πούμε ότι η αστάθεια στην περίπτωση μας εμφανίζεται λίγο πιο νωρίς από ότι στις εργασίες των Sawada et al. και Matsuda et al.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τους ρυθμούς προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής στην μελανή οπή. Οι ποσότητες αυτές είναι πολύ καλοί δείκτες για το πόσο σταθερή είναι η ροή κι έτσι θα αντιμετωπιστούν στη συνέχεια. Θέλουμε δηλαδή μέσω

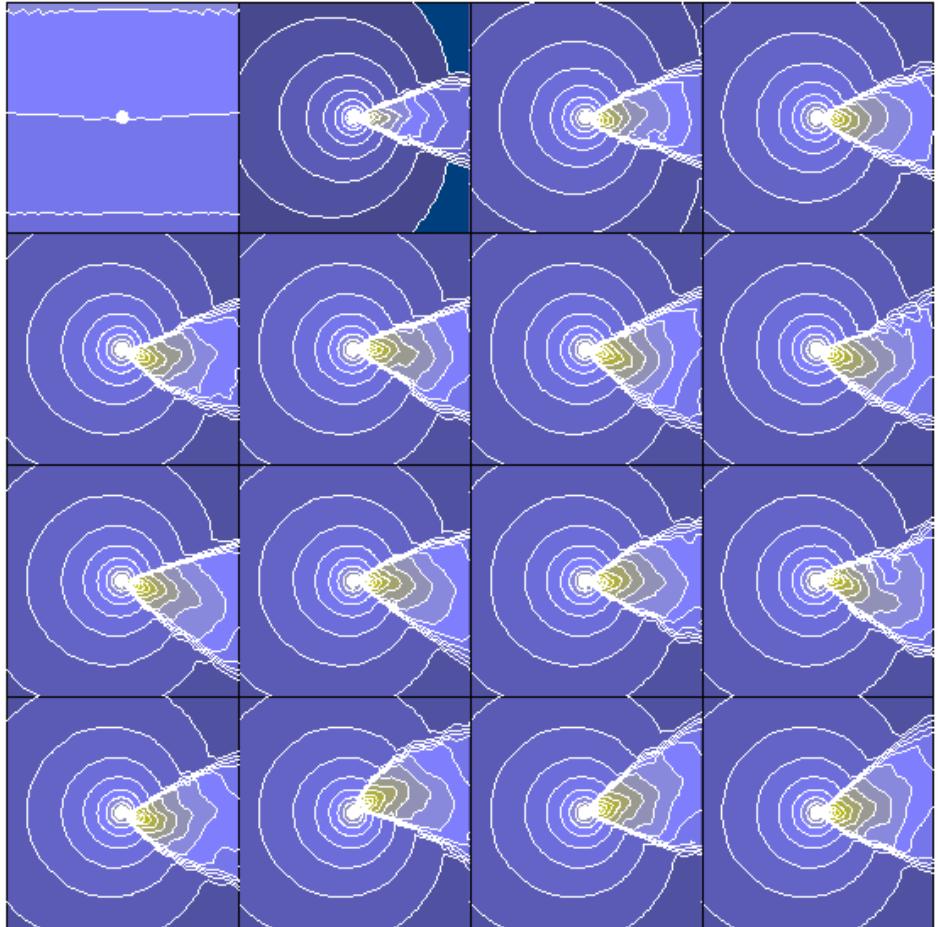


Σχήμα 9: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι t=0, 600, 1200,...,9000.

των ποσοτήτων αυτών να βγάλουμε συμπεράσματα για τη σταθερότητα της ροής και όχι να κάνουμε κάποια ακριβή πρόβλεψη, π.χ. για την ποσότητα της ύλης που θα προσαυξηθεί στην μελανή οπή. Ακολουθώντας τους συλλογισμούς των FI 1998a,b χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$\dot{m} = - \int Dv^r r^2 d\phi \quad (89)$$

για την μάζα. Για τον υπολογισμό των ορμών ακολουθούμε τους Petrich et al., ορί-

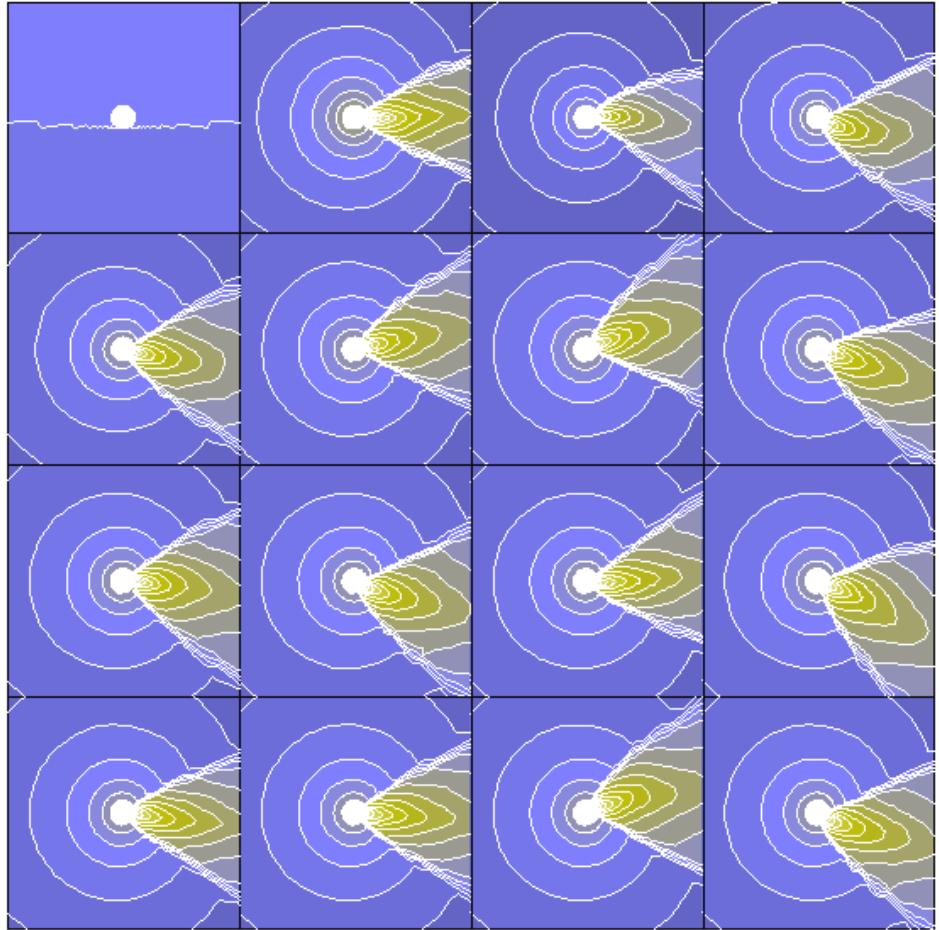


Σχήμα 10: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 4. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι t=0, 3000, 6000,...,45000.

Ζοντας την χρονική μεταβολή της i-ορμής ως:

$$\dot{p}^i = - \int_{\partial V} T^{ij} \sqrt{-g} d\Sigma_j + \int_V (\text{source})^i \sqrt{-g} dV \quad (90)$$

Στην πράξη αν έχουμε το εξωτερικό όριο του πλέγματος αρκετά μακριά τότε μπορούμε να αγνοήσουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα γιατί οι όροι των πηγών μηδενίζονται σε επίπεδο χωρόχρονο. Άλλα επειδή δε συμβαίνει αυτό στο πεπερασμένο πλέγμα μας πρέπει πάντα να συνυπολογίζουμε την συνεισφορά των πηγών στα αποτελέσματα. Μετά



Σχήμα 11: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 5. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι t=0, 10000, 20000,...,150000.

από πράξεις καταλήγει κανείς στις τελικές εκφράσεις:

$$\begin{aligned} \dot{p}^r &= -r_c^2 \int_0^{2\pi} \left[ S^r v^r + p \left( 1 - \frac{2M}{r_c} \right) \right] d\phi \\ &\quad + \int_{r_{min}}^{r_c} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{M}{\alpha} (\tau + D) + \alpha r (S_\phi v^\phi - 2S_r v^r) \right] dr d\phi \end{aligned} \quad (91)$$

$$\dot{p}^\phi = -r_c^2 \int_0^{2\pi} S^\phi v^r d\phi + \int_{r_{min}}^{r_c} \int_0^{2\pi} S_\phi v^r \left( \frac{M}{\alpha} - 2\alpha r \right) dr d\phi \quad (92)$$

που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε τους ρυθμούς προσαύξησης ορμής και στροφορμής αντίστοιχα. Στις εκφράσεις αυτές  $r_c$  είναι η ακτίνα στην οποία υπολογίζουμε τους ρυθμούς προσαύξησης. Στα αποτελέσματα που θα παρουσιάσουμε όλοι οι ρυθμοί προσαύξησης υπολογίζονται πάντα στην ακτίνα προσαύξησης.

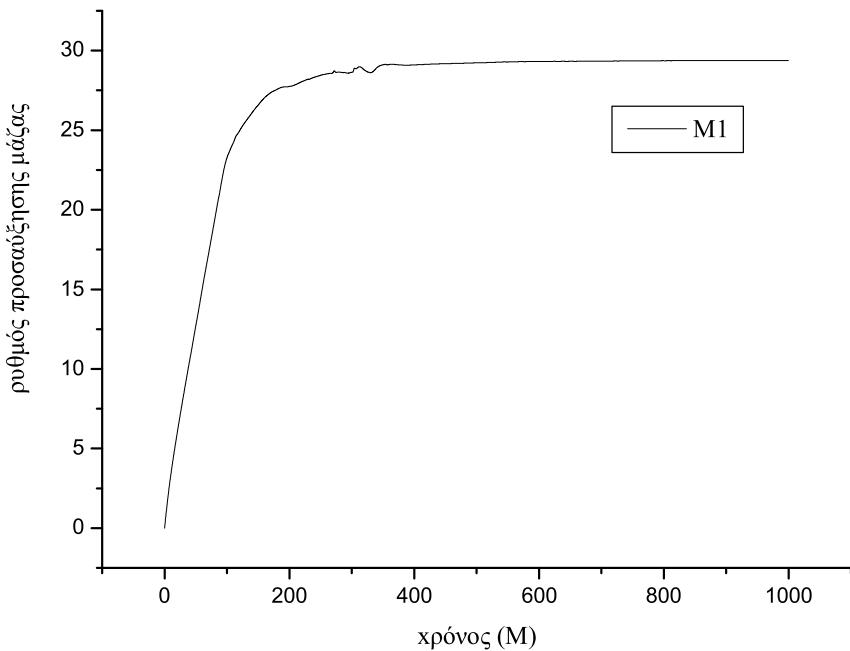
Παρακάτω δίνουμε τους ρυθμούς προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής για τα μοντέλα 1 και 5. Παρόλο που έχουμε σχεδιάσει τους ρυθμούς προσαύξησης για όλα τα μοντέλα επιλέγουμε να παραθέσουμε μόνο δύο για οικονομία χώρου. Η επιλογή αυτών των δύο δεν είναι τυχαία. Επιλέξαμε το πιο ευσταθές και το πιο ασταθές μοντέλο έτσι ώστε να δείξουμε πως είναι δυνατόν μελετώντας μόνο τους ρυθμούς προσαύξησης να εξάγουμε συμπεράσματα για την ευστάθεια της ροής. Όλοι οι ρυθμοί προσαύξησης μάζας έχουν κανονικοποιηθεί στην τιμή που πρότειναν οι Petrich et al:

$$\dot{m}_{can} = \frac{4\pi\lambda M^2 \rho_\infty}{(u_\infty^2 + c_{s_\infty}^2)^{3/2}} \quad (93)$$

όπου  $\lambda$  είναι μια αδιάστατη παράμετρος που δίνεται από (Shapiro & Teukolsky 1983)

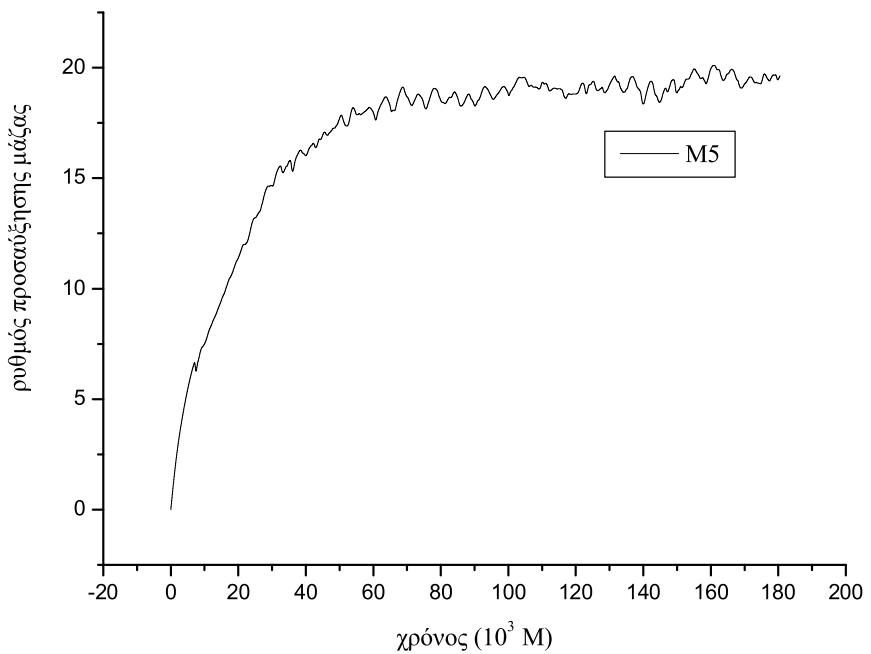
$$\lambda = \left(\frac{1}{2}\right)^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]} \left(\frac{5-3\gamma}{4}\right)^{(5-3\gamma)/[2(\gamma-1)]} \quad (94)$$

Με βάση αυτή την κανονικοποίηση έχουν ορισθεί και οι κανονικοποιήσεις για τον ρυθμό προσαύξησης ορμής (Bλ.Petrich et al. 1989.)

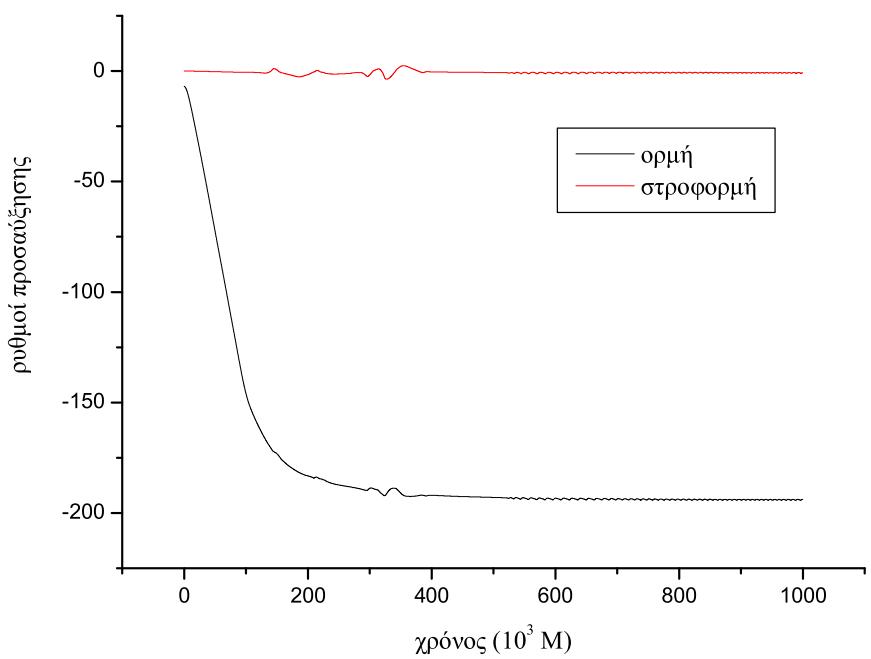


Σχήμα 12: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας για το μοντέλο 1.

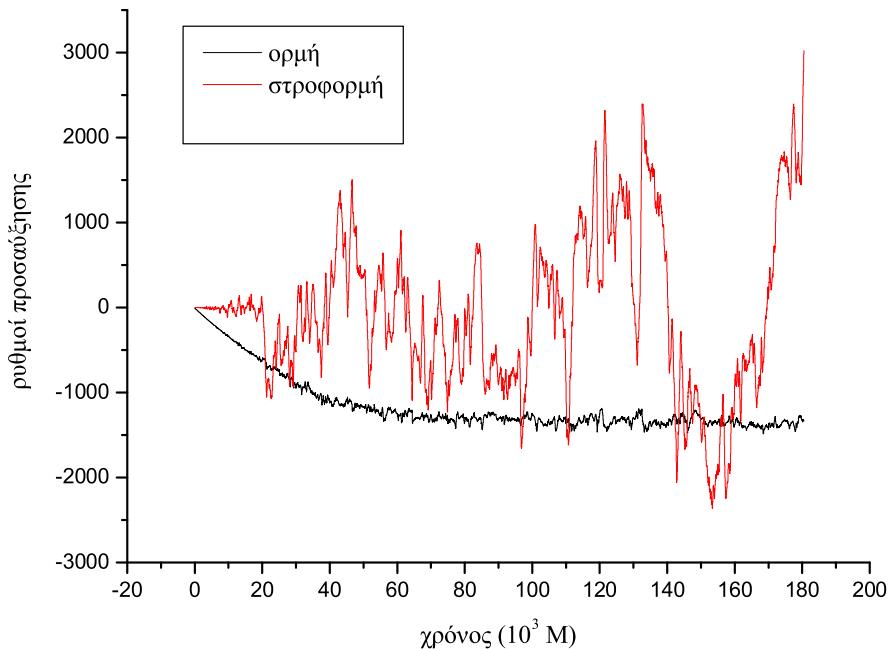
Για το ρυθμό προσαύξησης μάζας για το μοντέλο 1 παρατηρούμε ότι αρχικά αυξάνεται πολύ γρήγορα και στη συνέχεια προσεγγίζει μια σταθερή τιμή, την οποία διατηρεί μέχρι το τέλος της προσομοίωσης. Η συμπειροφρά αυτή είναι μια πολύ ισχυρή ένδειξη



Σχήμα 13: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας για το μοντέλο 5.



Σχήμα 14: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσαύξησης ορμής και στροφορμής για το μοντέλο 1.



Σχήμα 15: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσαύξησης για το μοντέλο 5.

ότι η ροή είναι απόλυτα σταθερή και δε διαταράσσεται από κανενός είδους αστάθειες για τις συγκεκριμένες θεωρητικές και υπολογιστικές παραδοχές που κάναμε. Η αντίστοιχη γραφική παράσταση για το μοντέλο 5 παρουσιάζει πολύ διαφορετική συμπεριφορά. Εδώ ο ρυθμός προσαύξησης μάζας μετά την αρχική αύξηση παρουσιάζει ταλαντώσεις μικρού πλάτους γύρω από μια μέση τιμή. Οι ταλαντώσεις αυτές προκαλούνται από διαταραχές στο χρονιστικό κύμα και είναι ένδειξη ότι η ροή δεν καταφέρνει ποτέ να φτάσει σε μια σταθερή κατάσταση.

Οι ρυθμοί προσαύξησης ορμής παρουσιάζουν σε γενικές γραμμές όμοια συμπεριφορά. Για το M1 φανερώνουν ότι βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση, ενώ για το M5 το αντίθετο. Τέλος, από τους ρυθμούς προσαύξησης στροφορμής μπορούμε να πάρουμε και μια πρόσθετη πληροφορία. Παρατηρούμε ότι για το M1 ο αντίστοιχος ρυθμός διατηρεί σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης πολύ χαμηλές τιμές, ενώ αντιθέτως οι τιμές για το M5 παρουσιάζουν πολύ μεγαλή διασπορά τόσο στον θετικό όσο και στον αρνητικό άξονα. Αυτό συμβαίνει επειδή στο M5 κυριαρχεί η αστάθεια flip-flop. Το φαινόμενο αυτό επιτρέπει στη μελανή οπή να προσαυξάνει περισσότερη μάζα πότε από την πάνω πλευρά (η πλευρά με την υψηλή πυκνότητα) και πότε από την κάτω πλευρά. Όταν το χρονιστικό κύμα εκτρέπεται προς την κάτω πλευρά τότε η μελανή οπή δέχεται περισσότερο υλικό από την πάνω πλευρά. Το υλικό αυτής της πλευράς θεωρούμε ότι διαθέτει αρνητική στροφορμή κι έτσι αν το χρονιστικό κύμα παραμείνει για μεγάλο χρονικό διάστημα στην κάτω πλευρά ο ρυθμός προσαύξησης στροφορμής θα πάρει πολύ αρνητικές τιμές. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το χρονιστικό κύμα εκτρέπεται προς την πάνω πλευρά. Κοιτώντας δηλαδή τους ρυθμούς προσαύξησης στροφορμής μπορούμε να πάρουμε σημαντικές πληροφορίες όσον αφορά την εμφάνιση και την εξέλιξη της αστάθειας flip-flop.

### 3.3 Η εξάρτηση της ροής από τον αριθμό Mach και τον αδιαβατικό δείκτη.

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε πως εξαρτάται η μορφολογία και η ευστάθεια της ροής από τον αριθμό Mach και τον αδιαβατικό δείκτη. Για να το πετύχουμε αυτό θα πρέπει να κρατήσουμε σταθερές τις υπόλοιπες ελεύθερες παραμέτρους της ροής και συγκεκριμένα την ταχύτητα και τη βαθμίδα πυκνότητας. Χρησιμοποιήσαμε συνολικά 18 μοντέλα. Τα πρώτα 9 μοντέλα έχουν λόγο  $r_{min}/r_{acc}$  0.5 ενώ τα υπόλοιπα 9 0.043. Σύμφωνα λοιπόν με όσα είπαμε στην προηγούμενη ενότητα, αναμένουμε στα πρώτα 9 μοντέλα να μην έχουμε παρουσία της αστάθειας flip-flop ενώ στα υπόλοιπα 9 να είναι παρούσα η συγκεκριμένη αστάθεια. Για κάθε μια από τις δύο παραπάνω περιπτώσεις επιλέγουμε 3 τιμές για τον αριθμό Mach και 3 τιμές για τον αδιαβατικό δείκτη. Για τον αριθμό Mach χρησιμοποιήσαμε τις τιμές 1.6, 4 και 8 και για τον αδιαβατικό δείκτη 1.1, 4/3 και 5/3. Τις τιμές αυτές βέβαια δεν τις επιλέξαμε τυχαία αλλά ακολουθούμε προηγούμενες εργασίες που έχουν γίνει στο πρόβλημα αυτό.

Η ονομασία κάθε μοντέλου έγινε ως εξής: ο πρώτος αριθμός μετά το M (Μοντέλο) παίρνει τις τιμές 1 και 2. Τα μοντέλα με την τιμή 1 είναι αυτά για τα οποία ισχύει:  $r_{min}/r_{acc}=0.5$  ενώ για τα μοντέλα με την τιμή 2 έχουμε:  $r_{min}/r_{acc}=0.043$ . Το γράμμα μετά τον πρώτο αριθμό συμβολίζει τον αδιαβατικό δείκτη. Το A συμβολίζει το 1.1, το B το 4/3 και το C το 5/3. Ο τελευταίος αριθμός συμβολίζει τον αριθμό Mach. Το 1 είναι για μοντέλα με αριθμό Mach 1.6, το 2 για 4 και το 3 για 8.

Από τα 18 συνολικά μοντέλα, τα M1A1 και M2A1 ήταν πολύ δύσκολο να εξελιχθούν χρονικά και για το λόγο αυτό τα αφήσαμε εκτός της μελέτης μας. Όσον αφορά τα υπόλοιπα μοντέλα, παρατηρούμε ότι τα M1A2 και M2A2 παρουσιάζουν μια ιδιαίτερη συμπεριφορά. Το χρονιστικό κύμα παραμένει σε όλη τη διάρκεια της προσομοίωσης κλειστό σχηματίζοντας μια στήλη πολύ υψηλής πυκνότητας από την οποία συμβαίνει κυρίως η προσαύξηση μάζας στην μελανή οπή. Ήδη ακριβώς μορφολογία παρουσιάζουν και τα M1A3 και M2A3 που δεν τα έχουμε παραθέσει για οικονομία χώρου. Η μορφολογία αυτή φαίνεται λοιπόν να είναι χαρακτηριστική των μοντέλων με μικρό αδιαβατικό δείκτη.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι το M2A2 παρόλο που έχει λόγο  $r_{min}/r_{acc}=0.043$  και σύμφωνα με όσα είπαμε στην προηγούμενη παράγραφο θα έπρεπε να παρουσιάζει έντονη συμπεριφορά flip-flop, δεν έχει κανένα σημάδι αστάθειας ούτε στις ισοσταθμικές της πυκνότητας αλλά ούτε και στους ρυθμούς προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής. Όλοι οι ρυθμοί προσαύξησης παρουσιάζουν μια αξιοσημείωτη σταθερότητα.

Παρατηρώντας τώρα τις ισοσταθμικές καμπύλες του M1C3 βλέπουμε ότι υπάρχουν διάφορες αστάθειες στο χρονιστικό κύμα. Παρόλο δηλαδή που το M1A2 και το M1C3 έχουν τον ίδιο λόγο  $r_{min}/r_{acc}$  η μορφολογία και η ευστάθεια των ροών τους είναι τελείως διαφορετικές. Καταρχάς, στην περίπτωση του M1C3 το χρονιστικό κύμα πολύ γρήγορα διαταράσσεται και ανοίγει. Μελετώντας τις ισοσταθμικές του μοντέλου αυτού βλέπουμε ότι για  $t = 400$  και για  $t = 480$  το χρονιστικό κύμα είναι στραμμένο προς την πάνω και την κάτω πλευρά, αντιστοίχως. Η συμπεριφορά αυτή δείχνει την έναρξη της αστάθειας flip-flop μικρού πλάτους.

Άρα, μπορούμε να πούμε ότι η ευστάθεια της ροής δεν καθορίζεται μόνο από τον λόγο  $r_{min}/r_{acc}$  αλλά και από τον αριθμό Mach και τον αδιαβατικό δείκτη. Η εξάρτηση αυτή θα φανεί καλύτερα παρατηρώντας τις ισοσταθμικές του μοντέλου 2C3. Το μοντέ-

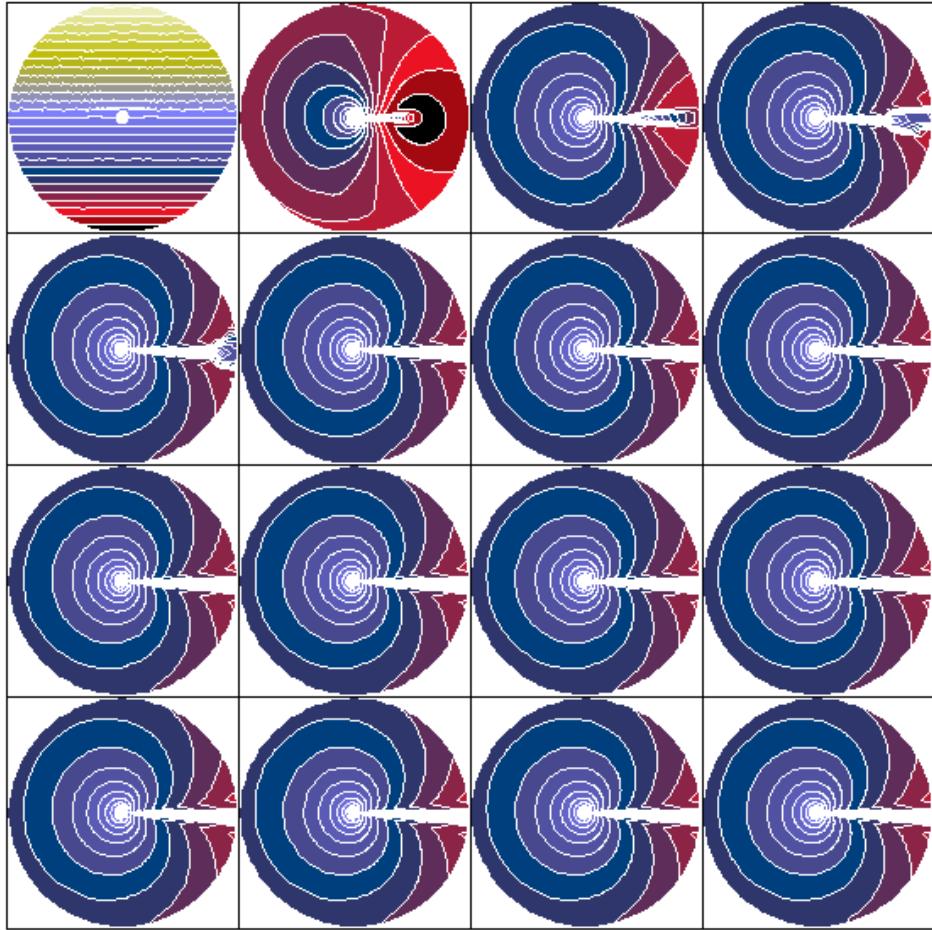
λο αυτό παρουσιάζει την αστάθεια flip-flop με το μεγαλύτερο πλάτος σε σύγκριση με τα υπόλοιπα που μελετήσαμε. Όπως φαίνεται καθαρά, το πλάτος της ταλάντωσης του χρουστικού κύματος γίνεται μέγιστο και ξεπερνάει ακόμα και τις 90 μοίρες ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι παρόλο που το M1 από την προηγούμενη ενότητα είχε πολύ μικρότερο λόγο rmin/racc σε σχέση με το M2C3 το πλάτος της ταλάντωσης για το M2C3 είναι πολύ μεγαλύτερο. Αυτό συμβαίνει επειδή και ο αριθμός Mach του M2C3 και ο αδιαβατικός του δείκτης είναι μεγαλύτεροι από τις αντίστοιχες τιμές του M1. Παρόλο όμως που το πλάτος ταλάντωσης του χρουστικού κύματος είναι τόσο μεγάλο δεν παρατηρούμε να εμφανίζονται δίσκοι προσαύξησης. Έτσι διαπιστώνουμε για τις συγκεκριμένες τιμές των διαφόρων παραμέτρων που θεωρήσαμε, ότι η εμφάνιση ενός δίσκου προσαύξησης είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται μόνο σε Νευτώνειες προσομοιώσεις. Αξίζει όμως στο σημείο αυτό να δούμε πως συμπεριφέρονται οι ρυθμοί προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής για ένα τέτοιο μοντέλο με τόσο ασταθή συμπεριφορά.

Μοντέλο	$u_\infty$	$c_{s_\infty}$	$M_\infty$	$\gamma$	rmin/racc	rmax/racc	$\epsilon_\rho$
M1A1	0.4	0.25	1.6	1.1	0.5	8.5	0.005
M1B1	0.4	0.25	1.6	4/3	0.5	8.5	0.005
M1C1	0.4	0.25	1.6	5/3	0.5	8.5	0.005
M1A2	0.4	0.1	4	1.1	0.5	8.5	0.005
M1B2	0.4	0.1	4	4/3	0.5	8.5	0.005
M1C2	0.4	0.1	4	5/3	0.5	8.5	0.005
M1A3	0.4	0.05	8	1.1	0.5	8.5	0.005
M1B3	0.4	0.05	8	4/3	0.5	8.5	0.005
M1C3	0.4	0.05	8	5/3	0.5	8.5	0.005

Πίνακας 2: Μοντέλα για τη μελέτη της επίδρασης του αριθμού Mach και του αδιαβατικού δείκτη στην μορφολογία της ροής.

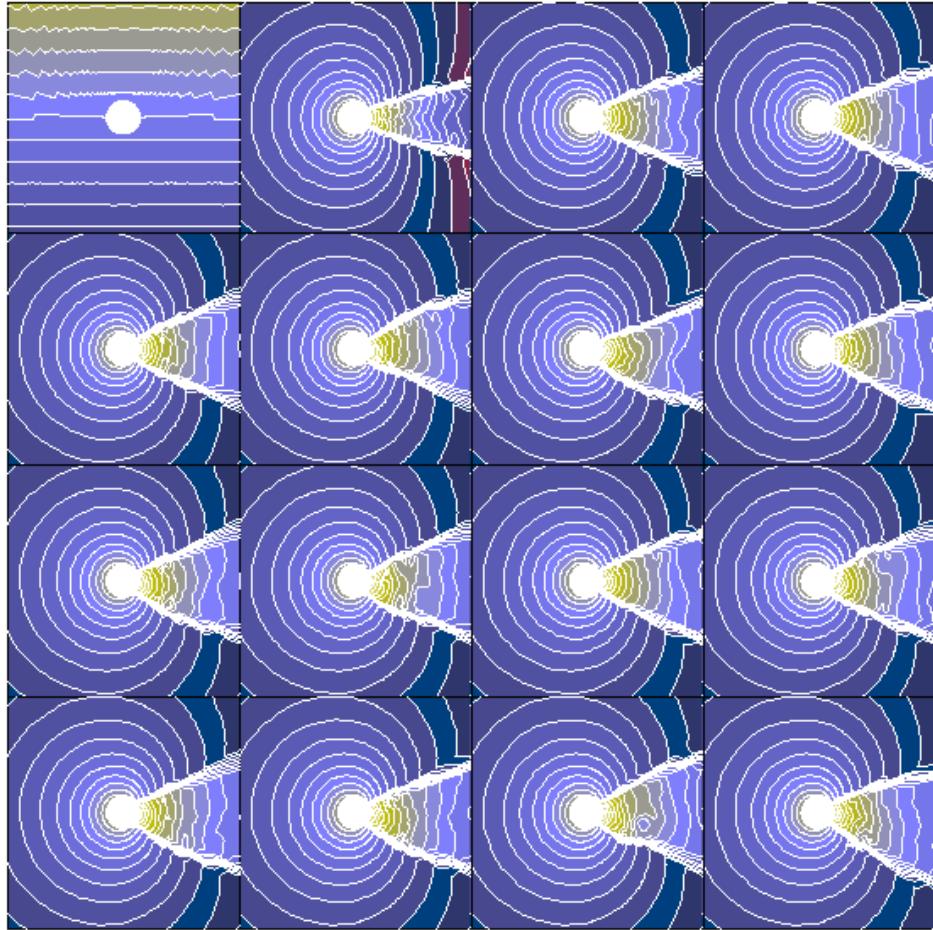
Μοντέλο	$u_\infty$	$c_{s_\infty}$	$M_\infty$	$\gamma$	rmin/racc	rmax/racc	$\epsilon_\rho$
M2A1	0.1	0.0625	1.6	1.1	0.043	8.5	0.005
M2B1	0.1	0.0625	1.6	4/3	0.043	8.5	0.005
M2C1	0.1	0.0625	1.6	5/3	0.043	8.5	0.005
M2A2	0.1	0.025	4	1.1	0.043	8.5	0.005
M2B2	0.1	0.025	4	4/3	0.043	8.5	0.005
M2C2	0.1	0.025	4	5/3	0.043	8.5	0.005
M2A3	0.1	0.0125	8	1.1	0.043	8.5	0.005
M2B3	0.1	0.0125	8	4/3	0.043	8.5	0.005
M2C3	0.1	0.0125	8	5/3	0.043	8.5	0.005

Πίνακας 3: Μοντέλα για τη μελέτη της επίδρασης του αριθμού Mach και του αδιαβατικού δείκτη στην μορφολογία της ροής.



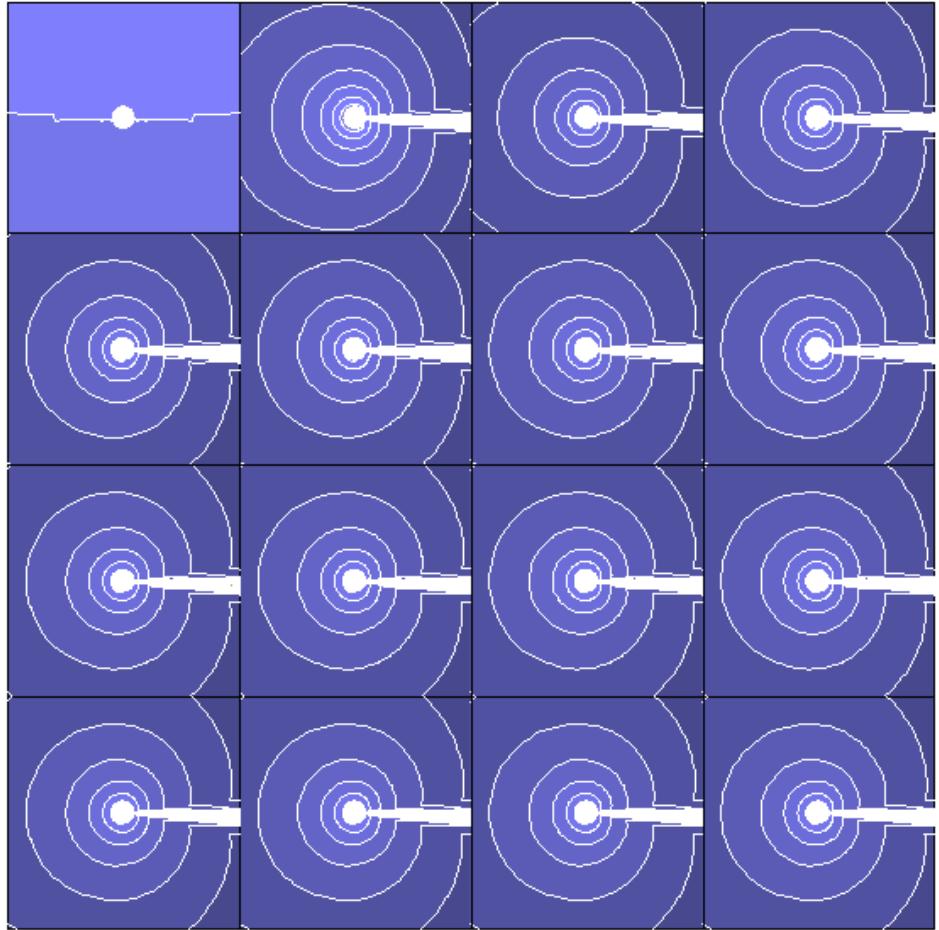
Σχήμα 16: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 1A2. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες  $M$ , είναι  $t=0, 60, 120, \dots, 900$ .

Όσον αφορά τους ρυθμούς προσαύξησης μάζας και ορμής βλέπουμε ότι και οι δύο παρουσιάζουν ταλαντώσεις μεγάλου σχετικά πλάτους γύρω από μια μη μηδενική μέση τιμή. Αντιθέτως, ο ρυθμός προσαύξησης στροφορμής ταλαντώνεται γύρω από τιμές κοντά στο μηδέν. Οι ταλαντώσεις όμως έχουν πολύ μεγάλο πλάτος (μεγαλύτερο από κάθε άλλο μοντέλο). Η συμπεριφορά αυτή είναι φυσικά απόλυτα αναμενόμενη, αφού η κίνηση και η παραμονή του χρουστικού κύματος τόσο στην πάνω όσο και στην κάτω πλευρά πρέπει να επιτρέπει στη ροή να μεταφέρει προσωρινά μεγάλα ποσά στροφορμής στην μελανή οπή.



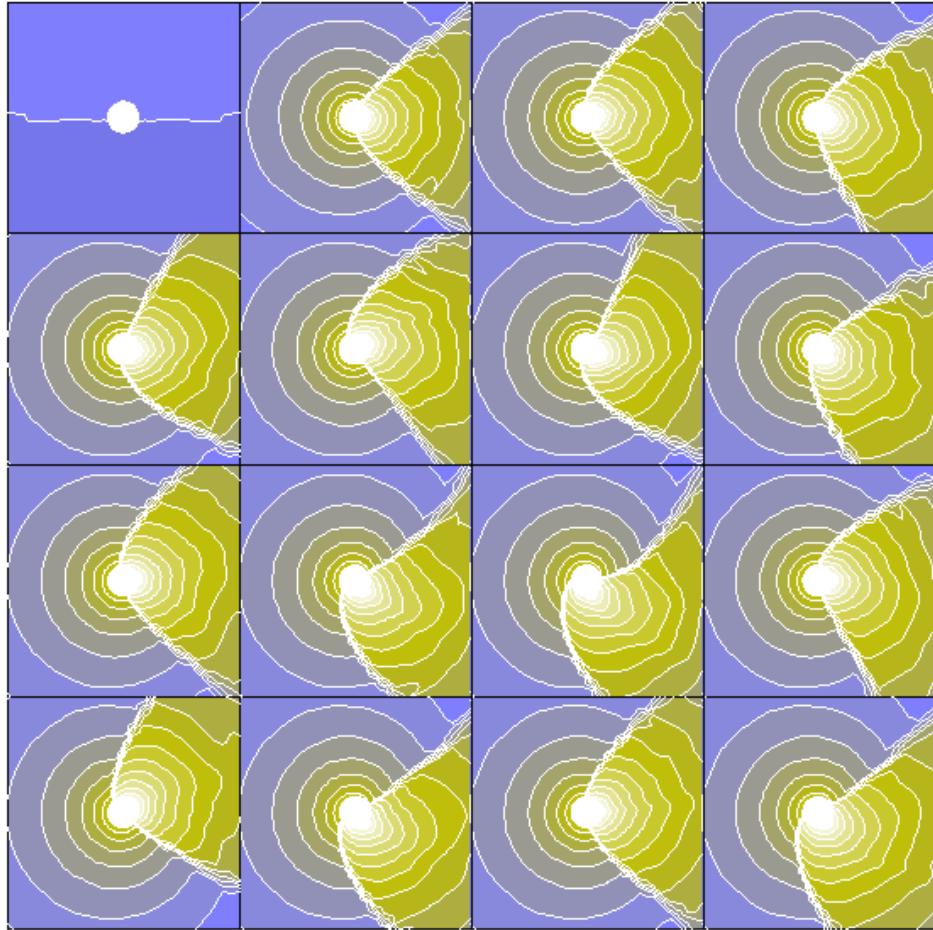
Σχήμα 17: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 1C3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες  $M$ , είναι  $t=0, 80, 160, \dots, 1200$ .

Για όλα τα υπόλοιπα μοντέλα τα οποία αναφέραμε στην αρχή της ενότητας και δεν παραθέσαμε τις ισοσταθμικές τους καμπύλες ή κάποια γραφική παράσταση, θα αρκεστούμε να πούμε τα εξής: Παρατηρώντας προσεκτικά τόσο τις ισοσταθμικές τους καμπύλες όσο και τους ρυθμούς προσαύξησης, προκύπτει το συμπέρασμα ότι για μικρούς αριθμούς Mach και μικρούς αδιαβατικούς δείκτες η ροή γίνεται αρκετά ευσταθής, ενώ για μεγάλους αριθμούς Mach και μεγάλους αδιαβατικούς δείκτες εμφανίζεται η αστάθεια flip-flop. Η μετάβαση από τη μια κατάσταση στην άλλη είναι σταδιακή. Πιο συγκεκριμένα, από μια εντελώς σταθερή ροή θα περάσουμε σε μια ροή όπου δε θα



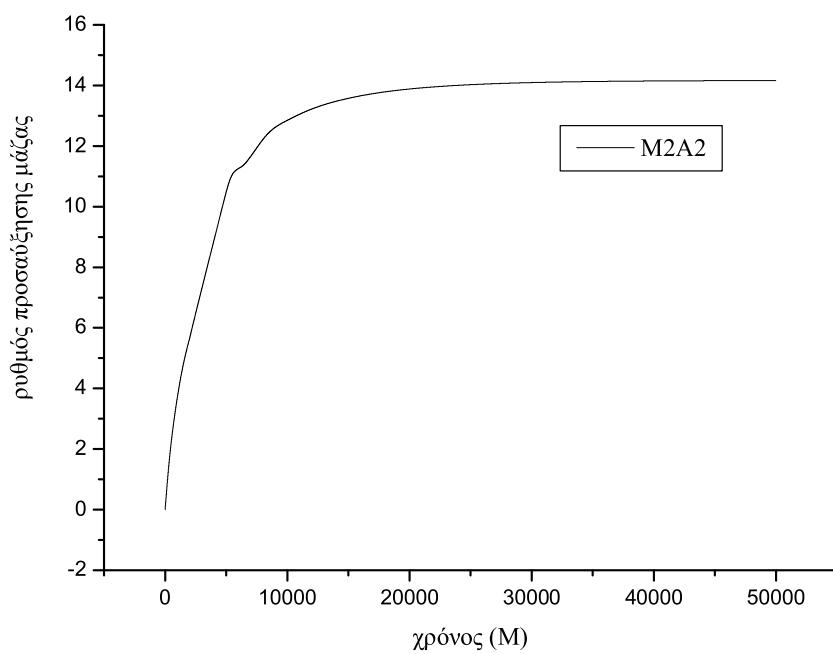
Σχήμα 18: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 2A2. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες  $M$ , είναι  $t=0, 3000, 6000, \dots, 45000$ .

έχει εμφανιστεί ακόμα αστάθεια τύπου flip-flop αλλά απλώς κάποιες διαταραχές στο χρονιστικό κύμα. Στη συνέχεια θα έχουμε εμφάνιση της αστάθειας flip-flop αλλά με πολύ μικρό πλάτος ταλαντώσεων, για να περάσουμε κατόπιν σε ταλαντώσεις μεγάλου και πολύ μεγάλου πλάτους. Για να μπορούμε προφανώς να προβλέψουμε αν σε ένα συγκεκριμένο μοντέλο θα εμφανιστεί αστάθεια flip-flop θα πρέπει να γνωρίζουμε τόσο το λόγο  $r_{min}/r_{acc}$  όσο και τον αριθμό Mach και τον αδιαβατικό δείκτη, αφού κάθε μια από αυτές τις παραμέτρους συμβάλει ανεξάρτητα από τις άλλες στη μορφολογία της ροής.

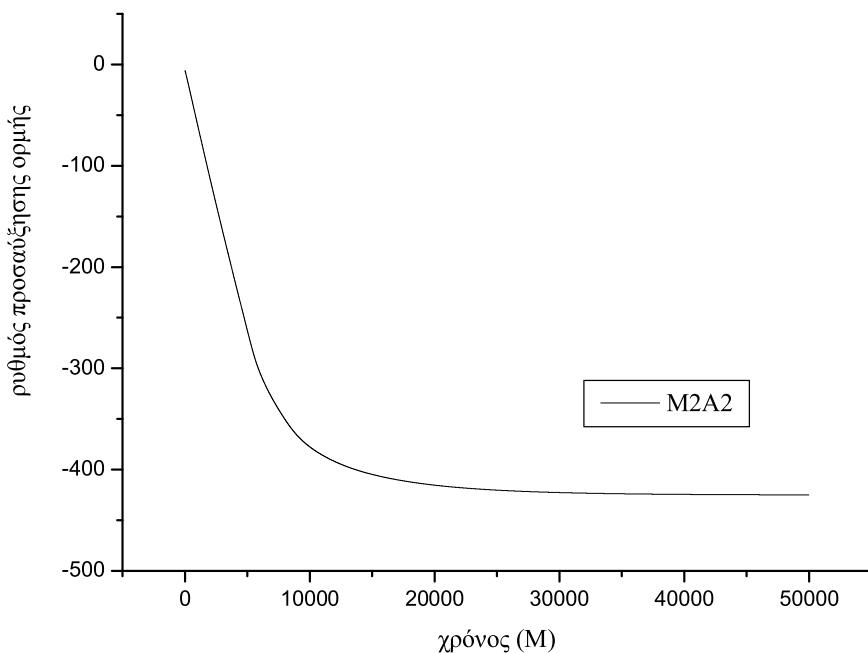


Σχήμα 19: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 2C3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες  $M$ , είναι  $t=0, 6000, 12000, \dots, 90000$ .

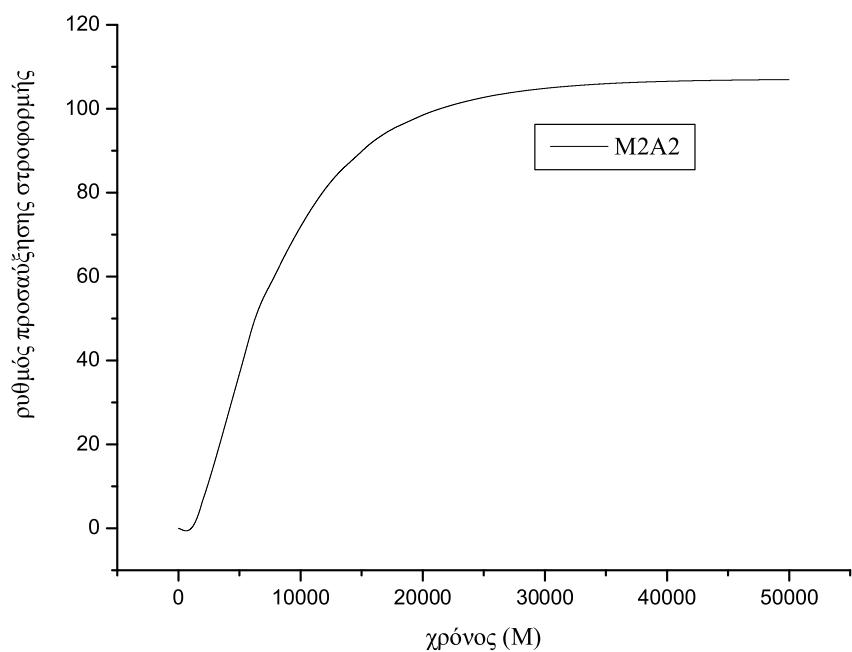
Τέλος, πριν κλείσουμε την ενότητα αυτή, μένει να κάνουμε ένα τελευταίο σχόλιο. Παρατηρήσαμε ότι το M2C3 παρουσιάζει μια πολύ ασταθή συμπεριφορά. Η παρατήρηση έγινε όμως μόνο πολύ κοντά στην μελανή οπή, δηλαδή σε μια πολύ περιορισμένη περιοχή του συνολικού πλέγματος. Αν σχεδιάσουμε τις ισοσταθμικές καμπύλες του μοντέλου αυτού σε όλο το πλέγμα θα παρατηρήσουμε ότι παρόλο που πολύ κοντά στην μελανή οπή κυριαρχεί η αστάθεια flip-flop, σε μεγαλύτερες αποστάσεις δεν είναι και τόσο εμφανής η κίνηση του χρονιστικού κύματος. Η μορφολογία δηλαδή της ροής εξαρτάται και από την κλίμακα στην οποία την παρατηρούμε.



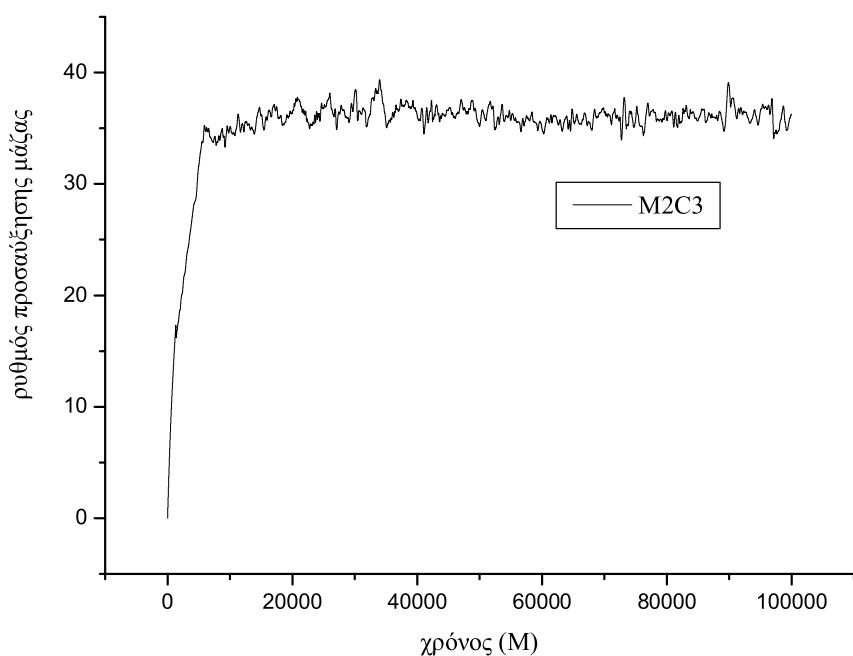
Σχήμα 20: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας για το μοντέλο 2A2.



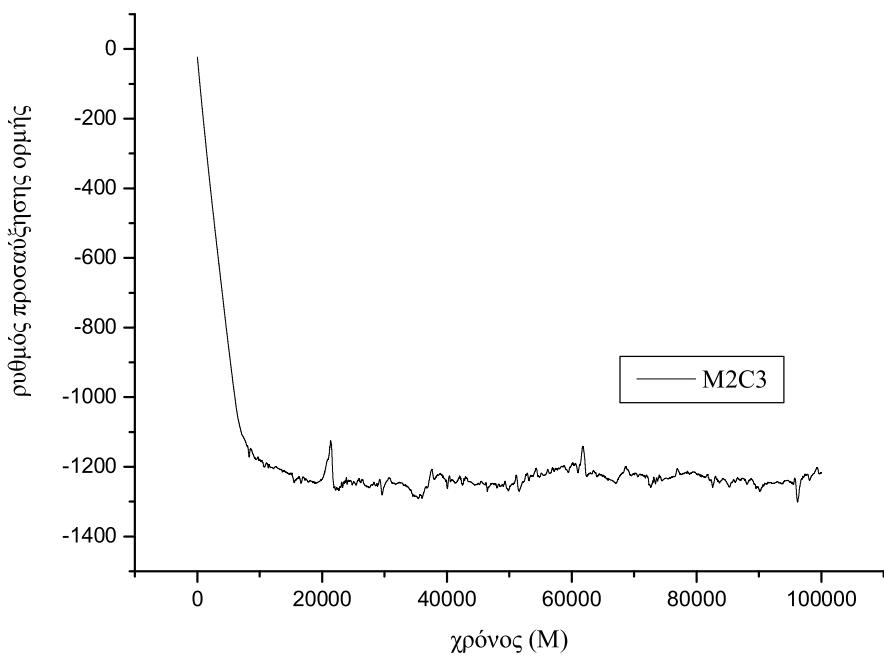
Σχήμα 21: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης ορμής για το μοντέλο 2A2.



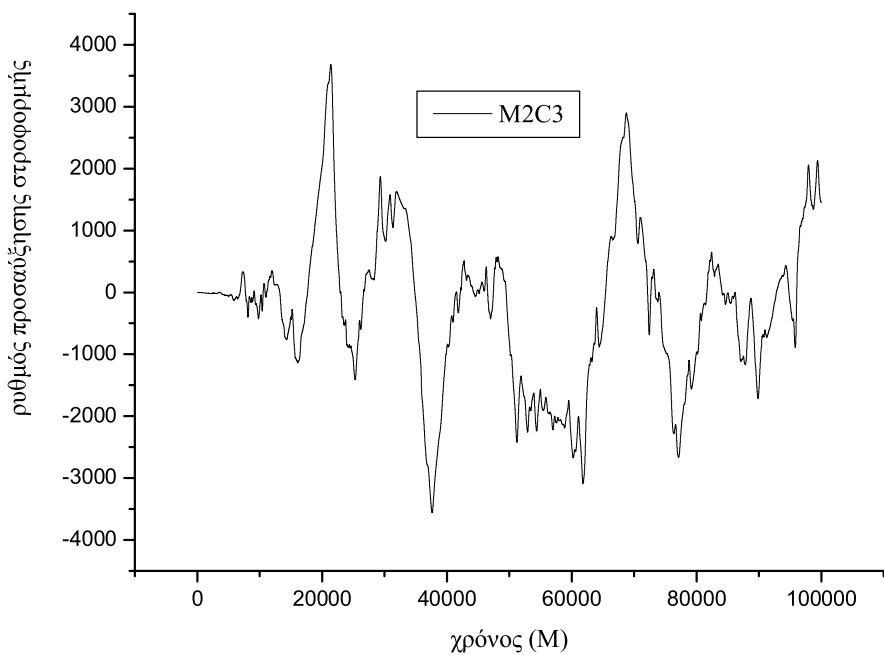
Σχήμα 22: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης στροφορμής για το μοντέλο 2A2.



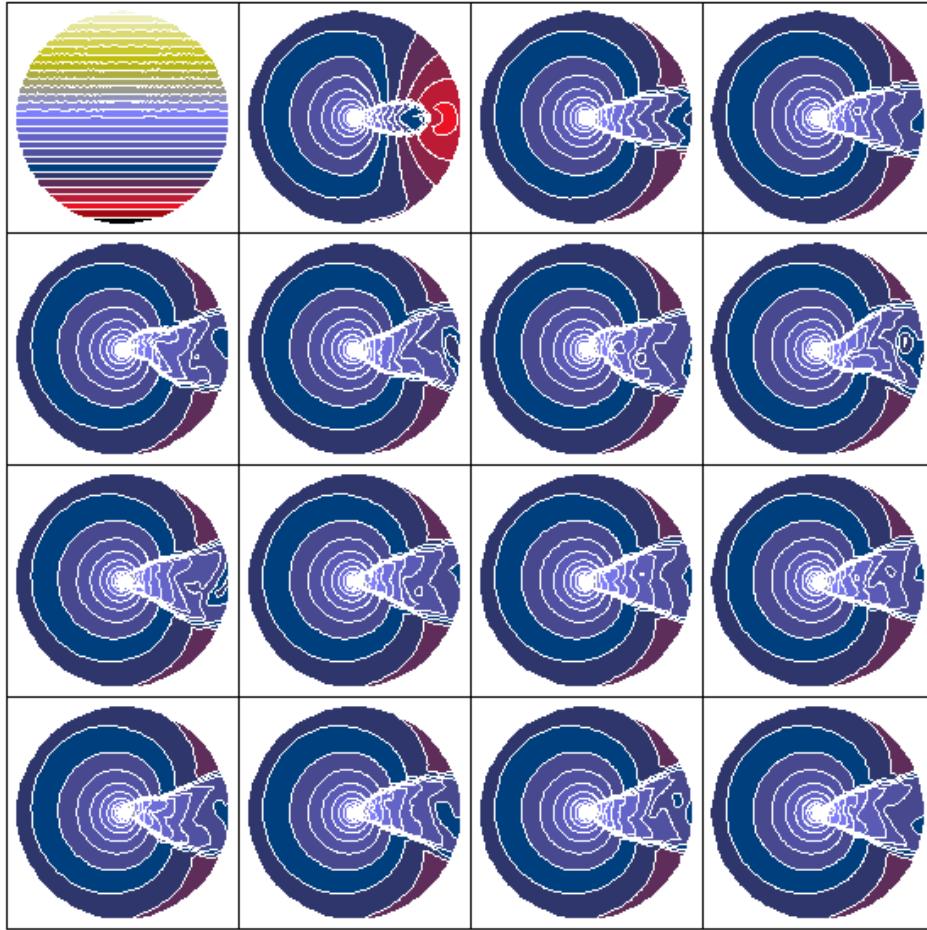
Σχήμα 23: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας για το μοντέλο 2C3.



Σχήμα 24: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης ορμής για το μοντέλο 2C3.



Σχήμα 25: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης στροφορμής για το μοντέλο 2C3.



Σχήμα 26: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το M2C3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι  $t=0, 6000, 12000, \dots, 90000..$

### 3.4 Η εξάρτηση της ροής από τη βαθμίδα πυκνότητας.

Στην ενότητα αυτή θα εξετάσουμε την εξάρτηση της μορφολογίας της ροής και της ευστάθειάς της από τη βαθμίδα πυκνότητας στις αρχικές συνθήκες. Μέχρι στιγμής, όλα τα μοντέλα που κατασκευάσαμε είχαν μια πολύ μικρή αρχική βαθμίδα πυκνότητας. Στη συνέχεια, θα περιγράψουμε τη συμπεριφορά μοντέλων με μηδενική αλλά και πολύ μεγάλη βαθμίδα πυκνότητας.

<b>Μοντέλο</b>	<b>u<sub>∞</sub></b>	<b>c<sub>s∞</sub></b>	<b>M<sub>∞</sub></b>	<b>γ</b>	<b>rmin/racc</b>	<b>rmax/racc</b>	<b>ε<sub>ρ</sub></b>
M2	0.3	0.075	4	4/3	0.250	8.5	0.005
M3	0.2	0.05	4	4/3	0.125	8.5	0.005
M2b	0.3	0.075	4	4/3	0.250	8.5	0
M3b	0.2	0.05	4	4/3	0.125	8.5	0

Πίνακας 4: Μοντέλα για τη μελέτη της επιδρασης της βαθμίδας πυκνότητας στη μορφολογία της ροής.

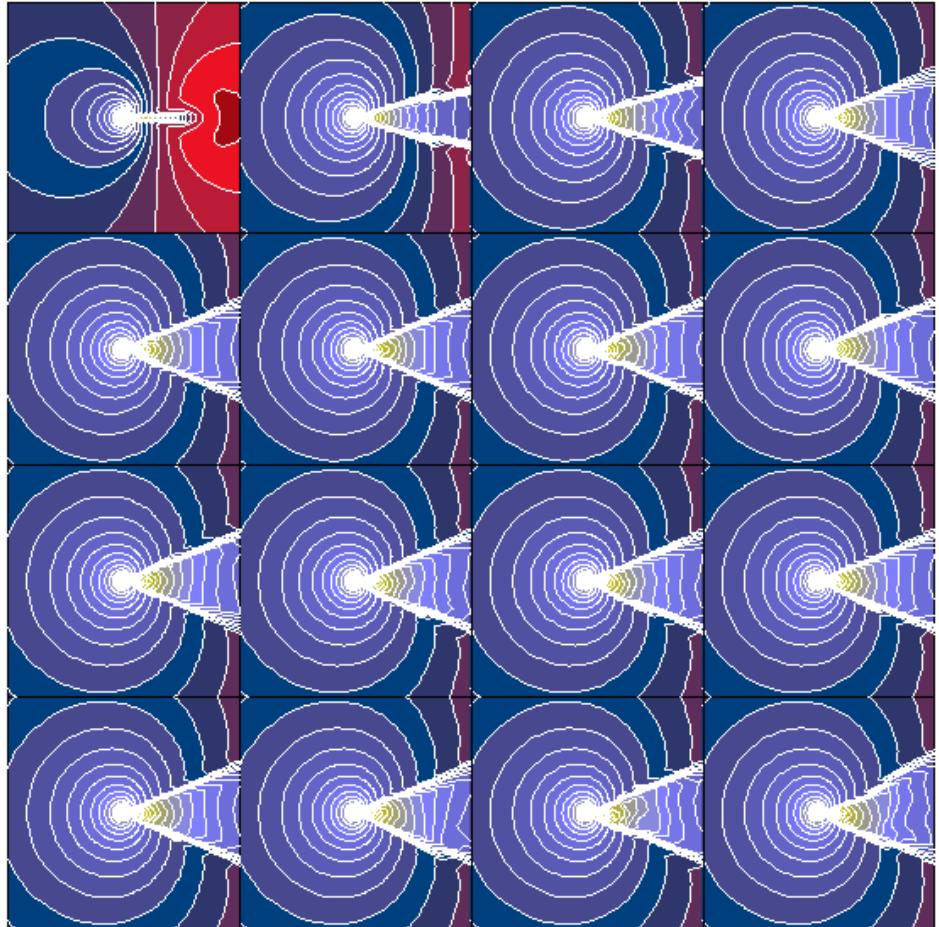
<b>Μοντέλο</b>	<b>u<sub>∞</sub></b>	<b>c<sub>s∞</sub></b>	<b>M<sub>∞</sub></b>	<b>γ</b>	<b>rmin/racc</b>	<b>rmax/racc</b>	<b>ε<sub>ρ</sub></b>
MA2	0.4	0.1	4	1.1	0.36	8.5	0.8
MB2	0.4	0.1	4	4/3	0.36	8.5	0.8
MC2	0.4	0.1	4	5/3	0.36	8.5	0.8
MA3	0.4	0.05	8	1.1	0.36	8.5	0.8
MB3	0.4	0.05	8	4/3	0.36	8.5	0.8
MC3	0.4	0.05	8	5/3	0.36	8.5	0.8

Πίνακας 5: Μοντέλα για τη μελέτη της επιδρασης της βαθμίδας πυκνότητας στη μορφολογία της ροής.

Πρώτος στόχος μας είναι να διαπιστώσουμε αν είναι τελικά απαραίτητη μια βαθμίδα πυκνότητας για την εμφάνιση μιας ασταθούς συμπεριφοράς τύπου flip-flop. Για τον λόγο αυτό επιλέγουμε τα μοντέλα 2 και 3 που τρέξαμε σε προηγούμενη ενότητα και τα ξανατρέχουμε για μηδενική βαθμίδα πυκνότητας. Η επιλογή των δύο συγκεκριμένων μοντέλων δεν έγινε φυσικά τυχαία. Είναι τα δύο μοντέλα στα οποία μόλις αρχίζουν να φαίνονται τα πρώτα ίχνη αστάθειας flip-flop. Θα δούμε λοιπόν αν η βαθμίδα πυκνότητας επηρεάζει την εμφάνιση της αστάθειας και αν ναι σε ποιο βαθμό γίνεται αυτό.

Συγκρίνοντας τις ισοσταθμικές καμπύλες των M2b και M3b με τις αντίστοιχες M2 και M3 που δόθηκαν σε προηγούμενη ενότητα παρατηρούμε ότι και με ανομοιογένεια και χωρίς ανομοιογένεια παίρνουμε ποιοτικά όμοια συμπεριφορά. Για rmin/racc=0.250 δεν είναι ξεκάθαρο ότι υπάρχει αστάθεια flip-flop. Απλά, το χρονοστικό κύμα για την περίπτωση του M2b φαίνεται να είναι λίγο πιο διαταραγμένο. Για rmin/racc=0.125 η ροή χωρίς αρχική ανομοιογένεια παρουσιάζει αστάθεια flip-flop μεγαλύτερου πλάτους από ότι παρουσιάζει με αρχική ανομοιογένεια. Πριν εξάγουμε όμως κάποιο συμπέρασμα, ας ρίξουμε μια ματιά και στους ρυθμούς προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής.

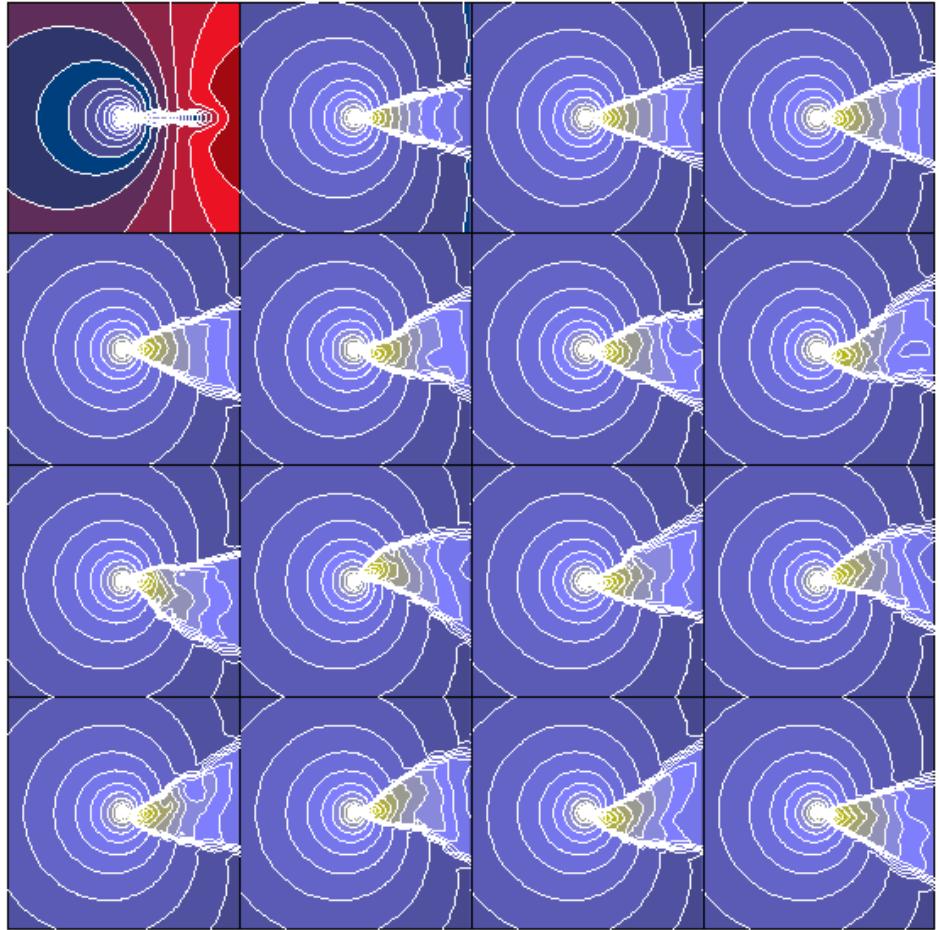
Για να έχουμε τη δυνατότητα σύγκρισης, έχουμε σχεδιάσει σε κοινούς άξονες τους ρυθμούς προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής για τα μοντέλα 2b, 2 και 3b. Μελετώντας αρχικά τους ρυθμούς προσαύξησης μάζας και ορμής παρατηρούμε ότι παρουσιάζουν ταλαντώσεις ίσου περίπου πλάτους γύρω από μια μέση τιμή. Έτσι, είναι πολύ δύσκολο να εντοπίσει κανείς διαφορές ανάμεσα στην ομογενή και την μη ομογενή περίπτωση. Ας επικεντρώσουμε τώρα την προσοχή μας στους ρυθμούς προσαύξησης στροφορμής. Παρατηρούμε ότι μια σημαντική διαφορά ανάμεσα στις ομογενείς και τις μη ομογενείς ροές είναι ότι στις ομογενείς ροές ο ρυθμός προσαύξησης στροφορμής στα πρώτα στάδια της προσομοίωσης έχει τιμές πολύ κοντά στο μηδέν. Παρόλα αυτά, ύστερα από πεπερασμένο χρονικό διάστημα και στις δύο περιπτώσεις, παρατηρούμε ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους που δεν κάνουν δυνατό το διαχωρισμό των δύο περιπτώσεων. Όσον αφορά τα μοντέλα 2b και 2, εύκολα μπορούμε να δούμε



Σχήμα 27: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 2b. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι  $t=0, 180, 360, \dots, 2700$ .

ότι το M2 παρουσιάζει σε γενικές γραμμές ταλαντώσεις μεγαλύτερου πλάτους, σε συμφωνία με το γεγονός ότι το χρουστικό κύμα σε αυτό το μοντέλο φαινόταν πιο δι-αταραγμένο σε σύγχριση με το χρουστικό κύμα του M2b. Αντιθέτως, το M3 φαίνεται να παρουσιάζει ταλαντώσεις μικρότερου πλάτους από το M3b. Άλλα αυτό είναι κάτι απολύτως αναμενόμενο αφού, όπως είδαμε πιο πάνω, το πλάτος της αστάθειας flip-flop είναι μεγαλύτερο για το M3b από ότι για το M3.

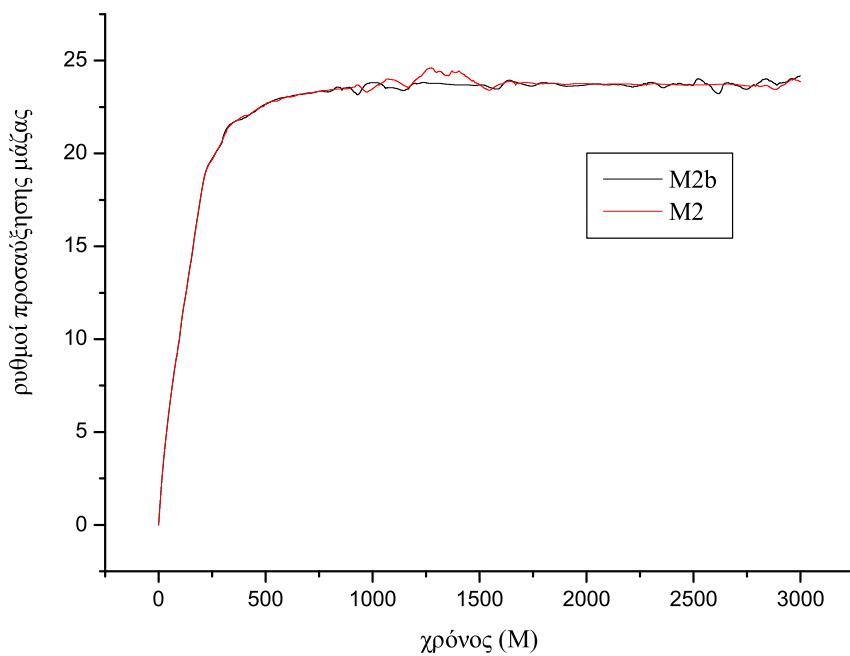
Συμπερασματικά λοιπόν, θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν είναι απαραίτητη η παρουσία μιας βαθμίδας πυκνότητας για την εμφάνιση της αστάθειας flip-flop. Βέβαια, μια



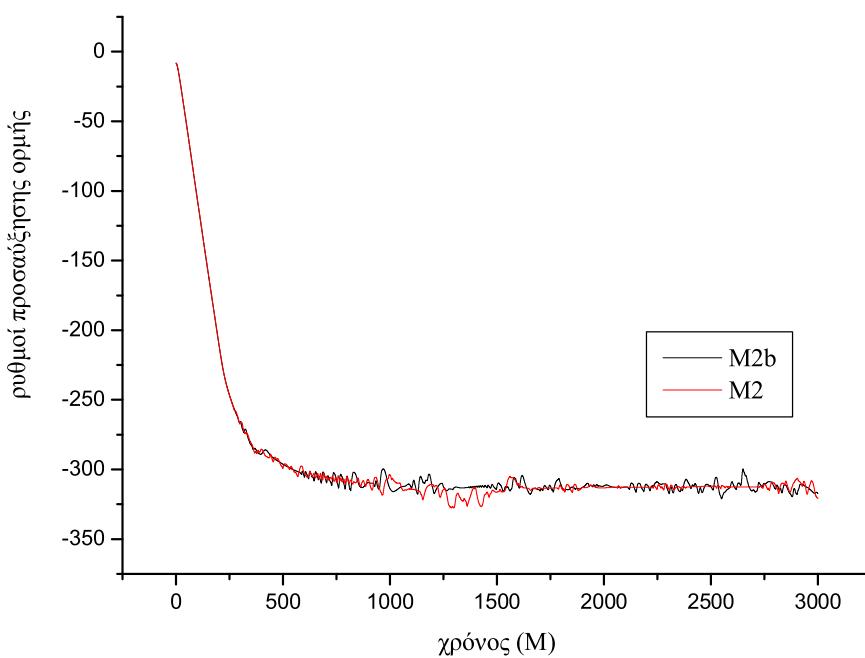
Σχήμα 28: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο 3b. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι  $t=0, 600, 1200, \dots, 9000$ .

βαθμίδα πυκνότητας θα επηρεάσει ως κάποιο βαθμό τα μορφολογικά χαρακτηριστικά της ροής, αλλά δεν είναι τόσο ξεκάθαρο ακόμη το τι ακριβώς αλλάζει με την εισαγωγή της σε μια ομογενή ροή. Το συμπέρασμα αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με αυτό των Matsuda et al 1991 που είχαν ισχυριστεί ότι αστάθειες μπορούν να προκύψουν όχι μόνο από μη ομογενείς αλλά και από ομογενείς ροές.

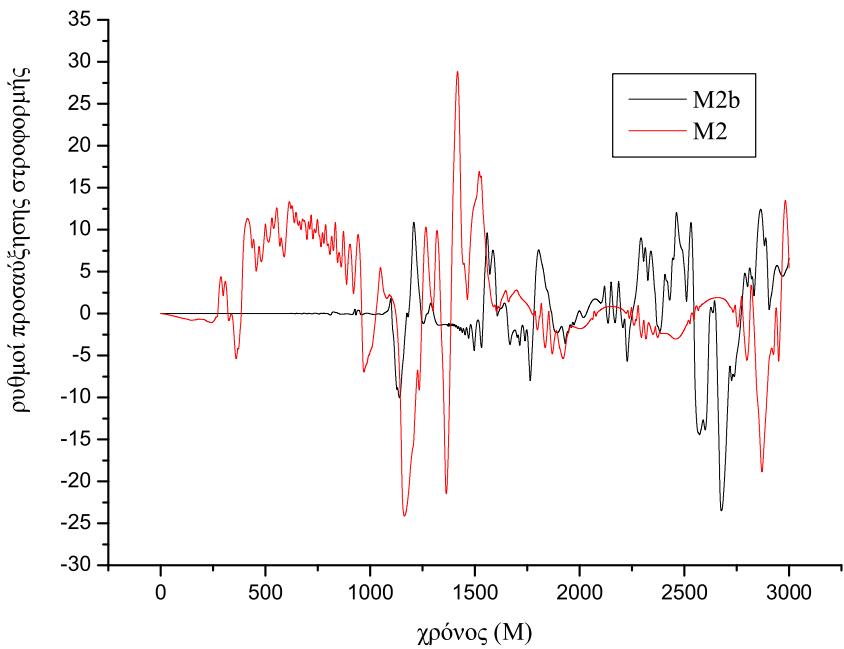
Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε πως μπορούν να επηρεάσουν τη ροή μεγάλες βαθμίδες πυκνότητας. Τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε δίνονται σε πίνακα στην αρχή της ενότητας αυτής. Όπως παρατηρούμε, ο λόγος  $r_{min}/r_{acc}$  επιλέχθηκε να έχει μια



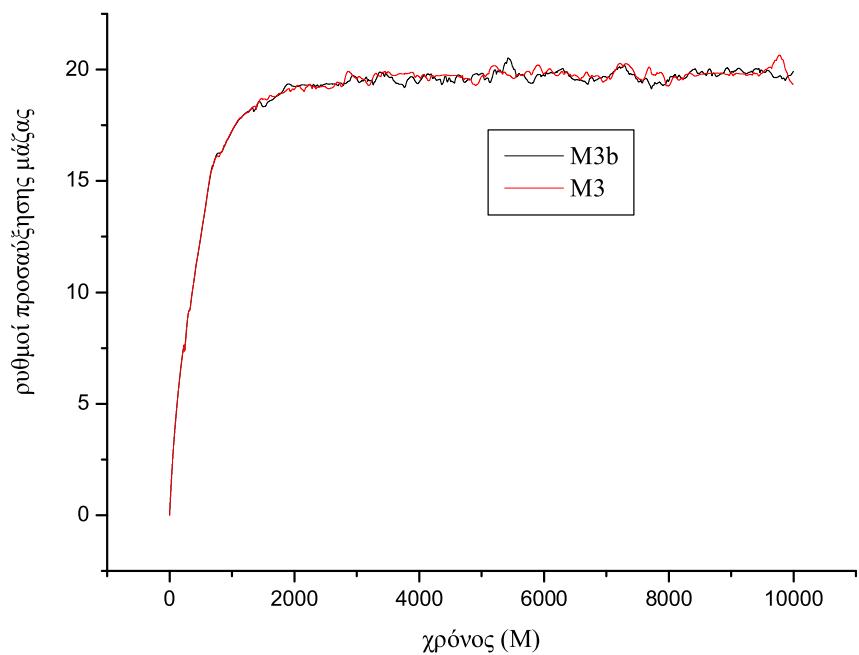
Σχήμα 29: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσαύξησης μάζας.



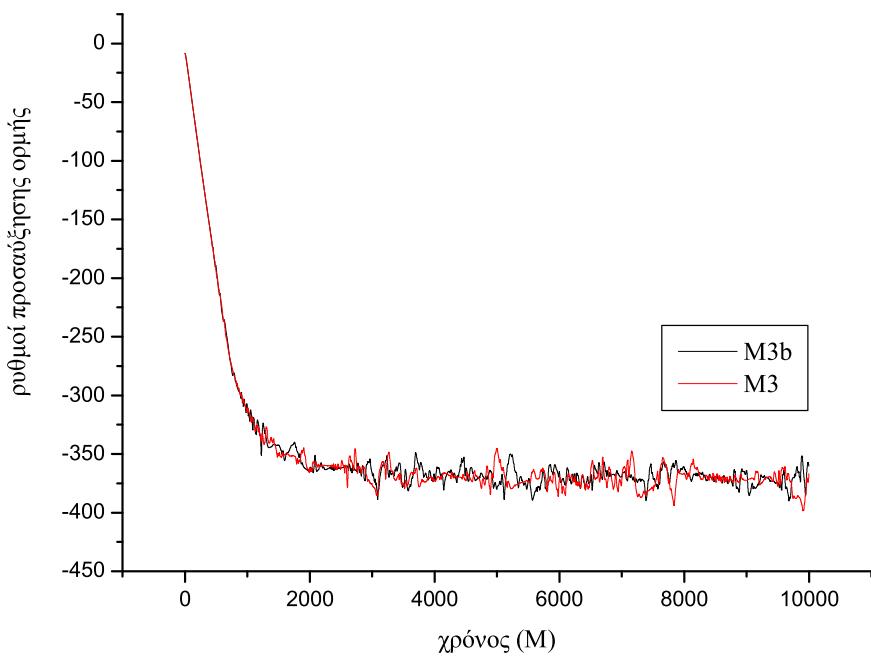
Σχήμα 30: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσαύξησης ορμής.



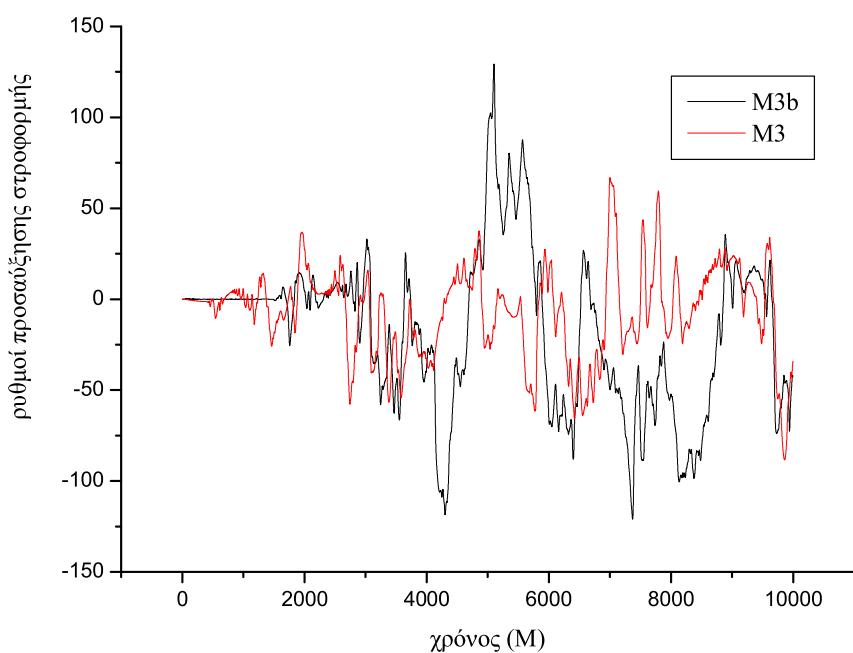
Σχήμα 31: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσανέξησης στροφορμής.



Σχήμα 32: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσανέξησης μάζας.



Σχήμα 33: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσαύξησης ορμής.



Σχήμα 34: Κανονικοποιημένοι ρυθμοί προσαύξησης στροφορμής.

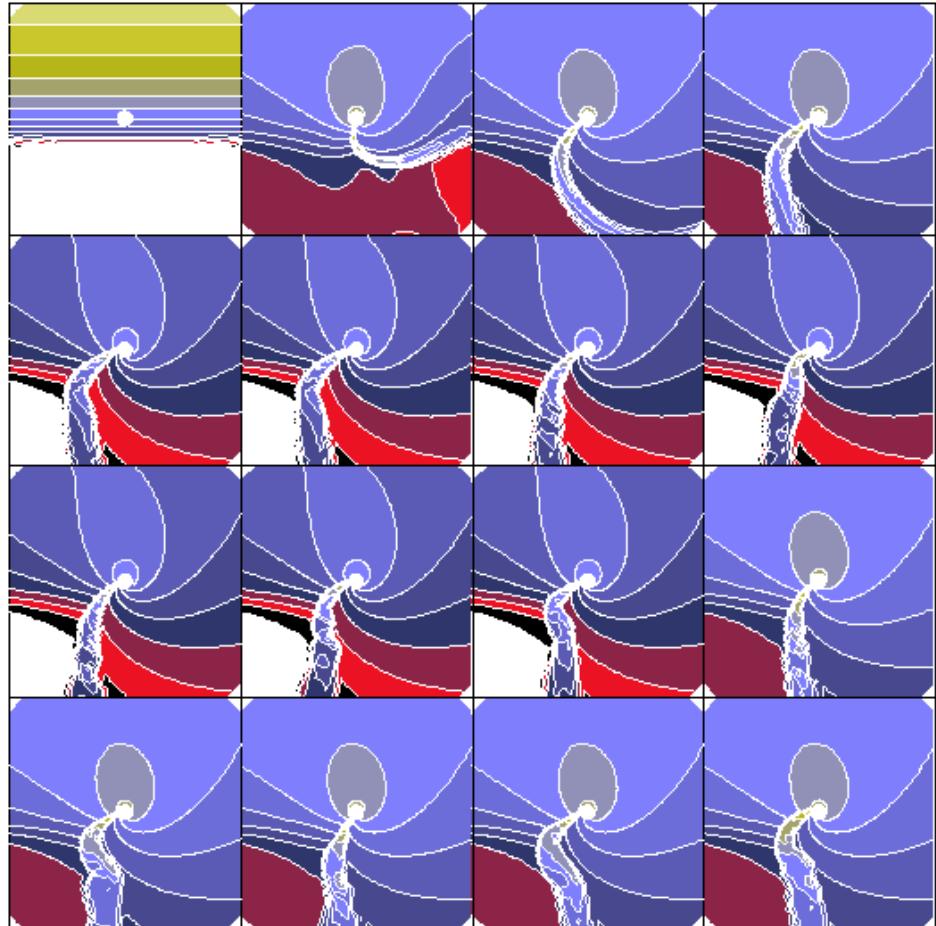
αρκετά μεγάλη τιμή, έτσι ώστε οι όποιες αστάθειες δημιουργηθούν να οφείλονται μόνο στη βαθμίδα πυκνότητας και όχι στο μέγεθος της περιοχής προσαύξησης. Σχεδιάζοντας ισοσταθμικές της πυκνότητας και γι' αυτή την περίπτωση, παρατηρούμε ότι η ροή έχει διαφορετικά μορφολογικά χαρακτηριστικά και παρουσιάζει πολλές αστάθειες.

Αρχικά ωστε εξετάσουμε τη μορφολογία του ΜΑ3. Παρατηρούμε ότι λόγω της πολύ μεγάλης βαθμίδας πυκνότητας το κρουστικό κύμα έχει εκτραπεί προς την πλευρά με τη μικρότερη πυκνότητα. Αυτό συμβαίνει επειδή το υλικό που έρχεται από την πάνω πλευρά της μελανής οπής έχει μεγαλύτερη πυκνότητα και κατά συνέπεια ωστε ασκεί και μεγαλύτερη πίεση στο κρουστικό κύμα από αυτή που ασκεί το υλικό που έρχεται από την κάτω πλευρά. Στη συνέχεια, έχουμε να παρατηρήσουμε ότι το κρουστικό κύμα έχει ανοίξει σε μια πολύ μικρή γωνία. Σχεδιάζοντας ισοσταθμικές και για άλλα μοντέλα ωστε φανεί καλύτερα η σχέση της γωνίας που ανοίγει το κρουστικό κύμα με τον αδιαβατικό δείκτη γ. Τέλος, όπως φαίνεται ζεκάθαρα τόσο από τους ρυθμούς προσαύξησης όσο και από τις ισοσταθμικές, το κρουστικό κύμα είναι εξαιρετικά διαταραγμένο. Άμεση συνέπεια αυτής της διαταραχής είναι οι ρυθμοί προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής να παρουσιάζουν πολύ οξείες κορυφές με μεγάλες αποκλίσεις από τη μέση τιμή τους. Σε κανένα άλλο μοντέλο το φαινόμενο αυτό δεν είναι τόσο έντονο. Από τον ρυθμό προσαύξησης στροφορμής παρατηρούμε επίσης ότι η ροή κατάφερε να αποθέσει στη μελανή οπή ένα σημαντικό ποσοστό στροφορμής σε συμφωνία με την παρατήρηση που κάναμε πως ομογενείς ροές δεν μπορούν να μεταβάλλουν σημαντικά την στροφορμή ενός αντικειμένου.

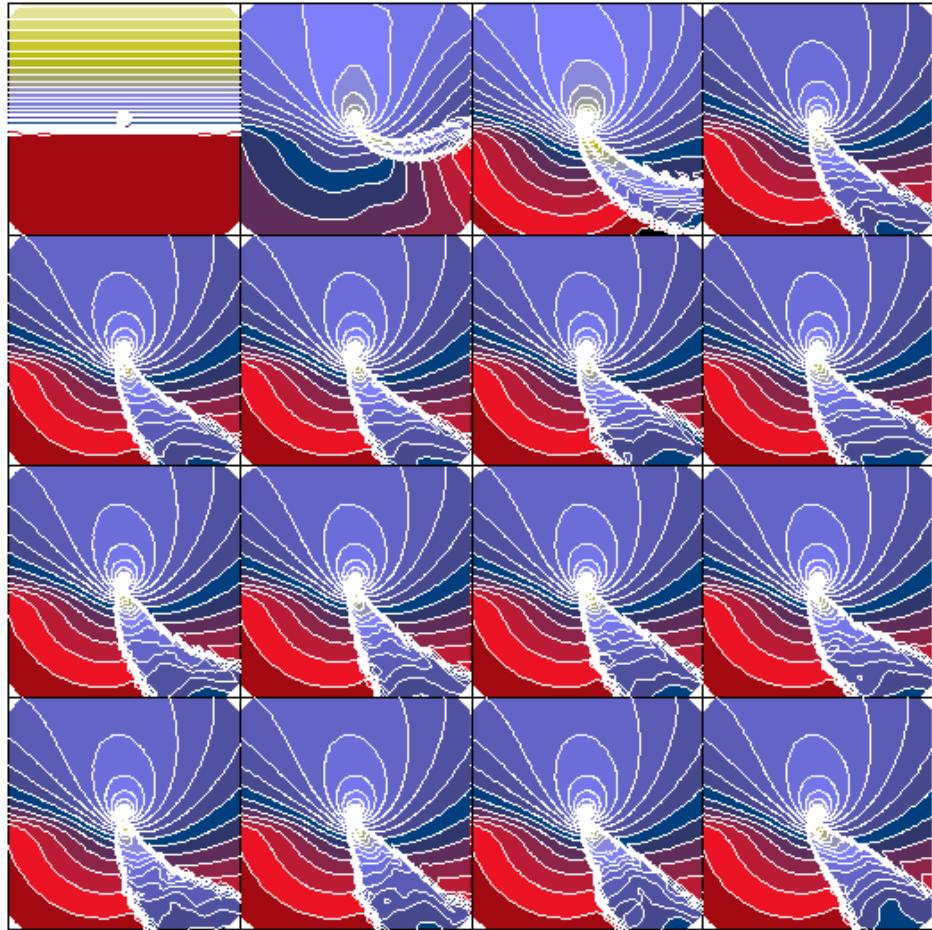
Στη συνέχεια, ωστε εξετάσουμε τη μορφολογία της ροής για τα μοντέλα Β3 και Κ3. Παρατηρούμε ότι το κρουστικό κύμα στο μοντέλο Β3 είναι λιγότερο διαταραγμένο από ότι στο Α3. Παρόλα αυτά, και σε αυτή την περίπτωση δε μπορούμε να πούμε ότι έχουμε μια ευσταθή ροή. Από τις ισοσταθμικές καμπύλες παρατηρούμε για παράδειγμα ότι για  $t=600$  και για  $t=1400$  το κρουστικό κύμα παρουσιάζει σημαντικές διαταραχές. Οι διαταραχές αυτές είναι εμφανείς και στους ρυθμούς προσαύξησης, όπου σε συμφωνία με τα όσα είπαμε παραπάνω έχουμε ταλαντώσεις αρκετά μεγάλου πλάτους, όχι όμως τόσο μεγάλου όσο στην προηγούμενη περίπτωση. Παρόμοια συμπεριφορά παρουσιάζει και το ΜC3. Στην περίπτωση αυτή όμως, η ροή έχει γίνει ακόμα πιο σταθερή. Το κρουστικό κύμα φαίνεται να είναι σχεδόν ακίνητο και ο ρυθμός προσαύξησης μάζας είναι σχεδόν σταθερός. Οι ρυθμοί προσαύξησης ορμής και στροφορμής παρουσιάζουν ταλαντώσεις λίγο μεγαλύτερου πλάτους από το ρυθμό προσαύξησης μάζας, αλλά αρκετά μικρότερου πλάτους σε σύγκριση με τους αντίστοιχους ρυθμούς των μοντέλων Β3 και Α3. Βλέπουμε δηλαδή ότι, όσο μεγαλώνει ο αδιαβατικός δείκτης, η ροή γίνεται όλο και πιο σταθερή. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει μελετώντας τη ροή και τους ρυθμούς προσαύξησης των μοντέλων Α2, Β2 και Κ2 που σε γενικές γραφμές παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά με τα μοντέλα που εξετάσαμε.

Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική, διότι στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η ροή γίνεται πιο ευσταθής με μείωση του αδιαβατικού δείκτη και του αριθμού Mach. Υπάρχουν βέβαια δύο σημαντικές διαφορές με την προηγούμενη ενότητα. Η πρώτη είναι ότι η βαθμίδα πυκνότητας ήταν πολύ μικρότερη και η δεύτερη ότι εκεί είχαμε ένα συγκεκριμένο είδος αστάθειας, την flip-flop, ενώ εδώ δεν είναι παρούσα η αστάθεια αυτή αλλά έχουμε διαταραχές στο κρουστικό κύμα που προκαλούν και τις ταλαντώσεις στους ρυθμούς προσαύξησης. Το πως ακριβώς επηρεάζει μια μεγάλη βαθμίδα πυκνότητας τη ροή και το αν υπάρχουν διαφορές με την περίπτωση μιας ροής με μικρή βαθμίδα πυκνότητας ωστε φανεί καλύτερα αν μελετήσουμε τα μοντέλα της ενότητας αυτής και για

μια μελανή οπή με μικρότερο λόγο  $r_{\min}/r_{\text{acc}}$  όπου θα ήταν παρούσα και η αστάθεια flip-flop .

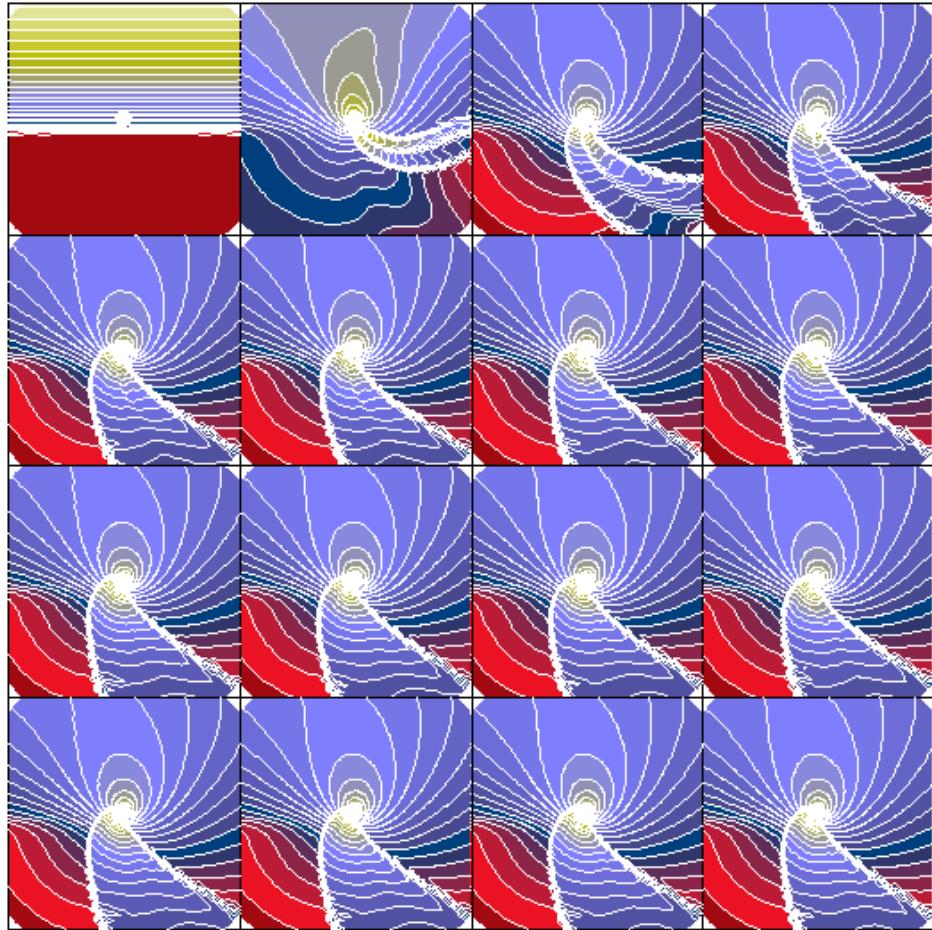


Σχήμα 35: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο A3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι  $t=0, 100, 200, \dots, 1500$ .



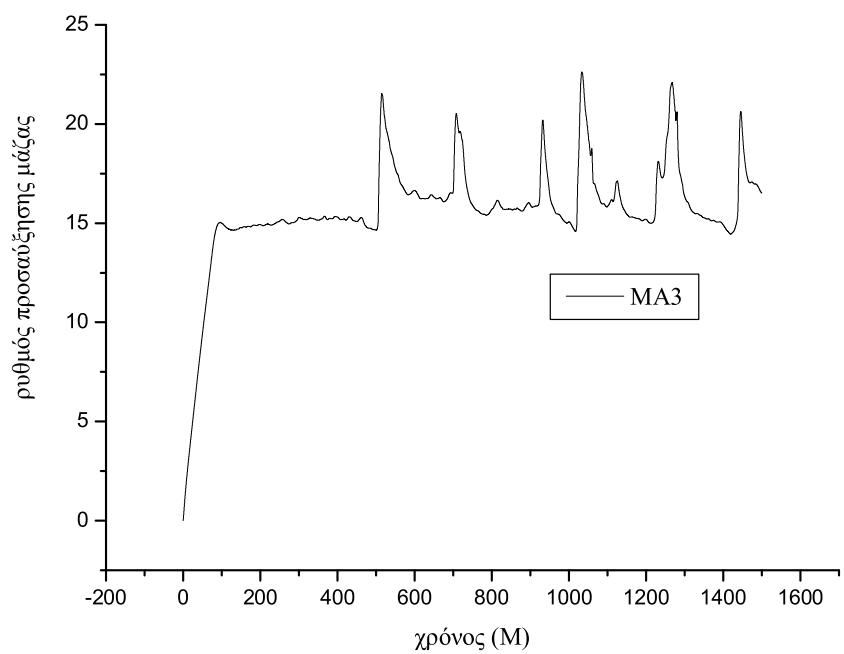
Σχήμα 36: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο B3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες M, είναι  $t=0, 100, 200, \dots, 1500$ .

Πριν κλείσουμε με την ενότητα αυτή, να αναφέρουμε ότι από τα προηγούμενα μοντέλα προκύπτει και ένα άλλο συμπέρασμα. Βλέπουμε ότι στο MA3 η γωνία που ανοίγει το χρουστικό κύμα είναι πολύ μικρή, στο MB3 η γωνία αυτή είναι λίγο μεγαλύτερη και στο MC3 ακόμα πιο μεγάλη. Την ίδια συμπεριφορά παρουσιάζουν και τα μοντέλα A2, B2 και C2. Επίσης, η συμπεριφορά αυτή φαίνεται πολύ καθαρά και στα μοντέλα της προηγούμενης ενότητας, τόσο σε αυτά που είναι παρούσα η αστάθεια flip-flop όσο και σε αυτά όπου δεν εμφανίζεται. Εκεί μάλιστα η συμπεριφορά αυτή ήταν ακόμα πιο έντονη, διότι στα μοντέλα με μικρό αδιαβατικό δείκτη το χρουστικό κύμα δεν άνοιγε

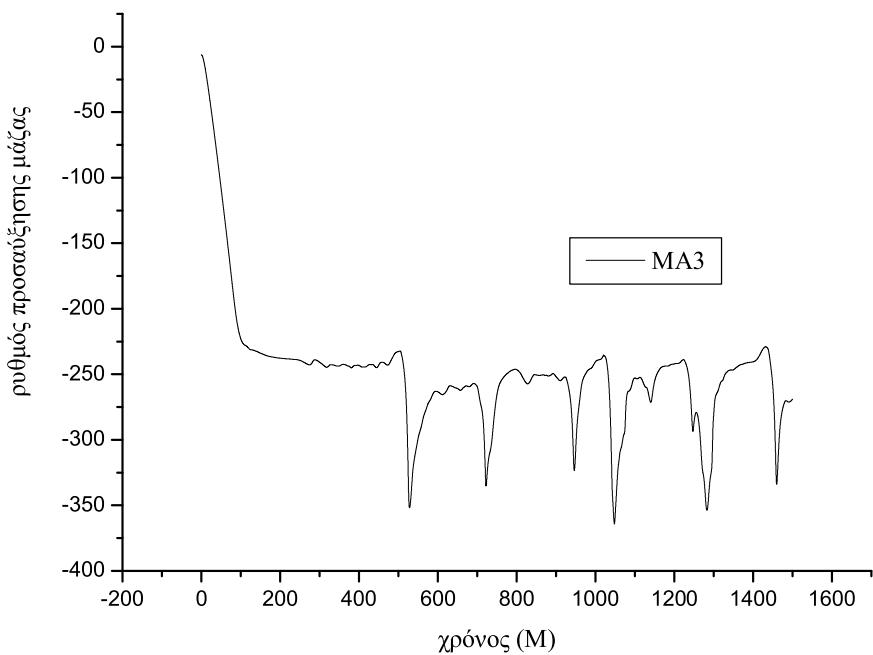


Σχήμα 37: Ισοσταθμικές καμπύλες του λογαρίθμου της πυκνότητας για το μοντέλο C3. Από πάνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά οι αντίστοιχοι χρόνοι, σε μονάδες  $M$ , είναι  $t=0, 100, 200, \dots, 1500$ .

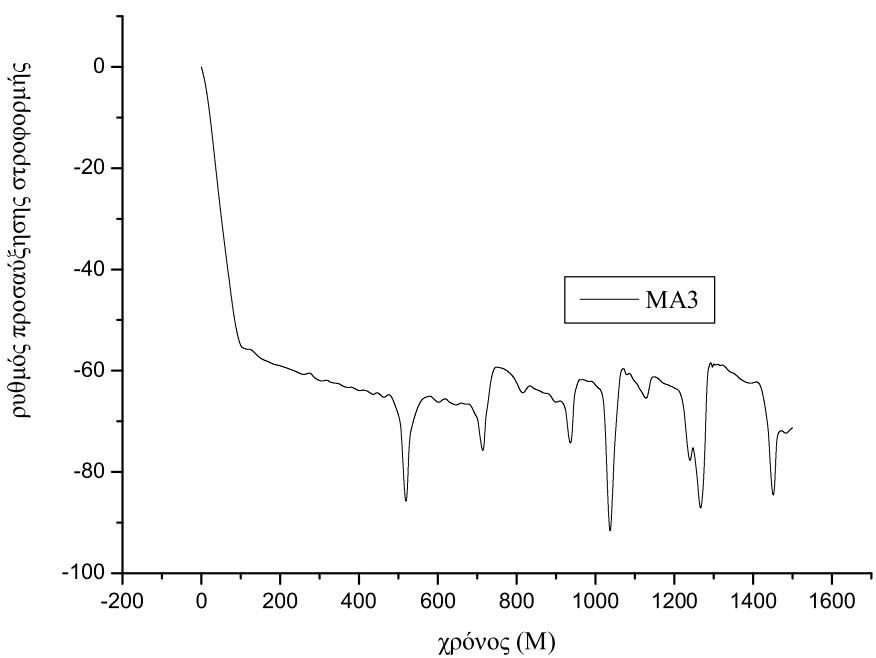
καθόλου, ενώ στα μοντέλα με μεγάλο αδιαβατικό δείκτη το άνοιγμα του χρουστικού κύματος ιδιαίτερα στην περίπτωση που είχαμε αστάθεια flip-flop ήταν πολύ μεγάλο. Παρόλο που στην προηγούμενη ενότητα δεν έχουμε δώσει τις ισοσταθμικές κάποιου μοντέλου με αδιαβατικό δείκτη  $4/3$ , να πούμε ότι το άνοιγμα του χρουστικού κύματος είναι ούτε τόσο μεγάλο όσο στην περίπτωση με  $\gamma = 5/3$  αλλά ούτε φυσικά και τόσο μικρό όσο στην περίπτωση με  $\gamma = 1.1$ . Οι γωνίες στις οποίες αναφερόμαστε είναι οι γωνίες που ανοίγει το χρουστικό κύμα κοντά στην μελανή οπή, διότι, όπως είδαμε και στο τέλος της προηγούμενης ενότητας, η μορφολογία του χρουστικού κύματος αλλάζει



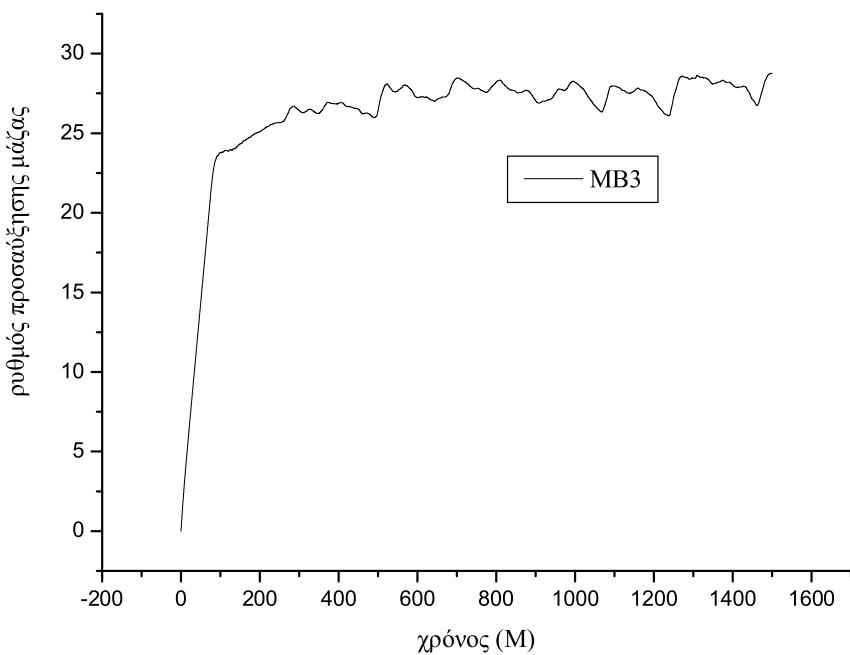
Σχήμα 38: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας.



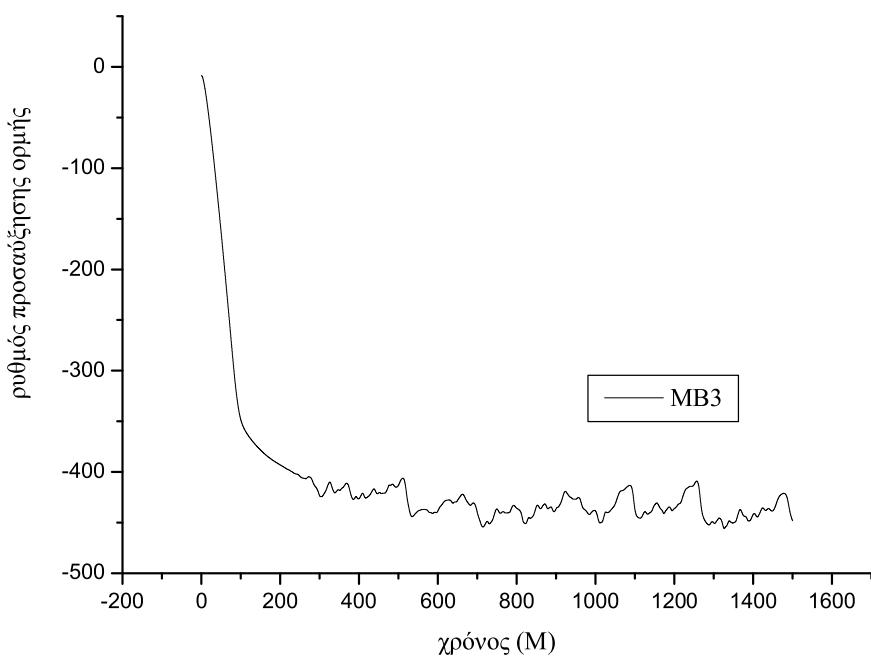
Σχήμα 39: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης ορμής.



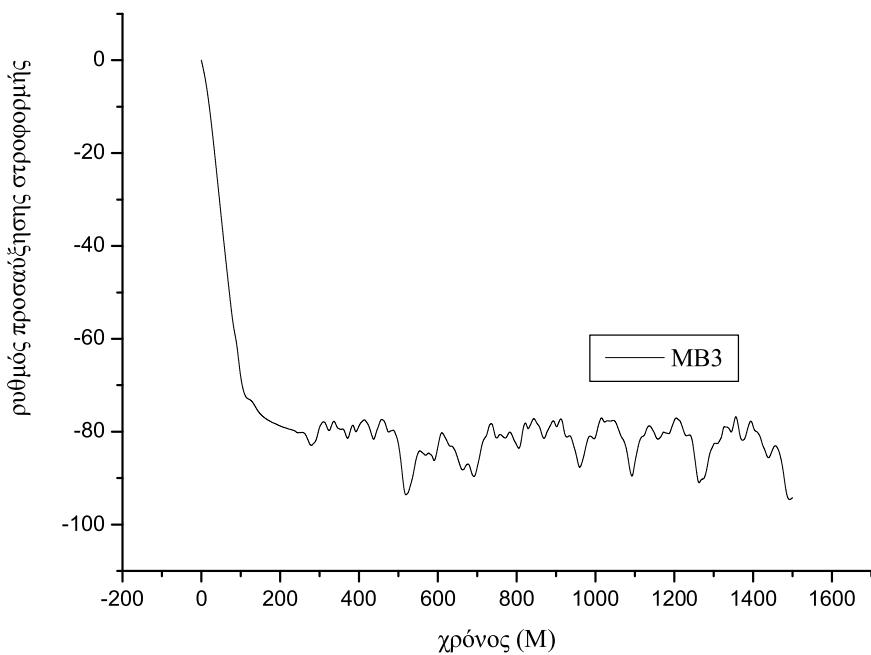
Σχήμα 40: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης στροφορμής.



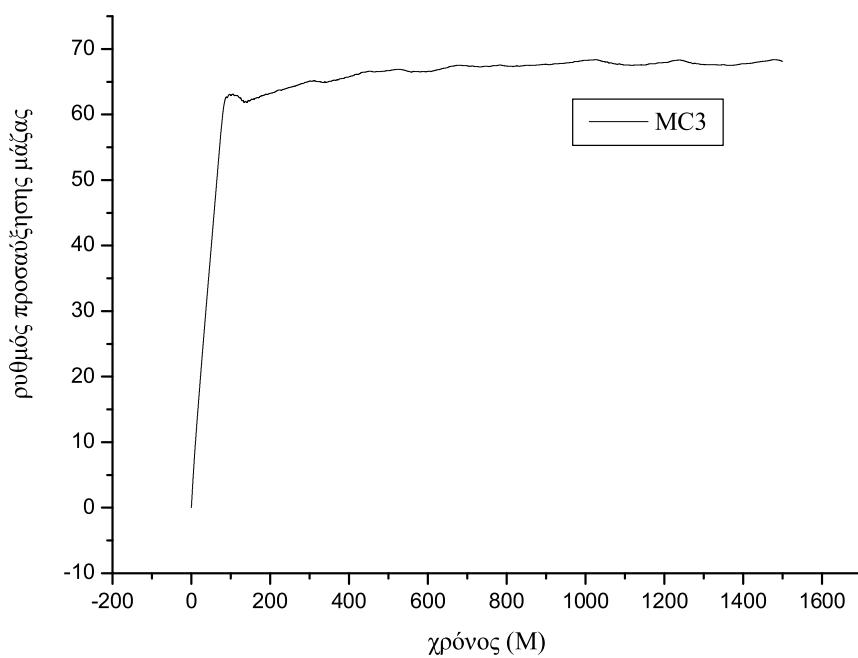
Σχήμα 41: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας.



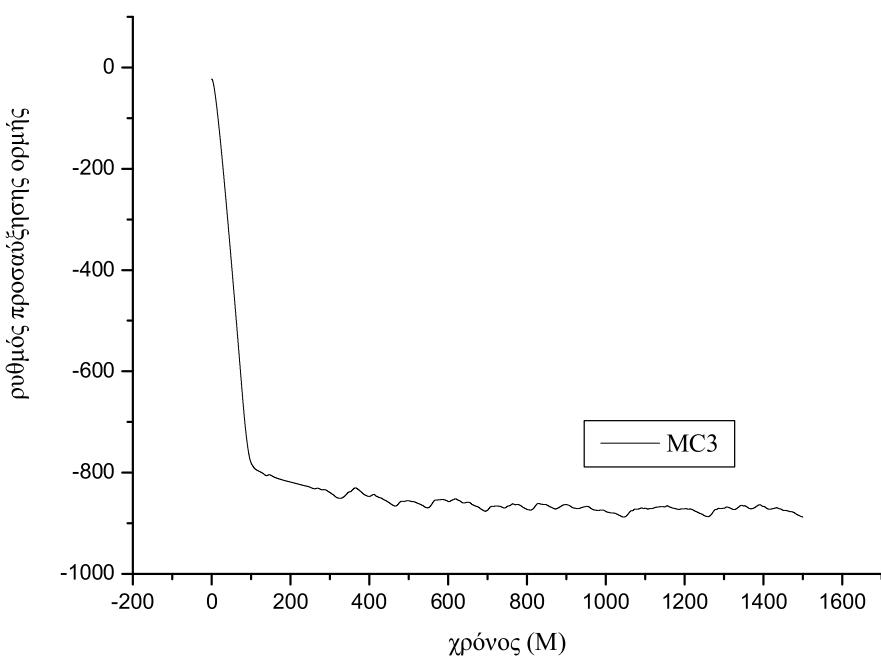
Σχήμα 42: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης ορμής.



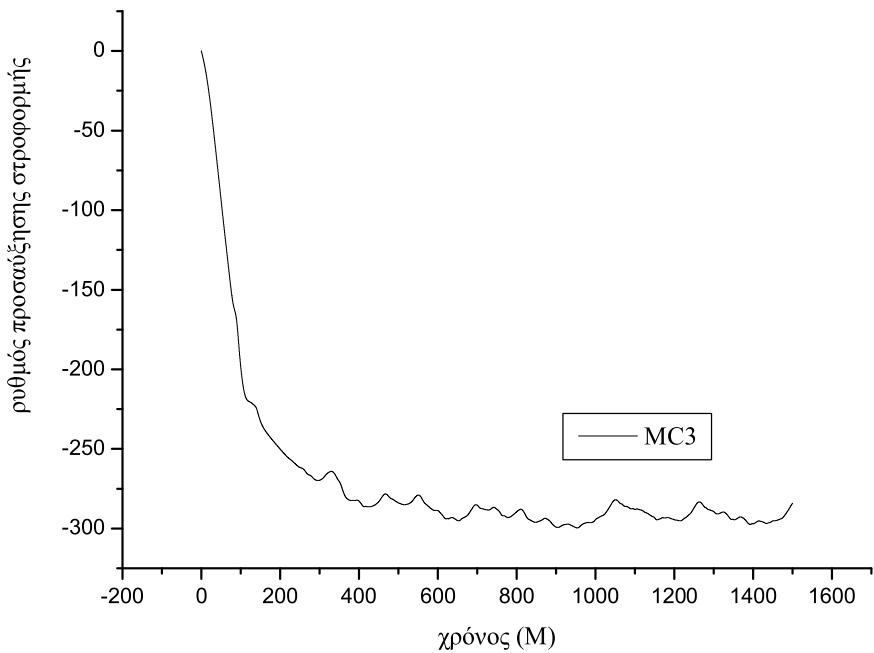
Σχήμα 43: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης στροφορμής.



Σχήμα 44: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης μάζας.



Σχήμα 45: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης ορμής.



Σχήμα 46: Κανονικοποιημένος ρυθμός προσαύξησης στροφορμής.

σημαντικά σε μεγάλες χωρικές κλίμακες. Πιο συγκεκριμένα, η γωνία που ανοίγει το χρονικό κύμα για την περίπτωση του M2C3 μειώνεται σε πολύ μεγάλο βαθμό αν απομακρυνθούμε αρχετά από τη μελανή οπή.

## 4 Συμπεράσματα.

Μελετήσαμε λεπτομερώς τη σχετικιστική προσαύξηση μάζας σε μια μελανή οπή θεωρώντας υπερηχητική ροή περιορισμένη στο ισημερινό επίπεδο. Από τις προσομοιώσεις που κάναμε προέκυψαν τα παρακάτω συμπεράσματα:

1. Σε Νευτώνεια μοντέλα η προσαύξηση μάζας σε μια μελανή οπή από υπερηχητικές ροές με μια βαθμίδα πυκνότητας χαρακτηρίζεται από την παρουσία ενός κρουστικού κύματος το οποίο παρουσιάζει την λεγόμενη αστάθεια flip-flop. Οι ταλαντώσεις του κρουστικού κύματος διακόπτονται από το σχηματισμό δίσκων προσαύξησης που περιστρέφονται είτε δεξιόστροφα είτε αριστερόστροφα. Στα σχετικιστικά μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε εμείς, αν και εμφανίστηκε η αστάθεια flip-flop δεν είδαμε σε κανένα μοντέλο σχηματισμό δίσκου προσαύξησης. Ακόμα και όταν ο λόγος  $r_{min}/r_{acc}$  έγινε μικρότερος από τον αντίστοιχο λόγο σε Νευτώνειες προσομοιώσεις δεν είχαμε σχηματισμό δίσκου. Επίσης, σχηματισμό δίσκου δεν είχαμε ούτε σε ροές με μεγάλο αριθμό Mach και μεγάλο αδιαβατικό δείκτη όπου το πλάτος ταλάντωσης του κρουστικού κύματος γίνεται πολύ μεγαλύτερο από το αντίστοιχο πλάτος Νευτώνειων προσομοιώσεων.
2. Ροές με μεγάλο αδιαβατικό δείκτη και μεγάλο αριθμό Mach παρουσιάζουν πολύ πιο έντονη αστάθεια flip-flop, κατά την οποία το πλάτος ταλάντωσης του κρουστικού κύματος μεγιστοποιείται, συγκριτικά με ροές με μικρό αριθμό Mach και μικρό αδιαβατικό δείκτη.
3. Η μορφολογία της ροής αλλάζει δραστικά σε μεγάλες χωρικές κλίμακες. Πιο συγκεκριμένα, σε μοντέλα που παρουσιάζουν έντονη αστάθεια flip-flop το άνοιγμα του κρουστικού κύματος και το πλάτος της ταλάντωσής του μειώνονται σε μεγάλο βαθμό αν απομακρυνθούμε αρκετά από την μελανή οπή.
4. Δεν είναι απαραίτητη μια βαθμίδα πυκνότητας για να έχουμε αστάθεια flip-flop. Η αστάθεια flip-flop μπορεί να εμφανιστεί και σε ροές που έχουν ομογενείς αρχικές συνθήκες για την πυκνότητα.
5. Σε ροές με μεγάλες βαθμίδες πυκνότητας, όπου ο λόγος  $r_{min}/r_{acc}$  είναι τέτοιος ώστε να μην έχουμε εμφάνιση της αστάθειας flip-flop, όσο αυξάνει ο αδιαβατικός δείκτης τόσο πιο ευσταθές γίνεται το κρουστικό κύμα. Για μικρούς αδιαβατικούς δείκτες το κρουστικό κύμα παρουσιάζει ισχυρότατες διαταραχές που δημιουργούν πολύ οξείες κορυφές στους ρυθμούς προσαύξησης μάζας, ορμής και στροφορμής.
6. Το άνοιγμα του κρουστικού κύματος εξαρτάται ισχυρά από τον αδιαβατικό δείκτη. Για μικρούς αδιαβατικούς δείκτες το κρουστικό κύμα δεν ανοίγει καθόλου κι έχουμε σχηματισμό μιας στήλης πολύ υψηλής πυκνότητας από την οποία συμβαίνει κυρίως η προσαύξηση μάζας στο συμπαγή αστέρα. Όσο μεγαλώνει ο αδιαβατικός δείκτης τόσο μεγαλώνει και το άνοιγμα του κρουστικού κύματος. Στις περιπτώσεις που το άνοιγμα αυτό μεταβάλλεται σημαντικά σε μεγάλες αποστάσεις, αναφερόμαστε στην περιοχή κοντά στη μελανή οπή.

## Αναφορές

- Anzer, U., Börner, G., Monaghan J. J., *Numerical studies of wind accretion*, Astronomy and Astrophysics 176, 235-244 (1987).
- Banyuls, F., Font, J.A., Ibáñez, J.M., Martí J.M. and Miralles J.A., *Numerical 3+1 General-Relativistic Hydrodynamics: A Local Characteristic Approach*, Astrophysical Journal 476, 221 (1997).
- Benensohn, J., Lamb, D., Taam, R., *Hydrodynamical studies of wind accretion onto compact objects: Two-dimensional calculations*, The Astrophysical Journal 478, 723-733 (1997).
- Bondi, H., Hoyle. F., *On the mechanism of accretion by stars*, MNRAS 104, 273 (1944).
- Bowers Richard, Deeming Terry, *Astrophysics I, II*, Jones and Bartlett publishers, inc. 1984.
- Font, J. A., Ibáñez, J. M., *A numerical study of relativistic Bondi-Hoyle accretion onto a moving black hole: Axisymmetric computations in a Schwarzschild background*, The Astrophysical Journal 494, 297-316, (1998).
- Font, J. A., Ibáñez, J. M., *Non-axisymmetric Relativistic Bondi-Hoyle Accretion onto a Schwarzschild Black Hole*, MNRAS 298 835-846 (1998).
- Font J. A., *Numerical hydrodynamics in general relativity*, Living Reviews in Relativity, 6, 4 (2003).
- Frank, J., King, A., Raine, D., *Accretion Power in Astrophysics*, Cambridge University Press, 2002.
- Fryxell, B., Taam, R., *Numerical simulations of nonaxisymmetric adiabatic accretion flow*, The Astrophysical Journal 335, 862-880 (1988).
- Hunt. R., *A fluid dynamical study of the accretion process*, MNRAS 154, 141-165 (1971).
- Livio, M., Soker, N., Matsuda, T., Anzer, U., *On the flip-flop instability of Bondi-Hoyle accretion flows*, MNRAS 253, 633-636 (1991).
- Matsuda, T., Inoue, M., Sawada, K., *Spin-up and spin-down of an accreting compact object*, MNRAS 226, 785-811 (1987).
- Matsuda, T., Ishii, T., Sekino, N., Sawada, K., Shima, E., Livio, M., Anzer, U., *Numerical simulations of two-dimensional and three-dimensional accretion flows*, MNRAS 255, 183-191 (1992).
- Petrich, L., Shapiro, S., Stark, R., Teukolsky S., *Accretion onto a moving black hole: A fully relativistic treatment*, The Astrophysical Journal 336, 313-349 (1989).

Ruffert M., *Three-dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. Mach 0.6, 1.4 and 10;  $\gamma = 5/3$* , Astronomy and Astrophysics 106, 505-522 (1994).

Ruffert M., *Three-dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. I. Code Validation and stationary accretors*, The Astrophysical Journal 427, 342-350 (1994).

Ruffert, M., Arnett, D., *Three-dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. II Homogeneous medium at Mach 3 with  $\gamma = 5/3$* , The Astrophysical Journal 427, 351-376 (1994).

Ruffert M., *Three dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. IV Specific heat ratio 4/3*, Astronomy and Astrophysics 113, 133-149 (1995).

Ruffert M., *Three dimensional hydrodynamic Bondi-Hoyle accretion. V specific heat ratio 1.01, nearly isothermal flow*, Astronomy and Astrophysics 311, 817-832 (1996).

Sawada, K., Matsuda, T., Anzer, U., Börner, G., Livio M., *Inhomogeneous wind accretion: comparison between 3D and 2D computations*, Astronomy and Astrophysics 221, 263-272 (1989).

Shapiro, S., Teukolsky, S., *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*, John Wiley & Sons, 1983.

Shima, E., Matsuda, T., Takeda, H., Sawada, K., *Hydrodynamic calculations of axisymmetric accretion flow*, MNRAS 217, 367-386 (1985).

Taam, R., Fryxell, B., *Numerical studies of asymmetric adiabatic accretion flow: The effect of velocity gradients*, The Astrophysical Journal 339, 297-313 (1989).

Taam, R., Fu, A., Fryxell B., *Accretion in wind-driven x-ray sources*, The Astrophysical Journal 371, 696-707 (1991).

Toro E. F. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 1999.