ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΖΙΑΜΠΑΖΛΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

Φοιτητής

Α.Ε.Μ. : 10223

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΑ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ ΣΕ ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΑΣΤΕΡΕΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: **ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ (ΛΕΚΤΟΡΑΣ)**

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Φυσικής της Σχολής Θετικών Επιστημών
του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Θεσσαλονίκη 2003

Abstract

The General Theory of Relativity (GTR) is indeed one of the most famous theories of mankind and along with the Special Theory it consists an important part of modern physics, a strong tool in the hands of Astrophysicists. The inspirer of this theory is. Albert Einstein who proposed the idea that gravity is the geometry of four-dimensional curved spacetime. GTR will shortly be a century old and together with quantum theory is one of the two most significant developments of twentieth century physics.

In general relativity the acceleration looses its absolute meaning. This is equivalent to the statement that in GTR there are no inertial or otherwise preferred coordinate systems: all coordinate systems are equivalent. This is actually the reason for which the theory is called general relativity. In the next paragraphs we shall give the main characteristics of Schwarzchild spacetime along with its metric and we will mention the exact interior solutions. We also give the demonstration that the maximum value of M/R at the surface of a static spherical and homogeneous body is 4/9.

In the second chapter we discuss about the orbits of test particles around a spherically symmetric static body. We also discuss two observational relativistic phenomena, the Gravitational Redshift and Perihelion Precession. In chapter three we describe one of the most interesting relativistic phenomena the rotational dragging of the inertial frames. We explain how spacetime reacts to this dragging, for example if only a smart part of the matter in the universe is set into rotation, then the inertial frames might be dragged along slightly and we calculate by a fully mathematical way the rate of this dragging for a slowly rotating spherical body.

In the fourth chapter we discuss the evolution of the innermost stable circular orbits (ISCO) around an accreting neutron star. We calculate the general form, of the energy and angular momentum per unit rest mass, for a random radius r. We give the precise stable orbits of a test particle orbiting around a slowly rotating spherical and static star. Finally we compare these results along with the ones for a non-rotating star.

The Fifth chapter explains why parametric resonance is a good model for understanding some properties of kHz QPO's phenomena. We derive the radial and meridional epicyclic frequencies in the general form for some radius r and we show that there is a resonance when ω_r / ω_θ is in a ratio of 2:3. Finally we interpret the results when compared to those for non-rotating neutron star.

Chapter six is a continuation of the fourth chapter as we study the same phenomena in a different background. We use a different solution of Einstein's equations, the Kerr-Newman solution. This introduces a more complicated treatment of the ISCO problem.

The seventh chapter demonstrates the results obtained by the RXTE satellite. Three millisecond phenomena were found, whose interpretation relies explicitly on the description of strong-field gravity and neutron star structure. Historically, the first to be discovered were the twin kilohertz quasi-periodic oscillations (kHz QPOs), widely interpreted now as due to orbital motion in the inner accretion flow. Then came the burst oscillations, probably due to the spin of a layer in the neutron star's atmosphere in near-corotation with the neutron star itself. Finally RXTE detected the first true spin frequency of an accreting low-magnetic field neutron star, the long anticipated accreting millisecond pulsar. In the same chapter we also talk about the

KHz QPOs models, emphasizing at the relativistic precession model. These models along with the parametric resonance model are the main promising models for understanding the QPOs phenomena.

In the eighth and final chapter we review some evidence that the two high frequency QPOs in SCO X-1 source are, more often than not, approximately in the 2:3 frequency ratio familiar from studies of black hole candidates (e.g. XTE J1550-564). This implies that the double kHz QPO phenomenon in neutron stars has its origin in properties of strong field gravity and has probably little to do with the rotation of a stellar surface or any magnetic field structure anchored in the star.

We have reviewed the ideas that parametric resonance affects nearly geodesic motion around a black hole or a neutron star, and that it may be relevant to the high frequency (twin) quasi-periodic oscillations occurring in some low mass X-Ray binaries. Assuming the particles or fluid elements of an accretion disc to be subject to an isotropic perturbation of a hypothetical but rather general form. The parametric resonance is indeed excited close to the radius where epicyclic frequencies of radial and meridional oscillations are in a 2:3 ratio. These results agree with actual frequency ratios of twin kHz QPOs that have been reported in some black hole candidates and they may be consistent also with correlation of the twin peaks in SCO X-1.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η Γενική Θεωρία Σχετικότητας (ΓΘΣ) αποτελεί πλέον μια από τις διασημότερες θεωρίες που ανέπτυξε ποτέ ο ανθρώπινος νους και μαζί με την Ειδική θεωρία αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι της Σύγχρονης Φυσικής, ένα δυνατό εργαλείο στα χέρια των Φυσικών. Η διασημότητά της οφείλεται αφενός μεν στο ότι αποτελεί την συνέχεια της θεωρίας του Νεύτωνα, απαντώντας σε πολλά ερωτήματα που αποτελούσαν τροχοπέδη στην ιστορία της Δυναμικής, αφετέρου δε στον εμπνευστή της, τον διάσημο Albert Einstein. Για πολλά χρόνια αποτελούσε μια δυσνόητη θεωρία κάτι που έκανε πολλούς επιστήμονες σκεπτικούς απέναντι στην ορθότητά της. Τα τελευταία όμως είκοσι χρόνια η κατάσταση άλλαξε λόγω του ερευνητικού ενδιαφέροντος, θεωρητικού και παρατηρησιακού, για τη ΓΘΣ. Η αύξηση αυτή προήλθε αποκλειστικά από την περιοχή της Αστροφυσικής, περιλαμβανομένης και της Κοσμολογίας, με την παρατήρηση σχετικιστικών συστημάτων, δηλαδή αστρικών συστημάτων των οποίων το βαρυτικό πεδίο είναι αρκούντως ισχυρό ώστε να μπορούν να περιγραφούν από την ΓΘΣ, και την ερμηνεία των παρατηρούμενων ιδιοτήτων τους. Αυτή η έντονη αλληλεπίδραση ΓΘΣ και Αστροφυσικής είχε ως αναπόφευκτο αποτέλεσμα τη δημιουργία ενός νέου ερευνητικού επιστημονικού κλάδου, της *Σχετικιστικής Αστροφυσικής*. Στο πλαίσιο της Σχετικιστικής Αστροφυσικής η ΓΘΣ χρησιμοποιείται όχι μόνο για την επαλήθευση της ασύμφωνης με τις προβλέψεις της Νευτώνειας θεωρίας της βαρύτητας, αλλά κυρίως ως το εργαλείο για την πρόβλεψη νέων φαινομένων που δεν προβλέπονται από την τελευταία.

Στις επόμενες παραγράφους θα δώσω την γεωμετρική εικόνα γύρω από ένα σφαιρικό αντικείμενο έτσι όπως το βλέπει η ΓΘΣ χωρίς να αναφερθώ καθόλου στο μαθηματικό σκελετό της, έχοντας επίγνωση πως ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με γνώσεις διαφορικής γεωμετρίας και τανυστικού λογισμού. Θα ξεκινήσουμε με τη μελέτη ισχυρών βαρυτικών πεδίων στη ΓΘΣ με τα σφαιρικώς συμμετρικά συστήματα, τα οποία αφενός μεν είναι σχετικώς απλά, αφετέρου δε έχουν μεγάλη φυσική σημασία, καθώς πολλά αντικείμενα αστροφυσικού ενδιαφέροντος είναι σχεδόν ή τελείως σφαιρικά. Οι πιο απλοί καμπυλωμένοι χωρόχρονοι της ΓΘΣ είναι αυτοί που παρουσιάζουν συμμετρία και οι πιο χρήσιμοι από αυτούς είναι αυτοί που έχουν την γεωμετρία του κενού, έξω από μια σφαιρικά συμμετρική πηγή καμπυλότητας όπως για παράδειγμα ένας σφαιρικός αστέρας. Αυτή η γεωμετρία καλείται Γεωμετρία του Schwarzschild από το όνομα του Γερμανού αστροφυσικού Karl Schwarzschild (1873-1916), ο οποίος έλυσε τις εξισώσεις πεδίου κενού του Einstein το 1916 λίγους μήνες μετά την δημοσίευσή τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο δίνουμε τα χαρακτηριστικά του χωροχρόνου Schwarzschild καθώς και τις ακριβείς εσωτερικές λύσεις. Αποδεικνύουμε ότι στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας δεν μπορούν να υπάρξουν ομογενείς πυκνότητας αστέρες μάζας μεγαλύτερης από 4R/9. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναφερόμαστε για τροχιές στο χωροχρόνο του Schwarzschild και κυρίως στις τροχιές που ακολουθούν τα σωματίδια ή φωτόνια γύρω από έναν συμμετρικό στατικό και μη περιστρεφόμενο αστέρα. Το τελευταίο το τονίζουμε διότι το κυρίως μέρος της διπλωματικής αυτής είναι η μελέτη τροχιών ελεύθερων σωματιδίων γύρω από συμπαγής αστέρες. Επίσης αναφερόμαστε και σε άλλα σχετικιστικά παρατηρήσιμα φαινόμενα και ιδιαίτερα στην Βαρυτική Μετάθεση όπου αποδεικνύουμε ότι η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει για έναν σφαιρικά συμμετρικό, ομογενή, και στατικό αστέρα είναι η τιμή $z = 2$. Τέλος μιλούμε και για ένα σχετικιστικά παρατηρήσιμο φαινόμενο που οφείλεται στο έντονο βαρυτικό πεδίο των αστέρων και ακούει στο όνομα μετάθεση του περιηλίου.

Στο τρίτο κεφάλαιο δίνουμε την πλήρη περιγραφή ενός από τα σπουδαιότερα σχετικιστικά φαινόμενα, του συρμού των αδρανειακών συστημάτων λόγω περιστροφής της βαρυτικής πηγής. Στη ΓΘΣ όπως και στη Νευτώνεια θεωρία για την βαρύτητα, το μέγεθος των φυγόκεντρων δυνάμεων το οποίο επιδρά πάνω σε ένα στοιχειώδες ρευστό, εξαρτάται ισχυρά από τον ρυθμό περιστροφής του ίδιου του ρευστού σχετικά ως προς ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα. Σε αντίθεση με την Νευτώνεια θεωρία, ωστόσο, τα αδρανειακά συστήματα που βρίσκονται μέσα στο σχετικιστικό ρευστό, δεν είναι σε ηρεμία σε σύγκριση με αυτά των μακρινών αστέρων. Τα τοπικά αυτά συστήματα δέχονται την στρέβλωσή τους ή καλύτερα το συρμό τους από την περιστροφή του ρευστού Ο υπολογισμός του ρυθμού της περιστροφής είναι σημαντικός για τον καθορισμό της ισορροπίας μεταξύ της βαρύτητας, της πίεσης και των φυγόκεντρων δυνάμεων και αυτόν διαπραγματεύεται το τρίτο κεφάλαιο.

Το τέταρτο κεφάλαιο διαπραγματεύεται την εξέλιξη των εσώτερων ευσταθών κυκλικών τροχιών των σημειακών σωματιδίων λόγω περιστροφής του αστέρα. Ξεκινούμε από συγκεκριμένα βήματα, παρόμοια με αυτά του δεύτερου κεφαλαίου και καταλήγουμε σε μια τελική έκφραση για την ενέργεια, την στροφορμή αλλά και την ακτίνα περιστροφής των σημειακών σωματιδίων γύρω από την βαρυτική πηγή. Τέλος κάνουμε μια σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά ενός μη περιστρεφόμενου αστέρα .

Το πέμπτο κεφάλαιο συσχετίζεται άμεσα με το τέταρτο μάλιστα αποτελεί συνέχεια καθώς χρησιμοποιούμε όλα τα αποτελέσματα για να βρούμε τις συχνότητες περιστροφής των σημειακών σωματιδίων. Στο κεφάλαιο αυτό προσπαθούμε να εξηγήσουμε τα παρατηρησιακά αποτελέσματα με την θεωρία του παραμετρικού συντονισμού. Αφού περιγράφουμε την παραπάνω θεωρία δίνουμε τα αποτελέσματά τις και τα συγκρίνουμε με αυτά που προκύπτουν από τις παρατηρήσεις.

Το έκτο κεφάλαιο είναι στην ουσία προέκταση του τετάρτου κεφαλαίου, καθώς μελετούμε τα ίδια φαινόμενα σε ένα διαφορετικό σύστημα. Χρησιμοποιούμε ωστόσο έναν διαφορετικό χωρόχρονο ή καλύτερα μια διαφορετική λύση των εξισώσεων πεδίου του Einstein, την λύση Kerr-Newman. Εισβάλουμε σε μια πιο πολύπλοκη και ενδιαφέρουσα σκοπιά του προβλήματος των εσώτερων ευσταθών κυκλικών τροχιών, καθώς μιλούμε πλέον για ένα ταχέως περιστρεφόμενο συμπαγές σώμα. Τέλος σχολιάζουμε τα αποτελέσματα και τα συγκρίνουμε με αυτά του αργά περιστρεφόμενου συμπαγούς σώματος, που εξετάσαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο.

Το έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζει μερικά αποτελέσματα του δορυφόρου RXTE. Τρία διαφορετικά φαινόμενα ως τώρα έχουν παρατηρηθεί στα διπλά συστήματα ακτίνων X. Ιστορικά, το πρώτο που ανακαλύφθηκε ήταν οι ημι-περιοδικές ταλαντώσεις τάξεως των kHz (kHz QPOs) οι οποίες οφείλονται στην τροχιακή κίνηση της ροής της ύλης. Έπειτα σειρά είχαν οι εκρηκτικές ταλαντώσεις (burst oscillations) πιθανότατα εξαιτίας της περιστροφής ενός στρώματος ύλης κοντά στην ατμόσφαιρα ενός αστέρα νετρονίων. Τέλος ο RXTE ανίχνευσε την πρώτη συχνότητα από spin σ'έναν ασθενούς μαγνητικού πεδίου αστέρα νετρονίων με δίσκο προσαύξησης κάτι που η επιστημονική κοινότητα περίμενε ανυπόμονα αρκετό καιρό τώρα.

Τα φαινόμενα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά και επιπλέον σχολιάζονται τα χαρακτηριστικά τους. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται λόγος και για τα μοντέλα περιγραφής των ημι-περιοδικών ταλαντώσεων δίνοντας έμφαση κυρίως στο μοντέλο της σχετικιστικής μετάπτωσης, το οποίο μαζί με το μοντέλο του παραμετρικού συντονισμού δείχνουν να αποτελούν τα κύρια μοντέλα περιγραφής των KHz QPOs.

Τέλος στο όγδοο κεφάλαιο αναφέρουμε μερικά στοιχεία που αποδεικνύουν ότι οι δυο συχνότητες των QPOs στην πηγή SCO X1, βρίσκονται σε λόγο 2:3 η οποία μας είναι γνωστή από μελέτες υποψήφιων πηγών Μελανών Οπών, όπως η XTE J1550-564. Αυτό υποδεικνύει ότι οι συχνότητες των KHz QPOs σε αστέρες Νετρονίων έχουν ως κύρια πηγή δημιουργίας το ισχυρό βαρυτικό πεδίο, ενώ η περιστροφή της επιφάνειας του αστέρα Νετρονίων ή το μαγνητικό του πεδίο έρχονται σε δεύτερη μοίρα, επηρεάζοντας ελάχιστα έως καθόλου την τιμή του λόγου αυτού.

Διερευνούμε επίσης την ιδέα ότι τα φαινόμενα παραμετρικού συντονισμού σε γεωδαισιακή κίνηση γύρω από μια Μελανή Οπή ή Αστέρα Νετρονίων, μπορεί να συσχετίζονται με τις υψηλές συχνότητες των ημι-περιοδικών ταλαντώσεων (δίδυμες κορυφές) που παίρνουμε σε μερικά διπλά συστήματα μικρής μάζας ακτίνων X. Έχουμε υποθέσει ότι τα σωματίδια ή το στοιχειώδες ρευστό του δίσκου προσαύξησης έχει υποστεί μια υποθετική ισοτροπική διαταραχή γενικής μορφής. Έχουμε βρει ότι ο παραμετρικός συντονισμός συμβαίνει κοντά στην ακτίνα στην οποία ο λόγος των επικυκλικών συχνοτήτων ω_r / ω_θ είναι 2:3. Το εύρος των συχνοτήτων με το μεγαλύτερο πλάτος διέγερσης ποικίλουν με την ισχύ της διαταραχής. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τους πραγματικούς λόγους συχνοτήτων των twin KHz QPOs που έχουν καταγραφεί σε μερικά υποψήφια συστήματα για Μελανές Οπές, καθώς μπορεί να συσχετίζονται και με τις ΄΄δίδυμες κορυφές΄΄ της πηγής SCO X1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στατικοί χωρόχρονοι με σφαιρική συμμετρία.

ΓΕΝΙΚΑ

Για την περιγραφή των φυσικών φαινομένων στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης φυσικής θεωρίας, όπως είναι η Νευτώνεια θεωρία ή η ΓΘΣ, είναι απαραίτητη η παραδοχή ορισμένων ιδιοτήτων για την πολλαπλότητα, μέσα στην οποία συμβαίνουν αυτά. Η πολλαπλότητα είναι ένας χώρος που τοπικά μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο και γι'αυτό μπορεί να καλύπτεται από συντεταγμένα κομμάτια, ένας μαθηματικός θα όριζε την *διαφορίσιμη πολλαπλότητα* με n το πλήθος διαστάσεις ως το συνεχές σημείων, τα οποία είναι δυνατό να χαρακτηρισθούν από ένα συνεχές πλήθος n παραμέτρων $x^i (i = 1, 2, 3..., n)$. Έτσι δεχόμαστε ότι η πολλαπλότητα μπορεί να παρασταθεί με ένα *μετρικό χώρο*. Αυτό σημαίνει, ότι δεχόμαστε την ύπαρξη ενός συμμετρικού *μετρικού τανυστή* οι συνιστώσες, $g_{\mu\nu}$, του οποίου σε ένα σημείο είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων του σημείου

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^i) = g_{\nu\mu} \tag{1.1}$$

Με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή (1.1) η *στοιχειώδης απόσταση* ή *στοιχειώδες μήκος* ή *γραμμικό στοιχείο*, ds, μεταξύ δύο γειτονικών στοιχείων με συντεταγμένες x^i και $x^i + dx^i$ εκφράζεται με την σχέση

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{1.2}$$

Είναι προφανές ότι η απλούστερη φυσική περίπτωση που μπορούμε να εξετάσουμε είναι ένα στατικό σύστημα, αστέρας ή μελανή οπή. Ορίζουμε ως *στατικό* χωρόχρονο, ένα χωρόχρονο στον οποίο μπορούμε να βρούμε μια χρονική συντεταγμένη t με τις εξής ιδιότητες:

a) όλες οι συνιστώσες τις μετρικής να είναι ανεξάρτητες του t και
b) η γεωμετρία να διατηρείται αμετάβλητη σε χρονικές αναστροφές t $\rightarrow$ - t.

Ένας χωρόχρονος με την ιδιότητα a) αλλά όχι απαραίτητα την b) ονομάζεται *στάσιμος*.

Η μετρική λοιπόν που χαρακτηρίζει έναν στατικό σφαιρικά συμμετρικό χωρόχρονο είναι

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.3}$$

όπου τα $\Phi(r)$ και $\Lambda(r)$ αντικατέστησαν τις δυο άγνωστες συναρτήσεις $g_{00}(r)$ και $g_{rr}(r)$. Επειδή το ενδιαφέρον μας περιορίζεται στους αστέρες οι οποίοι αποτελούν φραγμένα συστήματα, δικαιούμαστε να απαιτήσουμε ο χωροχρόνος να είναι ασυμπτωτικά επίπεδος σε μεγάλη απόσταση από τον αστέρα. Κατά συνέπεια είναι δυνατές οι ακόλουθες συνοριακές συνθήκες που θα συνοδεύουν τις εξισώσεις του Einstein:

$$\lim_{r\to\infty} \Phi(r) = \lim_{r\to\infty} \Lambda(r) = 0 \tag{1.4}$$

Είναι δυνατόν να δειχθεί ότι για τη μετρική (1.3) ο τανυστής Einstein έχει τις εξής συνιστώσες :

$$G_{00} = \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr}\left[r\left(1 - e^{-2\Lambda}\right)\right] \tag{1.5}$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} e^{2\Lambda}\left(1 - e^{-2\Lambda}\right) + \frac{2}{r}\Phi' \tag{1.6}$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\Lambda}\left[\Phi'' + \left(\Phi'\right)^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi'\Lambda' - \frac{\Lambda'}{r}\right] \tag{1.7}$$

$$G_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, G_{\theta\theta} \tag{1.8}$$

όπου $\Phi' \equiv d\Phi / dr$ και $\Lambda' = d\Lambda / dr$. Οι υπόλοιπες συνιστώσες μηδενίζονται.

Οι εξισώσεις του Einstein για στατικό, ιδανικό ρευστό.

Ενδιαφερόμαστε για στατικούς αστέρες των οποίων το ρευστό δεν κινείται. Άρα η μοναδική, μη μηδενική συνιστώσα της τετραταχύτητας είναι η U^0. Από την συνθήκη κανονικοποίησης της τετραταχύτητας

$$\vec{U} \cdot \vec{U} = -1 \tag{1.9}$$

συνεπάγεται ότι

$$U^0 = e^{-\Phi} \quad \kappa\alpha\iota \quad U_0 = -e^{\Phi} \tag{1.10}$$

Τότε ο τανυστής ενέργειας – ορμής του Einstein T θα έχει τις εξής μη μηδενικές συνιστώσες:

$$\mathrm{T}_{00} = \rho e^{2\Phi} \tag{1.11}$$

$$T_{rr} = p e^{2\Lambda} \tag{1.12}$$

$$\mathrm{T}_{\theta\theta} = r^2 p \tag{1.13}$$

$$T_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, \mathrm{T}_{\theta\theta} \tag{1.14}$$

Τα p και ρ που εμφανίζονται στον τανυστή ενέργειας – ορμής, μπορούν να συνδέονται μέσω μιας καταστατικής εξίσωσης. Για ένα απλό ρευστό σε τοπική θερμοδυναμική ισορροπία υπάρχει πάντα μια σχέση της μορφής

$$p = p(\rho, S) \tag{1.15}$$

η οποία παρέχει την πίεση συναρτήσει της πυκνότητας ενέργειας και της ειδικής εντροπίας. Συχνά αντιμετωπίζουμε καταστάσεις στις οποίες η εντροπία μπορεί να θεωρηθεί ως σταθερή ή αμελητέες οπότε λαμβάνουμε την σχέση

$$p = p(\rho) \tag{1.16}$$

Οι νόμοι διατήρησης που υπακούν στην σχέση

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0 \tag{1.17}$$

καταλήγουν σε τέσσερις εξισώσεις, μια για κάθε τιμή του ελεύθερου δείκτη α. Λόγω όμως των συμμετριών μόνο μια από αυτές για α = r , δεν μηδενίζεται εκ ταυτότητας, και οδηγεί στην εξίσωση :

$$(\rho + p)\frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr} \tag{1.18}$$

Από αυτήν την εξίσωση γνωρίζουμε ποια είναι η αναγκαία βαθμίδα πίεσης ώστε το ρευστό να παραμείνει στατικό στο βαρυτικό πεδίο, του οποίου η επίδραση εξαρτάται από το $d\Phi / dr$.

Η συνιστώσα 00 των εξισώσεων του Einstein μπορεί να προσδιορισθεί από τις εξισώσεις (1.5) και (1.11). Στο σημείο αυτό θα αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση Λ(r) με μια άλλη άγνωστη συνάρτηση m(r), η οποία ορίζεται ως

$$m(r) = \tfrac{1}{2} r\left(1 - e^{-2\Lambda}\right) \tag{1.19}$$

ή

$$g_{rr} = e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \tag{1.20}$$

Από την 00 εξίσωση έπεται ότι

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{1.21}$$

Η εξίσωση αυτή αν και έχει την ίδια μορφή με την αντίστοιχη Νευτώνεια στην οποία η m(r) είναι η μάζα στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας r, στη Σχετικότητα παίρνει μια εντελώς διαφορετική έννοια, την ονομάζουμε συνάρτηση μάζας, χωρίς να μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως την ενέργεια της μάζας στο εσωτερικό της σφαίρας και τούτο διότι στη ΓΘΣ η ολική ενέργεια δεν είναι εντοπίσιμη.

Από τις εξισώσεις (1.6) και (1.12) η rr εξίσωση μπορεί να λάβει την μορφή

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m(r) + 4\pi r^3 p}{r\left[r - 2m(r)\right]} \tag{1.22}$$

Εάν λοιπόν έχουμε μια καταστατική εξίσωση της μορφής (1.16) τότε οι (1.16), (1.18) ,(1.21) και (1.22) αποτελούν τέσσερις εξισώσεις για τους αγνώστους Φ, m , p και ρ.

Στο εξωτερικό του αστέρα θα ισχύει ρ = p = 0 οπότε θα έχουμε τις εξής εξισώσεις:

$$\frac{dm}{dr} = 0 \tag{1.23}$$

και

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{m}{r(r - 2m)} \tag{1.24}$$

οι οποίες έχουν ως λύσεις τις

$$m(r) = M = \sigma\tau\alpha\theta \tag{1.25}$$

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2M}{r} \tag{1.26}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την απαίτηση $\Phi \to 0$, καθώς $r \to \infty$. Επομένως η μετρική στο εξωτερικό έχει την κάτωθι μορφή, η οποία ονομάζεται *μετρική του Schwarzschild* :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.27}$$

Αξίζει να σημειώσουμε για μικρές τιμές του λόγου 2M/r η μετρική παίρνει την μορφή

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1.28}$$

η οποία αποτελεί την μετρική ενός στατικού ασθενούς βαρυτικού πεδίου με Νευτώνειο βαρυτικό δυναμικό Φ = - M/r , δηλαδή η μετρική σε μεγάλες αποστάσεις από έναν αστέρα ολικής μάζας M.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονίσω ότι σύμφωνα με το θεώρημα του Birkhoff, η λύση του *Schwarzschild* είναι η μοναδική σφαιρικά συμμετρική, ασυμπτωτικά επίπεδη λύση των εξισώσεων Einstein για το κενό. Επομένως ακόμη και ένας ακτινικά παλλόμενος ή βαρυτικά καταρρέων αστέρας θα έχει στο εξωτερικό του μια στατική μετρική με σταθερή μάζα M. Η σταθερά M έχει διαστάσεις μήκους, λέγεται *ακτίνα βαρύτητας ή ακτίνα Schwarzschild* και σε μη γεωμετροποιημένες μονάδες όπου τα c, G ≠ 1 δίνεται από την σχέση

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \tag{1.29}$$

Για συνηθισμένους αστέρες η R_S είναι πολύ μικρότερη από την πραγματική ακτίνα του αστέρα. Έτσι για τον Ήλιο είναι $R_{S\odot} \sim 2,96$ km .

Η Εσωτερική δομή ενός αστέρα και οι ακριβείς λύσεις.

Στο εσωτερικό του αστέρα θα ισχύει ρ ≠ 0 και p ≠ 0, οπότε μπορούμε να διαιρέσουμε την εξ. (1.18) με (ρ + p) και ακολούθως να τη χρησιμοποιήσουμε για την απαλοιφή του Φ από την εξ.(1.22). Το αποτέλεσμα που θα λάβουμε ονομάζεται εξίσωση Oppenheimer – Volkov ή Tolman –O-V.

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p+\rho)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)} \tag{1.30}$$

Η παραπάνω εξίσωση μαζί με τις (1.21) και (1.16) αποτελούν μια ομάδα εξισώσεων για τον προσδιορισμό των m, ρ και p. Το Φ τώρα μπορεί να υπολογισθεί από την εξ.(1.18) εάν γνωρίζουμε είδη τα ρ και p. Τώρα πλέον μπορούμε να ορίσουμε την επιφάνεια του αστέρα ως την περιοχή που ισχύει p = 0. Η αιτία που η σχέση p = 0 χαρακτηρίζει την επιφάνεια είναι ότι η συνάρτηση της πίεσης πρέπει να είναι παντού συνεχής, ειδάλλως θα είχαμε μια άπειρη βαθμίδα πίεσης και δυνάμεις απείρου μέτρου επι των στοιχείων του ρευστού. Αφού p = 0 στο κενό στο εξωτερικό του αστέρος, θα πρέπει και στην επιφάνειά του να έχουμε p = 0. Κατά συνέπεια, η ολοκλήρωση της εσωτερικής λύσης τερματίζεται στην επιφάνεια και επιβάλλεται η απαίτηση, η εξωτερική μετρική να είναι η μετρική Schwarzschild . Έστω R η τιμή της ακτίνας στην επιφάνεια. Για να έχουμε μια ομαλή γεωμετρία θα πρέπει οι μετρικές συναρτήσεις να είναι συνεχείς στο r = R. Στο εσωτερικό του αστέρα έχουμε

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} \tag{1.31}$$

ενώ στο εξωτερικό

$$g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{1.32}$$

Λόγω της συνέχειας, η σταθερά M είναι

$$M \equiv m(R) \tag{1.33}$$

Άρα η ολική μάζα του αστέρα, όπως προσδιορίζεται από μεγάλη απόσταση, είναι το ολοκλήρωμα

$$M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho \, dr \tag{1.34}$$

όπως και στη Νευτώνεια θεωρία. Γνωρίζοντας πλέον το M, προσδιορίζουμε το g_{00} στο εξωτερικό του αστέρος, και κατά συνέπεια στην επιφάνειά του:

$$g_{00}(r = R) = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right) \tag{1.35}$$

Η σχέση αυτή θα αποτελέσει τη σταθερά ολοκλήρωσης της τελικής διαφορικής εξίσωσης, από την οποία θα υπολογίσουμε το Φ στο εσωτερικό του αστέρα, εξ.(1.18) Έτσι έχουμε πλέον την πλήρη λύση του προβλήματος.

Τώρα πλέον έχουμε πει όλο το υπόβαθρο για να περάσουμε στις ακριβείς εσωτερικές λύσεις, που άλλωστε ήταν και ο σκοπός αυτής της παραγράφου. Υπάρχουν δυο ακριβείς λύσεις των σχετικιστικών εξισώσεων, η λύση του *Schwarzschild* και μια πιο πρόσφατη η λύση του Buchdahl (1981), σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε μόνο με την πρώτη.

Για λόγους απλούστευσης της προσπάθειας επίλυσης των εξ. (1.21) και (1.30) θα υποθέσουμε ότι

$$\rho = \text{σταθ} \tag{1.36}$$

η οποία θα αποτελεί την καταστατική εξίσωση, δίχως βέβαια να υπάρχει κάποια φυσική αιτιολόγηση γι'αυτήν. Παρόλα αυτά, το εσωτερικό των πυκνών αστέρων νετρονίων χαρακτηρίζεται από μια σχεδόν σταθερή πυκνότητα. Επομένως η λύση που θα παρουσιάσουμε έχει κάποιο αστροφυσικό ενδιαφέρον. Η εξ. (1.21) ολοκληρώνεται αμέσως και δίνει

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho \quad \text{οταν} \quad r \le R \tag{1.37}$$

όπου R η άγνωστη προς το παρόν, ακτίνα του αστέρα. Για $r > R$, η πυκνότητα μηδενίζεται και η m(r) είναι συνεχής για r = R. Από εδώ έπεται

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho \equiv M \quad \text{οταν} \quad r \geq R \tag{1.38}$$

όπου η σταθερά M είναι η μάζα του Schwarzschild .Τώρα πλέον μπορούμε να επιλύσουμε την εξίσωση O-V εξ. (1.30). Αντικαθιστώντας την m από την (1.37) έχουμε

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{(p+\rho)(\rho+3p)}{1-\frac{8}{3}\pi r^2 \rho} \tag{1.39}$$

η οποία μετά το χωρισμό των μεταβλητών καταλήγει στην

$$\frac{dp}{(p+\rho)(\rho+3p)} = -\frac{4}{3}\pi r \frac{dr}{1-\frac{8}{3}\pi r^2 \rho} \tag{1.40}$$

η ολοκλήρωση του αριστερού μέλους απαιτεί την διάσπαση του πολυωνύμου με τον ακόλουθο τρόπο

$$\frac{1}{(p+\rho)(\rho+3p)} = \frac{\mathrm{A}}{p+\rho} + \frac{\mathrm{B}}{\rho+3p} \tag{1.41}$$

το οποίο οδηγεί

$$\begin{gathered} (3\mathrm{A}+\mathrm{B})\,p + (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\rho - 1 = 0 \quad \text{με την απαιτηση} \\ 3\mathrm{A}+\mathrm{B}=0 \quad \textit{και} \quad (\mathrm{A}+\mathrm{B})\,\rho - 1 = 0 \quad \textit{απο την οποια εχω} \\ \mathrm{A} = -\frac{1}{2\rho} \quad \textit{και} \quad \mathrm{B} = \frac{3}{2\rho} \end{gathered} \tag{1.42}$$

Οπότε έχω

$$\int_{p_c}^{p} -\frac{dp}{2\rho(\rho+p)} + \int_{p_c}^{p} \frac{3dp}{2\rho(\rho+3p)} = -\frac{4\pi}{3}\int_0^r \frac{d\left(1-\frac{8}{3}\pi\rho r^2\right)}{1-\frac{8}{3}\pi\rho r^2} \tag{1.43}$$

όπου p_c μια αυθαίρετη κεντρική πίεση το παραπάνω ολοκλήρωμα καταλήγει τελικά στην απλή εξίσωση

$$\left[\ln\frac{\rho+3p}{\rho+p}\right]_{p_c}^{p} = \left[\ln\left(1-\tfrac{8}{3}\pi\rho r^2\right)^{1/2}\right]_0^r \tag{1.44}$$

από όπου έχω τελικά μέσω και της (1.37)

$$\frac{\rho+3p}{\rho+p} = \frac{\rho+3p_c}{\rho+p_c}\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{1/2} \tag{1.45}$$

αν θυμηθούμε αυτά που αναφέραμε παραπάνω ότι στην επιφάνεια του αστέρα η πίεση μηδενίζεται ότι για r = R έχω p = 0 τότε καταλήγω για την κεντρική πίεση στην εξίσωση

$$p_c = \rho \frac{1-\left(1-\dfrac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1-\dfrac{2M}{R}\right)^{1/2}-1} \tag{1.46}$$

αντικαθιστώντας το p_c από την τελευταία, στην εξ.(1.45) λαμβάνουμε τελικά την εξής πολύ χρήσιμη σχέση για την κατανομή της πίεσης στο εσωτερικό του αστέρα

$$p = \rho \frac{\left(1-\dfrac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}-\left(1-\dfrac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3\left(1-\dfrac{2M}{R}\right)^{1/2}-\left(1-\dfrac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2}} \tag{1.47}$$

Να σημειώσουμε ότι η εξ. (1.46) συνεπάγεται $p_c \to \infty \quad \textit{καθως} \quad \dfrac{M}{R} \to \dfrac{4}{9}$. Στην τιμή του λόγου αυτού θα αναφερθώ σε λίγο γιατί αποτελεί το καρπό όλων αυτών των εξισώσεων. Είναι η σχέση που θέλαμε να καταλήξουμε από την αρχή και την οποία θα την χρησιμοποιήσουμε και στη συνέχεια όταν θα μιλήσω για την βαρυτική μετάθεση.

Θα τελειώσω με την περίπτωση της σταθερής πυκνότητας, λύνοντας την εξ.(1.18) ως προς Φ. Η τιμή του Φ στο r = R προκύπτει από την συνέχεια του g_{00}:

$$g_{00}(R) = -\left(1-\frac{2M}{R}\right) \tag{1.48}$$

Άρα λαμβάνουμε

$$\exp(\Phi) = \frac{3}{2}\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2Mr^2}{R^3}\right)^{1/2} \quad \textit{για} \quad r \le R \tag{1.49}$$

Σημειώνουμε ότι τα Φ και m είναι μονοτόνως αύξουσες συναρτήσεις του r, ενώ η p είναι μονοτόνως φθίνουσα.

Ας επανέλθουμε όμως στο κυρίως αποτέλεσμα όλης αυτής της επεξεργασίας, η εξίσωση (1.46) μας έδωσε ένα όριο στη τιμή του λόγου M/R :

$$M \le \frac{4}{9} R \tag{1.50}$$

Στο παραπάνω όριο καταλήγει και η λύση του Buchdahl με ένα βέβαια πιο μαθηματικό και δυσκολότερο τρόπο, γι’αυτό άλλωστε δεν ήθελα να αναφερθώ σ’αυτήν την λύση. Η σχέση αυτή μας λέει ότι δεν υπάρχουν αστέρες σταθερής πυκνότητας με ακτίνες μικρότερες του 9/4 M, καθώς η στατική ισορροπία τους θα απαιτούσε πιέσεις μεγαλύτερες και από άπειρες! Ουσιαστικά, τα παραπάνω ισχύουν για κάθε αστρικό μοντέλο, κάτι που είναι γνωστό ως *θεώρημα του Buchdahl* . Έστω ένας αστέρας ακτίνας R = 9M/4. Εάν στον αστέρα αυτόν προσδοθεί μια (σφαιρικά συμμετρική) ώθηση με κατεύθυνση προς το εσωτερικό του, ο αστέρας δεν μπορεί παρά να καταρρεύσει προς τα μέσα, είναι αδύνατον να επανακτήσει μια κατάσταση στατικής ισορροπίας. Ωστόσο, κατά την διάρκεια της κατάρρευσης, η μετρική στο εξωτερικό του είναι η μετρική Schwarzschild.

Ανακεφαλαιώνοντας, στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας δεν μπορούν να υπάρξουν ομογενείς πυκνότητας αστέρες μάζας μεγαλύτερης από 4R/9. Θέτοντάς το από διαφορετική σκοπιά η μέγιστη μάζα που μπορεί να έχει ένας αστέρας σταθερής πυκνότητας ρ_0 είναι

$$M_{\max} = \frac{4}{9(3\pi)^{1/2}} \rho_0^{-1/2} \qquad (1.51)$$

Η ύπαρξη ενός μέγιστου ορίου της μάζας στη ΓΘΣ δεν έχει να κάνει με τις περιορισμένες συνθήκες που θέσαμε στη πυκνότητα των αστέρων, εννοώντας την σταθερή πυκνότητα. Στην πραγματικότητα αν υποθέσουμε μια πυκνότητα ρ(r) μη αρνητική και φθίνουσα μονότονη συνάρτηση του r, τότε μπορούμε να πάρουμε δυο ειδών μέγιστα όρια στην μάζα των αστέρων. (i) Για αστέρες καθορισμένης ακτίνας R και σταθερής πυκνότητας, η μέγιστη μάζα δίνεται από την σχέση (1.50). (ii) Για μια καθορισμένη όμως καταστατική εξίσωση μικρότερης της ρ_0, υπάρχει ένα μέγιστο όριο στη μάζα του αστέρα, ανεξάρτητα της καταστατικής του εξίσωσης για πυκνότητες μεγαλύτερες της ρ_0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Τροχιές στο Χωρόχρονο Schwarzschild και άλλα Σχετικιστικά παρατηρήσιμα φαινόμενα

ΓΕΝΙΚΑ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ασχοληθούμε με τα κυριότερα βαρυτικά φαινόμενα που απασχόλησαν τον ανθρώπινο νου τα τελευταία σαράντα χρόνια. Θα ξεκινήσουμε με το φαινόμενο της **Βαρυτικής Μετάθεσης**, καθώς είναι ένα από τα σημαντικότερα σχετικιστικά βαρυτικά φαινόμενα, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου θα αποδείξουμε πως δεν γίνεται να έχουμε μετάθεση του z μεγαλύτερη από 2 στο βαρυτικό πεδίο ενός σφαιρικά συμμετρικού αστέρα. Η απόδειξη θα γίνει με τον πλέον απλό τρόπο αποφεύγοντας όρους όπως διανύσματα Killing, καθώς στη γνώση και χρήση του τελευταίου μπορεί να γίνει η πλέον κατάλληλη απόδειξη όπως αυτή υπάρχει στην ξένη βιβλιογραφία.

Επόμενο βήμα είναι να μελετήσουμε τις τροχιές που ακολουθούν τα σωματίδια ή φωτόνια γύρω από έναν συμμετρικό στατικό και **μη περιστρεφόμενο αστέρα**. Το τελευταίο το τονίζουμε διότι το κυρίως μέρος της εργασίας αυτής είναι η μελέτη τροχιών ελεύθερων σωματιδίων γύρω από συμπαγής αστέρες. Σε επόμενο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις ίδιες τροχιές σε **αργά περιστρεφόμενο αστέρα**.

Τέλος θα μιλήσουμε και για ένα σχετικιστικά παρατηρήσιμο φαινόμενο που οφείλεται στο έντονο βαρυτικό πεδίο των αστέρων και ονομάζεται **μετάθεση του περιηλίου**.

Βαρυτική Μετάθεση

Έχει γίνει γνωστό από το προηγούμενο κεφάλαιο, πως το γραμμικό στοιχείο στη γεωμετρία του Schwarzschild δίνεται από την σχέση

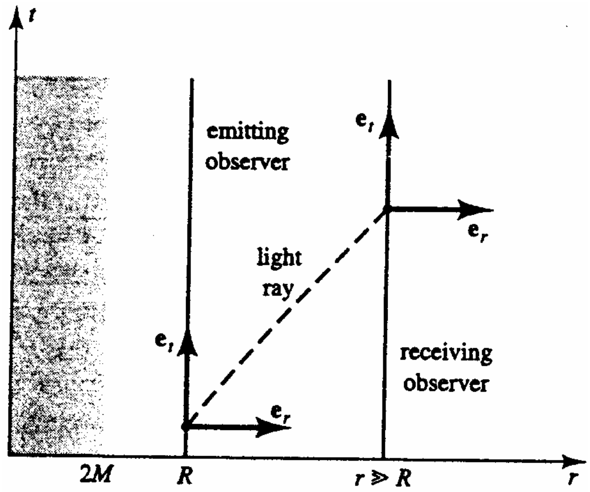
$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \qquad (2.1)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι δύο παρατηρητές βρίσκονται ακίνητοι ο ένας κοντά στο συμπαγές αντικείμενο (Π1) και ο άλλος πάρα πολύ μακριά όπου η γεωμετρία του χώρου του είναι επίπεδη (Π2) (Εικόνα 7.1). Οι παρατηρητές αποφασίζουν να ανταλλάξουν φωτεινά σήματα, τότε για τα διαστήματα **ίδιων χρόνων** του καθένα θα έχουμε από την (2.1)

$$d\tau_1 = \left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{1/2} dt$$
$$d\tau_2 = \left(1 - \frac{2m}{r_2}\right)^{1/2} dt \qquad (2.2)$$

όπου θυμίζουμε ότι οι παρατηρητές θεωρούνται ακίνητοι δηλαδή dr = dθ = dφ = 0. Διαιρώντας τις (2.2) μεταξύ τους και παίρνοντας υπόψη την σχέση

$$c = \frac{\lambda}{\tau} \quad \text{και} \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau} \qquad (2.3)$$



ΕΙΚΟΝΑ 7.1 Χωροχρονικό διάγραμμα που δείχνει τις κοσμικές γραμμές των δυο παρατηρητών έξω από το σφαιρικά συμμετρικό σώμα. Ο ένας παρατηρητής βρίσκεται στην ακτίνα R ο άλλος στο άπειρο. Φωτόνιο εκπέμπεται από το R με συχνότητα ω_1 όπως αυτό μετρείται από το εργαστήριο του ίδιου. Το φωτόνιο πορεύεται κατά μήκος της εστιασμένης γραμμής και φτάνει στο παρατηρητή που βρίσκεται στο άπειρο με συχνότητα ω_2. Η μετρούμενη συχνότητα ω_2 είναι μικρότερη από την ω_1 διότι το φωτόνιο ξοδεύει ενέργεια κατά την προσπάθειά του να ανέβει το δυναμικό της βαρυτικής πηγής. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται βαρυτική μετάθεση.

έχουμε

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2m}{r_2}\right)^{1/2}} \qquad (2.4)$$

Από την (2.4) καταλήγω στο συμπέρασμα πως για $r_2 > r_1$ όταν δηλαδή ο πομπός βρίσκεται πιο κοντά στο βαρυτικό πεδίο του συμπαγούς αντικειμένου από το δέκτη τότε και $\omega_1 > \omega_2$ η' $\lambda_2 > \lambda_1$ πράγμα που σημαίνει πως το μήκος κύματος του φωτονίου που μετρά ο δέκτης είναι μεγαλύτερο από το αρχικό μήκος με το οποίο ξεκίνησε από τον πομπό. Παρατηρούμε λοιπόν μια μετάθεση προς το ερυθρό.

Το παραπάνω φαινόμενο φαίνεται λογικό αν αναλογιστούμε πως το φωτόνιο ενέργειας $\mathrm{E} = \hbar\omega$ θα πρέπει να ελαττώνει την ενέργειά του καθώς προσπαθεί να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο. Θεωρώντας την περίπτωση ασθενούς βαρυτικού πεδίου δηλαδή

$$\frac{2m}{r} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2GM}{c^2 r} \ll 1 \tag{2.5}$$

όπου ο δεύτερος όρος προέκυψε αντικαθιστώντας τα G και c σε μη γεωμετρικοποιημένες μονάδες, η σχέση (2.4) καταλήγει στην

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{2m}{r_2}\right)^{-1/2} \sim \left(1 - \frac{m}{r_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{m}{r_2}\right) \sim 1 + \frac{m}{r_2} - \frac{m}{r_1} \tag{2.6}$$

ή αντικαθιστώντας τα G και c

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 - \frac{GM}{c^2 r_1} + \frac{GM}{c^2 r_2} \tag{2.7}$$

Εκτελώντας απλές αλγεβρικές πράξεις καταλήγω στην σχέση

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{GM}{c^2} \cdot \omega_1 \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \tag{2.8}$$

Η τελευταία σχέση πολλαπλασιασμένη με $\hbar$ μας δίνει την διαφορά της ενέργειας του φωτονίου στο Νευτώνειο όριο.

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση (2.4) μπορούμε να υπολογίσουμε την μέγιστη μετάθεση z που μπορεί να έχει το εκπεμπόμενο φως από την επιφάνεια ενός συμμετρικού αστέρα. Αν αντικαταστήσουμε στην σχέση (2.4) την απόσταση του παρατηρητή 2 με αυτήν στο άπειρο δηλαδή πολύ μακριά του βαρυτικού πεδίου όπου ο χώρος θεωρείται επίπεδος και την απόσταση του παρατηρητή 1 την βάλουμε στην απόσταση που ορίζει η σχέση(1.50), δηλαδή στην μέγιστη ακτίνα ενός σφαιρικά συμμετρικού και ομογενούς αστέρα, τότε παίρνουμε

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big|_{\max} = \frac{\left(1 - \dfrac{2M}{\frac{9M}{4}}\right)^{1/2}}{\left(1 - \dfrac{2M}{\infty}\right)^{1/2}} = \left(1 - \frac{8}{9}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} = \frac{1}{3} \tag{2.9}$$

Θυμίζοντας ότι η μετάθεση Doppler δίνεται από την σχέση

$$z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} \tag{2.10}$$

όπου λ_2 είναι το κύμα που υπέστη μετάθεση έχω

$$z_{\max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}|_{\max} - 1 = \frac{\omega_1}{\omega_2}|_{\max} - 1 = 3 - 1 = 2 \tag{2.11}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μας δηλώνει πως δεν μπορούμε να πάρουμε μετάθεση φασματικών γραμμών λόγω έντονου βαρυτικού πεδίου παραπάνω από 2. Πολλές αστροφυσικές πηγές παρουσιάζουν μετάθεση παραπάνω από 5, όπως οι κβάζαρς. Τα τελευταία είναι αστρικά αντικείμενα με έντονο βαρυτικό πεδίο τα οποία βρίσκονται στις παρυφές του Σύμπαντος. Έτσι η μετάθεσή τους οφείλεται αφενός μεν στο έντονο βαρυτικό τους πεδίο αφετέρου δε στο φαινόμενο Doppler λόγω της απομάκρυνσής τους από εμάς με ταχύτητες που πλησιάζουν αυτές του φωτός. Για τον ήλιο μας η παραπάνω μετάθεση είναι

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \sim 2 \cdot 10^{-6} \text{ cm} \tag{2.12}$$

Αν θεωρήσουμε τώρα τον παρατηρητή 2 ότι βρίσκεται πολύ μακριά από την πηγή τότε ο ίδιος χρόνος θα ταυτίζεται με τον συντεταγμένο χρόνο δηλαδή dτ = dt. Υποθέτοντας επίσης πως ο παρατηρητής 1 βρίσκεται στην απόσταση $r \to 2m$ τότε βλέπουμε πως η (2.9) τείνει στο μηδέν και συνεπώς η μετάθεση z τείνει στο άπειρο.

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα πως άπειρη μετάθεση του φάσματος προς το ερυθρό έχουμε στην περίπτωση που πλησιάσουμε την επιφάνεια μιας Μελανής Οπής.

Επιτρεπτές Τροχιές Σωματιδίων στο Βαρυτικό Πεδίο Schwarzschild.

Η ΄΄γεωμετρία Schwarzschild΄΄ περιγράφει τον κενό χωρόχρονο στο εξωτερικό ενός σφαιρικού αστέρα. Καθορίζεται από μια παράμετρο, τη μάζα Μ, έχει δε το εξής στοιχείο μήκους

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \qquad (2.13)$$

Η σπουδαιότητα αυτού του στοιχείου μήκους δεν έγκειται μόνο στη δυνατότητα περιγραφής του βαρυτικού πεδίου ενός αστέρα, όπως θα δούμε, περιγράφει και τη γεωμετρία των σφαιρικών μελανών οπών. Το κλειδί για την κατανόηση της φυσικής σημασίας αυτής της μετρικής είναι μια προσεκτική μελέτη των χρονοειδών και φωτοειδών γαιωδεσιακών της, δηλαδή των τροχιών ελευθέρων σωματιδίων και φωτονίων.

Ας εξετάσουμε λοιπόν τις τροχιές των σημειακών σωματιδίων οι οποίες ακολουθούν τις χρονοειδής γεωδαισιακές στην Γεωμετρία του Schwarzschild. Τα σημειακά σωματίδια μπορεί να είναι οι πλανήτες οι οποίοι περιστρέφονται γύρω από τον Ήλιο ή να είναι σωματίδια ενός δίσκου προσαύξησης εκτελώντας περιστροφές γύρω από έναν αστέρα νετρονίων ή μια Μελανή Οπή.

Γνωρίζουμε πως όταν ένας χωρόχρονος διαθέτει κάποια συμμετρία, τότε με τη συμμετρία αυτή συνδέεται μια διατηρούμενη συνιστώσα της ορμής. Ο χωρόχρονός μας εδώ διαθέτει αρκετές συμμετρίες, όπως σφαιρική συμμετρία, ανεξαρτησία από το χρόνο, οπότε προκύπτει ότι οι τιμές των διατηρούμενων ποσοτήτων καθορίζουν πλήρως την τροχιά. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε ταυτόχρονα, σωματίδια με μάζα και σωματίδια χωρίς μάζα (φωτόνια).

Εξαιτίας της συμμετρίας Parity στην μετρική του Schwarzschild, δηλαδή ανεξαρτησία της θ σε κυκλική εναλλαγή, $\theta \to \pi - \theta$, έχω σαν αποτέλεσμα αν ένα εφαπτόμενο διάνυσμα της γεωδαισιακής βρίσκεται σε γωνία $\theta = \pi/2$, τότε και η γεωδαισιακή θα βρίσκεται πάνω στο επίπεδο $\theta = \pi/2$, δηλαδή στο ισημερινό επίπεδο, και κάθε περιστροφή θα την βρίσκει στο ίδιο επίπεδο. Έτσι λοιπόν έχουμε να μελετήσουμε μόνο τις ισημερινές γεωδαισιακές. Η χρονική ανεξαρτησία της μετρικής όσο και η ανεξαρτησία της από την αζιμουθιακή γωνία ϕ συνεπάγεται την ύπαρξη δύο ολοκληρωμάτων της κίνησης, τα οποία για την γωνία $\theta = \pi/2$ (κίνηση σε ισημερινό επίπεδο) είναι

$$\text{Ολοκλήρωμα Στροφορμής :} \quad L = p_\phi = r^2 \cdot \dot{\phi}$$
$$\text{Ολοκλήρωμα Ενέργειας :} \quad E = -p_0 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)\cdot \dot{t} \qquad (2.14)$$

Αντίστοιχες εξισώσεις υπάρχουν και για τα φωτόνια. Η πρώτη σχέση των (2.14) στο Νευτώνειο βαρυτικό πεδίο δεν είναι άλλη από τον 2^o νόμο του Kepler, ίσα εμβαδά διαγράφονται σε ίσους χρόνους. Στη Γενική Σχετικότητα η γεωμετρία δεν είναι Ευκλείδεια και δεν μπορούμε να ερμηνεύσουμε την παραπάνω σχέση ανάλογα, το μόνο που μπορούμε να πούμε και αυτό εφόσον ερμηνεύσουμε καλά τα στοιχεία r και $\dot{\phi}$, είναι ότι η ποσότητα $r^2\dot{\phi}$ παραμένει ίδια τόσο σε ασθενές όσο και σε ισχυρό βαρυτικό πεδίο. Οι υπόλοιπες συνιστώσες της ορμής είναι για

$$\text{σωματίδιο}: \; p^0 = g^{00} p_0 = m\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\tilde{E}$$

$$p^r = m\frac{dr}{d\tau} \tag{2.15}$$

$$p^\phi = g^{\phi\phi} p_\phi = m\frac{\tilde{L}}{r^2}$$

και για

$$\text{φωτόνιο} \quad : \; p^0 = g^{00} p_0 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} E$$

$$p^r = \frac{dr}{d\lambda} \tag{2.16}$$

$$p^\phi = \frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{L}{r^2}$$

όπου τα $\tilde{E}, \tilde{L}$ είναι η ανά μονάδα μάζας Ενέργεια και Στροφορμή αντίστοιχα και λ μια τυχαία αφινική παράμετρος. Η γνωστή τώρα σχέση της ΓΘΣ

$$\vec{p}\cdot\vec{p} = -m^2 \tag{2.17}$$

συνεπάγεται για

σωματίδιο :

$$-m^2\tilde{E}^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} + m^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{m^2\tilde{L}^2}{r^2} = -m^2 \tag{2.18}$$

και για φωτόνιο :

$$-E^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = 0 \tag{2.19}$$

Η εξίσωση (2.18) ονομάζεται χρονοειδής γεωδαισιακή ενώ η (2.19) φωτοειδής γεωδαισιακή. Από τις εξισώσεις αυτές λαμβάνουμε τις βασικές εξισώσεις των τροχιών

Για σωματίδιο :

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{L}^2}{r}\right) \tag{2.20}$$

για φωτόνιο :

$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right)\frac{L^2}{r} \tag{2.21}$$

Η σχέση (2.20) μας λέει ότι η ακτινική κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m=1 πάνω στην χρονοειδή γεωδαισιακή είναι ίδια με την κίνηση σωματιδίου μάζας m=1 και ενέργειας E^2 σε μονοδιάστατη μη σχετικιστική κίνηση. Η (2.20) αποτελεί μια άλλη έκφραση του ολοκληρώματος της ενέργειας, η οποία περιέχει μόνο τα r και $\dot{r}$. Είναι επομένως το ολοκλήρωμα της ενέργειας στην ισοδύναμη μονοδιάστατη κίνηση του υλικού σημείου, πάνω στην ακτίνα που το παρακολουθεί. Γίνεται ολοφάνερο πως αν θυμηθούμε από την Μηχανική το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της κίνησης

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V(r) = \mathrm{E}' \qquad (2.22)$$

τότε ταυτίζοντας την ενέργεια $\mathrm{E}' = \frac{E^2 - 1}{2}$ παίρνουμε το υποθετικό δυναμικό $V_{eff}(r)$

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3} \qquad (2.23)$$

Ο νέος όρος που προσδίδει η ΓΘΣ είναι ο τελευταίος όρος $\frac{ML^2}{r^3}$ που για μικρές τιμές του r υπερισχύει του φυγοκεντρικού όρου $\frac{L^2}{2r^2}$. Για μεγάλες τιμές του r το δυναμικό συμπίπτει με το Νευτώνειο δυναμικό όπως ακριβώς δείχνει και η εικόνα 2.2. Και αυτό γίνεται διότι οι πρώτοι τρεις όροι της (2.23) είναι ακριβώς οι ίδιοι με την Νευτώνεια θεωρία. Ωστόσο καθώς το r μειώνεται ο διορθωτικός όρος της ΓΘΣ γίνεται αρκετά σημαντικός.

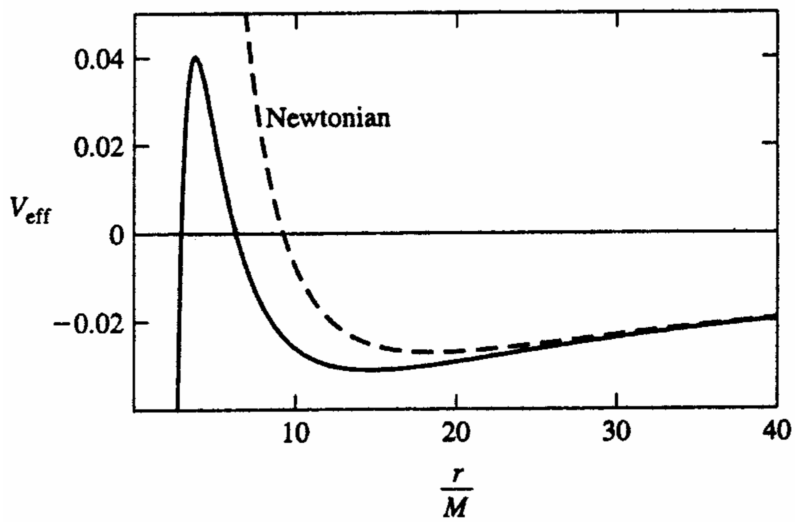
Κατηγορίες Τροχιών

Τα σημεία ισορροπίας στην ισοδύναμη μονοδιάστατη κίνηση αντιστοιχούν σε ακρότατα του υποθετικού δυναμικού { dV/dr = 0} . Επομένως :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{M}{r^2} - \frac{L^2}{r^3} + \frac{3ML^2}{r^4} = r^{-4}\left(Mr^2 - L^2 r + 3ML^2\right) = 0 \qquad (2.24)$$

Από την (2.24) έχω τελικά $Mr^2 - L^2 r + 3ML^2 = 0$ οπότε οι δύο λύσεις που προκύπτουν είναι :

$$r_{\substack{\min\\ \max}} = \frac{L^2 \pm L^2\sqrt{1-12\left(\frac{M}{L}\right)^2}}{2M} = \frac{L^2}{2M}\left[1 \pm \sqrt{1-12\left(\frac{M}{L}\right)^2}\right] \qquad (2.25)$$



ΕΙΚΟΝΑ 2.2 Το σχετικιστικό και Νευτώνειο ενεργό δυναμικό για την ακτινική κίνηση και για την τιμή $L/M = 4.3$. Τα δυο δυναμικά φαίνονται να ταυτίζονται για μεγάλες τιμές του r αλλά

διαφέρουν σημαντικά για μικρά r. Για την Γη η οποία κινείται γύρω από το ασθενές βαρυτικό πεδίο του Ήλιου ο λόγος $L/M \sim 10^9$ και η διαφορά του Νευτώνειου από το Σχετικιστικό δυναμικό είναι απειροελάχιστη, παραμένει όμως μετρήσιμη.

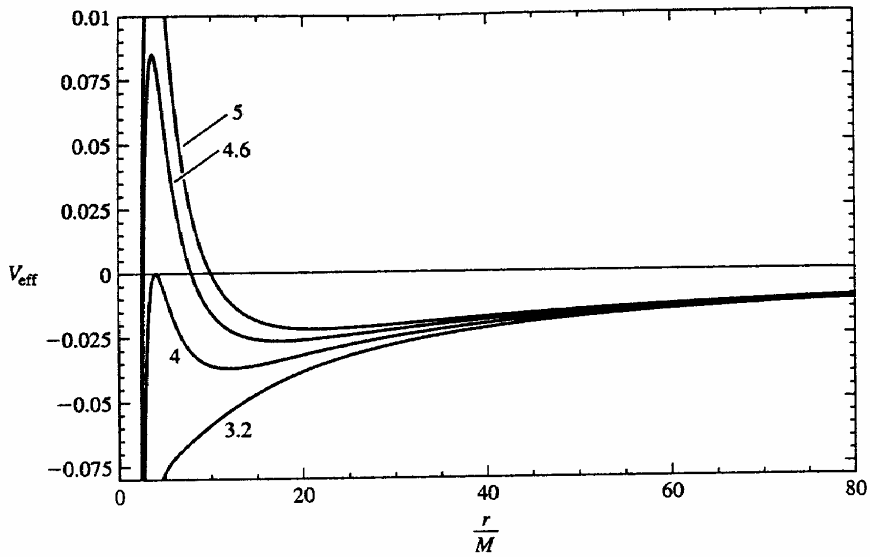
Η τελευταία σχέση μας δίνει στην ουσία τις ακρότατες τιμές του δυναμικού V(r), η σχέση αυτή όμως απαιτεί και μια περαιτέρω διερεύνηση. Έτσι

(i) αν $\underline{L^2 - 12M^2 < 0}$ Τότε δεν υπάρχουν ακρότατα του δυναμικού V, όπως φαίνεται και στην εικόνα 2.3 για την τιμή $L/M < \sqrt{12} = 3.46$ δεν υπάρχουν ακρότατα, το δυναμικό έχει συνέχεια αρνητική τιμή ,στην ουσία δεν υπάρχουν ακόμα τροχιές, το σωματίδιο κινείται προς το ελκτικό κέντρο, πέφτει πάνω στον ορίζοντα των γεγονότων και συνεχίζει ακάθεκτο την πορεία του προς την μοναδικότητα (r = 0). Στην περίπτωση βέβαια που δεν έχουμε Μελανή Οπή αλλά αστέρα νετρονίων τότε το σωματίδιο πέφτει πάνω στην επιφάνεια του αστέρα.

(ii) αν $\underline{L^2 - 12M^2 > 0}$ τότε υπάρχουν δύο συγκεκριμένες λύσεις αυτές των (2.25). Σε αυτήν την περίπτωση όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε και από την εικόνα 2.3 έχουμε δύο ακρότατα ένα μέγιστο και ένα ελάχιστο. Βρίσκοντας από την (2.23) τη δεύτερη παράγωγο του δυναμικού συναρτήσει του r και θέτοντας την τιμή $r = r_+$, βρίσκουμε ότι

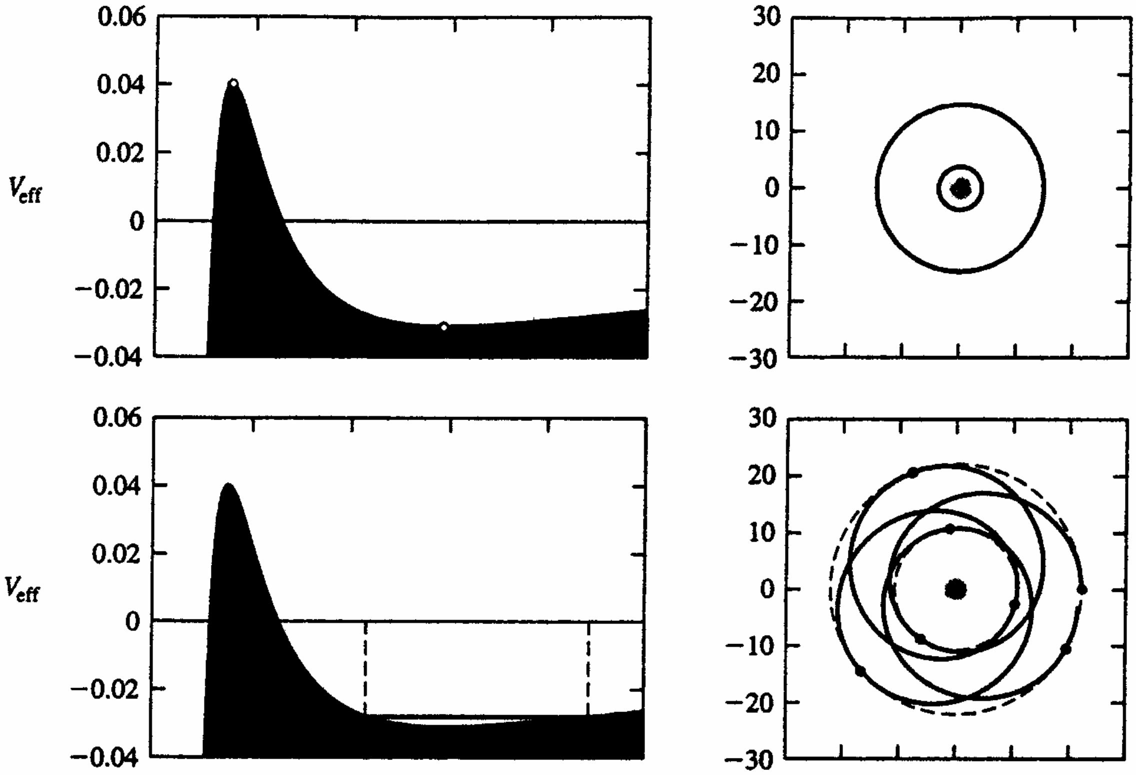
$$\frac{d^2V}{dr^2}\Big|_{r_+} > 0 \qquad (2.26)$$

που σημαίνει πως οι τροχιές r_+ είναι ευσταθείς και αντιστοιχούν στο ελάχιστο ακρότατο, το οποίο για την τιμή $L/M > 4$ βρίσκεται κάτω από την τιμή του $V_{\rm eff} = 0$ ενώ κάνοντας τους ίδιους υπολογισμούς για τις r_- τροχιές βρίσκουμε πως αντιστοιχούν σε ασταθείς τροχιές, αποτελεί δηλαδή το μέγιστο ακρότατο, αφού η δεύτερη παράγωγος του δυναμικού είναι αρνητική.



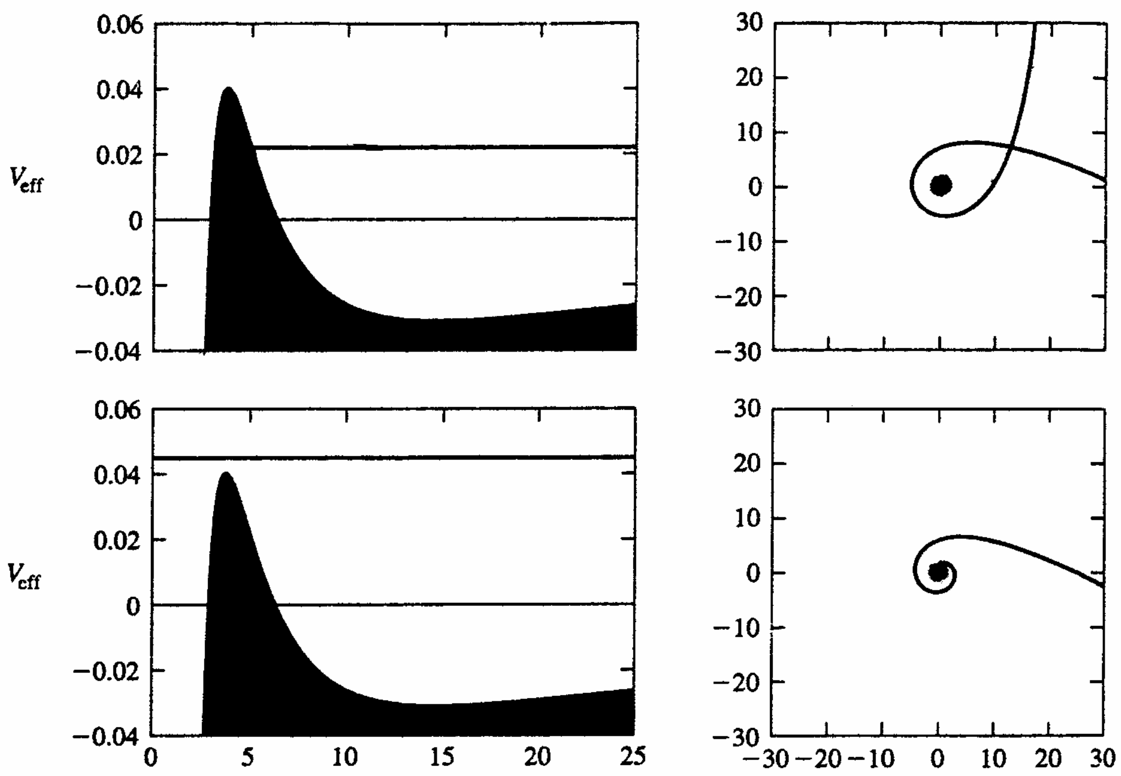
ΕΙΚΟΝΑ 2.3 Το ενεργό δυναμικό $V_{\rm eff}$ της τροχιακής κίνησης για αρκετές διαφορετικές τιμές του L.

Η ποιοτική συμπεριφορά τώρα μιας τροχιάς εξαρτάται από την σχέση μεταξύ του $\varepsilon = \frac{E^2 - 1}{2}$ και του ενεργού δυναμικού. Τα σημεία αναστροφής βρίσκονται στην ακτίνα $r_{\rm tp}$ για την οποία είναι $\varepsilon = V_{\rm eff}\left(r_{\rm tp}\right)$, διότι σε αυτήν την ακτίνα μηδενίζεται η ακτινική ταχύτητα. Εάν $L/M < \sqrt{12}$, τότε δεν υπάρχουν σημεία αναστροφής για θετικές τιμές του ε. Σε αυτήν την περίπτωση όπως αναφέραμε ένα σωματίδιο που κινείται προς την πηγή πέφτει στην βαρυτική πηγή. Αυτό βέβαια βρίσκει αντίθετη την Νευτώνεια θεωρία στην οποία υπάρχει ένα θετικό φυγόκεντρο όριο που ανακλά το σωματίδιο (εικόνα 2.2). Οι εικόνες 2.4 και 2.5 δείχνουν τέσσερα είδη τροχιών για τιμές του $L/M > \sqrt{12}$ καθώς και τις μορφές τους. Κυκλικές τροχιές είναι πιθανές στην τιμή της ακτίνας (2.25) στην οποία το ενεργό δυναμικό έχει ένα μέγιστο ή ελάχιστο. Η τροχιά στο μέγιστο ακρότατο είναι ασταθής διότι μια μικρή αύξηση στο ε θα οδηγήσει το σωματίδιο ή να διαφύγει στο άπειρο ή να πέσει προς το κέντρο της πηγής. Η τροχιά για το ελάχιστο ακρότατο είναι ευσταθής. Υπάρχουν δέσμιες τροχιές για $\varepsilon < 0$ που ταλαντώνονται μεταξύ των δυο σημείων αναστροφής.



ΕΙΚΟΝΑ 2.4 Τέσσερα είδη τροχιών στη γεωμετρία του Schwarzchild. Τα ζεύγη των εικόνων σε αυτήν την σελίδα αλλά και στην επόμενη, δείχνουν τέσσερα είδη τροχιών που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του ε για την τιμή του λόγου $L/M = 4.3$. Το δυναμικό σε σχέση με το ε φαίνεται αριστερά. Ο οριζόντιος άξονας σε αυτά τα διαγράμματα είναι η τιμή του r/M. Ο κάθετος άξονας είναι το ενεργό δυναμικό. Οι οριζόντιες γραμμές δείχνουν τις τιμές του ε. Οι κάθετες διακεκομμένες γραμμές δείχνουν τα σημεία αναστροφής, ενώ οι τελείες δείχνουν τα πιθανά σημεία των κυκλικών τροχιών. Οι μορφές των τροχιών αυτών φαίνονται δεξιά όπου οι συντεταγμένες του Schwarzchild r και φ ζωγραφίζονται ως πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο. Η σκιασμένη περιοχή στο κέντρο κάθε διαγράμματος αντιστοιχούν σε ακτίνα $r < 2M$. Η πάνω εικόνα δείχνει δύο κυκλικές τροχιές με την

εξωτερική να είναι σταθερή και την εσωτερική ασταθή. Η κάτω εικόνα δείχνει μια δέσμια τροχιά στην οποία το σωματίδιο κινείται μεταξύ των δυο σημείων αναστροφής που φαίνονται με τελείες.



ΕΙΚΟΝΑ 2.5 (Συνέχεια) Η πάνω εικόνα δείχνει ανακλώμενη τροχιά. Το σωματίδιο έρχεται από το άπειρο, περνάει γύρω από το ελκτικό κέντρο και κινείται και πάλι προς το άπειρο. Η κίνηση αυτή είναι μια πολύ σχετικιστική κίνηση που διαφέρει σημαντικά από την υπερβολική τροχιά της Νευτώνειας θεωρίας. Η κάτω και τελευταία εικόνα δείχνει μια σπειροειδή τροχιά στην οποία το σωματίδιο έρχεται από το άπειρο περνά το ελκτικό κέντρο και πέφτει μέσα στο κέντρο της ελκτικής πηγής. Το είδος αυτής της τροχιάς δεν είναι δυνατόν να υπάρξει στη Νευτώνεια Μηχανική για ένα σωματίδιο που κινείται σε κεντρικό δυναμικό 1/r.

Ας θεωρήσουμε την τροχιά με τιμή του Ε αυτή της εικόνας 2.5 (πάνω). Αν το σωματίδιο έρχεται από το άπειρο, τότε δεν μπορεί να πλησιάσει περισσότερο από το r που ορίζει το σημείο τομής της καμπύλης με την ευθεία. Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο αναστροφής. Καθώς στο σημείο αυτό ισχύει $\varepsilon = V_{\text{eff}}\left(r_{\text{tp}}\right)$ η ακτινική ταχύτητα του σωματιδίου μηδενίζεται. Παρατηρούμε ότι στο παραπάνω σημείο η ακτινική επιτάχυνση της τροχιάς είναι προς τα έξω, οπότε το σωματίδιο φθάνει μέχρι την ελάχιστη απόσταση r και στη συνέχεια καθώς αναστρέφεται η πορεία του, επιταχύνεται προς τα έξω για να επιστρέψει στο άπειρο. Πρόκειται για μια ′′υπερβολική τροχιά′′, ανάλογη περίπου των πραγματικών υπερβολικών τροχιών στη Νευτώνεια βαρύτητα.

Είναι εμφανές ότι μια κυκλική τροχιά (r = σταθ.) είναι δυνατή μόνο για την ελάχιστη ή μέγιστη τιμή του ενεργού δυναμικού. Τις ακραίες αυτές τιμές μπορούμε να τις δούμε από τις άσπρες βούλες στην εικόνα 2.4 (πάνω). Ωστόσο το μέγιστο είναι ασταθές, καθώς οποιαδήποτε μικρή μεταβολή του r έχει ως αποτέλεσμα , μια επιτάχυνση με φορά απομακρυνόμενη από το μέγιστο. Άρα για τα σωματίδια υπάρχει μόνο μια ευσταθής και μια ασταθής κυκλική τροχιά για τη συγκεκριμένη τιμή του L.

Ο άλλος τύπος τροχιάς που θα εξετάσουμε είναι αυτός που προκύπτει στην περίπτωση που η ενέργεια δίδεται από τη γραμμή της εικόνας 2.5 (κάτω). Καθώς η ευθεία αυτή δεν τέμνει πουθενά τη καμπύλη του δυναμικού, η τροχιά θα προσκρούει στο σημείο r = 2M χωρίς να υπάρξει αναστροφή. Στην περίπτωση βέβαια που η εξεταζόμενη γεωμετρία αναφέρεται σε έναν αστέρα η ακτίνα του R θα είναι μεγαλύτερη του 2M και τα διαγράμματα δυναμικού, θα ισχύουν μόνο στο εξωτερικό του. Ένα σωματίδιο που θα φτάσει στο r = R θα προσκρούσει στον αστέρα, ενώ ανάλογα με την τιμή του λόγου R/M, θα επιτρέπονται μόνο συγκεκριμένοι τύποι τροχιών.

Οι σταθερές κυκλικές τροχιές βρίσκονται στην ακτίνα $r = r_{\min} = r_{+}$ του ελαχίστου του υποθετικού δυναμικού. Η ακτίνα αυτή ελαττώνεται σε απερχόμενη ελάττωση του λόγου $\tilde{L}/M$, αλλά σταθερές κυκλικές τροχιές δεν βρίσκονται σε τυχαίες μικρές ακτίνες. Λόγω της (2.25) οι **εσώτερες σταθερές κυκλικές τροχιές ή ISCO** όπως αυτές συνηθίζονται να λέγονται (Innermost Stable Circular Orbit), βρίσκονται σε εκείνη την ακτίνα για την οποία $\tilde{L}/M = \sqrt{12}$, δηλαδή

$$r_{\mathrm{ISCO}} = 6M \tag{2.27}$$

Το αποτέλεσμα αυτό παίζει σημαντικό ρόλο στην δομή των πηγών ακτίνων – X, όπως θα δούμε αργότερα. Στη ΓΘΣ λοιπόν ευσταθείς τροχιές θα υπάρχουν πάνω από απόσταση 6M όταν ο αστέρας δεν περιστρέφεται, δεν έχουμε δει όμως και το μέγιστο όριο, δηλαδή τι γίνεται σε μικρότερες αποστάσεις από την πηγή. Η σχέση (2.24) ικανοποιείται για κάθε τιμή του r, λύνοντάς την ως προς $\tilde{L}^2$ έχω

$$\tilde{L}^2 = \frac{Mr^2}{r-3M} \tag{2.28}$$

γίνεται ολοφάνερο τώρα ότι για να έχει ισχύ η παραπάνω σχέση θα πρέπει $r > 3M$. Το παραπάνω όριο αποτελεί την μέγιστη ευσταθή τροχιά των φωτονίων, πράγμα που σημαίνει πως τα όρια για ευσταθεί ή χαοτική κίνηση σωματιδίου ή φωτονίου γύρω από ένα σφαιρικά συμμετρικό και ομογενή αστέρα μη περιστρεφόμενο είναι :

$$3M < r < 6M \tag{2.29}$$

Τώρα που βρήκαμε τα όρια των ευσταθών και ασταθών τροχιών είναι εύκολο να βρούμε και τις ενέργειες των τροχιών αυτών. Τις ενέργειες αυτές μπορώ να τις υπολογίσω μέσω της (2.20) όπου θα θέσω όπου $r = r_{\min} = r_{+}$,τότε $\dot{r} = 0$, και όπου $\tilde{L}^2$ θέτω την τιμή του όπως αυτή προκύπτει από την (2.28). Το τελικό αποτέλεσμα μου δίνει :

$$\tilde{E} = \frac{r-2M}{r^{1/2}\left(r-3M\right)^{1/2}} \tag{2.30}$$

Από την τελευταία σχέση παρατηρώ ότι για r = 6M έχω E = 0,942, ενώ για r→ 3M βλέπω πως E → . Τέλος για r = 4M έχω E = 1.

Παρατηρώ λοιπόν ότι τα σωματίδια στις ασταθείς κυκλικές τροχιές μεταξύ 3M και 4M θα φύγουν στο άπειρο αν διαταραχθούν ακτινικά προς τα έξω, αντίθετα της ελκτικής δύναμης που τα ωθεί προς το βαρυτικό κέντρο. Η ενέργεια σύνδεσης E_B της τελευταίας ευσταθής τροχιάς, δίνεται από την σχέση

$$E_B = 1 - E_{(6M)} = 1 - 0,942 \simeq 0,06 \tag{2.31}$$

Σωματίδια όμως σε τροχιές του χώρου Schwarzschild εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία με αποτέλεσμα να χάνουν ενέργεια και να παρεκκλίνουν ελαφρά από την γεωδαισιακή κίνηση.

Σωματίδιο σε αρχική κυκλική τροχιά ακτίνας $r \gg M$ και άρα ενέργειας $E \simeq 1$ θα παρεκκλίνει σιγά σιγά σε σπειροειδή τροχιά ολοένα και μικρότερης ακτίνας μέχρι την απόσταση $r = 6M$. Από εκείνη την απόσταση και πέρα, η τροχιά γίνεται ασταθής και το σωματίδιο σταδιακά θα πέσει προς τη μοναδικότητα. Σύμφωνα με την (2.31) περίπου το 6% της αρχικής ενέργειας – μάζας του σωματιδίου θα εκπεμφθεί κατά την κίνηση του σωματιδίου από την $r \gg M$ έως τη $r = 6M$. Σε άλλους χωροχρόνους όπως στο χώρο Kerr, η αντίστοιχη ποσότητα φτάνει το 42% της ενέργειας του σωματιδίου. Το γεγονός αυτό μας δείχνει ότι αρκετή ενέργεια χάνεται ή αν θέλετε εκπέμπεται κατά την πτώση σωματιδίων είτε προς τη μοναδικότητα, είτε προς την επιφάνεια του αστέρα.

Τέλος κλείνοντας την ενότητα των τροχιών θα πούμε λίγα πράγματα και για τις συχνότητές τους. Εάν το σωματίδιο μετατοπίζεται ελαφρώς από την ακτίνα ευσταθούς τροχιάς του r_+, τότε ταλαντώνεται ακτινικά. Οπότε παίρνουμε την **ακτινική επικυκλική συχνότητα** περιστροφής (radial epicyclic frequency), η οποία αντιστοιχεί σε απλή αρμονική ταλάντωση. Οι συχνότητες αυτές δίνονται από την σχέση

$$\omega_r^{\,2} = \frac{d^2V}{dr^2}\Big|_{r_+} = \frac{M\left(r_+ - 6M\right)}{r_+^{\,3}\left(r_+ - 3M\right)} \tag{2.32}$$

η οποία προέκυψε παραγωγίζοντας την (2.24) ως προς r δύο φορές και θέτοντας στη συνέχεια $r = r_+$ εξαλείφοντας παράλληλα τον όρο $\tilde{L}^2$ μέσω της (2.28). Ο χρόνος t ο οποίος κρύβεται στην (2.32) είναι ο ίδιος χρόνος τ, μετρούμενος από το σωματίδιο και ο οποίος είναι ο αντίστοιχος χρόνος t της μετρικής του Schwarzschild.

Η γωνιακή ταχύτητα ενός σωματιδίου που εκτελεί κυκλική τροχιά, ορίζεται ως ο ρυθμός με τον οποίο η γωνιακή του θέση αλλάζει με το χρόνο. Ο ρυθμός ω_ϕ ως προς τον συντεταγμένο χρόνο t, είναι ο ρυθμός που μετράται από ένα στατικό ρολόι στο άπειρο, όπου ο συντεταγμένος χρόνος t και ο ίδιος χρόνος τ ενός τέτοιου ρολογιού ταυτίζονται. Την συχνότητα αυτή την ονομάζουμε **γωνιακή επικυκλική συχνότητα** περιστροφής ω_ϕ (angular epicyclic frequency) και δίνεται από την σχέση

$$\omega_\phi = \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau} = \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{\tilde{L}}{\tilde{E}} \tag{2.33}$$

η οποία βγήκε με διαίρεση της τρίτης εξίσωσης με την πρώτη των (2.15). Την (2.33) θα την φέρουμε σε πιο απλή μορφή αντικαθιστώντας τις τιμές των $\tilde{L}$ και $\tilde{E}$. Διαιρώντας τις (2.28) και (2.30) παίρνω

$$\frac{\tilde{L}}{\tilde{E}} = \left(Mr\right)^{1/2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{2.34}$$

αντικαθιστώντας την τελευταία στην (2.33) παίρνω τελικά

$$\omega_\phi^2 = \frac{M}{r^3} \tag{2.35}$$

η παραπάνω σχέση ισχύει για κυκλικές τροχιές. Η σχέση αυτή έχει την ίδια μορφή με τον αντίστοιχο μη σχετικιστικό νόμο του Kepler. Η περίοδος στην χρονική συντεταγμένη Schwarzschild είναι $2\pi/\omega_\varphi$ και η (2.35) μας λέει ότι η περίοδος είναι ανάλογη του κύβου της ακτίνας της τροχιάς. Η απλή αυτή συμφωνία μεταξύ σχετικιστικής και μη – σχετικιστικής θεωρίας, είναι απλά μια τυχαία σύμπτωση, η οποία πηγάζει από την επιλογή μας η συντεταγμένη χρόνου t του Schwarzschild να μετράει την γωνιακή ταχύτητα, ενώ η ακτίνα της τροχιάς Schwarzschild να μετράται από τον ίδιο χρόνο.

Η γωνιακή επικυκλική συχνότητα, βρίσκεται επίσης και από την σχέση (2.14) όπου $\dot{\phi} = \omega_\phi$. Εξαλείφοντας το $\tilde{L}^2$ από την (2.28) και θέτοντας όπου $r = r_+$ παίρνω τελικά μια άλλη τώρα σχέση για την γωνιακή συχνότητα στην οποία τόσο η γωνιακή ταχύτητα όσο και η ακτίνα της τροχιάς είναι μετρημένες στο συντεταγμένο χρόνο t. Αυτή είναι :

$$\omega_\phi^2 = \frac{M}{r_+^2 \left(r_+ - 3M\right)} \tag{2.36}$$

Στην Νευτώνεια προσέγγιση όπου $r_+ \gg M$ η γωνιακή και η ακτινική συχνότητα ταυτίζονται οπότε $\omega_r \approx \omega_\phi$. Σε αυτή τη περίπτωση το σωματίδιο θα επανέλθει στο αρχικό σημείο από όπου ξεκίνησε σε χρόνο μιας περιόδου, οπότε η τροχιά του γίνεται κλειστή. Πράγματι στη Νευτώνεια θεωρία όλες οι τροχιές των πλανητών είναι κλειστές ελλείψεις.

Στη ΓΘΣ όμως το $\omega_r \neq \omega_\phi$, με αποτέλεσμα οι τροχιές να μην είναι κλειστές. Αυτό που συμβαίνει στην ουσία είναι μια μετάθεση στην γωνία διαγραφής του σωματιδίου κατά την κυκλική του ή την ελλειπτική του τροχιά. Για περίπου κυκλικές τροχιές η γωνιακή ταχύτητα μετάθεσης δίνεται από την σχέση $\omega_\rho = \omega_\phi - \omega_r$ και η οποία λόγω των (2.32) και (2.36) παίρνει την μορφή

$$\omega_\rho = -\left[\left(1 - \frac{6M}{r_+}\right)^{1/2} - 1\right] \cdot \omega_\phi \tag{2.37}$$

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν πάνω στις ακτινικές και γωνιακές επικυκλικές συχνότητες, αλλά και πάνω στη μετάθεση έχουμε να πούμε πως, μια ελαφρώς μη κυκλική τροχιά θα εμφανίζει μια συνεχή αυξομείωση, μια ταλάντωση, γύρω από μια περιφέρεια ακτίνας, έστω r. Στη Νευτώνεια βαρύτητα αυτή η τροχιά θα είναι μια τέλεια έλλειψη, δηλαδή, μια κλειστή καμπύλη. Κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει στη ΓΘΣ. Ωστόσο, όταν η επίδραση της Σχετικότητας είναι μικρή και η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική, η σχετικιστική τροχιά πρέπει να είναι σχεδόν κλειστή, θα μοιάζει με μια βραδέως περιστρεφόμενη έλλειψη.

Ένας τρόπος περιγραφής μιας τέτοιας τροχιάς δίνεται από την εξέταση του *περιηλίου* της, δηλαδή του σημείου της τροχιάς με την ελάχιστη απόσταση από τον αστέρα, βέβαια όταν δεν μιλάμε για τον Ήλιο τότε η κατάλληλη λέξη είναι το *περίαστρο* . Αντίστοιχα το αφήλιο και άπαστρο αναφέρονται στο σημείο της τροχιάς με τη μέγιστη απόσταση από τον ήλιο ή αντίστοιχα από ένα αστέρα. Συνεπώς το περιήλιο θα μετατοπίζεται γύρω από τον αστέρα και οι αστρονόμοι προσπαθούν να παρατηρήσουν αυτή τη μετάθεση. Η μετάθεση του περιηλίου του πλανήτη Ερμή έχει μετρηθεί σε 43΄΄/ αιώνα. Για τους υπόλοιπους πλανήτες, επειδή απέχουν αισθητά πολύ μακριά από τον ήλιο, οι σχετικιστικές διορθώσεις στην Νευτώνεια μελέτη είναι απειροελάχιστες. Η πρώτη ένδειξη υπέρ της ΓΘΣ ήταν ακριβώς η πρόβλεψη των 0,43΄΄/ έτος, τα οποία αδυνατούσε να εξηγήσει η Νευτώνεια βαρύτητα.

Πιστεύουμε ο αναγνώστης να κατάλαβε καλά πόσο σημαντική ήταν η μετάθεση του περιηλίου για τη ΓΘΣ, καθώς δεν θα θέλαμε να εμπλακούμε στην εξαγωγή της σχέσεως με περαιτέρω μαθηματικά, παρά μόνο να γράψουμε την τελική σχέση που δίνει την μετάθεση, άλλωστε σκοπός μας είναι η φυσική κατανόηση και όχι τόσο η μαθηματική απόδειξη, καθώς το κύριο μέρος αυτής της εργασίας θα αφιερωθεί στις ISCO. Η μεταβολή της γωνίας φ μεταξύ δύο περιηλίων είναι

$$\Delta\phi = 2\pi\left(1 - \frac{6M^2}{\tilde{L}^2}\right)^{-1/2} \tag{2.38}$$

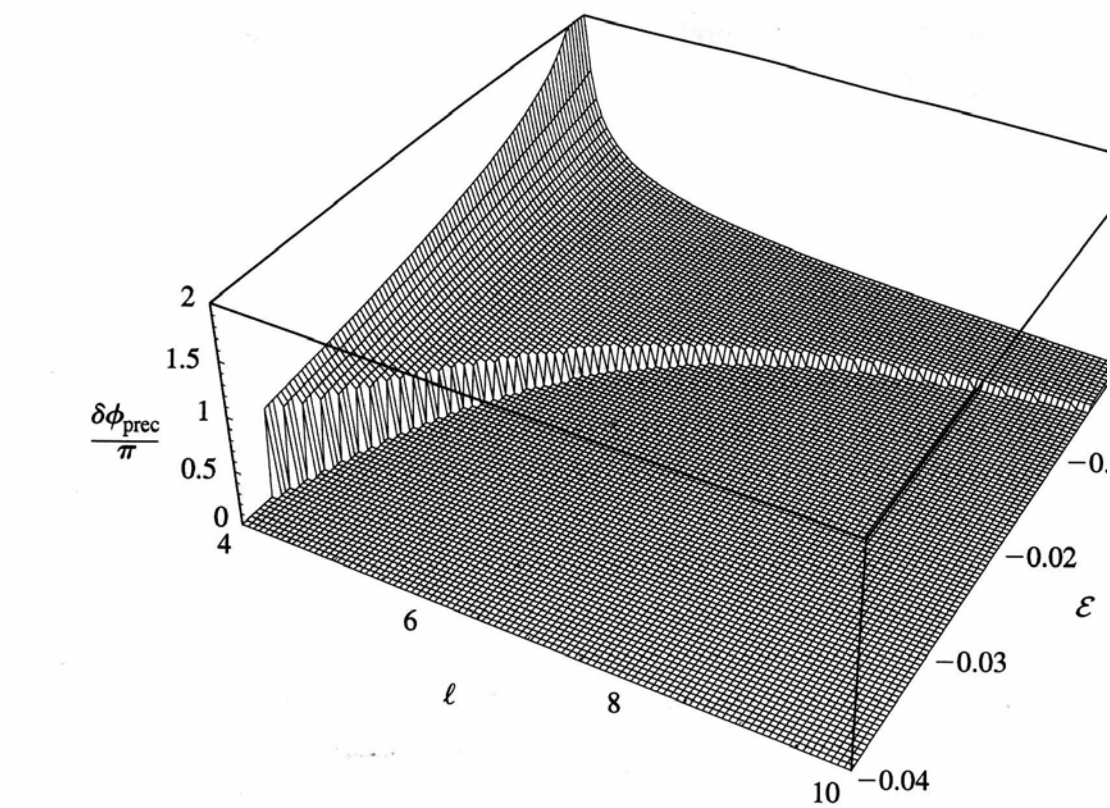
η οποία για σχεδόν Νευτώνειες τροχιές καταλήγει στην απλή σχέση

$$\Delta\phi = 6\pi\frac{M}{r} \tag{2.39}$$

Στην εικόνα 2.6 δίνεται η μετάθεση του περιηλίου στην γεωμετρία του Schwarzchild.

Θα κλείσουμε το κεφάλαιο αυτό με μια πολλή σημαντική παρατήρηση, ενός σχετικιστικού αστρικού συστήματος, που χάρισε δόξα στη ΓΘΣ. Ο διπλός πάλσαρ PSR 1913+16 ανακαλύφθηκε από τους Hulse και Taylor το 1974 στο πλαίσιο μιας συστηματικής μελέτης για την ανακάλυψη νέων πάλσαρς. Η μέση απόσταση μεταξύ των αστέρων ισούται με 1,2 x 10^9 m, οπότε με τη βοήθεια της (2.39) και θέτοντας $M = 1,4M_\odot = 2,07$ km λαμβάνουμε μια χονδρική προσέγγιση για το Δφ = 3,3 x 10^{-5} ακτίνια/τροχιά = $2^o.1$ ανά έτος. Η μετάθεση αυτή μπορεί να μετρηθεί πολύ πιο εύκολα από αυτήν του Ερμή! Έτσι με ένα λεπτομερέστερο υπολογισμό, λαμβάνοντας υπόψη τη μεγάλη εκκεντρότητα της τροχιάς και το γεγονός ότι οι μάζες των δύο αστέρων είναι συγκρίσιμες, καταλήγουμε στην πρόβλεψη των $4^o.2$ ανά έτος.

Από αυτό το δεδομένο μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τις μάζες των μελών. Το άλλο δεδομένο είναι ουσιαστικά ένα άλλο σχετικιστικό φαινόμενο, η μετάθεση του σήματος προς το ερυθρό, η οποία οφείλεται πρώτα στον ΄΄εγκάρσιο όρο Doppler΄΄ της ΕΘΣ και δεύτερον στη μεταβαλλόμενη βαρυτική μετάθεση προς το ερυθρό, καθώς λόγω της έκκεντρης τροχιάς ο πάλσαρ εισέρχεται και εξέρχεται από το βαρυτικό δυναμικό του συνοδού του. Αν και τα δυο αυτά φαινόμενα δεν ξεχωρίζουν στις παρατηρήσεις, η συνισταμένη μετάθεση προς το ερυθρό είναι ένα άλλο μέγεθος εξαρτώμενο από τις μάζες των αστέρων. Με τη βοήθεια της μετάθεσης προς το ερυθρό, της μετάθεσης του περίαστρου και της Νευτώνειας συνάρτησης μάζας για την τροχιά είναι δυνατός ο προσδιορισμός των αστρικών μαζών και της κλίσης της τροχιάς.



ΕΙΚΟΝΑ 2.6 Η μετάθεση του περιηλίου $\delta\varphi_{perc}$ στη γεωμετρία του Schwarzchild για τις οριακές τροχιές οι οποίες χαρακτηρίζονται από τις παραμέτρους ε και l . Το παραπάνω διάγραμμα δείχνει ότι δεν υπάρχουν δέσμιες τροχιές στην επίπεδη περιοχή στην οποία η τιμή του $\delta\varphi_{perc}$ είναι μηδέν, το όριο εμφανίζεται στην καμπύλη του l με το ε για την περίπτωση των κυκλικών τροχιών. Οι μεγάλες τιμές του l αντιστοιχούν σε τροχιές οι οποίες βρίσκονται πολύ μακριά του αστέρα όπου τα σχετικιστικά φαινόμενα είναι αρκούντως μικρά. Η περίπτωση αυτή είναι η ίδια που αντιστοιχεί για τους πλανήτες του Ήλιου και αντιστοιχεί στη σχέση (2.39).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Συρμός των αδρανειακών συστημάτων λόγω περιστροφής

ΓΕΝΙΚΑ

Όπως έχουμε ξαναπεί η γεωμετρία Schwarzschild είναι σφαιρικά συμμετρική, αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση της εξωτερικής γεωμετρίας ενός μη περιστρεφόμενου αστέρα και είναι η ακριβής γεωμετρία μιας μη περιστρεφόμενης Μελανής Οπής. Ωστόσο κανένα ουράνιο σώμα στο Σύμπαν είναι μη περιστρεφόμενο.

Ο καμπυλωμένος χωρόχρονος των περιστρεφόμενων σωμάτων έχει μια πιο πολύπλοκη δομή από την αντίστοιχη γεωμετρία του Schwarzschild, υπάρχει όμως μια οριακή περίπτωση στην οποία οι δύο παραπάνω χώροι σχεδόν ταυτίζονται. Αυτή είναι η περίπτωση της αργής περιστροφής, κατά την οποία σημαντικές αποκλίσεις από την σφαιρική συμμετρία της μετρικής του Schwarzschild παρουσιάζονται στις 1^{ης} τάξεως όρους ως προς την γωνιακή ταχύτητα ή την στροφορμή. Από την στιγμή που η κεντρομόλος επιτάχυνση περιέχει όρους 2^{ης} τάξεως ως προς την στροφορμή, η μορφή και το σχήμα του αστέρα δεν θα παραμορφώνονται παίρνοντας μόνο όρους 1^{ης} τάξεως και άρα το σχήμα θα παραμένει σφαιρικό. Ωστόσο αναρωτιόμαστε αν υπάρχει κάποια διαφορά στην εξωτερική γεωμετρία του χωρόχρονου. Η απάντηση βρίσκεται στην πρόβλεψη της ΓΘΣ ότι πηγή της καμπυλότητας του χώρου δεν είναι μόνο η κατανομή της μάζας-ενέργειας αλλά και η ίδια η κίνηση της ύλης. Όταν η καμπυλότητα του χώρου είναι μικρή και οι ταχύτητες V των πηγών είναι πολύ μικρές τότε τα φαινόμενα της κίνησης της ύλης είναι κατά μια τάξη V/c μικρότερα από τα GM/Rc^2 φαινόμενα της ίδιας της κατανομής της ύλης. Τα παραπάνω βέβαια δεν πλησιάζουν την περίπτωση του ηλεκτρομαγνητισμού , όπου πεδία παράγονται όχι μόνο από τις κατανομές φορτίων αλλά και από τα ρεύματα που δημιουργούν τα τελευταία. Επεκτείνοντας αυτήν την αναλογία, φαινόμενα $\left(V/c\right)\left(GM/Rc^2\right)$ καλούνται βαρυτομαγνητικά (gravitomagnetic). Σε αυτό το κεφάλαιο αναφέρουμε μόνο ένα από τα πολλά βαρυτομαγνητικά φαινόμενα –το συρμό των αδρανειακών συστημάτων από ένα αργά περιστρεφόμενο σώμα.

Στη ΓΘΣ όπως και στη Νευτώνεια θεωρία για την βαρύτητα, το μέγεθος των φυγόκεντρων δυνάμεων το οποίο επιδρά πάνω σε ένα στοιχειώδες ρευστό, εξαρτάται ισχυρά από τον ρυθμό περιστροφής του ίδιου του ρευστού σχετικά ως προς ένα τοπικό αδρανειακό σύστημα. Σε αντίθεση με την Νευτώνεια θεωρία, ωστόσο, τα αδρανειακά συστήματα που βρίσκονται μέσα στο σχετικιστικό ρευστό, δεν είναι σε ηρεμία σε σύγκριση με αυτά των μακρινών αστέρων. Τα τοπικά αυτά συστήματα δέχονται την στρέβλωσή τους ή καλύτερα το συρμό τους από την περιστροφή του ρευστού. Ο αστέρας κατά την περιστροφή του, περιστρέφει, παρασύρει στην ουσία το χώρο γύρω του. Το σχετικιστικό αυτό φαινόμενο είναι εντονότερο κοντά στο κέντρο του αστέρα και εξασθενεί πηγαίνοντας προς τα έξω. Στην ξένη βιβλιογραφία το συναντούμε με τον όρο ΄΄**dragging of the inertial frames**΄΄ . Το φαινόμενο αυτό αναλύθηκε από τις αρχές του 20^{ου} αιώνα πρώτα από τον Thirring (1918) και αργότερα από τους Brill και Cohen (1966). Ο υπολογισμός του ρυθμού της περιστροφής είναι σημαντικός για τον καθορισμό της ισορροπίας μεταξύ της βαρύτητας, της πίεσης και των φυγόκεντρων δυνάμεων.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα υπολογίσουμε το ρυθμό περιστροφής του χώρου γύρω από τον αστέρα, καθώς θα τον χρειαστούμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο. Το αποτέλεσμα βγαίνει από πολλούς και δύσκολους υπολογισμούς και καθιστά έντονη την προσοχή του αναγνώστη. Οφείλω να εξηγήσω πως οι λύσεις ολοκληρωμάτων καθώς και οι λύσεις των διαφορικών εξισώσεων παίρνονται έτοιμες, ώστε να συντομεύσουμε την εκπόνηση του τελικού αποτελέσματος.

Μη περιστρεφόμενοι σχετικιστικοί αστέρες

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετήσαμε τους σφαιρικά συμμετρικούς και μη περιστρεφόμενους αστέρες. Είδαμε πως το γραμμικό στοιχείο αυτού του χώρου δίνεται από την σχέση

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3.1}$$

Η σχέση αυτή είναι ακριβώς ίδια με την (1.3) μόνο που έχουμε αλλάξει τους συντελεστές μπροστά από τις συνιστώσες τις μετρικής. Επίσης στο ίδιο κεφάλαιο βγάλαμε αναλυτικά τις εξισώσεις πεδίου για έναν τέτοιο αστέρα και οι οποίες, για την μετρική (3.1) γράφονται

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(p+\rho)(m+4\pi r^3 p)}{r(r-2m)} \tag{3.2}$$

η οποία αποτελεί την γνωστή εξίσωση Tolman- Oppenheimer-Volkoff ,εξίσωση (1.30).

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{3.3}$$

κατά αναλογία της σχέσεως (1.21) και

$$\frac{d\nu}{dr} = -\frac{2}{\rho+p}\frac{dp}{dr} \tag{3.4}$$

η οποία προέκυψε από αντικατάσταση της (1.22) στην (1.30) και όπου Φ το έχω αντικαταστήσει με το ν. Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε πως επιδρά η περιστροφή επάνω σε αυτούς τους όρους.

Συρμός από περιστροφή των αδρανειακών συστημάτων.

Το ερώτημα τώρα είναι πως αυτός ο συρμός των αδρανειακών συστημάτων, εκδηλώνεται στην μετρική του χώρου ενός αργά περιστρεφόμενου αστέρα. Η μετρική για ένα στατικό, αξονικά συμμετρικό σύστημα, μπορεί να γραφεί με την παρακάτω μορφή, όπως αυτή δίνεται από τον Hartle (1967).

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2\left[d\theta^2 + \sin^2\theta\left(d\phi - Ldt\right)^2\right] \quad (3.5)$$

όπου τα ν, λ και L είναι συναρτήσεις των r,θ. Η ποσότητα L(r,θ) είναι η γωνιακή ταχύτητα $d\phi/dt$ αποκτούμενη από έναν παρατηρητή, ο οποίος πέφτει ελεύθερα από το άπειρο προς το σημείο (r,θ). Γι'αυτό το λόγω θα αναφέρουμε το *L(r,θ) ως το ρυθμό περιστροφής του αδρανειακού συστήματος στο σημείο (r,θ)*, σε σχέση πάντα με ένα σύστημα στο άπειρο. Ο συρμός λοιπόν των αδρανειακών συστημάτων παρουσιάζεται στην μετρική με τον όρο $g_{t\phi}$.

Τόσο η πυκνότητα του αστέρα όσο και η μετρική παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από μια αναστροφή στη διεύθυνση περιστροφής ή σε αναστροφή του χρόνου. Λόγω λοιπόν της παραπάνω συμμετρίας μια ανάπτυξη των e^{ν} και e^{λ} σε δυνάμεις της γωνιακής ταχύτητας Ω του αστέρα μπορούν να περιέχουν μόνο άρτιους όρους αυτής, ενώ μια ανάπτυξη του L θα περιέχει μόνο περιττούς όρους. Εάν λοιπόν θέλουμε να μελετήσουμε τα διάφορα φαινόμενα που συμβαίνουν με ακρίβεια μέχρι και την 2η τάξη του όρου Ω, δηλ. Ω^2, θα πρέπει να θεωρήσουμε μέχρι 1ης τάξης όρους, δηλ. Ω, στην ποσότητα L. Αυτήν την πρώτη τάξη στον όρο L θα την συμβολίσουμε με $\omega(r,\theta)$, δηλαδή

$$L(r,\theta) = \omega(r,\theta) + O\left(\Omega^3\right) \quad (3.6)$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να αναφέρουμε πως όρους Ω^3 και πάνω τους απορρίπτουμε, επίσης επειδή μιλάμε για αργή περιστροφή, θα κρατούμε μόνο όρους $\omega(r,\theta)$ και όχι ανώτερους, οπότε η (3.5) παίρνει την τελική της μορφή

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 - 2\omega r^2\sin^2\theta\, d\phi dt \quad (3.7)$$

όπου αντικατέστησα το L με το ω.

Για τον υπολογισμό της 1ης τάξης του όρου $L(r,\theta)$, δηλαδή το $\omega(r,\theta)$, μας χρειάζεται μόνο μια από τις εξισώσεις πεδίου και την οποία για την ευκολία μας θα πάρουμε να είναι η

$$R_{\phi}^{\ t} = 8\pi T_{\phi}^{\ t} \quad (3.8)$$

Για να βρούμε λοιπόν τον ρυθμό περιστροφής των αδρανειακών συστημάτων $\omega(r,\theta)$, θα αναπτύξουμε και τα δυο μέλη της (3.8) και θα κρατήσουμε μόνο τον χαμηλότερο όρο της γωνιακής ταχύτητας Ω. Το αριστερό μέλος της (3.8) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\left(-g\right)^{1/2} R_{\phi}{}^{t} = \left[\left(-g\right)^{1/2} g^{t\alpha}\Gamma_{\phi\alpha}{}^{\nu}\right]_{,\nu} \tag{3.9}$$

(Η παραπάνω σχέση υπάρχει στην εργασία των Landau – Lifschitz). Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί για την μετρική (3.7) ως

$$\left(-g\right)^{1/2} R_{\phi}{}^{t} = -\frac{1}{2}\left[\left(-g\right)^{1/2} g^{ij}\left(g^{t\phi}g_{\phi\phi,j} - g^{tt}g_{t\phi,j}\right)\right]_{,i} \tag{3.10}$$

Οι σταθερές $g^{t\phi}$ και $g_{t\phi}$ είναι τουλάχιστον 1ης τάξης ως προς την γωνιακή ταχύτητα, ώστε οι υπόλοιποι όροι μπορούν να αντικατασταθούν από τις μηδενικής τάξης τιμές

$$-2r^2 \sin\theta\, e^{(\nu+\lambda)/2} R_{\phi}{}^{t} = \left[e^{-(\nu+\lambda)/2} r^4 \sin^3\theta\, \omega_r\right]_r + \left[e^{(\lambda-\nu)/2} r^2 \sin^3\theta\, \omega_\theta\right]_\theta + O\left(\Omega^3\right) \tag{3.11}$$

όπου έχουμε θεωρήσει την σύμβαση να εκφράζουμε τον όρο $\frac{d\omega}{dr} = \omega_r$. Οι συναλλοίωτες και οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της μετρικής (3.7) καθώς και μερικές ποσότητες, όπως αυτές στην σχέση (3.10), υπολογίζονται στο ***Παράρτημα Α*** . Με το Ω να είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού, η τετραταχύτητα η οποία ικανοποιεί την συνθήκη κανονικοποίησης $u^{\mu}u_{\mu} = -1$ είναι

$$\begin{aligned} u^r &= u^\theta = 0 \\ u^\phi &= \Omega\, u^t \\ u^t &= \left[-\left(g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}\right)\right]^{-1/2} \end{aligned} \tag{3.12}$$

η πρώτη προέκυψε γιατί θεώρησα τον αστέρα να εκτελεί μόνο περιστροφή. Η u^{ϕ} είναι η τετραταχύτητα ως προς την συντεταγμένη φ ενώ η u^t η τετραταχύτητα ως προς την συντεταγμένη t.

Για ένα ομοιόμορφα περιστρεφόμενο αστέρα (στην ουσία το πλήθος των αστέρων παρουσιάζουν διαφορική περιστροφή, ακόμη και οι αστέρες νετρονίων) θεωρούμε το Ω σταθερό σε όλο το ρευστό. Με την παραπάνω τετραταχύτητα τα στοιχεία του τανυστή ενέργειας – ορμής της σχέσεως (3.8) μπορούν να αναπτυχθούν ως εξής :

$$\begin{aligned} T_{\phi}{}^{t} &= \left(\rho + p\right)u^t u_\phi = \left(\rho + p\right)u^t\left(g_{t\phi} + \Omega\, g_{\phi\phi}\right)u^t \\ &= \left(\rho + p\right)\left(u^t\right)^2\left(g_{t\phi} + \Omega\, g_{\phi\phi}\right) \\ &= \left(\rho + p\right)e^{-\nu}\left(\Omega - \omega\right)r^2 \sin^2\theta + O\left(\Omega^3\right) \end{aligned} \tag{3.13}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την σχέση

$$\begin{aligned} u^t u_\phi &= u^t\left(u_\phi + u^\phi g_{\phi\phi}\right) = u^t\left(u^t g_{t\phi} + \Omega\, u^t g_{\phi\phi}\right) \\ &= \left(u^t\right)^2\left(g_{t\phi} + \Omega\, g_{\phi\phi}\right) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Φαίνεται τώρα πως η ποσότητα $\omega(r,\theta)$ είναι η γωνιακή ταχύτητα που χρειάζεται παρατηρητής, ο οποίος πέφτει ελεύθερα από το άπειρο υπολογιζόμενη σε πρώτη τάξη ως προς το Ω. Η διαφορά $\Omega-\omega$, είναι λοιπόν η συντεταγμένη γωνιακή ταχύτητα του στοιχειώδους ρευστού στο σημείο (r,θ) όπως την βλέπει ο παρατηρητής που πέφτει ελεύθερα προς το ρευστό. Η τελευταία είναι και η ποσότητα που μας ενδιαφέρει και θα την ορίσουμε με το $\bar{\omega}(r,\theta)$ δηλαδή

$$\bar{\omega}(r,\theta)=\Omega-\omega(r,\theta) \tag{3.15}$$

Κρατώντας μόνο 1ης τάξης όρους του Ω οι εξισώσεις πεδίου γράφονται

$$\frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4 e^{-(\nu+\lambda)/2}\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial r}\right]+\frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^3\theta\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\theta}\right)-16\pi(\rho+p)e^{(\lambda-\nu)/2}\bar{\omega}=0 \tag{3.16}$$

η οποία προέκυψε αντικαθιστώντας τις (3.11) και (3.13) στην (3.8).

Ας θυμηθούμε τώρα ότι οι μηδενικής τάξης εξισώσεις πεδίου δίνονται από τις σχέσεις (3.2), (3.3) και (3.4).. Ορίζουμε την ποσότητα

$$j(r)=\exp\left(-\frac{\nu+\lambda}{2}\right) \tag{3.17}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βγάλουμε τον τρόπο με τον οποίο οι παραπάνω εξισώσεις μετασχηματίζονται λόγω της μικρής περιστροφής. Από την (3.17) γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι

$$j\,e^{\lambda}=\frac{1}{j}e^{-\nu} \tag{3.18}$$

Θεωρώ ότι τα ν και λ είναι συναρτήσεις μόνο του r οπότε από την (3.17) παραγωγίζοντας έχω

$$\frac{dj}{dr}=-\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)/2}\left(\frac{d\nu}{dr}+\frac{d\lambda}{dr}\right)\Leftrightarrow\frac{dj}{dr}=-\frac{1}{2}j\left(\frac{d\nu}{dr}+\frac{d\lambda}{dr}\right) \tag{3.19}$$

Η ποσότητα e^{ν} ορίζεται ως $e^{\nu}=1-\frac{2M}{r}$. Η (3.4) μέσω της (3.2) γίνεται

$$\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}=\frac{M+4\pi r^3 p}{r^2 e^{\nu}} \tag{3.20}$$

Επίσης $e^{-\lambda}=1-\frac{2M}{r}\quad\Rightarrow\quad-\frac{d\lambda}{dr}e^{-\lambda}=\frac{2M}{r^2}-\frac{2dM}{rdr}$ οπότε

$$\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}=\left(\frac{1}{r}\frac{dM}{dr}-\frac{M}{r^2}\right)e^{\lambda} \tag{3.21}$$

Η (3.19) μέσω των (3.20) και (3.21) γίνεται

$$\frac{dj}{dr} = -\frac{e^{-\nu}}{j} 4\pi r\left(\rho + p\right) \tag{3.22}$$

Η (3.16) τώρα μέσω των (3.22) και (3.18) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^4 j\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial r}\right] + \frac{4}{r}\frac{dj}{dr}\bar{\omega} + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2\sin^3\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin^3\theta\frac{\partial\bar{\omega}}{\partial\theta}\right) = 0 \tag{3.23}$$

Ένα ανάπτυγμα του $\bar{\omega}(r,\theta)$ σε πολυώνυμα Legendre δεν θα διαχώριζε την (3.23) διότι τόσο το $g_{t\phi}$ όσο και το ω, μετασχηματίζονται κάτω από περιστροφή όχι όπως ένα βαθμωτό στοιχείο αλλά ως διανυσματικό. Για να λύσουμε την (3.23) με χωρισμό των μεταβλητών, χρειαζόμαστε να αναπτύξουμε πρώτα σε διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές το $\bar{\omega}(r,\theta)$. Οι σχετικές γωνιακές συναρτήσεις μπορούν να βρεθούν κατευθείαν πως είναι της μορφής

$$\bar{\omega}(r,\theta) = \sum_{l=1}^{\infty}\bar{\omega}_l(r)\left(-\frac{1}{\sin\theta}\frac{dP_l}{d\theta}\right) \tag{3.24}$$

{ Την παραπάνω σχέση μπορεί κάποιος να την πάρει από την εργασία των Regge – Wheeler 1957 }.

Η ακτινική συνάρτηση $\bar{\omega}_l(r)$ τότε ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}\left[r^4 j(r)\frac{d\bar{\omega}_l}{dr}\right] + \left[\frac{4}{r}\frac{dj}{dr} - e^{(\lambda-\nu)/2}\frac{l(l+1)-2}{r^2}\right]\bar{\omega}_l = 0 \tag{3.25}$$

Ας εξετάσουμε την συμπεριφορά της λύσης της (3.25) , για μικρά r όπου απαιτούμε η γεωμετρία να είναι ομαλή, ενώ για μεγάλα r απαιτούμε να είναι επίπεδη. Για μικρά r λοιπόν, το $j(r)$είναι μια ομαλή συμμετρική συνάρτηση έτσι ώστε η διαφορική εξίσωση (3.25) δέχεται μια συμπεριφορά της μορφής

$$\bar{\omega}_l(r) \to \text{const.}\cdot r^{s+} + \text{const.}\cdot r^{s-} \quad \text{καθως} \quad r \to 0 \tag{3.26}$$

όπου

$$s_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \left[\frac{9}{4} + \frac{l(l+1)-2}{j(0)}\right]^{1/2} \tag{3.27}$$

Η συνάρτηση $j(r)$ είναι παντού θετική μιας και τα e^{ν}, e^{λ} είναι θετικά. Εάν η γεωμετρία είναι ομαλή κοντά στην πηγή του βαρυτικού πεδίου, τότε απαιτούμε το $r^{s-} \to 0$.Για μεγάλα r, η $j(r)$ γίνεται μοναδιαία και η $\bar{\omega}_l$ παίρνει την μορφή

$$\bar{\omega}_l(r) \to \text{const}.r^{-l-2} + \text{const}.r^{l-1} \tag{3.28}$$

Η συμπεριφορά του ϖ ήδη έχει φτιαχτεί κοντά στην πηγή. Συνεπώς ο λόγος των δυο σταθερών στην (3.28) καθορίζεται έτσι ώστε καμία να μην εξαφανίζεται εκτός κι αν και οι δυο το κάνουν. Εάν ο χώρος είναι επίπεδος για μεγάλα r, το ω πρέπει να ελαττώνεται γρηγορότερα από $1/r^3$, έτσι ώστε το $\varpi(r)=\Omega-\omega$ να πλησιάζει το Ω. Από την (3.28) γίνεται τότε προφανές ότι όλες οι σταθερές στο ανάπτυγμα Legendre του ϖ εξαφανίζονται εκτός από την περίπτωση για l = 1. Συνεπώς το ϖ είναι συνάρτηση μόνο του r και υπακούει στην διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{r^4}\frac{d}{dr}\left[r^4 j(r)\frac{d\varpi}{dr}\right]+\frac{4}{r}\frac{dj}{dr}\varpi=0 \qquad (3.29)$$

Αυτή η εξίσωση ολοκληρώνεται προς τα έξω αρχίζοντας από $\varpi(0)=\text{const}$. Έξω από τον αστέρα είναι $j(r)=1$ και η λύση έχει την μορφή

$$\varpi(r)=\Omega-\frac{2J}{r^3} \qquad \text{για } r>0 \qquad (3.30)$$

όπου η σταθερά J μπορεί να ταυτιστεί με την ολική στροφορμή του αστέρα. Η τελευταία σχέση είναι αυτή που θέλαμε να βγάλουμε και την οποία θα την χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Συμπεράσματα

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού ήταν να υπολογίσουμε το ρυθμό περιστροφής του αστέρα και κατά συνέπεια το ρυθμό με τον οποίο αυτός περιστρέφει το χώρο γύρω του. Στην πορεία χρησιμοποιήσαμε αρκετά μαθηματικά για να βγάλουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα και ελπίζω ο αναγνώστης να μην χάθηκε μέσα από τις πράξεις, θεωρούμε υποχρέωση να ξαναθυμίσουμε εν συντομία τι σημαίνουν τα κυρίως σύμβολα αλλά και το τελικό αποτέλεσμα.

Ω : Είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού και κατά συνέπεια του αστέρα όπως τη μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής σε κάποιο σημείο (t,r,θ,φ) μέσα στο ρευστό.

$\omega(r,\theta)$: Είναι η γωνιακή ταχύτητα (μετρημένη στο άπειρο) ενός παρατηρητή ο οποίος πέφτει ελεύθερα από το άπειρο με μηδενική στροφορμή.

$\Omega-\omega(r,\theta)$: Είναι η συντεταγμένη γωνιακή ταχύτητα ενός στοιχείου του ρευστού στο σημείο (r,θ) που βλέπει παρατηρητής ο οποίος πέφτει ελεύθερα προς αυτό.

Από την (3.30) καταλαβαίνουμε πως το $\omega(r)$ δίνεται από την σχέση

$$\omega(r)=\frac{2J}{r^3} \qquad (3.31)$$

βλέπουμε πως το ω εξαρτάται μόνο από το r και αυτό διότι το θ εμφανίζεται στους δεύτερους τάξεως όρους του ω που παραλείψαμε, καθότι θεωρήσαμε αργή περιστροφή. Η (3.31) αποτελεί την βασική σχέση αυτού του κεφαλαίου την οποία και θα χρησιμοποιήσουμε στο αμέσως επόμενο κεφάλαιο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εξέλιξη των ISCO σε αργά περιστρεφόμενους Αστέρες Νετρονίων με Δίσκο Προσαύξησης

ΓΕΝΙΚΑ

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να εστιάσει την προσοχή στην συσχέτιση μεταξύ της ύπαρξης των ISCO με το πρόβλημα του δίσκου προσαύξησης των Αστέρων Νετρονίων (Α.Ν.). Η ανακάλυψη των ταχέως περιστρεφόμενων Α.Ν., τους οποίους στη ξένη βιβλιογραφία ονομάζουμε millisecond pulsars (ms πάλσαρς) λόγω του ότι η περίοδος περιστροφής τους είναι της τάξεως των ms, υποδεικνύουν την πιθανότητα ύπαρξης πολλών Α.Ν. ασθενούς μαγνητικού πεδίου οι οποίοι όμως περιστρέφονται ταχύτατα. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στο ενδεχόμενο αυτοί οι αστέρες να αποτελούν πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας ενώ παράλληλα να τους θεωρούμε και ως μοντέλα παραγωγής ακτίνων Χ. Σε αυτά τα ενδεχόμενα η λεπτομερής έρευνα πάνω στον μηχανισμό της επιτάχυνσης της περιστροφής (spin up) θα δώσει αρκετές απαντήσεις στα πολλά ερωτήματα αστροφυσικού περιεχομένου.

Η ύπαρξη των ISCO για πολλά μοντέλα Α.Ν. αποτελεί πλέον αναμφισβήτητο κομμάτι της ΓΘΣ . Τα μοντέλα αυτά τα κατατάσσουμε σε δύο κατηγορίες κυρίως ως προς την πυκνότητα της ύλης τους. Έτσι έχουμε τους Α.Ν. με *΄΄μαλακές΄΄ εξισώσεις κατάστασης* τις οποίες θα αποκαλούμε **soft** και τους Α.Ν. με *΄΄σκληρές΄΄ εξισώσεις κατάστασης* τις οποίες θα αποκαλούμε **stiff**, ακολουθώντας τους ορισμούς της ξένης βιβλιογραφίας. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε ένα σχετικιστικό υπολογισμό της στροφορμής του αστέρα συναρτήσει της μάζας που προσαυξάνεται.

Σε προηγούμενο κεφάλαιο καταλήξαμε πως οι εσώτερες ευσταθείς κυκλικές τροχιές για έναν σφαιρικά συμμετρικό και μη περιστρεφόμενο αστέρα βρίσκονται σε απόσταση $r = 6M$, σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε πως εξελίσσεται αυτό το όριο για έναν **αργά περιστρεφόμενο** Α.Ν. Θυμίζουμε πως από την στιγμή που έχουμε περιστροφή, η σφαιρική συμμετρία παραβιάζεται, οπότε θα μιλούμε για έναν περίπου σφαιρικά συμμετρικό αστέρα. Τέλος όλοι οι υπολογισμοί μας γίνονται με ακρίβεια $1^{ης}$ τάξεως ως προς την στροφορμή ενώ όλες οι μονάδες είναι γεωμετρικοποιημένες (c = G = 1) και όπου αυτές δεν είναι, θα αναφερόμαστε με ακρίβεια. Μαγνητικά πεδία θεωρούνται ότι δεν επηρεάζουν σημαντικά τους υπολογισμούς μας.

Αργά Περιστρεφόμενοι Αστέρες Νετρονίων

Σκεπτόμενοι την εξέλιξη της στροφορμής λόγω προσαύξησης, ας υποθέσουμε αρχικά ότι ο αστέρας περιστρέφεται αργά, έχει κάποια συμμετρία ως προς κάποιον άξονα και βρίσκεται σε κάθε στιγμή σε κατάσταση ΄΄περίπου΄΄ ισορροπίας. Η μετρική για έναν τέτοιο αστέρα, θα είναι η μετρική ενός αξονικά συμμετρικού και ομογενούς περιστρεφόμενου ρευστού και η οποία δόθηκε για πρώτη φορά από τους Hartle & Thorne το 1968. Σε συντεταγμένη βάση το γραμμικό στοιχείο έξω από τον αστέρα θα είναι :

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2\theta \, d\phi dt \tag{4.1}$$

με το ω να δίνεται από την σχέση

$$\omega = \frac{2J}{r^3} \tag{4.2}$$

όπου M είναι η βαρυτική μάζα του αστέρα, J η ολική στροφορμή του και ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του.

Η μετρική αυτή είναι 1ης τάξης ως προς J, υποθέτοντας ότι η μηδενικής τάξης (π.χ. μη περιστρεφόμενος αστέρας) ανήκει σε σφαιρικά περιστρεφόμενο αστέρα. Ό,τι έχει να κάνει με την περιστροφή του αστέρα και πως αλλάζει ο χώρος εξαιτίας αυτής, βρίσκεται στον όρο $f\, d\phi\, dt$ τον οποίο στην ξένη βιβλιογραφία τον χαρακτηρίζουμε ως ΄΄dragging΄΄ ενώ στην ελληνική θα τον αποδίδαμε ως *συρμό του χώρου*. Η συμμετρία της χρονικής αναστροφής της γενικής μορφής της μετρικής, επιβάλει ότι οι διαταραχές του ρευστού πρέπει να είναι 2ης τάξεως ως προς J .

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μελετήσαμε μόνο τις ισημερινές γεωδαισιακές, ανάλογα θα πράξουμε και σε αυτό το κεφάλαιο για λόγους απλούστευσης του προβλήματος. Έτσι για $\theta = \pi/2$ και αρα $d\theta = 0$ η μετρική (4.1) γίνεται

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 - 2\omega r^2 d\phi dt \tag{4.3}$$

για τις χρονοειδείς γεωδαισιακές θα έχω

$$-1 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2 - 2\omega r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)\left(\frac{dt}{ds}\right) \tag{4.4}$$

ή καλύτερα αν θέσουμε $dt/ds = \dot{t},\ \ dr/ds = \dot{r}$ και $d\phi/ds = \dot{\phi}$ παίρνουμε την απλούστερη μορφή

$$-1 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 - 2\omega r^2 \dot{\phi}\cdot\dot{t} \tag{4.5}$$

Λύνοντας την (4.5) ως προς $\dot{r}^2$ παίρνουμε

$$\dot{r}^2 = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 - \dot{r}^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{\phi}^2 + 2\omega r^2\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{\phi}\cdot\dot{t} - \left(1-\frac{2M}{r}\right) \tag{4.6}$$

Η συμμετρία του αστέρα ως προς κάποιον άξονα και η χρονική ανεξαρτησία της μετρικής μας οδηγούν σε δύο ολοκληρώματα κίνησης τα οποία βγαίνουν από τις εξισώσεις των Euler – Lagrange, τα ολοκληρώματα αυτά είναι :

$$\theta = \pi / 2$$
$$\tilde{E}m \equiv E \equiv -p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \omega r^2 \dot{\phi} \qquad (4.7)$$
$$\tilde{l}m \equiv l \equiv p_\phi = r^2 \dot{\phi} - \omega r^2 \dot{t}$$

Η δεύτερη εξίσωση αποτελεί το ολοκλήρωμα της ενέργειας όπου ο όρος $\tilde{E}$ απευθύνεται στην ενέργεια ανά μονάδα μάζας ενώ m είναι η μάζα του σημειακού σωματιδίου. Η τρίτη εξίσωση αποτελεί το ολοκλήρωμα της στροφορμής με τον όρο $\tilde{l}$ να απευθύνεται στην στροφορμή ανά μονάδα μάζας, ενώ την στροφορμή την ορίζουμε ως J. Παρατηρώντας καλύτερα τις παραπάνω εξισώσεις και συγκρίνοντάς τες με τις αντίστοιχες του προηγούμενου κεφαλαίου (2.14), παρατηρούμε ότι οι επιπρόσθετοι όροι οι οφειλόμενοι στην περιστροφή του αστέρα είναι για την μεν ενέργεια ο όρος $\omega r^2 \dot{\phi}$ και για την δε στροφορμή ο όρος $-\omega r^2 \dot{t}$. Επίσης γίνεται αμέσως αντιληπτό πως για κάποιο αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άπειρο οι σταθερές E, l μεταπίπτουν στις συνηθισμένες εκφράσεις της ενέργειας και της στροφορμής.

Έχοντας τώρα τις (4.7), λύνω ως προς τα $\dot{r}$ και $\dot{\phi}$. Εν συνεχεία δημιουργώ τους όρους $\dot{r}^2, \dot{\phi}^2$ και $\dot{\phi} \cdot \dot{t}$ και όπου βρω όρους ω^2 ή ανώτερης τάξης τους διώχνω. Έπειτα τις αντικαθιστώ στην (4.6), οπότε αυτή γίνεται μόνο συναρτήσει των $\tilde{E}, \tilde{l}$. Μετά λοιπόν από αυτήν την αντικατάσταση η (4.6) παίρνει την μορφή

$$\dot{r}^2 = \tilde{E}^2 - \left\{ \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) + 2\omega \tilde{E}\tilde{l} \right\} \qquad (4.8)$$

Η (4.8) είναι παρόμοια με την (2.20) που είχαμε αποδείξει για σωματίδια γύρω από το χωρόχρονο Schwarzschild. Γίνεται ολοφάνερο πως αν ορίσουμε ως δυναμικό $V(r)$ την ποσότητα

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) + 2\omega \tilde{E}\tilde{l} \qquad (4.9)$$

τότε η (4.8) παίρνει την απλή μορφή

$$\dot{r}^2 = \tilde{E}^2 - V(r) \qquad (4.10)$$

Ο λόγος που προσπαθήσαμε να καταλήξουμε σε μια μορφή σαν την (4.10) είναι γιατί θέλουμε να μελετήσουμε τις τροχιές των σωματιδίων κατά αντιστοιχία με τις τροχιές σωματιδίων σε μονοδιάστατη κίνηση της Νευτώνειας Μηχανικής. Από την (4.10), οι παρακάτω συνθήκες συγκεντρώνουν κυρίως το ενδιαφέρον μας

$$(i) \qquad \tilde{E}^2 = V(r) \qquad (4.11)$$
$$(ii) \qquad V'(r) = 0 \qquad (4.12)$$
$$(iii) \qquad V''(r) = 0 \qquad (4.13)$$

Όπου με τον τόνο υποδηλώνουμε παραγώγιση ως προς r. Η πρώτη θα μας δώσει τα σημεία αναστροφής. Η πρώτη με τη δεύτερη συνθήκη μας δίνουν τις κυκλικές τροχιές και τέλος ο συνδυασμός και των τριών μας δίνουν τις οριακές σταθερές τροχιές. Ας ξεκινήσουμε πρώτα από την δεύτερη συνθήκη. Αντικαθιστώ πρώτα το ω από την (4.2) ενώ παράλληλα ορίζω την ποσότητα

$$j = \frac{J}{M^2} \tag{4.14}$$

και θυμάμαι να κρατώ μόνο 1ης τάξης όρους του j, ενώ απορρίπτω ανώτερους όρους. Ύστερα από αυτά η πρώτη και δεύτερη παράγωγος του $V(r)$ δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$V'(r) = -\frac{2\tilde{l}^2}{r^3} + \frac{2M}{r^2} + \frac{6M\tilde{l}^2}{r^4} - \frac{12M^2\tilde{E}\tilde{l}}{r^4} j \tag{4.15}$$

και

$$V''(r) = -\frac{6\tilde{l}^2}{r^4} - \frac{4M}{r^3} - \frac{24M\tilde{l}^2}{r^5} + \frac{48M^2\tilde{E}\tilde{l}}{r^5} j \tag{4.16}$$

Εξισώνω τις τελευταίες με το μηδέν όπως επιβάλουν οι συνθήκες (4.12) και (4.13). Οπότε παίρνω

$$-\tilde{l}^2 r + Mr^2 + 3M\tilde{l}^2 - 6M^2\tilde{E}\tilde{l}\, j = 0 \tag{4.17}$$

και

$$3\tilde{l}^2 r - 2Mr^2 - 12M\tilde{l}^2 + 24M^2\tilde{E}\tilde{l}\, j = 0 \tag{4.18}$$

για την $V'(r)$ και την $V''(r)$ αντίστοιχα. Πολλαπλασιάζοντας την (4.17) με το 4 και προσθέτοντας την στην (4.18) παίρνω

$$r_{\text{orb}} = \frac{\tilde{l}^2_{\text{orb}}}{2M} \tag{4.19}$$

η τελευταία σχέση μας δίνει τις κυκλικές τροχιές των σημειακών σωματιδίων γύρω από τον Α.Ν.

Παίρνω τώρα την (4.17) και την διαιρώ με M^3 οπότε και καταλήγω στην

$$-\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2 \frac{r}{M} + \left(\frac{r}{M}\right)^2 + 3\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2 - 6\tilde{E}\, j\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right) = 0 \tag{4.20}$$

για να απλοποιήσω την παραπάνω σχέση θέτω

$$s = \frac{r}{M} \tag{4.21}$$

οπότε η (4.20) γίνεται

$$\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2 (s-3) + 6\tilde{E}\, j\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right) - s^2 = 0 \tag{4.22}$$

Παρατηρώ ότι η (4.22) είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς $\frac{\tilde{l}}{M}$ με διακρίνουσα $\Delta = 36\tilde{E}^2 j^2 + 4(s-3)s^2 \xrightarrow{j^2 \to 0} \Delta = 4(s-3)s^2$. Παρατηρούμε αμέσως ότι για να είναι $\Delta \geq 0$ θα πρέπει και $s \geq 3$ (ή κατά αντιστοιχία $r \geq 3M$). Η λύση λοιπόν για την $\frac{\tilde{l}}{M}$ σύμφωνα με τα παραπάνω είναι

$$\frac{\tilde{l}}{M} = -3\tilde{E}\, j(s-3)^{-1} \pm s(s-3)^{-1/2} \tag{4.23}$$

Η τελευταία σχέση θα μας φανεί αρκετά χρήσιμη για την συνέχεια αφού σκοπός μας είναι να εκφράσουμε την στροφορμή ανά μονάδα τροχιακής μάζας συναρτήσει μόνο των s, j. Παίρνουμε τώρα την πρώτη συνθήκη και αντικαθιστώ πάλι το ω από την (4.2) ενώ παράλληλα αντικαθιστούμε και το J από την σχέση (4.14), η πρώτη συνθήκη τώρα γράφεται

$$\tilde{E}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) + \frac{4M^2}{r^3}\tilde{E}\tilde{l}\, j \tag{4.24}$$

Η τελευταία αποτελεί πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς $\tilde{E}$, πράγματι

$$\tilde{E}^2 - \frac{4M^3}{r^3}\frac{\tilde{l}}{M}\tilde{E}\, j - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{M^2}\frac{M^2}{r^2}\right) = 0 \tag{4.25}$$

Θέτοντας $s = r/M$ η (4.25) γίνεται

$$\tilde{E}^2 - 4s^{-3}\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right) j\tilde{E} - \left(1 - 2s^{-1}\right)\left(1 + s^{-2}\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2\right) = 0 \tag{4.26}$$

Σχεδόν έχουμε φτάσει στην τελική μορφή, μένει μόνο να αντικαταστήσουμε τα $\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)$ και $\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2$ από την (4.23), θυμίζουμε ξανά ότι όροι $2^{\text{ης}}$ τάξης ως προς j απορρίπτονται, οπότε ο όρος $\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2$ γίνεται

$$\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2 = s^2(s-3)^{-1} \pm 6\tilde{E}j(s-3)^{-3/2}\, s \tag{4.27}$$

Η (4.26) μέσω των (4.23) και (4.27) παίρνει την τελική της μορφή

$$\tilde{E}^2 \mp 2s^{-1}(s-3)^{-1/2}\left\{2s^{-1} + 3(s-3)^{-1}\left(1 - 2s^{-1}\right)\right\}\tilde{E}\, j - \left(1 - 2s^{-1}\right)\left[1 + (s-3)^{-1}\right] = 0 \tag{4.28}$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς $\tilde{E}$ και η λύση του δίνει

$$\tilde{E}_{\pm} = s^{-1/2}\left(s-2\right)\left(s-3\right)^{-1/2} \pm s^{-1}\left(s-3\right)^{-1/2}\left[2s^{-1}+3\left(s-3\right)^{-1}s^{-1}\left(s-2\right)\right]j \quad (4.29)$$

Η (4.29) είναι μια πολύ χρήσιμη σχέση και θα την χρησιμοποιήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Η χρησιμότητά της οφείλεται στο ότι εκφράζει την ενέργεια των στοιχειωδών σωματιδίων ανά μονάδα μάζας σε τυχαία απόσταση r. Με την βοήθεια τώρα της (4.29) η σχέση (4.23) παίρνει τώρα την μορφή

$$\tilde{l} = \pm s\left(s-3\right)^{-1/2}\left[1 \mp 3s^{-3/2}\left(s-3\right)^{-1}\left(s-2\right)j\right]M \quad (4.30)$$

Καταφέραμε λοιπόν να εκφράσουμε την στροφορμή ανά μονάδα μάζας συναρτήσει μόνο του s και του j και για οποιαδήποτε απόσταση r. Φτάσαμε λοιπόν στο επιθυμητό αποτέλεσμα, τώρα πλέον μπορούμε να δώσουμε τα τελικά αποτελέσματα. Για ευσταθείς τροχιές, δηλαδή για $r = 6M$, ή $s = \frac{r}{M} = \frac{6M}{M} = 6$ παίρνουμε από την (4.30)

$$\tilde{l}_{\text{orb}} = \pm\sqrt{12}\left(1 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j\right)M \quad (4.31)$$

Αν θυμηθούμε τώρα την (4.19) και θέσουμε σε αυτήν όπου $\tilde{l}_{\text{orb}}$ την (4.31) τότε καταλήγουμε σε μια σχέση για την ακτίνα των ISCO

$$r_{\text{orb}} = 6\left[1 \mp \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j\right]M \quad (4.32)$$

Τέλος από την σχέση (4.29) και για s = 6 παίρνουμε

$$\tilde{E}_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{8}{9}}\left[1 \mp \frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j\right] \quad (4.33)$$

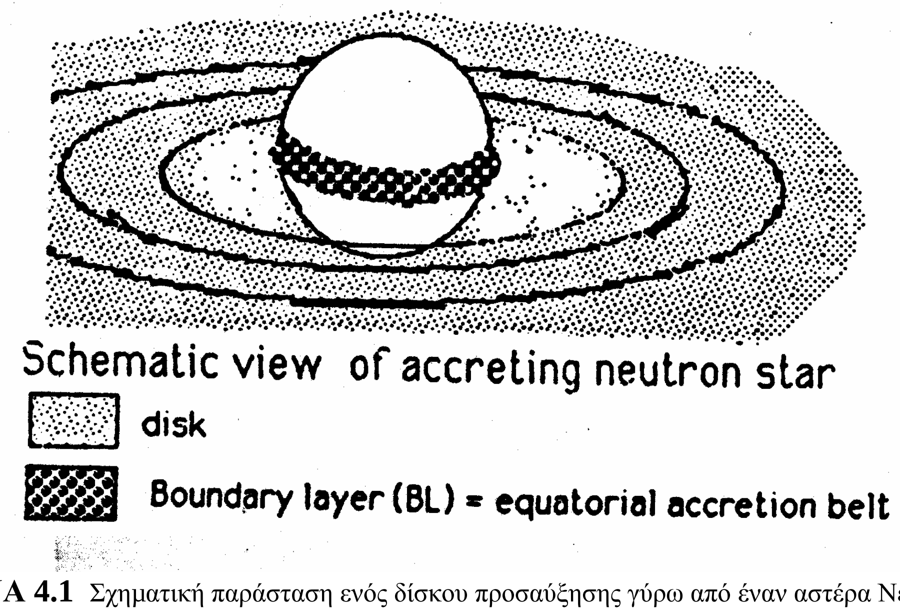
Όπου το πάνω πρόσημο είναι όταν αστέρας και δίσκος περιστρέφονται ομόρροπα ενώ το κάτω πρόσημο όταν περιστρέφονται αντίρροπα.

Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε έναν σχετικιστικό υπολογισμό της στροφορμής όπως επίσης και των τροχιών των στοιχειωδών σωματιδίων που περιστρέφονται γύρω από έναν αργά περιστρεφόμενο αστέρα. Σε σύγκριση και με τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου, καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως η περιστροφή του αστέρα βρίσκει αντίκτυπο και στις τροχιές των σωματιδίων καθότι μεταβάλλονται κατά μια ποσότητα. Η ποσότητα αυτή είναι η διαφορά της (4.32) από την 6M που υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Βλέπουμε καθαρά από την (4.32) πως η περιστροφή του αστέρα σπρώχνει προς τα μέσα τα σωματίδια του δίσκου προσαύξησης. Έτσι για έναν αστέρα αργά περιστρεφόμενο, οι εσώτερες ευσταθείς κυκλικές τροχιές δεν βρίσκονται στην απόσταση των 6M από το κέντρο της βαρυτικής πηγής αλλά ελάχιστα πιο μέσα. Για παράδειγμα, η μέγιστη περιστροφή για έναν αστέρα αντιστοιχεί στον όρο j = 1, επειδή μιλούμε για αργά περιστρεφόμενο αστέρα το j θα πρέπει να κυμαίνεται μεταξύ των τιμών 0 και 0,4. Για την τιμή 0,4 η εσώτερη ευσταθή κυκλική τροχιά βρίσκεται στα 5,78 M για σωματίδια που κινούνται ομόρροπα με τον αστέρα, και 6,22 M για σωματίδια που κινούνται αντίρροπα.

Επιπλέον μελέτες τις οποίες δεν θα αναφέρουμε διότι ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτής της διπλωματικής, αποδεικνύουν ότι οι Αστέρες Νετρονίων με μαλακές εξισώσεις κατάστασης έχουν μικρότερη ακτίνα απο αντίστοιχους αστέρες με σκληρή εξίσωση κατάστασης, οπότε οι εσώτερες ευσταθείς τροχιές βρίσκονται εκτός της επιφάνειάς των. Στην περίπτωση σκληρής εξίσωσης κατάστασης και για αστέρες χωρίς μαγνητικό πεδίο, ο δίσκος προσαύξησης σχηματίζει ένα συνοριακό στρώμα (boundary layer) επάνω στην επιφάνεια του αστέρα. Η παρακάτω εικόνα δείχνει μια άποψη του συνοριακού στρώματος που σχηματίζεται στην επιφάνεια του αστέρα, αλλά για τα soft μοντέλα η εσωτερική άκρη του δίσκου είναι καλά διαχωρισμένη από την επιφάνεια του αστέρα. Σε αυτήν την περίπτωση και για προσαυξήσεις μικρού ρυθμού και χωρίς έντονα μαγνητικά πεδία, η προσπιπτώμενη ύλη , πλησιάζει την επιφάνεια του αστέρα ή καλύτερα πέφτει ελεύθερα ακολουθώντας συγκεκριμένες τροχιές. Η ύλη χτυπά την επιφάνεια κατά μια συγκεκριμένη γωνία πτώσης, η οποία ορίζεται από την μάζα και την στροφορμή του αστέρα.

Όλα αυτά μας οδηγούν να πιστεύουμε πως η εκπομπή των ακτίνων X από την πρόσπτωση των σωματιδίων θα διαφέρει στις παραπάνω δύο περιπτώσεις , θα είναι δηλαδή διαφορετική στα soft από τα stiff μοντέλα. Πράγμα που μας κάνει να πιστεύουμε πως με σταδιακή μελέτη των παραπάνω φαινομένων θα μπορέσουμε να πάρουμε πληροφορίες ώστε να μπορέσουμε να απορρίψουμε μερικές από τις πολλές θεωρητικές εξισώσεις κατάστασης που έχουν κατά καιρούς προτείνει οι αστροφυσικοί για αυτούς τους αστέρες.



ΕΙΚΟΝΑ 4.1 Σχηματική παράσταση ενός δίσκου προσαύξησης γύρω από έναν αστέρα Νετρονίων στην οποία φαίνεται το συνοριακό στρώμα της ύλης επάνω στην επιφάνεια του αστέρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογή Γραμμικών Διαταραχών

ΓΕΝΙΚΑ

Το κεφάλαιο αυτό αποτελεί μίγμα όλων των προηγούμενων κεφαλαίων, εννοώντας πως θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια μετρική, θα ανατρέξουμε σε προηγούμενες σχέσεις και γενικά θα βασιστούμε σε υποθέσεις και απλουστεύσεις των προηγούμενων κεφαλαίων. Από μαθηματικής άποψης είναι αρκετά πλούσιο, καθώς αναφέρεται σε γραμμικές διαταραχές, τις οποίες θα εφαρμόσουμε σε συγκεκριμένους όρους, όπως για παράδειγμα σε ένα δυναμικό, για να προσπαθήσουμε να εξάγουμε, και σε συνδυασμό με τα προηγούμενα βέβαια, τις συχνότητες των τροχιών. Θα δούμε συγκεκριμένα δύο διαταραχές την ακτινική (radial) και την κάθετη (meridional).

Ακτινική Διαταραχή

Η μετρική που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτή ενός αργά περιστρεφόμενου αστέρα και δίνεται από την σχέση

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\, d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2\theta\, d\phi dt \tag{5.1}$$

Οι συναλλοίωτες και οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της μετρικής είναι αυτές του ***Παραρτήματος Α*** και δίνονται από τις σχέσεις :

Συναλλοίωτες

$$\begin{gathered} g_{tt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right) = -e^{\nu} \qquad g_{rr} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} = e^{\lambda} \\ g_{\theta\theta} = r^2 \qquad g_{\phi t} = -\omega r^2 \sin^2\theta \qquad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta \end{gathered} \tag{5.2}$$

Ανταλλοίωτες

$$\begin{gathered} g^{tt} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} = -e^{-\nu} \qquad g^{rr} = \left(1-\frac{2M}{r}\right) = e^{-\lambda} \\ g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \qquad g^{\phi t} = -\omega\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} = -\omega e^{\lambda} \qquad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{gathered} \tag{5.3}$$

Η συμμετρία του αστέρα ως προς κάποιον άξονα και η χρονική ανεξαρτησία της μετρικής μας οδηγούν σε δύο ολοκληρώματα κίνησης τα οποία βγαίνουν από τις εξισώσεις των Euler – Lagrange, τα ολοκληρώματα αυτά είναι :

$$\tilde{E}m \equiv E \equiv -p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t} + \omega r^2 \dot{\phi}$$
$$\tilde{l}m \equiv l \equiv p_\phi = r^2\dot{\phi} - \omega r^2 \dot{t} \tag{5.4}$$

Επειδή οι τετρα-ορμές p_t και p_ϕ δίνονται από τις σχέσεις $p_t = mu_t$ και $p_\phi = mu_\phi$ αντίστοιχα, από την (5.4) παίρνουμε

$$\tilde{E} = -u_t \quad \text{και} \quad \tilde{l} = u_\phi \tag{5.5}$$

Από την συνθήκη κανονικοποίησης για την τετραταχύτητα $u^\alpha u_\alpha = -1$ παίρνουμε

$$g^{tt}(u_t)^2 + g^{rr}(u_r)^2 + g^{\theta\theta}(u_\theta)^2 + g^{\phi\phi}(u_\phi)^2 + 2g^{t\phi}u_t u_\phi = -1 \tag{5.6}$$

Επειδή μιλάμε για ακτινική διαταραχή θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$u_\theta = 0 \tag{5.7}$$

Η (5.6) λόγω των (5.5) και (5.7) γίνεται

$$g^{tt} - 2g^{t\phi}\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}} + g^{\phi\phi}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)^2 + \frac{1}{\tilde{E}^2}g^{rr}(u_r)^2 = -\frac{1}{\tilde{E}^2} \tag{5.8}$$

όπου έχω διαιρέσει κάθε όρο με το $\tilde{E}^2 \neq 0$, τώρα θέτοντας

$$U\left(r, \theta, \frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right) = g^{tt} - 2g^{t\phi}\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}} + g^{\phi\phi}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)^2 \tag{5.9}$$

η (5.8) καταλήγει στην απλή μορφή

$$U + \frac{1}{\tilde{E}^2}g^{rr}(u_r)^2 = -\frac{1}{\tilde{E}^2}$$
$$\text{όμως} \qquad g^{rr}(u_r)^2 = g_{rr}(u^r)^2 \quad \text{οπότε} \tag{5.10}$$
$$U + \frac{1}{\tilde{E}^2}g_{rr}(u^r)^2 = -\frac{1}{\tilde{E}^2}$$

Η τετρα-ταχύτητα u^r όμως δίνεται από την σχέση $u^r = \dfrac{dr}{d\tau}$ όπου τ είναι ο ίδιος χρόνος, συνεπώς η (5.10) καταλήγει στην τελική μορφή

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{\tilde{E}^2 U + 1}{g_{rr}} \equiv F(r) \tag{5.11}$$

Η (5.11) είναι ανάλογη της εξίσωσης (4.10) που συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο λόγος που την φέραμε σε αυτήν την μορφή είναι για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις τροχιές καλύτερα. Με την (5.11) σε αυτήν την μορφή είναι εύκολο να εφαρμόσουμε διαταραχή στον όρο $F(r)$, προτού όμως διαταράξουμε το $F(r)$ ας αντικαταστήσουμε το U όπως αυτό δίνεται από την (5.9) και ας βάλουμε τις ανταλλοίωτες συνιστώσες με τις τιμές που δίνονται από την (5.3). Το τελικό αποτέλεσμα από την παραπάνω διαδικασία δίνεται από την σχέση

$$F(r) = \tilde{E}^2 - 2\omega\tilde{E}\tilde{l} - \frac{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}{r^2\sin^2\theta}\tilde{l}^2 - \left(1-\frac{2M}{r}\right) \tag{5.12}$$

ή σε μια πιο απλή μορφή

$$F(r) = e^{2\alpha}\left\{e^{-2\nu}\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^2 - \frac{\tilde{l}^2}{r^2\sin^2\theta} - 1\right\} \tag{5.13}$$

Οι (5.12) ή (5.13) αποτελούν την γενική μορφή του όρου $F(r)$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω στην $F(r)$ γραμμική διαταραχή. Με την μέθοδο αυτή βρίσκουμε την γενική λύση κατά προσέγγιση, σε μια μικρή περιοχή του σημείου ισσοροπίας.

Από την (5.11) έχουμε ότι $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = F(r)$ η΄ $\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{F(r)}$ η σχέση $\frac{dr}{d\tau} = 0$ και κατά αναλογία η $F(r) = 0$ μου δίνει τα σημεία αναστροφής, έστω αυτά υπάρχουν σε κάποιο σημείο r_o, αν απαιτήσουμε παράλληλα και την πρώτη παράγωγο του $F(r)$ να είναι μηδέν τότε μαζί με την $F(r_o) = 0$, θα πάρω τις κυκλικές τροχιές, δηλαδή

$$F(r_o) = 0 \qquad \text{και} \qquad F'(r_o) = 0 \tag{5.14}$$

Θυμηθείτε ότι η διαδικασία που ακολουθούμε είναι παρόμοια με την περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου, που απαιτήσαμε τις συνθήκες (4.11-12-13) για να μελετήσουμε τις τροχιές των σημειακών σωματιδίων. Κάτι ανάλογο κάνουμε και τώρα με τη διαφορά ότι διαταράσσουμε την ακτινική ταχύτητα των σημειακών σωματιδίων για να δούμε σε ποιες τιμές αυτή μπορεί να καταλήξει, την ίδια δουλειά θα κάνουμε και για την μεσημβρινή διαταραχή.

Εφαρμόζω τώρα την διαταραχή $r = r_o + \delta r$. Αναπτύσσω την $F(r - r_o)$ κατά Taylor γύρω από το σημείο r_o, οπότε

$$F(r-r_o) = F(r_o) + (r-r_o)F'(r_o) + \frac{(r-r_o)^2}{2!}F''(r_o) \tag{5.15}$$

όπου με τον ένα τόνο υποδηλώνουμε μια φορά παραγώγιση, ενώ με δύο τόνους εννοούμε δύο φορές παραγώγιση ως προς τον αντίστοιχο όρο, στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ως προς r. Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την $r - r_o = \delta r$ αλλά και με τις συνθήκες (5.14) που επιβάλαμε, οδηγούν στην παρακάτω μορφή

$$F(\delta r) = \frac{1}{2}(\delta r)^2 F''(r_o) \tag{5.16}$$

οπότε θα έχω

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(r_o + \delta r\right) = \sqrt{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{d\tau}\left(\delta r\right) = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\delta r\right)^2 F''\left(r_o\right)} \quad (5.17)$$

όπου η τελευταία εξίσωση με οδηγεί στην

$$\frac{d}{d\tau}\left(\delta r\right) = \delta r\sqrt{\frac{F''\left(r_o\right)}{2}} \quad (5.18)$$

Την τελευταία σχέση θα την φέρουμε σε μια πιο γνώριμη μορφή, διότι αποτελεί γνωστή διαφορική εξίσωση. Γι'αυτό γράφω την (5.18) ως

$$\delta\dot{r} - \sqrt{\frac{F''\left(r_o\right)}{2}}\,\delta r = 0 \quad (5.19)$$

όπου η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως προς τον χρόνο, στη συγκεκριμένη περίπτωση ως προς τον ίδιο χρόνο. Υψώνοντας την τελευταία σχέση στο τετράγωνο και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνω

$$2\delta\dot{r}\cdot\delta\ddot{r} = F''\left(r_o\right)\cdot\delta\dot{r}\cdot\delta r \quad \text{ή} \quad \delta\ddot{r} + \left(-\frac{F''\left(r_o\right)}{2}\right)\delta r = 0 \quad (5.20)$$

Η (5.20) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της μορφής $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, η οποία όπως γνωρίζουμε πολύ καλά αποτελεί την διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με το ω να είναι η κυκλική συχνότητα, και να παίρνει θετικές τιμές. Η (5.20) λοιπόν μου δίνει την ακτινική κυκλική συχνότητα ω_r

$$\omega_r = \sqrt{-\frac{F''\left(r_o\right)}{2}} \quad (5.21)$$

Ο λόγος που έφερα την (5.21) σε αυτή την μορφή είναι γιατί η δεύτερη παράγωγος του F ως προς r είναι αρνητική, πράγμα που σημαίνει πως περιμένουμε από αυτήν να έχει κάποιο μέγιστο, πράγματι παρακάτω, όταν θα σχεδιάσουμε την μορφή της θα δούμε που εμφανίζει μέγιστο. Η λύση της (5.20) μου δίνει τη συμπεριφορά του υλικού σημείου στην περιοχή του σημείου ισορροπίας. Στη συγκεκριμένη όμως στιγμή δεν μας ενδιαφέρει η λύση της διαφορικής εξίσωσης παρά μόνο η συχνότητα (5.21).

Η ω_r όμως αναφέρεται στον ίδιο χρόνο τ, επόμενο βήμα είναι να την ανάγουμε στο συντεταγμένο χρόνο t, στο χρόνο δηλαδή του δικού μας συστήματος, μακριά από τον αστέρα. Για να το κάνουμε αυτό θα πρέπει να ανατρέξουμε στα ολοκληρώματα της ενέργειας και στροφορμής ανά μονάδα μάζας τα οποία δίνονται από τις σχέσεις (5.4). Συνδυάζοντας τα δύο ολοκληρώματα βρίσκω πως

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\tilde{E} - \omega\tilde{l}\right) = \dot{t} \equiv \frac{dt}{d\tau} \quad (5.22)$$

αλλά μεταξύ ίδιου και συντεταγμένου χρόνου ισχύει

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2} \tag{5.23}$$

Η (5.20) λόγω της (5.23) θα γίνει

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \frac{d^2}{dt^2}(\delta r) - \frac{F''(r_o)}{2}\delta r = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\ddot{r} - \frac{F''(r_o)}{2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-2}\delta r = 0 \tag{5.24}$$

Από την οποία παίρνω κατευθείαν ότι

$$\omega_r = \sqrt{-\frac{F''(r_o)}{2}}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^{-1} \tag{5.25}$$

Η (5.25) λόγω της (5.22) καταλήγει στην τελική μορφή για την ακτινική κυκλική συχνότητα

$$\omega_r = \left(\tilde{E} - \omega\tilde{l}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \sqrt{-\frac{F''(r_o)}{2}} \tag{5.26}$$

Επόμενο βήμα είναι να βρούμε τον όρο $F''(r_o)$ και να τον θέσουμε στην (5.26). Θα πρέπει δηλαδή να βρούμε την δεύτερη παράγωγο ως προς το r_o που αποτελεί το σημείο αναστροφής των σημειακών σωματιδίων που περιφέρονται γύρω από τον αργά περιστρεφόμενο αστέρα.. Ο όρος αυτός όμως είναι συναρτήσει των $\tilde{E}, \tilde{l}, \omega$ τα οποία όμως θα πρέπει να γραφούν με την γενική τους μορφή. Δηλαδή το $\tilde{E}$ θα αντικατασταθεί από την εξίσωση (4.29) η οποία εκφράζει την ενέργεια των στοιχειωδών σωματιδίων ανά μονάδα μάζας σε τυχαία απόσταση r, το $\tilde{l}$ θα αντικατασταθεί από την εξίσωση (4.30) η οποία εκφράζει την στροφορμή ανά μονάδα μάζας συναρτήσει μόνο του s και του j, σε τυχαία απόσταση r, θυμίζουμε πως το j δίνεται από την ποσότητα $j = \frac{J}{M^2}$. Βέβαια όλη αυτή η διαδικασία απαιτεί πολύ χρόνο και κόπο γι'αυτό και θα δώσω την απευθείας τελική σχέση που προκύπτει, ενώ ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει την πλήρης λύση στο ***Παράρτημα Β***.

Η τελική μορφή που παίρνει η ακτινική επικυκλική συχνότητα ω_r δίνεται από την ακόλουθη σχέση

$$\omega_r = s^{-2}(s-6)^{1/2}\left\langle 1 - 3s^{-3/2}(s-3)^{-1}(s-6)^{-1}\left[(s-1)(s-2)+4\right]j\right\rangle M^{-1} \tag{5.27}$$

Η (5.27) είναι η σχέση που θέλαμε εξαρχής να καταλήξουμε και η οποία δίνει την ακτινική επικυκλική συχνότητα των σημειακών σωματιδίων σε τυχαία απόσταση r. Θυμίζουμε πως με το γράμμα s συμβολίσαμε τον όρο r/M. Προτού αναφέρουμε οτιδήποτε για την παραπάνω συχνότητα θα ήταν συνετό να βγάζαμε και την αντίστοιχη κάθετη επικυκλική συχνότητα, κατόπιν μπορούμε να τις συγκρίνουμε και να δούμε αν υπάρχουν και που υπάρχουν φαινόμενα συντονισμού.

Κάθετη Διαταραχή

Από την συνθήκη κανονικοποίησης για την τετρα-ταχύτητα $u^{\alpha}u_{\alpha}=-1$ παίρνουμε

$$g^{tt}\left(u_t\right)^2+g^{rr}\left(u_r\right)^2+g^{\theta\theta}\left(u_\theta\right)^2+g^{\phi\phi}\left(u_\phi\right)^2+2g^{t\phi}u_t u_\phi=-1 \tag{5.28}$$

Επειδή μιλάμε για κάθετη διαταραχή θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$u_r=0 \tag{5.29}$$

οπότε η (5.28) γίνεται

$$g^{tt}\left(u_t\right)^2+g^{\theta\theta}\left(u_\theta\right)^2+g^{\phi\phi}\left(u_\phi\right)^2+2g^{t\phi}u_t u_\phi=-1 \tag{5.30}$$

Η (5.30) λόγω των (5.5) καταλήγει στην

$$g^{tt}-2g^{t\phi}\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}+g^{\phi\phi}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)^2+\frac{1}{\tilde{E}^2}g^{\theta\theta}\left(u_\theta\right)^2=-\frac{1}{\tilde{E}^2} \tag{5.31}$$

όπου έχω διαιρέσει κάθε όρο με το $\tilde{E}^2\neq 0$, τώρα θέτοντας

$$U\left(r,\theta,\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)=g^{tt}-2g^{t\phi}\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}+g^{\phi\phi}\left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)^2 \tag{5.32}$$

οπότε η (5.31) καταλήγει στην

$$\begin{aligned}&U+\frac{1}{\tilde{E}^2}g^{\theta\theta}\left(u_\theta\right)^2=-\frac{1}{\tilde{E}^2}\\&\text{όμως}\qquad g^{\theta\theta}\left(u_\theta\right)^2=g_{\theta\theta}\left(u^\theta\right)^2\quad\text{οπότε}\\&U+\frac{1}{\tilde{E}^2}g_{\theta\theta}\left(u^\theta\right)^2=-\frac{1}{\tilde{E}^2}\end{aligned} \tag{5.33}$$

Η τετρα-ταχύτητα u^θ όμως δίνεται από την σχέση $u^\theta=\dfrac{d\theta}{d\tau}$ όπου τ είναι ο ίδιος χρόνος, συνεπώς η τελευταία από τις (5.33) καταλήγει στην τελική μορφή

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2=-\frac{\tilde{E}^2U+1}{g_{\theta\theta}}\equiv G\left(r,\theta,\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)=\frac{g_{rr}}{g_{\theta\theta}}F\left(r,\theta,\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right) \tag{5.34}$$

Η (5.34) είναι ανάλογη της εξίσωσης (4.10) που συναντήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο λόγος που την φέραμε σε αυτήν την μορφή είναι για να μπορέσουμε να μελετήσουμε τις τροχιές καλύτερα. Ο τελευταίος όρος της (5.34) βγήκε συνδυάζοντάς την με την (5.11) .Με την (5.34) σε αυτήν την μορφή είναι εύκολο να εφαρμόσουμε διαταραχή στον όρο $G\left(r,\theta,\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)$, ο όρος $F\left(r,\theta,\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)$ δίνεται από την (5.12). Αντικαθιστώντας τις συναλλοίωτες της μετρικής και το $F(r,\theta)$, η $G(r,\theta)$ παίρνει την τελική της μορφή η οποία δίνεται από την παρακάτω σχέση

$$G(r)=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\tilde{E}^2-\left\{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\tilde{l}^2}{r^2\sin^2\theta}+1\right)+2\omega\tilde{E}\tilde{l}\right\}\right] \tag{5.35}$$

Η (5.35) αποτελεί την γενική μορφή του όρου $G(r,\theta)$. Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την διαταραχή.

Από την (5.34) έχουμε ότι $\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2=G(r,\theta)$ ή΄ $\frac{d\theta}{d\tau}=\sqrt{G(r,\theta)}$ η σχέση $\frac{d\theta}{d\tau}=0$ και κατά αναλογία η $G(r,\theta)=0$ μου δίνει τα σημεία αναστροφής, έστω αυτά υπάρχουν σε κάποιο σημείο θ_o, αν απαιτήσουμε παράλληλα και την πρώτη παράγωγο του $G(\theta)$ να είναι μηδέν τότε μαζί με την $G(\theta_o)=0$, θα πάρω τις κυκλικές τροχιές, δηλαδή

$$G(\theta_o)=0 \qquad \text{και} \qquad \mathrm{G}'(\theta_o)=0 \tag{5.36}$$

Εφαρμόζω τώρα την διαταραχή $\theta=\theta_o+\delta\theta$. Αναπτύσσω την $G(\theta-\theta_o)$ κατά Taylor γύρω από το σημείο θ_o, οπότε

$$G(\theta-\theta_o)=G(\theta_o)+(\theta-\theta_o)G'(\theta_o)+\frac{(\theta-\theta_o)^2}{2!}G''(\theta_o) \tag{5.37}$$

όπου με τον ένα τόνο υποδηλώνουμε μια φορά παραγώγιση, ενώ με δύο τόνους εννοούμε δύο φορές παραγώγιση ως προς τον αντίστοιχο όρο, στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ως προς θ. Η τελευταία σχέση σε συνδυασμό με την $\theta-\theta_o=\delta\theta$ αλλά και με τις συνθήκες (5.36) που επιβάλαμε, οδηγούν στην παρακάτω μορφή

$$G(\delta\theta)=\frac{1}{2}(\delta\theta)^2G''(\theta_o) \tag{5.38}$$

οπότε θα έχουμε

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\sqrt{G(\theta_o)} \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\tau}(\theta_o+\delta\theta)=\sqrt{G} \;\Rightarrow\; \frac{d}{d\tau}(\delta\theta)=\sqrt{\frac{1}{2}(\delta\theta)^2G''(\theta_o)} \tag{5.39}$$

όπου η τελευταία εξίσωση μας οδηγεί στην

$$\frac{d}{d\tau}(\delta\theta)=\delta\theta\sqrt{\frac{G''(\theta_o)}{2}} \tag{5.40}$$

Την τελευταία σχέση θα την φέρουμε σε μια πιο γνώριμη μορφή, διότι αποτελεί γνωστή διαφορική εξίσωση. Γι’αυτό γράφω την (5.40) ως

$$\delta\dot{\theta} - \sqrt{\frac{G''(\theta_o)}{2}}\,\delta\theta = 0 \tag{5.41}$$

όπου η τελεία δηλώνει παραγώγιση ως προς τον χρόνο, στη συγκεκριμένη περίπτωση ως προς τον ίδιο χρόνο. Υψώνοντας την τελευταία σχέση στο τετράγωνο και παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο παίρνουμε

$$2\delta\dot{\theta}\cdot\delta\ddot{\theta} = G''(\theta_o)\cdot\delta\dot{\theta}\cdot\delta\theta \quad \text{ή} \quad \delta\ddot{\theta} + \left(-\frac{G''(\theta_o)}{2}\right)\delta\theta = 0 \tag{5.42}$$

Η (5.42) είναι μια γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως της μορφής $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, η οποία όπως γνωρίζουμε πολύ καλά αποτελεί την διαφορική εξίσωση του απλού αρμονικού ταλαντωτή με το ω να είναι η κυκλική συχνότητα. Η (5.42) λοιπόν μας δίνει την κάθετη επικυκλική συχνότητα ω_θ

$$\omega_\theta = \sqrt{-\frac{G''(\theta_o)}{2}} \tag{5.43}$$

Η ω_θ όμως αναφέρεται στον ίδιο χρόνο τ, επόμενο βήμα είναι να την ανάγουμε στο συντεταγμένο χρόνο t, στο χρόνο δηλαδή του δικού μας συστήματος, μακριά από τον αστέρα. Ανάλογη δουλειά κάναμε και στην ακτινική διαταραχή οπότε θα πάρουμε την σχέση έτοιμη, η ω_θ στο συντεταγμένο χρόνο t γράφεται σε αναλογία με την (5.26) ως

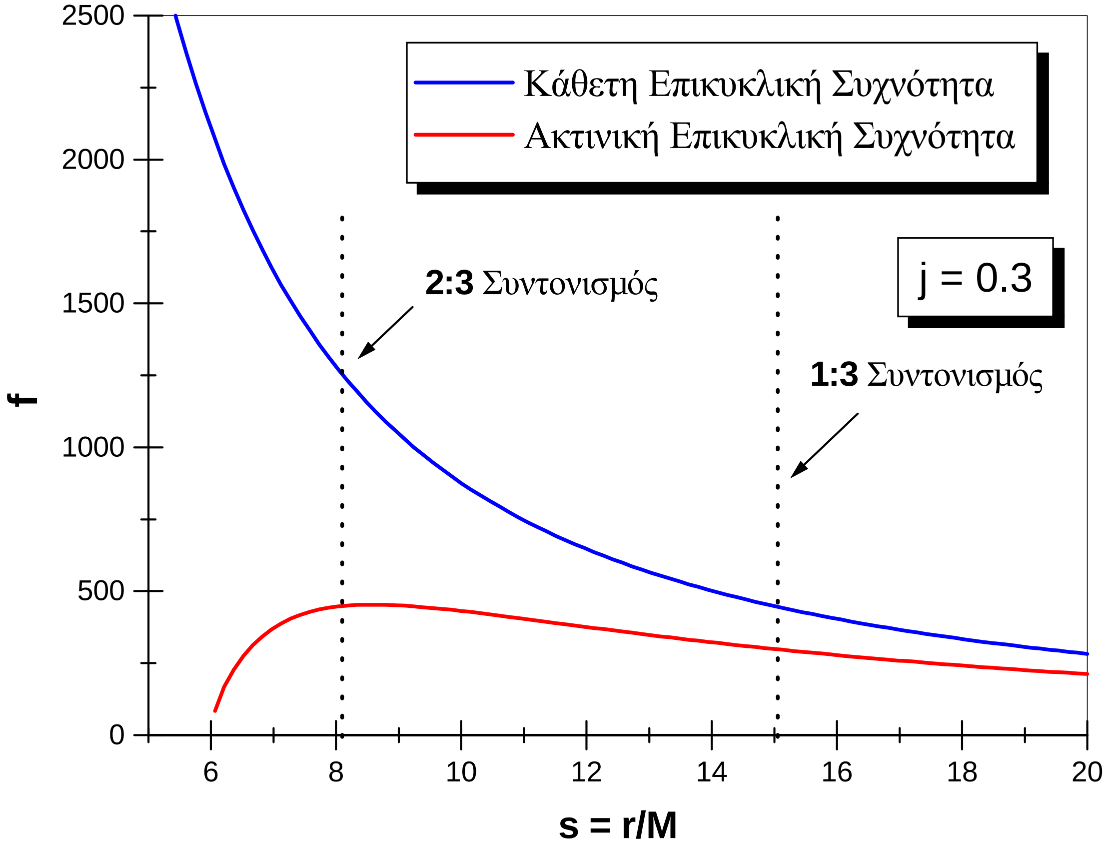
$$\omega_\theta = \left(\tilde{E} - \omega\tilde{l}\right)^{-1}\cdot\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\cdot\sqrt{-\frac{G''(\theta_o)}{2}} \tag{5.44}$$

Επόμενο βήμα είναι να βρούμε τον όρο $G''(\theta_o)$ και να τον θέσουμε στην (5.44). Θα πρέπει δηλαδή να βρούμε την δεύτερη παράγωγο ως προς το θ_o που αποτελεί το σημείο αναστροφής των σημειακών σωματιδίων που περιφέρονται γύρω από τον αργά περιστρεφόμενο αστέρα.. Ο όρος αυτός όμως είναι συναρτήσει των $\tilde{E}, \tilde{l}, \omega$ τα οποία όμως θα πρέπει να γραφούν με την γενική τους μορφή. Ό,τι κάναμε λοιπόν στην προηγούμενη ενότητα, ανάλογα θα πρέπει να πράξουμε και εδώ. Επειδή η διαδικασία απαιτεί κόπο και χρόνο, την δίνουμε αναλυτικά στο ***Παράρτημα Β***. Εδώ θα αναγράψουμε μόνο την τελική μορφή της.

Η τελική μορφή που παίρνει η κάθετη επικυκλική συχνότητα ω_θ δίνεται από την ακόλουθη σχέση

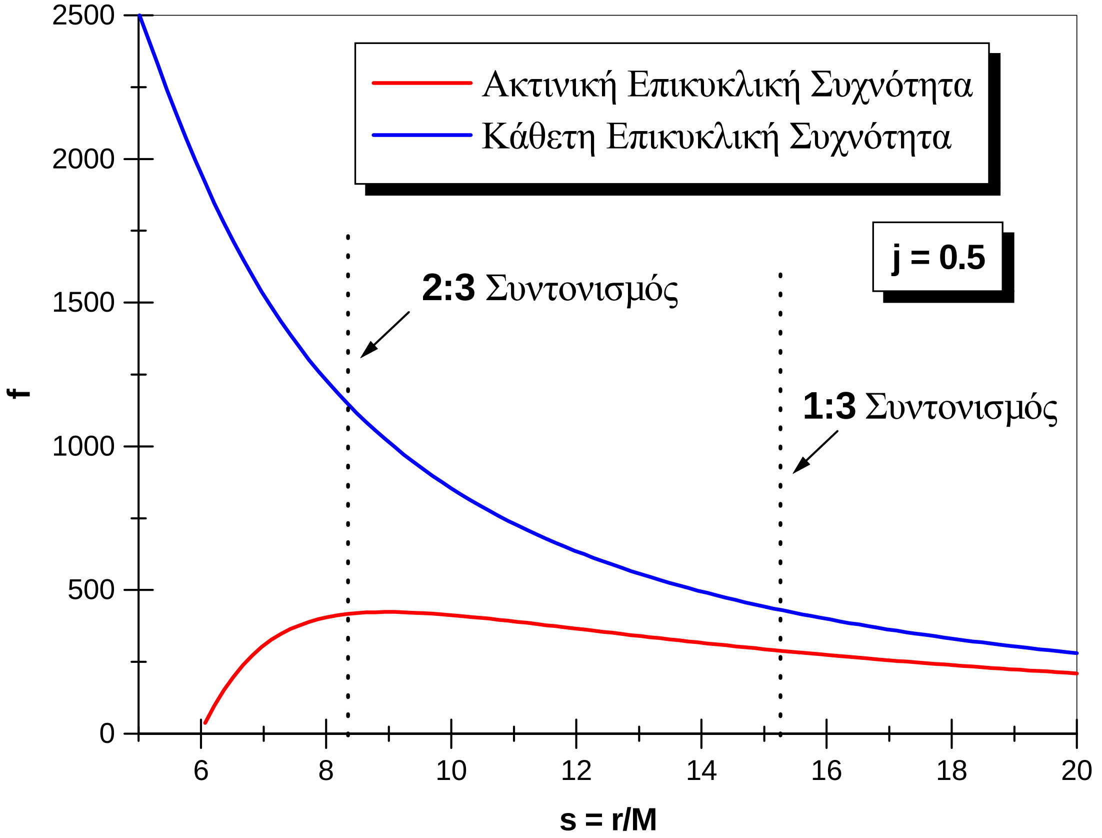
$$\omega_\theta = s^{-1/2}(s-2)^{-1}\left[1 - 3s^{-3/2}(s-3)^{-1}(s-1)\,j\right]M^{-1} \tag{5.45}$$

Τώρα έχουμε και τις δύο απαιτούμενες σχέσεις. Επόμενο βήμα είναι να κάνουμε τις γραφικές τους παραστάσεις και να δούμε για ποιο s υπάρχει συντονισμός. Στην επόμενη σελίδα υπάρχουν οι γραφικές παραστάσεις των (5.27) και (5.45) για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου j, θυμίζουμε πως με την παράμετρο αυτή συμβολίζουμε την περιστροφή του αστέρα. Η τιμή j = 0 αναφέρεται για μη περιστρεφόμενο αστέρα ενώ για τιμές του j μεγαλύτερες του 0.5 αναφερόμαστε σε ταχέως περιστρεφόμενους, σε αυτήν την περίπτωση στις εξισώσεις μας θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και όρους j^2. Τα παρακάτω σχήματα είναι για τιμές του j 0.3 και 0.5.



Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η μορφή των εξισώσεων της ακτινικής επικυκλικής συχνότητας καθώς και της κάθετης. Στον άξονα Y έχουμε τοποθετήσει τις τιμές των συχνοτήτων ενώ στον X έχουμε τοποθετήσει το αδιάστατο μέγεθος S. Από το παραπάνω σχήμα φαίνεται πως έχουμε ένα τοπικό μέγιστο της ακτινικής επικυκλικής συχνότητας κοντά στην τιμή S = 8 ενώ η τιμή της μηδενίζεται για S = 5.54. Αντίθετα η μορφή της κάθετης επικυκλικής συχνότητας έχει μια τελείως διαφορετική μορφή και μόνο για πολύ μεγάλα r δείχνει να ταυτίζεται με την ακτινική. Συντονισμό 2 : 3 έχουμε για την τιμή S = 8.079 ενώ συντονισμό 1 : 3 έχουμε για S = 15.054. Πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο οτι οι συντονισμοί αυτοί εμφανίζονται σε πολλές βαρυτικές πηγές είτε αστέρων νετρονίων είτε σε μελανές οπές.

Στην επόμενη σελίδα βλέπουμε πάλι την γραφική παράσταση της ακτινικής και επικυκλικής συχνότητας συναρτήσει της απόστασής της από την πηγή. Η διαφορά είναι ότι εδώ θεωρήσαμε ότι η πηγή περιστρέφεται γρηγορότερα (j = 0.5). Η μορφή των δυο συχνοτήτων δεν θα μπορούσε βέβαια να αλλάξει ριζικά, αυτό που άλλαξε είναι η κλίση τους. Έτσι φαίνεται καθαρά ότι οι δύο συντονισμοί τώρα δείχνουν να μετατοπίζονται δεξιότερα του άξονα των X , δηλαδή προς μεγαλύτερες τιμές του r. O συντονισμός 2 : 3 τώρα συμβαίνει για την τιμή S = 8.37 ενώ ο 1 : 3 συμβαίνει για S = 15.25. Πρέπει να τονίσουμε σε αυτό το σημείο ότι και τα δύο αυτά διαγράμματα έχουν γίνει για τιμή μάζας $M = 1.4\ M_{\odot}$.



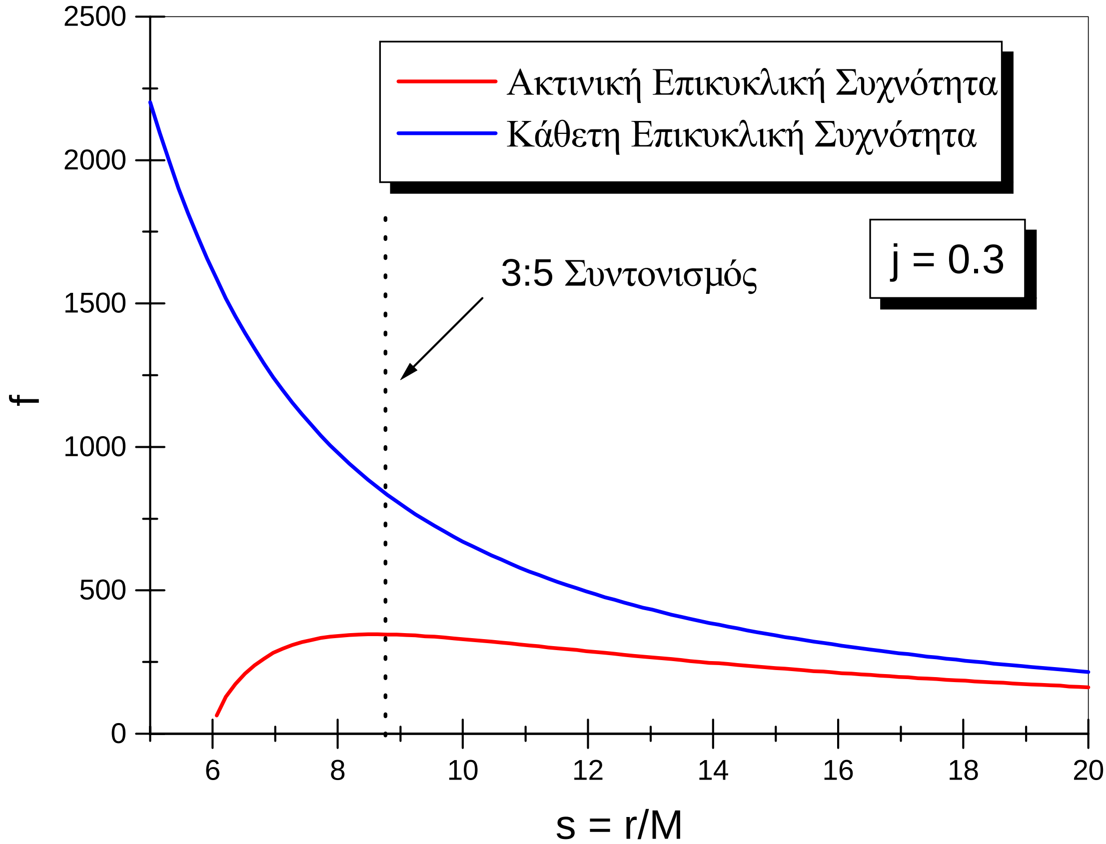
Το διάγραμμα της επόμενης σελίδας αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη μάζα. Σε αυτό το διάγραμμα χρησιμοποιήσαμε την τιμή $M = 1.8\ M_{\odot}$ και περιστροφή $j = 0.3$. Στο

διάγραμμα δίνεται ένας νέος συντονισμός ο 3 : 5 ο οποίος συναντάται σε πολλές πηγές και κυρίως σε αυτές που είναι υποψήφιες για Μελανές Οπές. Ο συντονισμός συμβαίνει για S = 8.78.

Συμπεράσματα

Αναπτύξαμε σε αυτό το κεφάλαιο την θεωρία του παραμετρικού συντονισμού με σκοπό να ερμηνεύσουμε τα παρατηρήσιμα αποτελέσματα, που παίρνουμε από μακρινές βαρυτικές πηγές. Όπως θα πούμε και στα κεφάλαια επτά και οκτώ, οι παρατηρήσεις των συχνοτήτων για πολλές συμπαγείς πηγές φαίνεται να παρουσιάζουν δύο κορυφές. Η μία κορυφή εκ των δύο (η μεγαλύτερη) φαίνεται να κυμαίνεται σε μια περιοχή από 850 έως 1250 Hz ενώ η μικρότερη κυμαίνεται στην περιοχή 200 – 350 Hz. Το σημαντικότερο είναι ότι ο λόγος των δύο συχνοτήτων βρίσκεται στην τιμή 2:3.

Αποδίδοντας τις δυο κορυφές σε μια ακτινική και μια επικυκλική συχνότητα και διατυπώνοντας την θεωρία του παραμετρικού συντονισμού καταλήξαμε να βγάλουμε τον παραπάνω λόγο (2:3) στην κατάλληλη περιοχή, βέβαια η ίδια θεωρία μπορεί να δουλέψει και για άλλους λόγους (1:3, 3:5) με διαφορετικές όμως κάθε φορά αρχικές συνθήκες. Το σημαντικότερο συμπέρασμα που βγαίνει από όλη αυτή τη δουλειά είναι ότι καταφέραμε να εξηγήσουμε τα αποτελέσματα μόνο με την παρουσία του ισχυρού βαρυτικού πεδίου και χωρίς να εισάγουμε καθόλου θεωρία ηλεκτρομαγνητισμού, εννοώντας ότι τα μαγνητικά πεδία είναι ασθενή και επομένως δεν επηρεάζουν καθόλου το σύστημα ή να στηριχθούμε σε κάποια αστρική επιφάνεια. Επομένως η παραπάνω θεωρία μπορεί να δουλέψει το ίδιο καλά είτε σε αστέρες νετρονίων είτε σε μελανές οπές. Σημαντικό είναι επίσης το γεγονός πως οι παραπάνω συχνότητες για στροφορμή $j = 0$ καταλήγουν στις αντίστοιχες που βγάλαμε για ομογενείς σφαιρικούς και μη περιστρεφόμενους αστέρες, ενώ ο μηδενισμός της ακτινικής επικυκλικής συχνότητας γίνεται στην τιμή $r = 6M$, δηλαδή στην τιμή των ευσταθών κυκλικών τροχιών. Καταλαβαίνουμε λοιπόν πως αν δώσουμε μια μικρή περιστροφή οι τροχιές αυτές δείχνουν να πλησιάζουν προς την βαρυτική πηγή.



ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εξέλιξη των ISCO σε περιστρεφόμενες Μελανές Οπές με Δίσκο Προσαύξησης

ΓΕΝΙΚΑ

Μέχρι τώρα μελετήσαμε τις τροχιές σημειακών σωματιδίων γύρω από σφαιρικά συμμετρικό και ομογενή αστέρα ο οποίος είναι μη περιστρεφόμενος. Κατά την μελέτη καταλήξαμε ότι οι ευσταθείς κυκλικές τροχιές υπάρχουν στην απόσταση των $r = 6M$, έπειτα προχωρήσαμε σε ένα πιο σύνθετο πρόβλημα, βάζοντας και μια μικρή περιστροφή στον αστέρα. Μελετώντας τις τροχιές στον αργά περιστρεφόμενο αστέρα είδαμε πως αυτές εξελίχθηκαν παραβιάζοντας το όριο των $r = 6M$, πράγμα που σημαίνει πως η περιστροφή μεταβάλει τις ευσταθείς κυκλικές τροχιές. Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε το πρόβλημα ακόμα πιο δύσκολο εισάγοντας περισσότερη περιστροφή. Συνεπώς θα μιλούμε για ένα ταχέως περιστρεφόμενο σώμα. Κατά την μελέτη αυτή θα χρησιμοποιήσουμε τη μετρική του χώρου Kerr-Newman.

Σήμερα είναι γνωστές μόνον τέσσερις ακριβείς λύσεις των εξισώσεων πεδίου, που διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τις συμμετρίες του χωροχρόνου και τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή του αντίστοιχου χωροχρόνου. Την λύση Schwarzschild την έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα, η λύση Reissner – Nordstrom είναι μια διπαραμετρική λύση, με παραμέτρους M και Q (ηλεκτρικό φορτίο της βαρυτικής πηγής) η οποία για Q = 0 ταυτίζεται με την λύση Schwarzschild. Η λύση Reissner – Nordstrom μάλλον δεν παρουσιάζει αστροφυσικό ενδιαφέρον, διότι τα αστροφυσικά σώματα, πιθανότατα είναι ηλεκτρικά ουδέτερα. Αντίθετα η διπαραμετρική λύση Kerr, με παραμέτρους M και J (ολική στροφορμή της βαρυτικής πηγής), παρουσιάζει αστροφυσικό ενδιαφέρον, διότι η μελανή οπή Kerr, πιθανότατα, είναι το αποτέλεσμα της κατάρρευσης ενός αστέρα αξονικά περιστρεφόμενου και αμετάβλητου με το χρόνο. Για J = 0, η λύση Kerr ταυτίζεται με την λύση Schwarzschild. Τέλος, η τριπαραμετρική λύση Kerr – Newman, με παραμέτρους M,J και Q, γενικεύει τις τρεις προηγούμενες λύσεις.

Η οικογένεια λύσεων Kerr – Newman περιγράφει πλήρως όλες τις χρονικά αμετάβλητες, σχετικιστικές μελανές οπές που προκύπτουν από βαρυτική κατάρρευση. Αυτό σημαίνει ότι οι ποσότητες M,J και Q περιγράφουν κατά μοναδικό τρόπο το εξωτερικό βαρυτικό και ηλεκτρομαγνητικό πεδίο της μελανής οπής. Τέλος οι ποσότητες M,J και Q, οι οποίες στη λύση εμφανίζονται ως σταθερές ολοκλήρωσης, είναι δυνατό να προσδιοριστούν μόνο από την δυναμική επίδραση της μελανής οπής στο περιβάλλον της.

.

Ταχέως περιστρεφόμενοι Αστέρες Νετρονίων και Μελανές Οπές

Η λύση Kerr-Newman είναι η πιο γενική ασυμπτωτικά επίπεδη, αξονικά συμμετρική και χρονικά αμετάβλητη λύση κενού με μια Μελανή Οπή. Στο κεφάλαιο αυτό θα βγάλουμε τις ευσταθείς κυκλικές τροχιές τις οποίες μπορεί ένα σημειακό σωματίδιο να εκτελέσει, γύρω από μια περιστρεφόμενη μελανή οπή Kerr-Newman με μάζα M, στροφορμή J και ηλεκτρικό φορτίο Q. Στη μελέτη που θα ακολουθήσει ξεκινάμε και με τις τρεις παραμέτρους, σταδιακά όμως θα δίνεται και το αποτέλεσμα για Q = 0, δηλαδή για Μελανή Οπή δίχως ηλεκτρικό φορτίο.

Θα μελετήσουμε λοιπόν τις τροχιές στο χώρο του Kerr-Newman. Στις συντεταγμένες Boyer-Lindquist σε γεωμετρικές μονάδες (c = G = 1) το γραμμικό στοιχείο της λύσης Kerr-Newman είναι της μορφής :

$$\begin{aligned} ds^2 = -\left(1-\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\right)dt^2 - 2a\sin^2\theta\,\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\,d\phi\,dt + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ +\left(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta\,\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\right)\sin^2\theta\,d\phi^2 \end{aligned} \tag{6.1}$$

όπου

$$\rho^2 \equiv r^2 + a\cos^2\theta \qquad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad a \equiv \frac{J}{M} \tag{6.2}$$

Οι συναλλοίωτες συνιστώσες της παραπάνω μετρικής είναι :

$$\begin{aligned} g_{tt} = -\left(1-\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\right) \quad g_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad g_{t\phi} = -a\sin^2\theta\,\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2} \\ g_{\theta\theta} = \rho^2 \qquad g_{\phi\phi} = \left(r^2+a^2+a^2\sin^2\theta\,\frac{2Mr-Q^2}{\rho^2}\right)\sin^2\theta \end{aligned} \tag{6.3}$$

Οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της μετρικής είναι :

$$\begin{aligned} g^{tt} = -\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta\sin^2\theta} \qquad g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} \qquad g^{t\phi} = -\frac{g_{t\phi}}{\Delta\sin^2\theta} \\ g^{\phi\phi} = -\frac{g_{tt}}{\Delta\sin^2\theta} \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

Οι τροχιές στην γεωμετρία του Schwarzschild παραμένουν σε ένα επίπεδο εξαιτίας του ολοκληρώματος της στροφορμής του σημειακού σωματιδίου, ως συνέπεια βέβαια της σφαιρικής συμμετρίας του παραπάνω χώρου. Η γεωμετρία όμως του χώρου Kerr-Newman δεν είναι σφαιρικά συμμετρική, μόνο αξονικά συμμετρική και μόνο η συνιστώσα κατά μήκος του άξονα συμμετρίας της στροφορμής διατηρείται. Υπάρχουν βέβαια περιορισμένες τροχιές οι οποίες βρίσκονται στο ισημερινό επίπεδο (θ = π / 2), αλλά γενικά οι τροχιές δεν περιορίζονται σε ένα επίπεδο. Ωστόσο η μελέτη της γενικής περίπτωσης είναι αρκετά δύσκολη, γι'αυτό και θα περιοριστούμε στην απλούστερη περίπτωση δηλαδή στις τροχιές του ισημερινού επιπέδου.

Η ανάλυση των ισημερινών τροχιών βαδίζει στα ίδια περίπου βήματα με αυτή που συναντήσαμε στο Κεφ. 4 της γεωμετρίας του Schwarzschild, μόνο που οι αλγεβρικές πράξεις είναι πολύ πιο επίπονες. Τονίζουμε ότι η συμμετρία της γεωμετρίας του χώρου Kerr-Newman ως προς το ισημερινό επίπεδο $\theta \to \pi - \theta$ προτρέπει στο συμπέρασμα ότι υπάρχουν τροχιές στο ισημερινό επίπεδο $\theta = \pi/2$ με μηδενική θ-συνιστώσα της τετρα-ταχύτητας $\mathbf{u}$, δηλαδή $u^\theta = 0$. Αυτές οι τροχιές κατευθύνονται από την μετρική (6.1) με τον περιορισμό $\theta = \pi/2$.

Οι συναλλοίωτες συνιστώσες αυτής της μετρικής είναι :

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{r^2}\right) \quad g_{rr} = \frac{r^2}{\Delta} \quad g_{t\phi} = -a\frac{2Mr - Q^2}{r^2}$$
$$g_{\theta\theta} = r^2 \qquad g_{\phi\phi} = \left(r^2 + a^2 + a^2\frac{2Mr - Q^2}{r^2}\right) \tag{6.5}$$

Οι ανταλλοίωτες συνιστώσες της μετρικής είναι :

$$g^{tt} = -\frac{g_{\phi\phi}}{\Delta} \qquad g^{rr} = \frac{1}{g_{rr}} \qquad g^{t\phi} = -\frac{g_{t\phi}}{\Delta}$$
$$g^{\phi\phi} = -\frac{g_{tt}}{\Delta} \qquad g^{\theta\theta} = \frac{1}{g_{\theta\theta}} \tag{6.6}$$

Οι τροχιές μπορούν να παραμετροποιηθούν από την διατηρούμενη ενέργεια ανά μονάδα μάζας $\tilde{E}$ και την διατηρούμενη στροφορμή ανά μονάδα μάζας κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, οι οποίες προέρχονται από την ανεξαρτησία της μετρικής στο χρόνο t και στο φ. Σε όρους των διανυσμάτων Killing τα οποία συσχετίζονται με αυτές τις συμμετρίες, οι διατηρούμενες ποσότητες γράφονται

$$\tilde{E} \equiv -\boldsymbol{\xi}\cdot\mathbf{u} \quad \text{και} \quad \tilde{l} \equiv \boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{u} \tag{6.7}$$

Η ερμηνεία των ποσοτήτων αυτών ως η ενέργεια και η στροφορμή ανά μονάδα μάζας ηρεμίας, πηγάζει από την εκτίμηση τους στο άπειρο, δηλαδή πάρα πολύ μακριά από την πηγή όπου η γεωμετρία είναι επίπεδη. Η διατηρούμενη στροφορμή κατά μήκος του άξονα συμμετρίας, συμπίπτει επίσης και με την ολική στροφορμή για τις ισημερινές τροχιές. Όπως πάντα σε αυτή την περίπτωση υπάρχει ένα επιπρόσθετο γενικό ολοκλήρωμα των γεωδαισιακών εξισώσεων, το οποίο βγαίνει από την κανονικοποίηση της τετραταχύτητας

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{-1} \tag{6.8}$$

Από την μετρική των Kerr-Newman τα $\tilde{E}$ και $\tilde{l}$ αποτελούν γραμμικό συνδυασμό των u^t και u^ϕ έτσι ώστε να ισχύει

$$-\tilde{E} = g_{tt}u^t + g_{t\phi}u^\phi$$
$$\tilde{l} = g_{t\phi}u^t + g_{\phi\phi}u^\phi \tag{6.9}$$

Τις παραπάνω εξισώσεις μπορούμε να τις λύσουμε για τα u^t και u^ϕ οπότε θα πάρουμε

$$u^\phi = \frac{g_{tt}\tilde{l} + g_{\phi t}\tilde{E}}{g_{\phi\phi}g_{tt} - g_{\phi t}^2} \quad \text{και} \quad u^t = -\frac{g_{\phi\phi}\tilde{E} + g_{\phi t}\tilde{l}}{g_{\phi\phi}g_{tt} - g_{\phi t}^2} \tag{6.10}$$

Πρέπει τώρα να αντικαταστήσουμε τις συναλλοίωτες συνιστώσες όπως αυτές δίνονται από την (6.5), κάνοντας την δουλειά αυτή παίρνουμε :

$$u^{\phi} = \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{r^2}\right)\tilde{l} + a\frac{2Mr - Q^2}{r^2}\tilde{E}\right] \tag{6.11}$$

και

$$u^{t} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\Delta}\left[\left(r^2 + a^2 + a^2\frac{2Mr - Q^2}{r^2}\right)\tilde{E} - a\frac{2Mr - Q^2}{r^2}\tilde{l}\right] \tag{6.12}$$

Τις (6.11) και (6.12) μπορώ να τις αντικαταστήσω στην (6.8) και μαζί με την $u^{\theta} = 0$ να βγάλω την ακτινική εξίσωση $\frac{dr}{d\tau}$. Η (6.8) μου δίνει

$$g_{tt}\left(u^t\right)^2 + g_{rr}\left(u^r\right)^2 + g_{\phi\phi}\left(u^{\phi}\right)^2 + 2g_{t\phi}u^t u^{\phi} = -1 \tag{6.13}$$

Αρχικά αντικαθιστούμε τις (6.10) για να ελαττώσουμε τις πράξεις και λύνουμε ως προς την $u^r = \frac{dr}{d\tau}$ το τελικό αποτέλεσμα είναι:

$$\left(u^r\right)^2 + \frac{g_{tt}\,\tilde{l}^2 + g_{\phi\phi}\tilde{E}^2 + 2g_{t\phi}\,\tilde{l}\tilde{E}}{g_{rr}\left(g_{\phi\phi}g_{tt} - g_{\phi t}^2\right)} = -\frac{1}{g_{rr}} \tag{6.14}$$

Τώρα μένει να αντικαταστήσουμε τις συνιστώσες της μετρικής όπως αυτές δίνονται από την (6.5), θα αναφέρουμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα γιατί μόνο αυτό ενδιαφέρει τον αναγνώστη. Μετά από πράξεις λοιπόν καταλήγουμε στην παρακάτω μορφή

$$\frac{\tilde{E}^2 - 1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{eff}\left(r, \tilde{l}, \tilde{E}, Q, a\right) \tag{6.15}$$

Η (6.15) μας θυμίζει την (4.10), σκοπός μας ήταν να την φέρουμε σε μια τέτοια μορφή ώστε να μπορέσουμε να μελετήσουμε καλύτερα τις τροχιές όπως κάναμε και στο τέταρτο κεφάλαιο. Το ενεργό δυναμικό δίνεται από την σχέση

$$V_{eff} = -\frac{2Mr - Q^2}{2r^2} + \frac{\tilde{l}^2 - a^2\left(\tilde{E}^2 - 1\right)}{2r^2} - \frac{2Mr - Q^2}{2r^4}\left(\tilde{l} - a\tilde{E}\right)^2 \tag{6.16}$$

Στην περίπτωση που το $Q = 0$ το δυναμικό παίρνει την απλούστερη μορφή

$$V_{eff} = -\frac{M}{r} + \frac{\tilde{l}^2 - a^2\left(\tilde{E}^2 - 1\right)}{2r^2} - \frac{M\left(\tilde{l} - a\tilde{E}\right)^2}{r^3} \tag{6.17}$$

Παρατηρούμε πως η (6.17) μοιάζει με την σχέση (2.23) που καταλήξαμε για το ενεργό δυναμικό των τροχιών στη γεωμετρία του Schwarzschild, μάλιστα ταυτίζεται με αυτήν όταν η ολική στροφορμή του συμπαγούς αντικειμένου είναι μηδενική, $a = 0$. Ο δεύτερος όρος αποτελεί το φυγοκεντρικό κομμάτι ενώ ο τρίτος όρος είναι ο σχετικιστικός παράγοντας. Πολλές σημαντικές ιδιότητες μπορούμε να βγάλουμε για τις τροχιές των σημειακών σωματιδίων στο ισημερινό επίπεδο χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις για τα ενεργά δυναμικά, ιδιότητες όπως οι σταθερές κυκλικές τροχιές και η ενέργεια σύνδεσης των εσώτατων σταθερών κυκλικών τροχιών.

Ορίζοντας την σταθερά $\varepsilon \equiv \dfrac{\tilde{E}^2-1}{2}$ μπορούμε να μελετήσουμε τις τροχιές. Οι συνθήκες που θα μας απασχολήσουν είναι

$$(i) \qquad \varepsilon = V_{eff}(r) \tag{6.18}$$

$$(ii) \qquad V'_{eff}(r) = 0 \tag{6.19}$$

$$(iii) \qquad V''_{eff}(r) = 0 \tag{6.20}$$

Όπου με τον τόνο υποδηλώνουμε παραγώγιση ως προς r. Η πρώτη θα μας δώσει τα σημεία αναστροφής. Η πρώτη με τη δεύτερη συνθήκη μας δίνουν τις κυκλικές τροχιές και τέλος ο συνδυασμός και των τριών μας δίνουν τις οριακές σταθερές τροχιές. Θυμίζουμε πως το $a \equiv J/M$ όπου J η ολική στροφορμή της Μ.Ο. Επίσης το Q είναι σταθερό. Κατά την διάρκεια των πράξεων θα κρατήσουμε και δεύτερους τάξεως όρους του a, ενώ θα απορρίψουμε μεγαλύτερους. Η πρώτη παράγωγος ως προς r του ενεργού δυναμικού είναι

$$V'(r) = \frac{Mr-Q^2}{r^3} - \frac{\tilde{l}^2 - a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)}{r^3} + \frac{3Mr-2Q^2}{r^5}\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 \tag{6.21}$$

και η δεύτερη δίνεται από την σχέση

$$V''(r) = -\frac{2Mr-3Q^2}{r^4} + \frac{3\left[\tilde{l}^2 - a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)\right]}{r^4} - \frac{12Mr-10Q^2}{r^6}\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 \tag{6.22}$$

Εφαρμόζοντας τις συνθήκες (6.19) και (6.20) παίρνω

$$\left(Mr-Q^2\right)r^2 - \left[\tilde{l}^2 - a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)\right]r^2 + \left(3Mr-2Q^2\right)\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 = 0 \tag{6.23}$$

και

$$-\left(2Mr-3Q^2\right)r^2 + 3\left[\tilde{l}^2 - a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)\right]r^2 - \left(12Mr-10Q^2\right)\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 = 0 \tag{6.24}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (6.23) με 3 και προσθέτοντάς την στην (6.24), καταλήγω σε μια πολύ χρήσιμη για την συνέχεια σχέση

$$Mr^3 - \left(3Mr-4Q^2\right)\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 = 0 \tag{6.25}$$

βέβαια είναι τρίτου βαθμού ως προς r πράγμα που δεν βοηθάει στο να τη λύσουμε, στην περίπτωση όμως που το $Q=0$ η παραπάνω καταλήγει σε μια απλούστερη μορφή την

$$r = \pm\sqrt{3}\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right) \tag{6.26}$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει στην ουσία τις ακρότατες τιμές του ενεργού δυναμικού, θα επανέλθουμε όμως αργότερα στη σχέση αυτή. Την (6.25) μπορώ να την γράψω ως εξής, διαιρώ με M^4 και θέτω

$$s \equiv r/M \quad \text{και} \quad j \equiv a/M = J/M^2 \tag{6.27}$$

όπου κρατάμε και τους όρους j^2 απορρίπτοντας όλους τους ανώτερους. Η (6.25) γράφεται

$$s^3 - (3s - 4z)\left(\frac{\tilde{l}}{M} - j \cdot \tilde{E}\right)^2 = 0 \tag{6.28}$$

όπου με τον όρο z έχω θέση

$$z = \left(\frac{Q}{M}\right)^2 \tag{6.29}$$

Πηγαίνουμε τώρα στην πρώτη συνθήκη (6.18) με την βοήθεια των (6.27),(6.29) γίνεται

$$s^4\left(\tilde{E}^2 - 1\right) = -2s^3 + zs^2 + s^2\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2 - s^2\left(\tilde{E}^2 - 1\right)j^2 - (2s - z)\left(\frac{\tilde{l}}{M} - j\tilde{E}\right)^2 \tag{6.30}$$

Η τελευταία με την βοήθεια της (6.28) θα μας δώσει μια δευτεροβάθμια εξίσωση του $\tilde{E}$, αντικαθιστούμε δηλαδή κάθε όρο $\frac{\tilde{l}}{M}$ της (6.30) από την (6.28), η τελική σχέση που παίρνω είναι

$$s^2\tilde{E}^2 - 2s^{3/2}(3s - 4z)^{-1/2} j\tilde{E} - \left(s^2 - 2s + z\right)\left[s(3s - 4z)^{-1} + 1\right] - j^2 = 0 \tag{6.31}$$

με διακρίνουσα

$$D = 4s^2\left(s^2 - 2s + z + j^2\right)\left[s(3s - 4z)^{-1} + 1\right] \tag{6.32}$$

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

$$\tilde{E} = \left[s(3s - 4z)\right]^{-1/2} j \pm s^{-1}\left(s^2 - 2s + z + j^2\right)\left[s(3s - 4z)^{-1} + 1\right]^{1/2} \tag{6.33}$$

Με την βοήθεια της (6.33) η (6.28) γίνεται

$$\frac{\tilde{l}}{M} = s^{3/2}(3s - 4z)^{-1/2}\left\{1 \pm 2s^{-5/2}(s - z)^{1/2}\left(s^2 - 2s + z\right)^{1/2} j + s^{-2} j^2\right\} \tag{6.34}$$

Τόσο η (6.33) όσο και η (6.34) δεν αποτελούν τις γενικές μορφές της ανά μονάδας μάζας ενέργειας και στροφορμής, δεν ισχύουν δηλαδή για κάθε r παρά μόνο για εκείνα τα r που ικανοποιούν την συνθήκη (6.25). Η συνθήκη αυτή μας δίνει μόνο τα ακρότατα του δυναμικού, μας δίνει δηλαδή τις ευσταθείς κυκλικές τροχιές που βρίσκονται στο ισημερινό επίπεδο του συμπαγούς σώματος. Θυμηθείτε ότι κατά την ανάλυση των ISCO στο αργά περιστρεφόμενο συμπαγές σώμα, που διαπραγματευτήκαμε στο κεφάλαιο 4 δεν στηριχθήκαμε σε καμία συνθήκη παρόμοια της (6.25).Αν θέλαμε να βγάζαμε την γενική μορφή η οποία να ισχύει για κάθε r θα έπρεπε να λύναμε την (6.23) ως προς $\frac{\tilde{l}}{M}$ η οποία θα ήταν συναρτήσει του $\tilde{E}$ και στην συνέχεια να την αντικαταστούσαμε στην (6.30) ώστε να καταλήγαμε σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση του $\tilde{E}$ που η λύση της θα ήταν η γενική μορφή της ανά μονάδα μάζας ενέργειας των σημειακών σωματιδίων σε τυχαίο r. Μια τέτοια δουλειά είναι αρκετά επίπονη και θα χρειαζόταν αρκετές σελίδες πράξεων για να βγάζαμε το επιθυμητό αποτέλεσμα, ωστόσο θα δούμε παρακάτω πως η παραπάνω διαδικασία γίνεται για την περίπτωση που έχω $Q=0$.

Η περίπτωση $Q=0$

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε την εξέλιξη των ISCO για την περίπτωση που το συμπαγές αντικείμενο δεν έχει ηλεκτρικό φορτίο. Θα εφαρμόσουμε την παραπάνω διαδικασία εξαγωγής των γενικών σχέσεων για τυχαίο r, και στο σημείο που οι πράξεις αρχίσουν να γίνονται πολύπλοκες θα αντικαταστήσουμε μόνο μια τιμή την τιμή r = 6M. Έτσι θα δούμε πώς εξελίσσονται οι τροχιές για την περίπτωση της ταχείας περιστροφής.

Ξεκινούμε πρώτα από το ενεργό δυναμικό της σχέσεως (6.17) η πρώτη παράγωγος και η δεύτερη παράγωγος ως προς r δίνονται από τις σχέσεις

$$V'(r)=\frac{M}{r^2}-\frac{\tilde{l}^2-a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)}{r^3}+\frac{3M}{r^4}\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 \tag{6.35}$$

και

$$V''(r)=-\frac{2M}{r^3}+\frac{3\left[\tilde{l}^2-a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)\right]}{r^4}-\frac{12M}{r^5}\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2 \tag{6.36}$$

Εφαρμόζοντας την δεύτερη συνθήκη (6.19) στην (6.35) παίρνω

$$Mr^2-\left[\tilde{l}^2-a^2\left(\tilde{E}^2-1\right)\right]r+3M\left(\tilde{l}-a\tilde{E}\right)^2=0 \tag{6.37}$$

Αναπτύσσω τώρα την (6.37) ώστε να πάρω μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς το $\tilde{l}/M$ ενώ ταυτόχρονα χρησιμοποιούμε και τις σχέσεις (6.27) , μετά από όλα αυτά παίρνουμε

$$(s-3)\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2+6\tilde{E}j\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)-\left[(s+3)\tilde{E}^2-s\right]j^2-s^2=0 \tag{6.38}$$

Η παραπάνω είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση του $\tilde{l}/M$ με λύση

$$\frac{\tilde{l}}{M}=-3(s-3)^{-1}\tilde{E}j\pm s(s-3)^{-1/2}\left\langle 1+s^{-1}(s-3)^{-1}\left[s\left(\tilde{E}^2-1\right)+3\right]j^2\right\rangle^{1/2} \tag{6.39}$$

Η πρώτη συνθήκη (6.18), χρησιμοποιώντας παράλληλα και τις (6.27) μας δίνουν μια εξίσωση από την οποία θα προκύψει η γενική μορφή του $\tilde{E}$ για τυχαίο r. Πράγματι έχω

$$\left[s^3+(s+2)j^2\right]\tilde{E}^2-4\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)j\cdot\tilde{E}-\left\{(s-2)\left[s^2+\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2\right]+sj^2\right\}=0 \qquad (6.40)$$

Η τελευταία είναι μια δευτεροβάθμια εξίσωση του $\tilde{E}$ που για να βρούμε την λύση της θα πρέπει να αντικαταστήσουμε τον όρο $\tilde{l}/M$ από την (6.39). Κάτι τέτοιο όμως θα ήταν αρκετά δύσκολο και ασύμφορο, αφού οι αλγεβρικές πράξεις είναι πολύ μεγάλες και επίπονες ακόμα και για τους πιο επίμονους και σχολαστικούς λύτες. Αντ' αυτού θα δοκιμάσουμε μια άλλη μέθοδο η οποία χρειάζεται λιγότερο κόπο! Αφού σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε την εξέλιξη των τροχιών με αργή περιστροφή για την τιμή των ευσταθών κυκλικών τροχιών r = 6M, σκεφτόμαστε να χρησιμοποιήσουμε την τιμή αυτή για να απλοποιήσουμε τόσο την (6.39) όσο και την (6.40). Αντικαθιστώντας λοιπόν την τιμή $s=6$ η (6.39) γίνεται :

$$\frac{\tilde{l}}{M}=-\tilde{E}j\pm 2\sqrt{3}\left\langle 1+\frac{1}{6}\left[2\left(\tilde{E}^2-1\right)+1\right]j^2\right\rangle^{1/2} \qquad (6.41)$$

Θέτοντας την τιμή $s=6$ και κάνοντας χρήση της (6.41), η (6.40) παίρνει την τελική μορφή

$$2\left(27-j^2\right)\tilde{E}^2\pm 2\sqrt{3}j\tilde{E}-\left(48+j^2\right)=0 \qquad (6.42)$$

Η διακρίνουσα της οποίας είναι $\sqrt{D}=72\sqrt{2}\left(1-\frac{13}{864}j^2\right)^{1/2}$ οπότε

$$\tilde{E}=\mp\frac{\sqrt{3}}{2}j\left(27-j^2\right)^{-1}\pm 18\sqrt{2}\left(1-\frac{13}{864}j^2\right)^{1/2}\left(27-j^2\right)^{-1} \qquad (6.43)$$

Η τιμή του j κυμαίνεται από 0 έως 1 με την τελευταία τιμή να αντιστοιχεί στην πιο γρήγορη περιστροφή! Παρατηρούμε ότι οι όροι στην παρένθεση είναι αρκετά μικροί ώστε να μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο του διωνύμου!

$$(1+x)^a\approx 1+ax+\frac{a(a-1)}{2!}x^2+.... \qquad (6.44)$$

επισημαίνουμε ότι κρατάμε όρους μέχρι και δευτέρας τάξεως, η (6.43) γίνεται λοιπόν

$$\tilde{E}=\mp\frac{1}{27}\frac{\sqrt{3}}{2}j\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(1+\frac{17}{576}j^2\right) \qquad (6.45)$$

Την (6.45) μπορούμε να την γράψουμε με μια καλύτερη μορφή η οποία δίνεται παρακάτω

$$\tilde{E}=\sqrt{\frac{8}{9}}\left\{1\mp\frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}j\pm\frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}j^2\right\} \qquad (6.46)$$

Έχοντας την (6.46) μπορούμε να την αντικαταστήσουμε στην (6.41) και να πάρουμε και την τελική μορφή της στροφορμής ανά μονάδα μάζας. Μετά από την αντικατάσταση παίρνω τελικά :

$$\frac{\tilde{l}}{M} = \pm\sqrt{12}\left\{1 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j \pm \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} j^2\right\} \tag{6.47}$$

Μας έμεινε τώρα κάτι τελευταίο να βρούμε και την εξέλιξη των τροχιών, θυμόμαστε ότι από τις συνθήκες (6.19) και (6.20) καταλήξαμε στην σχέση (6.26) , η οποία μου δίνει τις κυκλικές τροχιές και η οποία μπορεί να γραφεί ως

$$r = \sqrt{3}\left(\frac{\tilde{l}}{M} - j\tilde{E}\right)M \tag{6.48}$$

Αν στην τελευταία αντικαταστήσουμε τις τιμές των $\tilde{E}$ και $\frac{\tilde{l}}{M}$ όπως αυτές δίνονται από τις (6.46) και (6.47) αντίστοιχα τότε θα πάρουμε τις ευσταθείς κυκλικές τροχιές

$$r = 6M\left\{1 \mp \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j \pm \frac{1}{12} j^2\right\} \tag{6.49}$$

Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε την εξέλιξη των ISCO για ένα ταχέως περιστρεφόμενο συμπαγές σώμα και καταλήξαμε να βγάλουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις των (4.32) και (4.33) οι οποίες δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$r_{\rm orb} = 6M\left\{1 \mp \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j \pm \frac{1}{12} j^2\right\} \tag{6.50}$$

$$\tilde{l}_{\rm orb} = \pm\sqrt{12}M\left\{1 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j \pm \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} j^2\right\} \tag{6.51}$$

$$\tilde{E}_{\rm orb} = \sqrt{\frac{8}{9}}\left\{1 \mp \frac{1}{16}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} j \pm \frac{1}{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{3} j^2\right\} \tag{6.52}$$

Όπου το πάνω πρόσημο αντιστοιχεί σε ομμόρροπη στροφή των σωματιδίων του δίσκου προσαύξησης με το συμπαγές αντικείμενο και το κάτω πρόσημο για αντίρροπη στροφή. Βλέπουμε πως αν παραλείψουμε τους δεύτερους τάξεως όρους ως προς j , οι παραπάνω σχέσεις καταλήγουν στις σχέσεις του τέταρτου κεφαλαίου για αργά περιστρεφόμενο συμπαγές αντικείμενο.

Επίσης βλέπουμε πως η ταχεία περιστροφή σπρώχνει τις τροχιές προς τα έξω, πράγμα λογικό αφού λόγω της περιστροφής έχουμε παραμόρφωση του αστέρα στον ισημερινό του, ή αν προτιμάτε έχουμε έναν συμπιεσμένο αστέρα από τους πόλους. Από τους δύο όρους εκείνος που υπερισχύει είναι ο πρώτος δηλαδή το j. Όσο και γρήγορη και να είναι η περιστροφή οι τροχιές εξακολουθούν να βρίσκονται κάτω από την απόσταση των 6M.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Ταλαντώσεις ms σε διπλά συστήματα ακτίνων X και άλλα Σχετικιστικά Παρατηρήσιμα φαινόμενα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Τα πρώτα φαινόμενα μεταβλητότητας των millisecond ακτινών X από συμπαγή αντικείμενα με δίσκο προσαύξησης ανακαλύφθηκαν πρόσφατα από τον δορυφόρο Rossi X Ray Timing Explorer (RXTE). Τρία καινούργια φαινόμενα παρατηρήθηκαν από μικρής μάζας διπλά συστήματα ακτινών X (low mass X-Ray binaries) τα οποία περιέχουν αστέρες νετρονίων με ασθενές μαγνητικό πεδίο, αυτά είναι:

- Millisecond Pulsations (Παλμοί τάξεως των ms)
- Burst Oscillations (Εκρηκτικές Ταλαντώσεις)
- KiloHertz Quasi-Periodic Oscillations (kHz QPOs)

Παρακάτω θα γίνει μια αναφορά των παραπάνω φαινομένων καθώς μας είναι εξαιρετικής σημασίας αφού αντλούμε πληροφορίες σχετικά με την πυκνότητα της ύλης αλλά και του ισχυρού βαρυτικού πεδίου των πηγών από τις οποίες προέρχονται.

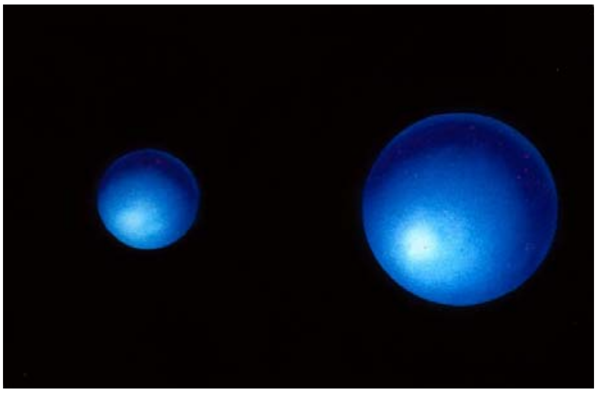
Μια βασική έκφραση που δείχνει πόσο συμπαγής είναι ένας αστέρας, είναι ο δυναμικός χρόνος μικρής κλίμακας, ~ 1 ms, ο οποίος χαρακτηρίζει την κίνηση της ύλης, γύρω από αυτούς, καθώς η ύλη σχηματίζει το δίσκο προσαύξησης, κάτω από την επίδραση του βαρυτικού πεδίου του συμπαγούς σώματος. Προτού όμως αναφερθούμε στα παραπάνω φαινόμενα, ας δώσουμε μια γενική εικόνα για το πώς πιστεύουμε ότι δημιουργείται ο δίσκος προσαύξησης στα διπλά συστήματα ακτίνων- X.

Ο καλύτερος τρόπος για την ανακάλυψη μελανών οπών είναι η εξέταση δυαδικών συστημάτων ακτίνων X. Τα διπλά συστήματα αποτελούν το ένα τρίτο του συνόλου των άστρων του Γαλαξία μας, ωστόσο μόνο ένα πολύ μικρό κλάσμα αυτών θα γίνει τελικά δυαδικό ακτίνων X. Για να λάβουν χώρα οι απαραίτητες αλληλεπιδράσεις, ο ένας σύντροφος πρέπει να ξεκινήσει την ζωή του με μια μάζα μεγαλύτερη από δέκα ηλιακές μάζες και το ζεύγος θα πρέπει να κινείται σε αρκετά κλειστή τροχιά ώστε να είναι δυνατή η ανταλλαγή ύλης.

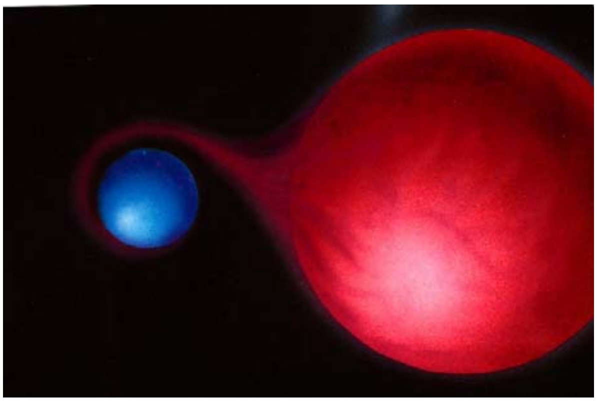
Αλλά η εκπομπή ακτίνων X δεν σημαίνει αυτόματα και την ύπαρξη μελανής οπής. Η εκπομπή των ακτίνων X υποδηλώνει ότι η ύλη αποβάλλεται από τον ορατό αστέρα προς ένα απίστευτα πυκνό και συμπαγές αντικείμενο. Μονάχα όμως με την εκτίμηση της μάζας και της τροχιακής ταχύτητας του αόρατου συντρόφου του συστήματος μπορούμε να καθορίσουμε αν βρήκαμε το ζητούμενο αντικείμενο η αν βρήκαμε απλά έναν αστέρα νετρονίων. Ο υπολογισμός αυτός της μάζας και της τροχιακής ταχύτητας του αόρατου συνοδού του ζεύγους ακτινών χ, δεν είναι εύκολος .Απαιτεί μια ακριβή εκτίμηση της μάζας του ορατού συνοδού-κάτι που οι επιστήμονες έχουν κατορθώσει για τους μονούς αστέρες, μετρώντας τη φωτεινότητα και το χρώμα τους. Αλλά η ακρίβεια αυτών των μετρήσεων είναι αμφισβητήσιμη, όταν πρόκειται για έναν αστέρα που βρίσκεται πολύ κοντά σε ένα συνοδό.

Παρακάτω δείχνεται καλλιτεχνικά η εξέλιξη αυτή, ένας τρόπος δηλαδή εύρεσης μελανών οπών.

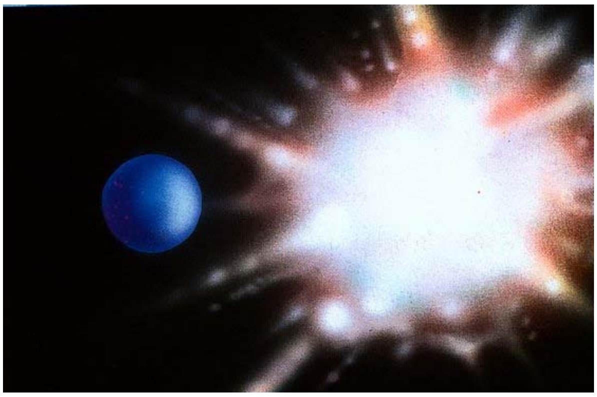
1) Το σκηνικό για την εξέλιξη ενός δυαδικού συστήματος ακτίνων X έχει ήδη στηθεί όταν δύο αστέρες σχηματίζονται αρκετά κοντά ώστε η αμοιβαία βαρυτική έλξη να τους δεσμεύσει. Ο ένας αστέρας είναι σημαντικά πιο μεγάλος από τον άλλο, λόγω του τεραστίου μεγέθους του, ο αστέρας αυτός συντήκει το καύσιμο H του με πολύ πιο ταχύ ρυθμό από το σύντροφό του.



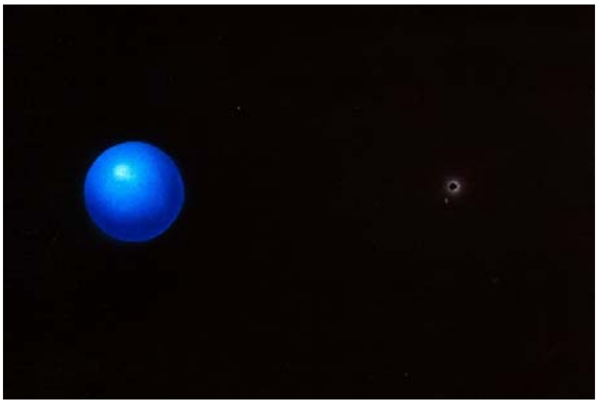
2) Μετά από μερικά εκατομμύρια χρόνια, ο μεγαλύτερος αστέρας αρχίζει να εξαντλεί το απόθεμα του υδρογόνου του και δείχνει τα πρώτα σημάδια του θανάτου: Μπαίνει στη φάση της αστρικής εξέλιξης γνωστής σαν φάση του ερυθρού γίγαντα, διαστελλόμενος σε τέτοιο βαθμό που το αέριο του εξωτερικού του κελύφους πέφτει επάνω στο μικρότερο αστέρα, με συνέπεια να αυξάνει σε μέγεθος η μάζα του.



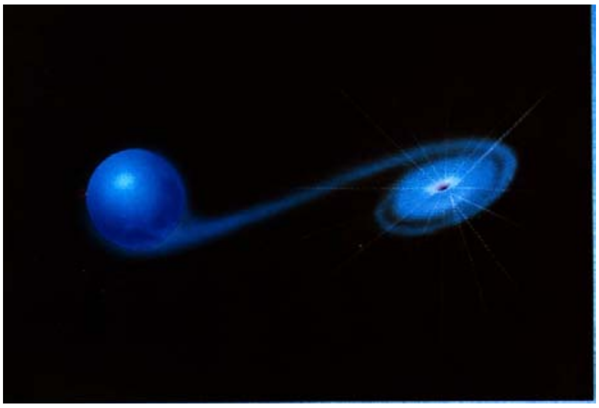
3) Αφού καταναλώσει όλο το υδρογόνο και τις άλλες πηγές καυσίμου, το ετοιμοθάνατο άστρο ξαφνικά εκρύγνεται ως σουπερνόβα. Μέσα σε λίγα δευτερόλεπτα, ο πυρήνας του αρχίζει να καταρρέει ανελέητα.



4) Η έκρηξη σουπερνόβα εκτοξεύει το μεγαλύτερο τμήμα του εξωτερικού κελύφους του άστρου στο διάστημα. Στον πυρήνα όμως παραμένει περισσότερη ύλη από 3 ηλιακές μάζες. Συνθλιβόμενη από την ίδια της την βαρύτητα, η ύλη αυτή συμπυκνώνεται σε μια μοναδικότητα-μια μαύρη τρύπα από την οποία ούτε το φως δεν μπορεί να διαφύγει. Η μαύρη τρύπα συνεχίζει να βρίσκεται σε τροχιά γύρω από το σύντροφο αστέρα όπως και πριν, μόνο που τώρα είναι αόρατη.



5) Εξαιτίας της πρόσθετης μάζας που απόκτησε πρόσφατα ο αστέρας –συνοδός, ξεκινά τώρα μια πιο γοργή εξέλιξη, στη διάρκεια της οποίας αναπτύσσει ένα αστρικό άνεμο, που σαρώνει σωματίδια από την επιφάνεια του άστρου προς τη μαύρη τρύπα, όπου και σχηματίζεται ένας γρήγορα περιστρεφόμενος δίσκος προσαύξησης
Η τριβή μεταξύ των εσωτερικών και των εξωτερικών πλευρών του δίσκου παράγει θερμοκρασίες αρκετά υψηλές, ώστε να κάνουν τα σωματίδια να εκπέμψουν έντονες ακτίνες Χ-αποκαλύπτοντας έτσι την παρουσία της Μαύρης τρύπας.



Για παράδειγμα θερμές αέριες μάζες ή γενικά θερμή ύλη η οποία περιστρέφεται μέσα σε έναν δίσκο προσαύξησης γύρω από μια Μελανή Οπή ή έναν Αστέρα Νετρονίων προκαλεί ημιπεριοδική μεταβλητότητα τάξης μεγέθους του ενός millisecond. Αστέρες νετρονίων με ασθενές μαγνητικό πεδίο μπορούν να φτάσουν σε περιστροφές με περίοδο 1 ms από την πτώση πάνω τους ύλης, η οποία υπάρχει στο δίσκο προσαύξησης. Το φαινόμενο αυτό παρατηρήθηκε πρώτα από το RXTE δυόμισι χρόνια μετά την εκτόξευσή του το 1995 και το οποίο ανίχνευσε ασύμμετρες εκπομπές στην αναλαμπή των ακτινών Χ, λόγω της πτώσεως της ύλης πάνω στην επιφάνεια του αστέρα.

Αστέρες Νετρονίων ή Μελανές Οπές με δίσκους προσαύξησης συναντούμε στα διπλά συστήματα εκπομπής ακτίνων Χ. Σε αυτά τα συστήματα, όπως φαίνεται άλλωστε και από τις παραπάνω εικόνες, ύλη μεταφέρεται από έναν αστέρα μικρής μάζας, ο οποίος πολλές φορές ονομάζεται δωρητής, στο συμπαγές αντικείμενο. Θερμικές ακτίνες Χ ενισχυμένες από την απελευθέρωση βαρυτικής δυναμικής ενέργειας, εκπέμπονται από τις εσώτερες περιοχές του δίσκου προσαύξησης ή από την επιφάνεια του αστέρα νετρονίων αν υπάρχει. Για ένα συμπαγές αντικείμενο μεγέθους ~ 10 km το 90% της ενέργειας εκλύεται από τις εσώτερες περιοχές του δίσκου προσαύξησης περίπου 100 km από το κέντρο της πηγής.

Υποθέτοντας λεπτό δίσκο, η ύλη κινείται σε τροχιές Kepler με μια αζιμουθιακή ταχύτητα η οποία είναι περίπου ίση με αυτή μιας κυκλικής τροχιάς Kepler, και μια πιο μικρή ακτινική ταχύτητα. Ο δίσκος έχει ακτίνα που κυμαίνεται από 10^5- 10^7 km, ανάλογα με το συμπαγές αντικείμενο που βρίσκεται στο κέντρο.

Στα περισσότερα μοντέλα με αστέρα νετρονίων ασθενούς μαγνητικού πεδίου, ένα μέρος του ρευστού είτε καταλήγει πάνω στην επιφάνεια του αστέρα ακτίνας R είτε πολύ πιο μακριά σε μια τροχιά r_{in}. Εντός της περιοχής R- r_{in} οι τροχιές δεν ακολουθούν τους νόμους του Kepler και εμφανίζονται αστάθειες, υπάρχει βέβαια και το ενδεχόμενο να μην έχουμε καν δίσκο σ’αυτήν την περιοχή.

Ανεξάρτητα της γεωμετρίας αν οι ταχύτητες κοντά στον συμπαγή αστέρα είναι της τάξεως $\upsilon \simeq \left(\frac{GM}{R}\right)^{1/2} \sim 0,5c$ ο δυναμικός χρόνος, δηλαδή ο χρόνος κίνησης της ύλης μέσω της περιοχής εκπομπής είναι μικρός $\tau_{dyn} \simeq \left(r^3/GM\right)^{1/2} \sim 0,1ms$ για r = 10 km, ενώ κυμαίνεται στα 2 ms για r = 100 km περίπου και για έναν αστέρα νετρονίων με μάζα περίπου $1,4M_{\odot}$. Αντίστοιχα για μια Μελανή Οπή μάζας $10M_{\odot}$ και απόσταση r = 10 km, ο δυναμικός χρόνος είναι περίπου 1 ms.

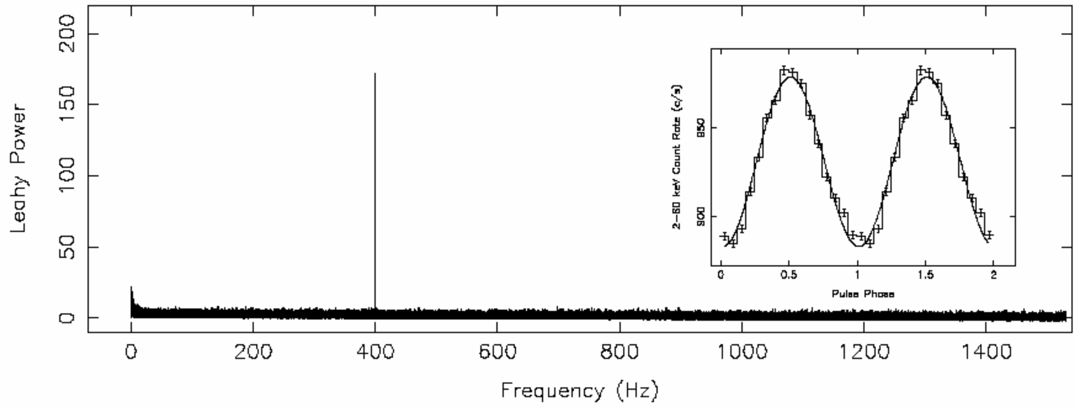
Τα ms λοιπόν είναι η φυσική κλίμακα χρόνου της προσαύξησης στις περιοχές εκπομπής ακτίνων X. Η τροχιακή κίνηση, το spin των αστέρων νετρονίων, οι ταλαντώσεις τόσο του δίσκου όσο και του αστέρα υπολογίζονται να συμβαίνουν σ’αυτές τις κλίμακες χρόνου.

Επειδή οι ακριβείς αλληλεπιδράσεις μεταξύ των στοιχειωδών σωματιδίων στο εσωτερικό του αστέρα νετρονίων δεν είναι γνωστές και οι οποίες χρειάζονται διότι μας δίνουν πληροφορίες για την εξίσωση κατάστασης της υπέρπυκνης πυκνότητας της ύλης, γι’αυτό αξιολογώντας σωστά τα μακροσκοπικά φαινόμενα του δίσκου προσαύξησης μπορούμε να πάρουμε έμμεσα πληροφορίες τόσο για την ακτίνα του αστέρα νετρονίων όσο και για την εξίσωση κατάστασής του.

Τρία διαφορετικά φαινόμενα ως τώρα έχουν παρατηρηθεί στα διπλά συστήματα ακτίνων X. Ιστορικά, το πρώτο που ανακαλύφθηκε ήταν οι ημι-περιοδικές ταλαντώσεις τάξεως των kHz (kHz QPOs) οι οποίες οφείλονται στην τροχιακή κίνηση της ροής της ύλης. Έπειτα σειρά είχαν οι εκρηκτικές ταλαντώσεις (burst oscillations) πιθανότατα εξαιτίας της περιστροφής ενός στρώματος ύλης κοντά στην ατμόσφαιρα ενός αστέρα νετρονίων. Τέλος ο RXTE ανίχνευσε την πρώτη συχνότητα από spin σ’έναν ασθενούς μαγνητικού πεδίου αστέρα νετρονίων με δίσκο προσαύξησης κάτι που η επιστημονική κοινότητα περίμενε ανυπόμονα αρκετό καιρό τώρα (accreting ms pulsar).

Παλμοί τάξεως των ms

Δύο χρόνια μετά την εκτόξευση του δορυφόρου RXTE ανακαλύφθηκε ο πρώτος ms πάλσαρ λόγω προσαύξησης (13 Απριλίου 1998), κοντά στην πηγή περιοδικών ακτίνων X, SAX J1808,4-3658. Η συχνότητά του ήταν στα 401 Hz πράγμα που τον κάνει να περιστρέφεται με περίοδο 2,5 ms **(Εικ. 7.1)**. Ο πάλσαρ είναι κοντά στο αντικείμενο που το 1996 δόθηκε το όνομα SAX J1808,4-3658 λόγω της εκπομπής ακτίνων X, πράγμα που κάνει το αντικείμενο μοναδικό, αφού είναι ο πρώτος εκρηκτικός πάλσαρ (bursting pulsar), παραβιάζοντας τον κανόνα ότι οι παλμικές κινήσεις και οι τύπου I εκπομπή ακτίνων X (στην τύπου I η εκπομπή ακτίνων X γίνεται κατά τρόπο περιοδικά κανονικό σε χρονικά διαστήματα μερικών δευτερολέπτων) είναι ασυμβίβαστες.



ΕΙΚΟΝΑ 7.1 : Η ανακάλυψη του φάσματος ισχύος καθώς και το προφίλ του παλμού (εσωτερική εικόνα) του πρώτου ms X-Ray πάλσαρ με δίσκο προσαύξησης.

Η τροχιακή περίοδος του πάλσαρ είναι 2 ώρες και ο συνοδός του αστέρας είναι μικρής μάζας. Ένας τέτοιος αστέρας νετρονίων ο οποίος περιστρέφεται ταχύτατα πρέπει να έχει μικρό μαγνητικό πεδίο της τάξεως 10^8-10^9 Gauss. Αν κάτι τέτοιο

δεν συμβαίνει τότε θα πρέπει να υποθέσουμε ότι η ακτίνα της μαγνητόσφαιρας r_{mg} ξεπερνά την ακτίνα περιστροφής της ύλης γύρω από τον αστέρα νετρονίων, έτσι ώστε η ύλη που περιστρέφεται μέσα στην μαγνητόσφαιρα να μην ξεπερνά το όριο της κεντρόφυγης δύναμης.

Μια απλή εκτίμηση οδηγεί σε ένα άνω όριο για την ακτίνα της μαγνητόσφαιρας στα 31 km και ένταση μαγνητικού πεδίου κοντά στην επιφάνεια του αστέρα 2-6 x 10^8 G. Επίσης από απλούς υπολογισμούς οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι για να πάλλεται ο πάλσαρ, η ακτίνα της μαγνητόσφαιρας r_{mg} θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα R του αστέρα νετρονίων, οδηγώντας σε περιορισμούς στην σχέση ακτίνας – μάζας και στην εξίσωση κατάστασης του αστέρα.

Το σημαντικότερο συμπέρασμα που βγαίνει από την μελέτη των αντικειμένων αυτών, είναι ότι οι αστέρες αυτοί φαίνονται ως ραδιοπάλσαρ μόλις σταματήσει η διαδικασία της προσαύξησης. Κάτι τέτοιο βέβαια θα γίνει στο τέλος της ζωής του πάλσαρ, ως πηγή εκπομπής ακτίνων X του διπλού συστήματος, όπως για παράδειγμα έγινε στον SAX J1808,4-3658.

Δεν έχει γίνει ακόμη γνωστό γιατί μπορούμε να δούμε τον συγκεκριμένο αστέρα να περιστρέφεται ταχύτατα στην πηγή SAX J1808,4-3658 και όχι άλλους αστέρες νετρονίων σε άλλα διπλά συστήματα εκπομπής ακτίνων X με την ίδια ή περισσότερη ροή ύλης. Ίσως η γεωμετρία αυτού του αντικειμένου, όπως για παράδειγμα η πολύ μικρή κλίση της τροχιάς του συστήματος, μας επιτρέπει να δούμε τις παλμικές κινήσεις (pulsations) μόνο σε αυτό το σύστημα.

Αν και καμία εκρηκτική ταλάντωση (burst oscillation) η kHz QPOs δεν έχει ανιχνευτεί σ’αυτό το σύστημα, η απουσία τους είναι σύμφωνη με αυτό που περιμένουμε από τυπικά διπλά συστήματα εκπομπής ακτίνων X μικρής μάζας (LMXB) παρόμοιας κατάστασης. Με εντατικότερες παρατηρήσεις κατά την διάρκεια της επόμενης παροδικής αναλαμπής (out burst), τέτοιου είδους φαινόμενα γίνονται πλέον ανιχνεύσιμα. Οι ιδιότητες του φάσματος των ακτίνων X καθώς και η μεταβλητότητα της πηγής είναι παρόμοια και σε άλλα LMXB με ηπιότερους ρυθμούς προσαύξησης, υποδεικνύοντας είτε ότι ο αστέρας νετρονίων σε αυτά τα συστήματα έχει μαγνητικό πεδίο εντάσεως της ίδιας τάξης, είτε ότι η παρουσία της μικρής μαγνητόσφαιρας δεν επηρεάζει το φάσμα και τα χαρακτηριστικά της μικρής μεταβλητότητας της πηγής.

Εκρηκτικές Ταλαντώσεις

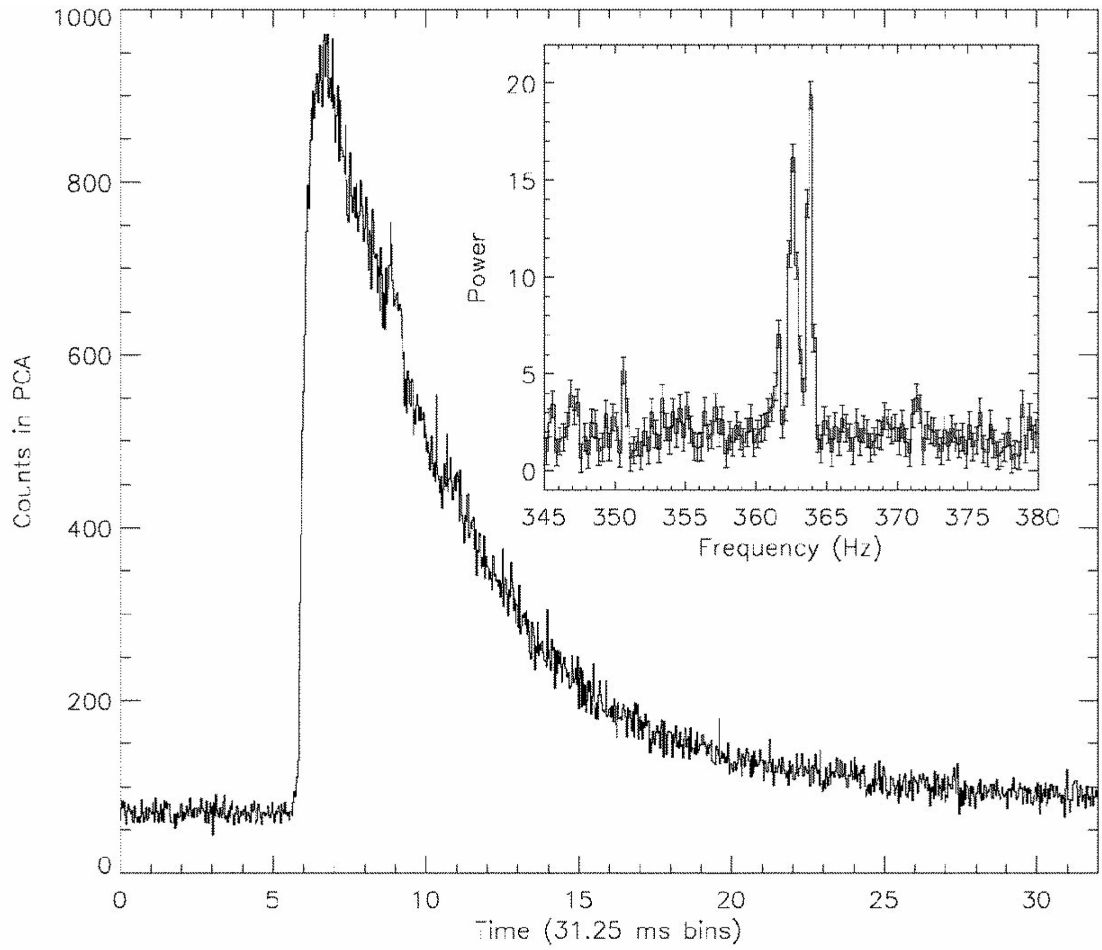
Οι τύπου I εκρήξεις ακτίνων X (X-Ray bursts) προέρχονται από την συσσώρευση θερμαινόμενου πλάσματος πάνω στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων υπό την επίδραση του ισχυρού βαρυτικού πεδίου αλλά και του μαγνητικού πεδίου του αστέρα νετρονίων. Όταν η πυκνότητα και η θερμοκρασία στο συσσωρευμένο πυρηνικό καύσιμο, κυρίως ήλιο ή άνθρακα, πλησιάσει το σημείο ανάφλεξης, η ύλη αναφλέγεται σ'ένα συγκεκριμένο σημείο, που συχνά ονομάζεται θερμή κηλίδα πάνω στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων. Έτσι οδηγούμαστε σε μια λάμψη με την μορφή έκρηξης ακτίνων X μεγάλης έντασης, 10^{39}-10^{40} erg και μικρής διάρκειας < 1 sec. Σε μερικές εκρήξεις το κρίσιμο όριο της φωτεινότητας του Eddington ξεπερνιέται και ατμοσφαιρικά στρώματα τινάζονται από την επιφάνεια του αστέρα, οδηγώντας σε αύξηση της ακτίνας της φωτόσφαιρας κατά ένα παράγοντα 10-100 km, ακολουθούμενο από μια σταδιακή επανασυστολή. Αυτές οι εκρήξεις συνηθίζονται να λέγονται ΄΄εκρηκτικά φουσκώματα της ακτίνας΄΄ (radius expansion bursts).

Στην αρχική φάση, όταν εξαπλώνεται το πρώτο μέτωπο της έκρηξης, η παραγόμενη ενέργεια είναι ολοκληρωτικά ανισοτροπική. Επίσης στην αρχική φάση συγκαταλέγονται και πολλαπλές περιστασιακές εκρήξεις, οι οποίες είναι χρονικά κοντά η μία με την άλλη και οι οποίες μας υποδηλώνουν ότι μέρος μόνο της ύλης αναφλέγεται κατά την έκρηξη, έτσι ώστε ένα μικρό μόνο κομμάτι της επιφάνειας του αστέρα να παίρνει μέρος στην έκρηξη. Επίσης και τα μαγνητικά πεδία μαζί με την ανάφλεξη της ύλης, μόνο όμως τμηματικά και όχι ολοκληρωτικά, μπορούν να δώσουν κι αυτά ανισοτροπική εκπομπή ενέργειας κατά την διάρκεια των εκρηκτικών ακτίνων X. Ανισοτροπική εκπομπή από την περιστροφή του αστέρα νετρονίων οδηγεί σε περιοδικά ή ημι-περιοδικά παρατηρήσιμα φαινόμενα και ο λόγος είναι ότι εξαιτίας της περιστροφής του αστέρα, η γεωμετρία που βλέπουμε από την Γη των λαμπρότερων περιοχών ποικίλει περιοδικά, εκτός βέβαια και αν υπάρχει συμμετρία στο χώρο γύρω από τον άξονα περιστροφής.

Η πρώτη αναμφισβήτητα εκρηκτική ταλάντωση τύπου I παρατηρήθηκε από τον RXTE στις 16 Φεβρουαρίου 1996 στην εκρηκτική πηγή (burst source) 4U 1728-34 και στην οποία καταγράφηκε μια ταλάντωση με ελαφρά μετατοπισμένη συχνότητα κοντά στα 363 Hz, η οποία ξεκίνησε λίγο πριν την έκρηξη. Η συχνότητα ταλάντωσης αυξήθηκε από τα 362,5 Hz στα 363,9 Hz σε λιγότερο από 10 sec **(Εικ. 7.2)**.

Εκρηκτικές ταλαντώσεις έχουν ανιχνευτεί σε έξι ή επτά άλλες διαφορετικές πηγές. Μερικές φορές οι ταλαντώσεις είναι ισχυρές για λιγότερο του ενός δευτερολέπτου κατά την διάρκεια του μεγίστου της έκρηξης, μετά γίνονται ασθενέστερες ή μη ανιχνεύσιμες και τέλος συμβαίνουν για 10 sec στην ουρά της έκρηξης (burst cooling tail). Παρόμοιο γεγονός μπορεί να γίνει και σε εκρηκτικά ακτινικά φουσκώματα, όπου οι ταλαντώσεις εμφανίζονται αφού συσταλεί η φωτόσφαιρα.

Συνήθως η συχνότητα αυξάνει 1 με 2 Hz κατά την ουρά της έκρηξης, εννοώντας στο τελείωμά της όπου η θερμότητά της έχει μειωθεί δραματικά, στη συνέχεια μεταπίπτει σε ασυμπτωτική, όπου για μια καθορισμένη πηγή τείνει να γίνει σταθερή, με διαφορές της τάξεως του 0,1% από έκρηξη σε έκρηξη. Ίσως να μπορεί να ανιχνευθεί και η καμπύλη της τροχιακής ακτινικής ταχύτητας στην ασυμπτωτική συχνότητα, αλλά μπορούμε μόνο να την δούμε αν οι ασυμπτωτικές συχνότητες είναι ουσιαστικά αρκετά σταθερές γι' αυτό το σκοπό.



Εικόνα 7.2 : Το προφίλ μιας εκρηκτικής ταλάντωσης και το φάσμα ισχύως της (εσωτερική εικόνα) της πηγής 4U 1728-34.

Κατά ένα ευρύ, αλλά όχι παγκοσμίως αποδεκτό σενάριο, οι εκρηκτικές ταλαντώσεις οφείλονται στην θερμή κηλίδα ή στις θερμές κηλίδες που δημιουργούνται πάνω στο στρώμα της ατμόσφαιρας του αστέρα νετρονίων, το οποίο κινείται ελαφρώς βραδύτερα από τον υπόλοιπο αστέρα και αυτό λόγω της διαστολής του κατά 5-50 m κατά την διάρκεια της έκρηξης των ακτίνων X κρατώντας βέβαια σταθερή μόνο την στροφορμή του.

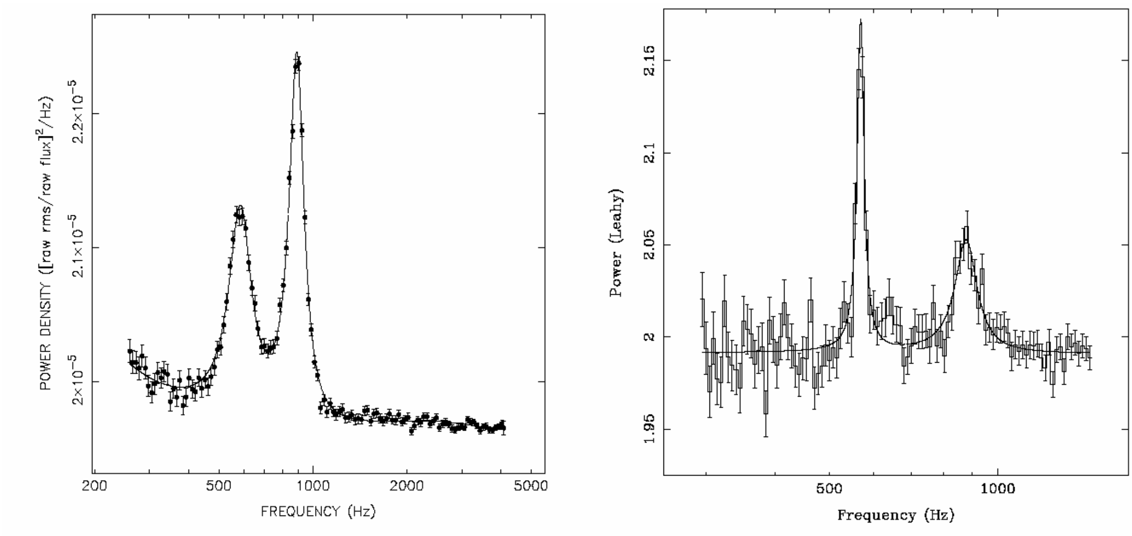
Οι μετατοπίσεις στην συχνότητα συμβαίνουν από την επιτάχυνση της ατμόσφαιρας που δημιουργήθηκε κατά την έκρηξη στον αστέρα νετρονίων καθώς αυτή επανασυστέλεται στο τέλος της έκρηξης. Η συστολή αυτή επιβάλλεται από το ισχυρό βαρυτικό πεδίο του αστέρα. Η ασυμπτωτική τώρα συχνότητα ανταποκρίνεται κυρίως στη φυσική περιστροφική συχνότητα του αστέρα νετρονίων. Από αυτό το σενάριο θα περίμενε κανείς να είχαμε πτώση της συχνότητας κατά την διάρκεια κορύφωσης της έκρηξης, αλλά στοιχεία για την απόδειξη αυτής της υπόθεσης δεν έχουν βρεθεί ακόμα. Όσον αφορά την περίπτωση της μείωσης της συχνότητας στο τελείωμα της έκρηξης, αυτό εξηγείται αν επικαλεστούμε επιπρόσθετη θερμοπυρηνική ενέργεια να προστίθεται στο τελευταίο στάδιο της έκρηξης, το οποίο όμως επηρεάζει το προφίλ της έκρηξης.

Εάν τελικά οι εκρηκτικές ταλαντώσεις οφείλονται στις θερμές κηλίδες, τότε το πλάτος των συχνοτήτων τους περιορίζει το πόσο συμπαγής είναι ο αστέρας. Το πόσο συμπαγής είναι ο αστέρας, μας το δηλώνει ο λόγος R_G / R όπου R είναι η ακτίνα του αστέρα και $R_G = GM/c^2$ η βαρυτική ακτίνα. Όσο πιο συμπαγής είναι ο αστέρας τόσο μικρότερο είναι το πλάτος της ταλάντωσης. Συγκεκριμένα όταν οι ταλαντώσεις προέρχονται από δυο θερμές κηλίδες οι οποίες βρίσκονται στους αντίποδες και το πλάτος είναι μεγάλο, τότε οι περιορισμοί είναι ισχυροί. Τα ακριβή όρια εξαρτώνται από τα χαρακτηριστικά της εκπομπής ενώ δεν είμαστε ακόμα σε θέση να βγάλουμε συμπεράσματα γι'αυτά.

Κλείνοντας την συζήτηση πάνω στις εκρηκτικές ταλαντώσεις δεν θα μπορούσαμε να μην αναφέρουμε μερικά ερωτήματα που μένουν ανοικτά ακόμη, όπως το γιατί μόνο μερικές εκρηκτικές πηγές μας δίνουν ταλαντώσεις και γιατί μόνο μερικές από αυτές μας τις επιδεικνύουν. Τα ερωτήματα αυτά είναι δύσκολο να απαντηθούν ειδικά σ'ένα μοντέλο συσσώρευσης των μαγνητικών πόλων όπου η γεωμετρία των πόλων παραμένει η ίδια από έκρηξη σε έκρηξη. Μελέτες πάνω στην συσχέτιση μεταξύ των χαρακτηριστικών των εκρήξεων και της εκπομπής των ακτίνων Χ καθώς και της παρουσίας των εκρηκτικών ταλαντώσεων θα μπορούσαν να ρίξουν φως στα αναπάντητα αυτά ερωτήματα.

Ημιπεριοδικές Ταλαντώσεις τάξεως kHz (kHz QPOs)

Ιστορικά αξίζει να αναφέρουμε ότι τα kHz QPOs ανακαλύφθηκαν στο Goddard Space Flight Center της NASA το Φεβρουάριο του 1996, δύο μόλις μήνες μετά την εκτόξευση του RXTE. Δύο ταυτόχρονες κορυφές ημι-περιοδικών ταλαντώσεων, τις οποίες συχνά αποκαλούμε δίδυμες κορυφές ΄΄twin peaks΄΄,φάνηκαν σε μια περιοχή από 300-1300 Hz στο φάσμα ισχύος των μικρής μάζας διπλών πηγών ακτίνων X **(Εικ. 7.3)**. Η ανίχνευση αυτή έγινε από τις πηγές SCO X-1 και 4U 1728-34, οι οποίες χαρακτηρίζονται από αστέρες νετρονίων ασθενούς μαγνητικού πεδίου και διαφορετικής λαμπρότητας ακτίνων X L_x (X-ray luminosity). Η συχνότητα και των δύο κορυφών είναι κοντά στην συχνότητα έκρηξης $\nu_{burst.}$ Αυτή η ιδιότητα των συχνοτήτων μας παρέχει ένα ισχυρό επιχείρημα για την ερμηνεία των ταλαντώσεων στο πλαίσιο του μοντέλου του διακροτήματος (beat frequency model).



Εικόνα 7.3 : Οι δύο δίδυμες KHz κορυφές στην πηγή SCO X-1 (αριστερά) και 4U 1608-52 (δεξιά)

Α) Τροχιακές συχνότητες και συχνότητα διακροτήματος

Οι τροχιακές κινήσεις γύρω από έναν αστέρα νετρονίων (υποθέτοντας τροχιές Kepler) γίνονται σε συχνότητες

$$\omega = \left(\frac{GM}{r_{orb}^3}\right)^{1/2} \Rightarrow \nu_{orb} = \left(\frac{GM}{4\pi^2 r_{orb}^3}\right)^{1/2} \simeq 1200Hz\left(\frac{r_{orb}}{15km}\right)^{-3/2} m_{1,4}^{1/2}$$

και η αντίστοιχη τροχιακή ακτίνα είναι

$$r_{orb} = \left(\frac{GM}{4\pi^2 v_{orb}^2} \right)^{1/3} \simeq 15km \left(\frac{v_{orb}}{1200Hz} \right)^{-2/3} m_{1,4}^{1/3}$$

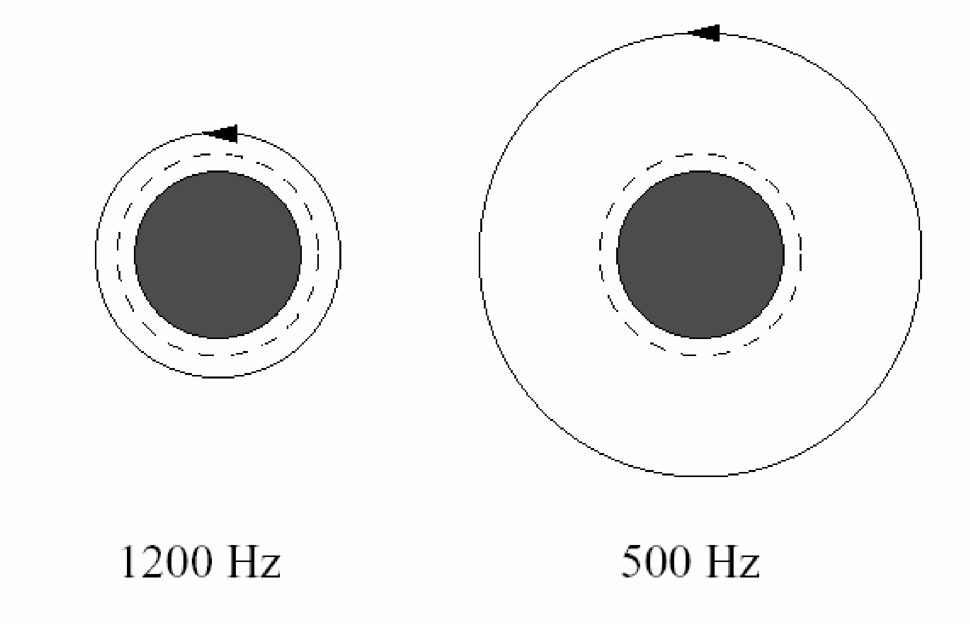
όπου $m_{1,4}$ είναι η μάζα του αστέρα σε μονάδες 1,4 $M_{\odot}$.

Στη Γενική θεωρία της Σχετικότητας δεν υπάρχουν σταθερές κυκλικές τροχιές σε μικρότερη ακτίνα από την $R_{ISCO} = 6M_{\odot} = 6\ GM/c^2 \sim 12{,}5\ m_{1,4}$ km. Η συχνότητα που αντιστοιχεί σ'αυτές τις τροχιές και αποτελεί την μέγιστη συχνότητα είναι :

$$v_{ISCO} \simeq \frac{1580}{m_{1,4}} Hz$$

Οι σχέσεις αυτές ισχύουν βέβαια όταν η γεωμετρία είναι σφαιρική, δηλαδή αυτής του Schwarzchild (σφαιρικά συμμετρικός μη περιστρεφόμενος αστέρας ή μελανή οπή). Διορθώσεις σε πρώτη τάξη του όρου $j = \frac{J}{M^2}$ όπου J η στροφορμή του αστέρα νετρονίων, έχουν γίνει σε προηγούμενη ενότητα η οποία μας έδωσε μια διαφορά στην ακτινική τροχιά της τάξης του 10% περίπου.

Στα μοντέλα spin orbit frequency μερικοί μηχανισμοί παράγουν διαταραχές της συχνότητας v_{orb} σε συγκεκριμένες ακτίνες στο δίσκο προσαύξησης, με την συχνότητα περιστροφής v_s του αστέρα νετρονίων, έτσι ώστε ένα σήμα να παρατηρείται στην συχνότητα $v_{beat} = v_{orb} - v_s$.



Εικόνα 7.4 : Αστέρας Νετρονίων με μάζα $1.4M_{\odot}$ και ακτίνας 10 Km με τις αντίστοιχες εσώτερες ευσταθείς κυκλικές τροχιές του (ISCO διακεκομμένες γραμμές) και με τις τροχιές (πλήρεις κύκλοι) που αντιστοιχούν στις παραπάνω τροχιακές συχνότητες των 1200 και 500 Hz.

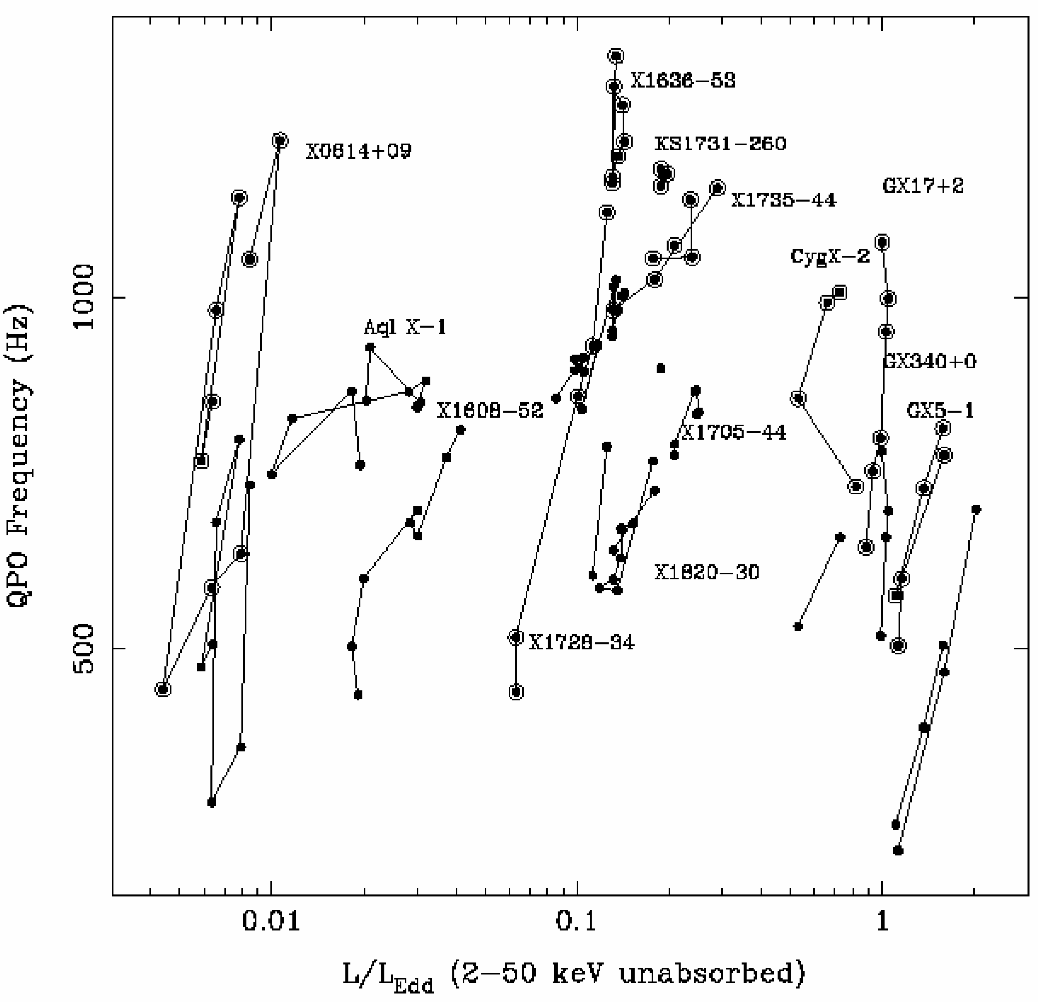
Β) Αρχικές Ερμηνείες

Η ερμηνεία της συχνότητας διακροτήματος υποδεικνύει ότι η παρατηρούμενη διαφορά των δυο κορυφών στα kHz QPOs $\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$ θα πρέπει να είναι ίση με την συχνότητα περιστροφής του αστέρα νετρονίων ν_s και γι’αυτό θα πρέπει να είναι σταθερή και κοντά στην συχνότητα ν_{burst}. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι απόλυτα σωστός, διότι το $\Delta\nu$ δεν είναι ακριβώς σταθερό ούτε ίδιο με την συχνότητα ν_{burst}, πράγμα το οποίο οδήγησε σε περαιτέρω μοντέλα περιγραφής των kHz QPOs. Πρώτοι οι Stella & Vietri (1998) επισήμαναν ότι η χαμηλή συχνότητα ν_{LF} των QPOs στην περιοχή 15-60 Hz, η οποία μας ήταν γνωστές στις πηγές Ζ (Z- sources) από το 1980 και οι οποίες ανακαλύφθηκαν πρόσφατα από το RXTE στις πηγές atoll , είναι ανάλογες του ν_2^2, όπου ν_2 είναι η τροχιακή συχνότητα σε μια συγκεκριμένη ακτίνα στο δίσκο προσαύξησης και ν_1 και ν_{LF} είναι οι δύο βασικές συχνότητες στο σχετικιστικό μοντέλο τους. Η επισήμανση αυτή πυροδότησε μια σειρά εργασιών και ανακοινώσεων από τους Stella & Vietri περιγράφοντας αυτό που μας είναι γνωστό ως ´´ relativistic precession model´´. Σχεδόν όλα τα μοντέλα βασίζονται στην ερμηνεία ότι μια εκ των δύο συχνοτήτων στα kHz QPOs είναι η τροχιακή συχνότητα του δίσκου. Το μοντέλο της σχετικιστικής μετάπτωσης θα το αναφέρουμε αργότερα καθώς είναι από τα κυριότερα μοντέλα που προσπαθούν να εξηγήσουν τα KHz QPOs.

Γ) Εξάρτηση της συχνότητας των QPOs από την φωτεινότητα

Τα kHz QPOs παρατηρούνται σε παρόμοιες συχνότητες σε πηγές που διαφέρουν στην λαμπρότητα των ακτίνων Χ, L_X ,κατά ένα παράγοντα μεγαλύτερο από 2 τάξης μεγέθους και η συχνότητα των QPOs φαίνεται να καθορίζεται περισσότερο από την διαφορά μεταξύ του μέσου όρου της $\overline{L}_x$ και της στιγμιαίας τιμής L_x της πηγής, παρά μόνο από τον όρο L_x. Σ’ένα διάγραμμα ν - L_x **(ΕΙΚ. 7.5)** αυτό που φαίνεται είναι μια σειρά από παράλληλες περίπου γραμμές όπου η κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια πηγή. Σε κάθε πηγή υπάρχει μια ορισμένη σχέση μεταξύ των L_x και ν, αλλά η ίδια σχέση δεν ισχύει για άλλη πηγή που έχει διαφορετικό μέσο όρο φωτεινότητας $\overline{L}_x$. Αντί αυτού η ίδια η πηγή καλύπτει την ίδια περιοχή συχνότητας ν γύρω από τον μέσο όρο της φωτεινότητας των ακτίνων Χ , που αντιστοιχεί στην ίδια.

Το γεγονός αυτό είναι ανεξήγητο αλλά δείχνει να σημαίνει ότι θα πρέπει να υπάρχει και άλλη μια παράμετρος η οποία να συσχετίζεται με την $\overline{L}_x$ εκτός της στιγμιαίας L_x, η οποία και επηρεάζει την συχνότητα των QPOs. Ίσως αυτή η παράμετρος να είναι η ένταση του μαγνητικού πεδίου του αστέρα νετρονίων, αλλά υπάρχουν σίγουρα και άλλες εκδοχές.



Εικόνα 7.5 : Το φαινόμενο των παράλληλων γραμμών κατά μήκος των πηγών. Οι υψηλότερες και χαμηλότερες συχνότητες των KHz κορυφών δίνονται με διαφορετικά σύμβολα.

Δ) Ισχυρό πεδίο βαρύτητας και η ύλη σε υψηλές πυκνότητες

Ενδεχομένως τα kHz QPOs μπορούν να μας δώσουν πληροφορίες για την μάζα και την ακτίνα των αστέρων νετρονίων αλλά και να μας προσφέρουν ένα τεστ της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας. Η εύρεση των προβλεπόμενων από την θεωρία σταθερών εσωτερικών κυκλικών τροχιών (Innermost Stable Circular Orbit ή ISCO) θα συγκροτούσε την πρώτη άμεση ανίχνευση ενός σχετικιστικού γεγονότος στο οποίο σημαντικό ρόλο παίζει το ισχυρό βαρυτικό πεδίο και κατά επέκταση θα αποδεικνύαμε ότι η ακτίνα του αστέρα νετρονίων είναι μικρότερη από αυτήν της ISCO. Το ενδεχόμενο αυτό είχε ενθουσιάσει πολλούς αστροφυσικούς πριν ακόμα της ανακάλυψης των QPOs. Αν τελικά τα QPOs kHz οφείλονται στην τροχιακή κίνηση της ύλης γύρω από έναν αστέρα νετρονίων, η συχνότητά τους δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη από την παρατηρούμενη συχνότητα στο ISCO. Πρώτος ο Kaaret (1997) πρότεινε ότι οι μεταβολές στην συχνότητα των kHz QPOs οι οποίες ήταν ανεξήγητες τότε αν τις αποδίδαμε στη ροή των ακτίνων X (X – ray flux) που προερχόταν από τις πηγές 4U 1608-52 και 4U 1636-53, οφειλόταν τελικά στην τροχιακή κίνηση κοντά στο ISCO και από αυτό οδηγήθηκε σε εκτίμηση της μάζας του αστέρα νετρονίων κοντά σε $2M_{\odot}$. Ωστόσο από εντατικότερες μελέτες που έγιναν αργότερα, έγινε σαφές ότι στις μικρές κλίμακες χρόνου η συχνότητα συσχετίζεται στις πηγές αυτές με την ροή ύλης.

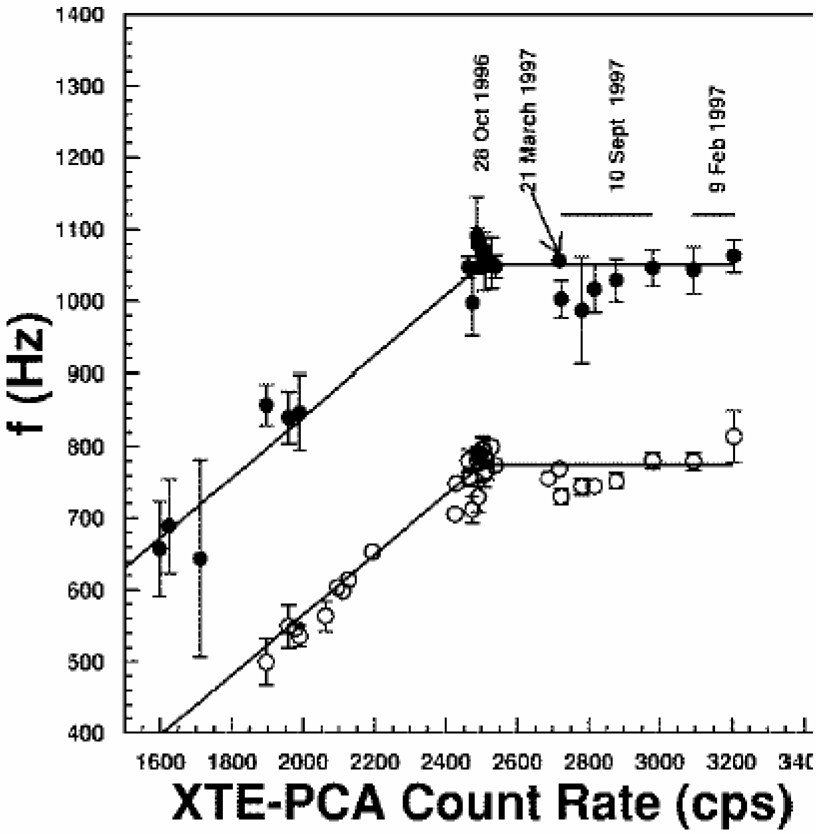
Οι μέγιστες συχνότητες των kHz QPOs που παρατηρήθηκαν σε κάθε πηγή περιορίζονται σε μια στενή περιοχή συχνοτήτων. Σε δώδεκα πηγές atoll που μελετήθηκαν εντατικά, παρατηρήθηκε ότι οι δύο κορυφές είχαν μέγιστη συχνότητα ν_2 στην περιοχή 1074-1329 Hz, ενώ μεταξύ των Z πηγών υπάρχουν δύο περιπτώσεις με χαμηλότερη συχνότητα ν_2 που κυμαίνονταν στην περιοχή < 900 Hz (GX5-1 και GX 340+0). O Zang (1997) για να εξηγήσει την κατανομή της μέγιστης συχνότητας στην στενή αυτή περιοχή των συχνοτήτων, πρότεινε ότι οι στενές περιοχές θα πρέπει να δημιουργούνται από κάποιο όριο, το οποίο θέτει η συχνότητα των ISCO, οι οποίες οδηγούν και αυτές σε μια μάζα του αστέρα νετρονίων κοντά στις $2M_{\odot}$. Είναι πολύ πιθανόν το μέγιστο των συχνοτήτων να καθορίζεται από ένα άλλο όριο οφειλόμενο στην ακτινική τροχιά, όπως για παράδειγμα στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων, ή να καθορίζεται από τις ISCO, με την διαφορά βέβαια ότι η συχνότητα που παρατηρούμε δεν είναι τροχιακή, οπότε σ’αυτήν την περίπτωση δεν μπορούμε να κάνουμε καμία εκτίμηση για την μάζα του αστέρα.

Από την άλλη ο Miller πρότεινε (1996-98) ότι όταν η εσωτερική τροχιά στον δίσκο προσαύξησης πλησιάσει την ISCO, τότε η συχνότητα των QPOs τείνει να οριζοντιοποιηθεί, τείνει να γίνει δηλαδή σταθερή καθώς η $\dot{M}$ συνεχίζει να αυξάνεται (όπου $\dot{M}$ είναι ο ρυθμός μεταφοράς μάζας). Αργότερα μια παρόμοια οριζοντιοποίηση παρατηρήθηκε στην πηγή 4U 1820-30 σε συχνότητα $\nu_2 = 1060 \pm 20$ Hz. Στην **(Εικ. 7.6)** μπορούμε να δούμε την οριζοντιοποίηση αυτή για την πηγή 4U 1820-30. Αν αυτή η συχνότητα είναι η τροχιακή συχνότητα της ISCO, τότε ο αστέρας νετρονίων έχει μάζα $\sim 2,2M_{\odot}$, ώστε πολλές καταστατικές εξισώσεις να απορρίπτονται. Η ΄΄οριζοντιοποίηση΄΄ παρατηρείται επίσης σαν συνάρτηση της ροής των ακτίνων X και του χρώματος (Kaaret 1999), και της θέσεως σε ένα διάγραμμα των πηγών atoll . Μέχρι στιγμής δεν υπάρχουν στοιχεία για παρόμοιο κορεσμό στην συχνότητα άλλων πηγών, απεναντίας φτάνουν σε υψηλότερες συχνότητες. Πιθανών η πηγή 4U 1820-30 να έχει κάτι το μοναδικό που να συσχετίζεται με κάποιο από τα παραπάνω (η 4U 1820-30 είναι μια διπλή πηγή τροχιακής περιόδου 11 min σε ένα σφαιρωτό σμήνος με συνοδό έναν αστέρα που κυριαρχείται από το στοιχείο He).

Αν η κορυφή των QPOs σε συχνότητα ν αντιστοιχεί σε σταθερή κίνηση Kepler, γύρω από τον αστέρα νετρονίων, τότε εύκολα μπορούμε να θέσουμε κάποια όρια στην μάζα του αστέρα νετρονίων, όσο και στην ακτίνα του. Για την γεωμετρία του Schwarzchild πρώτον η ακτίνα R του αστέρα πρέπει να είναι μικρότερη της r_k, όπου r_k η ακτίνα της τροχιά Kepler

$$R < r_k = \left(\frac{GM}{4\pi^2 \nu^2} \right)^{1/3}$$

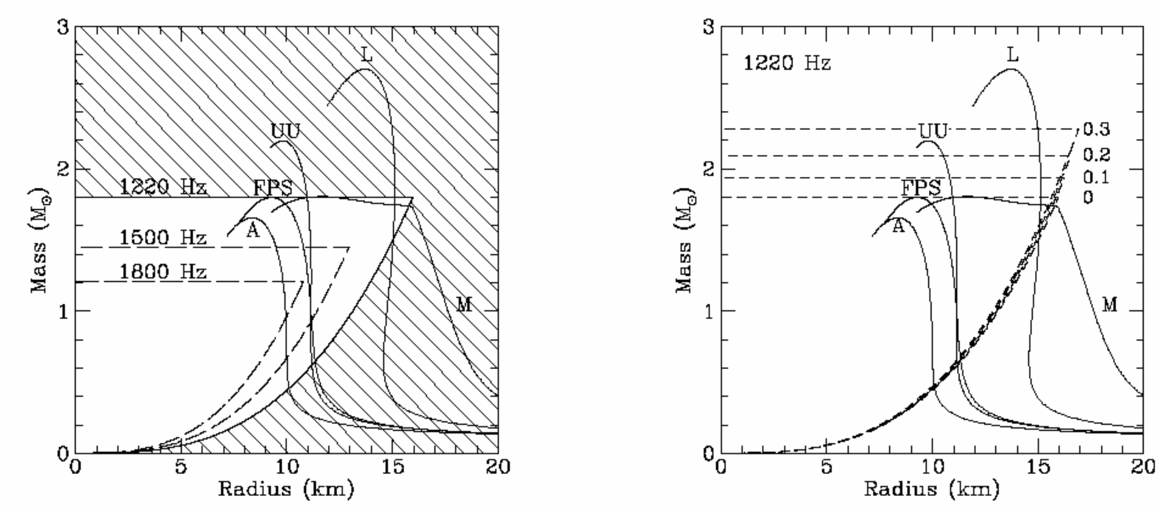
και δεύτερον η ακτίνα των ISCO πρέπει και αυτή να είναι μικρότερη της r_k, καθώς δεν υπάρχουν ευσταθές τροχιές μεταξύ αυτής της ακτίνας



Εικόνα 7.6 : Αποδεικτικά στοιχεία για την οριζοντιοποίηση της συχνότητας των KHz QPOs .

$$r_{ISCO} = 6M_{\odot} = 6\frac{GM}{c^2} < \left(\frac{GM}{4\pi^2 v^2}\right)^{1/3} \quad \text{ή} \quad M < \frac{c^3}{2\pi 6^{3/2} G v}$$

Η πρώτη συνθήκη μας δίνει ένα άνω όριο για την ακτίνα R του αστέρα ενώ η δεύτερη συνθήκη ένα άνω όριο για την μάζα M. Η **(Εικ. 7.7)** δείχνει αυτά τα όρια σ'ένα διάγραμμα μάζας-ακτίνας για συχνότητα ν = 1220 Hz. Στο σχήμα φαίνεται καθαρά επίσης η απαγορευμένη περιοχή (excluded area) η οποία μικραίνει για μεγαλύτερες τιμές του ν. Η μέχρι πρότινος υψηλότερη συχνότητα ν_2, η οποία ταυτίζεται στα περισσότερα μοντέλα με την τροχιακή συχνότητα είναι 1329 ± 4 Hz (Va Straaten 1999), έτσι οι σκληρότερες εξισώσεις κατάστασης αρχίζουν να χάνουν το κύρος τους από την μέθοδο. Διορθώσεις από τον συρμό των αδρανειακών συστημάτων επεκτείνουν την επιτρεπόμενη περιοχή. Για την συχνότητα των 1329 Hz οι παραπάνω εξισώσεις δίνουν $M < 1,65M_{\odot}$ και $R_{NS} = 12,4km$. Με διορθώσεις όμως λόγω περιστροφής του αστέρα σε συχνότητα 300 Hz , οι αριθμοί αυξάνονται σε $M < 1,9M_{\odot}$ και $R_{NS} = 15,2km$.



Εικόνα 7.7 : Περιορισμοί στην μάζα και ακτίνα των αστέρων νετρονίων από την ανίχνευση τροχιακής κίνησης με τις αντίστοιχες συχνότητες. Η αριστερή εικόνα δείχνει τους περιορισμούς για αμελητέα στροφορμή των αστέρων νετρονίων ενώ δεξιά φαίνονται για μικρές τιμές στροφορμής j.

Εάν η διαφορά Δν των δύο κορυφών στα QPOs είναι περίπου κοντά στην συχνότητα περιστροφής του αστέρα ν_s τότε οι 18 αστέρες νετρονίων που έχουν κατά καιρό μελετηθεί βρίσκονται σε συχνότητες ~ 240 Hz και ~ 360 Hz μια εκπληκτικά στενή περιοχή.

Οι White & Zhang (1997) πρότειναν ότι όταν η r_{mg}, η ακτίνα δηλαδή της μαγνητόσφαιρας, είναι μικρή, όπως σε αυτή ην περίπτωση, θα εξαρτάται μόνο κατά ένα μικρό μέρος από το ρυθμό της προσαύξησης. Μια άλλη πιθανότητα είναι ότι η συχνότητα περιστροφής των αστέρων νετρονίων με δίσκο προσαύξησης, περιορίζεται από την απώλεια της βαρυτικής ακτινοβολίας (Andersson, Kokkotas, Stergioulas 1999)*. Εάν αυτό αληθεύει, τότε η βαρυτική ακτινοβολία κάνει τον αστέρα νετρονίων να χάνει στροφορμή τόσο γρήγορα όσο η προσαύξηση του προσφέρει στροφορμή κάνοντας τις πηγές αυτές να είναι από τις λαμπρότερες σε βαρυτική ακτινοβολία πηγές στον ουρανό.

Συσχετισμοί φαινομένων χαμηλής συχνότητας με άλλες πηγές

Οι μοναδικές ταλαντώσεις με συχνότητες που ξεπερνούν τα $10^{2.5}$ Hz και που είναι γνωστές σε υποψήφιες Μελανές Οπές (BHCs) είναι οι 100-300 Hz ταλαντώσεις στην πηγή GRO J1655-40 και XTE J1550-564 και αυτές που δημοσιοποιήθηκαν τώρα τελευταία των πηγών Cyg X-1 και 4U 1630-47. Συνήθως η φαινομενολογία που συνοδεύει τις υψηλές συχνότητες των QPOs με αυτές των χαμηλών είναι πολύπλοκη.

*Andersson, N., Kokkotas, K. D., Stergioulas, N., Astrophysical J. 516, 307 (1999)

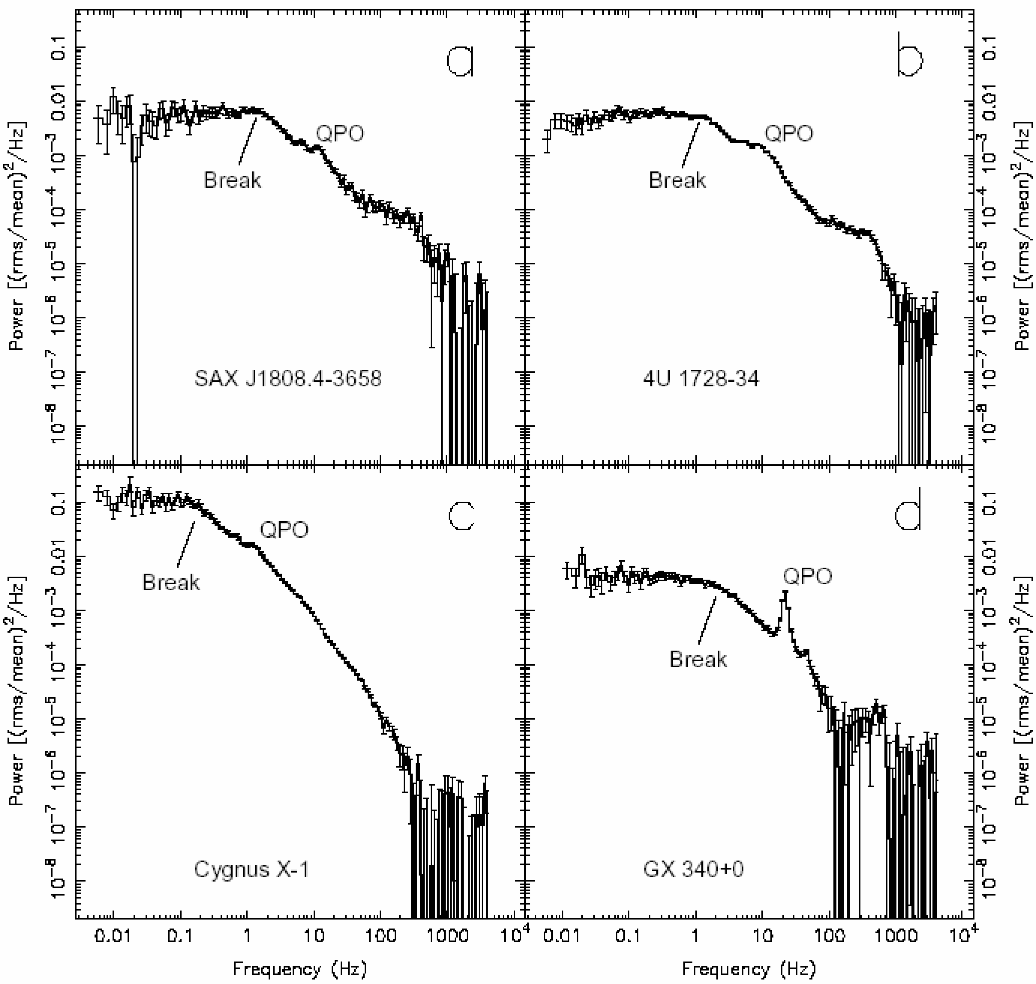
Το γεγονός ότι οι 300 και 67 Hz ταλαντώσεις παρέμεναν σταθερές (κάτι το οποίο διαφέρει από τις άλλες πηγές αστέρων νετρονίων) πυροδότησε διάφορες ερμηνείες σχετικά με την προέλευσή τους, ότι θα πρέπει να προέρχονταν κυρίως από την στροφορμή μιας Μελανής Οπής και ασθενέστερα από την μετάπτωση Lense-Thirring ή από την φωτεινότητα, όπως για παράδειγμα τροχιακές κινήσεις στις ISCO.

Όπως είναι γνωστό, υπάρχουν αρκετές ομοιότητες των φασματικών και χρονοειδών φαινομένων, (όταν λέμε χρονοειδών εννοούμε φαινόμενα που εξαρτώνται άμεσα από το δυναμικό χρόνο), μεταξύ των ασθενών μαγνητικών πεδίων αστέρων νετρονίων και υποψήφιων Μελανών Οπών. Καθώς οι 100-300 Hz ταλαντώσεις μπορεί να συσχετίζονται με τις παρατηρούμενες KHz QPOs των αστέρων νετρονίων, μπορεί να υπάρχει ωστόσο και μια συσχέτιση μεταξύ της πρόσφατης παρατήρησης των κορυφών QPOs κοντά στα 100 Hz στην 4U 0614-09 και 4U 1728-34 οι οποίες διαφέρουν αισθητά από τα KHz QPOs.

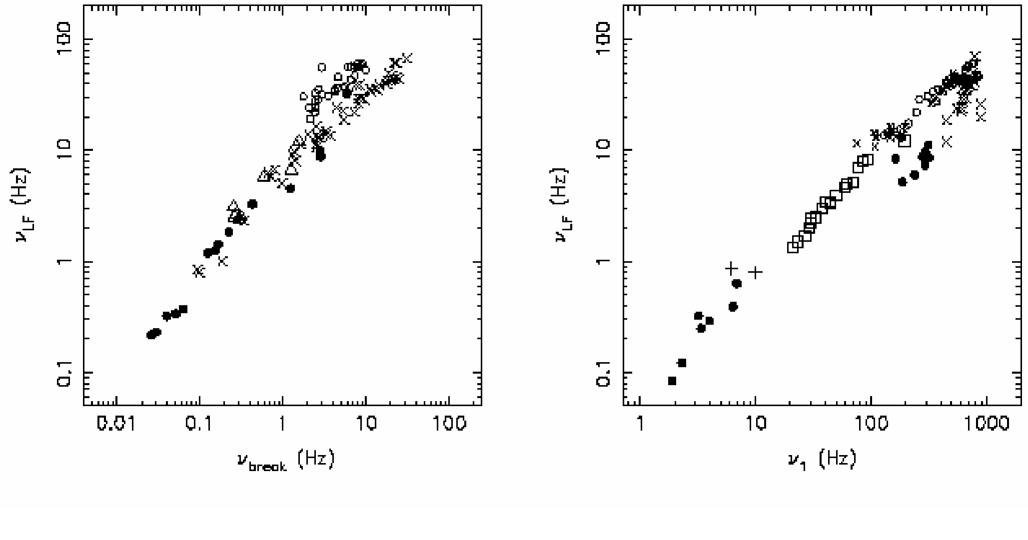
Χαμηλής συχνότητας μικρότερων από 100 Hz QPOs έχουν μελετηθεί σε αστέρες νετρονίων και υποψήφιες μελανές οπές από το 1980, κυρίως με τον δορυφόρο EXOSAT αλλά και Ginga. Δύο διαφορετικές συχνότητες έχουν παρατηρηθεί κυρίως στις πηγές Z ή 6-20 Hz γνωστή ως (normal and flaring – branch oscillation, NBO) κανονικός κλάδος αναλαμπής ταλαντώσεων και η 15-60 Hz γνωστή ως (horizontal branch oscillation, HBO) οριζόντιος κλάδος ταλαντώσεων. Η συχνότητα του HBO συσχετίζεται τελικά με αυτές των KHz QPOs, όπως και η NBO για την πηγή SCO X-1. Με τον δορυφόρο RXTE, συχνότητες των QPOs παρόμοιες με τις HBO έχουν συχνά παρατηρηθεί στις πηγές atoll και οι συχνότητές τους συσχετίζονται καλά με την συχνότητα των KHz QPOs. Δεν έχει γίνει βέβαιο ακόμα αν τα QPOs από τις πηγές atoll είναι ίδια, τουλάχιστον ως προς τη φύση τους, με αυτά των HBO των Z πηγών, αλλά μάλλον κάτι τέτοιο πρέπει να συμβαίνει.

Είναι πιθανό ότι αυτοί οι συσχετισμοί να εμφανίζονται διότι όλα τα QPO φαινόμενα εξαρτώνται από μια κοινή παράμετρο, η οποία προτείνει ότι η προέλευσή τους είναι μια φυσική εξάρτηση των συχνοτήτων που έχουν μεταξύ τους. Στο μοντέλο της σχετικιστικής μετάπτωσης των Stella & Vietri, οι HBO και οι παρόμοιες συχνότητες των QPOs στις πηγές atoll αποτελούν ίδια φαινόμενα και η συχνότητά τους v_{LF} προβλέπεται να είναι ανάλογη της v_2^2. Το γεγονός καθίσταται απόλυτα αληθές σε όλες τις πηγές Z εκτός από την SCO X-1.

Επιπρόσθετες ενδιαφέρουσες συσχετίσεις υπάρχουν μεταξύ των KHz QPOs και των φαινομένων χαμηλής συχνότητας, το οποίο μπορεί να συνδέει τους αστέρες νετρονίων με τις μελανές οπές. Είναι χρήσιμο να μελετήσουμε πρώτα μια συσχέτιση μεταξύ δυο χαμηλών – συχνοτήτων φαινόμενα. Για μικρές προσαυξήσεις, υποψήφιες μελανές οπές και πηγές atoll, ο ms πάλσαρ SAX J1808.4-3658 και ίσως ακόμα οι πηγές Z έχουν παρόμοια φάσματα ισχύος **(ΕΙΚ. 7.8)** με κύριο στοιχείο έναν ευρύ θόρυβο, ο οποίος δείχνει να σπάει στις χαμηλές συχνότητες με την εμφάνιση ενός QPO στην συχνότητα εκείνη. Η συχνότητα του QPO και το σπάσιμο ποικίλουν με μια αξιοπρόσεχτη συσχέτιση τόσο στους αστέρες νετρονίων όσο και στις μελανές οπές **(ΕΙΚ. 7.9** αριστερά**)**, πράγμα που μας κάνει να πιστεύουμε πως τα δυο αυτά φαινόμενα είναι τα ίδια ακριβώς τόσο στους αστέρες νετρονίων όσο και στις μελανές οπές. Αυτό θα μας οδηγούσε έμμεσα στον αποκλεισμό κάποιων μοντέλων όπως του μοντέλου της συχνότητας διακροτήματος και οποιουδήποτε άλλου μοντέλου το οποίο στηρίζεται σε μια αστρική επιφάνεια ή έναν ορίζοντα γεγονότων ή ακόμα κι ενός μαγνητικού πεδίου, και θα επικεντρώνονταν κυρίως σε φαινόμενα που παράγονται ή παίρνουν μέρος στο δίσκο προσαύξησης γύρω από ένα αντικείμενο ασθενούς μαγνητικού πεδίου.



ΕΙΚΟΝΑ 7.8 : Το φάσμα ισχύος σε μια μεγάλη περιοχή για a) ms pulsar b) πηγή atoll c) μελανή οπή και d) πηγή Z



ΕΙΚΟΝΑ 7.9 : Οι συχνότητες διαφόρων QPO και ευρύ θορύβου που παρατηρούνται σε δίσκους προσαύξησης και μελανές οπές, αποτυπώνονται στο διάγραμμα μεταξύ τους ,δείχνοντας ότι παρόμοια στοιχεία συμβαίνουν τόσο στις πηγές Ζ, HBO (v_{LF}) και της χαμηλότερης κορυφής του KHz (v_1) . Οι γεμάτοι κύκλοι παριστάνουν μελανές οπές, οι ανοικτοί πηγές Ζ, οι σταυροί πηγές atoll και τα τρίγωνα τον ms πάλσαρ SAX J1808.4 – 3658.

Ο D. Psaltis τονίζει ότι σε πολλές πηγές Ζ αλλά και πηγές atoll, η παράξενη πηγή Cir X-1 και μερικοί μικρής φωτεινότητας αστέρες νετρονίων αλλά και υποψήφιες μελανές οπές, μερικές φορές παρουσιάζουν δύο συχνότητες QPOs ή έναν ευρύ θόρυβο των οποίων οι κεντρικές συχνότητες, όταν τοποθετούνται σε ένα διάγραμμα v-v_{LF} ταυτίζονται, **(Εικ. 7.9** δεξιά**).** Αυτό μας δηλώνει πιθανότατα ότι τα KHz QPOs συμβαίνουν και σε μελανές οπές αλλά σε πολύ χαμηλές συχνότητες, κάτω τον 50 Hz.

Μοντέλα KHz QPO

Η πιθανότατα να βγάλουμε πλούσια συμπεράσματα αλλά παράλληλα να μαζέψουμε και χρήσιμες πληροφορίες για τα KHz QPOs, οδήγησαν στη διατύπωση πολλών μοντέλων περιγραφής. Τα περισσότερα, αλλά όχι όλα από αυτά, περιέχουν την τροχιακή κίνηση γύρω από τον αστέρα νετρονίων. Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζουμε τα κυριότερα από αυτά και δίνουμε κυρίως τον βασικό κορμό στον οποίο στηρίζονται. Τα κυριότερα μοντέλα που προτάθηκαν ήταν το sonic point beat frequency του Miller (1996), το μοντέλο της σχετικιστικής μετάπτωσης των Stella & Vietri (1998-99) το μοντέλο photon bubble από τον Klein (1996) και τέλος το μοντέλο disk transition layer (μετάβαση του στρώματος του δίσκου) του Titarchuk (1998-99).

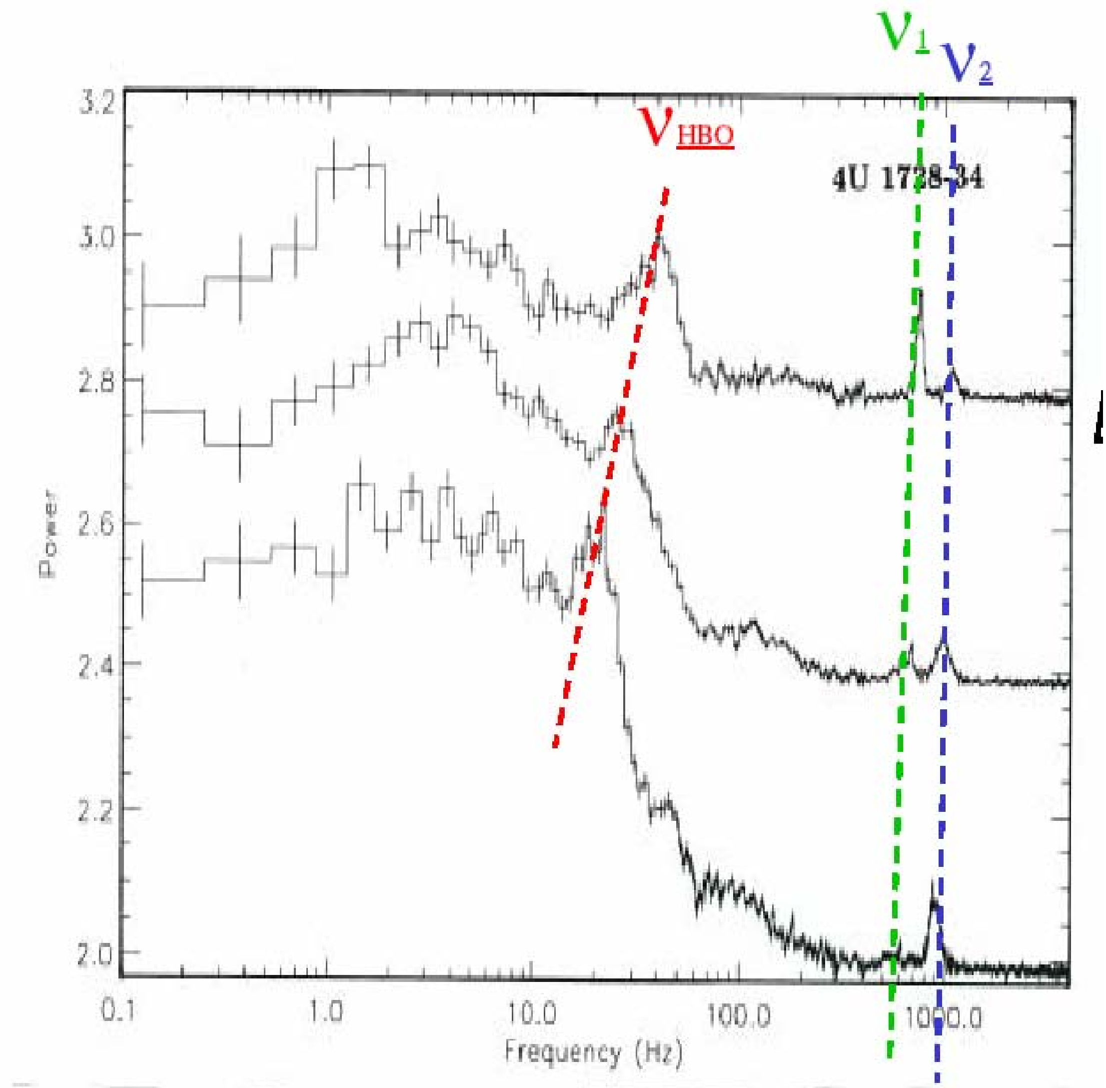
Τα κυριότερα μοντέλα διατυπώθηκαν και εξελίχθηκαν ως απάντηση στα καινούργια παρατηρησιακά δεδομένα. Το μοντέλο sonic point φτιάχτηκε για να συμβιβάσει τις παρατηρούμενες αποκλίσεις από το μοντέλο beat frequency. Το μοντέλο της σχετικιστικής μετάπτωσης αρχικά εξήγησε την χαμηλότερη KHz κορυφή των QPOs ως συχνότητα spin-τροχιάς και αργότερα την αψιδική τροχιά των σωματιδίων. Το photon bubble βασίζεται σε αριθμητική εξομοίωση η οποία με τον καιρό έτεινε προς τα παρατηρούμενα αποτελέσματα.

Το μοντέλο της σχετικιστικής μετάπτωσης κάνει τις καλύτερες προβλέψεις σχετικά με τα υπόλοιπα μοντέλα αλλά εξίσου έχει κι αυτό τις αδυναμίες του όπως δεν μπορεί να εξηγήσει το βαθμό αναλογίας ή αντιστοιχίας των KHz QPOs με τις συχνότητες των εκρηκτικών ταλαντώσεων. Το μοντέλο αυτό θα περιγράψουμε στη συνέχεια.

Το μοντέλο της Σχετικιστικής Μετάθεσης

Ελαφρές κεκλιμένες έκκεντρες τροχιές ελευθέρων σημειακών σωματιδίων γύρω από ένα περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων, δείχνουν κομβική μετάπτωση (κλυδωνισμός του επιπέδου της τροχιάς) εξαιτίας του σχετικιστικού φαινομένου του συρμού των αδρανειακών συστημάτων και του σχετικιστικού φαινομένου της μετάθεσης (ή μετάπτωσης) του περίαστρου (ανάλογο του περιηλίου όταν μιλάμε για αστέρες). Το μοντέλο αυτό ταυτίζει την συχνότητα v_2 με την τροχιακή συχνότητα του δίσκου, τις συχνότητες v_1 και v_{LF} των παρατηρούμενων χαμηλών συχνοτήτων με τις συχνότητες της μετάπτωσης του περίαστρου και της κομβικής μετάπτωσης (nodal precession) αντίστοιχα των τροχιών. Παρακάτω θα δώσουμε μέσα από εικόνες τις παραπάνω συχνότητες και πώς ταυτίζονται αυτές με τις κινήσεις των σωματιδίων.

Η εικόνα του φάσματος ισχύος που παίρνουμε από συστήματα μικρής μάζας εκπομπής ακτίνων X είναι αυτή της **Εικ. 7.10**. Πάνω στο διάγραμμα έχουν τοποθετηθεί και οι αντίστοιχες συχνότητες. Φαίνονται καθαρά οι συχνότητες v_1 και v_2

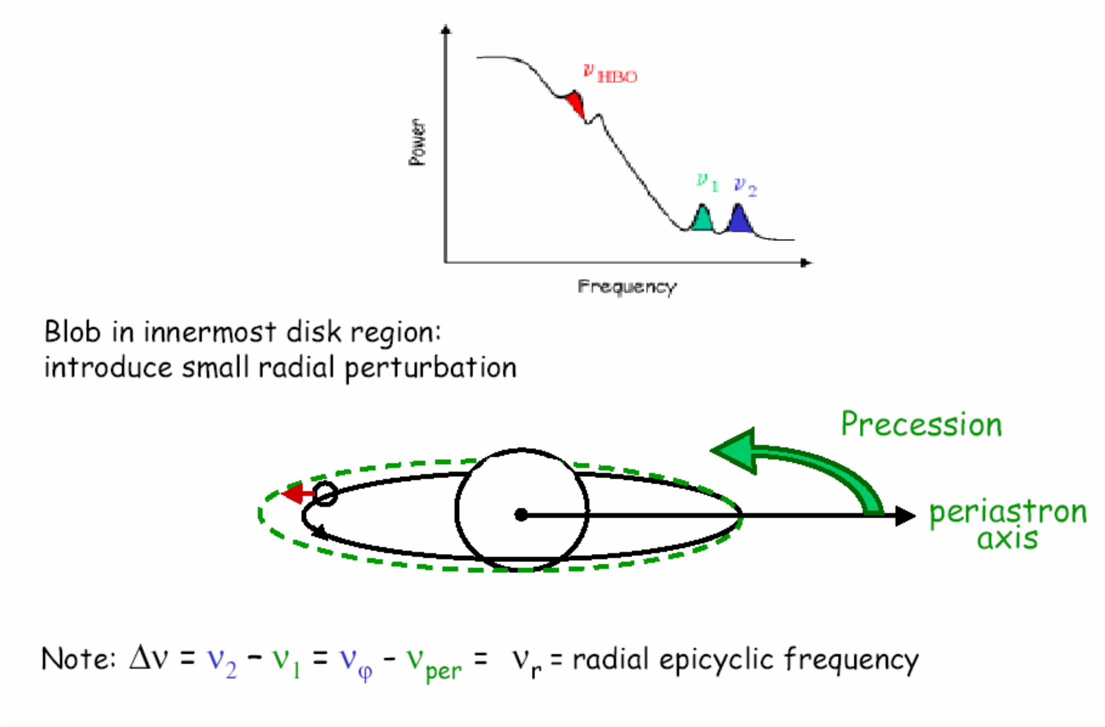


ΕΙΚΟΝΑ 7.10 : Φάσμα ισχύος των LMXB με τις αντίστοιχες συχνότητες.

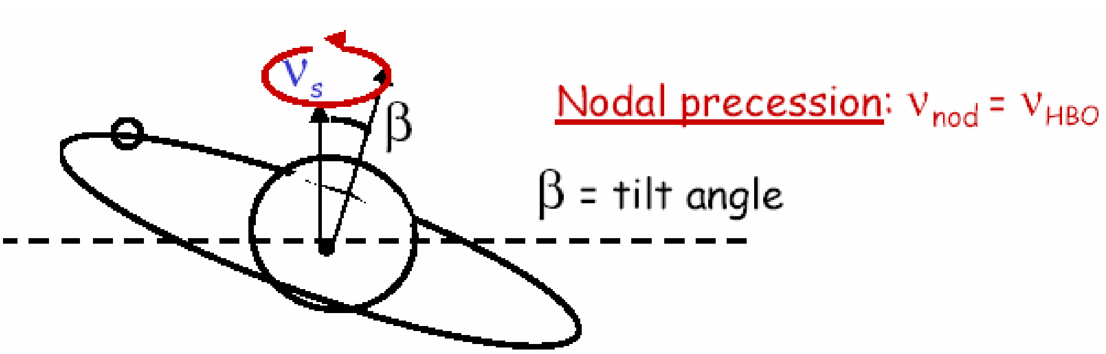
οι οποίες αντιστοιχούν στην χαμηλότερη και υψηλότερη αντίστοιχα συχνότητα των QPOs. Επίσης φαίνεται και η συχνότητα του οριζόντιου κλάδου ταλάντωσης (HBO), η οποία κυμαίνεται σε μικρές συχνότητες.

Στην **Εικ. 7.11** φαίνεται η κίνηση του σημειακού σωματιδίου γύρω από τον αστέρα νετρονίων καθώς υπόκειται στην μετάπτωση του περίαστρου λόγω του ισχυρού πεδίου βαρύτητας που σύρει μαζί του το χώρο, καθώς περιστρέφεται. Η διαφορά των δύο συχνοτήτων $v_2 - v_1$ αντιστοιχεί στην ακτινική επικυκλική συχνότητα, με την v_1 να οφείλεται στην μετάπτωση του περίαστρου και την v_2 να οφείλεται στην τροχιακή κίνηση.

Η **Εικ. 7.12** παρουσιάζει την λεγόμενη κομβική μετάπτωση. Παρατηρούμε ότι οι τροχιές ξεφεύγουν από το επίπεδο έχοντας μια κλίση β. Την συχνότητα λόγω της κομβικής μετάπτωσης την αντιστοιχούμε στην συχνότητα του οριζόντιου κλάδου $\nu_{nod} = \nu_{HBO}$.



ΕΙΚΟΝΑ 7.11 : Περιγραφή της κίνησης ενός σωματιδίου λόγω της μετάπτωσης του περιάστρου.



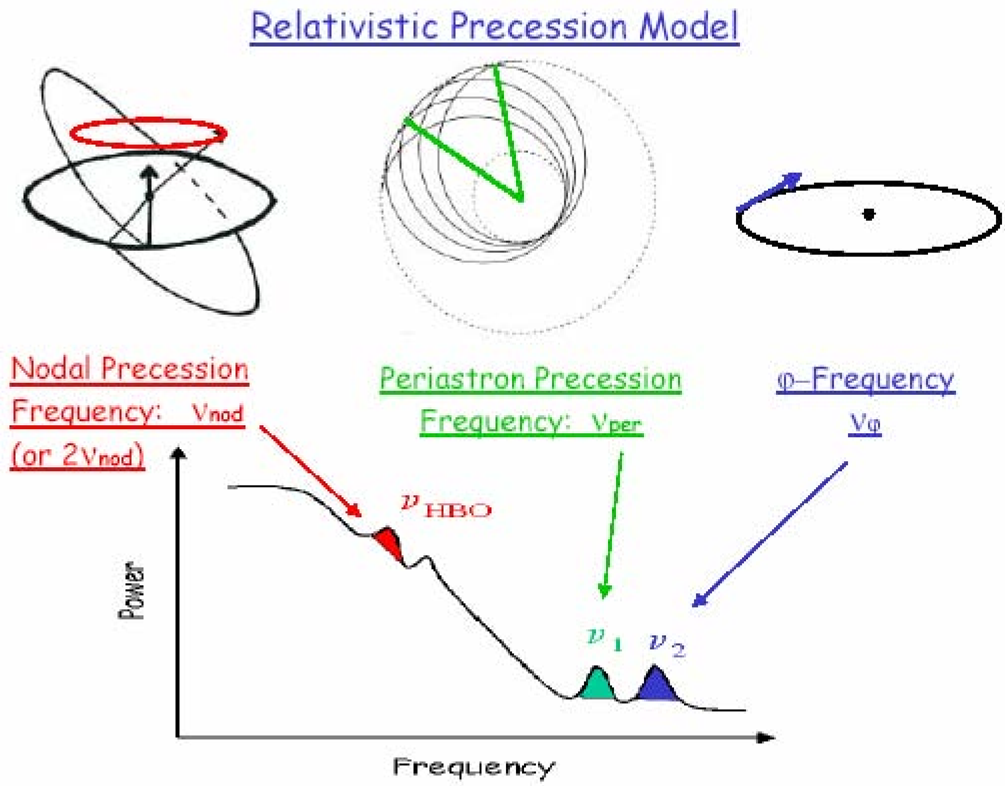
ΕΙΚΟΝΑ 7.12 : Περιγραφή της κίνησης λόγω της κομβικής μετάπτωσης και αντιστοιχία της συχνότητας αυτής με την συχνότητα του HBO. Η γωνία β δείχνει την κλίση του άξονα περιστροφής του αστέρα με τον άξονα περιστροφής του σωματιδίου. V_s είναι η συχνότητα περιστροφής του αστέρα.

Στη μικρότερη τάξη, η σχετικιστική κομβική μετάπτωση είναι $v_{\text{nod}} = 8\pi^2 \mathrm{I}\frac{v_2^{\,2} \cdot v_s}{c^2 M}$ και η σχετικιστική μετάπτωση του περίαστρου προκαλεί την κορυφή των KHz να διαφέρει κατά $\Delta v = v_2\left(1 - \frac{6GM}{rc^2}\right)^{1/2}$, όπου I είναι η ροπή αδράνειας του αστέρα και r η τροχιακή ακτίνα. Η αστρική πεπλάτυνση του αστέρα λόγω της περιστροφής του επηρεάζει τους δυο ρυθμούς μετάπτωσης που θα πρέπει να τους υπολογίσουμε. Για λογικές παραμέτρους στους αστέρες νετρονίων, υπάρχει μια προσεγγιστική σύμπτωση με τις παρατηρούμενες συχνότητες v_1, v_2 και v_{LF} εάν βέβαια η τελευταία είναι διπλάσια (ή σε μερικές περιπτώσεις ακόμα και τετραπλάσια) της συχνότητας v_{nod}, η οποία πρέπει καταρχήν να βγαίνει από μια στρεβλωμένη γεωμετρία του δίσκου. Σε αυτό το μοντέλο οι συχνότητες του spin του αστέρα νετρονίων δεν συνωστίζονται στην περιοχή 250-350 Hz και η Δv με την v_{burst} δεν ταυτίζονται όπως στο μοντέλο του beat frequency. Μια καθαρή πρόβλεψη είναι η Δv να μειώνεται με την αύξηση της v_2.

Από το μοντέλο αυτό καταλήγουμε σε μάζες από $1.8 - 2M_{\odot}$ για stiff εξισώσεις κατάστασης του αστέρα νετρονίων και συχνότητες spin 300-900 Hz. Επειδή το παραπάνω μοντέλο δουλεύει καλά και χωρίς αστέρα νετρονίων αλλά με δίσκο προσαύξησης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για μελανές οπές. Η ιδέα ότι οι τρεις κυριότερες συχνότητες που παρατηρούνται είναι στην ουσία οι τρεις σχετικιστικές συχνότητες που χαρακτηρίζουν ένα ελεύθερο περιφερόμενο σωματίδιο **(Εικ. 7.13)** δίνει στο μοντέλο αυτό μια υπεροχή σε σύγκριση με τα άλλα. Ωστόσο όμως παραμένουν ανοικτά μερικά ερωτήματα, όπως με ποιον τρόπο επιβιώνουν οι έκκεντρες και μεταπτωτικές τροχιές στο δίσκο προσαύξησης, πώς η ροή προσαρμόζεται με τις προβλεπόμενες συχνότητες και γιατί η βασική τροχιακή συχνότητα v_2 μεταβάλλεται με την φωτεινότητα του αστέρα.

Συμπεράσματα

Ο δορυφόρος RXTE άνοιξε ένα καινούργιο παράθυρο από το οποίο μπορούμε να κοιτάμε από τα δυναμικά των αστέρων νετρονίων μέχρι τους ορίζοντες των μελανών οπών. Τρία ms φαινόμενα ανακαλύφθηκαν των οποίων οι ερμηνείες στηρίζονται στην περιγραφή του ισχυρού βαρυτικού πεδίου και στη δομή των αστέρων νετρονίων. Για να κλείσουμε τα πολλά ερωτήματα τα οποία παραμένουν ανοικτά ακόμη και τώρα, θα πρέπει να φτιάξουμε μεγαλύτερα και ισχυρότερα όργανα, έτσι ώστε να μπορούμε να παρακολουθούμε και να καταγράφουμε τις τροχιές των θερμών κηλίδων γύρω από τα συμπαγή σώματα, δίνοντας μας την δυνατότητα να εκτιμήσουμε το πόσο συμπαγής είναι αυτά αλλά παράλληλα να πάρουμε και αρκετές πληροφορίες για τη μάζα τους ώστε να καταλάβουμε από ποιες καταστατικές εξισώσεις περιγράφεται η ύλη τους.



ΕΙΚΟΝΑ 7.13 : Οι τρεις κυριότερες συχνότητες του μοντέλου της σχετικιστικής μετάπτωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Συντονισμός 2:3 στην πηγή SCO – X1

ΓΕΝΙΚΑ

Πρόσφατες παρατηρήσεις στις ακτίνες Χ δείχνουν ότι σε μερικές Μελανές Οπές όπως και σε Αστέρες Νετρονίων, οι υψηλές συχνότητες των ημι-περιοδικών ταλαντώσεων (QPOs) εμφανίζονται σε ζεύγη. Οι συχνότητες των ζευγών αυτών σε τρεις πηγές, υποψήφιες Μ.Ο., παρατηρούνται στα 300 Hz και 450 Hz για την πηγή GRO J1655-40, στα 42 Hz και 70 Hz για την πηγή GRS 1915+105 και στα 184 Hz και 276 Hz για την πηγή XTE J1550-564. Φαίνεται λοιπόν ότι οι λόγοι αυτών των συχνοτήτων είναι 2:3 για τις πρώτες δυο πηγές και 3:5 για την τρίτη. Οι χαρακτηριστικές συχνότητες είναι αντιστρόφως ανάλογες της μάζας, έτσι αν αντιστοιχήσουμε την συχνότητα των 42 Hz σε μια μελανή οπή μάζας ~ $20M_\odot$,τότε η ~ 1 $M_\odot$, όση είναι περίπου και η μάζα ενός τυπικού αστέρα νετρονίων, αντιστοιχεί σε ~ 800 Hz, μια τυπική συχνότητα, της χαμηλότερης από τις δύο QPOs συχνότητες που ανιχνεύσαμε σε Αστέρες Νετρονίων. Από μόνο του αυτό μας δείχνει ότι τα QPOs φαινόμενα σε Μελανές Οπές και σε Αστέρες Νετρονίων έχουν μάλλον κοινή προέλευση. Πιστεύουμε σήμερα ότι οι λόγοι αυτών των συχνοτήτων έχουν να μας πουν πολλά ακόμα.

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε τα δημοσιευμένα στοιχεία μιας καλά μελετημένης πηγής της SCO X-1, υποψήφιας πηγής ενός λαμπρού Αστέρα Νετρονίων, για να διερευνήσουμε αν οι δυο QPOs συχνότητες είναι σε αναλογία 2:3 ή 3:5 όπως είναι στις Μελανές Οπές. Εάν μια τέτοια αναλογία τελικά καθιερωθεί μεταξύ Α.Ν. και Μ.Ο., τότε θα μπορέσουμε να ισχυριστούμε, σχεδόν βέβαιοι, ότι οι ΄΄δίδυμες συχνότητες΄΄ των QPOs, παράγονται από έναν μηχανισμό ο οποίος δρα ανεξαρτήτως της παρουσίας αστρικής επιφάνειας μαζί με το περιστρεφόμενο μαγνητικό πεδίο της, και θα οφείλεται κυρίως στο ισχυρό βαρυτικό πεδίο.

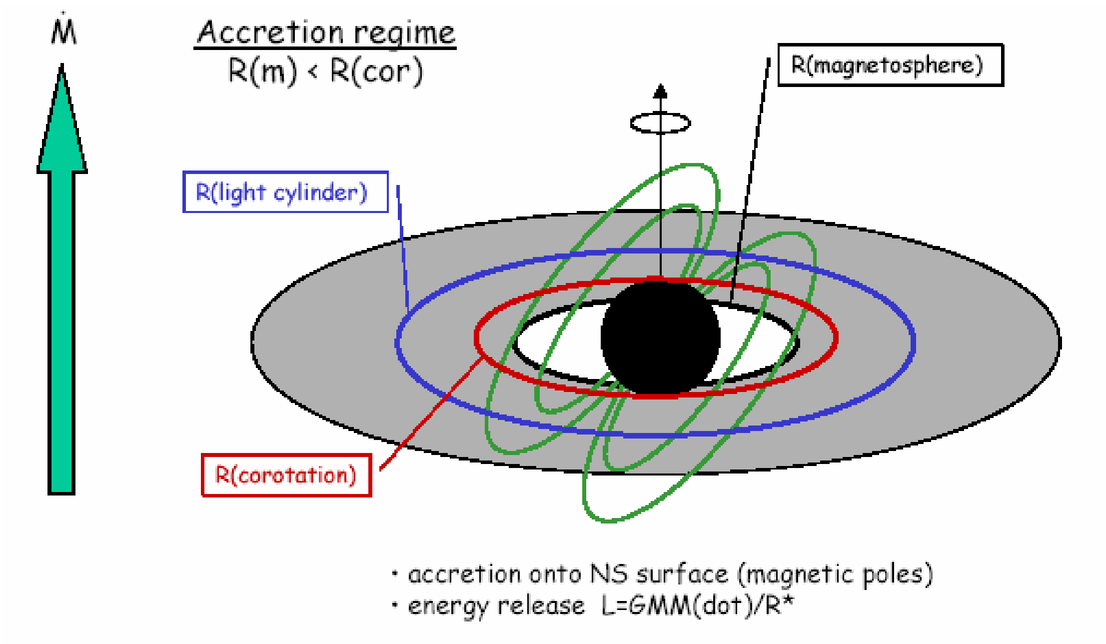
Η εσώτερη ακτίνα του δίσκου προσαύξησης σε LMXBs Αστέρων Νετρονίων

Μια ερώτηση στην οποία πρέπει να απαντήσουμε είναι αν η διαδικασία της προσαύξησης σε Αστέρες Νετρονίων, οι οποίοι είναι μέλη διπλών συστημάτων μικρής μάζας ακτίνων Χ (LMXBs), διαφέρει ριζικά από αυτήν των Μελανών Οπών, ή αν είναι ακριβώς η ίδια. Η ερώτηση αυτή βέβαια απαντάται μόνο από την μελέτη των συχνοτήτων αυτών των συστημάτων. Μια μερίδα επιστημόνων ισχυρίζονται ότι οι αστέρες Νετρονίων των LMXBs έχουν μαγνητικά πεδία και ρυθμούς περιστροφής συγκριτικά ίδιους με τους millisecond ράδιο πάλσαρς, από το οποίο έπεται ότι ο δίσκος προσαύξησης τερματίζεται μακριά από την επιφάνεια του αστέρα και άρα οι συχνότητες τις οποίες πρέπει να περιμένουμε είναι περίπου στα 200-300 Hz το πολύ.

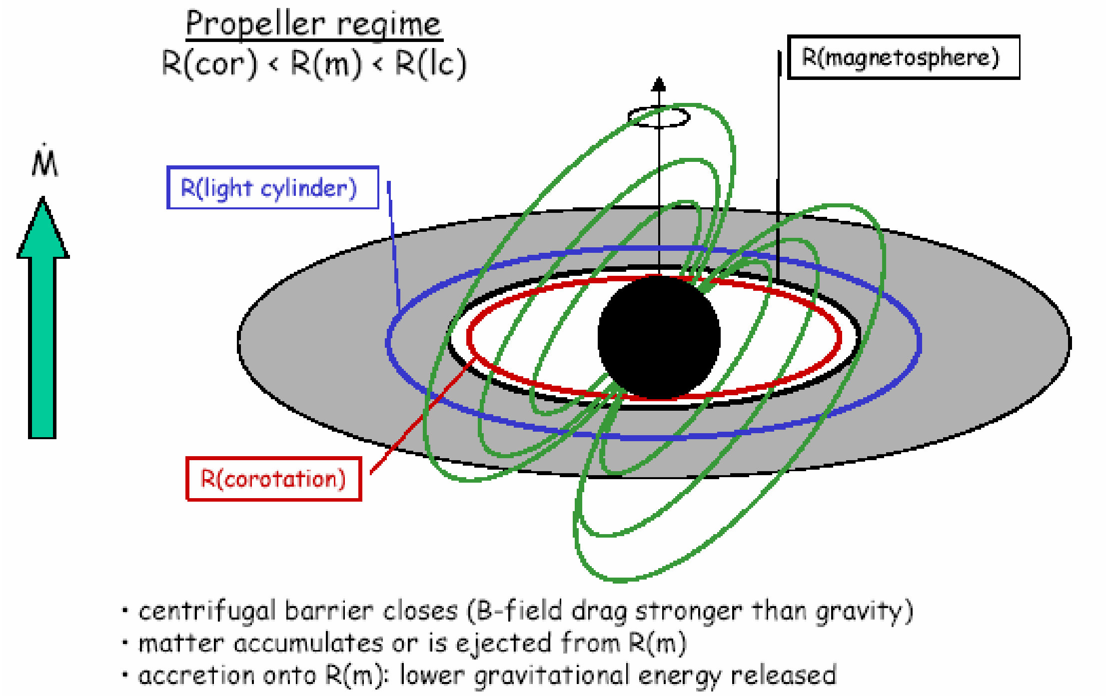
Μια άλλη πάλι μερίδα επιστημόνων πιστεύουν πως το μαγνητικό πεδίο είναι μικρό, υπάρχει ωστόσο, αλλά δεν μπορεί να παίξει δυναμικό ρόλο στην διαδικασία της προσαύξησης, έτσι ώστε ο λεπτός δίσκος να τερματίζεται κοντά στην επιφάνεια του αστέρα λόγω ισχυρών βαρυτικών φαινομένων κυρίως. Κατά την τελευταία άποψη, περιμένουμε τροχιακές συχνότητες τάξεως των KHz (Michelson, Wagoner & Kluzniack 1990). Φαίνεται πως η ανακάλυψη των KHz ημι-περιοδικών ταλαντώσεων σε συστήματα αστέρων Νετρονίων, προτιμά την δεύτερη άποψη.

Οι ιδιότητες των KHz QPOs σε πολλά συστήματα είναι παρόμοιες. Συγκεκριμένα οι υψηλές συχνότητες έχουν παρόμοιες τιμές στις εκρηκτικές πηγές ακτίνων X, καθώς και σε λαμπρότερες πηγές όπως η πηγή SCO X1. Το γεγονός αυτό έρχεται σε αντίθεση με κάθε είδους ειδικό μηχανισμό που οδηγεί σε τυχαίες ιδιότητες του συστήματος, όπως για παράδειγμα το μαγνητικό πεδίο ή ο ρυθμός προσαύξησης. Εάν κάτι τέτοιο ισχύει οι ταλαντώσεις θα αυξάνουν στο ρευστό του δίσκου και οι τροχιακές συχνότητες θα ορίζουν την κλίμακα των προβλεπόμενων συχνοτήτων. Στην ουσία η σχετική συχνότητα είναι η κάθετη επικυκλική συχνότητα, η οποία είναι ίδια με την συχνότητα περιστροφής στις τροχιές Kepler, όταν ισχύει η βαρύτητα του Νεύτωνα, ωστόσο στους δίσκους προσαύξησης γύρω από αστέρες Νετρονίων όπου η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας υπερισχύει της βαρύτητας του Νεύτωνα, η κάθετη επικυκλική συχνότητα είναι ελάχιστα μικρότερη από την τροχιακή. Παρατηρήσεις τότε συχνοτήτων τάξεως των KHz, δείχνουν να μην προτιμούν την γεωμετρία μιας προσαύξησης, κατά την οποία οι μέγιστες τροχιακές συχνότητες δεν ξεπερνούν τις μερικές εκατοντάδες Hz. Αυτό φαίνεται να κυριαρχεί σε διπολικά μαγνητικά πεδία ισχύος 10^8 Gauss και δείχνει μια προτίμηση στην άποψη ότι οι δίσκοι προσαύξησης σε αυτούς τους αστέρες Νετρονίων τελειώνουν κοντά στις οριακές σταθερές τροχιές της Γενικής Σχετικότητας. Στις παρακάτω εικόνες μπορούμε να πάρουμε μια ιδέα για το πώς κυμαίνονται οι ευσταθείς τροχιές καθώς και ο ρυθμός της προσαύξησης, τον οποίο συμβολίζουμε ως $\dot{M}$, σε σχέση με την ένταση του μαγνητικού πεδίου του αστέρα.

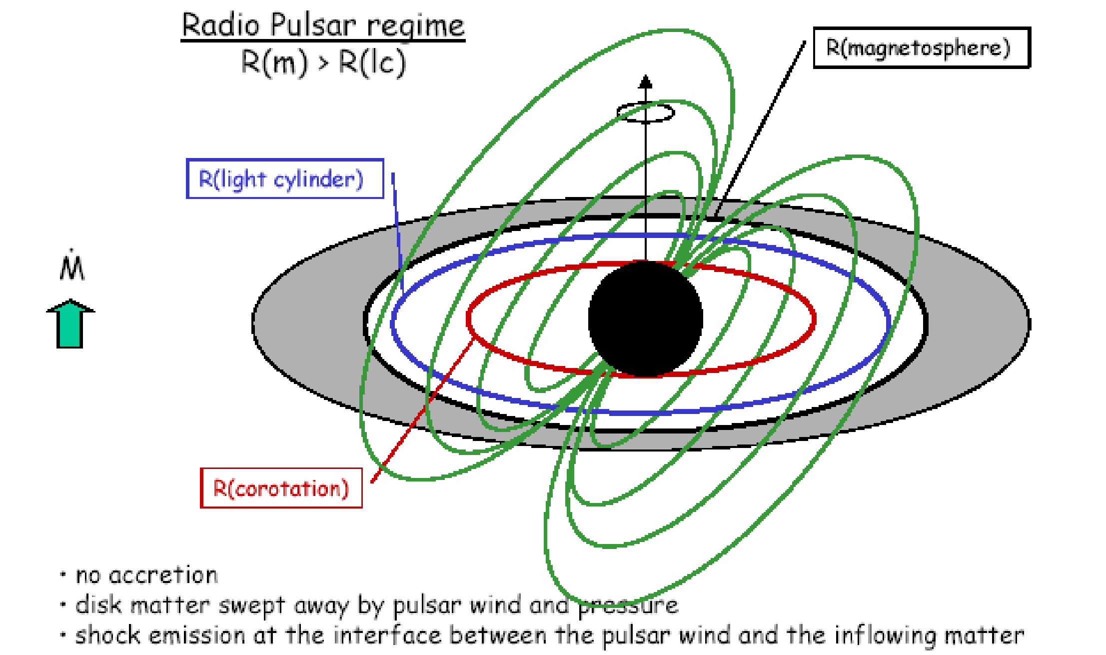
Στην πρώτη εικόνα βλέπουμε έναν αστέρα με μικρό μαγνητικό πεδίο (πράσινες γραμμές) του οποίου η ακτίνα της μαγνητόσφαιράς (μαύρη γραμμή) είναι μικρότερη από την εσώτερη ακτίνα των ευσταθών τροχιών (κόκκινη), σε αυτήν την περίπτωση η προσαύξηση είναι μεγάλη.



Στην δεύτερη εικόνα παρουσιάζεται το μοντέλο της προπέλας, στο οποίο το μαγνητικό πεδίο είναι ισχυρό πράγμα που κάνει την ακτίνα της μαγνητόσφαιρας να βρίσκεται μεταξύ των ευσταθών κυκλικών τροχιών και του κυλίνδρου φωτός. Σε αυτήν την περίπτωση η ύλη συσσωρεύεται ή εκτινάσσεται από την περιοχή της μαγνητόσφαιρας, συνεπώς όλη η προσαύξηση γίνεται πάνω σε αυτήν την ακτίνα και εκεί σταματάει. Ο ρυθμός της προσαύξησης της ύλης σε αυτή την περίπτωση γίνεται μικρότερος από την προηγούμενη.



Στην τρίτη εικόνα φαίνεται η περίπτωση του ραδιοπάλσαρ, στον οποίο το μαγνητικό πεδίο είναι αρκούντως ισχυρό ώστε να σταματήσει κάθε είδους προσαύξηση. Η ύλη δεν μπορεί να πλησιάσει τις ευσταθείς κυκλικές τροχιές καθότι η πίεση και ο άνεμος του πάλσαρ την απομακρύνει. Σε αυτήν την περίπτωση το ισχυρό βαρυτικό πεδίο είναι ανίκανο να οδηγήσει τα σωματίδια σε τροχιές. Η ακτίνα της



μαγνητόσφαιρας εκτείνεται πέρα της ακτίνας του κυλίνδρου φωτός.

Η συχνότητα της περιστροφής στα KHz QPOs

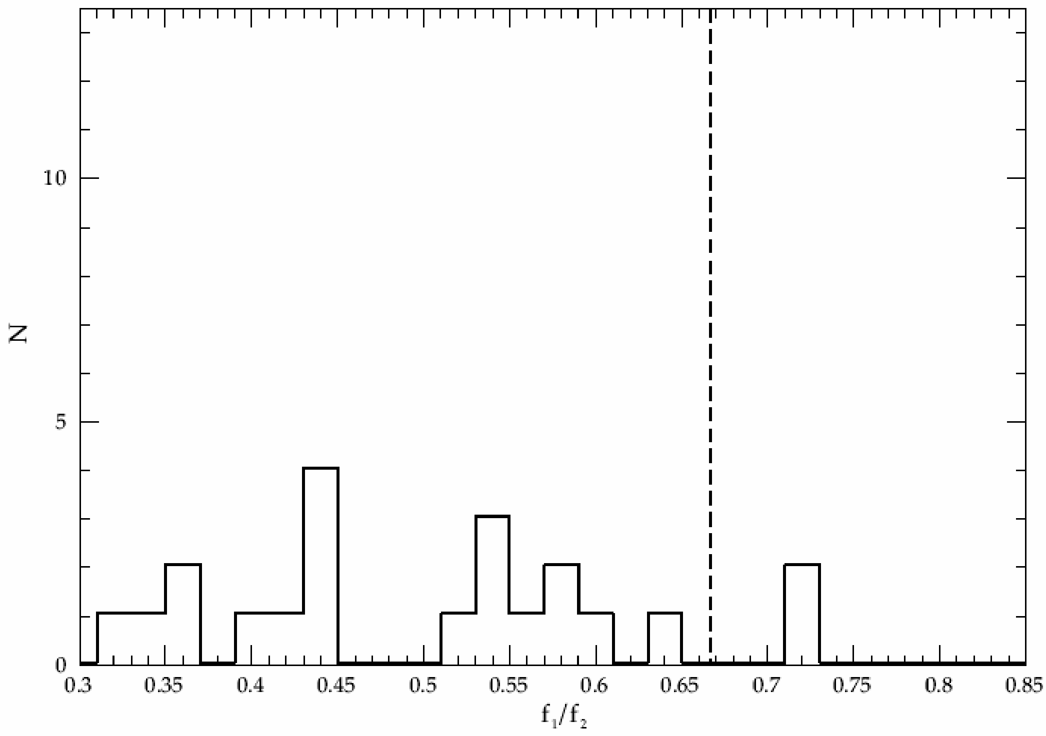
Το 1979 ο αστροφυσικός J. Patterson τόνισε ότι αν υπάρχει άμεση αλληλεπίδραση μεταξύ μιας δομής που περιστρέφεται μαζί με τον αστέρα και ενός δίσκου προσαύξησης, τότε σαν αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε ένα QPO στη συχνότητα διακροτήματος $\left|\frac{1}{P_*}-\frac{1}{P_k}\right|$, όπου P_* είναι η περίοδος της περιστροφής του αστέρα και P_k η περίοδος της τροχιακής κίνησης. Η ιδέα αυτή του Patterson προέκυψε από την μελέτη που έκανε πάνω στο Λευκό Νάνο AE Aqu όπου η περιστρεφόμενη δομή ήταν ένα ΄΄φωτεινό ίχνος φωτός΄΄ .

Μετά την ανακάλυψη των ~ 40 Hz QPOs σε μικρής μάζας διπλά συστήματα ακτίνων X, η ιδέα αυτή υιοθετήθηκε για έναν αστέρα Νετρονίων με συχνότητα περιστροφής ~ 160 Hz, του οποίου το σήμα προερχόταν κοντά από την ακτίνα Alfven, και μίας συχνότητας ~ 200 Hz λόγω τροχιακής κίνησης την οποία λαμβάνουμε, από το εσώτερο άκρο του δίσκου προσαύξησης (Alpan & Shaham 1985) , στο παραπάνω μοντέλο δόθηκε η ονομασία ΄΄beat frequency model΄΄. Αλλά μια μέγιστη συχνότητα από τροχιακή κίνηση στα ~ 200 Hz είναι ασυμβίβαστη με τις πιο πρόσφατες ανακαλύψεις των KHz ταλαντώσεων από τις ίδιες πηγές, έτσι το όνομα του μοντέλου άλλαξε σε ΄΄sonic –point model΄΄ με το ένα από τα δύο QPO να εξακολουθεί να αντιστοιχεί σε μια ολοένα αυξανόμενη συχνότητα διακροτήματος και η άλλη κορυφή στην τροχιακή συχνότητα. Έχει επίσης τονιστεί ότι η διαφορά μεταξύ των δύο παρατηρούμενων υψηλών συχνοτήτων σε αστέρες Νετρονίων που ανήκουν σε LMXBs, δεν είναι σταθερή, όπως θα περίμενε κανείς στο beat frequency model. Ανάλογα, άλλα μοντέλα προτάθηκαν στα οποία η αλληλεπίδραση μεταξύ του δίσκου προσαύξησης και της μαγνητόσφαιρας του αστέρα , η οποία παίζει το ρόλο της συ-περιστρεφόμενης δομής, οδήγησαν σε συχνότητες οι οποίες έρχονταν σε μεγαλύτερη συμφωνία με τις παρατηρούμενες (Osherovich & Titarchuk 1999).

Η ανίχνευση όμως της διπλής συχνότητας QPOs και σε συστήματα υποψήφια για Μελανή Οπή, επισκίασε την άποψη ότι υπάρχει άμεση σχέση μεταξύ του αστρικού spin και της παρουσίας των δυο κορυφών στις συχνότητες των QPOs, αφού οι Μελανές Οπές δεν έχουν επιφάνεια και η συχνότητα του spin τους δεν μπορεί να παρατηρηθεί άμεσα.

Οι υψηλές συχνότητες των QPOs στην πηγή SCO X1 έχουν συζητηθεί λεπτομερώς από των Van der Klis (1997). Η συχνότητα f_2 της μιας εκ των δυο κορυφών βρίσκεται στην περιοχή από 850 – 1100 Hz, ενώ η άλλη κορυφή με συχνότητα f_1 κυμαίνεται μεταξύ 300 – 200 Hz . Υπολογίζοντας το λόγο f_1/f_2 για κάθε παρατήρηση του SCO X1, το βρίσκουμε να κυμαίνεται σε μια στενότερη περιοχή από κάθε άλλη πηγή Αστέρα Νετρονίων.

Για την τιμή του λόγου f_1/f_2 μεταξύ των τιμών $0,64 < f_1/f_2 < 0,8$, παρουσιάζουμε το παρακάτω ιστόγραμμα της κατανομής του λόγου των συχνοτήτων των QPO, συνδυάζοντας το λόγο σε κατάλληλα ολοκληρώματα **(Εικ. 8.1** και **8.2)**. Όπως φαίνεται η κατανομή δεν είναι ομοιόμορφη, δείχνει να συγκεντρώνεται κοντά στην τιμή 2:3. Να τονίσουμε ότι το αποτέλεσμα αυτό δεν επηρεάζεται από το εύρος της δέσμης.

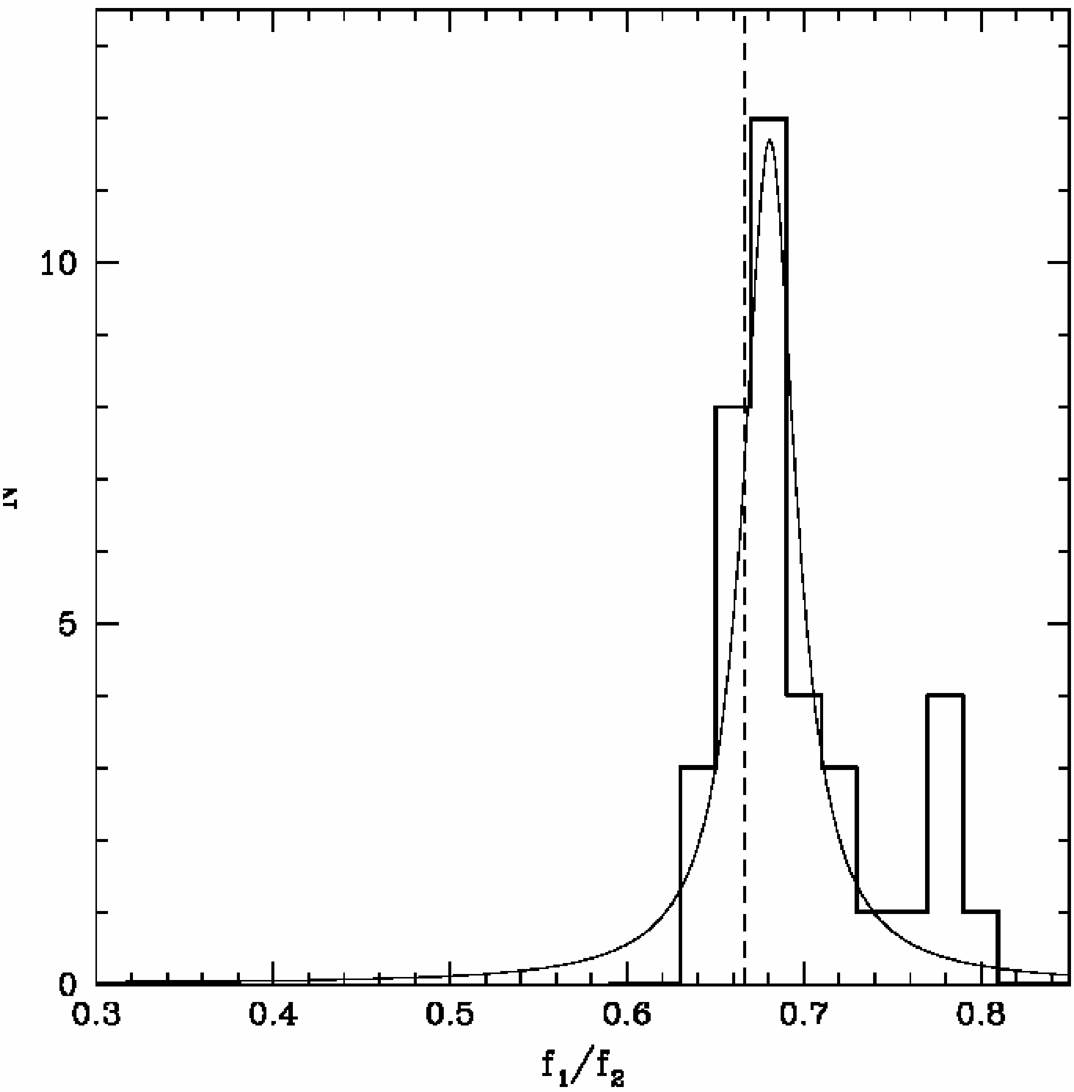


ΕΙΚΟΝΑ 8.1 : Η παρατηρούμενη κατανομή του λόγου των συχνοτήτων των δυο KHz QPOs της πηγής GX 5-1.Παρατηρούμε ότι η κατανομή είναι περίπου επίπεδη. Τα στοιχεία αυτά προέρχονται από τον Jonker et al.2002b

Οι εικόνες δείχνουν ότι εκτός από την πηγή GX 5-1, οι περισσότερες πηγές αστέρων Νετρονίων δεν έχουν επίπεδη κατανομή των λόγων συχνοτήτων των KHz QPOs . Για την κατανομή αυτή των συχνοτήτων υπεύθυνος είναι ο συντονισμός τουλάχιστον για την SCO X1. Η τιμή 2:3, παρόμοια με το λόγο που είδαμε σε υποψήφιες Μελανές Οπές, όπως GRO J1655-40 και XTE J1550-564, οι μάζες των οποίων μετρήθηκαν και βρέθηκαν $\sim 6M_{\odot}$ και $\sim 8M_{\odot}$ αντίστοιχα, αποτελεί μια ισχυρή ένδειξη ότι οι υψηλές συχνότητες των QPOs σχετίζονται με το ισχυρό πεδίο βαρύτητας και όχι με την παρουσία αστρικής επιφάνειας και περιστρεφόμενης δομής.

Το επιχείρημα που υποστηρίζουν οι επιστήμονες για το ρόλο που παίζει το ισχυρό βαρυτικό πεδίο στη δημιουργία των συχνοτήτων QPOs, βασίζεται στην ομοιότητα μεταξύ αστέρων Νετρονίων και Μελανών Οπών, γι’αυτό χρειάζεται να υποθέσουμε ότι τα μικρό-κβάζαρ GRO J1655-40 και XTE J1530-564 είναι Μελανές Οπές με δίσκο προσαύξησης.

Για να κάνουμε το εγχείρημα αυτό ισχυρό, χρειαζόμαστε μια θεωρία για την πηγή των υψηλών συχνοτήτων των QPOs, μια θεωρία ικανή να ικανοποιεί τόσο τις ακριβείς αναλογίες των συχνοτήτων στις Μελανές Οπές όσο και την εκτεταμένη κατανομή που παρατηρείται στην SCO X1 αλλά και σε μερικές άλλες πηγές αστέρων Νετρονίων. Επισημάνουμε ότι όλα αυτά μοιάζουν να συμβαδίζουν με την θεωρία του επικυκλικού παραμετρικού συντονισμού σε σχετικιστικούς δίσκους προσαύξησης, τον οποίο έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, παρακάτω θα αναφερθούμε στον ίδιο παίρνοντας όμως υπόψη και άλλους παράγοντες. Σε αυτή την θεωρία η



ΕΙΚΟΝΑ 8.2 :Η παρατηρούμενη κατανομή του λόγου των συχνοτήτων των δυο KHz QPOs της πηγής SCO X1. Η διακεκομμένη γραμμή δείχνει το λόγο 2:3. Παρατηρούμε ότι η κορυφή αποκλίνει ελάχιστα από την παραπάνω τιμή. Τα στοιχεία αυτά προέρχονται από τον Van der Klis et al. 1997.

υψηλότερη συχνότητα QPO συμβαίνει στην συχνότητα της κάθετης ταλάντωσης ω_θ, και σε μια τέτοια τροχιά ώστε η ακτινική επικυκλική συχνότητα να είναι $\omega_r = 2/3\,\omega_\theta$. Για την μετρική του Schwarzschild αυτό συμβαίνει σε απόσταση $r_{2:3} = 5,4\, r_g = 16,2\; Km/M_\odot$ την οποία αν συγκρίνουμε με την παρατηρούμενη συχνότητα των 900 Hz στην SCO X1 δείχνει ότι $M = 1 M_\odot$.

Μη Γραμμικός Συντονισμός σε γεωδαισιακή κίνηση κοντά σε Διπλά Συστήματα Ακτίνων Χ.

Όπως έχουμε αναφέρει ημι-περιοδικές ταλαντώσεις συχνότητας των KHz ή διαφορετικά KHz QPOs, έχουν ανιχνευτεί σε διπλά συστήματα ακτίνων Χ μικρής μάζας ή (LMXBs) σε περισσότερους από 20 αστέρες Νετρονίων και αρκετές Μελανές Οπές. Έχει προταθεί ότι ένας μη-γραμμικός συντονισμός μέσα στο δίσκο προσαύξησης που ο χωρόχρονος διακατέχεται από μια σχετικιστική μετρική, παίζει σημαντικό ρόλο στη διέγερση και εξαγωγή των δυο αυτών συχνοτήτων που εμφανίζονται στις δίδυμες κορυφές.

Έγινε γνωστό πλέον για δυο πηγές ακτίνων Χ, πιθανότατα Μελανές Οπές, ότι ο λόγος συχνοτήτων των δυο κορυφών είναι 2:3 ενώ για μια τρίτη ο λόγος είναι 3:5. Μέχρι τώρα πιστεύαμε ότι οι συχνότητες σ’αυτές τις Μελανές Οπές είναι σταθερές και μέχρι την ανακάλυψη αυτών των λόγων συχνοτήτων, πιστεύαμε ότι αντιστοιχούσαν σε ένα g-mode ή c-mode σε δίσκο ταλάντωσης στην μετρική του Kerr.

Ο λόγος 2:3 εμφανίζεται τόσο σε αστέρες Νετρονίων όσο και σε Μελανές Οπές. Οι Kluzniak & Abramowicz ισχυρίζονται ότι ο λόγος αυτός οφείλεται στις ιδιότητες του παραμετρικού συντονισμού μεταξύ δυο ιδιοσυχνοτήτων, των οποίων η μια είναι πάντα μικρότερη από την άλλη. Συγκεκριμένα δυο τρόποι (modes) ταλάντωσης του δίσκου πιθανότητα να συμβαίνουν, κοντά στις δυο επικυκλικές συχνότητες της ελεύθερης τροχιακής κίνησης. Στα πλαίσια της Γενικής Σχετικότητας, η ακτινική επικυκλική συχνότητα είναι γενικά μικρότερη από την κάθετη επικυκλική, με το λόγο τους να κυμαίνεται από 1 έως 0, καθώς η ακτίνα των σταθερών τροχιών ελαττώνεται από το άπειρο σε αυτήν των οριακά σταθερών τροχιών.

Οι παρατηρούμενοι αυτοί λόγοι συχνοτήτων προέρχονται από τις θεμελιώδεις ιδιότητες τόσο του ισχυρού πεδίου βαρύτητας όσο και από το μη-γραμμικό συντονισμό μεταξύ της ακτινικής και μιας κάθετης σε αυτήν ταλάντωσης στο δίσκο προσαύξησης, όπου το ρευστό θεωρείται ότι εκτελεί περίπου γεωδαισιακή, περίπου κυκλική και περίπου επίπεδη κίνηση. Σ’αυτήν την ενότητα ερευνούμε ένα μαθηματικό μοντέλο με τις παραπάνω απλουστεύσεις. Για το σκοπό αυτό, συζητούμε τις ιδιότητες του παραμετρικού συντονισμού στο μοντέλο Paczynski-Wiita της μετρικής του Schwarzchild.

Ας θεωρήσουμε ένα ρευστό του οποίου η κίνηση διαφέρει ελάχιστα από την κυκλική και από την επίπεδη. Σε σφαιρικές συντεταγμένες εφαρμόζουμε τα παραπάνω ως

$$r(t) = r_o + \delta r(t), \quad \theta(t) = \frac{1}{2}\pi + \delta\theta(t), \quad \phi(t) = \Omega t \tag{8.1}$$

Με ακρίβεια τρίτης τάξης για τα $\delta r \ll r_o$ και $\delta\theta \ll \pi/2$ οι εξισώσεις κίνησης του ρευστού ακολουθούν τις

$$\ddot{\delta\theta} + \omega_\theta^{\,2}\left[1 + \frac{\left(\omega_\theta^{\,2}\right)'}{\omega_\theta^{\,2}}\delta r + \frac{1}{2}\frac{\left(\omega_\theta^{\,2}\right)''}{\omega_\theta^{\,2}}\delta r^2\right]\delta\theta + \frac{2}{r}\left(1 - \frac{\delta r}{r}\right)\dot{\delta\theta}\,\dot{\delta r} + \frac{1}{6r^2}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial\theta^4}\right)\delta\theta^3 = f_\theta \tag{8.2}$$

$$\ddot{\delta r} + \omega_r^{\,2}\delta r + \frac{1}{2}\left(\omega_r^{\,2}\right)'\delta r^2 + \frac{1}{6}\left(\omega_r^{\,2}\right)''\delta r^3 - r\left(\dot{\delta\theta}\right)^2 + \delta r\left(\dot{\delta\theta}\right)^2 = f_r \tag{8.3}$$

$$\dot{l} = r^2 \sin^2\theta \; f_\phi \tag{8.4}$$

Τις παραπάνω εξισώσεις απλώς αναφέρουμε πως βγαίνουν και δεν τις αποδεικνύουμε καθώς ξεφεύγουν από τα πλαίσια αυτής της ενότητας. Στις εξισώσεις αυτές η παράγωγος ως προς το χρόνο συμβολίζεται με τελεία, η ακτινική παράγωγος με τόνο και τα f_i είναι τα στοιχεία μιας μικρής δύναμης μη – βαρυτικής πηγής (πίεσης, πυκνότητας ρευστού, μαγνητικού πεδίου, κ.α.). Οι επικυκλικές ιδιοσυχνότητες ω_θ και ω_r ορίζονται με όρους του υποθετικού δυναμικού

$$u = \Phi\left(r,\theta\right) + \frac{l^2}{2r^2\sin^2\theta} \tag{8.5}$$

και συγκεκριμένης στροφορμής

$$l = \dot{\phi} r^2 \sin^2\theta \tag{8.6}$$

ως

$$\omega_\theta^{\,2} = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right)_l \quad \text{και} \quad \omega_r^{\,2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_l \tag{8.7}$$

Παραγώγιση των παραπάνω εξισώσεων υποθέτει την επίπεδη συμμετρία για το βαρυτικό δυναμικό Φ. Εδώ υποθέτουμε ένα δυναμικό σφαιρικής συμμετρίας

$$\Phi\left(r\right) = -\frac{GM}{r - r_G} \quad \text{οπου} \quad \mathrm{r_G} = \frac{2GM}{c^2} \tag{8.8}$$

Από τις εξισώσεις (8.7) και (8.8) έχω :

$$\omega_r^{\,2} = \frac{GM}{\left(r - r_G\right)^3}\left(1 - \frac{r_{ms}}{r}\right) < \omega_\theta^{\,2} = \frac{GM}{r\left(r - r_G\right)^2} \tag{8.9}$$

όπου $r_{ms} = 3r_G$ οι οριακές σταθερές τροχιές.

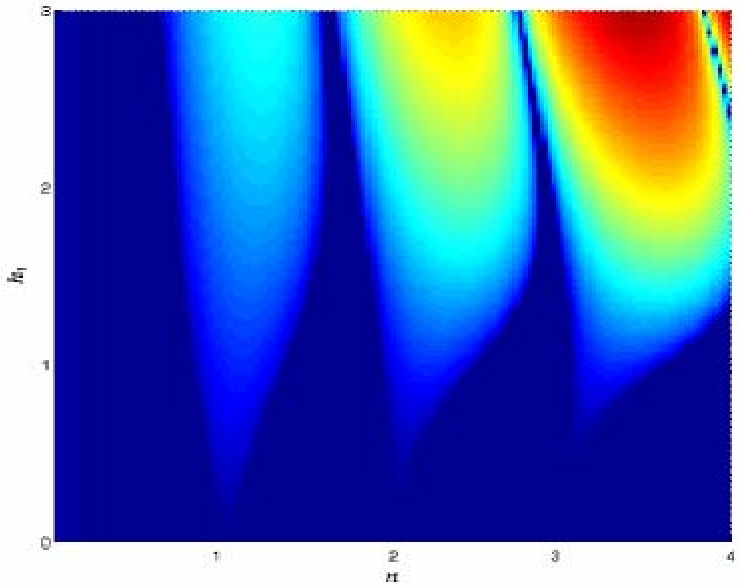
Συντονισμός 2:3 λόγω Ισχυρού Βαρυτικού Πεδίου

Αστάθεια σε παραμετρικό συντονισμό συμβαίνει κοντά στην $\omega_r = 2\omega_\theta / n$ οπου n=1,2,3...και για έναν ταλαντωτή που υπακούει στην εξίσωση κίνησής του Mathieu (Landau & Lifshitz 1976).

$$\ddot{\delta\theta} + \omega_\theta^{\,2}\left[1 + h_1\cos\left(\omega_r t\right)\right]\delta\theta + \lambda\dot{\delta\theta} = 0 \tag{8.10}$$

Ας θεωρήσουμε μια απλούστερη εκδοχή των εξισώσεων (8.2),(8.3) και (8.4) όπου τα $f_i = 0$ και μερικοί ανώτερη τάξεως όροι παραλείπονται. Με ακρίβεια γραμμικών μόνο όρων, δεχόμαστε ως λύση της (8.3) την $\delta r(t) \propto \cos(\omega_r t)$.

Αντικαθιστώντας την παραπάνω λύση στην (8.2) παίρνουμε την (8.10). Οι εξισώσεις αυτές λύνονται για $n\omega_r = 2\omega_\theta$,με το n ως θετική παράμετρο. Οι περιοχές αστάθειας για τις χαμηλότερης τάξης όρους των (8.2) και (8.3) μοιάζουν με τις περιοχές αστάθειας της εξίσωσης του Mathieu. Αφού στην Γενική Σχετικότητα η ακτινική επικυκλική συχνότητα είναι μικρότερη της κάθετης, η χαμηλότερη τιμή στην οποία έχουμε συντονισμό είναι για $n = 3$ και οι πρώτες δύο ΄΄γλώσσες΄΄(όπως τουλάχιστον φαίνονται να μοιάζουν στην **Εικ .8.3**) θα απουσιάζουν, έτσι ο λόγος των δυο ιδιοσυχνοτήτων θα είναι 2:3 και αντιστοιχεί στον ισχυρότερο συντονισμό.



ΕΙΚΟΝΑ 8.3 : Περιοχές αστάθειας της εξίσωσης του Mathieu. Ο κατακόρυφος άξονας δείχνει το πλάτος των ιδιοσυχνοτήτων h_1, ενώ ο οριζόντιος την τιμή του λόγου $n = 2\omega_\theta / \omega_r$ με λ = 0. Οι διαφορετικά σκιασμένες περιοχές υποδηλώνουν διαφορετικές τιμές της αύξησης του $\delta\theta(t)$.Τρεις περιοχές αστάθειας γίνονται φανερές για τις τιμές $n = 1, 2$ και 3. Οι εξισώσεις 8.2 και 8.3 έχουν παρόμοιες περιοχές αστάθειας. Παρατηρήστε ότι το πεδίο των συχνοτήτων στο οποίο η αστάθεια εξελίσσεται αυξάνει με το h_1.

Ωστόσο η συμπεριφορά του συντονισμού μπορεί να μελετηθεί διεξοδικά μόνο αν κρατήσουμε τους 3ης τάξεως όρους της εξίσωσης (8.2) και τους δεύτερης τάξεως όρους της (8.3). Οι όροι αυτοί παρέχουν την αναγκαία μη-γραμμικότητα για τον κορεσμό του πλάτους σε μια ορισμένη τιμή. Χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη αναλυτική μέθοδο για προσεγγίσεις (Landau & Lifshitz 1976), αποδεικνύουμε, όπως άλλωστε περιμέναμε, ότι δεν συμβαίνει παραμετρικός συντονισμός για αυστηρή γεωδαισιακή κίνηση, π.χ. για $f_i = 0$, στις εξισώσεις (8.2)-(8.4). Επίσης και αριθμητικά δεν υπάρχει συντονισμός στην περίπτωση της γεωδαισιακής κίνησης. Ωστόσο, συντονισμός συμβαίνει για μια ελάχιστα μη-γεωδαισιακή κίνηση, όταν οι ανώτεροι τάξεως όροι επηρεάζονται από φαινόμενα μη-γεωδαισιακά .

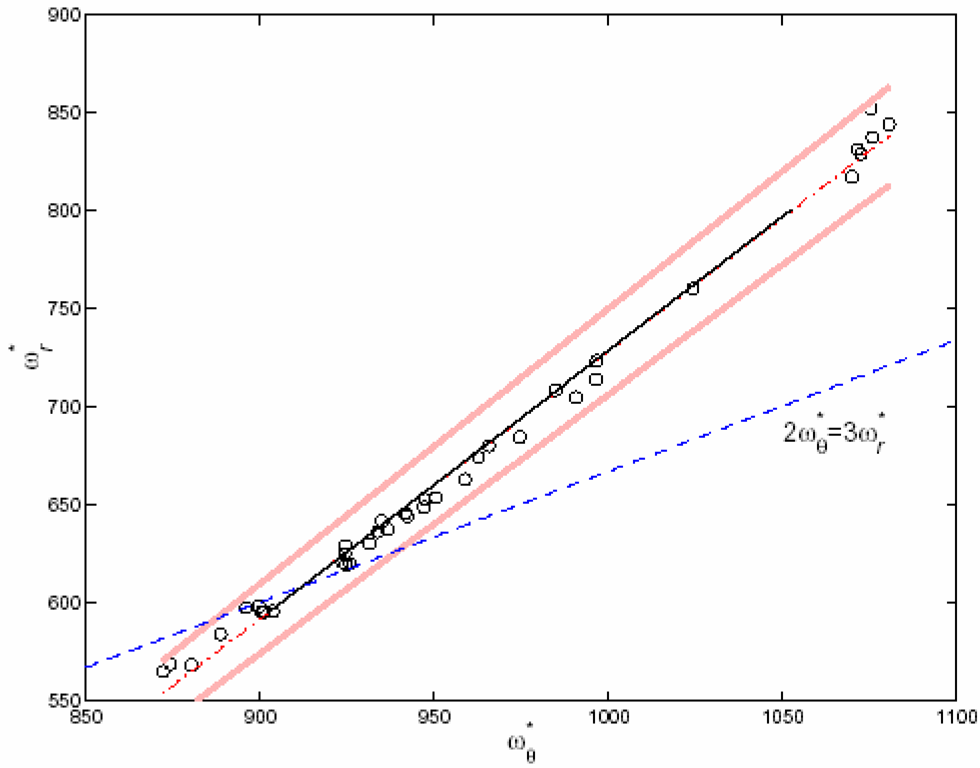
Οι Συχνότητες του SCO X1

Όπως αναφέραμε και στην αρχή, ο λόγος των συχνοτήτων των QPOs σε μερικές Μελανές Οπές είναι ακριβώς 2:3. Συγκεκριμένα στην πηγή GRO J1655-40 ο λόγος των συχνοτήτων είναι στα 300 Hz και 450Hz, καθώς και στην πηγή XTE J1550-564 είναι 184 και 276 Hz. Οι ιδιότητες του παραμετρικού συντονισμού, που συζητήθηκαν παραπάνω, παρέχουν μια φυσική εξήγηση για το λόγο 2:3.

Μπορεί ο ίδιος μηχανισμός να ευθύνεται και για τις παρατηρούμενες συχνότητες των KHz QPOs στους αστέρες Νετρονίων; Στις πηγές των αστέρων Νετρονίων οι δυο συχνότητες συσχετίζονται αλλά ωστόσο δεν είναι ανάλογες η μια με την άλλη. Ωστόσο, η κατανομή των σημείων γύρω από την γραμμή συσχετισμού δεν είναι ομοιόμορφη και η κατανομή των λόγων των συχνοτήτων έχει μια κορυφή στην τιμή 2:3, η οποία μας υποδεικνύει ισχυρά την παρουσία μη-γραμμικού συντονισμού.

Τονίζουμε ότι ταλαντώσεις των QPOs είναι μη συνεκτικές. Βρήκαμε ότι η κλίση της γραμμής συσχετισμού για το SCO X1 μπορεί να παραχθεί εάν υποθέσουμε ότι το σήμα που παρατηρούμε σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή αντιστοιχεί στις συχνότητες οι οποίες πηγάζουν από μια συγκεκριμένη ακτίνα. Εάν αυτή η ακτίνα δεν βρίσκεται ακριβώς στην ακτίνα εκείνη που έχουμε μέγιστο πλάτος συντονισμού, οι λόγοι των συχνοτήτων ξεφεύγει από την τιμή 2:3. Παίρνοντας ένα τυχαίο αρχικό πλάτος $\delta\theta_o$ φτιάχνουμε ένα Fourier φάσμα ισχύος $\delta\theta$ και δr. Οι κορυφές του παραπάνω φάσματος εμφανίζονται σε συχνότητες ω_θ^* και ω_r^*, τις οποίες ερμηνεύουμε ως τα παρατηρούμενα ζεύγη ταλαντώσεων.

Η **Εικ. 8.4** δείχνει την συσχέτιση μεταξύ ω_θ^* και ω_r^* κατά μήκος της α-γραμμής. Υποθέτουμε κ = 1 όπως πριν. Η αληθής τιμή του $\delta\theta_o$ έχει επιλεγεί έτσι ώστε να ταιριάζει στην κλίση του SCO X1. Η κύρια γραμμή της εικόνας δείχνει τα αποτελέσματα του παραπάνω υπολογισμού, ενώ για να έχουμε και μια σύγκριση με τις παρατηρήσεις έχουμε φέρει στην κατάλληλη κλίμακα όλες τις μετρούμενες συχνότητες. Οι συχνότητες τότε δείχνουν να εξαρτώνται μόνο από την δύναμη της διαταραχής a, η οποία εμφανίζεται στο σχήμα να παίρνει τιμές από $a = 1.0$ για $\omega_\theta^* = 900$ Hz σε $a = 0{,}98$ κοντα στα 1050 Hz. Παρατηρήστε την συμφωνία μεταξύ της κλίσης της κύριας γραμμής και των παρατηρήσεων των KHz QPOs για την πηγή SCO X1, οι οποίες φαίνονται με κύκλους. Οι ροζ γραμμές είναι οι ευθείες που περιλαμβάνουν όλες τις παρατηρήσεις. Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή με τελείες είναι η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ η διακεκομμένη μπλέ αποτελεί μια γραμμή αναφοράς σχετικά με την κλίση 2:3 για σύγκριση.



ΕΙΚΟΝΑ 8.4 : Ζεύγη ταλαντώσεων των συχνοτήτων σε σημεία κατά μήκος της γραμμής $n = 3$. Παρατηρήστε την συμφωνία μεταξύ της κλίσης της κύριας γραμμής και των παρατηρήσεων των KHz QPOs για την SCO X1, οι οποίες φαίνονται με κύκλους. Η διακεκομμένη κόκκινη γραμμή με τελείες που ακολουθεί την κύρια είναι η ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων, ενώ η διακεκομμένη μπλέ αποτελεί μια γραμμή αναφοράς σχετικά με την κλίση 2:3 για σύγκριση (van der Klis etal.1997)

Συμπεράσματα

Το ανάπτυγμα, μέχρι τρίτης τάξεως, των σχετικιστικών εξισώσεων της κίνησης αντιστοιχεί στην εξίσωση του Mathieu. Όταν εφαρμόστεί μια μη γεωδαισιακή διαταραχή, οι αποκλίσεις αρχίζουν αργά να εμφανίζονται σε συγκεκριμένες ακτίνες και η κίνηση αποκλίνει από την κυκλικά γεωδαισιακή. Αυτό συμβαίνει λόγω του παραμετρικού συντονισμού μεταξύ της κάθετης και ακτινικής επικυκλικής κίνησης και ο ισχυρός συντονισμός συμβαίνει όταν οι δυο συχνότητες φτάσουν το λόγο 2:3.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α

Το παράρτημα αυτό αναφέρεται στο 3ο κεφάλαιο στο οποίο γίνεται ο υπολογισμός του ρυθμού περιστροφής των αδρανειακών συστημάτων. Παρακάτω γίνονται κάποιοι χρήσιμοι υπολογισμοί βασικών όρων που βοηθούν στην καλύτερη κατανόηση των σχέσεων του 3ου κεφαλαίου.

Η μετρική την οποία χρησιμοποιούμε είναι της μορφής

$$ds^2 = -e^{\nu}dt^2 + e^{\lambda}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta \, d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2\theta \, d\phi dt \tag{A.1}$$

η οποία υπό μορφή πίνακα γράφεται

$$g = \begin{vmatrix} -e^{\nu} & 0 & 0 & -\omega r^2 \sin^2\theta \\ 0 & e^{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ -\omega r^2 \sin^2\theta & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{vmatrix} \tag{A.2}$$

η ορίζουσα λοιπόν της μετρικής βγαίνει ύστερα από απλές αλγεβρικές πράξεις να είναι

$$(-g)^{1/2} = e^{(\nu+\lambda)/2} r^2 \sin^2\theta \tag{A.3}$$

Οι **συναλλοίωτες συνιστώσες** της μετρικής είναι

$$\begin{aligned} &g_{tt} = -e^{\nu} \qquad g_{rr} = e^{\lambda} \qquad g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2\theta \\ &g_{\theta\theta} = r^2 \qquad g_{\phi t} = -\omega r^2 \sin^2\theta \end{aligned} \tag{A.4}$$

Οι **ανταλλοίωτες συνιστώσες** της μετρικής είναι

$$\begin{aligned} &g^{tt} = -e^{-\nu} \qquad g^{rr} = e^{-\lambda} \qquad g^{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \\ &g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \qquad g^{\phi t} = -\omega e^{\lambda} \end{aligned} \tag{A.5}$$

οι παραπάνω ανταλλοίωτες συνιστώσες βγήκαν από την απαίτηση

$$g_{\mu\nu} g^{\alpha\nu} = \delta_{\mu}^{\ \alpha} = \begin{cases} 0 & \text{οταν } \alpha \neq \mu \\ 1 & \text{οταν } \alpha = \mu \end{cases} \tag{A.6}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις γίνεται φανερό τώρα πως

$$\begin{aligned}
&g_{\phi t,r} = -2\omega r \sin^2\theta \; - r^2 \sin^2\theta\, \omega_r \quad \text{οπου } \omega_r = \frac{d\omega}{dr} \\
&g_{\phi\phi,r} = 2r\sin^2\theta \\
&g_{\phi\phi,\theta} = 2r^2\sin\theta\,\cos\theta \\
&g_{\phi t,\theta} = -2\omega\, r^2\sin\theta\,\cos\theta - r^2\sin^2\theta\,\omega_\theta
\end{aligned} \tag{A.7}$$

όπου με το κόμμα υποδηλώνουμε παραγώγιση ως προς τον αντίστοιχο όρο. Οπότε οι παρακάτω όροι παίρνουν τις εξής τιμές

$$\begin{gathered}
g^{t\phi}g_{\phi\phi,r} - g^{tt}g_{t\phi,r} = -2\omega r\sin^2\theta\left(e^{-\lambda}+e^{-\nu}\right) - r^2e^{-\nu}\sin^2\theta\omega_r \\
\text{και} \\
g^{t\phi}g_{\phi\phi,\theta} - g^{tt}g_{t\phi,\theta} = -2\omega r^2\sin\theta\,\cos\theta\,\left(e^{-\lambda}+e^{-\nu}\right) - r^2e^{-\nu}\sin^2\theta\omega_\theta
\end{gathered} \tag{A.8}$$

Τώρα γίνεται σαφές πως προκύπτει η (3.11) από την (3.10). Τονίζουμε πως κατά την διάρκεια των πράξεων παραλείπονται όροι ω^2. Ας δούμε τώρα πως προέκυψαν οι σχέσεις (3.12).

$$u^\phi \equiv \frac{d\phi}{d\tau} = \frac{d\phi}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \Omega\, u^t \tag{A.9}$$

Επίσης από την συνθήκη κανονικοποίησης της τετρα-ταχύτητας έχω

$$\begin{gathered}
u^\alpha u_\alpha = -1 \;\Rightarrow\; u^t u_t + u^r u_r + u^\phi u_\phi + u^\theta u_\theta = -1 \\
\text{αλλά} \quad u^\theta = u^r = 0 \quad \text{οπότε} \\
u^t u_t + u^\phi u_\phi = -1 \;\Rightarrow\; g_{tt}\left(u^t\right)^2 + 2g_{\phi t}u^t u^\phi + g_{\phi\phi}\left(u^\phi\right)^2 = -1
\end{gathered} \tag{A.10}$$

Η (Α.10) μέσω της (Α.9) γίνεται

$$g_{tt}\left(u^t\right)^2 + 2\Omega g_{\phi t}\left(u^t\right)^2 + \Omega^2 g_{\phi\phi}\left(u^t\right)^2 = -1 \tag{A.11}$$

Από την οποία παίρνω την τελική μορφή

$$u^t = \left[-\left(g_{tt} + 2\Omega g_{t\phi} + \Omega^2 g_{\phi\phi}\right)\right]^{-1/2} \tag{A.12}$$

Με την (Α.12) συμπληρώθηκε και η απόδειξη των σχέσεων (3.12).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β

Ακτινική Επικυκλική Συχνότητα

Στο παράρτημα Β θα προσπαθήσουμε να βγάλουμε την τελική μορφή της σχέσεως (5.26) καθώς και της (5.46). Θα πρέπει να εκφράσουμε κάθε όρο ως προς κάποια τυχαία απόσταση r. Στην προσπάθειά μας αυτή θα ανατρέξουμε σε σχέσεις του κεφαλαίου 4. Πρέπει λοιπόν να βρούμε την γενική μορφή της σχέσεως

$$\omega_r = \left(\tilde{E} - \omega\tilde{l}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \sqrt{-\frac{F''(r_o)}{2}} \tag{B.1}$$

Θα πάρουμε κάθε όρο χωριστά και θα βρούμε την αντίστοιχη μορφή του. Ας ξεκινήσουμε πρώτα με τον όρο $F''(r_o)$. Θυμόμαστε ότι η $F(r)$ δίνεται από την σχέση (5.12)

$$F(r) = \tilde{E}^2 - 2\omega\tilde{E}\tilde{l} - \frac{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}{r^2 \sin^2\theta}\,\tilde{l}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{B.2}$$

Θυμίζουμε ότι τα $\tilde{E}, \tilde{l}$ είναι σταθερές κίνησης οπότε η παράγωγός τους ως προς την r είναι μηδέν, θυμίζουμε επίσης πως για την ω ισχύει η σχέση (4.2)

$$\omega = \frac{2J}{r^3} \tag{B.3}$$

η οποία σε συνδυασμό με την (4.14)

$$j = \frac{J}{M^2} \tag{B.4}$$

καταλήγει στην

$$\omega = \frac{2M^2}{r^3}\,j \tag{B.5}$$

οπότε έχουμε εκφράσει το ω συναρτήσει μόνο της απόστασης r και του όρου j. Στο κεφάλαιο 4 είχαμε βγάλει τις γενικές σχέσεις των $\tilde{E}, \tilde{l}$ συναρτήσει της μάζας M και της τυχαίας απόστασης r, οι σχέσεις αυτές δίνονται από τις (4.29) και (4.30)

$$\tilde{E}_{\pm} = s^{-1/2}(s-2)(s-3)^{-1/2} \pm s^{-2}(s-3)^{-3/2}[5s-12]\,j \tag{B.6}$$

και

$$\tilde{l} = \pm s(s-3)^{-1/2}\left[1 \mp 3s^{-3/2}(s-3)^{-1}(s-2)\,j\right]M \tag{B.7}$$

Ορίζοντας τώρα και την

$$s = \frac{r}{M} \tag{B.8}$$

έχω τις κατάλληλες σχέσεις για να ξεκινήσω. Η (Β.2) δεν είναι άλλη από την (4.10) δηλαδή

$$F(r)=\tilde{E}^2-V(r) \tag{B.9}$$

όπου το $V(r)$ είναι το υποθετικό δυναμικό της σχέσεως (4.9)

$$V(r)=\left(1-\frac{2M}{r}\right)\left(1+\frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right)+2\omega\tilde{E}\tilde{l} \tag{B.10}$$

οπότε η δεύτερη παράγωγος ως προς την απόσταση r, είναι

$$F''(r)=-V''(r) \tag{B.11}$$

η οποία όμως είναι υπολογισμένη και δίνεται από την (4.16)

$$V''(r)=\frac{6\tilde{l}^2}{r^4}-\frac{4M}{r^3}-\frac{24M\tilde{l}^2}{r^5}+\frac{48M^2\tilde{E}\tilde{l}}{r^5}j \tag{B.12}$$

την οποία την γράφω στην μορφή

$$V''(r)=2r^{-5}\left\{3\tilde{l}^2r-2Mr^2-12M\tilde{l}^2+24M^2\tilde{E}\tilde{l}\;j\right\} \tag{B.13}$$

οπότε λόγω της (Β.11) έχω

$$F''(r)=-V''(r)=2r^{-5}\left\{2Mr^2+12M\tilde{l}^2-3\tilde{l}^2r-24M^2\tilde{E}\tilde{l}\;j\right\} \tag{B.14}$$

την παραπάνω σχέση την φέρνω στην μορφή

$$F''(r)=2r^{-5}M^3\left[2s^2+12\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2-3\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)^2\cdot s-24\tilde{E}\left(\frac{\tilde{l}}{M}\right)j\right] \tag{B.15}$$

στην οποία έχω κάνει χρήση της σχέσης (Β.8). Απορρίπτοντας όρους j^2 η (Β.15) μέσω των (Β.6) και (Β.7) καταλήγει στην

$$-\frac{F''(r)}{2}=s^{-3}(s-3)^{-1}(s-6)\left[1\pm 6s^{-1/2}(s-2)(s-3)^{-1}(s-6)^{-1}j\right]M^{-2} \tag{B.16}$$

Το j όμως επειδή μιλάμε για αργή περιστροφή παίρνει τιμές μικρές το πολύ μέχρι 0,4 με την μέγιστη τιμή να αγγίζει την μονάδα, επίσης ο συντελεστής μπροστά από το j είναι πολύ μικρός ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του διωνύμου. Η ρίζα λοιπόν της (Β.16) είναι η

$$\sqrt{-\frac{F''(r)}{2}}=s^{-3/2}(s-3)^{-1/2}(s-6)^{1/2}\left[1\pm 3s^{-1/2}(s-2)(s-3)^{-1}(s-6)^{-1}j\right]M^{-1} \tag{B.17}$$

Η (Β.17) αποτελεί την γενική σχέση για τυχαία απόσταση r. Τώρα θα πρέπει να εκφράσουμε και τους υπόλοιπους όρους της (Β.1). Θα ξεκινήσουμε από τον όρο $\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}$ η σχέση αυτή και με την βοήθεια των (Β.5), (Β.6)και (Β.7) καταλήγει στην παρακάτω μορφή

$$\tilde{E}-\omega\tilde{l}=s^{-1/2}\left(s-2\right)\left(s-3\right)^{-1/2}\left\{1\pm 3s^{-3/2}\left(s-3\right)^{-1}j\right\} \tag{B.18}$$

επειδή ο όρος μέσα στην παρένθεση είναι πολύ μικρότερος της μονάδας, μιλάμε πάντα για αργές περιστροφές, οπότε ο όρος j παίρνει μικρές τιμές, μπορούμε να εφαρμόσουμε και πάλι το τύπο του διωνύμου οπότε και καταλήγουμε στην

$$\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}=s^{1/2}\left(s-2\right)^{-1}\left(s-3\right)^{1/2}\left\{1\mp 3s^{-3/2}\left(s-3\right)^{-1}j\right\} \tag{B.19}$$

Ο επόμενος όρος που πρέπει να βρούμε είναι ο

$$\left(1-\frac{2M}{r}\right)=\left(1-2s^{-1}\right)=s^{-1}\left(s-2\right) \tag{B.20}$$

οπότε ο όρος $\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}\cdot\left(1-\dfrac{2M}{r}\right)$της (Β.1) γίνεται σύμφωνα με τις (Β.19) και (Β.20) :

$$\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}\cdot\left(1-\frac{2M}{r}\right)=s^{-1/2}\cdot\left(s-3\right)^{1/2}\left[1\mp 3s^{-3/2}\left(s-3\right)^{-1}j\right] \tag{B.21}$$

τώρα πια μένει στην (Β.21) να πολλαπλασιάσουμε την (Β.17). Μετά από την εκτέλεση του πολλαπλασιασμού παίρνω

$$\omega_r=s^{-2}\left(s-6\right)^{1/2}\left\langle 1\pm 3s^{-3/2}\left(s-3\right)^{-1}\left(s-6\right)^{-1}\left[\left(s-1\right)\left(s-2\right)+4\right]j\right\rangle M^{-1} \tag{B.22}$$

Η (Β.22) είναι η σχέση που θέλαμε εξαρχής να βγάλουμε για την ακτινική επικυκλική συχνότητα ω_r, η οποία έχει παραμέτρους μόνο τα j,r και M. Η (Β.22) ισχύει για οποιαδήποτε απόσταση r. Το πρώτο μέρος τελείωσε, τώρα θα πρέπει να βρούμε και την αντίστοιχη σχέση που ισχύει για την κάθετη επικυκλική συχνότητα, η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε θα είναι περίπου η ίδια.

Κάθετη Επικυκλική Συχνότητα

Όπως είπαμε και παραπάνω σε αυτή την ενότητα θα προσπαθήσουμε να βρούμε την δεύτερη παράγωγο ως προς θ του G, η οποία δίνεται από την (5.35)

$$G\left(r,\theta\right)=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left[\tilde{E}^2-\left\{\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\left(\frac{\tilde{l}^2}{r^2\sin^2\theta}+1\right)+2\omega\tilde{E}\tilde{l}\right\}\right] \tag{B.23}$$

βλέπουμε πως οι μοναδικοί όροι που εξαρτώνται από το θ είναι το $\sin^2\theta$. Θυμίζουμε πως το ω περιέχει το θ μόνο στους δεύτερους τάξεως όρους τους οποίους τους παραλείπουμε γιατί μιλάμε για αργή περιστροφή, έτσι το ω εξαρτάται μόνο από το r. Εκτελώντας δύο φορές την παραγώγιση παίρνουμε

$$G''(\theta_o) = -\frac{2}{r^4}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}\tilde{l}^2\left\{\frac{1-4\cos^2\theta}{\sin^4\theta}\right\} \tag{B.24}$$

Για $\theta_o = \pi/2$ έχω

$$-\frac{G''(\theta_o)}{2} = \frac{1}{r^4}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2}\tilde{l}^2 \tag{B.25}$$

Επειδή μετά την εφαρμογή της διαταραχής κατέληξα για την κάθετη επικυκλική συχνότητα στην σχέση

$$\omega_\theta = \left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\sqrt{-\frac{G''(\theta_o)}{2}} \tag{B.26}$$

θα πάρω τελικά, χρησιμοποιώντας την (Β.25)

$$\omega_\theta = \frac{1}{r^2}\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}\tilde{l} \tag{B.27}$$

Θα προσπαθήσουμε τώρα να αντικαταστήσουμε τα $\tilde{E},\tilde{l}$ με τις γενικές τους μορφές για τυχαία απόσταση r , όπως αυτές δίνονται από τις σχέσεις (4.29) και (4.30).

Ο όρος $\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}$ οπου $\omega = \frac{2M^2}{r^3}j$ υπολογίστηκε παραπάνω και δίνεται από την (Β.19)

$$\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1} = s^{1/2}(s-2)^{-1}(s-3)^{1/2}\left[1\mp 3s^{-3/2}(s-3)^{-1}j\right] \tag{B.28}$$

Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με το $\tilde{l}$ όπως αυτό δίνεται από την (Β.7) παίρνουμε

$$\left(\tilde{E}-\omega\tilde{l}\right)^{-1}\tilde{l} = \pm s^{3/2}(s-2)^{-1}\left[1\mp 3s^{-3/2}(s-3)^{-1}(s-1)j\right]M \tag{B.29}$$

Πολλαπλασιάζοντας την τελευταία και με το $1/r^2$ παίρνουμε την τελική σχέση

$$\omega_\theta = \pm s^{-1/2}(s-2)^{-1}\left[1\mp 3s^{-3/2}(s-3)^{-1}(s-1)j\right]M^{-1} \tag{B.30}$$

Η τελευταία σχέση αποτελεί την τελική μορφή που ψάχναμε για την κάθετη επικυκλική συχνότητα.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- **ΑΡΧΕΣ ΑΣΤΡΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗ**
  Εκδόσεις Ν.Μαυρογένης & Υιοι Ο.Ε.copyright ©
  1986…………………….…………………….……***ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΣΠΥΡΟΥ***

- **ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**…………...
  Εκδόσεις Γαρταγάνη Copyright ©
  1985…………………………………………….….***ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΣΠΥΡΟΥ***

- **ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι**………………………………….……..
  Εκδόσεις Γιαχούδη - Γιαπούλη
  Ο.Ε.…………….…………………...………***ΙΩΑΝΝΗ Δ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΗΤΡΙΟΥ***

- **ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ**……………………………...……………
  …Εκδόσεις Cambridge University Press Copyright ©
  1985…………………………………………..……..***BERNARD F. SCHUTZ***

- **LECTURES ON GENERAL RELATIVITY**……..………………..……..
  ……Εκδόσεις D.Reidel Publishing Company Copyright ©
  1974……….……………………….………. ……...…***Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ***

- **GRAVITY** (An Introduction to Einstein's General Relativity)………………..
  ……Εκδόσεις Addison Wesley Copyright ©
  2003……….………………………….…….………..***JAMES B. HARTLE***

- **GENERAL RELATIVITY**……………………………………..……..
  …Εκδόσεις Chicago University Press Copyright ©
  1985…………….…………………….……….…...…***ROBERT M. WALD***

ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΙΣ

- **Evidence For a 2:3 resonance in SCO X-1 kHz QPOs**…………………………………………………… Astronomy & Astrophysics 28 June 2002 astro-ph/0206490 v2 …………………………………………………………………… ***M. A. Abramowicz, T. Bulik , M. Bursa and W. Kluzniack***

- **Non-linear resonance in nearly geodesic motion in low-mass X-ray binaries**……………………………………………………Published at Astronomy Society of Japan 10 Feb. 2003 astro-ph/0302183 v1 …………………………………… ***M. A. Abramowicz, V. Karras, W. Kluzniack, W.H. Lee and P. Rebusco***

- **Millisecond Oscillations in X-Ray Binaries**……………………………Sub. to Annual Review of Astronomy & Astrophysics 11 June 2000 astro-ph/0001167 ……………………………………………………………***M. VAN DER KLIS***

- **Evolution of the Innermost Stable Orbits Around Accreting Neutron Stars**……………………………………………The Astrophysical Journal 297: 548-554, 15 October 1985 ……………………………………………………***W. Kluzniack & R. Wagoner***

- **Slowly Rotating Relativistic Stars I. Equations of Structure**…………………………………………The Astrophysical Journal Vol. 150 December 1967 ……………………………………………………***James B. Hartle***

- **Slowly Rotating Relativistic Stars II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars**…………………………………………The Astrophysical Journal Vol. 153 September 1968 ……………………………………………………***James B. Hartle & Kip S. Thorne***