

# ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΣΟΜΕΙΩΣΕΙΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΡΡΕΥΣΗΣ

Ταξίδης Γιάννης

27/05/2005

Επιβλέποντες καθηγητές :

**Åke Nordlund**

Copenhagen University  
(Δανία)

**Λουκάς Βλάχος**

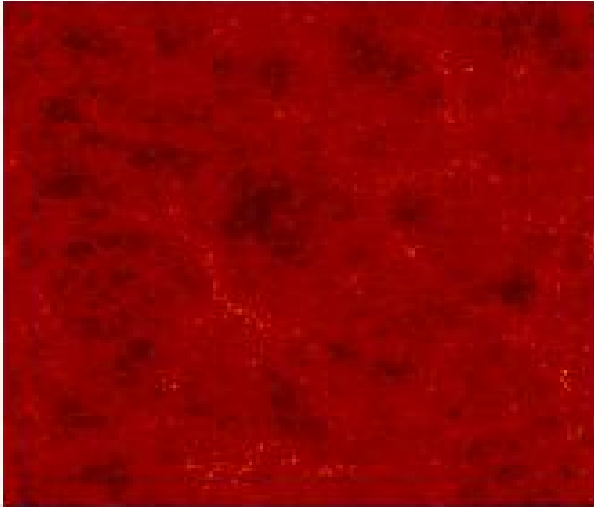
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο  
Θεσσαλονίκης

# Περιεχόμενα

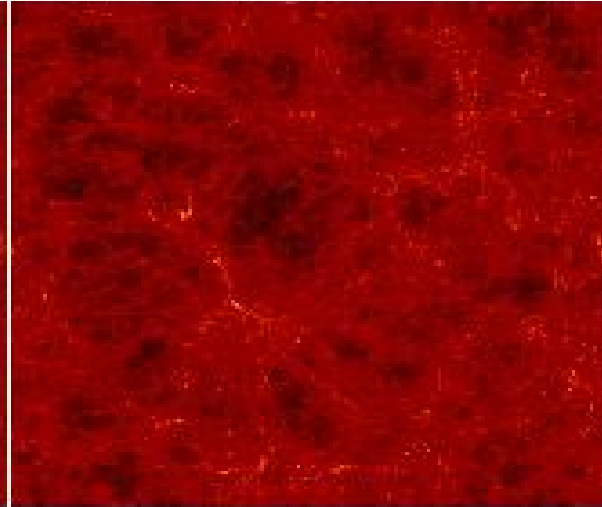
- ▶ Λίγα λόγια για την βαρυτική κατάρρευση
- ▶ Στόχοι της έρευνας μας
- ▶ Θεωρητική ανάλυση
- ▶ Πειράματα
- ▶ Αποτελέσματα πειραμάτων και σύγκριση με τη θεωρία
- ▶ Συμπεράσματα

# Βαρυτική Κατάρρευση

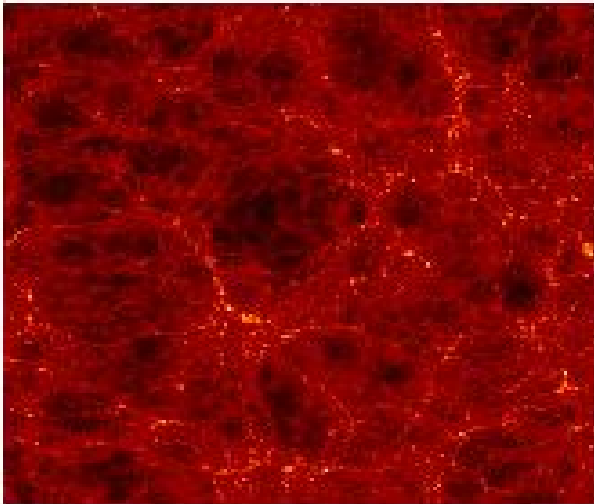
$t=0$



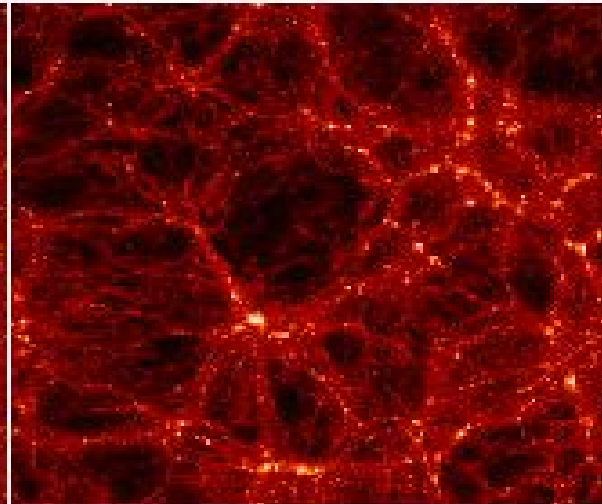
$t=2$



$t=1$



$t=0$



# ΣΤΟΧΟΙ

- Θέλουμε να ελέγξουμε αν οι υπάρχουσες θεωρίες που βασίζονται σε αναλυτικά επιχειρήματα και σε 1-D ή 2-D πειράματα, ισχύουν και σε 3-D πειράματα.
- Αν όχι, ποιες είναι οι διαφορές; Πού μπορεί να οφείλονται; Ποιοι σημαντικοί παράγοντες έχουν παραλειφθεί;
- Θέλουμε να μελετήσουμε το πρόβλημα της ανακατανομής της στροφορμής. Πόση στροφορμή μεταφέρεται προς τα έξω; Πόση μάζα «ξοδεύεται» για να φέρει την αρχική στροφορμή;
- Πώς αλλάζουν οι διαδικασίες της κατάρρευσης όταν μεταβαίνουμε σε όλο και πιο πολύπλοκες συνθήκες;

# Πειράματα

## ❖ Πείραμα χωρίς περιστροφή

- Κεντρικά συμπυκνωμένο νέφος (singular isothermal sphere)  
Εφαρμογή ενός κεντρικού sink-cell
- Το ίδιο πείραμα χωρίς sink – cell.

## ❖ Πειράματα με περιστροφή

- Κεντρικά συμπυκνωμένο νέφος
- Ομοιόμορφη πυκνότητα (και επανάληψη σε μεγαλύτερη ανάλυση)
- Διπλή περιστροφή

# Κατάρρευση χωρίς περιστροφή

- Αρχικές Συνθήκες : Σφαιρικό αέριο νέφος με αρχικό προφίλ πυκνότητας :

$$\rho_{init} \propto \frac{1}{r^2}$$

και καθόλου αρχική ταχύτητα :  $u_{init} = 0$

Σταθερή θερμοκρασία. Καθόλου μαγνητικά πεδία.

Το νέφος αυτό ονομάζεται ενιαία ισόθερμη σφαίρα (***singular isothermal sphere***) και αρχικά βρίσκεται σε εξαιρετικά ασταθή ισορροπία.

- Ο Frank Shu, το 1976, μελέτησε με αναλυτικό τρόπο την κατάρρευση μιας τέτοιας σφαίρας και κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ακολουθείται μια διαδικασία αυτο-ομοιότητας (self-similarity). Δηλαδή η κατάρρευση επαναλαμβάνεται σε όλο και μεγαλύτερες διαστάσεις

Για να φτάσει όμως σε αυτό το αποτέλεσμα έκανε κάποιες απλοποιήσεις :

- Σταθερός ρυθμός προσαύξησης
- Δεν συμπεριέλαβε στους υπολογισμούς του τον πυρήνα και την περιοχή γύρω του.

# Αυτο-όμοια Κατάρρευση

Στο κέντρο δημιουργείται ένα σφαιρικό κύμα (shock wave) που κινείται προς το εξωτερικό με την ταχύτητα του ήχου. **Το κύμα αυτό μεταφέρει την πληροφορία ότι τα εσωτερικά στρώματα καταρρέουν.** Έτσι τα στρώματα που βρίσκονται στο εσωτερικό του κινούνται προς το κέντρο, ενώ τα υπόλοιπα παραμένουν ανεπηρέαστα μέχρι να φτάσει σε αυτά. Τότε χάνουν την εσωτερική πίεση που τα υποστηρίζει και αρχίζουν με τη σειρά τους να καταρρέουν κι αυτά.

Το καταρρέον αέριο αναπτύσσει κατανομές πυκνότητας και ταχύτητας που αντιστοιχούν σε ελεύθερη πτώση:

$$\rho \propto r^{-3/2}$$

$$u \propto r^{-1/2}$$

# Πείραμα με sink-cell

- Χρησιμοποιούμε ένα 3D πλέγμα με 100x100x100 κελιά.
- Θέτουμε στο κέντρο μια αέρια σφαίρα

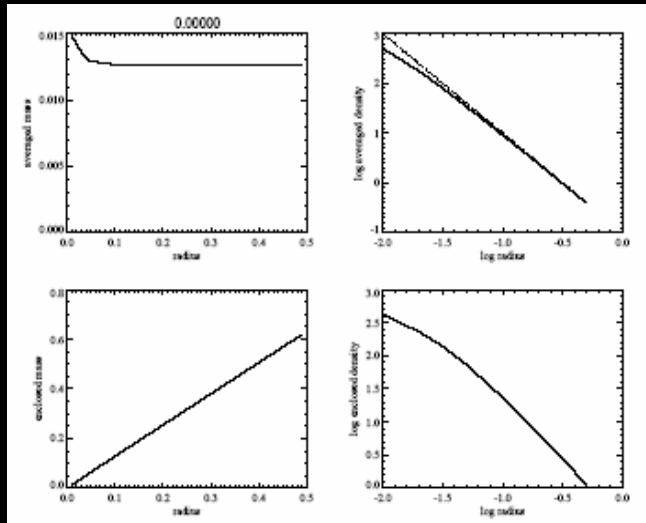
με κατανομή πυκνότητας:  $\rho_{init} = \frac{0.1}{r^2}$

- Ρυθμίζουμε το βαρυτικό πεδίο έτσι ώστε η αρχική κατάσταση να είναι πολύ κοντά σε HD ισορροπία.
- Τοποθετούμε ένα sink-cell στο κέντρο της σφαίρας.

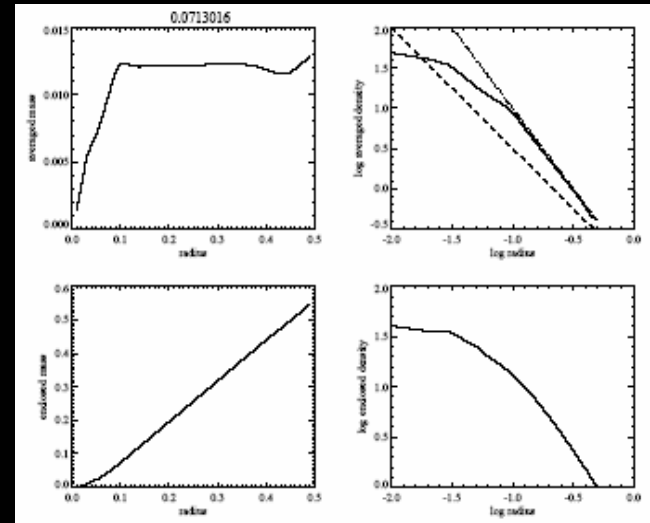


# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

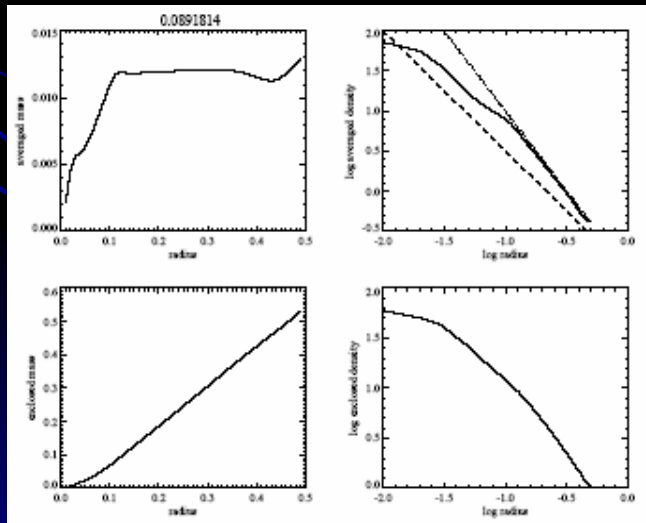
0



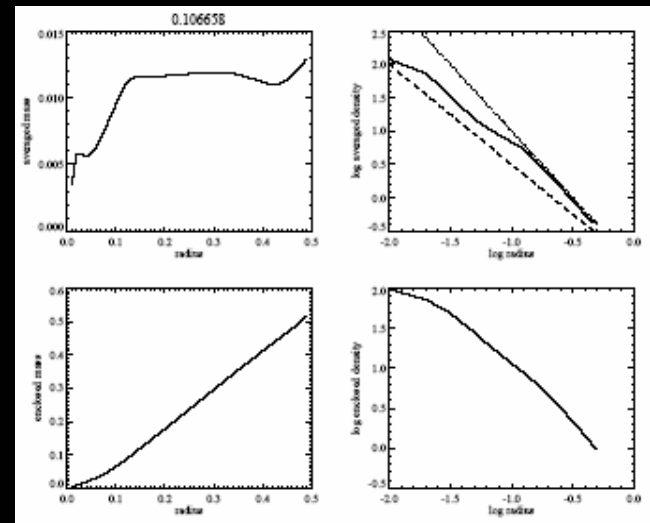
250



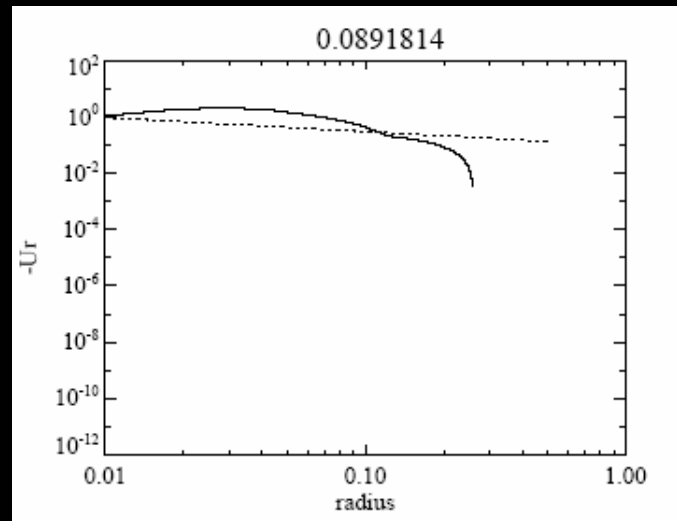
350



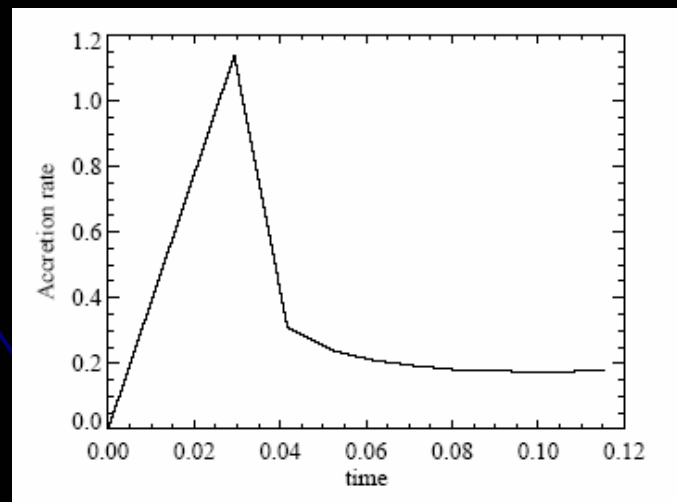
450



# Ταχύτητα και Ρυθμός Προσαύξεσης



350



# Πείραμα χωρίς sink-cell

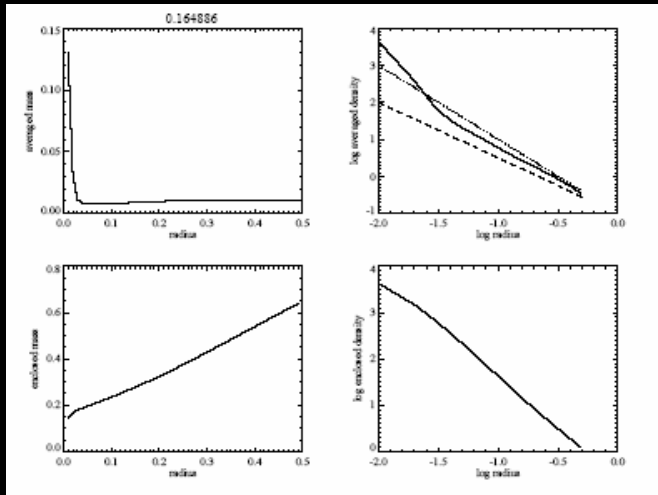
Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα αλλά αυτή τη φορά... :

δεν θέτουμε sink-cell στο κέντρο

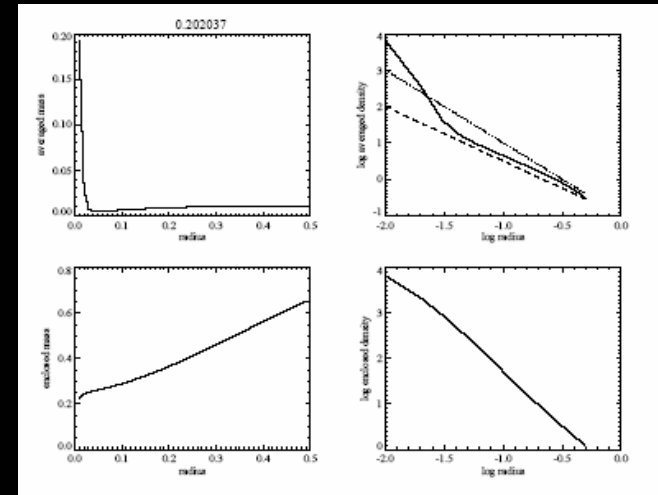
ώστε να μελετήσουμε τα αποτελέσματα της συσσώρευσης μάζας στο κέντρο.

# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

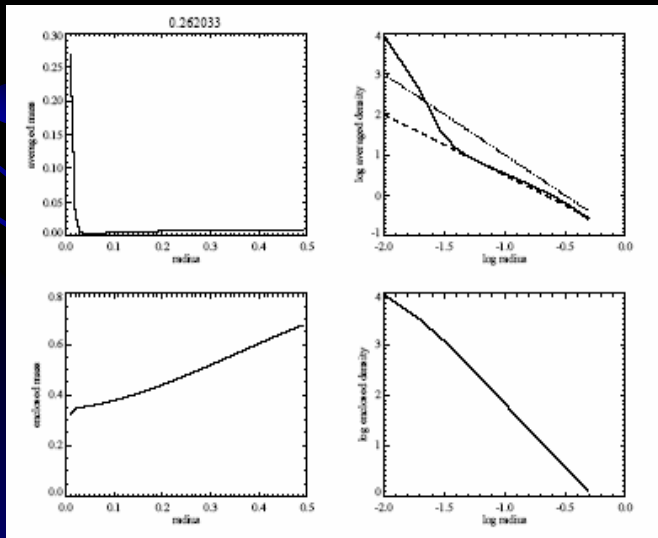
125



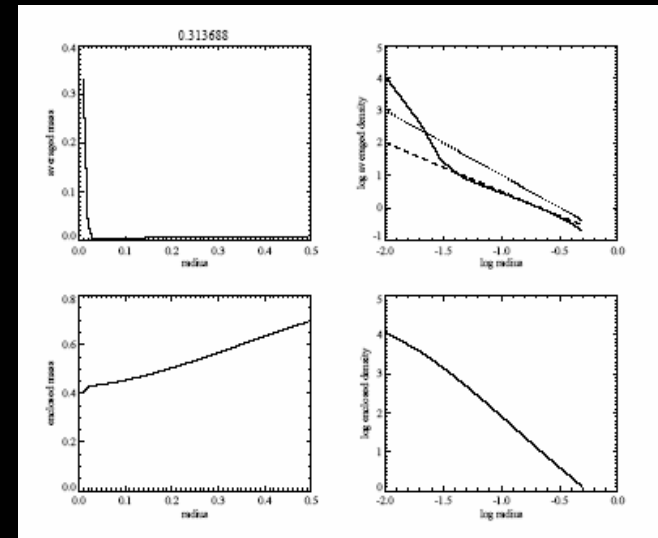
250



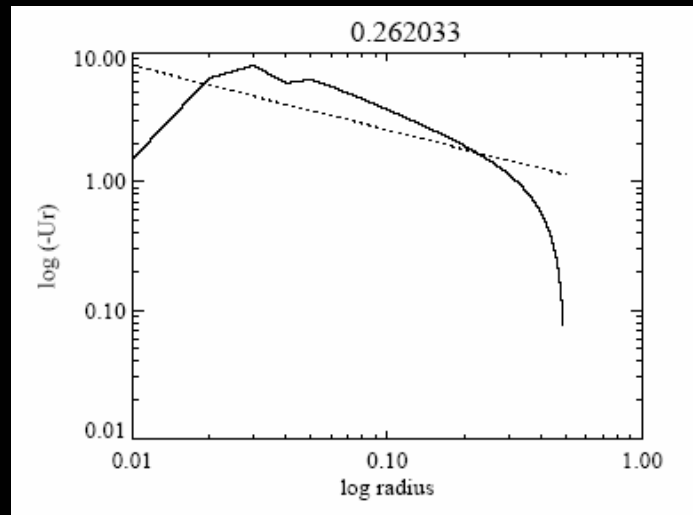
500



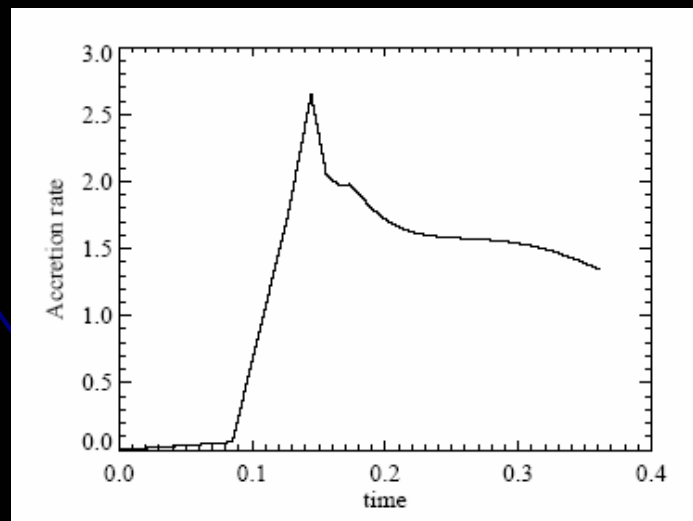
750



# Ταχύτητα και Ρυθμός Προσαύξεσης



500



# Τι παρατηρούμε και τι συμπεραίνουμε;

Στο πρώτο πείραμα:

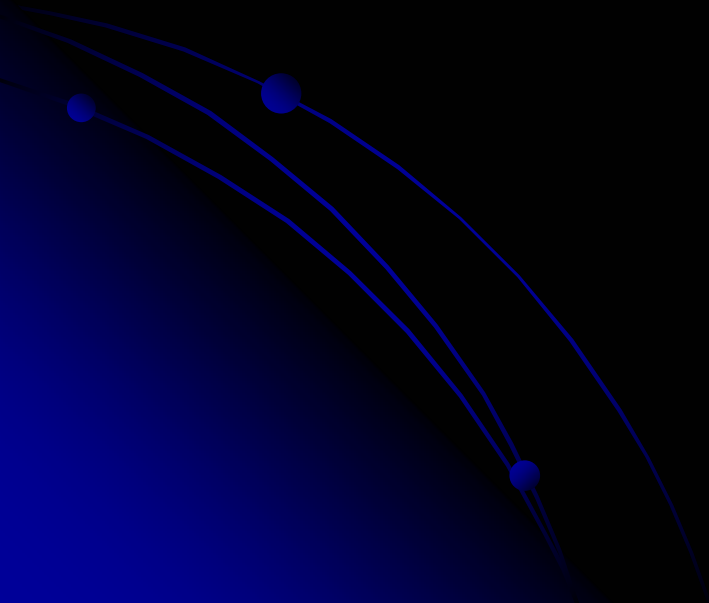
- ✓ Υπάρχει σφαιρικό κύμα
- ✓ Η πυκνότητα αναπτύσσει την αναμενόμενη κατανομή ελεύθερης πτώσης
- ✓ Ο ρυθμός προσαύξησης σταθεροποιείται

Στο δεύτερο πείραμα:

- ✗ Δεν υπάρχει εμφανές κύμα. Η ισορροπία φαίνεται να χάνεται σε όλη τη σφαίρα.
- ✗ Οι κατανομές πυκνότητας και ταχύτητας δεν είναι φανερώσουν ελεύθερη πτώση
- ✗ Ο ρυθμός προσαύξησης δεν σταθεροποιείται ποτέ

Άρα εφαρμόζοντας ένα sink-cell στο κέντρο, αναπαράγουμε με επιτυχία την κατάρρευση αυτο-ομοιότητας του Shu, που χαρακτηρίζεται από ελεύθερη πτώση του υλικού. Σε ένα πιο ρεαλιστικό όμως πείραμα, η «κομψή» θεωρία δεν ισχύει. Η μάζα που συγκεντρώνεται στον πυρήνα και οι πιέσεις που αναπτύσσονται επηρεάζουν σημαντικά.

# Περιστρεφόμενη Κατάρρευση



# Θεωρία για τις περιστρεφόμενες σφαίρες

Βασική αρχή : Η στροφορμή διατηρείται

$$L = u \cdot R = \Omega \cdot R^2 = \Omega \cdot (r \cdot \sin\theta)^2$$

Τα σωματίδια δεν πέφτουν προς το κέντρο αλλά προς το ισημερινό επίπεδο.

Εκεί συγκρούονται με τα συμμετρικά τους σωματίδια που έρχονται από κάτω και χάνουν κινητική ενέργεια. Έτσι παραμένουν περιστρεφόμενα κοντά στον ισημερινό.

Αποτέλεσμα: Σχηματισμός περιστρεφόμενου δίσκου



Η τελική ακτίνα περιστροφής κάθε σωματιδίου προκύπτει από την ισότητα της βαρυτικής δύναμης με την κεντρομόλο:

$$\frac{G M}{r^2} = \Omega^2 \cdot r_d = \frac{L^2}{r_d^3} \Rightarrow r_d = \frac{L^2}{GM}$$

Η ακτίνα του δίσκου προκύπτει από το σωματίδιο με τη μεγαλύτερη αρχική στροφορμή :

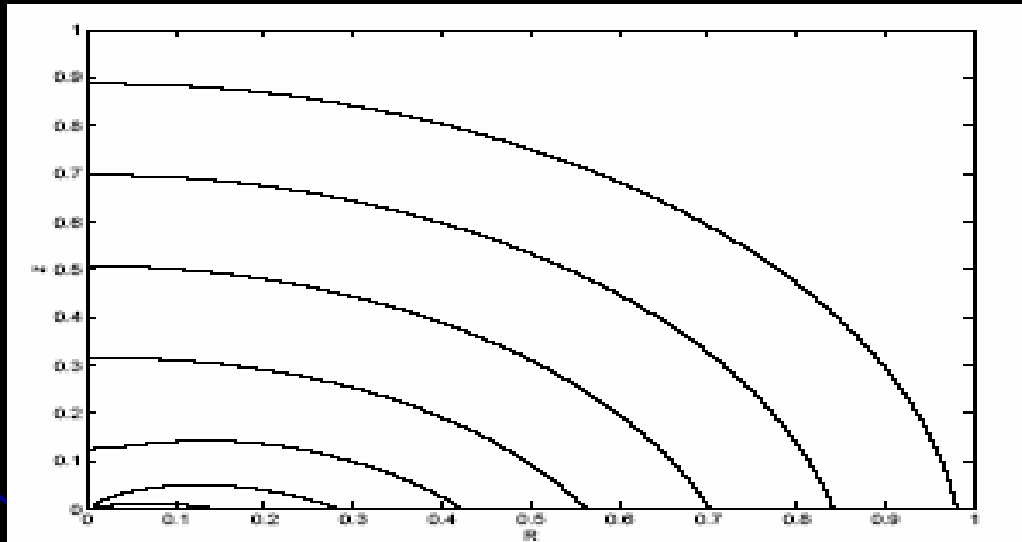
$$R_d = \frac{\Omega^2 \cdot r_0^4}{GM}$$

Ο δίσκος πλέον βρίσκεται σε σταθερή κατάσταση (δίσκος Kepler). Οι ταχύτητες περιστροφής δίνονται σαν συνάρτηση της ακτίνας:

$$u_{kepp} = \sqrt{\frac{GM}{r_d}}$$

Εφαρμόζοντας βαλλιστική ανάλυση των παραβολικών τροχιών των σωματιδίων καταλήγουμε στην κατανομή πυκνότητας του καταρρέοντος αερίου:

$$\rho = \frac{\dot{M}}{4\pi\sqrt{GM}r^3} \left(1 + \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0}\right)^{-1/2} \left(\frac{\cos\varphi}{\cos\varphi_0} + \frac{2\cos^2\varphi_0}{r/R_d}\right)$$



Για σταθερό ρυθμό προσαύξησης, τότε:

Για μεγάλες ακτίνες ( $r > R_d$ ) :  $\rho \propto r^{-3/2}$

Για μικρές ακτίνες ( $r < R_d$ ) :  $\rho \propto r^{-1/2}$

# ΑΠΛΟΥΣΤΕΥΣΕΙΣ

- Οι τροχιές των σωματιδίων δεν διασταυρώνονται.
- Όλη η μάζα του πυρήνα είναι συμπυκνωμένη σε απειροελάχιστο όγκο (sink-cell).
- Οι πιέσεις δεν λαμβάνονται υπόψη.
- Η μάζα του δίσκου θεωρείται αμελητέα.
- Ο ρυθμός προσαύξησης είναι σταθερός.

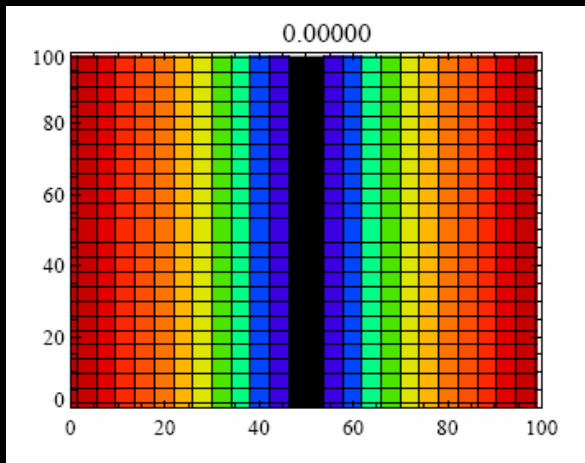
# Πείραμα με την περιστρεφόμενη Ενιαία Ισόθερμη Σφαίρα

- Χρησιμοποιούμε το ίδιο πλέγμα (100x100x100) με την ίδια αέρια σφαίρα:  
$$\rho_{init} = \frac{0.1}{r^2}$$
- Θέτουμε σταθερή κυκλική συχνότητα :  $\Omega = 4.9$
- Προσαρμόζουμε το βαρυτικό πεδίο ώστε η αρχική κατάσταση να είναι πολύ κοντά στην HD ισορροπία.

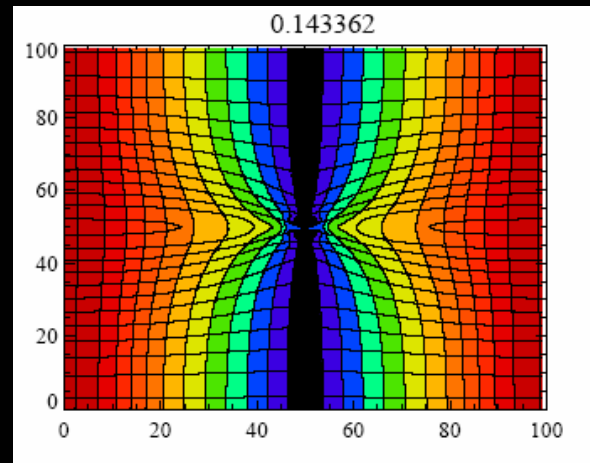
Η ακτίνα του δίσκου Kepler θα πρέπει να είναι :

$$\underline{R_d \sim 0.471}$$

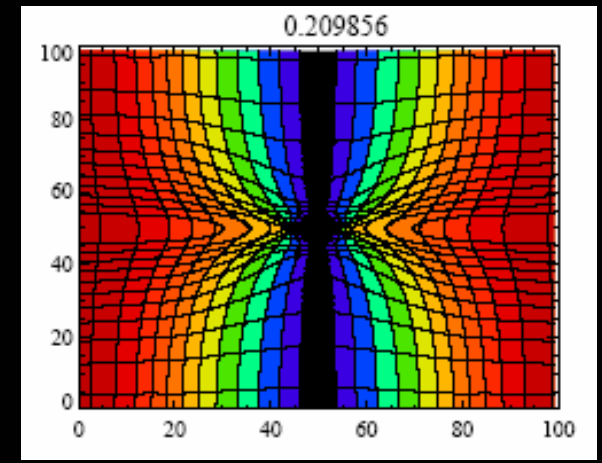
# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



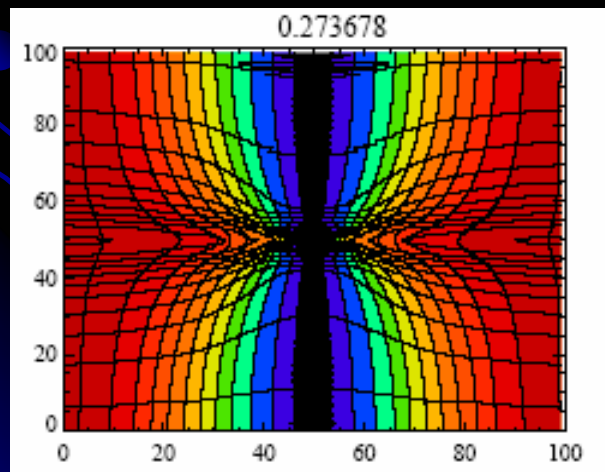
0



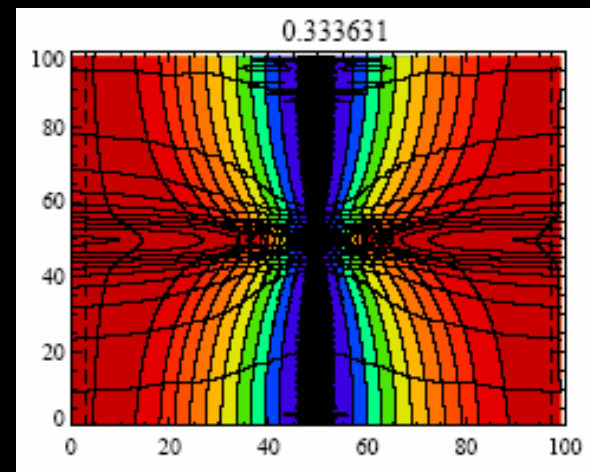
250



500

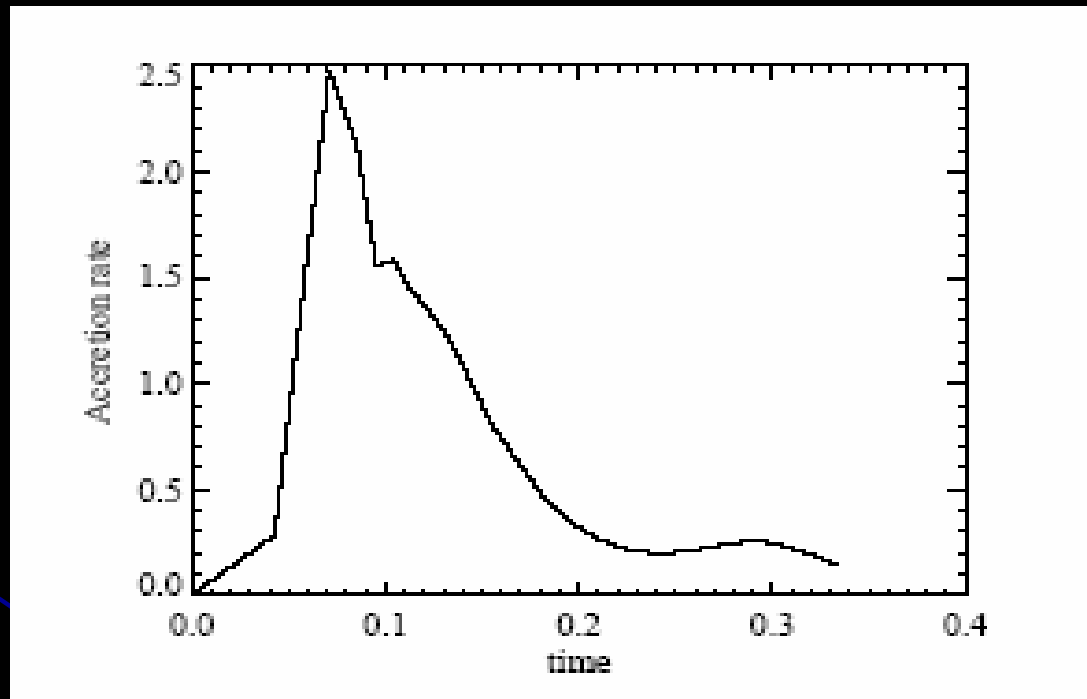


750



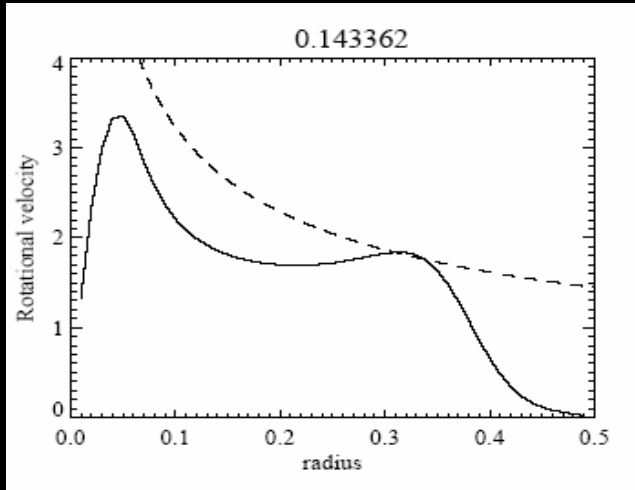
1000

# Ρυθμός Προσαύξησης

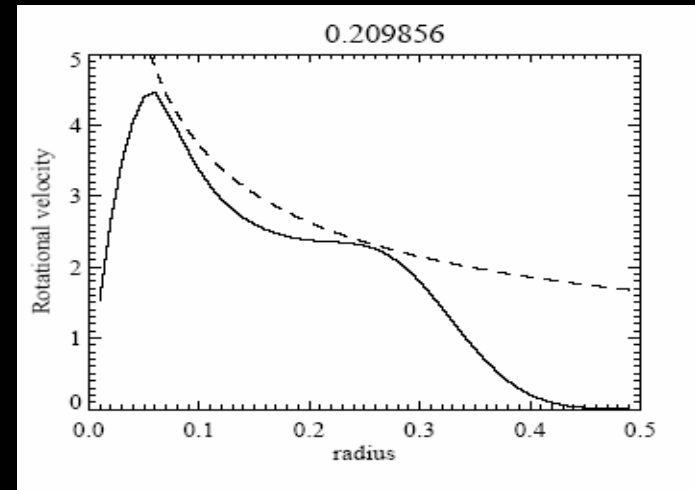


# Ταχύτητες

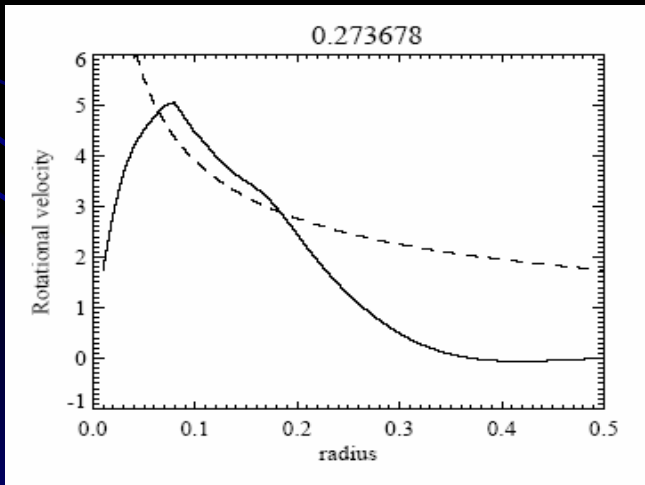
250



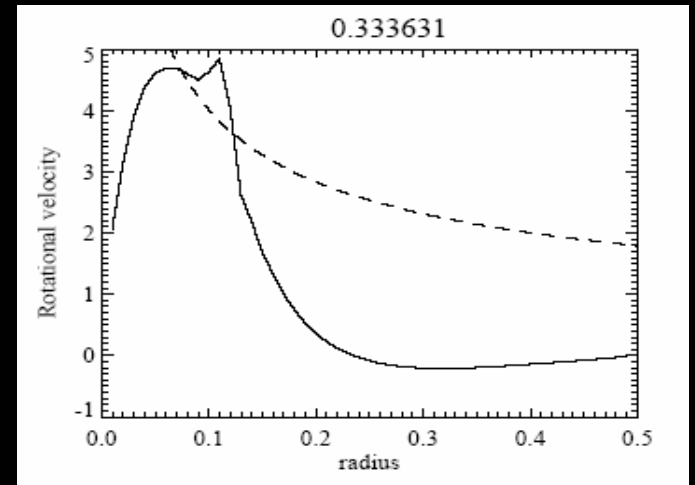
500



750

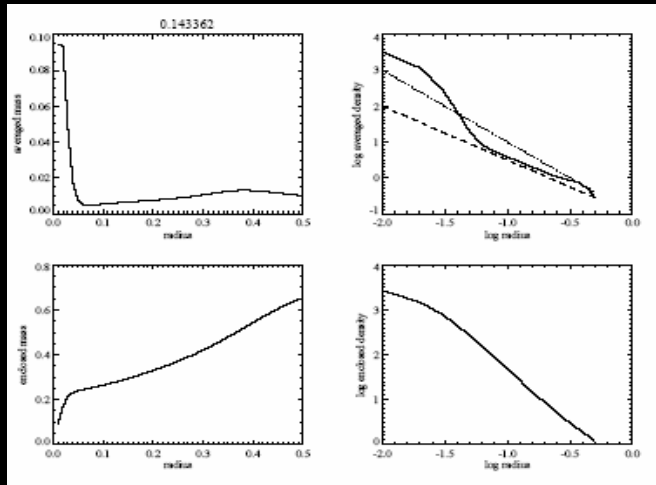


1000

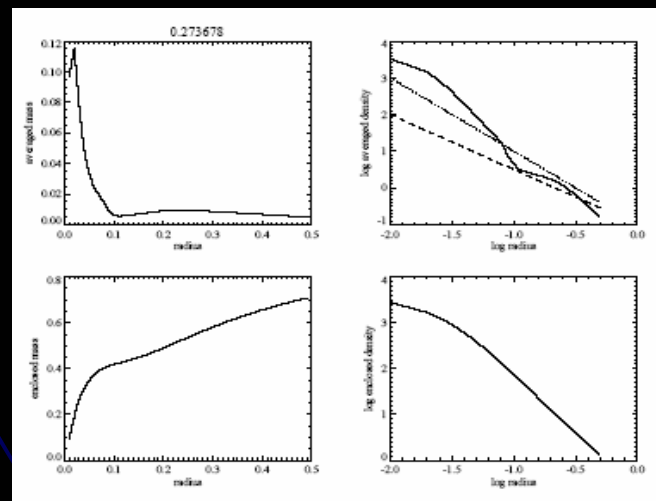
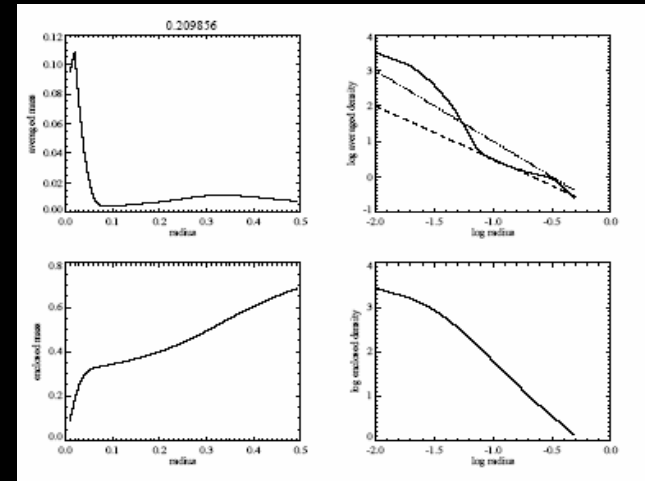


# Results for densities

250



500



750



# Σύγκριση με τη θεωρία και Συμπεράσματα

- ✓ Οι τροχιές των σωματιδίων δεν φαίνονται να διασταυρώνονται.
- ✓ Σχηματίζεται περιστρεφόμενος δίσκος.
- ✗ Οι κατανομές πυκνότητας δεν είναι οι αναμενόμενες. Άρα το μοντέλο της ελεύθερης πτώσης δεν ισχύει εδώ.
- ✗ Ο πυρήνας δεν έχει απειροελάχιστο όγκο. Η κεντρική συγκέντρωση μάζας και οι πιέσεις που αναπτύσσονται δεν θα πρέπει να αγνοούνται.
- ✗ Ο δίσκος δεν φτάνει σε σταθερή κατάσταση.
- ✗ Ο δίσκος φέρει μεγάλο ποσοστό της αρχικής μάζας. Άρα η βαρύτητα του δεν θα πρέπει να αγνοείται.
- ✗ Ο ρυθμός προσαύξησης δεν σταθεροποιείται.

# Περιστρεφόμενη Ισόπυκνη Σφαίρα

Σταθερή αρχική πυκνότητα.

Η βασική διαδικασία είναι η ίδια: Τα εσωτερικά στρώματα και αυτά κοντά στον άξονα καταρρέουν πρώτα. Τα υπόλοιπα σχηματίζουν περιστρεφόμενο δίσκο.

Βασική διαφορά : Λιγότερο αέριο αναμένεται να παραμείνει σε περιστροφή

Λόγος φυγόκεντρης δύναμης προς βαρύτητα :

$$\begin{array}{l} \text{Ενιαία Σφαίρα : } \gamma_{\text{sing}} = \frac{\Omega^2 r}{G M} = \dots = \frac{\Omega^2 r^2}{4 \pi G \rho_0} \\ \text{Ισόπυκνη σφαίρα : } \gamma_{\text{unif}} = \frac{\Omega^2 r}{G M} = \dots = \frac{3 \Omega^2}{4 \pi G \rho_0} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \gamma_{\text{sing}} \\ \gamma_{\text{unif}} \end{array}} \right\} \gamma_{\text{unif}} = \frac{3}{r^2} \gamma_{\text{sing}}$$

Άρα για μεγάλες ακτίνες ισχύει :  $\gamma_{\text{unif}} \ll \gamma_{\text{sing}}$  .

Οι βαρυτικές δυνάμεις είναι πολύ ισχυρότερες από τις φυγόκεντρες στην περίπτωση της ισόπυκνης σφαίρας.

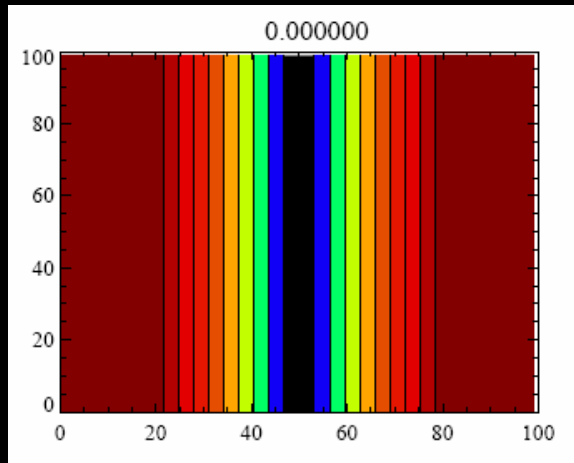
# Πείραμα με περιστρεφόμενη ισόπυκνη σφαίρα

- Χρησιμοποιούμε το ίδιο πλέγμα.
- Θέτουμε μια σφαίρα με σταθερή πυκνότητα  $\rho = 1$ . Και ακτίνα  $r \sim 0.3$
- Θέτουμε σταθερή κυκλική συχνότητα :  $\Omega = 9.46$
- Ρυθμίζουμε το βαρυτικό πεδίο ώστε η σφαίρα να βρίσκεται κοντά σε HD ισορροπία.

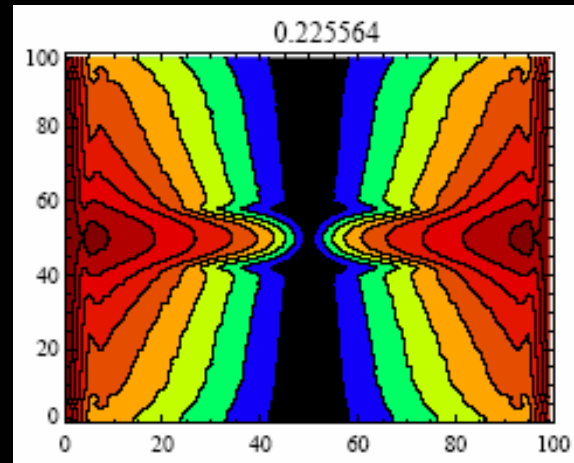
Αν σχηματιστεί δίσκος Kepler θα έχει ακτίνα:

$$\underline{R_d \sim 0.27}$$

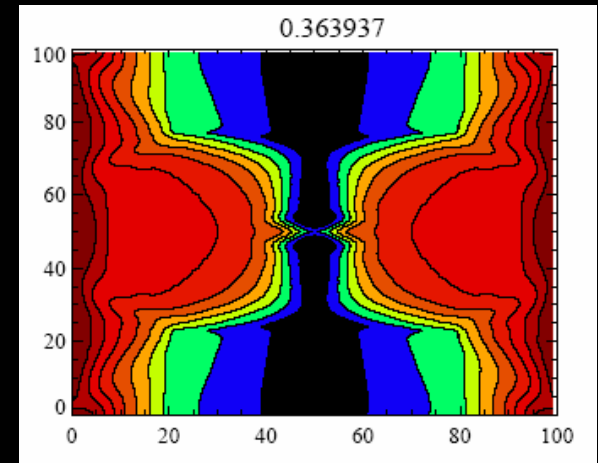
# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



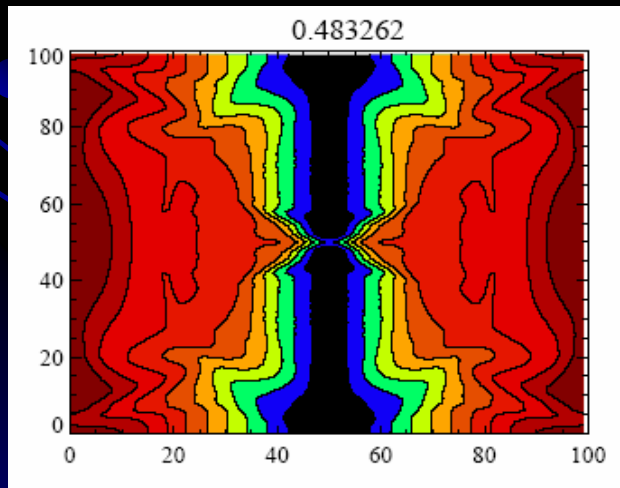
0



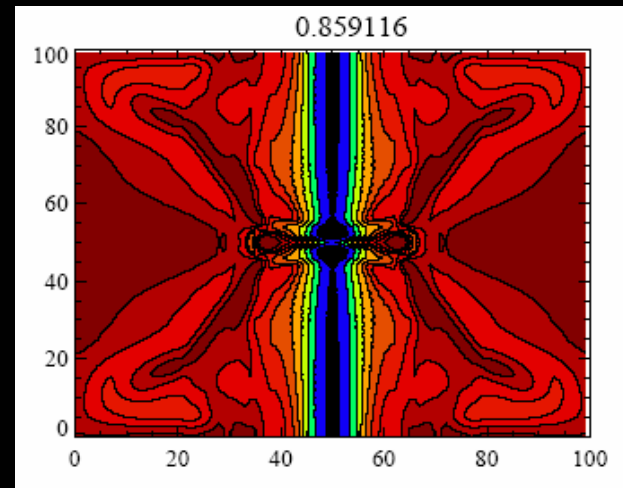
500



750



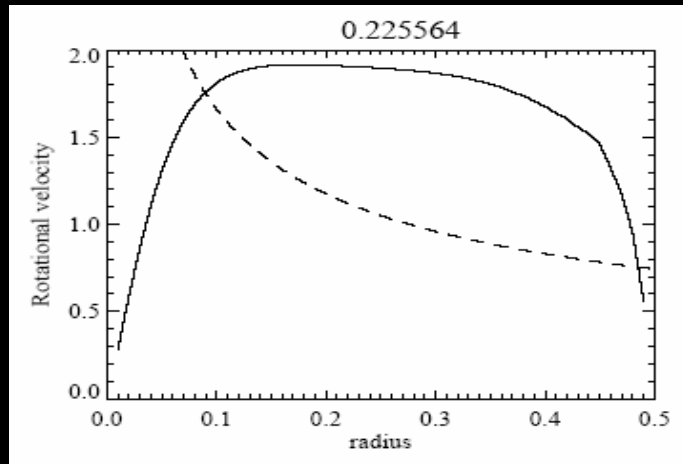
1000



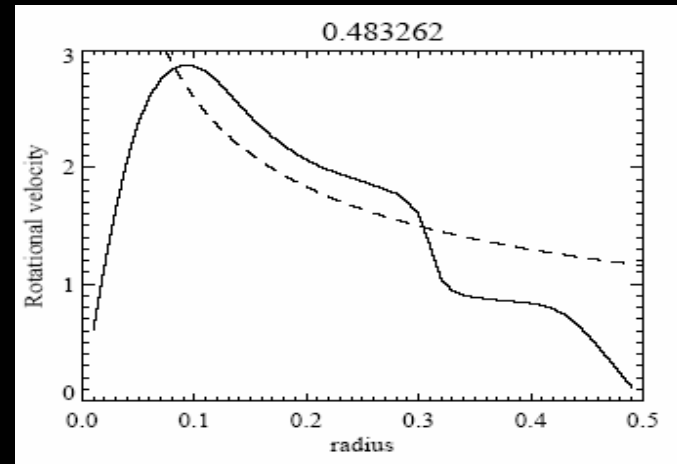
2000

# Ταχύτητες

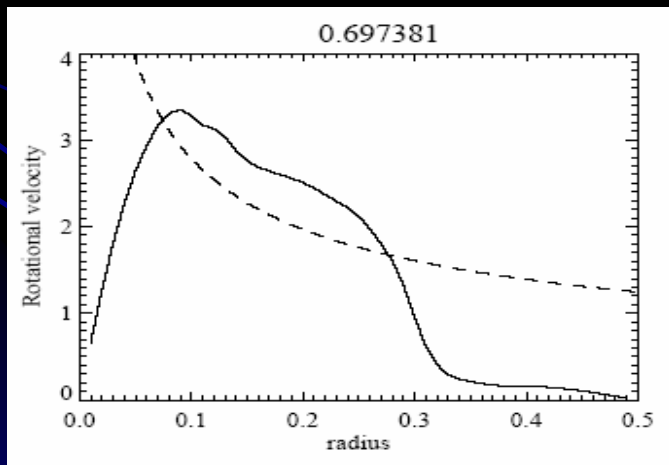
500



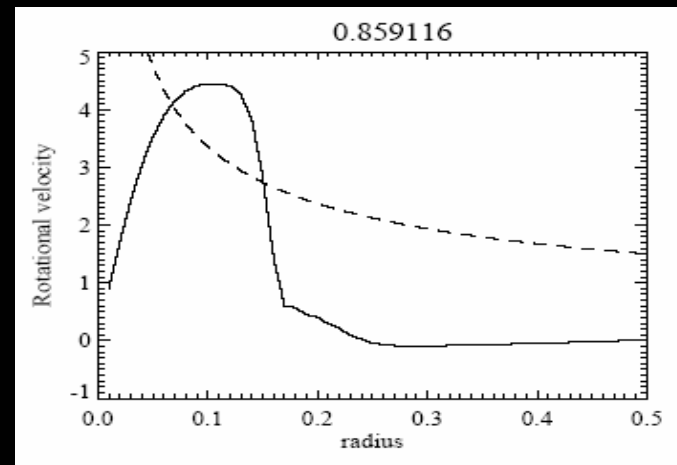
1000



1500



2000



# Μεταφορά Στροφορμής

Δύο διπλανά τμήματα του περιστρεφόμενου δίσκου αναπτύσσουν δυνάμεις τριβής μεταξύ τους, που προκαλούν την ανακατανομή στροφορμής – μεταφορά προς τα έξω.

Το εσωτερικότερο και γρηγορότερο, χάνει στροφορμή και κινείται προς τα μέσα. Το εξωτερικό και πιο αργό, κερδίζει στροφορμή και κινείται προς τα έξω.

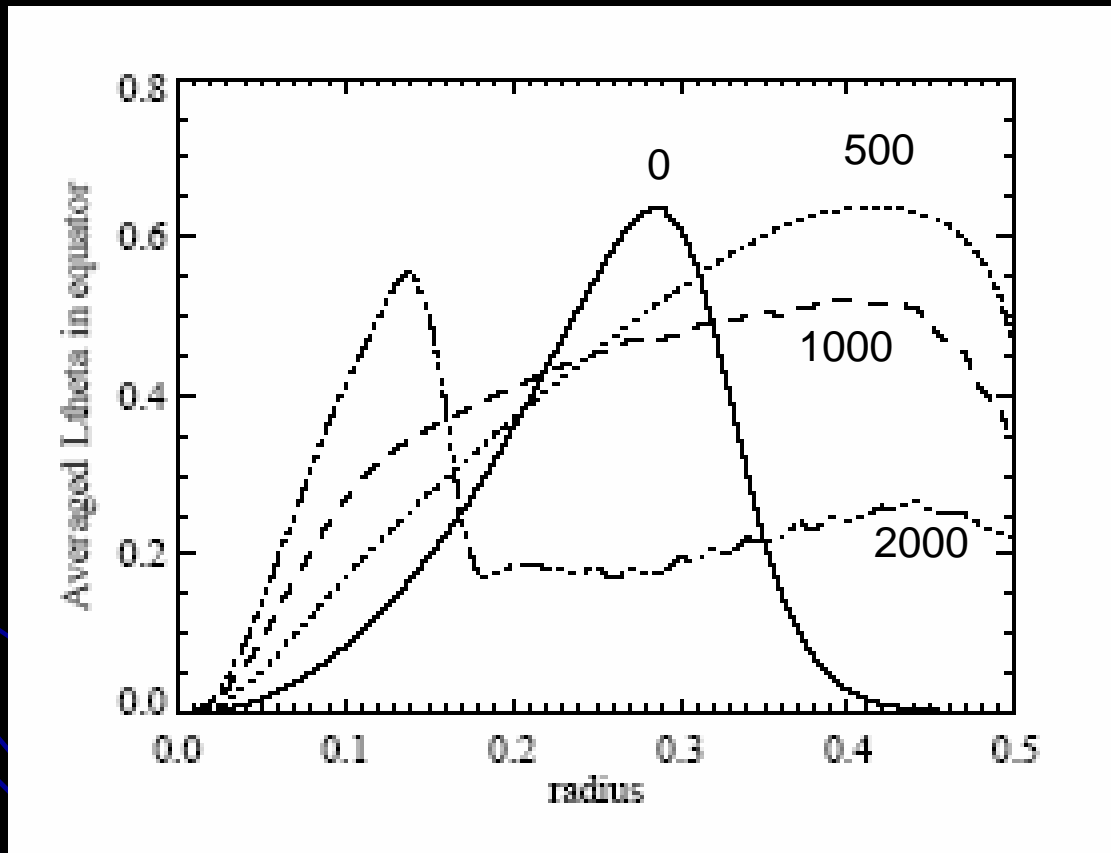
«Θεωρητικά» η τελική κατάσταση θα έχει :

σχεδόν όλη την μάζα του νέφους στον κεντρικό πυρήνα και ένα πολύ μικρό τμήμα να περιφέρεται σε μεγάλες ακτίνες μεταφέροντας όλη την αρχική στροφορμή (μοντέλο ηλιακού συστήματος).

Ερώτηση :

Πόσο αποτελεσματική είναι η μεταφορά στροφορμής σε ένα δίσκο; Πόσο μάζα «ξοδεύεται» στη μεταφορά αυτή;

# Στροφορμή στον Ισημερινό



# Μερικά συμπεράσματα

- ✦ Και πάλι σχηματίζεται περιστρεφόμενος δίσκος. Όμως αντίθετα με το αναμενόμενο, η μάζα του είναι σημαντική και σίγουρα μη αμελητέα.
- ✦ Ο δίσκος αποκτάει προφίλ περιστροφής Kepler στα εσωτερικά του τμήματα, αλλά μόνο για λίγο. Τα τμήματα αυτά είναι που παραμένουν σε περιστροφή μέχρι το τέλος
- ✦ Η περισσότερη στροφορμή του νέφους αποθηκεύεται στο δίσκο. Αναποτελεσματική μεταφορά προς τα έξω.

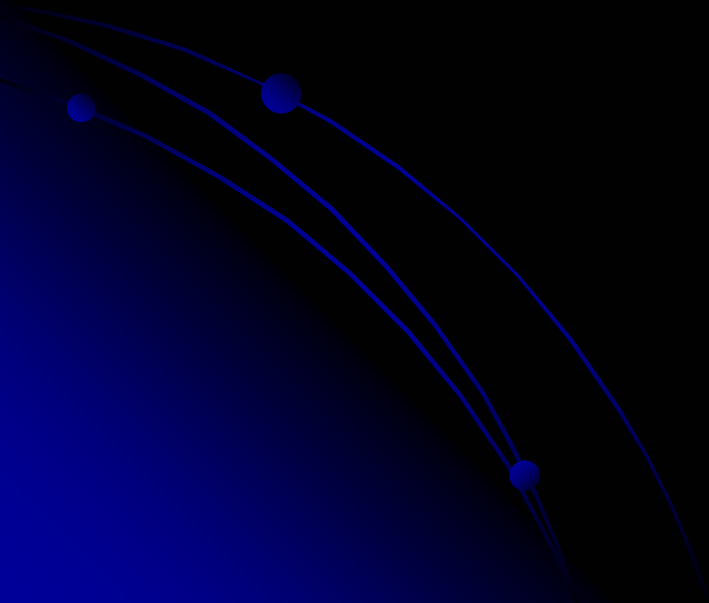
Βασικό Πρόβλημα : Η κατάρρευση εξελίσσεται μέσα σε στενά περιορισμένο (από τα boundaries) όγκο. Τι θα γίνει αν της διαθέσουμε περισσότερο «χώρο»;



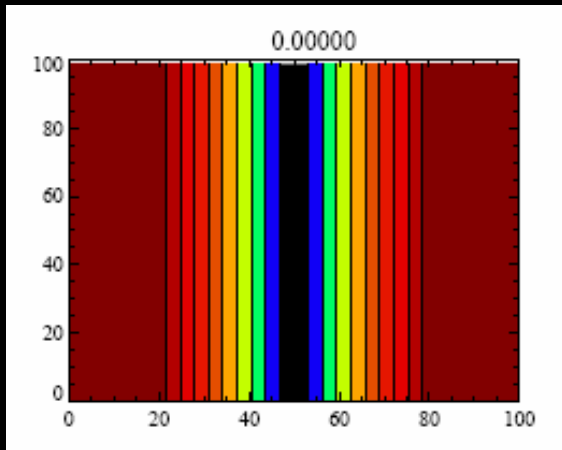
# Πείραμα με μεγαλύτερη ανάλυση

Επαναλαμβάνουμε το ίδιο πείραμα αλλά μέσα σε μεγαλύτερο πλέγμα:

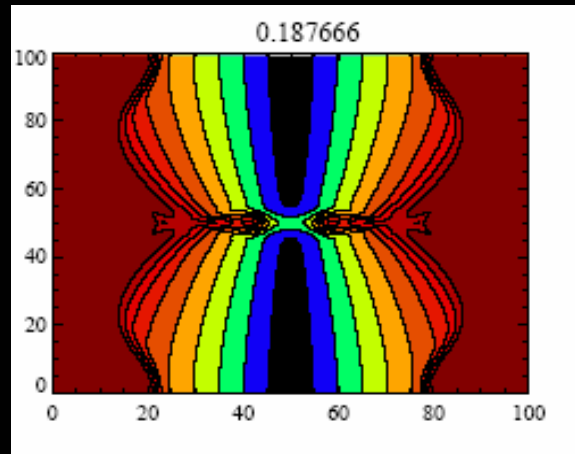
200 x 200 x 100



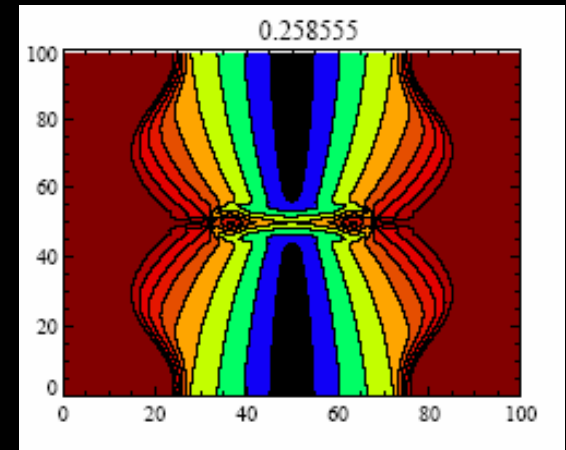
# ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ



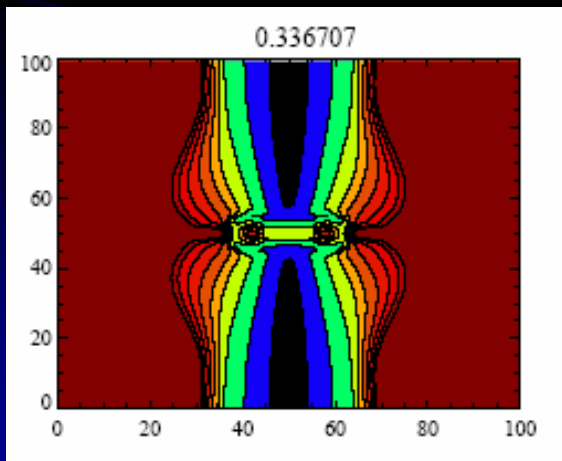
0



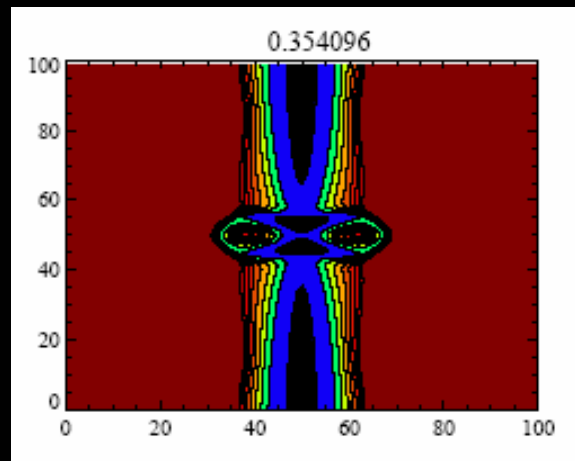
250



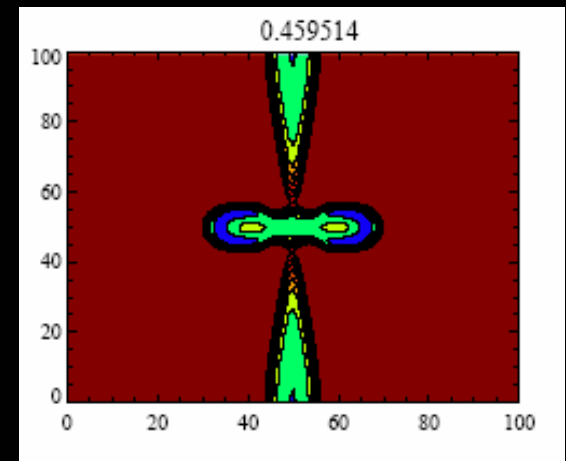
500



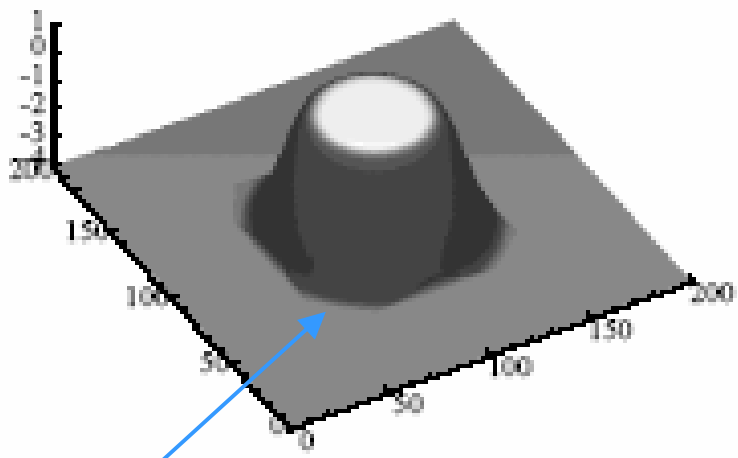
750



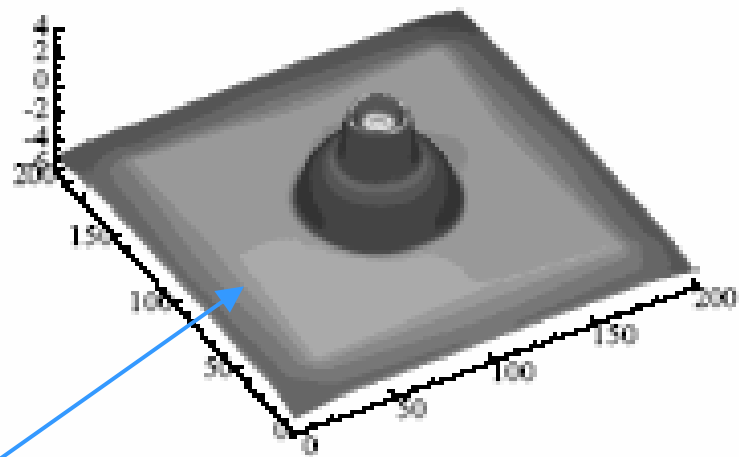
1000



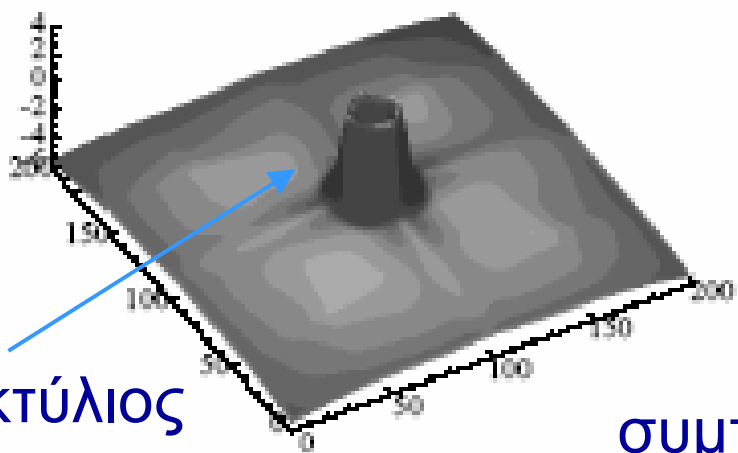
1500



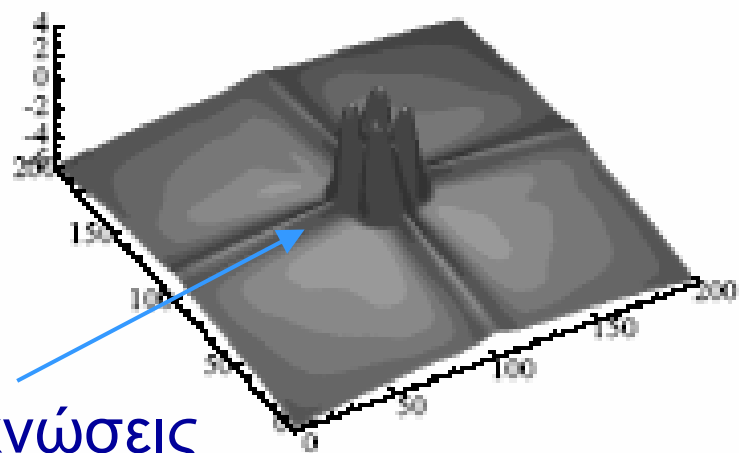
ισόπυκνη



δίσκος

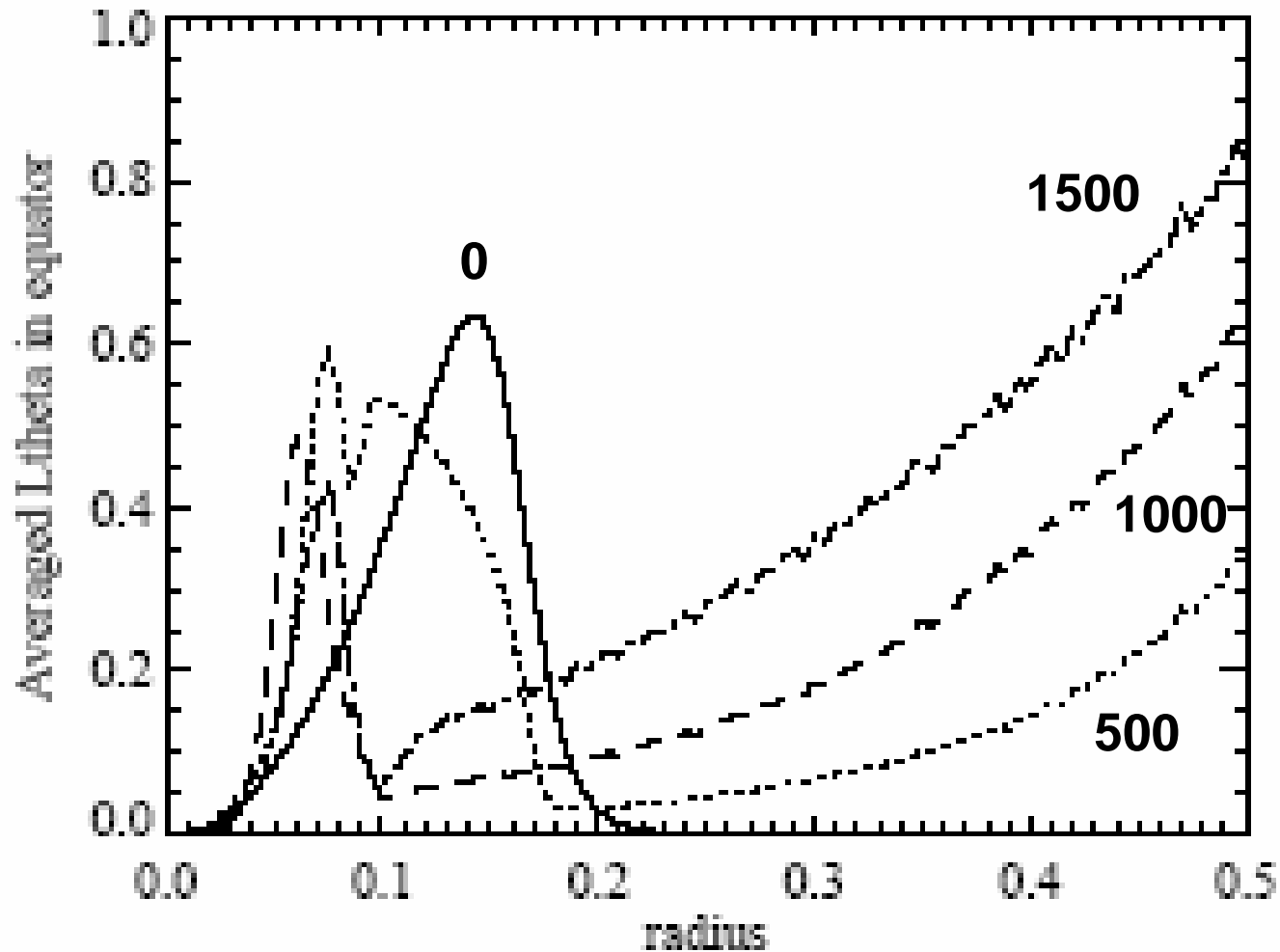


δακτύλιος



συμπυκνώσεις

# Στροφορμή στον Ισημερινό



# Βασικά Συμπεράσματα

- ➔ Η χαμηλή ανάλυση και ο στενός περιορισμός από τα boundaries, επηρεάζουν την κατάρρευση. Όταν το νέφος έχει αρκετό χώρο για να διασταλεί, εμφανίζεται μια διαφορετική πορεία.
- ➔ Οι πιέσεις και η συσσώρευση μάζας στο κέντρο παίζουν σημαντικό ρόλο.
- ➔ Ο δίσκος που σχηματίζεται μπορεί να γίνει ασταθής και να οδηγήσει σε νέες δομές.
- ➔ Το τελικό αποτέλεσμα δεν είναι αναγκαστικά ένας πυρήνας, αλλά μπορεί να προκύψει ένα σύστημα πυρήνων.
- ➔ Υπάρχει πολύ αποτελεσματική απώλεια στροφορμής στην τελευταία αυτή περίπτωση.

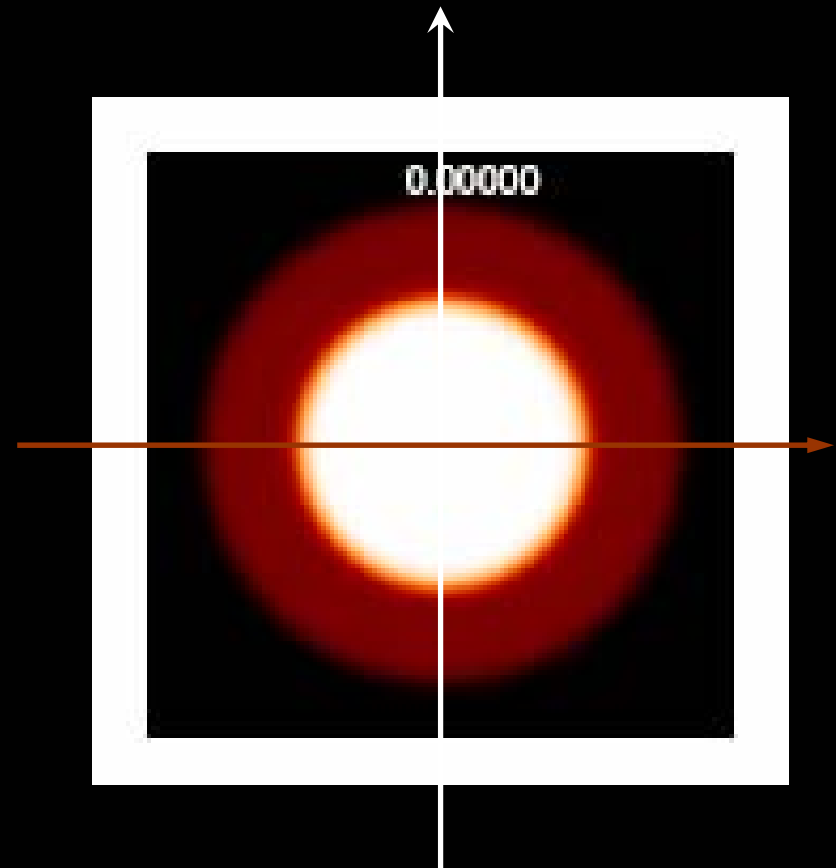
# Ένα βήμα πιο κοντά στην πραγματικότητα

Τώρα το σφαιρικό νέφος αποτελείται από δύο στρώματα.

Το εσωτερικό έχει πυκνότητα  $\rho_0 = 1$  και  $\Omega = 6.33$

Το εξωτερικό έχει  $\rho_0 = 2$  και  $\Omega = 12.666$

Οι άξονες περιστροφής τους είναι κάθετοι!



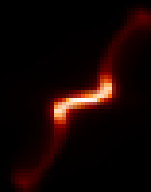
# Κατάρρευση

0.0748097



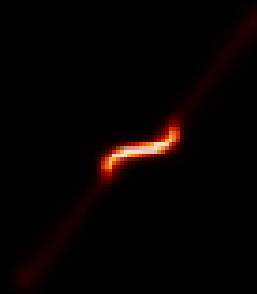
250

0.0912269



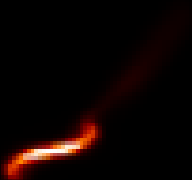
500

0.107361



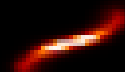
750

0.115143



1000

0.131152



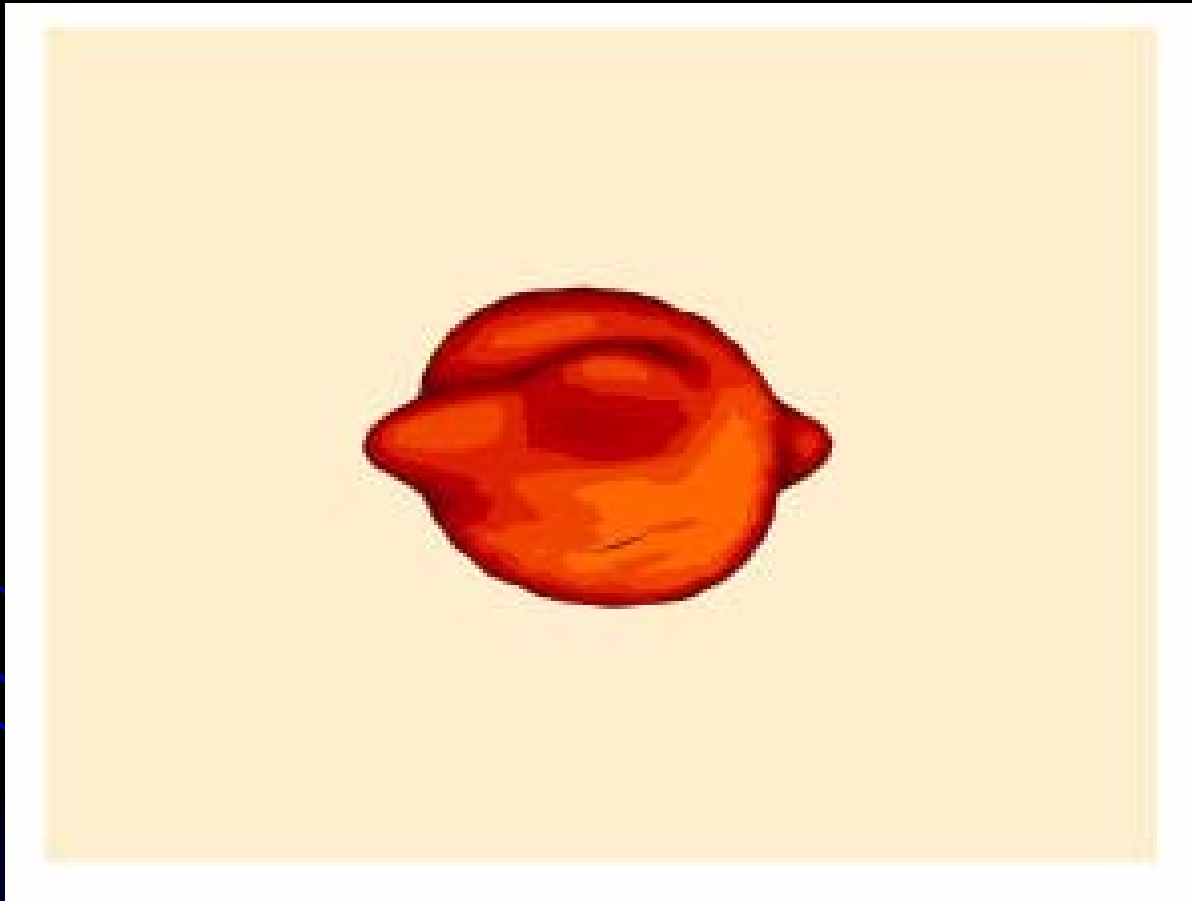
1250

0.181015



2000

# Δύο δίσκοι



400



# Τελικά συμπεράσματα

- Η χρήση ενός κεντρικού sink-cell μας βοηθάει να περιγράψουμε την κατάρρευση με πιο «κομψό» τρόπο αλλά μπορεί να μην είναι ρεαλιστική. Το μέγεθος του πυρήνα και κυρίως οι πιέσεις που αναπτύσσονται, μπορούν να επηρεάσουν σημαντικά.
- Το γεγονός ότι πουθενά δεν συναντήσαμε καθαρά «ελεύθερη πτώση» υποδεικνύει ότι γενικότερα οι πιέσεις είναι σημαντικές και δεν πρέπει να παραβλέπονται.
- Περιστρεφόμενος δίσκος σχηματίζεται πάντα. Συσσωρεύει σημαντικό ποσοστό της μάζας και άρα η βαρύτητα του δεν θα πρέπει να θεωρείται αμελητέα. Είναι αμφίβολο αν θα αποκτήσει ποτέ προφίλ δίσκου Kepler για σημαντικό χρονικό διάστημα, και άρα είναι ασταθής.
- Όταν το νέφος έχει αρκετό χώρο για να διασταλεί και να εξελιχθεί ελεύθερα, χωρίς τον περιορισμό των boundaries, τότε οι διαδικασίες που παρατηρούμε μπορεί να είναι πολύ διαφορετικές.
- Η εξέλιξη της κατάρρευσης αλλάζει ριζικά και όταν ορίζουμε έστω και λίγο πιο πολύπλοκες αρχικές συνθήκες.
- Ένα μεγάλο ποσοστό της μάζας παραμένει σε περιστροφή γύρω από τον πυρήνα φέροντας την ολική αρχική στροφορμή του νέφους. Το θέμα της ανακατανομής στροφορμής είναι λοιπόν ακόμα ανοιχτό σε μελέτη έτσι ώστε να πλησιάσουμε σε ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο που θα μπορεί να περιγράψει αποτελεσματικά την κατάρρευση περιστρεφόμενων νεφών.