ΜΑΡΓΑΡΙΤΗΣ ΧΡΥΣΟΒΑΛΑΝΤΗΣ

ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

Επιβλέπουσα:

ΕΥΘΥΜΙΑ ΜΕΛΕΤΛΙΔΟΥ

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

<u>Περιεχόμενα</u>

<u>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</u>

Κάθε φυσικό σύστημα μπορεί να περιγραφεί από μια συνάρτηση, με συνηθισμένες μεταβλητές τη θέση και το χρόνο. Η εξέλιξη της τελευταίας, άρα και του φυσικού συστήματος, διέπεται από κάποιο νόμο που έχει τη μορφή ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Συνεπώς, ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων μας δείχνει πως μεταβάλλεται το φυσικό σύστημα.

Επίσης, απ' το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να πάρουμε και άλλες πληροφορίες για το φυσικό σύστημα. Όπως, αν μπορεί να μείνει αναλλοίωτο κάτω από συγκεκριμένους μετασχηματισμούς. Αυτή μπορούμε να πούμε πως είναι και η έννοια της συμμετρίας.

Στόχος της εργασίας αυτής είναι να παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο βρίσκουμε τις συμμετρίες ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων, ενώ στη συνέχεια να εφαρμόσουμε τη μέθοδο στην εξίσωση Korteweg – de Vries.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε τις κατάλληλες μαθηματικές έννοιες. Αυτές είναι οι Ομάδες Lie και οι Άλγεβρες Lie, που εμπεριέχουν τις έννοιες της διαφορίσιμης πολλαπλότητας και του διανυσματικού πεδίου. Αφού παρουσιάσουμε αυτά, στο δεύτερο κεφάλαιο, αρχικά, θα περιγράψουμε τις συμμετρίες ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων. Στη συνέχεια, θα δείξουμε τη συσχέτιση των ομάδων, που είναι οι μετασχηματισμοί, με τις διαφορικές εξισώσεις. Επίσης, θα ορίσουμε και την ομάδα συμμετρίας για ένα τέτοιο σύστημα. Βασικό σημείο του δευτέρου κεφαλαίου είναι η παράγραφος του *prolongation*, όπου διαμορφώνουμε το κριτήριο για την εύρεση ομάδων συμμετρίας του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων. Στο τρίτο κεφάλαιο αξιοποιούμε το παραπάνω κριτήριο για να βρούμε κάποιες συμμετρίες της εξίσωσης Korteweg – de Vries.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1</u>

<u>Εισαγωγή στις Ομάδες Lie</u>

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει μια εισαγωγή στη θεωρία των διαφορίσιμων πολλαπλοτήτων και των ομάδων Lie, με τέτοιο τρόπο ώστε να βοηθήσει στην μετέπειτα εφαρμογή τους σε διαφορικές εξισώσεις.

Αρχικά, συζητάμε την έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας και στη συνέχεια κάνουμε το ίδιο για τις ομάδες Lie. Πρακτικά οι ομάδες Lie εμφανίζονται ως τοπικές ομάδες μετασχηματισμών που δρουν πάνω σε κάποια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Βασικότερη είναι η έννοια του διανυσματικού πεδίο, που παρουσιάζεται στη συνέχεια, αφού δρα ως "απειροστός γεννήτορας" κάποιας μονοπαραμετρικής ομάδας Lie μετασχηματισμών. Τέλος, θα συζητήσουμε την έννοια της άλγεβρας Lie που μπορεί κανείς να πει πως είναι ο "απειροστός γεννήτορας" της ίδιας της ομάδας Lie.

1.1 ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες, που είναι τα βασικά αντικείμενα στο πεδίο της διαφορικής γεωμετρίας, γενικεύουν τις γνωστές έννοιες των καμπυλών και των επιφανειών στις 3 διαστάσεις.

Σε αυτή την εργασία θα χρησιμοποιούμε αντικείμενα, όπως διαφορικές εξισώσεις και ομάδες συμμετρίας, που ορίζονται πάνω σε ανοικτά υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου $\Re^m$. Επίσης, θέλουμε τα χαρακτηριστικά αυτών των αντικειμένων να μην εξαρτώνται από το εκάστοτε σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Γι' αυτό και καταφεύγουμε στην έννοια της διαφορίσιμης πολλαπλότητας.

<u>Ορισμός 1.1.</u> Μια m-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα είναι ένα σύνολο M, μαζί με μια αριθμήσιμη συλλογή ανοικτών υποσυνόλων $U_\alpha \subset M$, που λέγονται χάρτες συντεταγμένων, και οι οποίες είναι ένα προς ένα συναρτήσεις $\chi_a : U_\alpha \to V_\alpha$, που απεικονίζουν τα υποσύνολα U_α σε συνεκτικά ανοικτά υποσύνολα V_α του $\Re^m$, και ικανοποιούν τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Οι χάρτες συντεταγμένων καλύπτουν το M:

$$\bigcup_\alpha U_\alpha = M$$

(β) Στην τομή οποιουδήποτε ζεύγους χαρτών συντεταγμένων $U_\alpha \cap U_\beta$ η σύνθετη συνάρτηση

$$\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1} : \chi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \chi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

είναι ομαλή (απειροδιαφορίσιμη) συνάρτηση.

(γ) Αν x U_α, x΄ U_β είναι διάκριτα σημεία του M, τότε υπάρχουν ανοικτά υποσύνολα W του $\chi_\alpha(x)$ στο V_α και W΄ του $\chi_\beta(x')$ στο V_β, τέτοια ώστε

$$\chi_\alpha^{-1}(W) \cap \chi_\beta^{-1}(W') = \varnothing .$$

Οι χάρτες συντεταγμένων $\chi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ δίνουν στην διαφορίσιμη πολλαπλότητα M τη δομή ενός τοπολογικού χώρου. Έτσι, απαιτούμε για κάθε ανοικτό υποσύνολο $W \subset V_\alpha \subset \Re^m$, το $\chi_\alpha^{-1}(W)$ να είναι ένα ανοικτό υποσύνολο του M. Αυτά τα σύνολα σχηματίζουν μια βάση για την τοπολογία του M, έτσι ώστε το $U \subset M$ είναι ανοικτό αν και μόνο αν για κάθε $x \in U$ υπάρχει μια γειτονιά του x που ανήκει στο U (έτσι $x \in \chi_\alpha^{-1}(W) \subset U$ όπου $\chi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ είναι ένας χάρτης συντεταγμένων που περιέχει το x και W ένα ανοικτό υποσύνολο του V_α). Με βάση τα παραπάνω, η τρίτη προϋπόθεση του ορισμού 1.1. είναι μια επαναδιατύπωση του αξιώματος διαχωρισμού Hausdorff: Αν x ≠ x΄ είναι σημεία του M, τότε υπάρχουν ανοικτά σύνολα, U που περιέχει το x και U΄ που περιέχει το x΄, τέτοια ώστε $U \cap U' = \varnothing$.

Ο βαθμός διαφορισιμότητας των συναρτήσεων $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ καθορίζει τον βαθμό ομαλότητας της διαφορίσιμης πολλαπλότητας M. Θα ενδιαφερθούμε κυρίως για τις ομαλές διαφορίσιμες πολλαπλότητες, στις οποίες οι παραπάνω συναρτήσεις είναι ομαλοί, εννοώντας C^∞, διαφορομορφισμοί πάνω σε ανοικτά υποσύνολα του $\Re^m$. Αν οι συναρτήσεις $\chi_\beta \circ \chi_\alpha^{-1}$ είναι πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις, τότε η M είναι μια αναλυτική διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

<u>Παράδειγμα 1.2.</u> Η μοναδιαία σφαίρα

$$S^2 = \{(x,y,z): x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

είναι ένα καλό παράδειγμα μιας μη τετριμένης διαφορίσιμης πολλαπλότητας που εμφανίζονται ως επιφάνεια στον $\Re^3$.
Ας είναι

$$U_1 = S^2 / \{0,0,1\} \text{ και } U_2 = S^2 / \{0,0,-1\}$$

τα υποσύνολα που παίρνουμε αν διαγράψουμε τον βόρειο και τον νότιο πόλο αντίστοιχα. Ας είναι επίσης

$$\chi_\alpha : U_\alpha \to \Re^2 \approx \{(x,y,0)\}, \quad \alpha = 1, 2$$

οι στερεογραφικές προβολές από τους αντίστοιχους πόλους, έτσι ώστε

$$\chi_1(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \qquad \chi_2(x,y,z) = \left(\frac{x}{1+z}, \frac{y}{1+z}\right).$$

Μπορεί εύκολα κανείς να ελέγξει ότι στην τομή $U_1 \cap U_2$, η

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1} : \Re^2/\{0\} \to \Re^2/\{0\}$$

είναι ένας ομαλός διαφορομορφισμός, που δίνεται από την

$$\chi_1 \circ \chi_2^{-1}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

ΧΑΡΤΕΣ ΑΝΑΜΕΣΑ ΣΕ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Αν M και N είναι ομαλές διαφορίσιμες πολλαπλότητες, μια απεικόνιση $F : M \to N$ χαρακτηρίζεται ως ομαλή αν η τοπική έκφραση των συντεταγμένων του είναι μια ομαλή απεικόνιση για κάθε χάρτη συντεταγμένων. Με άλλα λόγια, για κάθε $\chi_a : U_\alpha \to V_\alpha \subset \Re^m$ στην M και για κάθε $\chi'_\beta : U'_\beta \to V'_\beta \subset \Re^n$ στην N, η σύνθετη απεικόνιση

$$\chi'_\beta \circ F \circ \chi_\alpha^{-1} : \Re^m \to \Re^n$$

είναι μια ομαλή απεικόνιση οπουδήποτε ορίζεται. Με άλλα λόγια, μια ομαλή απεικόνιση είναι της μορφής $y = F(x)$, όπου F είναι μια ομαλή συνάρτηση πάνω σε ανοικτά υποσύνολα που δίνει τοπικές συντεταγμένες x στην M και y στην N.

<u>Παράδειγμα 1.3.</u> Ένα εύκολο παράδειγμα δίνεται από την απεικόνιση $f : \Re \to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$. Χρησιμοποιώντας την γωνιακή συντεταγμένη θ στον S^1, η f είναι μια γραμμική συνάρτηση: $\theta = t \bmod 2\pi$ και άρα είναι ομαλή.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΤΑΞΗΣ

Ορισμός 1.4. Ας είναι F : M → N μια ομαλή απεικόνιση από μια m-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M σε μια n- διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα N. Η τάξη της F σ' ένα σημείο $x \in M$ είναι η τάξη του n×m Ιακωβιανού πίνακα ($\partial F^i/\partial x^j$) στο x, όπου y = F(x) εκφράζεται σε οποιεσδήποτε βολικές τοπικές συντεταγμένες κοντά στο x. Η απεικόνιση F είναι μέγιστης τάξης σε ένα υποσύνολο $S \subset M$ αν για κάθε $x \in S$ η τάξη της F είναι όσο πιο μεγάλη γίνεται.

Μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ο ορισμός της τάξης της F στο x δεν εξαρτάται από τις συγκεκριμένες τοπικές συντεταγμένες που επιλέξαμε στην M ή στη N.

Θεώρημα 1.5. Ας είναι F : M → N μέγιστης τάξης στο $x_0 \in M$. Τότε υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες $x = (x^1,\dots, x^m)$ κοντά στο x_o και $y = (y^1,\dots,y^n)$ κοντά στο $y_o = F(x_o)$ τέτοιες ώστε η F να έχει την απλή μορφή

$$y = (x^1,\dots, x^m,0,\dots,0) \quad \text{αν} \quad n>m$$

$$\text{ή} \qquad y = (x^1,\dots, x^n) \quad \text{αν} \quad n\leq m.$$

ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Δοθείσης μιας ομαλής διαφορίσιμης πολλαπλότητας M, μια διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα $N \subset M$ θα έπρεπε να είναι ένα υποσύνολο αυτής, που θα είναι επίσης ομαλή διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Ορισμός 1.6. Έστω M μια ομαλή διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μια διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα της M είναι ένα υποσύνολο $N \subset M$, μαζί με μια ομαλή και ένα προς ένα απεικόνιση φ : N΄→ $N \subset M$ που ικανοποιεί το κριτήριο μέγιστης τάξης παντού (ο παραμετρικός χώρος N΄ είναι κάποια άλλη διαφορίσιμη πολλαπλότητα και N = φ(N΄) είναι η εικόνα του φ). Πιο συγκεκριμένα, η διάσταση της N είναι ίδια με της N΄και δεν ξεπερνά αυτή της M.

Η απεικόνιση φ συχνά καλείται κατάδυση και βοηθάει να ορίσουμε μια παραμετροποίηση της διαφορίσιμης υποπολλαπλότητας N. Επίσης, το κριτήριο μέγιστης τάξης είναι απαραίτητο για να διασφαλίσουμε πως η N δεν έχει ιδιομορφίες (ανωμαλίες).

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΣΙΜΕΣ ΥΠΟΠΟΛΛΑΠΛΟΤΗΤΕΣ

Ορισμός 1.7. Μια κανονική διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα N της διαφορίσιμης πολλαπλότητας M είναι μια διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα που παραμετροποιείται από την φ : N΄ → M με την ιδιότητα ότι για κάθε x στην N υπάρχουν αυθαιρέτως μικρές ανοικτές γειτονιές U του x στην M έτσι ώστε το $\varphi^{-1}[U \cap N]$ να είναι ένα συνεκτικό ανοικτό υποσύνολο της N΄.

Λήμμα 1.8. Μια n-διάστατη διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα $N \subset M$ είναι κανονική αν και μόνο αν για κάθε x_o N υπάρχουν τοπικές συντεταγμένες $x = (x^1,\dots,x^m)$ που ορίζονται σε μια γειτονιά U του x_o έτσι ώστε

$$N \cap U : \{x : x^{n+1} = \dots = x^m = 0\}$$

Αντί να ορίζουμε μια επιφάνεια S στον $\Re^3$ παραμετρικά, μια εναλλακτική μέθοδος είναι να την ορίσουμε πεπλεγμένα με τον μηδενισμό μιας ομαλής συνάρτησης :

$$S = \{ F(x,y,z) = 0 \}$$

Αυτός ο τρόπος περιγραφής θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί και για μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Στο παρακάτω θεώρημα παρουσιάζουμε ένα ακόμη τρόπο προσδιορισμού της κανονικότητας μιας διαφορίσιμης υποπολλαπλότητας.

Θεώρημα 1.9. Έστω M μια ομαλή m-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα, και $F : M \to \Re^n$, $n \le m$ είναι μια ομαλή απεικόνιση. Αν F είναι μέγιστης τάξης στο υποσύνολο $N = \{ x : F(x) = 0\}$, τότε η N είναι κανονική (m-n)-διάστατη διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα της M.

Τέλος, πρέπει να αναφέρουμε πως όλες οι διαφορίσιμες πολλαπλότητες (διαφορίσιμες υποπολλαπλότητες, κ.λ.π.) θεωρούνται συνεκτικές, εκτός κι αν δηλώνεται διαφορετικά.

1.2 ΟΜΑΔΕΣ LIE

Τώρα, θα δούμε πως μια ομάδα Lie είναι μια ομάδα, με την αλγεβρική έννοια του όρου, που είναι και διαφορίσιμη πολλαπλότητα.

Ορισμός 1.10. Μια ομάδα είναι ένα σύνολο G μαζί με ένα νόμο σύνθεσης τέτοιο ώστε για δύο στοιχεία g και h του G, το $g \circ h$ να είναι πάλι στοιχείο του G (κλειστή ως προς το νόμο σύνθεσης). Επίσης, για τον νόμο σύνθεσης ισχύουν:

(1) Προσεταιριστικότητα. Αν g, h και k είναι στοιχεία του G, τότε

$$g \circ (h \circ k) = (g \circ h) \circ k$$

(2) Ταυτοτικό στοιχείο. Υπάρχει ένα στοιχείο e του G, που ονομάζεται ταυτοτικό στοιχείο, και έχει την ιδιότητα:

$$e \circ g = g = g \circ e , \qquad \text{για όλα τα g στο G}$$

(3) Αντίστροφα στοιχεία. Για κάθε g στο G υπάρχει ένα αντίστροφο, που συμβολίζεται με g^{-1}, με την ιδιότητα:

$$g \circ g^{-1} = e = g^{-1} \circ g$$

Παράδειγμα 1.11. Έστω $G = GL(n, \Re)$, το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων $n \times n$ πινάκων με πραγματικά στοιχεία. Το ταυτοτικό στοιχείο είναι, φυσικά, ο ταυτοτικός πίνακας I και ο αντίστροφος ενός πίνακα A είναι ο συνήθης αντίστροφος πίνακα. Για συντομία, συμβολίζουμε την γενική γραμμική ομάδα $GL(n, \Re)$ με GL(n).

Όπως αναφέραμε και στην αρχή, μια ομάδα Lie κουβαλά και τη δομή μιας διαφορίσιμης πολλαπλότητας. Οπότε τα στοιχεία της ομάδας μεταβάλλονται συνεχώς.

Ορισμός 1.12. Μια r-παραμετρική ομάδα Lie είναι μια ομάδα G που κουβαλάει τη δομή μιας r-διάστατης ομαλής διαφορίσιμης πολλαπλότητας με τέτοιο τρόπο ώστε η πράξη της ομάδας

$$m: G \times G \to G, \quad m(g,h) = g \circ h, \quad g, h \in G$$

και η αντιστροφή

$$i: G \to G, \quad i(g) = g^{-1}, \quad g \in G$$

να είναι ομαλές απεικονίσεις ανάμεσα σε διαφορίσιμες πολλαπλότητες.

Παράδειγμα 1.13. Έστω G = SO(2), η ομάδα των στροφών στο επίπεδο.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} : 0 \le \theta < 2\pi \right\}$$

όπου το θ ορίζει την γωνία στροφής. Παρατηρείστε πως μπορούμε να ταυτοποιήσουμε την G με τον μοναδιαίο κύκλο

$$S^1 = \{(\cos\theta, \sin\theta) : 0 \le \theta < 2\pi\}$$

στον $\Re^2$, με σκοπό να καθορίσουμε τη δομή της διαφορίσιμης πολλαπλότητας στην SO(2).

Ο ομομορφισμός ομάδας Lie είναι μια ομαλή απεικόνιση φ: G → H ανάμεσα σε δύο ομάδες Lie που σέβεται τους νόμους σύνθεσης:

$$\varphi(g \circ g') = \varphi(g) \circ \varphi(g'), \qquad g, g' \in G$$

Αν η φ έχει ομαλή αντίστροφη, τότε καθορίζει έναν ισομορφισμό ανάμεσα στην G και στην H. Πρακτικά, δεν μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε ισομορφικές ομάδες Lie.

Τέλος, όλες οι ομάδες Lie θα θεωρούνται συνεκτικές, εκτός κι αν δηλώνεται διαφορετικά.

ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ LIE

Ορισμός 1.14. Μια υποομάδα Lie H μιας ομάδας Lie G δίνεται από μια υποπολλαπλότητα φ: H΄→ G, όπου H΄ είναι μια ομάδα Lie, H = φ(H΄) είναι η εικόνα της φ και φ είναι ένας ομομορφισμός ομάδας Lie.

Για παράδειγμα, οι ορθογώνιες ομάδες είναι υποομάδες των γενικών γραμμικών ομάδων όλων των αντιστρέψιμων πινάκων.

Θεώρημα 1.15. Ας υποθέσουμε πως η G είναι μια ομάδα Lie. Αν H είναι μια κλειστή υποομάδα της G, τότε η H είναι κανονική διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα της G και άρα ομάδα Lie από μόνη της. Αντιστρόφως, κάθε κανονική υποομάδα Lie της G είναι μια κλειστή υποομάδα.

Σημειώστε ότι χρειάζεται μόνο να ελέγξουμε ότι η H είναι υποομάδα της G και κλειστή ως υποσύνολο της G για να συμπεράνουμε πως η H είναι κανονική υποομάδα Lie.

ΤΟΠΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ LIE

Συχνά δεν ενδιαφερόμαστε για όλη την ομάδα Lie, παρα μόνο για στοιχεία της ομάδας κοντά στο ταυτοτικό στοιχείο. Έτσι, εισάγουμε την έννοια των τοπικών ομάδων Lie.

Ορισμός 1.16. Μια r-παραμετρική τοπική ομάδα Lie συνίσταται από συνεκτικά ανοικτά υποσύνολα $V_0 \subset V \subset \Re^r$ που περιέχουν την αρχή O και ομαλές απεικονίσεις

$$m: V \times V \to \Re^r,$$

που ορίζουν την πράξη της ομάδας και

$$i: V_o \to V$$

την αντιστροφή με τις παρακάτω ιδιότητες.

(α) Προσεταιριστικότητα. Αν x,y,z V και επίσης m(x,y) και m(y,z) είναι στο V, τότε

$$m(x,m(y,z)) = m(m(x,y),z).$$

(β) Ταυτοτικό στοιχείο. Για όλα τα x στο V, m(0,x) = x = m(x,0).
(γ) Αντίστροφα στοιχεία. Για κάθε x στο V_o, m(x,i(x)) = 0 = m(i(x),x).

Τα παραπάνω αξιώματα είναι ίδια με τα συνήθη αξιώματα της ομάδας, αν γράψουμε $x\cdot y$ αντί για m(x,y) και x^{-1} αντί για i(x), εκτός φυσικά απ' το ότι δεν ορίζονται παντού. Παρατηρούμε πως για τον ορισμό της τοπικής ομάδας Lie δεν απαιτείται το αξίωμα της κλειστότητας.

Παράδειγμα 1.17. Ας είναι $V = \{x : |x| < 1\} \subset \Re$ με πράξη ομάδας

$$m(x,y) = \frac{2xy - x - y}{xy - 1}, \qquad x, y \in V.$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε πως η παραπάνω πράξη ικανοποιεί την προσεταιριστικότητα και το αξίωμα του ταυτοτικού στοιχείου. Η αντίστροφη απεικόνιση είναι i(x) = x/(2x-1) και ορίζεται για κάθε $x \in V_0 = \{x : |x| < 1/2\} \subset V$. Γι' αυτό το λόγο η m ορίζει μια τοπική μονοπαραμετρική ομάδα Lie.

Θεώρημα 1.18. Έστω $V_0 \subset V \subset \Re^r$ μια τοπική ομάδα Lie με πράξη m(x,y) και αντιστροφή i(x). Τότε υπάρχει μια παγκόσμια ομάδα Lie G και ένας χάρτης συντεταγμένων χ: U* → V*, όπου U* περιέχει το ταυτοτικό στοιχείο, έτσι ώστε $V^* \subset V_0$, χ(e) = 0 και

$$\chi(g \circ h) = m(\chi(g), \chi(h))$$

με $g, h \in U^*$, και

$$\chi(g^{-1}) = i(\chi(g))$$

με $g \in U^*$. Επιπλέον, υπάρχει μια μοναδική συνεκτική, απλά συνεκτική ομάδα Lie G* που έχει τις παραπάνω ιδιότητες. Αν η G είναι μια οποιαδήποτε άλλη τέτοια ομάδα Lie, υπάρχει μια απεικόνιση π: G* → G, που να είναι ομομορφισμός ομάδας δια του οποίου οι G* και G είναι τοπικά ισομορφικές ομάδες Lie.

<u>Πρόταση 1.19.</u> Ας είναι G μια συνεκτική ομάδα Lie και $U \subset G$ μια γειτονιά της μονάδας. Επίσης, ας είναι $U^k = \{g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_k : g_i \;\; U\}$ το σύνολο των k-οστών γινομένων των στοιχείων του U. Τότε

$$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} U^k .$$

Με άλλα λόγια, κάθε στοιχείο g της ομάδας G μπορεί να γραφτεί ως ένα πεπερασμένο γινόμενο των στοιχείων της U (προκύπτει από τη συνεκτικότητα της G).

ΤΟΠΙΚΕΣ ΟΜΑΔΕΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ

Είδαμε πως κάθε τοπική ομάδα Lie είναι τοπικά ισομορφική με τη γειτονιά της μονάδας κάποιας ομάδας Lie.

Πρακτικά, οι ομάδες Lie εμφανίζονται ως ομάδες μετασχηματισμών πάνω σε κάποια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Για παράδειγμα, η ομάδα SO(2) είναι η ομάδα των στροφών στο επίπεδο. Η στροφή είναι ένας μετασχηματισμός. Ας δούμε τώρα την έννοια των τοπικών ομάδων μετασχηματισμών.

<u>Ορισμός 1.20.</u> Έστω M μια ομαλή διαφορίσιμη πολλαπλότητα. Μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα στην M δίνεται από μια (τοπική) ομάδα Lie G, ένα ανοικτό υποσύνολο Λ, με

$$\{e\} \times M \subset \Lambda \subset G \times M$$

που είναι η περιοχή ορισμού της δράσης της ομάδας και η ομαλή απεικόνιση Ψ: Λ→ M με τις εξής ιδιότητες:

(α) Αν $(h,x) \in \Lambda$, $(g,\Psi(h,x)) \in \Lambda$ και επίσης $(g\cdot h,x) \in \Lambda$ τότε

$$\Psi(g,\Psi(h,x)) = \Psi(g\cdot h,x)$$

(β) Για όλα τα $x \in M$, $\qquad \Psi(e,x) = x$

(γ) Αν $(g,x) \in \Lambda$, τότε $(g^{-1},\Psi(g,x)) \in \Lambda$ και

$$\Psi(g^{-1},\Psi(g,x)) = x.$$

Ο παραπάνω ορισμός θα μπορούσε να απλοποιηθεί ως προς τον συμβολισμό του αν θέταμε όπου Ψ(g,x) με g·x.

(α) $g\cdot(h\cdot x) = (g\cdot h)\cdot x$

(β) $e\cdot x = x$

(γ) $g^{-1}\cdot(g\cdot x) = x$

για όλα τα $g,h \in G$ και $x \in M$.

Ως συνέπεια του (γ) βλέπουμε πως κάθε ομάδα μετασχηματισμού είναι ένας διαφορομορφισμός όπου ορίζεται.

Μια ομάδα μετασχηματισμού G που δρα στην M καλείται συνεκτική αν ισχύουν τα παρακάτω:

(α) η G είναι μια συνεκτική ομάδα Lie και η M μια συνεκτική διαφορίσιμη πολλαπλότητα
(β) το $\Lambda \subset G\times M$ είναι ένα συνεκτικό ανοικτό σύνολο
(γ) για κάθε x M, η τοπική ομάδα G_x είναι συνεκτική

όπου $G_x \equiv \{g \in G : (g,x) \in \Lambda\}$

Γενικά θα θεωρούμε πως οι τοπικές ομάδες μετασχηματισμών θα είναι συνεκτικές.

ΤΡΟΧΙΕΣ

Τροχιά μιας τοπικής ομάδας μετασχηματισμού είναι το ελάχιστο μη κενό υποσύνολο της διαφορίσιμης πολλαπλότητας M που είναι αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της ομάδας. Με άλλα λόγια, το $O \subset M$ είναι τροχιά αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(α) Αν $x \in O$, $g \in G$ και $g\cdot x$ ορίζεται, τότε $g\cdot x \in O$.

(β) Αν $O' \subset O$ και O' ικανοποιεί το (α), τότε ή $O' = O$ ή O' είναι το κενό σύνολο.

<u>Ορισμός 1.21.</u> Ας είναι G μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα πάνω στην M.
(α) Η ομάδα G δρα ημι-κανονικά αν όλες οι τροχιές O είναι ίδιας διάστασης ως διαφορίσιμες πολλαπλότητες της M.
(β) Η ομάδα G δρα κανονικά αν η δράση είναι ημι-κανονική και, επιπλέον, για κάθε σημείο $x \in M$ υπάρχουν αυθαιρέτως μικρές γειτονιές U του x με την ιδιότητα ότι κάθε τροχιά της G τέμνει τη U σε ένα κατά δρόμο συνεκτικό υποσύνολο.

<u>Παράδειγμα 1.22.</u> Η ομάδα μετατοπίσεων στον $\Re^m$: Ας είναι $\alpha \neq 0$ ένα σταθερό διάνυσμα στον $\Re^m$ και $G = \Re$. Ορίζουμε

$$\Psi(\varepsilon,x) = x + \varepsilon\alpha, \qquad x \in \Re^m, \varepsilon \in \Re .$$

Αυτό φαίνεται να μας δίνει μια παγκόσμια δράση της ομάδας. Οι τροχιές είναι ευθείες παράλληλες στο α και έτσι η δράση είναι κανονική με μονοδιάστατες τροχιές.

1.3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΠΕΔΙΑ

Υποθέτουμε πως η C είναι μια ομαλή καμπύλη πάνω στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M, που παραμετροποιείται με την $\varphi: I \rightarrow M$, όπου το I είναι ένα υποδιάστημα του $\Re$. Με τοπικές συντεταγμένες $x = (x^1,\ldots, x^m)$, η C δίνεται από m ομαλές συναρτήσεις $\varphi(\varepsilon) = (\varphi^1(\varepsilon),\ldots, \varphi^m(\varepsilon))$ της πραγματικής μεταβλητής ε (παράμετρος). Σε κάθε $x = \varphi(\varepsilon)$ της C, η καμπύλη έχει ένα εφαπτόμενο διάνυσμα, την παράγωγο $\dot{\phi}(\varepsilon) = (\dot{\phi}^1(\varepsilon), \dot{\phi}^2(\varepsilon), ..., \dot{\phi}^m(\varepsilon))$. Για να μην υπάρχει σύγχυση, καθιερώνουμαι τον παρακάτω συμβολισμό για ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στη C στο x = φ(ε)

$$\mathbf{v}\big|_x = \dot{\phi}(\varepsilon) = \dot{\phi}^1(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^1} + \dot{\phi}^2(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^2} + ... + \dot{\phi}^m(\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x^m} \tag{1.1}$$

Ο συμβολισμός φαίνεται να είναι περίεργος αλλά μπορούμε να δούμε τα $\partial/\partial x^i$ ως μια ειδική “βάση” των εφαπτόμενων διανυσμάτων και τα $d\varphi^i(\varepsilon)/d\varepsilon$ ως συνιστώσες. Αργότερα θα δούμε πως τα $\partial/\partial x^i$ ανταποκρίνονται ως τελεστές μερικής παραγώγισης.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάνουμε μια αλλαγή συντεταγμένων χρησιμοποιώντας τον διαφορομορφισμό y = ψ(x) = ψ(φ(ε)), που εκφράζει τις νέες y-συντεταγμένες συναρτήσει των παλιών τοπικών συντεταγμένων. Συνεπώς το εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{v}|_x$ θα είναι βάσει του (1.1)

$$\mathbf{v}\big|_{y=\psi(x)} = \sum_{j=1}^{m} \frac{d}{d\varepsilon}\psi^j(\phi(\varepsilon))\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial \psi^j}{\partial x^k}(\phi(\varepsilon))\frac{d\phi^k}{d\varepsilon}\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{1.2}$$

στις y-συντεταγμένες. Στον παραπάνω τύπο $\partial\psi^j/\partial x^k$ είναι ο Ιακωβιανός πίνακας.

Η συλλογή όλων των εφαπτόμενων διανυσμάτων σε όλες τις πιθανές καμπύλες που περνούν από ένα δοθέν σημείο x στην M καλείται εφαπτόμενος χώρος στην M στο x και συμβολίζεται με $TM|_x$. Αν η M είναι μια m-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα, τότε ο $TM|_x$ είναι ένας m-διάστατος διανυσματικός χώρος με βάση $\{\partial/\partial x^1,\ldots,\partial/\partial x^m\}$ στις δοθείσες τοπικές συντεταγμένες.

Ένα διανυσματικό πεδίο **v** στην M τοποθετεί ένα εφαπτόμενο διάνυσμα $\mathbf{v}|_x \in TM|_x$ σε κάθε σημείο $x \in M$, με τα $\mathbf{v}|_x$ να μεταβάλλονται ομαλά από σημείο σε σημείο. Σε τοπικές συντεταγμένες $(x^1,\ldots, x^m)$, ένα διανυσματικό πεδίο παίρνει τη μορφή

$$\mathbf{v}|_x = \xi^1(x)\partial/\partial x^1 + \xi^2(x)\partial/\partial x^2 + \ldots + \xi^m(x)\partial/\partial x^m$$

όπου η κάθε $\xi^i(x)$ είναι μια ομαλή συνάρτηση του x. Ένα καλό φυσικό παράδειγμα είναι το πεδίο ταχυτήτων της ροής ενός ρευστού σε κάποια χρονική στιγμή και σε συγκεκριμένο ανοικτό υποσύνολο $M \subset \Re^3$. Έτσι, το διάνυσμα $\mathbf{v}|_{(x,y,z)}$ θα είναι η ταχύτητα των σωματιδίων του ρευστού που περνούν από το σημείο $(x,y,z) \in M$.

Μια ολοκληρωτική καμπύλη ενός διανυσματικού πεδίου **v** είναι μια ομαλή παραμετροποιημένη καμπύλη x = φ(ε) της οποίας το εφαπτόμενο διάνυσμα σε κάθε σημείο συμπίπτει με την τιμή του **v** στο ίδιο σημείο:

$$\dot{\phi}(\varepsilon) = \mathbf{v}\big|_{\phi(\varepsilon)}, \qquad \text{για όλα τα ε.}$$

Με άλλα λόγια, πρέπει να είναι λύση του συστήματος των συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx^i}{d\varepsilon} = \xi^i(x), \qquad i = 1,\ldots,m \tag{1.3}$$

όπου τα $\xi^i(x)$ είναι οι συνιστώσες του **v** ως προς x. Για $\xi^i(x)$ ομαλά, τα θεωρήματα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων για συστήματα συνήθων διαφορικών εξισώσεων εξασφαλίζουν μια μοναδική λύση του (1.3) για κάθε σύνολο αρχικών συνθηκών

$$\varphi(0) = x_o. \tag{1.4}$$

Με βάση τα παραπάνω, καθορίζουμε την ύπαρξη μιας μοναδικής μέγιστης ολοκληρωτικής καμπύλης φ: $I \rightarrow M$ που περνά από ένα δοθέν σημείο $x_o = \varphi(0)$ M, όπου "μέγιστη" σημαίνει ότι το σημείο δεν περιέχεται σε κάποια μεγαλύτερη ολοκληρωτική καμπύλη.

ΡΟΕΣ

Αν **v** είναι ένα διανυσματικό πεδίο, τότε δηλώνουμε την παραμετροποιημένη καμπύλη που περνά απ' το x στην M με Ψ(x,ε) και καλούμε την Ψ ως τη ροή που παράγεται από το **v**. Η ροή ενός διανυσματικού πεδίου έχει τις εξής ιδιότητες

$$\Psi(\delta,\Psi(\varepsilon,x)) = \Psi(\delta+\varepsilon,x), \qquad x \in M,\ \varepsilon,\delta \in \Re \tag{1.5}$$

$$\Psi(0,x) = x \tag{1.6}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\Psi(\varepsilon,x) = \mathbf{v}|_{\Psi(\varepsilon,x)} \tag{1.7}$$

Παρατηρούμε πως οι ιδιότητες (1.5) και (1.6) είναι παρόμοιες με τις 2 πρώτες ιδιότητες μιας τοπικής ομάδας μετασχηματισμών. Συνεπώς, διαπιστώνουμε πως η δράση μιας τοπικής ομάδας μιας ομάδας Lie ℜ στην διαφορίσιμη πολλαπλότητα M, που συχνά ονομάζεται μονοπαραμετρική ομάδα μετασχηματισμών, είναι ίδια με τη ροή που γεννιέται από ένα διανυσματικό πεδίο. Το διανυσματικό πεδίο **v** καλείται απειροστός γεννήτορας της δράσης αφού από το θεώρημα του Taylor έχουμε

$$\Psi(\varepsilon,x) = x + \varepsilon\xi(x) + O(\varepsilon^2)$$

όπου $\xi(x) = (\xi^1(x),\ldots,\ \xi^m(x))$ είναι οι συνιστώσες του **v** στις τοπικές συντεταγμένες. Οι τροχιές της δράσης της μονοπαραμετρικής ομάδας είναι οι μέγιστες ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου **v**. Ο απειροστός γεννήτορας δίνεται από τη σχέση (1.7) για ε = 0:

$$\mathbf{v}|_x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{e=0}\Psi(\varepsilon,x) \tag{1.8}$$

Ο υπολογισμός της ροής ή της μονοπαραμετρικής ομάδας που γεννιέται από το διανυσματικό πεδίο **v** συχνά αναφέρεται ως *εκθετοποίηση* του διανυσματικού πεδίου. Ο συμβολισμός που θα χρησιμοποιήσουμε είναι:

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \equiv \Psi(\varepsilon,x)$$

Άρα οι ιδιότητες επαναδιατυπώνονται ως εξής:

$$\exp[(\delta+\varepsilon)\mathbf{v}]x = \exp(\delta\mathbf{v})\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \tag{1.9}$$

$$\exp(0\mathbf{v})x = x \tag{1.10}$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\,[\exp(\varepsilon\mathbf{v})x] = \mathbf{v}|_{\exp(\varepsilon\mathbf{v})x} \tag{1.11}$$

για όλα τα x που ανήκουν στην M.

<u>Παράδειγμα 1.23</u> Θεωρούμε την ομάδα στροφών στο επίπεδο

$$\Psi(\varepsilon, (x,y)) = (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon\ ,\ x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon)$$

Ο απειροστός της γεννήτορας είναι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v} = \xi(x,y)\partial_x + \eta(x,y)\partial_y$, ($\partial_x \equiv \partial/\partial x$) έτσι σύμφωνα με την (1.8)

$$\xi(x,y) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{e=0} (x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon) = -y$$

$$\eta(x,y) = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{e=0} (x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon) = x$$

Γι' αυτό το λόγο $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$ είναι ο απειροστός γεννήτορας και φυσικά υπάρχει συμφωνία και με τις λύσεις του συστήματος

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = -\ y\ ,\ \ \frac{dy}{d\varepsilon} = x.$$

<u>Πρόταση 1.24.</u> Υποθέστε ότι $\mathbf{v}$ είναι ένα διανυσματικό πεδίο που δεν μηδενίζεται σε κάποιο σημείο $x' \in M$: $\mathbf{v}|_{x'} \neq 0$. Τότε υπάρχει ένας τοπικός χάρτης συντεταγμένων $y = (y^1,\dots, y^m)$ στο x΄ τέτοιος ώστε $\mathbf{v} = \partial/\partial y^1$.

ΔΡΑΣΗ ΣΕ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ας δούμε τώρα πως μεταβάλλεται μια συνάρτηση κάτω από τη δράση μιας ομάδας (ροή) που γεννάται από ένα διανυσματικό πεδίο. Έστω $\mathbf{v}$ ένα διανυσματικό πεδίο και $f : M \to \Re$ μια ομαλή συνάρτηση (τα ίδια ισχύουν και για διανυσματικές συναρτήσεις $F : M \to \Re^n$). Αν $\mathbf{v} = \sum \xi^i(x)\partial/\partial x^i$ τότε από την (1.11) έχουμε

$$\frac{d}{d\varepsilon} f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) \equiv \mathbf{v}(f)[\exp(\varepsilon\mathbf{v})x] \tag{1.12}$$

Πιο συγκεκριμένα, για ε = 0,

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}(x) = \mathbf{v}(f)(x).$$

Άρα το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}$ δρα ως τελεστής μερικής παραγώγισης πρώτης τάξης για πραγματικές συναρτήσεις στην M. Αν πάρουμε τώρα το θεώρημα του Taylor και θεωρήαουμε ότι η σειρά συγκλίνει για κάθε ε, θα προκύψει μια σειρά Lie.

$$f(\exp(\varepsilon\mathbf{v})x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^k}{k!}\mathbf{v}^k(f)(x) \tag{1.13}$$

για τη δράση της ροής στην f, με $\mathbf{v}^k(f) = \mathbf{v}(\mathbf{v}^{k-1}(f))$, κ.λ.π. Αυτή η δράση που ορίζεται από το **v** έχει τις βασικές ιδιότητες της παραγώγισης.

(α) Γραμμικότητα $$\mathbf{v}(f+g) = \mathbf{v}(f) + \mathbf{v}(g) \tag{1.14}$$

(β) Κανόνας Leibniz $$\mathbf{v}(f\cdot g) = \mathbf{v}(f)\cdot g + f\cdot \mathbf{v}(g) \tag{1.15}$$

ΔΙΑΦΟΡΙΚΑ

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 διαφορίσιμες πολλαπλότητες M και N και μια ομαλή απεικόνιση $F : M \to N$ (η N θα μπορούσε να είναι ένα υποσύνολο της M ή και η ίδια ακόμα). Κάθε παραμετροποιημένη καμπύλη C στην M απεικονίζεται μέσω της F στην αντίστοιχη C΄ στην N. Γνωρίζουμε πως σε κάθε σημείο μιας τέτοιας καμπύλης εφαρμόζεται ένα εφαπτόμενο διάνυσμα. Συνεπώς, η F απεικονίζει το εφαπτόμενο διάνυσμα της C στο x = φ(ε) στο εφαπτόμενο διάνυσμα της C΄ στο f(x) = φ΄(ε) (δεν είναι παράγωγος). Αυτή η απεικόνιση καλείται διαφορικό της F και συμβολίζεται με

$$dF\left(\dot{\phi}(\varepsilon)\right) = \frac{d}{d\varepsilon}\left\{F(\phi(\varepsilon))\right\} \tag{1.16}$$

Άρα το διαφορικό μιας απεικόνισης ανάμεσα σε διαφορίσιμες πολλαπλότητες απεικονίζει τον εφαπτόμενο χώρο της μιας σ' ένα σημείο στον εφαπτόμενο χώρο της άλλης στην εικόνα του σημείου.

$$dF : TM|_x \to TN|_{F(x)}$$

Ας πούμε τώρα ότι έχουμε ένα εφαπτόμενο διάνυσμα στο $x \in M$

$$\mathsf{v}\big|_x = \sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

τότε

$$dF(\mathsf{v}\big|_x) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi^i \frac{\partial F^j(x)}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial y^j} = \sum_{j=1}^{n} \mathsf{v}\left(F^j(x)\right)\frac{\partial}{\partial y^j} \tag{1.17}$$

Διαπιστώνουμε πως το διαφορικό $dF|_x$ είναι μια γραμμική απεικόνιση από τον $TM|_x$ στον $TN|_{F(x)}$, του οποίου η μορφή σε πίνακα είναι ο Ιακωβιανός της F στο x.

<u>Λήμμα 1.25.</u> Αν $F : M \to N$ και $H : N \to P$ είναι ομαλές απεικονίσεις ανάμεσα σε διαφορίσιμες πολλαπλότητες τότε

$$d(H\circ F) = dH\circ dF \tag{1.18}$$

όπου $dF : TM|_x \to TN|_{y = F(x)}$, $dH : TN|_y \to TP|_{z = H(y)}$ και $d(H\circ F) : TM|_x \to TP|_{z = H(F(x))}$.

ΑΓΚΥΛΕΣ LIE

Αν έχουμε δύο διανυσματικά πεδία **v** και **w** στην M, τότε η αγκύλη Lie είναι επίσης ένα διανυσματικό πεδίο που ικανοποιεί τη σχέση

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}](f) = \mathbf{v}(\mathbf{w}(f)) - \mathbf{w}(\mathbf{v}(f)) \tag{1.19}$$

για όλες τις ομαλές συναρτήσεις $f : M \to \Re$. Σε τοπικές συντεταγμένες, αν

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{και} \quad \mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

τότε

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}] = \sum_{i=1}^{m}\left\{v(\eta^i) - w(\xi^i)\right\}\frac{\partial}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\{\xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\}\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{1.20}$$

όπου $\sum_{j=1}^{m}\left\{\xi^j\frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right\}$ είναι οι συνιστώσες του νέου διανυσματικού πεδίου.

Πρόταση 1.26. Η αγκύλη Lie έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Διγραμμικότητα

$$\begin{aligned}[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}', \mathbf{w}] &= c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}] \\ [\mathbf{v}, c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] &= c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v},\mathbf{w}']\end{aligned} \tag{1.21}$$

όπου c, c΄ είναι σταθερές.

(β) Αντισυμμετρικότητα

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}] = -[\mathbf{w},\mathbf{v}] \tag{1.22}$$

(γ) Ταυτότητα Jacobi

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] + [\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]] + [\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]] = 0 \tag{1.23}$$

Ο ορισμός (1.19) της αγκύλης Lie μας δείχνει πως η τελευταία είναι ανεξάρτητη από συντεταγμένες. Ας πούμε τώρα ότι έχουμε μια ομαλή απεικόνιση $F : M \to N$ και δύο διανυσματικά πεδία **v** και **w** στην M καθώς και τα dF(**v**), dF(**w**) που είναι F – συσχετιζόμενα ($\mathbf{w}|_{F(x)} = dF(\mathbf{v}|_x)$) καλώς ορισμένα διανυσματικά πεδία στην N, τότε η αγκύλη Lie τους είναι επίσης F-συσχετιζόμενη:

$$dF([\mathbf{v},\mathbf{w}]) = [dF(\mathbf{v}),dF(\mathbf{w})] \tag{1.24}$$

Θεώρημα 1.27. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο διανυσματικά πεδία **v** και **w** στην διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Τότε

$$\exp(\varepsilon\mathbf{v})\exp(\theta\mathbf{w})x = \exp(\theta\mathbf{w})\exp(\varepsilon\mathbf{v})x \tag{1.25}$$

για όλα τα $\varepsilon,\theta \in \Re$, $x \in M$, τέτοια ώστε και τα δύο μέλη να ορίζονται, αν και μόνο αν $[\mathbf{v},\mathbf{w}] = 0$ παντού.

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει πως η δράση των ομάδων (ροών) που γεννιούνται από τα αντίστοιχα διανυσματικά πεδία πάνω στα σημεία της διαφορίσιμης πολλαπλότητας είναι ανεξάρτητη η μια από την άλλη. Δηλαδή είτε δράσουμε με τη μια πρώτα και μετά με την άλλη είτε το αντίστροφο, το αποτέλεσμα θα είναι το ίδιο.

Λήμμα 1.28. Αν τα διανυσματικά πεδία **v** και **w** είναι εφαπτόμενα σε μια διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα $N \subset M$, τότε το ίδιο συμβαίνει και με την αγκύλη Lie $[\mathbf{v},\mathbf{w}]$.

1.4 ΑΛΓΕΒΡΕΣ LIE

Μπορούμε να πούμε γενικά πως μια άλγεβρα Lie είναι ο "απειροστός γεννήτορας" μιας ομάδας Lie. Συνεπώς, αν μελετάμε την άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie είναι σαν να μελετάμε την ίδια την ομάδα.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ομάδα Lie. Τότε για κάθε στοιχείο της ομάδας $g \in G$ μπορούμε να ορίσουμε το από δεξιά γινόμενο

$$R_g : G \rightarrow G$$

βάσει της σχέσης

$$R_g(h) = h \circ g$$

που είναι ένας διαφορομορφισμός με αντίστροφο

$$R_{g^{-1}} = (R_g)^{-1}.$$

Επίσης, ένα διανυσματικό πεδίο **v** πάνω στην G θα καλείται από δεξιά αναλλοίωτο αν

$$dR_g(\mathbf{v}|_x) = \mathbf{v}|_{R_g(h)} = \mathbf{v}|_{hg}$$

για όλα τα g και h στην G. Έτσι, ορίζουμε ως άλγεβρα Lie μιας ομάδας Lie G τον διανυσματικό χώρο όλων των από δεξιά αναλλοίωτων διανυσματικών πεδίων πάνω στη G. Η άλγεβρα Lie **g** έχει την ίδια διάσταση με την ομάδα Lie G.

Παρατηρούμε ότι κάθε από δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο καθορίζεται μοναδικά από την τιμή του στην μονάδα επειδή

$$\mathbf{v}|_g = dR_g(\mathbf{v}|_e) \tag{1.26}$$

αφού $R_g(e) = g$. Αντιστρόφως, κάθε εφαπτόμενο διάνυσμα στη G στο e μοναδικά καθορίζει ένα από δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο πάνω στη G με βάση την πάνω σχέση. Πράγματι,

$$dR_g\left(\mathbf{v}|_h\right) = dR_g\left(dR_h\left(\mathbf{v}|_e\right)\right) = d\left(R_g \circ R_h\right)\left(\mathbf{v}|_e\right) = dR_{hg}\left(\mathbf{v}|_e\right) = \mathbf{v}|_{hg}$$

Οπότε, μπορούμε να πούμε πως η άλγεβρα Lie **g** της G είναι ο εφαπτόμενος χώρος της G στο ταυτοτικό στοιχείο (μονάδα)

$$\mathbf{g} \approx TG|_e \tag{1.27}$$

Όμως, η άλγεβρα Lie είναι εφοδιασμένη και με μια πράξη ακόμα, την αγκύλη Lie.

Ορισμός 1.33. Μια άλγεβρα Lie είναι ένας διανυσματικός χώρος **g** με μια διγραμμική πράξη

$$[\ ,\ ] : \mathbf{g}\times\mathbf{g} \to \mathbf{g}$$

που ονομάζεται αγκύλη Lie για **g,** ικανοποιώντας τις παρακάτω ιδιότητες

(α) Διγραμμικότητα

$[c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}',\mathbf{w}] = c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v}',\mathbf{w}]$, $[\mathbf{v},c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}'] = c[\mathbf{v},\mathbf{w}] + c'[\mathbf{v},\mathbf{w}']$

για $c,c' \in \Re$.

(β) Αντισυμμετρικότητα

$$[\mathbf{v},\mathbf{w}] = - [\mathbf{w},\mathbf{v}]$$

(γ) Ταυτότητα Jacobi

$$[\mathbf{u},[\mathbf{v},\mathbf{w}]] + [\mathbf{w},[\mathbf{u},\mathbf{v}]] + [\mathbf{v},[\mathbf{w},\mathbf{u}]] = 0$$

για όλα τα **u**, **v**, **w**, **v**΄, **w**΄ στη **g**.

Εξ ορισμού η αγκύλη Lie είναι μια κλειστή πράξη. Αυτό σημαίνει πως, για μια πεπερασμένων διαστάσεων άλγεβρα Lie, υπάρχουν συγκεκριμένες συναρτήσεις, λόγω του γεγονότος ότι η αγκύλη Lie αποτελεί διάνυσμα της άλγεβρας, τέτοιες ώστε

$$[\mathbf{v}_i,\mathbf{v}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}\mathbf{v}_k\ , \qquad i, j= 1,\dots,r$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις ονομάζονται σταθερές δομής και επειδή η αγκύλη Lie ικανοποιεί τις ιδιότητες της αντισυμμετρικότητας και της ταυτότητας Jacobi, αυτό επιβάλλει παρόμοιες συνθήκες στις σταθερές δομής.

Παράδειγμα 1.34. Ας υπολογίσουμε την άλγεβρα Lie της γενικής γραμμικής ομάδας GL(n). Αφού η GL(n) είναι n^2-διάστατη μπορούμε να ταυτοποιήσουμε την άλγεβρα Lie της **gl(n)** ≈ $\Re^{n^2}$ με τον χώρο όλων των n×n πινάκων. Οι συντεταγμένες στην GL(n) δίνονται από τα στοιχεία πίνακα x_{ij}, i,j = 1,…, n, έτσι ο εφαπτόμενος χώρος στην GL(n) στη μονάδα είναι το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων

$$\mathbf{v}_{\mathbf{A}}\big|_I = \sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\bigg|_I$$

όπου A = (α_{ij}) είναι ένας αυθαίρετος n×n πίνακας. Τώρα δοθέντος ενός πίνακα Y = (y_{ij}) της GL(n), ο πίνακας $R_y(x)$ = XY έχει στοιχεία

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ik}y_{kj}\ .$$

Έτσι, βρίσκουμε ότι

$$\mathsf{v_A}\big|_Y = dR_Y(\mathsf{v_A}\big|_I) = \sum_{l,m}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(\sum_k x_{lk}y_{km}\right)\frac{\partial}{\partial x_{lm}} = \sum_{i,j,m} a_{ij}y_{jm}\frac{\partial}{\partial x_{im}}$$

ή αλλιώς

$$\mathsf{v_A}\big|_X = \sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ik}x_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Για τον υπολογισμό της αγκύλης Lie έχουμε :

$$[\mathsf{v_A},\mathsf{v_B}] = \sum_{\substack{i,j,k\\ l,m,p}}\left\{a_{lp}x_{pm}\frac{\partial}{\partial x_{lm}}(b_{ik}x_{kj}) - b_{lp}x_{pm}\frac{\partial}{\partial x_{lm}}(a_{ik}x_{kj})\right\}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

$$= \sum_{i,j,k}\left[\sum_l (b_{il}a_{lk} - a_{il}b_{lk})\right]x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} = \mathsf{v_{[A,B]}}$$

όπου [A,B] ≡ BA – AB είναι ο μεταθέτης πινάκων. Γι' αυτό, η άλγεβρα Lie **gl(n)** της γενικής γραμμικής ομάδας GL(n) είναι ο χώρος όλων των n×n πινάκων με αγκύλη Lie τον μεταθέτη πινάκων.

ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΥΠΟΟΜΑΔΕΣ

Πρόταση 1.35. Έστω ένα από δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο **v** ≠ 0 πάνω στην ομάδα Lie G. Τότε η ροή που γεννιέται από το **v** μέσω της μονάδας, συμβολίζεται με

$$g_\varepsilon = \exp(\varepsilon \mathbf{v})e \qquad (1.28)$$

ορίζεται για όλα τα ε στο $\Re$ και σχηματίζει μια μονοπαραμετρική υποομάδα της G, με

$$g_{\varepsilon+\delta} = g_\varepsilon \cdot g_\delta\ ,\ g_o = e\ ,\ g^{-1}_\varepsilon = g_{-\varepsilon} \qquad (1.29)$$

ισομορφική είτε με τον $\Re$ είτε με την ομάδα SO(2). Αντιστρόφως, οποιαδήποτε συνεκτική μονοδιάστατη υποομάδα της G παράγεται από ένα τέτοιο από δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο όπως αναφέραμε παραπάνω.

Παράδειγμα 1.36. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε την G = GL(n) με άλγεβρα Lie **gl(n)**, τον χώρο όλων των n×n πινάκων με τον μεταθέτη για αγκύλη Lie. Αν A $\in$ **gl(n)**, τότε το από δεξιά αναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v_A}$ στην GL(n) έχει τη μορφή

$$\mathsf{v_A}\big|_X = \sum_{i,j}\left(\sum_k a_{ik}x_{kj}\right)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

Η μονοπαραμετρική υποομάδα exp(ε $\mathbf{v_A}$)e βρίσκεται από την ολοκλήρωση του συστήματος των n^2 συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{dx_{ij}}{d\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_{kj}\ ,\qquad x_{ij}(0)=\delta^i_j,\qquad\qquad \text{i,j=1, …,n} .$$

Η λύση είναι το εκθετικό πίνακα $X(\varepsilon) = e^{\varepsilon A}$, το οποίο είναι η μονοπαραμετρική υποομάδα της GL(n) που παράγεται από τον πίνακα A της **gl(n)**.

ΥΠΟΑΛΓΕΒΡΕΣ

Μια υποάλγεβρα **h** μιας άλγεβρας Lie **g** είναι ένας διανυσματικός υποχώρος που είναι κλειστός κάτω από την πράξη της αγκύλης Lie, δηλαδή $[\mathbf{v},\mathbf{w}]\in\mathbf{h}$ για $\mathbf{v},\mathbf{w}\in\mathbf{h}$. Με βάση, το παρακάτω θεώρημα θα δούμε πως υπάρχει μια αντιστοιχία ανάμεσα σε μια υποάλγεβρα Lie και μια υποομάδα Lie όπως ακριβώς συμβαίνει με μια ομάδα Lie και την άλγεβρα Lie της.

<u>Θεώρημα 1.37.</u> Έστω G μια ομάδα Lie με άλγεβρα Lie **g**. Αν H G είναι μια υποομάδα Lie, τότε η άλγεβρα Lie της είναι μια υποάλγεβρα της **g**. Αντιστρόφως, αν **h** είναι μια οποιαδήποτε s-διάστατη υποάλγεβρα της **g**, τότε υπάρχει μια μοναδική συνεκτική s-παραμετρική υποομάδα Lie H της G με άλγεβρα Lie **h**.

<u>Παράδειγμα 1.38.</u> Η άλγεβρα Lie της ορθογώνιας ομάδας O(n) θα προκύψει αν πάρουμε όλους τους n×n πίνακες A που ικανοποιούν τη σχέση

$$(e^{\varepsilon A})(e^{\varepsilon A})^T = I.$$

Διαφορίζοντας ως προς ε και θέσουμε ε = 0, θα έχουμε

$$A + A^T = 0\ \ \text{άρα}\ \ A^T = - A$$

Επομένως η **so(n)** = {A: A αντισυμμετρικός} είναι η άλγεβρα Lie της O(n) καθώς και της υποομάδας της SO(n).

<u>Θεώρημα Ado 1.39.</u> Ας υποθέσουμε πως έχουμε μια πεπερασμένων διαστάσεων άλγεβρα Lie **g**. Τότε η **g** είναι ισομορφική με μια υποάλγεβρα της **gl(n)** για κάποιο n.

Το θεώρημα που μόλις διατυπώσαμε μας λέει πως μια άλγεβρα Lie πεπερασμένων διαστάσεων μπορεί να αντιστοιχηθεί με μια υποάλγεβρα της **gl(n)**, όπου n η διάσταση της άλγεβρας. Αυτό σημαίνει πως η αναπαράσταση της θα είναι σε μορφή πίνακα. Ως συνέπεια του παραπάνω θεωρήματος θα διατυπώσουμε ένα άλλο θεώρημα.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΕΣ ΔΡΑΣΕΙΣ ΟΜΑΔΩΝ

Ας πούμε πως έχουμε μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών G που δρα πάνω στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M με τον εξής τρόπο : $g\cdot x = \Psi(g,x)$ για $(g,x)\in\Lambda\in G\times M$. Τότε υπάρχει και μια αντίστοιχη “απειροστη δράση” της άλγεβρας Lie **g** της G στην M. Πιο συγκεκριμένα, αν $\mathbf{v}\in\mathbf{g}$ ορίζουμε μια απεικόνιση έτσι ώστε η $\psi(\mathbf{v})$ να είναι ένα διανυσματικό πεδίο στην M και η ροή του να συμπίπτει με δράση της μονοπαραμετρικής υποομάδας $\exp(\varepsilon\mathbf{v})$ της G στην M. Δηλαδή

$$\psi(\mathbf{v})\big|_x=\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}\Psi(\exp(\varepsilon\mathbf{v}),x)=d\Psi_x(\mathbf{v}\big|_e)\qquad(1.30)$$

με $\Psi_x(g) \equiv \Psi(g,x)$. Επίσης, μπορούμε να διαπιστώσουμε πως η ψ είναι ένας ομομορφισμός άλγεβρας Lie από την **g** στην άλγεβρα Lie των διανυσματικών πεδίων στην M:

$$[\psi(\mathbf{v}),\psi(\mathbf{w})] = \psi([\mathbf{v},\mathbf{w}]), \qquad \mathbf{v},\mathbf{w}\in \mathbf{g} \tag{1.31}$$

Άρα το σύνολο όλων των διανυσματικών πεδίων ψ(**v**) σχηματίζει μια άλγεβρα Lie ισομορφική με την **g** (αποδεικνύεται ότι έχουν τις ίδιες σταθερές δομής).

Θεώρημα 1.40. Έστω $\mathbf{w_1},\ldots, \mathbf{w_r}$ διανυσματικά πεδία πάνω στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M που ικανοποιούν τη σχέση

$$[\mathbf{w}_i,\mathbf{w}_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k \mathbf{w}_k\,, \qquad \text{i, j=1,…,r}$$

για συγκεκριμένες σταθερές δομής c^k_{ij}. Τότε υπάρχει μια ομάδα Lie G της οποίας η άλγεβρα Lie έχει τις δοθείσες c^k_{ij} ως σταθερές δομής συσχετιζόμενες σε κάποια βάση $\mathbf{v_1},\ldots, \mathbf{v_r}$ και μια τοπική δράση ομάδας της G στην M τέτοια ώστε $\psi(\mathbf{v_i}) = \mathbf{w_i}$ για i = 1,…, r όπου η ψ ορίζεται από την (1.30).

Ένα διανυσματικό πεδίο, που παίρνουμε από την άλγεβρα Lie **g** μιας ομάδας μετασχηματισμών,

$$\mathbf{v}\big|_x = \frac{d}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} \exp(\varepsilon\mathbf{v})x\,, \qquad \mathbf{v}\in \mathbf{g} \tag{1.32}$$

καλείται απειροστός γεννήτορας της απειροστής δράσης της αντίστοιχης ομάδας G. Με βάση το προηγούμενο θεώρημα αν γνωρίζουμε τους απειροστούς γεννήτορες $\mathbf{w_1},\ldots, \mathbf{w_r}$ (βάση) τότε μπορούμε να εκθετοποιήσουμε και να βρούμε μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών της οποίας η άλγεβρα Lie να συμπίπτει με τη δοθείσα.

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ LIE

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο **v** πάνω σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Συχνά ενδιαφερόμαστε να μάθουμε πως μεταβάλλονται συγκεκριμένα αντικείμενα πάνω στην M, όπως συναρτήσεις και διανυσματικά πεδία, κάτω από τη ροή exp(ε**v**) που προκαλεί το **v**. Η παράγωγος Lie είναι αυτή που θα μας πει για την απειροστή αλλαγή αυτού του αντικειμένου κάτω από τη δράση της ροής. Ουσιαστικά, αν έχουμε ένα σημείο x πάνω στην M και μετά από κάποια μεταβολή του ε πάμε στο σημείο exp(ε**v**)x, τότε σκοπός μας είναι να συγκρίνουμε την τιμή αυτού του αντικειμένου στο exp(εv)x με αυτή στο x. Για την περίπτωση που το αντικείμενο είναι ένα διανυσματικό πεδίο **σ**, τότε η παράγωγος Lie είναι ένα πολύ γνωστό μας αντικείμενο – η αγκύλη Lie!

Πρόταση 1.41. Έστω **v** και **w** δύο ομαλά διανυσματικά πεδία πάνω στην M. Η παράγωγος Lie του **w** ως προς **v** συμπίπτει με την αγκύλη Lie των **v** και **w**:

$$\mathbf{v}(\mathbf{w}) = [\mathbf{v},\mathbf{w}] \tag{1.33}$$

Τέλος, παρατηρούμε πως η παράγωγος Lie είναι ίδιου τύπου με το **w**, δηλαδή διανυσματικό πεδίο για την περίπτωσή μας.

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2</u>

<u>Ομάδες Συμμετρίας Διαφορικών Εξισώσεων</u>

Εφοδιασμένοι πλέον με το κατάλληλο μαθηματικό υπόβαθρο σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε την έννοια της ομάδας συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Βασικός μας σκοπός είναι να καθορίσουμε μια συστηματική μέθοδο για τον υπολογισμό μιας ομάδας συμμετρίας για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Μια ομάδα συμμετρίας είναι ουσιαστικά μια ομάδα μετασχηματισμών, που μετασχηματίζει τις λύσεις του συστήματος μας σε άλλες λύσεις. Άρα η μέθοδος που θα αναπτύξουμε θα σχετίζεται με τον τρόπο μετασχηματισμού των λύσεων. Το εργαλείο – κλειδί αυτής της μεθόδου θα είναι η έννοια του *prolongation*. Με το *prolongation* θα μπορέσουμε να φτιάξουμε το κατάλληλο κριτήριο για την εύρεση ομάδων συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

2.1 ΣΥΜΜΕΤΡΙΕΣ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Αρχικά, αντί για ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων θα ξεκινήσουμε με ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$F_v(x) = 0, \qquad v = 1,\dots, l$$

όπου οι $F_1(x),\dots, F_l(x)$ είναι ομαλές πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται για x πάνω σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Λύση ενός τέτοιου συστήματος είναι ένα σημείο x στην M τέτοιο ώστε $F_v(x) = 0$ για $v = 1,\dots, l$.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΑ ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ

Ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος είναι μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών G που δρα πάνω στην M με την ιδιότητα να μετασχηματίζει λύσεις ενός συστήματος σε άλλες λύσεις. Οπότε, αν x είναι μια λύση, g ένα στοιχείο της ομάδας συμμετρίας και ορίζεται το $g\cdot x$, τότε το τελευταίο είναι και αυτό λύση.

<u>Ορισμός 2.1</u> Έστω G μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα σε μια διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Το υποσύνολο $S\subset M$ καλείται G-αναλλοίωτο και η G ονομάζεται ομάδα συμμετρίας του S, αν για $x\in S$ και $g\in G$ τέτοια ώστε το $g\cdot x$ να ορίζεται, ισχύει ότι το $g\cdot x\in S$.

Επίσης, αν έχουμε δύο G-αναλλοίωτα σύνολα, το ίδιο θα είναι η ένωση και η τομή τους.

ΑΝΑΛΛΟΙΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

<u>Ορισμός 2.2.</u> Έστω G μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα πάνω στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Μια συνάρτηση $F : M \to N$, όπου η N είναι μια άλλη διαφορίσιμη πολλαπλότητα, καλείται G-αναλλοίωτη συνάρτηση αν για όλα τα $x\in M$ και όλα τα $g\in G$ που ορίζουν το $g\cdot x$, ισχύει

$$F(g\cdot x) = F(x).$$

Μια πραγματική G-αναλλοίωτη συνάρτηση $\zeta : M \rightarrow \Re$ καλείται απλά αναλλοίωτη της G, ενώ μια διανυσματική είναι G-αναλλοίωτη αν κάθε συνιστώσα της είναι μια αναλλοίωτη της G.

Πρόταση 2.3. Αν η G δρα στην M και η $F : M \rightarrow \Re^l$ είναι μια ομαλή συνάρτηση, τότε η F είναι μια G-αναλλοίωτη συνάρτηση αν και μόνο αν κάθε σύνολο $\{F(x) = c\}$, $c \in \Re^l$, είναι ένα G-αναλλοίωτο υποσύνολο της M.

Έτσι, με τα παραπάνω καταφέραμε να ορίσουμε τις αναλλοίωτες συναρτήσεις και να δούμε πως συσχετίζονται με την έννοια του αναλλοίωτου υποσυνόλου (Πρόταση 2.3.). Το σύνολο $\{F(x) = c\}$ είναι οι ισοσταθμικές της συνάρτησης F.

ΑΠΕΙΡΟΣΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ

Το κριτήριο για την εύρεση των ομάδων συμμετρίας ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων προκύπτει από τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν οι συσχετιζόμενες με το σύστημα συναρτήσεις κάτω από τη δράση της ροής που παράγεται από το διανυσματικό πεδίο, δηλαδή τον απειροστό γεννήτορα.. Παρόμοιο κριτήριο θα διατυπώσουμε λίγο αργότερα και για διαφορικές εξισώσεις.

Πρόταση 2.4. Έστω G μια συνεκτική ομάδα μετασχηματισμών που δρα πάνω στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Μια ομαλή πραγματική συνάρτηση $\zeta : M \rightarrow \Re$ είναι μια αναλλοίωτη συνάρτηση για την G αν και μόνο αν

$$\mathbf{v}(\zeta) = 0 \qquad \text{για όλα τα } x \in M \tag{2.1}$$

και κάθε απειροστό γεννήτορα **v** της G.

Για να διατυπώσουμε την παραπάνω πρόταση ακριβέστερα, ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r$ που σχηματίζουν μια βάση για την άλγεβρα Lie **g** της G. Τότε η ζ(x) είναι αναλλοίωτη αν και μόνο αν είναι λύση του ομογενούς συστήματος γραμμικών συνήθων πρώτης τάξεως διαφορικών εξισώσεων

$$\mathbf{v}_k(\zeta) = \sum_{i=1}^{m} \xi^i(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x^i} = 0 \ , \qquad k = 1, \ldots, r \tag{2.2}$$

αφού $\mathbf{v}_k = \sum_{i=1}^{m} \xi_k^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Θεώρημα 2.5. Έστω G μια συνεκτική τοπική ομάδα Lie μετασχηματισμών που δρα πάνω στην m-διάστατη διαφορίσιμη πολλαπλότητα M. Επίσης, ας υποθέσουμε ότι έχουμε την $F : M \rightarrow \Re^l$, $l \leq m$, που ορίζει ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων

$$F_v(x) = 0, \qquad v = 1, \ldots, l$$

και υποθέσουμε πως το σύστημα είναι μέγιστης τάξης, εννοώντας πως ο Ιακωβιανός πίνακας $(\partial F_v / \partial x^k)$ είναι τάξης l για κάθε λύση x του συστήματος. Τότε G είναι μια ομάδα συμμετρίας του συστήματος αν και μόνο αν

$$\mathbf{v}[F_v(x)] = 0, \quad v = 1, \ldots, l \quad \text{όπου } F(x) = 0 \tag{2.3}$$

για κάθε απειροστό γεννήτορα **v** της G.

Στην πρόταση 2.4. διατυπώσαμε το κριτήριο για μια συνάρτηση ενώ με το θεώρημα 2.5. νμπορούμε να βρούμε ομάδες συμμετρίας ενός συστήματος χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.3). Παρατηρούμε πως η (2.3) ισχύει μόνο για λύσεις του συστήματος. Επίσης, η συνθήκη μέγιστης τάξης για το σύστημα στο θεώρημα 2.5. είναι απαραίτητη γιατί έτσι δεν υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των εξισώσεων του συστήματος.

Παράδειγμα 2.6. Έστω G = SO(2) η ομάδα των στροφών στο επίπεδο με απειροστό γεννήτορα $\mathbf{v} = -y\partial_x + x\partial_y$. O μοναδιαίος κύκλος $S^1 = \{x^2 + y^2 = 1\}$ είναι ένα αναλλοίωτο υποσύνολο της SO(2) και το σύνολο των λύσεων της αναλλοίωτης συνάρτησης $\zeta(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, πράγματι

$$\mathbf{v}(\zeta) = -2xy + 2xy = 0$$

παντού, και άρα η (2.3) ικανοποιείται. Η συνθήκη μέγιστης τάξης ισχύει για τη ζ αφού η $\nabla\zeta = (2x,2y)$ δεν μηδενίζεται πάνω στον S^1.

2.2 ΟΜΑΔΕΣ ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Για να κάνουμε όσα είπαμε πιο πριν πρέπει να δούμε πως συσχετίζονται οι ομάδες μετασχηματισμών με τις διαφορικές εξισώσεις. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα S διαφορικών εξισώσεων με p ανεξάρτητες μεταβλητές $x = (x^1, \ldots, x^p)$ και q εξαρτημένες $u = (u^1, \ldots, u^q)$. Οι λύσεις του συστήματος εκφράζονται με τη μορφή u = f(x), με συνιστώσες $u^\alpha = f^\alpha(x^1, \ldots, x^p)$, α = 1, …, q. Έστω τώρα πως ο χώρος των ανεξάρτητων μεταβλητών είναι ο $X = \Re^p$, ενώ ο χώρος των εξαρτημένων μεταβλητών είναι ο $U = \Re^q$. Οι λύσεις μας θα βρίσκονται στο χώρο X×U και πιο συγκεκριμένα, η τοπική ομάδα μετασχηματισμών θα δρα σε κάποιο ανοικτό υποσύνολο $M \subset X \times U$. Ειδικότερα, αυτό που θα κάνει η ομάδα θα είναι να μετασχηματίζει λύσεις του S σε άλλες λύσεις του S.

Ένας δοθέν μετασχηματισμός αντιστοιχεί σ' ένα στοιχείο g της ομάδας Lie G και αυτό που κάνει είναι να μετασχηματίζει την u = f(x). Επιπροσθέτως, η συνάρτηση αυτή έχει γραφική παράσταση που βρίσκεται στο χώρο X×U

$$\Gamma_f = \{(x,f(x)) : x \in \Omega\} \subset X \times U$$

όπου $\Omega \subset X$ είναι το πεδίο ορισμού της f. Άρα είναι μια διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα του X×U. Αν η Γ_f είναι υποσύνολο του χώρου M, στον οποίο δρα η ομάδα Lie (μετασχηματισμός), τότε ένα στοιχείο g μπορεί να δράσει και να αλλάξει την Γ_f (εκτός αν είναι το ταυτοτικό στοιχείο οπότε θα παραμείνει ως έχει) με τον εξής τρόπο

$$g \cdot \Gamma_f = \Gamma_{f'} = \{(x', f'(x')) = g \cdot (x,f(x)) : (x,f(x)) \in \Gamma_f\}$$

Μόνο αν το g είναι κοντά στη μονάδα το νέο γράφημα θα ανήκει σε μονότιμη συνάρτηση.

Γενικά, οι συντεταγμένες μετασχηματίζονται με τον παρακάτω τρόπο

$$(x',u') = g \circ (x,u) = \left(\Xi_g(x,u), \Phi_g(x,u)\right)$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός εν γένει εξαρτάται από τις εξαρτημένες και τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ασχέτως αν δρα στις πρώτες ή στις δεύτερες.

Ας δώσουμε τώρα τον γενικό ορισμό μιας ομάδας συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Ορισμός 2.11. Έστω S ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Μια ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος S είναι μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών G που δρα πάνω σε ένα ανοικτό υποσύνολο M του χώρου των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών του συστήματος με την ιδιότητα ότι αν η u = f(x) είναι λύση του S, και αν ορίζεται το $g \circ f$ για $g \in G$, τότε η $u = g \circ f(x)$ είναι επίσης λύση του συστήματος. (Οι λύσεις ορίζονται σε κάποια περιοχή $\Omega \subset X$ και είναι ομαλές συναρτήσεις)

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης $u_{xx} = 0$, η ομάδα SO(2) είναι προφανώς μια ομάδα συμμετρίας, αφού οι λύσεις είναι όλες γραμμικές συναρτήσεις και η SO(2) μετασχηματίζει οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση σε άλλη γραμμική συνάρτηση.

2.3 PROLONGATION

Αφού ορίσαμε την ομάδα συμμετρίας, είναι καιρός να παρουσιάσουμε το κατάλληλο θεώρημα για να μπορούμε να αναγνωρίσουμε αν μια ομάδα είναι ομάδα συμμετρίας ή όχι ενός δοθέντος συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Για να το κάνουμε αυτό θα χρειστούμε ένα κατάλληλο μαθηματικό εργαλείο.

Ας ξεκινήσουμε "επιμηκύνοντας" τον βασικό μας χώρο $X \times U$. Αυτός αντιπροσωπεύει τις ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές. Θέλοντας να συμπεριλάβουμε και τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στο σύστημα θα κατασκευάσουμε μια απεικόνιση.

Ας υποθέσουμε πως έχουμε μια ομαλή πραγματική συνάρτηση $f(x) = f(x^1,...,x^p)$ p ανεξάρτητων μεταβλητών, τότε υπάρχουν

$$p_k \equiv \binom{p+k-1}{k}$$

διαφορετικές πιθανές k-τάξης μερικές παράγωγοι της f. Για αυτές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\partial_J f(x) = \frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{j_1} ... \partial x^{j_k}}$$

όπου J = (j_1,…,j_k) είναι μια διάταξη ακεραίων που δηλώνουν ως προς ποια ανεξάρτητη μεταβλητή γίνεται η παραγώγιση ενώ παίρνουν τιμές $1 \le j_k \le p$. Η τάξη αυτής της διάταξης συμβολίζεται με $\#J \equiv k$, και δείχνει πόσες παράγωγοι πάρθηκαν. Γενικά, υπάρχει ένας Ευκλείδειος χώρος $U_k \equiv \Re^{q \cdot p_k}$ διάστασης όσο και των $q \cdot p_k$ αριθμών που χρειάζονται για την περιγραφή των μέχρι k-τάξης μερικών παραγώγων της f. Οι συντεταγμένες σε αυτό το χώρο είναι οι u_J^a με α = 1,…,q και όλα τα J = (j_1,…,j_k) τάξης k. Το σύνολο $U^{(n)} = U \times U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος Καρτεσιανού γινομένου, του οποίου οι συνιστώσες απεικονίζουν όλες τις παραγώγους των συναρτήσεων $u = f(x)$ όλων των τάξεων (από 0 μέχρι n). Η διάσταση αυτού είναι

$$q + qp_1 + ... + qp_n = q\binom{p+n}{n} = qp^{(n)}$$

όπου $0 \le k \le n$.

Συνεπώς, αν μας δοθεί μια ομαλή συνάρτηση $u = f(x)$ με $f : X \to U$, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $u^{(n)} = pr^{(n)} f(x)$ που ονομάζεται το n-ιοστό prolongation της f και ορίζεται από τις

$$u_J^a = \partial_J f^a(x).$$

Οπότε η συνάρτηση αυτή μας πηγαίνει από το χώρο των ανεξάρτητων μεταβλητών X στο χώρο $U^{(n)}$ των τιμών της f και όλων των παραγώγων της μέχρι τάξης n.

Ο ολικός μας χώρος είναι ο $X \times U^{(n)}$ και ονομάζεται jet χώρος n-τάξης του $X \times U$. Σε περίπτωση που ενδιαφερόμαστε για ένα ανοικτό υποσύνολο $M \subset X \times U$, μπορούμε να κατασκευάσουμε τον n-jet χώρο του M

$$M^{(n)} = M \times U_1 \times ... \times U_n$$

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε με ένα διαφορετικό τρόπο ένα τυχαίο σύστημα διαφορικών εξισώσεων καθώς και τις λύσεις αυτού. Πιο συγκεκριμένα, θα δώσουμε μια πιο γεωμετρική μορφή στη περιγραφή τους και φυσικά θα συσχετίζεται με το βασικό μας εργαλείο που μόλις αναπτύξαμε, το prolongation.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα S n-ιοστής τάξης διαφορικών εξισώσεων με p ανεξάρτητες μεταβλητές $x = (x^1, ..., x^p)$ και q εξαρτημένες μεταβλητές $u = (u^1, ..., u^q)$. Το σύστημα αυτό μπορεί να περιγραφεί από l ομαλές συναρτήσεις που μηδενίζονται σε κάποιο ανοικτό σύνολο του $X \times U^{(n)}$. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχει μια ομαλή απεικόνιση από τον jet χώρο $X \times U^{(n)}$ σε κάποιον l-διάστατο Ευκλείδειο χώρο,

$$\Delta : X \times U^{(n)} \to \Re^l$$

έτσι ώστε το σύστημα S των διαφορικών εξισώσεων να έχει τη μορφή

$$\Delta_v\left(x, u^{(n)}\right) = 0, \qquad v = 1, ..., l.$$

Οι l συναρτήσεις $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = \left(\Delta_1\left(x, u^{(n)}\right), ..., \Delta_l\left(x, u^{(n)}\right)\right)$, όπου είπαμε είναι ομαλές και ο μηδενισμός τους στον $X \times U^{(n)}$ ορίζει το σύνολο

$$S_\Delta = \left\{\left(x, u^{(n)}\right) : \Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0\right\} \subset X \times U^{(n)}$$

στον ολικό jet χώρο.

Έχοντας αυτή την οπτική, μια λύση (ομαλή) του δοθέντος συστήματος διαφορικών εξισώσεων είναι μια ομαλή συνάρτηση $u = f(x)$ τέτοια ώστε

$$\Delta_v\left(x, pr^{(n)} f(x)\right) = 0, \qquad v = 1, ..., l$$

για x που βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της f. Ουσιαστικά, χρησιμοποιώντας την επέκταση προκύπτουν οι σχέσεις που πρέπει να ικανοποιούν οι παράγωγοι της f και καθορίζονται από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων. Είναι προφανές τώρα πως η γραφική παράσταση της $pr^{(n)}f(x)$ πρέπει να βρίσκεται ολόκληρη εντός του συνόλου S_Δ:

$$\Gamma_f^{(n)} \equiv \left\{\left(x, pr^{(n)} f(x)\right)\right\} \subset S_\Delta = \left\{\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0\right\}$$

Έτσι φαίνεται, γεωμετρικά πλέον, πως το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων αντιστοιχεί σε ένα κλειστό υποσύνολο του $X \times U^{(n)}$ και μια λύση αυτού $u = f(x)$ πρέπει να έχει το γράφημα της $pr^{(n)}f(x)$ εντός του υποσυνόλου αυτού.

Συνεπώς, κατασκευάσαμε τον χώρο πάνω στον οποίο θα δράσουμε με μια ομάδα μετασχηματισμών. Αυτός ο χώρος, που είναι ένα κλειστό υποσύνολο του $X \times U^{(n)}$, θα είναι μια διαφορίσιμη υποπολλαπλότητα και πάνω σ' αυτήν βρίσκονται οι λύσεις του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων. Οπότε, αναζητούμε την κατάλληλη ομάδα μετασχηματισμών, της οποίας η δράση μετασχηματίζει λύσεις σε άλλες λύσεις στο χώρο $X \times U \subset X \times U^{(n)}$ (ομάδα συμμετρίας). Για να βρούμε μια ομάδα συμμετρίας θα κατασκευάσουμε ένα κριτήριο, που όμως χρειάζεται την έννοια του prolongation δράσης ομάδος (για την ακρίβεια του διανυσματικού πεδίου – γεννήτορα της ομάδας).

PROLONGATION ΔΡΑΣΗΣ ΟΜΑΔΑΣ

Αρχικά θεωρούμε μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών G που έχει ως πεδίο δράσης ένα κλειστό υποσύνολο $M \subset X \times U$ του χώρου των ανεξάρτητων και εξαρτημένων μεταβλητών. Τότε υπάρχει μια τοπική δράση της G πάνω στον n-jet χώρο $M^{(n)}$, που καλείται το n-ιοστό prolongation της G και σημειώνεται με $pr^{(n)}G$. Αυτό που κάνει αυτή το prolongation είναι να μετασχηματίζει τις παραγώγους της $u = f(x)$ στις αντίστοιχες της μετασχηματισμένης $u' = f'(x')$ (δεν είναι παράγωγος), όπου ο μετασχηματισμός προκαλείται από ένα στοιχείο της G.

Αν το g είναι ένα στοιχείο της G κοντά στη μονάδα, τότε η μετασχηματισμένη συνάρτηση $g \cdot f$ ορίζεται στη γειτονιά του αντίστοιχου στοιχείου $\left(x'_0, u'_0\right) = g \cdot \left(x_0, u_0\right)$, με $u_0 = f(x_0)$ να είναι οι μηδενικής τάξης συνιστώσες της $u_0^{(n)}$. Οπότε η δράση της ομάδας μετασχηματισμού $pr^{(n)}g$ πάνω στο σημείο $\left(x_0, u_0^{(n)}\right)$ καθορίζεται από τον υπολογισμό των παραγώγων της $g \cdot f$ στο x'_0˙ ακριβέστερα

$$pr^{(n)} g \cdot \left(x_0, u_0^{(n)}\right) = \left(x'_0, u'^{(n)}_0\right)$$

όπου
$$u'^{(n)}_0 \equiv pr^{(n)}(g \cdot f)(x'_0) \tag{2.6}$$

Αφού παρουσιάσαμε την έννοια του $pr^{(n)}G$, θα τη χρησιμοποιήσουμε τώρα για να δώσουμε μια εναλλακτική συνθήκη, πιο γεωμετρική, που να μας υποδεικνύει πότε μια ομάδα μετασχηματισμών είναι ομάδα συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Αυτό φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

<u>Θεώρημα 2.12.</u> Έστω M ένα ανοικτό υποσύνολο του $X \times U$ και $\Delta\left(x, u^{(n)}\right) = 0$ ένα n-ιοστής τάξης σύστημα διαφορικών εξισώσεων που ορίζεται πάνω στο M, με $S_\Delta \subset M^{(n)}$. Επίσης, υποθέτουμε πως υπάρχει μια τοπική ομάδα μετσχγματισμών G που δρα πάνω στο M, της οποίας η επέκταση αφήνει την S_Δ αναλλοίωτη, εννοώντας ότι αν $\left(x, u^{(n)}\right) \in S_\Delta$, θα έχουμε $pr^{(n)} g \cdot \left(x, u^{(n)}\right) \in S_\Delta$ για όλα τα $g \in G$ τέτοια ώστε να ορίζεται η προηγούμενη δράση. Τότε η G είναι μια ομάδα συμμετρίας του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων όπως παρουσιάστηκε η έννοια στον ορισμό 2.11..

Επαναλαμβάνουμε ότι με το προηγούμενο θεώρημα απλά βλέπουμε αν μια ομάδα μετασχηματισμών είναι ομάδα συμμετρίας. Σκοπός μας, όμως, είναι να βρούμε ομάδες συμμετρίας έχοντας μόνο το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων και ξεκινώντας απ' αυτό. Το κριτήριο για το σκοπό αυτό θα διατυπωθεί αφού παρουσιάσουμε πρώτα την παρακάτω έννοια.

PROLONGATION ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

Μια ομάδα μετασχηματισμών παράγεται από κάποιους απειροστούς γεννήτορες. Αυτοί οι απειροστοί γεννήτορες είναι διανυσματικά πεδία, των οποίων θέλουμε να ορίσουμε την επέκταση. Είναι προφανές πως αυτή θα αντιστοιχεί στους απειροστούς γεννήτορες της επέκτασης της ομάδας μετασχηματισμών.

Ορισμός 2.13. Έστω $M \subset X \times U$ ανοικτό και **v** ένα διανυσματικό πεδίο πάνω στο M, με αντίστοιχη (τοπική) μονοπαραμετρική ομάδα exp(ε**v**). Το n-ιοστό prolongation του **v**, που συμβολίζεται με $pr^{(n)}\mathbf{v}$, θα είναι ένα διανυσματικό πεδίο στον n-jet χώρο $M^{(n)}$, και ορίζεται ως ο απειροστός γεννήτορας της αντίστοιχης μονοπαραμετρικής ομάδας $pr^{(n)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})]$. Με άλλα λόγια ,

$$pr^{(n)}\mathbf{v}\Big|_{(x,u^{(n)})} = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} pr^{(n)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})](x,u^{(n)}) \tag{2.7}$$

για οποιοδήποτε $(x,u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Το $pr^{(n)}\mathbf{v}$ βρίσκεται στο χώρο $X \times U^{(n)} \supset M^{(n)}$, όπου οι συντεταγμένες είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές και όλες οι παράγωγοι των εξαρτημένων μεταβλητών μέχρι τάξης n. Άρα έχει γενικά τη μορφή

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{a=1}^{q}\sum_{J} \phi_a^J \frac{\partial}{\partial u_J^a} \tag{2.8}$$

για όλα τα J τάξεων $0 \leq \# J \leq n$.

Παράδειγμα 2.14. Ας θεωρήσουμε την ομάδα στροφών SO(2) που δρα πάνω στον $X \times U \approx \Re^2$. Ο αντίστοιχος απειροστός γεννήτορας είναι

$$\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u}$$

με $\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x,u) = (x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon)$ να είναι στροφή κατά γωνία ε. Το πρώτης τάξης prolongation έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} &pr^{(1)}[\exp(\varepsilon\mathbf{v})(x,u)](x,u,u_x) \\ &= \left(x\cos\varepsilon - u\sin\varepsilon, x\sin\varepsilon + u\cos\varepsilon, \frac{\sin\varepsilon + u_x\cos\varepsilon}{\cos\varepsilon - u_x\sin\varepsilon} \right) \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την (2.7), το πρώτης τάξης prolongation του **v** αποκτιέται με την παραγώγιση ως προς ε και θέτοντας ε = 0 στην παραπάνω σχέση. Άρα προκύπτει

$$pr^{(1)}\mathbf{v} = -u\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial u} + (1+u_x^2)\frac{\partial}{\partial u_x}$$

ΑΠΕΙΡΟΣΤΟ ΚΡΙΤΗΡΙΟ

Αφού, λοιπόν, διατυπώσαμε την έννοια του prolongation διανυσματικού πεδίου, θα δώσουμε το βασικό κριτήριο με το οποίο θα βρίσκουμε ομάδες συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων. Πριν απ' αυτό, ας πούμε πότε ένα σύστημα θεωρείται μέγιστης τάξης. Ας υποθέσουμε πως έχουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\Delta_v\left(x,u^{(n)}\right)=0, \qquad v=1,\dots,l$$

Το σύστημα λέγεται πως είναι μέγιστης τάξης αν ο $l\times\left(p+qp^{(n)}\right)$ Ιακωβιανός πίνακας

$$J_\Delta\left(x,u^{(n)}\right)=\left(\frac{\partial\Delta_v}{\partial x^i},\frac{\partial\Delta_v}{\partial u_J^a}\right)$$

του Δ ως προς όλες τις μεταβλητές $\left(x,u^{(n)}\right)$ είναι τάξης l για $\Delta\left(x,u^{(n)}\right)=0$.

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το βασικότερο θεώρημα για την εύρεση ομάδων συμμετρίας ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 2.15. Υποθέτουμε πως

$$\Delta_v\left(x,u^{(n)}\right)=0, \qquad v=1,\dots,l$$

είναι ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων μέγιστης τάξης που ορίζεται πάνω στον $M\subset X\times U$. Αν G είναι μια τοπική ομάδα μετασχηματισμών που δρα πάνω στον M, και

$$pr^{(n)}\mathbf{v}\left[\Delta_v\left(x,u^{(n)}\right)\right]=0, \quad v=1,\dots,l \quad \text{για } \Delta\left(x,u^{(n)}\right)=0 \tag{2.9}$$

για κάθε απειροστό γεννήτορα **v** της G, τότε η G είναι μια ομάδα συμμετρίας του συστήματος.

Με τη χρήση του κριτηρίου (2.9) μπορούμε να βρούμε τους απειροστούς γεννήτορες της ομάδας συμμετρίας του συστήματος.

Ο ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟΣ ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ PROLONGATION

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 2.16. θα πρέπει να προσδιορίσουμε τα ϕ_α^J της σχέσης (2.8). Αυτά υπολογίζονται στο γενικευμένο τύπο του prolongation διανυσματικού πεδίου. Για να δώσουμε αυτόν τον τύπο είναι απαραίτητο να ορίσουμε την i-ιοστή ολική παράγωγο.

Ορισμός 2.17. Δοθείσας μιας ομαλής συνάρτησης $P\left(x,u^{(n)}\right)$ των x, u και όλων των παραγώγων της u μέχρι τάξης n, που ορίζεται σε ένα ανοικτό υποσύνολο $M^{(n)}\subset X\times U^{(n)}$, η i-ιοστή ολική παράγωγος της P έχει τη γενική μορφή

$$D_i P = \frac{\partial P}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J u_{J,i}^{\alpha} \frac{\partial P}{\partial u_J^{\alpha}} \tag{2.10}$$

όπου, για $J = (j_1, ..., j_k)$,

$$u_{J,i}^{\alpha} = \frac{\partial u_J^{\alpha}}{\partial x^i} = \frac{\partial^{k+1} u^{\alpha}}{\partial x^i \partial x^{j_1} ... \partial x^{j_k}} \tag{2.11}$$

Στην (2.10) το άθροισμα είναι πάνω σε όλα τα J τάξης $0 \leq \# J \leq n$, όπου n είναι η υψηλότερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται στην P.

<u>Θεώρημα 2.18.</u> (Γενικευμένος τύπος prolongation διανυσματικού πεδίου)

Έστω $$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \xi^i(x,u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^{q} \phi_{\alpha}(x,u) \frac{\partial}{\partial u^{\alpha}}$$

ένα διανυσματικό πεδίο που ορίζεται πάνω σ' ένα ανοικτό υποσύνολο $M \subset X \times U$. Το n-ιοστό prolongation του **v** είναι το διανυσματικό πεδίο

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^{q} \sum_J \phi_{\alpha}^J (x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_J^{\alpha}} \tag{2.12}$$

που ορίζεται πάνω στον αντίστοιχο jet-χώρο $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, και η δεύτερη άθροιση γίνεται για όλες τις διατάξεις $J = (j_1, ..., j_k)$ με $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$. Οι συνιστώσες συναρτήσεις ϕ_{α}^J του $\mathrm{pr}^{(n)}$**v** δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\phi_{\alpha}^J (x, u^{(n)}) = D_J \left(\phi_{\alpha} - \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_i^{\alpha} \right) + \sum_{i=1}^{p} \xi^i u_{J,i}^{\alpha}, \tag{2.13}$$

όπου $u_i^{\alpha} = \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^i}$, και $u_{J,i}^{\alpha} = \frac{\partial u_J^{\alpha}}{\partial x^i}$ [βλέπε (2.11)].

<u>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3</u>

<u>Υπολογισμός Ομάδων Συμμετρίας</u>

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο,θα εφαρμόσουμε όσα αναπτύξαμε στα δύο προηγούμενα πάνω σ' ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Πιο συγκεκριμένα, το σύστημα αυτό θα αποτελείται από μια διαφορική εξίσωση που θα είναι η εξίσωση Korteweg-de Vries (KdV). Έτσι, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 2.16. για να βρούμε κάποιες ομάδες συμμετρίας της διαφορικής εξίσωσης και κατά συνέπεια να μπορέσουμε να βρούμε από κάποιες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης άλλες λύσεις.

3.1 ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΜΙΑΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Η ιστορία της εξίσωσης KdV ξεκίνησε με πειράματα του John Scott Russel το 1834. Στη συνέχεια, διερευνήθηκε θεωρητικά από τους Lord Rayleigh και Joseph Boussinesq γύρω στο 1870 και τελικά, από τους Korteweg και de Vries το 1895.

Η εξίσωση KdV δεν μελετήθηκε έκτοτε πολύ μέχρι που οι Zabusky & Kruskal (1965) ανακάλυψαν αριθμητικά ότι οι λύσεις της φαινόταν ότι αναλύονταν για μεγάλους χρόνους σε μια συλλογή από "σολιτόνια"-καλώς διαχωρισμένα απομονωμένα κύματα. Πέραν τούτου υα σολιτόνια φαίνονταν να είναι ανεπηρέαστα ως προς το σχήμα όταν περνούσε το ένα μέσα στο άλλο (μπορούσε να προκληθεί μια αλλαγή στη θέση τους). Επίσης, συνέδεσαν προγενέστερα αριθμητικά πειράματα των Fermi, Pasta και Ulam (FPU) δείχνοντας ότι η εξίσωση KdV ήταν το συνεχές όριο του συστήματος FPU. Ανάπτυξη της αναλυτικής λύσης χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό σκέδασης έγινε από τους Gardner, Greene Kruskal και Miura το 1967.

Η εξίσωση KdV συνδέεται με διάφορα φυσικά προβλήματα, όπως οι κυμάνσεις που εμφανίζονται σε ρηχά νερά με ασθενείς μη γραμμικές δυνάμεις επαναφοράς, τα επιμήκη εσωτερικά κύματα σ' έναν ωκεανό όπου υπάρχει διάταξη στρωμάτων πυκνότητας, τα ιονοακουστικά κύματα στο πλάσμα, τα ακουστικά κύματα στο κρυσταλλικό πλέγμα και άλλα.

3.2 ΕΥΡΕΣΗ ΟΜΑΔΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ

Η εξίσωση KdV για το μονοδιάστατο πρόβλημα έχει την παρακάτω μορφή:

$$u_t + u_{xxx} + uu_x = 0 \tag{3.1}$$

όπου $u_x \equiv \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_t \equiv \dfrac{\partial u}{\partial t}$ και $u_{xxx} \equiv \dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3}$.

Για να βρούμε μια ομάδα συμμετρίας της παραπάνω εξίσωσης χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2.16. θα πρέπει να υποθέσουμε τη μορφή του διανυσματικού πεδίου που παράγει την μονοπαραμετρική αυτή ομάδα συμμετρίας. Το διανυσματικό πεδίο έχει τη μορφή

$$\mathbf{v} = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \phi(x,t,u)\partial_u \tag{3.2}$$

Το σύστημα που στην περίπτωσή μας είναι μια διαφορική εξίσωση θα πρέπει να είναι μεγίστης τάξης για να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 2.16.. Αυτό συμβαίνει αν ο παρακάτω Ιακωβιανός πίνακας είναι τάξης 1 (μιας και $l = 1$) ως προς όλες τις μεταβλητές (x,t,$u^{(3)}$), που είναι $(x,t;u;u_x,u_t;u_{xx},u_{tt},u_{xt};u_{xxx},u_{ttt},u_{xtt},u_{xxt})$, για $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$.

$$J\left(x,t,u^{(3)}\right) = \left(0,0;u_x;u,1;0,0,0;1,0,0,0\right)$$

Ο οποίος είναι σίγουρα τάξης 1 για $u_t + u_{xxx} + uu_x = 0$.

Η τάξη της εξίσωσης KdV είναι n = 3 (ως προς x) όποτε χρειαζόμαστε την $pr^{(3)}\mathbf{v}$ του διανυσματικού μας πεδίου **v**. Ο τύπος που θέλουμε παρέχεται από το θεώρημα 2.18., άρα

$$pr^{(3)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x\partial_{u_x} + \phi^t\partial_{u_t} + \phi^{xx}\partial_{u_{xx}} + \phi^{xt}\partial_{u_{xt}} + \phi^{tt}\partial_{u_{tt}} + \phi^{xxx}\partial_{u_{xxx}} + \phi^{ttt}\partial_{u_{ttt}} + \phi^{xxt}\partial_{u_{xxt}} + \phi^{xtt}\partial_{u_{xtt}} \tag{3.3}$$

Στη συνέχεια, αξιοποιώντας τις (3.1) και (3.3), βάσει του θεωρήματος 2.16. και συγκεκριμένα της σχέσης (2.9), θα έχουμε

$$pr^{(3)}\mathbf{v}\cdot\left(u_t+u_{xxx}+uu_x\right)=0\Rightarrow\phi^{xxx}+\phi^t+u\phi^x+u_x\phi=0 \tag{3.4}$$

Ο χώρος στον οποίο “ζει” το pr$^{(3)}$**v** είναι ο $X\times T\times U^{(3)}$, όπου $x\in X$, $t\in T$ και $u,u_J\in U^{(3)}$ με $J=\left(j_1,j_2,j_3\right)$, $j_i=\{x,t\},i=1,2,3$. Επομένως ο χώρος αυτός έχει σαν ανεξάρτητες μεταβλητές τα x, t, u και όλες τις παραγώγους του u ως προς x και t (μέχρι και n = 3).

Έπειτα, για να προχωρήσουμε θα πρέπει να αναπτύξουμε τα ϕ^{xxx},ϕ^t και ϕ^x στη σχέση (3.4). Από τη σχέση (2.13) προκύπτει

$$\phi^{xxx}=D_x^3\left(\phi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xxxx}+\tau u_{xxxt}=D_x^3\phi-D_x^3\left(\xi u_x+\tau u_t\right)+\xi u_{xxxx}+\tau u_{xxxt}$$

$$\begin{aligned}\phi^t&=D_t\left(\phi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xt}+\tau u_{tt}\\&=D_t\phi-u_{xt}\xi-u_xD_t\xi-u_{tt}\tau-u_tD_t\tau+u_{xt}\xi+u_{tt}\tau\\&=D_t\phi-u_tD_t\tau-u_xD_t\xi\end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}\phi^x&=D_x\left(\phi-\xi u_x-\tau u_t\right)+\xi u_{xx}+\tau u_{tx}\\&=D_x\phi-u_{xx}\xi-u_xD_x\xi-u_{tx}\tau-u_tD_x\tau+u_{xx}\xi+u_{tx}\tau\\&=D_x\phi-u_tD_x\tau-u_xD_x\xi\end{aligned} \tag{3.6}$$

Ας υπολογίσουμε τη δράση του τελεστή D_x διαδοχικά 3 φορές στην ποσότητα $u_x\xi+u_t\tau$ ώστε να βρούμε το δεύτερο όρο της πρώτης εξίσωσης.

$$D_x\left(u_x\xi+u_t\tau\right)=u_{xx}\xi+u_xD_x\xi+u_{xt}\tau+u_tD_x\tau$$

$$D_x\left[D_x\left(u_x\xi+u_t\tau\right)\right]=u_{xxx}\xi+u_{xx}D_x\xi+u_xD_x^2\xi+u_{xx}D_x\xi+u_{xxt}\tau+u_{xt}D_x\tau+u_{xt}D_x\tau+u_tD_x^2\tau$$

$$\begin{aligned}&D_x^3\left(u_x\xi+u_t\tau\right)=u_{xxxx}\xi+u_{xxx}D_x\xi+u_{xxx}D_x\xi+u_{xx}D_x^2\xi+u_{xx}D_x^2\xi+u_xD_x^3\xi+u_{xxx}D_x\xi+u_{xx}D_x^2\xi\\&+u_{xxxt}\tau+u_{xxt}D_x\tau+u_{xxt}D_x\tau+u_{xt}D_x^2\tau+u_{xxt}D_x\tau+u_{xt}D_x^2\tau+u_{xt}D_x^2\tau+u_tD_x^3\tau=u_{xxxx}\xi+3u_{xxx}D_x\xi\\&+3u_{xx}D_x^2\xi+u_xD_x^3\xi+u_{xxxt}\tau+3u_{xxt}D_x\tau+3u_{xt}D_x^2\tau+u_tD_x^3\tau\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}\phi^{xxx}&=D_x^3\phi-u_{xxxx}\xi-3u_{xxx}D_x\xi-3u_{xx}D_x^2\xi-u_xD_x^3\xi-u_{xxxt}\tau-3u_{xxt}D_x\tau-3u_{xt}D_x^2\tau-u_tD_x^3\tau\\&+u_{xxxx}\xi+u_{xxxt}\tau=D_x^3\phi-3u_{xxx}D_x\xi-3u_{xx}D_x^2\xi-u_xD_x^3\xi-3u_{xxt}D_x\tau-3u_{xt}D_x^2\tau-u_tD_x^3\tau\end{aligned} \tag{3.7}$$

Στη συνέχεια, θα βρούμε το αποτέλεσμα της δράσης των τελεστών D_x,D_x^2 και D_x^3 πάνω σε συναρτήσεις της μορφής $A=A(x,t,u)$. Την προηγούμενη μορφή έχουν οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου. Για τον τελεστή D_t ισχύει η ίδια σχέση που θα βρούμε για τον D_x μόνο που όπου υπάρχει x αντικαθιστούμε με t. Συνεπώς, από τη σχέση (2.10) προκύπτουν τα παρακάτω

$$D_x A = A_x + u_x A_u \tag{3.8}$$

$$D_x^2 A = A_{xx} + u_x A_{xu} + u_x A_{xu} + u_x^2 A_{uu} + u_{xx} A_u = A_{xx} + 2u_x A_{xu} + u_x^2 A_{uu} + u_{xx} A_u \tag{3.9}$$

$$D_x^3 A = A_{xxx} + u_x A_{xxu} + 2\left(u_x A_{xxu} + u_x^2 A_{xuu} + u_{xx} A_{xu}\right) + u_x^2 A_{xuu} + u_x^3 A_{uuu} + 2u_x u_{xx} A_{uu} + u_{xx} A_{xu}$$
$$+ u_x u_{xx} A_{uu} + u_{xxx} A_u \Leftrightarrow$$

$$D_x^3 A = A_{xxx} + 3u_x A_{xxu} + 3u_x^2 A_{xuu} + 3u_{xx} A_{xu} + u_x^3 A_{uuu} + u_{xxx} A_u + 3u_x u_{xx} A_{uu} \tag{3.10}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.5), (3.6), (3.7) με τις (3.8), (3.9) και (3.10) η σχέση (3.4) γίνεται

$$\phi^{xxx} + \phi^t + u\phi^x + u_x\phi = \phi_{xxx} + 3u_x\phi_{xxu} + 3u_x^2\phi_{xuu} + 3u_{xx}\phi_{xu} + u_x^3\phi_{uuu} + u_{xxx}\phi_u + 3u_x u_{xx}\phi_{uu} - 3u_{xxx}\xi_x - 3u_{xxx}u_x\xi_u$$
$$- 3u_{xx}\xi_{xx} - 6u_x u_{xx}\xi_{xu} - 3u_{xx}u_x^2\xi_{uu} - 3u_{xx}^2\xi_u - u_x\xi_{xxx} - 3u_x^2\xi_{xxu} - 3u_x^3\xi_{xuu} - 3u_x u_{xx}\xi_{xu} - u_x^4\xi_{uuu} - u_x u_{xxx}\xi_u$$
$$- 3u_x^2 u_{xx}\xi_{uu} - 3u_{xxt}\tau_x - 3u_{xxt}u_x\tau_u - 3u_{xt}\tau_{xx} - 6u_x u_{xt}\tau_{xu} - 3u_{xt}u_x^2\tau_{uu} - 3u_{xt}u_{xx}\tau_u - u_x\tau_{xxx} - 3u_x^2\tau_{xxu} - 3u_x^3\tau_{xuu}$$
$$- 3u_x u_{xx}\tau_{xu} - u_x^4\tau_{uuu} - u_x u_{xxx}\tau_u - 3u_x^2 u_{xx}\tau_{uu} + \phi_t + u_t\phi_u - u_t\tau_t - u_t^2\tau_u - u_x\xi_t - u_x u_t\xi_u + u\phi_x + uu_x\phi_u$$
$$- uu_x\xi_x - uu_x^2\xi_u - uu_t\tau_x - uu_t u_x\tau_u + u_x\phi = 0$$

Αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση κάθε όρο που έχει το u_t με $-u_{xxx} - uu_x$, αξιοποιώντας την εξίσωση KdV (3.1), οπότε

$$\phi_{xxx} + 3u_x\phi_{xxu} + 3u_x^2\phi_{xuu} + 3u_{xx}\phi_{xu} + u_x^3\phi_{uuu} + u_{xxx}\phi_u + 3u_x u_{xx}\phi_{uu} - 3u_{xxx}\xi_x - 3u_{xxx}u_x\xi_u - 3u_{xx}\xi_{xx} - 6u_x u_{xx}\xi_{xu}$$
$$- 3u_{xx}u_x^2\xi_{uu} - 3u_{xx}^2\xi_u - u_x\xi_{xxx} - 3u_x^2\xi_{xxu} - 3u_x^3\xi_{xuu} - 3u_x u_{xx}\xi_{xu} - u_x^4\xi_{uuu} - u_x u_{xxx}\xi_u - 3u_x^2 u_{xx}\xi_{uu} - 3u_{xxt}\tau_x$$
$$- 3u_{xxt}u_x\tau_u - 3u_{xt}\tau_{xx} - 6u_x u_{xt}\tau_{xu} - 3u_{xt}u_x^2\tau_{uu} - 3u_{xt}u_{xx}\tau_u - u_x\tau_{xxx} - 3u_x^2\tau_{xxu} - 3u_x^3\tau_{xuu} - 3u_x u_{xx}\tau_{xu} - u_x^4\tau_{uuu}$$
$$- u_x u_{xxx}\tau_u - 3u_x^2 u_{xx}\tau_{uu} + \phi_t - u_{xxx}\phi_u - uu_x\phi_u + u_{xxx}\tau_t + uu_x\tau_t - u_{xxx}^2\tau_u - u^2u_x^2\tau_u - 2uu_x u_{xxx}\tau_u - u_x\xi_t$$
$$+ u_x u_{xxx}\xi_u + u_x^2 u\xi_u + u\phi_x + uu_x\phi_u - uu_x\xi_x - uu_x^2\xi_u + uu_{xxx}\tau_x + u^2u_x\tau_x + uu_{xxx}u_x\tau_u + u^2u_x^2\tau_u + u_x\phi = 0$$

(3.11)

Επειδή οι παράγωγοι της μεταβλητής u, που εμφανίζονται ως μονώνυμα της παραπάνω εξίσωσης, είναι ανεξάρτητες μεταβλητές στον jet-χώρο, αυτό έχει ως συνέπεια να μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις συνιστώσες τους με μηδέν. Έτσι, δημιουργούμε ένα σύνολο από διαφορικές εξισώσεις από τις οποίες θα υπολογίσουμε τις συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου. Αρχικά, θα κατασκευάσουμε έναν πίνακα που αντιστοιχεί τα μονώνυμα στις μηδενιζόμενες συνιστώσες τους.

Πίνακας 1

Αρίθμηση	Μονώνυμο	Συνιστώσα
(3.12)	1	$\phi_{xxx} + \phi_t + u\phi_x = 0$
(3.13)	u_x	$3\phi_{xxu} - \xi_{xxx} - \tau_{xxx} - u\phi_u + u\tau_t - \xi_t + u\phi_u - u\xi_x + u^2\tau_x + \phi = 0$
(3.14)	u_x^2	$3\phi_{xuu} - 3\xi_{xxu} - 3\tau_{xxu} = 0$

(3.15)	u_x^3	$\phi_{uuu} - 3\xi_{xuu} - 3\tau_{xuu} = 0$
(3.16)	u_x^4	$-\xi_{uuu} - \tau_{uuu} = 0$
(3.17)	u_{xx}	$3\phi_{xu} - 3\xi_{xx} = 0$
(3.18)	u_{xx}^2	$-3\xi_u = 0$
(3.19)	u_{xxx}	$\phi_u - 3\xi_x - \phi_u + \tau_t + u\tau_x = 0$
(3.20)	u_{xxx}^2	$-\tau_u = 0$
(3.21)	$u_x u_{xx}$	$3\phi_{uu} - 9\xi_{xu} - 3\tau_{xu} = 0$
(3.22)	$u_x^2 u_{xx}$	$-6\xi_{uu} - 3\tau_{uu} = 0$
(3.23)	$u_x u_{xxx}$	$-3\xi_u - \tau_u(1+u) = 0$
(3.24)	u_{xxt}	$-3\tau_x = 0$
(3.25)	$u_x u_{xxt}$	$-3\tau_u = 0$
(3.26)	u_{xt}	$-3\tau_{xx} = 0$
(3.27)	$u_x u_{xt}$	$-6\tau_{xu} = 0$
(3.28)	$u_x^2 u_{xt}$	$-3\tau_{uu} = 0$
(3.29)	$u_{xx} u_{xt}$	$-3\tau_u = 0$

Κάποιες από τις παραπάνω διαφορικές εξισώσεις φαίνεται πως είναι ίδιες, όπως για παράδειγμα η (3.20) και η (3.29). Ας ξεκινήσουμε με τις πιο απλές απ' αυτές για να δούμε τι πληροφορίες μπορούμε να πάρουμε για τις συνιστώσες φ, τ, ξ του διανυσματικού πεδίου(γεννήτορα της ομάδος συμμετρίας). Από την (3.24) θα έχουμε

$$\tau_x = 0 \Rightarrow \tau = \tau(t,u)$$

το οποίο συνεπάγεται λόγω της (3.25) ότι $\tau = \tau(t)$. Επίσης, από την (3.18) προκύπτει

$$\xi_u = 0 \Rightarrow \xi = \xi(x,t)$$

Συνεχίζοντας βρίσκουμε ότι

$$(3.19) \Rightarrow \tau_t = 3\xi_x [\&(3.24)] \Rightarrow \xi = \tfrac{1}{3}\tau_t x + \sigma(t)$$

Οπότε η $\xi = \xi(x,t)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς x και γι' αυτό το λόγο $\xi_{xx} = \xi_{xxx} = 0$. Λόγω όλων των παραπάνω

$$(3.17) \Rightarrow \phi_{xu} = 0 \Rightarrow \phi_x = \beta_1(x,t) \Rightarrow \phi = \int \beta_1(x,t)dx + a_1(t,u) \qquad (3.30)$$

$$(3.21) \Rightarrow \phi_{uu} = 0 \Rightarrow \phi_u = \beta_2(x,t) \Rightarrow \phi = \int \beta_2(x,t)dx + a_2(x,t) \qquad (3.31)$$

$$(3.30) \wedge (3.21) \Rightarrow \phi_{uu} = \frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(a_1(t,u)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u}\left(a_1(t,u)\right) = \beta(t) \Rightarrow a_1(t,u) = \beta(t)u + \gamma(t)$$

Οπότε $(3.30) \Rightarrow \phi = \mathrm{B}(x,t) + \beta(x,t)u + \gamma(t) = \beta(x,t)u + A(x,t)$ (3.32)
όπου $\mathrm{B}(x,t) = \int \beta_1(x,t)dx$ και $A(x,t) = \mathrm{B}(x,t) + \gamma(t)$.

$$(3.31) \Rightarrow \phi_x = \frac{\partial}{\partial x}(\beta_2(x,t))u + \frac{\partial}{\partial x}(a_2(x,t))[\&\ (3.17)] \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x}(\beta_2(x,t))[\&\ (3.21)] \Rightarrow \beta_2(x,t) = \beta(x,t)$$

Από το παραπάνω αποτέλεσμα θα έχουμε

$$(3.31) \Rightarrow \phi = \beta_2(t)u + a_2(x,t) \tag{3.33}$$

Τελικά προκύπτει από (3.32) και (3.33) ότι

$$\phi = \beta(t)u + a_2(x,t)$$

δηλαδή η φ είναι μια γραμμική συνάρτηση ως προς u.

Ας επανέλθουμε πάλι στην συνάρτηση $\tau = \tau(t)$, υπολογίζοντάς την από την (3.19),

$$(3.19) \Rightarrow \tau = 3\xi_x t + \kappa(x) \Rightarrow \tau_x = 3\xi_{xx}t + \kappa'(x)$$

Επειδή $\tau_x = 0$ και $\xi_{xx} = 0$ η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\kappa'(x) = 0 \Rightarrow \kappa(x) = \kappa = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Άρα $\tau = 3\xi_x t + \kappa$ και αν προχωρήσουμε ακόμα λίγο χρησιμοποιώντας και πάλι την (3.19) θα προκύψει

$$\tau = \tau_t t + \kappa \Rightarrow \frac{\tau - \kappa}{t} = \frac{d\tau}{dt} \Rightarrow \frac{dt}{t} = \frac{d\tau}{\tau - \kappa} \Rightarrow \frac{d(\tau - \kappa)}{\tau - \kappa} = \frac{dt}{t} \Rightarrow \ln(\tau - \kappa) = \ln t + \ln c \Rightarrow \ln(\tau - \kappa) = \ln(ct)$$
$$\Rightarrow \tau - \kappa = ct \Rightarrow \tau = ct + \kappa \Rightarrow \tau_t = c = \sigma\tau\alpha\theta.$$

Αν τώρα $\tau_t = c$ τότε $3\xi_x = c$, οπότε από προηγούμενη εξίσωση για το $\xi = \xi(x,t)$ έχουμε

$$\xi = \tfrac{1}{3}cx + \sigma(t) \quad \text{και} \quad \tau = ct + \kappa = ct + c_2$$

Θέτοντας $c_4 = \frac{1}{3}c$ (η σταθερά συμβολίζεται έτσι, αντίστοιχα και το κ, για λόγους που θα γίνουν αργότερα γνωστοί) οι συνιστώσες του διανυσματικού μας πεδίου είναι

$$\xi = \sigma(t) + c_4 x$$

$$\tau = c_2 + 3c_4 t$$

$$\phi = \beta(t)u + a_2(x,t)$$

Στη συνέχεια, αξιοποιώντας την (3.13) και γνωρίζοντας τις παραπάνω μορφές των συνιστωσών του διανυσματικού πεδίου θα έχουμε

$$(3.13) \Rightarrow \phi = \xi_t + u(\xi_x - \tau_t) \Rightarrow \phi = \sigma'(t) + u(c_4 - 3c_4) = \sigma'(t) - 2c_4 u$$

Σε συνδυασμό με τη μορφή του φ που βρήκαμε προηγουμένως, διαπιστώνουμε ότι

$$\sigma'(t) = a_2(x,t) \quad \text{και} \quad \beta(t) = -2c_4$$

Οπότε από την (3.12), αφού $\phi_x = \phi_{xxx} = 0$, προκύπτει:

$$\phi_t = 0 = \sigma''(t) \Rightarrow \sigma'(t) = c_3 \Rightarrow \sigma(t) = c_3 t + c_1$$

Τελικά για τις συνιστώσες του γεννήτορα της ομάδας συμμετρίας που ψάχνουμε, βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x,t) = c_1 + c_3 t + c_4 x \\ \tau &= \tau(t) = c_2 + 3c_4 t \\ \phi &= \phi(u) = c_3 - 2c_4 u \end{aligned} \tag{3.34}$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας τις (3.12) στην (3.2) θα έχουμε για το διανυσματικό πεδίο:

$$\begin{aligned} &\mathbf{v} = \xi(x,t)\partial_x + \tau(t)\partial_t + \phi(u)\partial_u = (c_1 + c_3 t + c_4 x)\partial_x + (c_2 + 3c_4 t)\partial_t + (c_3 - 2c_4 u)\partial_u \\ &\Leftrightarrow \mathbf{v} = c_1(\partial_x) + c_2(\partial_t) + c_3(t\partial_x + \partial_u) + c_4(x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u) \end{aligned} \tag{3.35}$$

όπου c_1, c_2, c_3, c_4 είναι αυθαίρετες σταθερές.

Παρατηρούμε πως το διανυσματικό πεδίο έχει τη μορφή

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + c_3\mathbf{v_3} + c_4\mathbf{v_4} \tag{3.36}$$

Αυτό σημαίνει πως είναι γραμμικός συνδυασμός των $\mathbf{v_i}$, i = 1,…,4, που αποτελούν μια βάση στον εφαπτόμενο χώρο του $M = X \times T \times U \subseteq \Re^3$. Ο χώρος Μ είναι το πεδίο ορισμού της εξίσωσης KdV. Συνεπώς, τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανυσματικά πεδία είναι τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} &(\alpha) \rightarrow \mathbf{v_1} = \partial_x \qquad (\gamma) \rightarrow \mathbf{v_3} = t\partial_x + \partial_u \\ &(\beta) \rightarrow \mathbf{v_2} = \partial_t \qquad (\delta) \rightarrow \mathbf{v_4} = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u \end{aligned} \tag{3.37}$$

Τα τέσσερα αυτά διανυσματικά πεδία σχηματίζουν την άλγεβρα της ομάδος συμμετρίας της εξίσωσης KdV. Κάθε ένας από τους παραπάνω γεννήτορες καθορίζει και ένα μετασχηματισμό πάνω στις λύσεις της εξίσωσης KdV, με σκοπό να μετασχηματίζονται σε άλλες λύσεις. Το $\mathbf{v_1}$ ορίζει χωρικές μεταθέσεις ενώ το $\mathbf{v_2}$ χρονικές. Επίσης, το $\mathbf{v_3}$ είναι ένας μετασχηματισμός τύπου μετασχηματισμού Γαλιλαίου και το $\mathbf{v_4}$ είναι ένας μετασχηματισμός βαθμίδας. Θα δείξουμε αργότερα την αναπαράσταση αυτών των μετασχηματισμών πάνω στις λύσεις της εξίσωσης KdV. Τώρα θα κατασκευάσουμε τον πίνακα στον οποίο υπολογίζουμε την αγκύλη Lie ανάμεσα στους γεννήτορες $\mathbf{v_i}$.

Όπως φαίνεται από τις ιδιότητες της αγκύλης Lie τα διαγώνια στοιχεία του πίνακα θα είναι μηδέν. Για τα υπόλοιπα θα αξιοποιήσουμε την ιδιότητα της αντισυμμετρικότητας της αγκύλης Lie, οπότε αρκεί να βρούμε τα παρακάτω:

$$[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2],[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3],[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4],[\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3],[\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4],[\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4]$$

Για να κάνουμε τις πράξεις θα χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση της μορφής $f = f(x,t,u)$, οπότε για τις παραπάνω αγκύλες Lie θα έχουμε:

$$[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2](f)=(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2\mathbf{v}_1)(f)=\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_2 f)-\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_1 f)=\partial_x(\partial_t f)-\partial_t(\partial_x f)=\partial_x(f_t)-\partial_t(f_x)$$
$$=f_{tx}-f_{xt}=0\cdot(f)$$

$$[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_3](f)=(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_3-\mathbf{v}_3\mathbf{v}_1)(f)=\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_3 f)-\mathbf{v}_3(\mathbf{v}_1 f)=\partial_x[(t\partial_x+\partial_u)(f)]-(t\partial_x+\partial_u)(\partial_x f)$$
$$=\partial_x(tf_x+f_u)-(t\partial_x+\partial_u)(f_x)=tf_{xx}+f_{ux}-tf_{xx}-f_{xu}=0\cdot(f)$$

$$[\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_4](f)=(\mathbf{v}_1\mathbf{v}_4-\mathbf{v}_4\mathbf{v}_1)(f)=\mathbf{v}_1(\mathbf{v}_4 f)-\mathbf{v}_4(\mathbf{v}_1 f)=\partial_x[(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(f)]$$
$$-(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(\partial_x f)=\partial_x(xf_x+3tf_t-2uf_u)-(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(f_x)=f_x+xf_{xx}+3tf_{tx}$$
$$-2uf_{ux}-xf_{xx}-3tf_{xt}+2uf_{xu}=f_x+x(f_{xx}-f_{xx})+3t(f_{tx}-f_{xt})-2u(f_{ux}-f_{xu})=f_x=\partial_x(f)=(\mathbf{v}_1)(f)$$

$$[\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3](f)=\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_3 f)-\mathbf{v}_3(\mathbf{v}_2 f)=\partial_t[(t\partial_x+\partial_u)(f)]-(t\partial_x+\partial_u)(\partial_t f)=\partial_t(tf_x+f_u)-(t\partial_x+\partial_u)(f_t)$$
$$=f_x+tf_{xt}+f_{ut}-tf_{tx}-f_{tu}=f_x+t(f_{xt}-f_{tx})+f_{ut}-f_{tu}=f_x=\partial_x(f)=(\mathbf{v}_1)(f)$$

$$[\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_4](f)=\mathbf{v}_2(\mathbf{v}_4 f)-\mathbf{v}_4(\mathbf{v}_2 f)=\partial_t[(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(f)]-(x\partial_x+3t\partial_u-2u\partial_u)(\partial_t f)$$
$$=\partial_t(xf_x+3tf_t-2uf_u)-(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(f_t)=xf_{xt}+3f_t+3tf_{tt}-2uf_{ut}-xf_{tx}-3tf_{tt}+2uf_{tu}$$
$$=3f_t+x(f_{xt}-f_{tx})+3t(f_{tt}-f_{tt})-2u(f_{ut}-f_{tu})=3f_t=3\partial_t(f)=(3\mathbf{v}_2)(f)$$

$$[\mathbf{v}_3,\mathbf{v}_4](f)=\mathbf{v}_3(\mathbf{v}_4 f)-\mathbf{v}_4(\mathbf{v}_3 f)=(t\partial_x+\partial_u)[(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(f)]-(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)[(t\partial_x+\partial_u)(f)]$$
$$=(t\partial_x+\partial_u)(xf_x+3tf_t-2uf_u)-(x\partial_x+3t\partial_t-2u\partial_u)(tf_x+f_u)=tf_x+txf_{xx}+3t^2f_{tx}-2utf_{ux}+xf_{xu}+3tf_{tu}$$
$$-2f_u-2uf_{uu}-xtf_{xx}-xf_{ux}-3tf_x-3t^2f_{xt}-3tf_{ut}+2uf_{uu}+2utf_{xu}=xt(f_{xx}-f_{xx})+3t^2(f_{tx}-f_{xt})$$
$$-2ut(f_{ux}-f_{xu})+x(f_{xu}-f_{ux})+3t(f_{tu}-f_{ut})-2(f_u)-2u(f_{uu}-f_{uu})-3tf_x+tf_x=-2tf_x-2f_u$$
$$=-2(t\partial_x+\partial_u)(f)=(-2\mathbf{v}_3)(f)$$

Επομένως ο πίνακας των αγκυλών Lie είναι:

Πίνακας 2

	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_3$	$\mathbf{v}_4$
$\mathbf{v}_1$	0	0	0	$\mathbf{v}_1$
$\mathbf{v}_2$	0	0	$\mathbf{v}_1$	$3\mathbf{v}_2$
$\mathbf{v}_3$	0	$-\mathbf{v}_1$	0	$-2\mathbf{v}_3$
$\mathbf{v}_4$	$\mathbf{v}_1$	$2\mathbf{v}_3$	$2\mathbf{v}_3$	0

Παρατηρούμε από τον προηγούμενο πίνακα πως τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{v}_i$, i = 1,…,4, ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$\left[\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\right] = \sum_{k=1}^{4} c_{ij}^{k} \mathbf{v}_k \,, \quad i, j = 1,...,4$$

Οι σταθερές δομής της άλγεβρας Lie είναι, στην περίπτωσή μας, πραγματικοί αριθμοί και δίνονται παρακάτω:

$$c_{14}^{1} = c_{23}^{1} = 1\,,\ c_{24}^{2} = 3\,,\ c_{34}^{3} = -2$$

Όλες οι υπόλοιπες είναι μηδέν και φυσικά ισχύει: $c_{ij}^{k} = -c_{ji}^{k}$ για τα κάτω διαγώνια στοιχεία του πίνακα.

Για μια περισσότερο φυσική ερμηνεία των παραπάνω αποτελεσμάτων, αρκεί να δούμε κάποιες από τις παραπάνω σχέσεις για τις αγκύλες Lie. Για παράδειγμα, η σχέση $\left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\right] = 0$ μας λέει πως αν μετατοπίσουμε χωρικά και στη συνέχεια χρονικά το σύστημα που περιγράφεται από τη συνάρτηση-λύση της KdV τότε το αποτέλεσμα θα είναι ίδιο με το να μετατοπιστεί πρώτα χρονικά και έπειτα χωρικά. Αυτό δηλώνει πως δεν έχει σημασία ποιον μετασχηματισμό θα κάνω πρώτο, αρκεί βέβαια να γίνουν και οι δύο. Έτσι, συμπεραίνουμε πως ο ένας μετασχηματισμός δεν επιρρεάζει τον άλλο. Το ίδιο ισχύει και για την χωρική μετατόπιση που "γεννάται" απ' το $\mathbf{v}_1$ με τον μετασχηματισμό Γαλιλαίου που δημιουργείται απ' το $\mathbf{v}_3$ αφού $\left[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\right] = 0$. Όμως, δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο πράγμα και για τη σχέση $\left[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right] = \mathbf{v}_1$. Ας την αναλύσουμε για να την περιγράψουμε καλύτερα.

$$\left[\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\right] = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \Rightarrow \mathbf{v}_2\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$$

Η παραπάνω σχέση μας λέει πως αν δράσουμε πρώτα με ένα μετασχηματισμό Γαλιλαίου και μετά κάνουμε μια χρονική μετατόπιση του συστήματός μας τότε αυτό ισοδυναμεί με χρονική μετατόπιση του συστήματος, στη συνέχεια δράση με μετασχηματισμό Γαλιλαίου και ταυτόχρονη χωρική μετατόπιση. Βλέπουμε πως εδώ μετράει ποιος μετασχηματισμός θα γίνει πρώτος.

Ουσιαστικά η δράση της ομάδος πάνω στις λύσεις του συστήματος δεν γίνεται από τα διανυσματικά πεδία αλλά από την ομάδα μετασχηματισμού που "γεννούν", που στην περίπτωσή μας είναι ομάδα συμμετρίας. Η εκθετοποιήση των παραπάνω διανυσματικών πεδίων θα μας δώσει την μονοπαραμετρική ομάδα συμμετρίας για της οποίας τη δράση μιλούσαμε πριν από λίγο αναφερόμενοι στις αγκύλες Lie.

Με τοπικές συντεταγμένες τις x, t, και u, οι συνιστώσες του καθενός από τα παραπάνω διανυσματικά πεδία που βρήκαμε θα πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (1.3). Έτσι, για κάθε διανυσματικό πεδίο το σύστημα (1.3) γράφεται ως εξής:

(α) Το διανυσματικό πεδίο είναι το $\mathbf{v}_1 = \partial_x$, οπότε

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = 1 \qquad x = \varepsilon + x_0 \qquad x' = \varepsilon + x \qquad x = x' - \varepsilon \qquad x \to x - \varepsilon$$

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_0 \quad \Rightarrow \quad t' = t \quad \Rightarrow \quad t = t' \quad \Rightarrow \quad t \to t$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = 0 \qquad u = u_0 \qquad u' = u \qquad u = u' \qquad u \to u$$

(β) Όταν διανυσματικό πεδίο είναι το $\mathbf{v}_2 = \partial_t$, έχουμε

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = 0 \qquad x = x_0 \qquad x' = x \qquad x = x' \qquad x \to x$$

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \varepsilon + t_0 \quad \Rightarrow \quad t' = \varepsilon + t \quad \Rightarrow \quad t = t' - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad t \to t - \varepsilon$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = 0 \qquad u = u_0 \qquad u' = u \qquad u = u' \qquad u \to u$$

(γ) Για το $\mathbf{v}_3 = t\partial_x + \partial_u$ προκύπτει

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = t \qquad x = \varepsilon t + x_0 \qquad x' = \varepsilon t + x \qquad x = x' - \varepsilon t \qquad x \to x - \varepsilon t$$

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_0 \quad \Rightarrow \quad t' = t \quad \Rightarrow \quad t = t' \quad \Rightarrow \quad t \to t$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = 1 \qquad u = \varepsilon + u_0 \qquad u' = \varepsilon + u \qquad u + \varepsilon = u' \qquad u \to u + \varepsilon$$

(δ) Τέλος, το $\mathbf{v}_4 = x\partial_x + 3t\partial_t - 2u\partial_u$ είναι

$$\frac{dx}{d\varepsilon} = x \qquad \ln x = \varepsilon + c_1 \qquad x = e^{\varepsilon + c_1} \qquad x = e^{\varepsilon} x_0$$

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = 3t \quad \Rightarrow \quad \ln t = 3\varepsilon + c_2 \quad \Rightarrow \quad t = e^{3\varepsilon + c_2} \quad \Rightarrow \quad t = e^{3\varepsilon} t_0$$

$$\frac{du}{d\varepsilon} = -2u \qquad \ln u = -2\varepsilon + c_3 \qquad u = e^{-2\varepsilon + c_3} \qquad u = e^{-2\varepsilon} u_0$$

$$x' = e^{\varepsilon} x \qquad x = e^{-\varepsilon} x' \qquad x \to e^{-\varepsilon} x$$

$$\Rightarrow \quad t' = e^{3\varepsilon} t \quad \Rightarrow \quad t = e^{-3\varepsilon} t' \quad \Rightarrow \quad t \to e^{-3\varepsilon} t$$

$$u' = e^{-2\varepsilon} u \qquad e^{-2\varepsilon} u = u' \qquad u \to e^{-2\varepsilon} u$$

Στις περιπτώσεις (γ) και (δ) η συνάρτηση u΄ αναπαριστά τη μετασχηματισμένη συνάρτηση ως προς τις μεταβλητές x και t (ανεξάρτητες μεταβλητές).

Συνεπώς, η εκθετοποίηση μας δείχνει πως αν η συνάρτηση $u = f(x,t)$ είναι λύση της εξίσωσης KdV, τότε το ίδιο ισχύει και για τις

$$u^{(\alpha)} = f(x - \varepsilon, t),$$

$$u^{(\beta)} = f(x, t - \varepsilon),$$

$$u^{(\gamma)} = f(x - \varepsilon t, t) + \varepsilon,$$

$$u^{(\delta)} = e^{-2\varepsilon} f(e^{-\varepsilon} x, e^{-3\varepsilon} t).$$

όπου $\varepsilon \in \Re$. Η μεταβλητή ε είναι παράμετρος της μονοπαραμετρικής ομάδας μετασχηματισμών και οι παραπάνω συναρτήσεις είναι αποτέλεσμα της πράξης $g_\varepsilon \cdot x$ που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 1, όπου g_ε στοιχείο της συνεχούς ομάδος συμμετρίας και x είναι οι (x, t, u) που ορίζονται στη διαφορίσιμη πολλαπλότητα $M = X \times T \times U$.

Οι συμμετρίες που βρήκαμε για την εξίσωση KdV είναι λίγες σε σχέση με αυτές που μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τη θεωρία των γενικευμένων συμμετριών. Παρόλα αυτά η μέθοδος είναι ίδια και σ’ εκείνη την περίπτωση, με ορισμένες αλλαγές σε κάποια σημεία.

Η αξία αυτής της μεθόδου έγκειται στο ότι χωρίς να λύσουμε το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων που περιγράφουν ένα φυσικό σύστημα, μπορούμε να βρούμε ιδιότητες που πρέπει να έχουν οι λύσεις αυτού. Έτσι, αν βρούμε μια μερική λύση μπορούμε να δράσουμε με τα στοιχεία της ομάδος συμμετρίας και να βρούμε και άλλη λύση. Βέβαια, δεν μπορούμε σε όλες τις περιπτώσεις να βρούμε όλες τις δυνατές λύσεις ενός συστήματος με συτόν τον τρόπο.

Εν κατακλείδι, η έννοια της συμμετρίας εμφανίζεται σε πολλά φαινόμενα, γι’ αυτό η μέθοδος που παρουσιάσαμε σε αυτήν την εργασία έχει ενδιαφέρον, μιας και αποτελεί ένα συστηματικό τρόπο εύρεσης συμμετριών.

<u>Βιβλιογραφία</u>

Olver, Peter J.
Applications of Lie Groups to Differential Equations, Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1986.