Προσομοίωση Υδροδυναμικής με Κυψελικά Αυτόματα

Ευάγγελος Σιμήνος

Επιβλέπων Καθηγητής:

Λουκάς Βλάχος

- Μηχανική των Ρευστών
- Κυψελικά Αυτόματα
- Lattice Gas
- Διάχυση Ιχνηθετών
- Παραδείγματα

Οι εξισώσεις Navier-Stokes για τα ασυμπίεστα ρευστά

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}$$

Απαλείφουμε την πίεση:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \mathbf{\Omega}$$

όπου $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{u}$

Κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών:

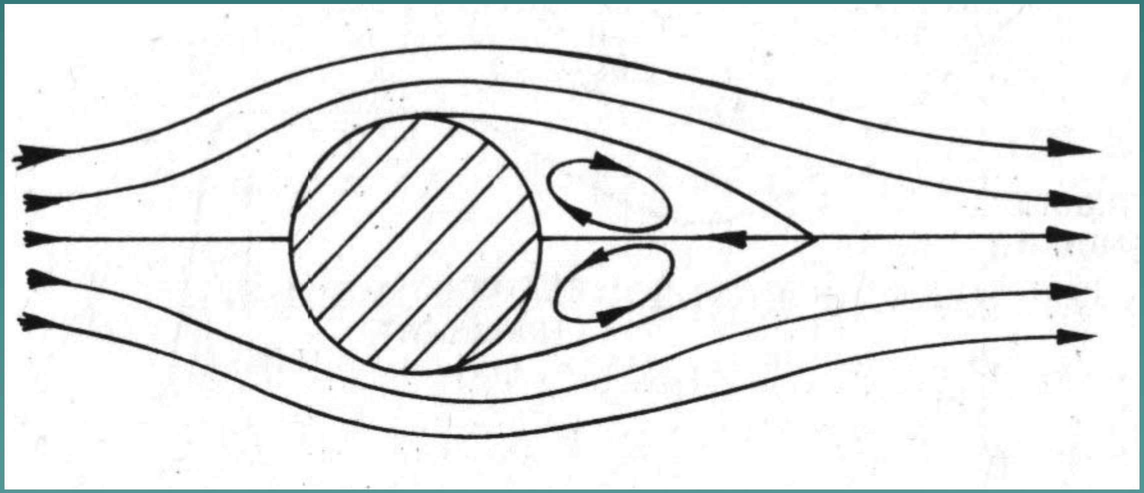
$$u' = \frac{u}{V} \qquad x' = \frac{x}{L}$$

και άρα :

$$t' = \frac{t}{L/V}$$

όπου L και V χαρακτηριστικές κλίμακες μήκους της ροής

Χαρακτηριστικές Ποσότητες



Η εξίσωση Navier-Stokes γράφεται:

$$\frac{\partial \mathbf{\Omega}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{u}) = \frac{1}{R} \nabla^2 \mathbf{\Omega} \mathbf{\Omega}$$

όπου $R = \frac{VL}{\nu}$

- Η αδιάστατη παράμετρος R ονομάζεται αριθμός *Reynolds*.
- *Αρχή της Ομοιότητας*: Δυο ροές με ίσα R είναι όμοιες (για τις ίδιες οριακές συνθήκες)

Αυτόματο

- Δυναμικό σύστημα το οποίο
  - Μπορεί να υπάρξει σε διακριτές καταστάσεις
  - Εξελίσσεται σε διακριτά βήματα χρόνου σύμφωνα με έναν ορισμένο κανόνα

Κυψελικό Αυτόματο

- Μια συλλογή από αυτόματα σε διακριτό χώρο
- Κάθε αυτόματο εξελίσσεται με βάση την κατάσταση του και την κατάσταση των γειτόνων του

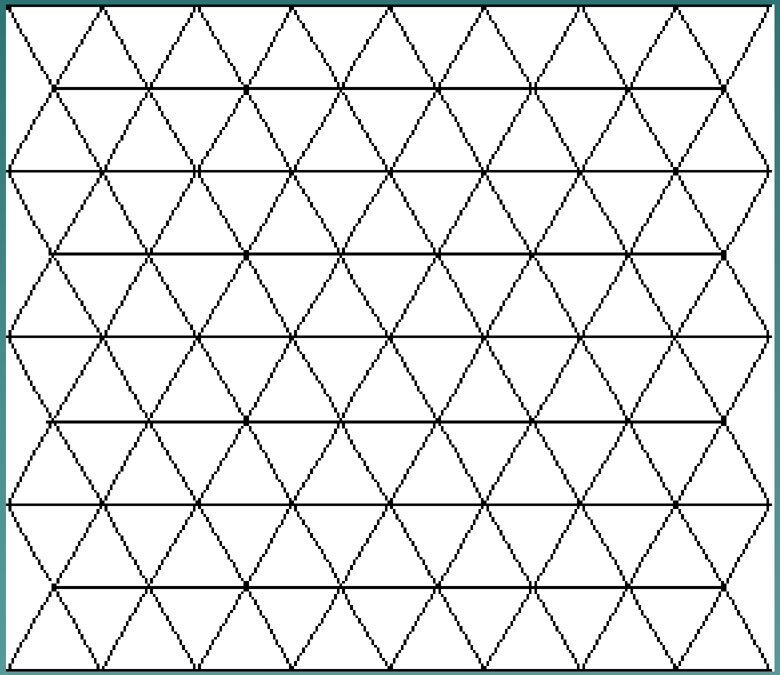
Lattice Gas

- Ρευστό αποτελούμενο από σωματίδια που κινούνται σε ένα πλέγμα
- Σε κάθε κόμβο του πλέγματος βρίσκεται ένας πεπερασμένος αριθμός σωματιδίων
- Διακριτός
  - χώρος
  - χρόνος
  - ορμή
- Υπό ορισμένες συνθήκες τα σωματίδια που βρίσκονται ταυτόχρονα σε έναν κόμβο μπορεί να συγκρουστούν και να αλλάξει η κατεύθυνση κίνησης τους

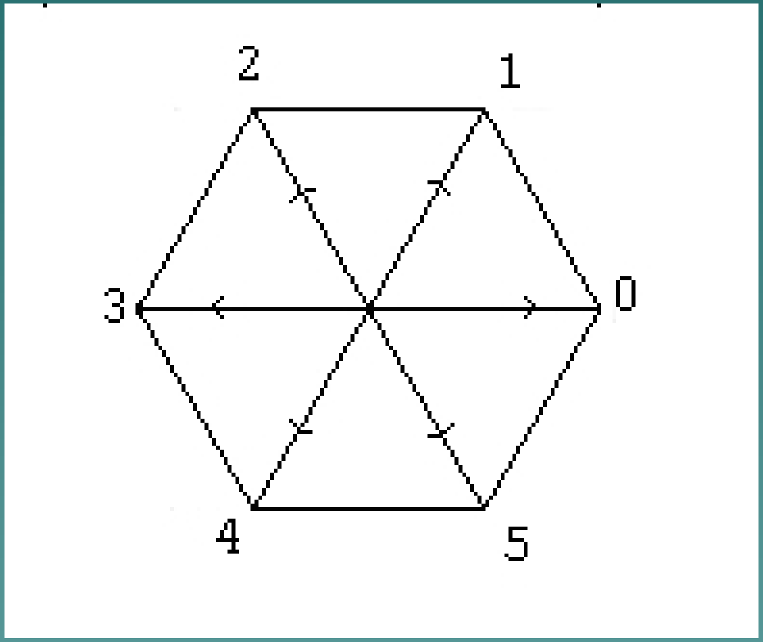
Το μοντέλο FHP

- Τριγωνικό πλέγμα
- Έξι διευθύνσεις ταχύτητας
- Μοναδιαία μάζα, ταχύτητα, βήμα χρόνου
- Απαγορευτική Αρχή: Μόνο ένα σωματίδιο με ταχύτητα σε δεδομένη διεύθυνση επιτρέπεται να βρεθεί σε κάθε κόμβο του πλέγματος
- Κρούσεις κατά τις οποίες διατηρείται η μάζα και η ορμή

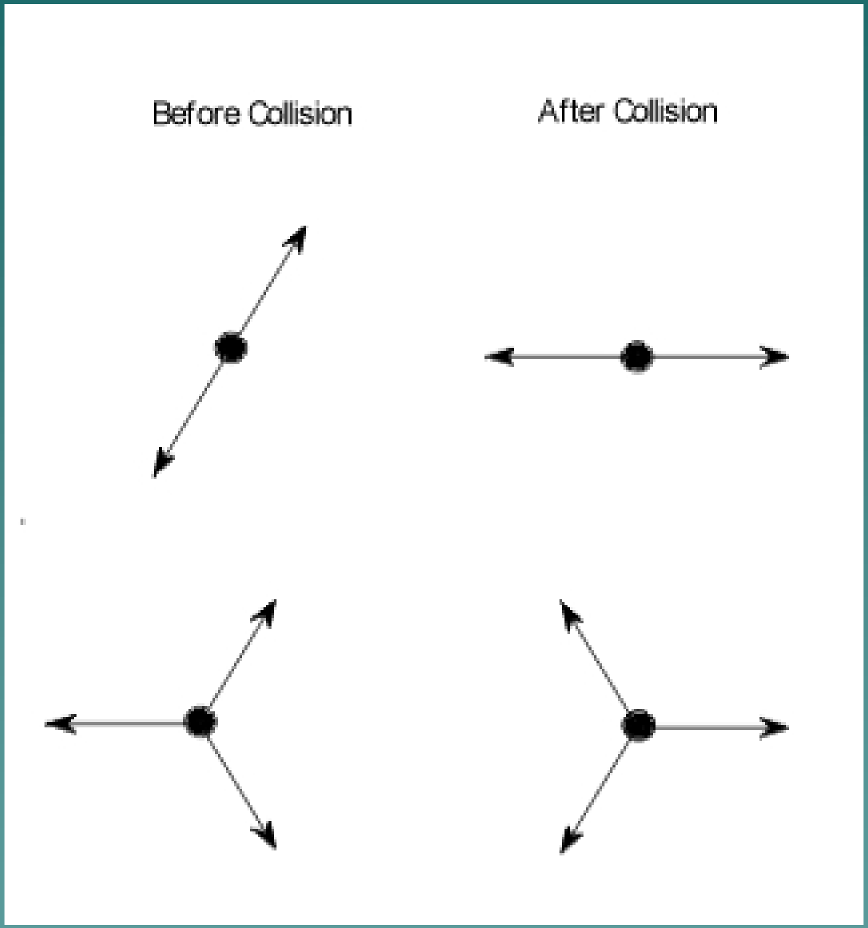
The lattice



Directions



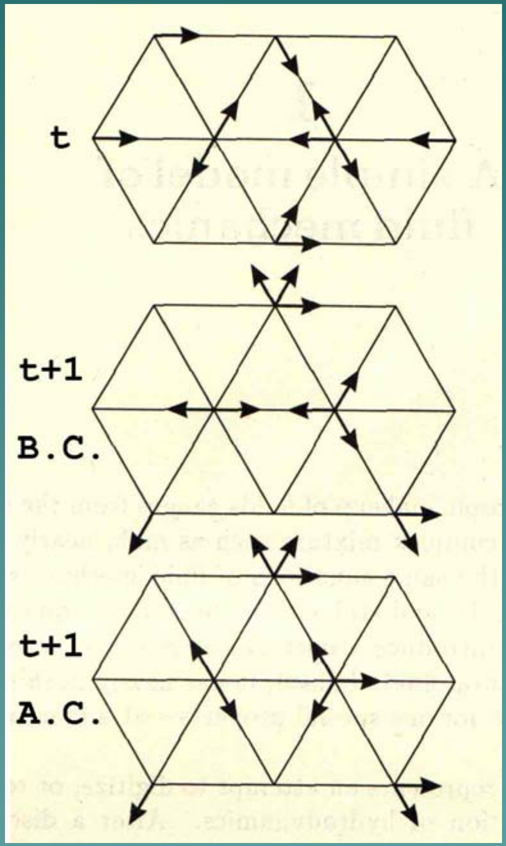
Collision Examples



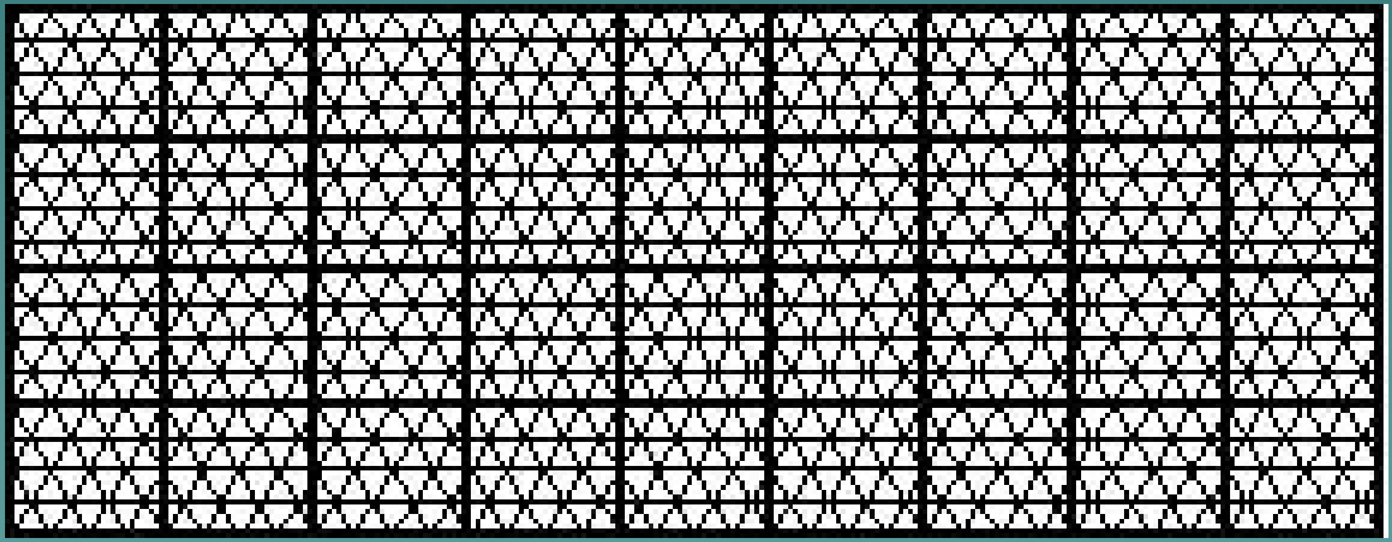
Χρονική εξέλιξη

- Σε κάθε βήμα χρόνου
  - Μετακίνηση
  - Σύγκρουση

Evolution sample



Μακροπλέγμα επί του μικροπλέγματος



Μικροδυναμική

- Μικροδυναμική του μοντέλου:
  - Boolean Μεταβλητές n_i
  - Εξισώσεις που περιγράφουν την χρονική εξέλιξη κάθε κόμβου του πλέγματος

$$n_i(\mathbf{x}+\mathbf{c}_i, t+1) = n_i(\mathbf{x}, t) + \Delta_i(\mathbf{n}(\mathbf{x}, t))$$

Διατήρηση μάζας: $\sum_i \Delta_i(\mathbf{n}) = 0$

Διατήρηση ορμής: $\sum_i \mathbf{c}_i \Delta_i(\mathbf{n}) = 0$

Μακροδυναμική:

- Πυκνότητα μάζας:

$$\rho = \sum_i \langle n_i \rangle$$

- Πυκνότητα ορμής

$$\rho u_\alpha = \sum_i \langle n_i \rangle c_{i\alpha}$$

Εξισώσεις για την μεταβολή των μακροσκοπικών μεγεθών

- Εξίσωση της συνέχειας:

$$\partial_t \sum_i \langle n_i \rangle = -\partial_\alpha \sum_i \langle n_i \rangle c_{i\alpha}$$

ή

$$\partial_t \rho = -\partial_\alpha (\rho u_\alpha)$$

- Διατήρηση της ορμής:

$$\partial_t \sum_i \langle n_i \rangle c_{i\alpha} = -\partial_\beta \sum_i \langle n_i \rangle c_{i\alpha} c_{i\beta}$$

ή

$$\partial_t (\rho u_\alpha) = -\partial_\beta \Pi^{(0)}_{\alpha\beta}$$

όπου $\Pi^{(0)}_{\alpha\beta} = \sum_i \langle n_i \rangle c_{i\alpha} c_{i\beta}$

Στατιστική Μηχανική του μοντέλου

- Chapman-Enskog Expansion → Εξισώσεις Navier-Stokes
- Τριγωνικό πλέγμα → Ισοτροπία
- Η αρχή της ομοιότητας επιτρέπει την προσομοίωση μιας πραγματικής ροής από ένα lattice gas

Παραδείγματα

Why Lattice Gas?

- Αντιμετωπίζεται με τη βοήθεια της στατιστικής μηχανικής.
- Η πίεση και ο συντελεστής ιξώδους μπορούν να βρεθούν ως συναρτήσεις της πυκνότητας και να συσχετιστούν με τη μικροδυναμική του μοντέλου.
- Παρουσιάζει ενδογενείς στατιστικές διακυμάνσεις της ίδιας φύσης με τις διακυμάνσεις στα πραγματικά ρευστά
- Υπολογιστικά πλεονεκτήματα

Μελέτη Ιχνηθετών

- Σωματίδια που ακολουθούν τη ροή
- Κινούνται με την μέση ταχύτητα του πεδίου
- Παρακολουθούμε τη διάχυση τους
- Εξίσωση διάχυσης:

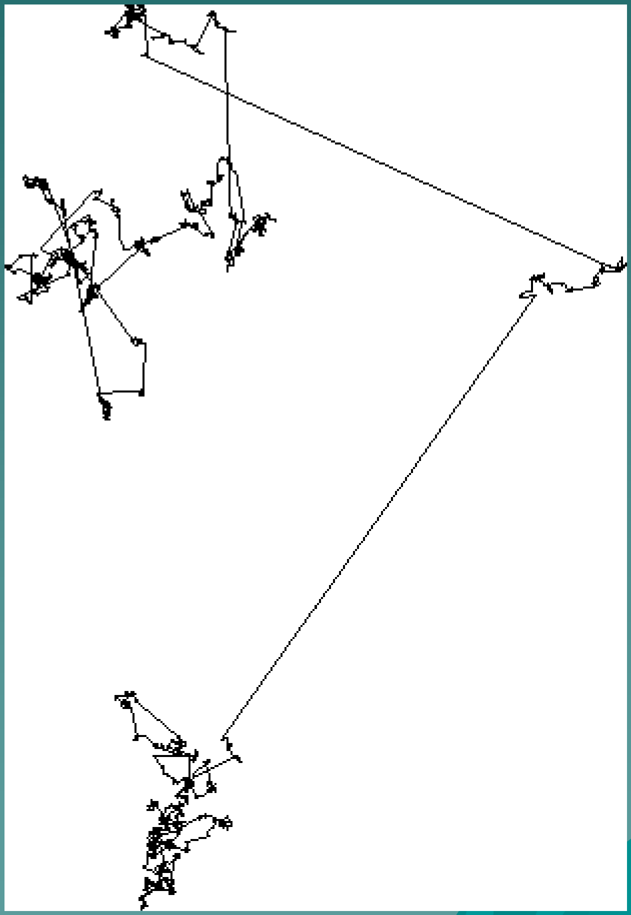
$$\sigma^2 = \left\langle r^2(t) \right\rangle - \left\langle r(t) \right\rangle^2 = 2Dt^{\gamma}$$

Η τιμή του γ καθορίζει το είδος της διάχυσης:

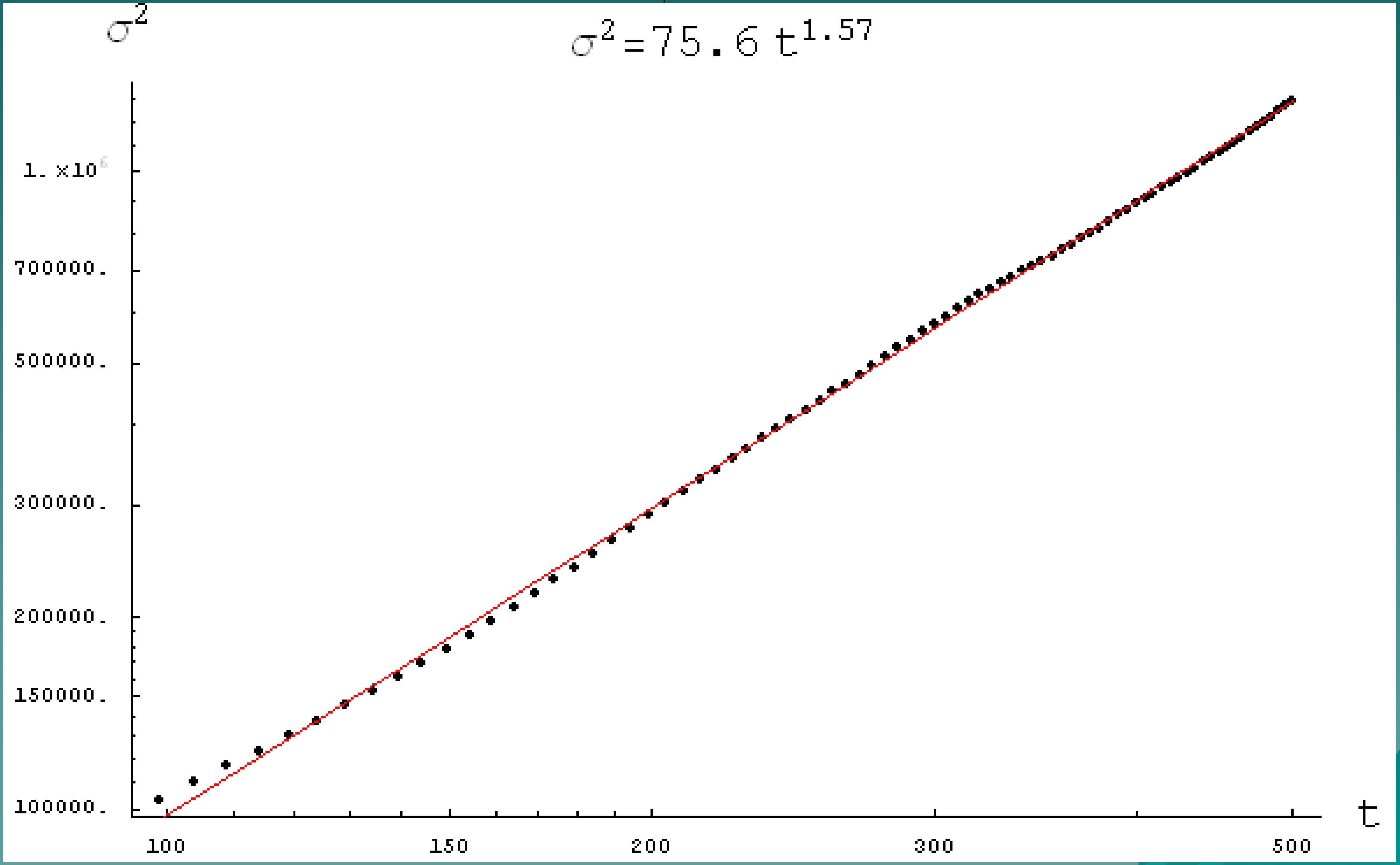
- $\gamma=1$: Κανονική διάχυση
- $0<\gamma<1$: Subdiffusion
- $1<\gamma<2$: Superdiffusion

Random Walk
Random Walk

Lévy Flight
Lévy Flight



superdiffusion



Συμπεραίνουμε:

- Η κίνηση είναι Lévy Flight
- Προκαλείται λόγω της δομής του πεδίου ταχυτήτων
- Τα σωματίδια «σταματούν» στην περιοχή των στροβίλων και εκτελούν «πτήσεις» μέχρι να ξανασυναντήσουν ένα στρόβιλο