

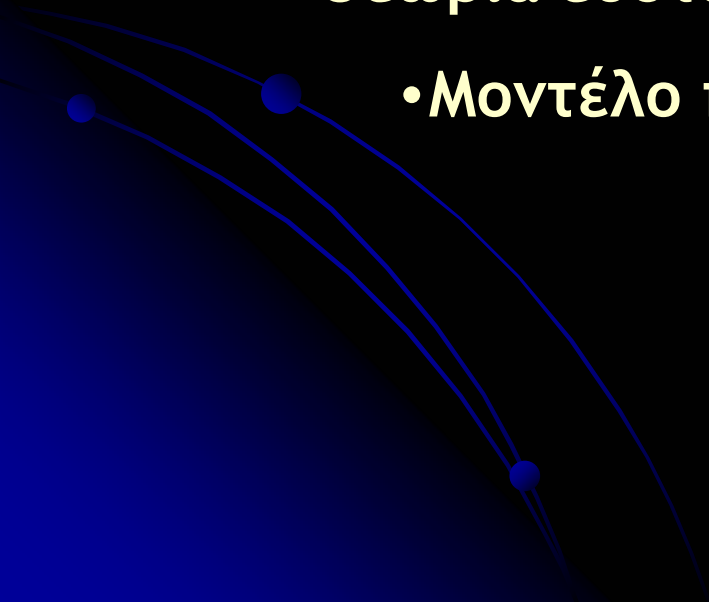
ΤΖΙΑΜΠΑΖΛΗΣ ΒΑΣΙΛΕΙΟΣ

**ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΑ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΑ
ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ
ΣΕ ΣΥΜΠΑΓΕΙΣ ΑΣΤΕΡΕΣ**

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΣΤΕΡΓΙΟΥΛΑΣ

Περιεχόμενα

- Ημιπεριοδικές ταλαντώσεις (kHz QPOs)
 - Μοντέλα περιγραφής
 - Θεωρία ευσταθών κυκλικών τροχιών (ISCO)
 - Μοντέλο παραμετρικού συντονισμού
- 

Ημιπεριοδικές ταλαντώσεις (kHz QPOs)

Rossi X-Ray Timing Explorer (RXTE)



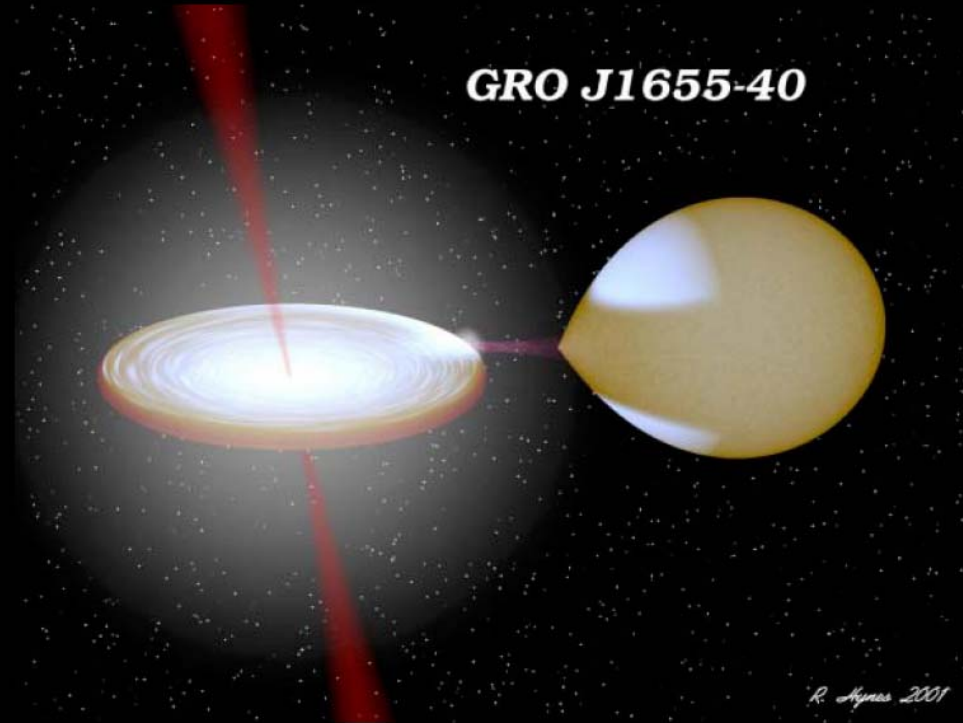
Millisecond Pulsations

Burst Oscillations

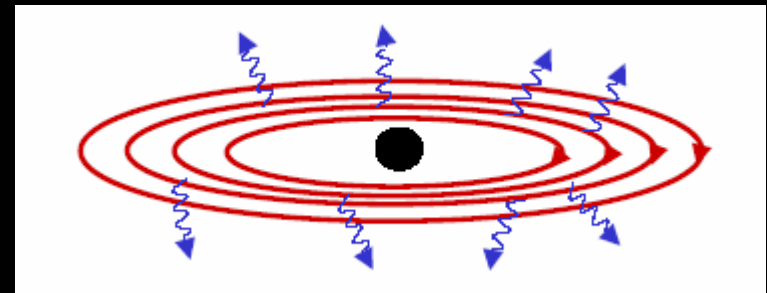
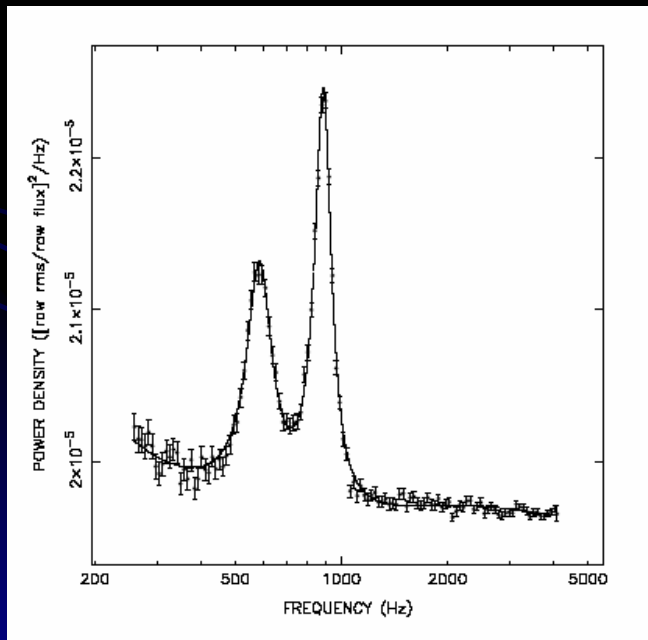
KilloHertz Quasi - Periodic Oscillations

Οι δίδυμες kHz κορυφές της πηγής SCO X1

GRO J1655-40



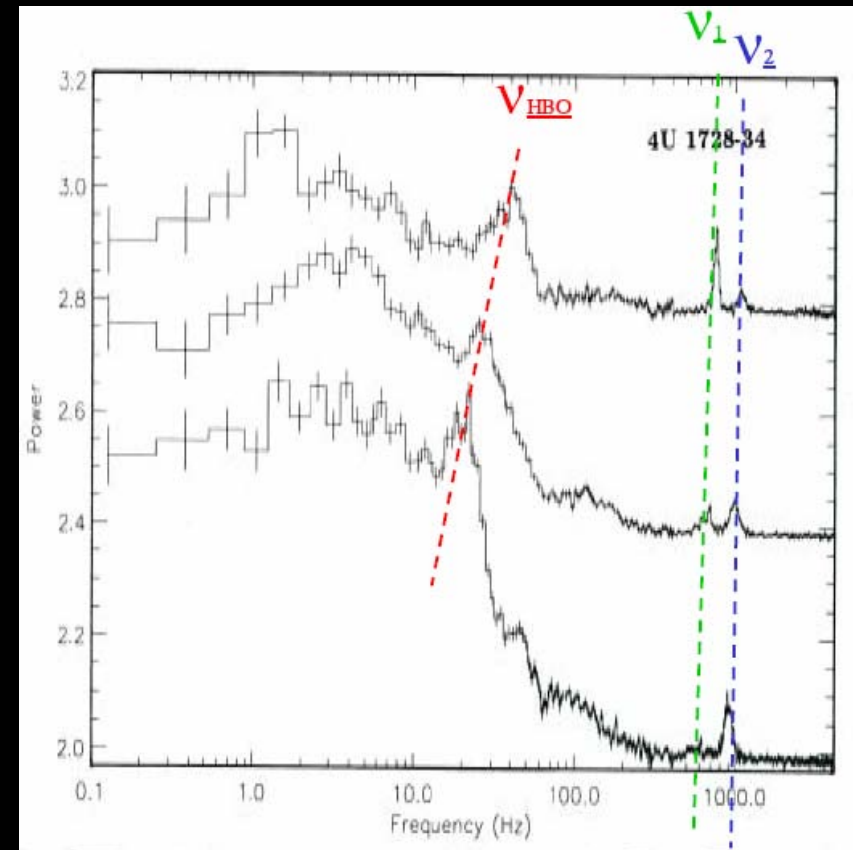
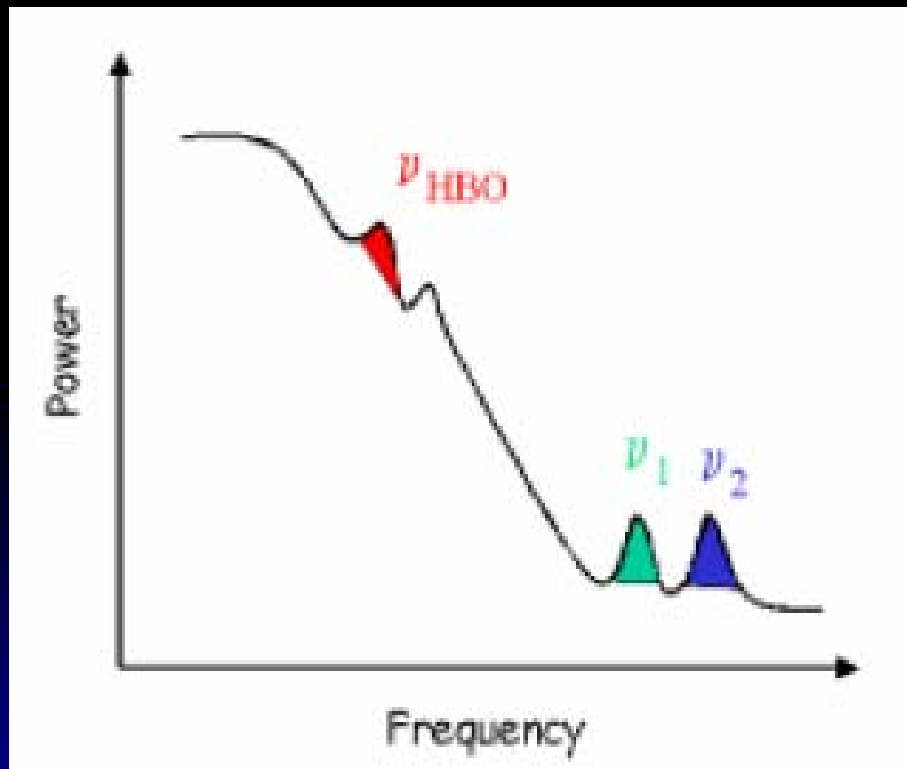
R. Hynes 2001

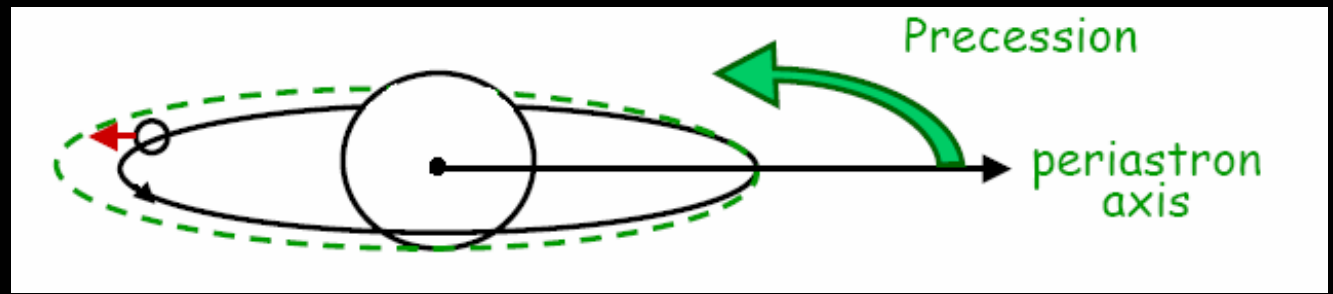


Μοντέλα περιγραφής

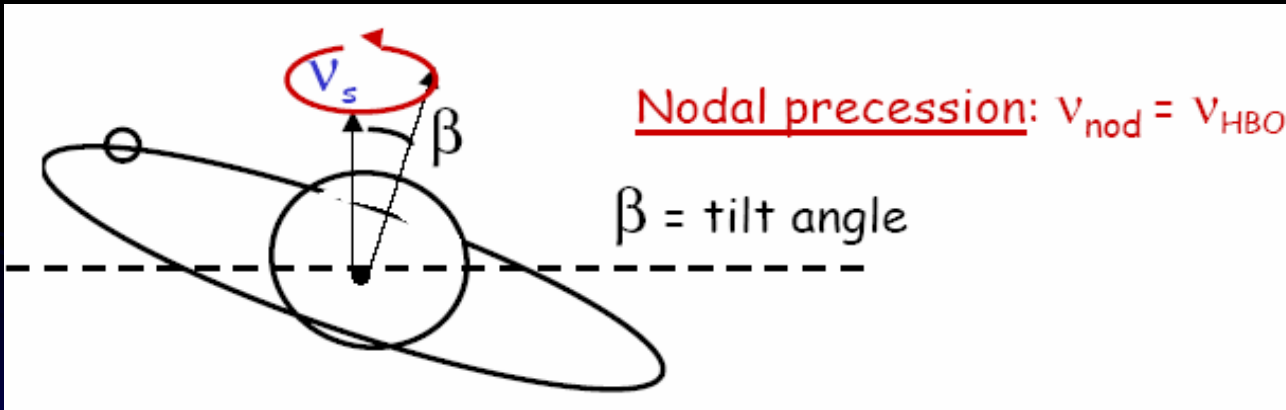
- **Sonic Point Beat Frequency (Miller, 1996)**
 - **Relativistic Precession Model (Stella & Vietri, 1998-99)**
 - **Photon Bubble (Klein, 1996)**
 - **Disc Transition Layer (Titarchuk, 1998-99)**
 - **Parametric Resonance Model (Kluźniak *et. al*, 1999)**
- 

Relativistic Precession Model



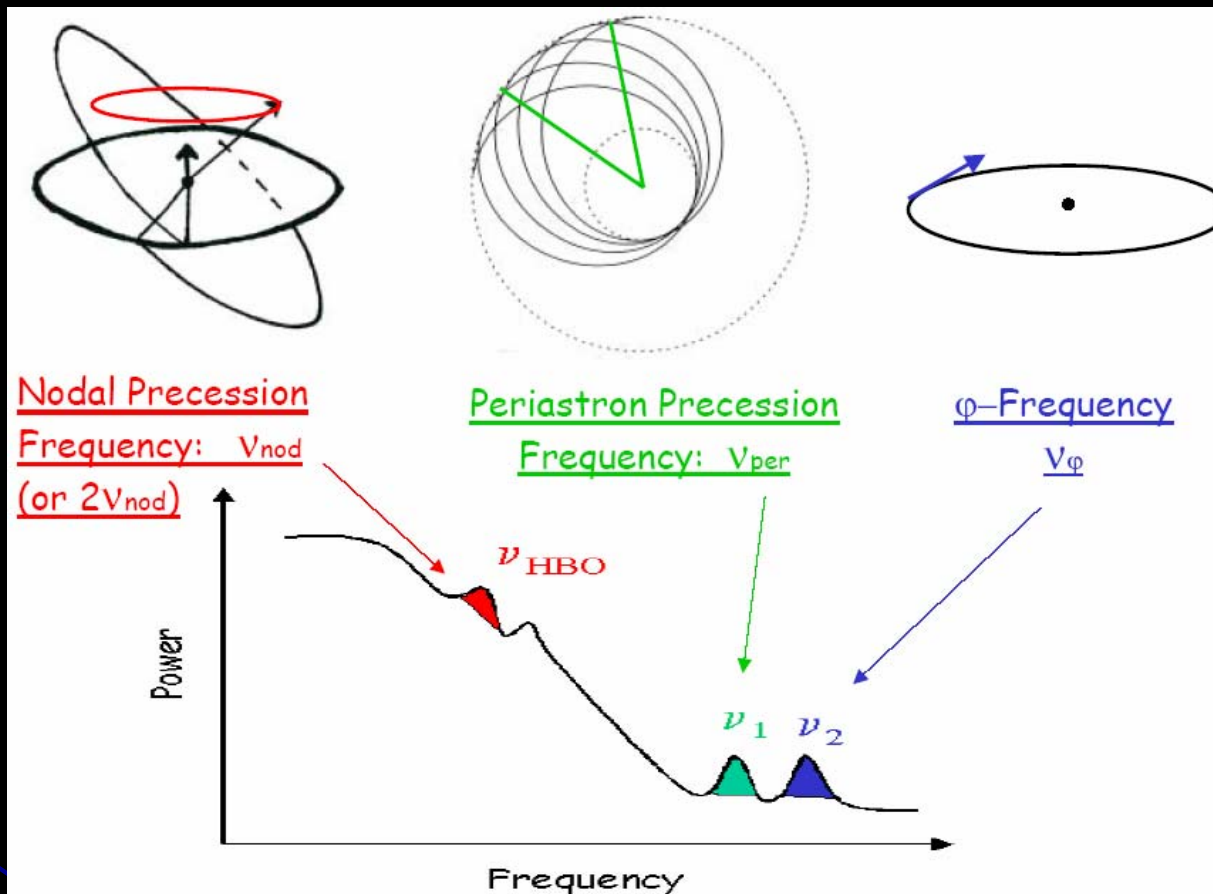


$$\Delta v = v_2 - v_1 = v_\phi - v_{per} = v_r = \text{radial epicyclic frequency}$$



1,8 – 2 M_\odot

Συχνότητες Περιστροφής: 300 – 900Hz



Αναπάντητα Ερωτήματα:

- i. Επιβίωση έκκεντρων και μεταπτωτικών τροχιών
- ii. Προσαρμογή ροής με προβλεπόμενες συχνότητες
- iii. Μεταβολή ν_2 με φωτεινότητα αστέρα

Βαρυτική Μετάθεση

Ακριβείς εσωτερικές λύσεις:

$\rho = \text{σταθ.}$

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{(p + \rho)(m + 4\pi r^3 p)}{r(r - 2m)}$$

$$m(r) = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \equiv M \quad \text{οταν} \quad r \geq R$$

$$\frac{\rho + 3p}{\rho + p} = \frac{\rho + 3p_c}{\rho + p_c} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}$$

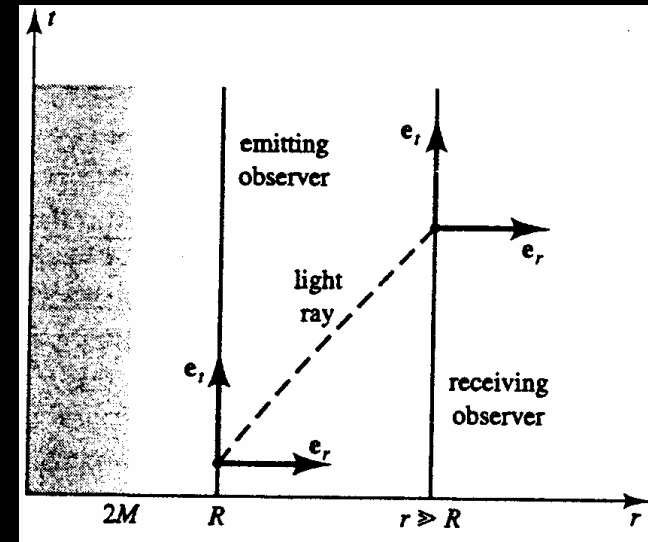
$$p_c = \rho \frac{1 - \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2}}{3 \left(1 - \frac{2M}{R}\right)^{1/2} - 1}$$

$p_c \rightarrow \infty$

$$M \leq \frac{4}{9} R$$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$\frac{d\tau_1}{d\tau_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\left(1 - \frac{2m}{r_1}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2m}{r_2}\right)^{1/2}}$$



$$\frac{\omega_2}{\omega_1} \Big|_{\max} = \frac{\left(1 - \frac{2M}{9M}\right)^{1/2}}{\left(1 - \frac{2M}{\infty}\right)^{1/2}} = \left(1 - \frac{8}{9}\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{9}\right)^{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$z_{\max} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \Big|_{\max} - 1 = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Big|_{\max} - 1 = 3 - 1 = 2$$

Συμπέρασμα: Δε μπορούμε να πάρουμε μετάθεση φασματικών γραμμών λόγω έντονου βαρυτικού πεδίου παραπάνω από 2.

Θεωρία ευσταθών κυκλικών τροχιών (ISCO)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Ολοκλήρωμα Στροφορμής : $L = p_\phi = r^2 \cdot \dot{\phi}$

Ολοκλήρωμα Ενέργειας : $E = -p_0 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \dot{t}$

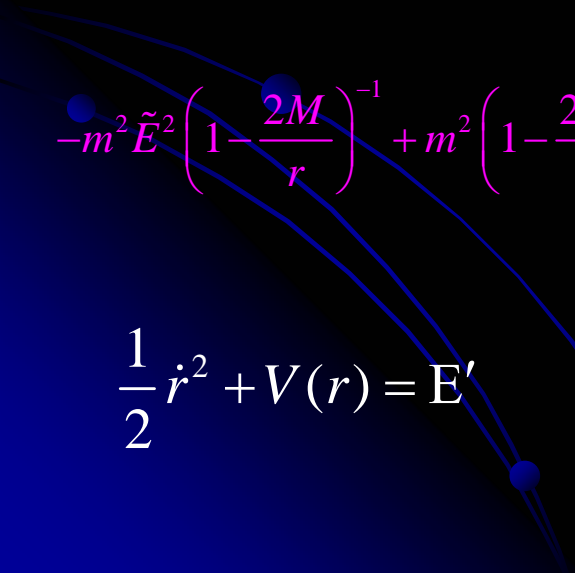
$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2$$

$$-m^2 \tilde{E}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + m^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{m^2 \tilde{L}^2}{r^2} = -m^2$$

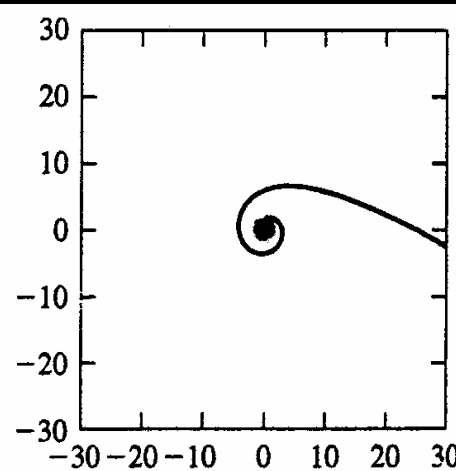
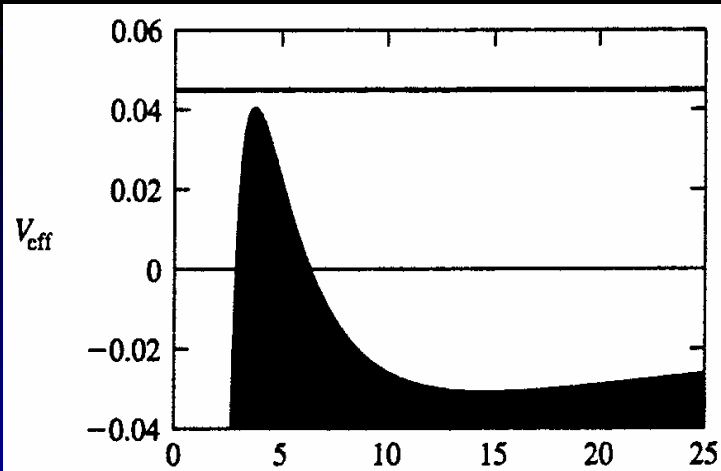
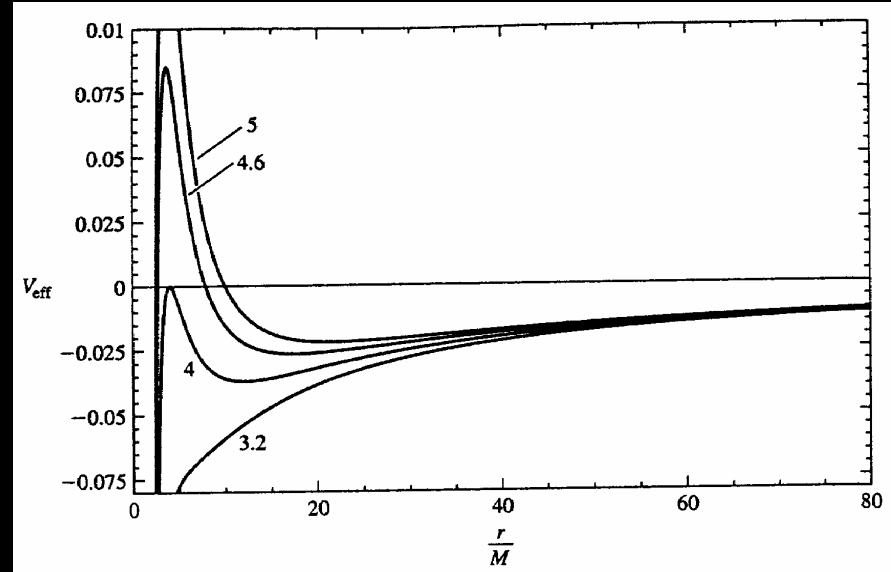
$$\dot{r}^2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r}\right)$$

$$\frac{1}{2} \dot{r}^2 + V(r) = E'$$

$$V_{eff}(r) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}$$



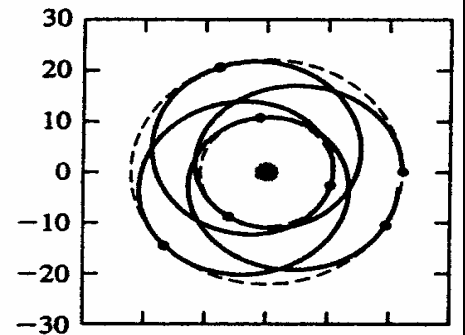
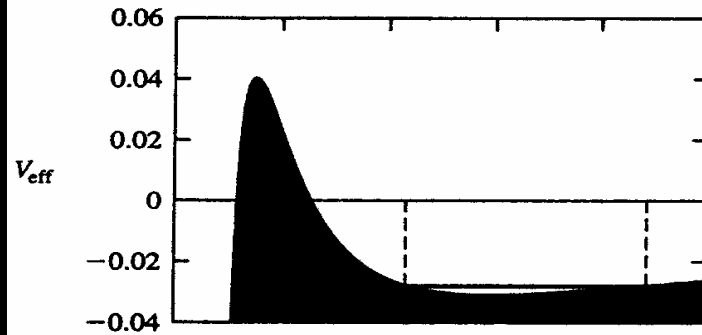
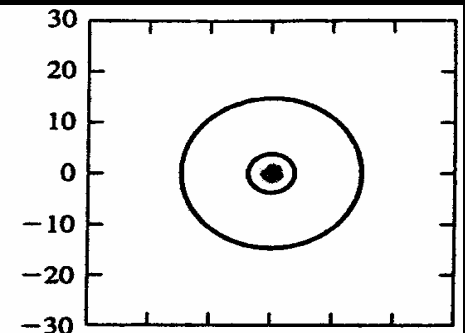
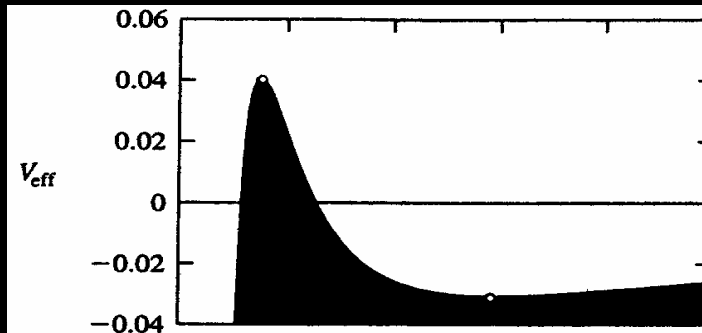
$$r_{\min/\max} = \frac{L^2 \pm L^2 \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{L}\right)^2}}{2M} = \frac{L^2}{2M} \left[1 \pm \sqrt{1 - 12 \left(\frac{M}{L}\right)^2} \right]$$



$i) L^2 - 12M^2 < 0$

$$ii) \tilde{L}^2 - 12M^2 > 0$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r_+} > 0$$



Σημεία αναστροφής: $\varepsilon = V_{\text{eff}}(r_{\text{tp}})$

όπου $\varepsilon = \frac{E^2 - 1}{2}$

Συμπέρασμα:

Σταθερές κυκλικές τροχιές
βρίσκονται στην ακτίνα $r = r_{\text{min}} = r_+$
του ελαχίστου V_{eff}

$$\tilde{L}/M = \sqrt{12}$$

$$r_{\text{ISCO}} = 6M$$

Συρμός των αδρανειακών συστημάτων λόγω περιστροφής

Σφαιρικά συμμετρικός & στατικός αστέρας

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta d\phi dt$$

$$\bar{\omega}(r) = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad r > 0$$

Ω : Είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού και κατά συνέπεια του αστέρα όπως τη μετρά ένας ακίνητος παρατηρητής σε κάποιο σημείο (t, r, θ, ϕ) μέσα στο ρευστό

$\omega(r, \theta)$: Είναι η γωνιακή ταχύτητα (μετρημένη στο άπειρο) ενός παρατηρητή ο οποίος πέφτει ελεύθερα από το άπειρο με μηδενική στροφορμή.

$\Omega - \omega(r, \theta)$: Είναι η συντεταγμένη γωνιακή ταχύτητα ενός στοιχείου του ρευστού στο σημείο (r, θ) που βλέπει παρατηρητής ο οποίος πέφτει ελεύθερα προς αυτό.

Εξέλιξη των ISCO σε αργά περιστρεφόμενους A.N.

Μετρική αξονικά συμμετρικού & ομογενούς περιστρεφόμενου αστέρα

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta d\phi dt$$

$$\theta = \pi/2, d\theta = d\phi = 0 \quad \dot{r}^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 - \dot{r}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{\phi}^2 + 2\omega r^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{\phi} \cdot \dot{t} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

$$\tilde{E}m \equiv E \equiv -p_t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t} + \omega r^2 \dot{\phi}$$

$$\tilde{l}m \equiv l \equiv p_\phi = r^2 \dot{\phi} - \omega r^2 \dot{t}$$

$$\dot{r}^2 = \tilde{E}^2 - V(r)$$

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{l}^2}{r^2}\right) + 2\omega \tilde{E} \tilde{l}$$

$$(i) \tilde{E}^2 = V(r)$$

$$(ii) V'(r) = 0$$

$$(iii) V''(r) = 0$$

$$r_{\text{orb}} = \frac{\tilde{l}_{\text{orb}}^2}{2M}$$

$$\tilde{l} = \pm s(s-3)^{-1/2} \left[1 \mp 3s^{-3/2} (s-3)^{-1} (s-2) j \right] M$$

$$\tilde{E}_{\pm} = s^{-1/2} (s-2)(s-3)^{-1/2} \pm s^{-1} (s-3)^{-1/2} \left[2s^{-1} + 3(s-3)^{-1} s^{-1} (s-2) \right] j$$

$\Gamma \propto r = 6M$

$$\tilde{l}_{\text{orb}} = \pm \sqrt{12} \left(1 \mp \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} j \right) M$$

$$\tilde{E}_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \left[1 \mp \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} j \right]$$

$$r_{\text{orb}} = 6 \left[1 \mp \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} j \right] M$$

$$j = 2J/M^2$$

Different regimes for a rotating magnetic NS: 1

(Illarionov & Sunyaev 1975)

Accretion regime

$$R(m) < R(cor)$$

$$| R(magnetosphere) |$$

Different regimes for a rotating magnetic NS: 2

Propeller regime

$$R(cor) < R(m) < R(lc)$$

$$| R(magnetosphere) |$$

Different regimes for a rotating magnetic NS: 3

Radio Pulsar regime

$$R(m) > R(lc)$$

\dot{M}



R(light)



\dot{M}



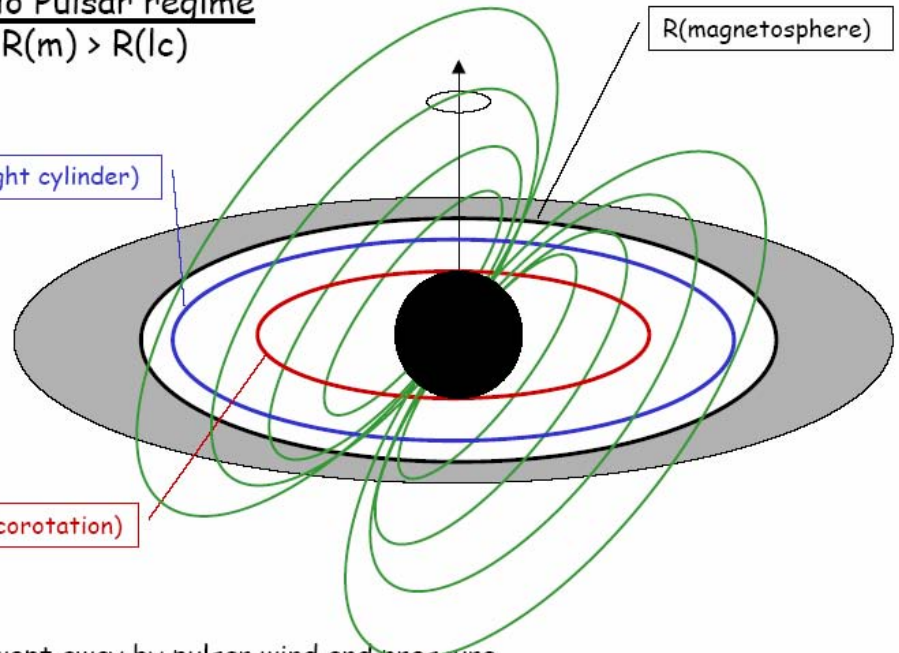
R(light)

R(cor)

R(cor)



- centrifugal barrier
- matter accretion
- accretion



- no accretion
- disk matter swept away by pulsar wind and pressure
- shock emission at the interface between the pulsar wind and the inflowing matter

(Tavani et al. 1986; Phinney et al. 1988; Burderi et al. 2001, 2002)

Εξέλιξη των ISCO σε περιστρεφόμενες Μ.Ο.

Λύση Kerr – Newman: Ασυμπτωτικά επίπεδη, αξονικά συμμετρική
& χρονικά αμετάβλητη λύση κενού Μ.Ο

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) dt^2 - 2a \sin^2 \theta \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2} d\phi dt + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 \\ + \left(r^2 + a^2 + a^2 \sin^2 \theta \frac{2Mr - Q^2}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta d\phi^2$$

$$\rho^2 \equiv r^2 + a \cos^2 \theta, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad \text{και} \quad a \equiv \frac{J}{M}$$

$$\frac{\tilde{E}^2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r, \tilde{l}, \tilde{E}, Q, a)$$

$$V_{\text{eff}} = -\frac{M}{r} + \frac{\tilde{l}^2 - a^2(\tilde{E}^2 - 1)}{2r^2} - \frac{M(\tilde{l} - a\tilde{E})^2}{r^3}$$

$\Gamma \propto r = 6M$



$$r_{\text{orb}} = 6M \left\{ 1 \mp \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} j \pm \frac{1}{12} j^2 \right\}$$

$$\tilde{l}_{\text{orb}} = \pm \sqrt{12} M \left\{ 1 \mp \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} j \pm \frac{1}{4} \left(\frac{2}{3} \right)^3 j^2 \right\}$$

$$\tilde{E}_{\text{orb}} = \sqrt{\frac{8}{9}} \left\{ 1 \mp \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3} \right)^{3/2} j \pm \frac{1}{10} \left(\frac{2}{3} \right)^3 j^2 \right\}$$

Γραμμικές διαταραχές – Μοντέλο παραμετρίου συντονισμού

Ακτινική διαταραχή ($u_\theta = 0$)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta d\phi dt$$

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{\tilde{E}^2 U + 1}{g_{rr}} \equiv F(r)$$

$$U\left(r, \theta, \frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right) = g^{tt} - 2g^{t\phi} \frac{\tilde{l}}{\tilde{E}} + g^{\phi\phi} \left(\frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)^2$$

$$g^{tt} (u_t)^2 + g^{rr} (u_r)^2 + g^{\theta\theta} (u_\theta)^2 + g^{\phi\phi} (u_\phi)^2 + 2g^{t\phi} u_t u_\phi = -1$$

$$F(r - r_o) = F(r_o) + (r - r_o)F'(r_o) + \frac{(r - r_o)^2}{2!} F''(r_o)$$

$$F(r_o) = 0 \quad \text{και} \quad F'(r_o) = 0$$

$$\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{F} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(r_o + \delta r) = \sqrt{F} \Rightarrow \frac{d}{d\tau}(\delta r) = \sqrt{\frac{1}{2}(\delta r)^2 F''(r_o)}$$

$$\omega_r = s^{-2} (s-6)^{1/2} \left\langle 1 - 3s^{-3/2} (s-3)^{-1} (s-5)^{-1} \left[(s-1)(s-2) + 4 \right] j \right\rangle M^{-1}$$

$$\delta \ddot{r} + \left(-\frac{F''(r_o)}{2} \right) \delta r = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{-\frac{F''(r_o)}{2}}$$

$$\omega_r = (\tilde{E} - \omega \tilde{l})^{-1} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \cdot \sqrt{-\frac{F''(r_o)}{2}}$$

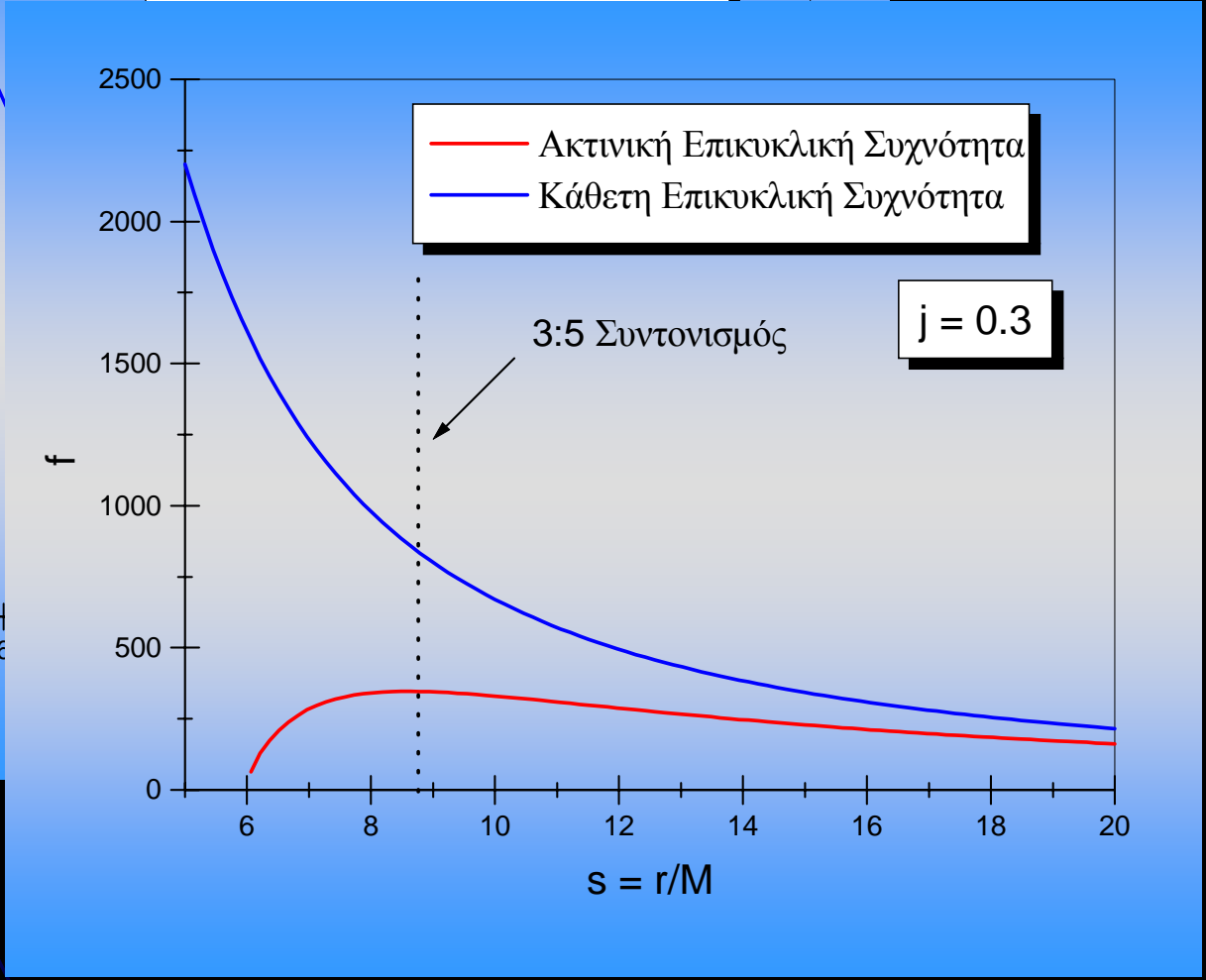
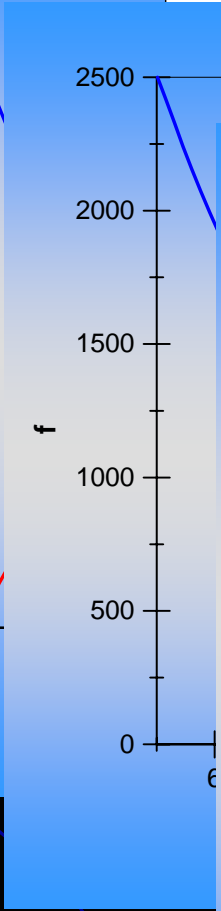
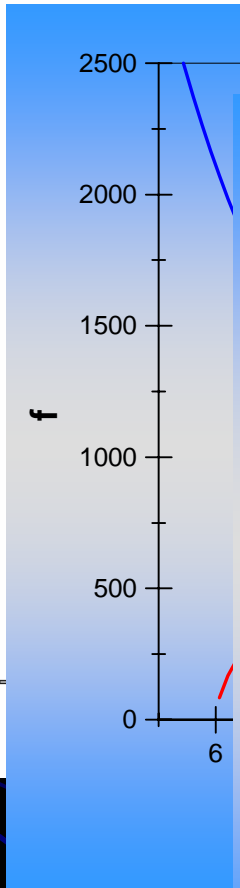
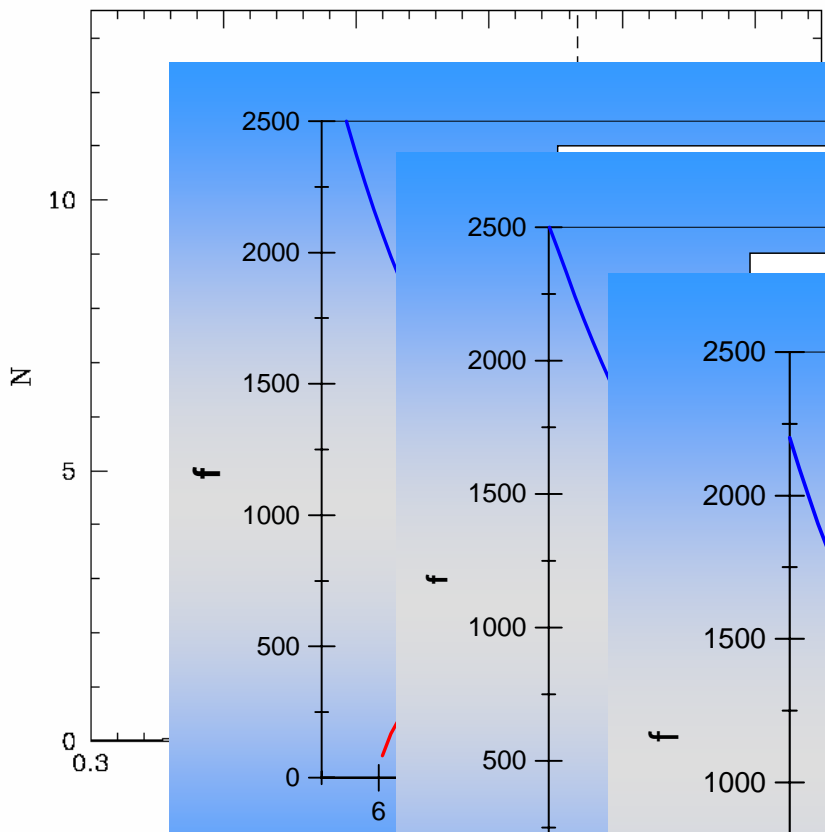
Κάθετη διαταραχή ($u_r = 0$)

$$\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = -\frac{\tilde{E}^2 U + 1}{g_{\theta\theta}} \equiv G\left(r, \theta, \frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right) = \frac{g_{rr}}{g_{\theta\theta}} F\left(r, \theta, \frac{\tilde{l}}{\tilde{E}}\right)$$

$$G(\theta_o) = 0 \quad \text{και} \quad G'(\theta_o) = 0$$

$$\omega_\theta = (\tilde{E} - \omega\tilde{l})^{-1} \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \sqrt{-\frac{G''(\theta_o)}{2}}$$

$$\omega_\theta = s^{-1/2} (s-2)^{-1} \left[1 - 3s^{-3/2} (s-3)^{-1} (s-1)j\right] M^{-1}$$



Βιβλιογραφία

- ΑΡΧΕΣ ΑΣΤΡΙΚΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ.....*ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΣΠΥΡΟΥ*
- ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΓΕΝΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΗΣ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ.....*ΝΙΚΟΛΑΟΥ Κ. ΣΠΥΡΟΥ*
- ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι.....*ΙΩΑΝΝΗ Δ. ΧΑΤΖΗΔΗΜΗΤΡΙΟΥ*
- ΓΕΝΙΚΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑ.....*BERNARD F. SCHUTZ*
- LECTURES ON GENERAL RELATIVITY.....*Α. ΠΑΠΑΠΕΤΡΟΥ*
- GRAVITY (An Introduction to Einstein's General Relativity).....*JAMES B. HARTLE*
- GENERAL RELATIVITY.....*ROBERT M. WALD*

Δημοσιεύσεις

- Evidence For a 2:3 resonance in SCO X-1 kHz QPOs, Astronomy & Astrophysics 28 June 2002 astro-ph/0206490 v2*M. A. Abramowicz, T. Bulik , M. Bursa and W. Kluzniack*
- Non-linear resonance in nearly geodesic motion in low-mass X-ray binaries, Published at Astronomy Society of Japan 10 Feb. 2003 astro-ph/0302183 v1 *A. Abramowicz, V. Karras, W. Kluzniack, W.H. Lee and P. Rebusco*
- Millisecond Oscillations in X-Ray Binaries, Sub. to Annual Review of Astronomy & Astrophysics 11 June 2000 astro-ph/0001167*M. VAN DER KLIS*
- Evolution of the Innermost Stable Orbits Around Accreting Neutron Stars, The Astrophysical Journal 297: 548-554, 15 October 1985*W. Kluzniack & R. Wagoner*
- Slowly Rotating Relativistic Stars I. Equations of Structure, The Astrophysical Journal Vol. 150 December 1967.....*James B. Hartle*
- Slowly Rotating Relativistic Stars II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars, The Astrophysical Journal Vol. 153 September 1968 *James B. Hartle & Kip S. Thorne*