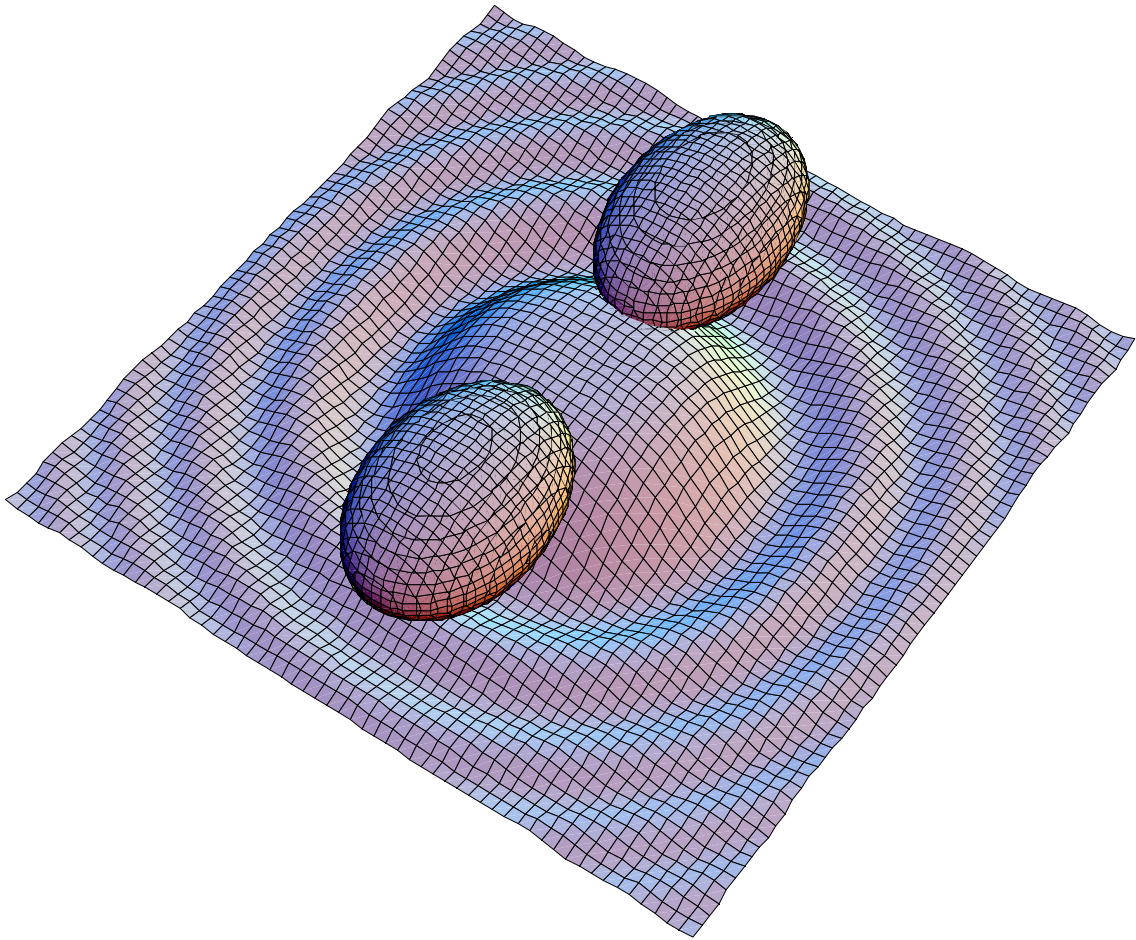


Διπλωματική εργασία

Βαρυτική Ακτινοβολία από Συμπαγείς Αστέρες



Δημήτρης Βουκάντζης A.E.M. 10527

Επιβλέπων καθηγητής κ. Νίκος Στεργιούλας

Περίληψη

Η κατάρρευση διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων αναμένεται να αποτελέσει μια από τις βασικότερες πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας, ανιχνεύσιμη από τα συμβολόμετρα LIGO, TAMA, GEO600 και VIRGO. Αντικείμενο αυτής της διπλωματικής εργασίας αποτελεί η μελέτη της εξέλιξης και της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας από τέτοια συστήματα. Αντιμετωπίζοντας τους αστέρες νετρονίων ως ελλειψοειδή πολύτροπα προσδιορίζουμε καταστάσεις ισορροπίας τις οποίες στη συνέχεια εξελίσσουμε, λύνοντας ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η αριθμητική επίλυση γίνεται με πρόγραμμα που έχει κατασκευαστεί για το σκοπό αυτό, του οποίου ο πηγαίος κώδικας παρατίθεται στο παράρτημα της εργασίας. Με τη βοήθεια του προγράμματος μελετάμε την ευστάθεια διπλών συστημάτων και κατασκευάζουμε κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας για διάφορα συστήματα.

Abstract

Neutron star binary systems are one of the most promising sources of gravitational radiation for detection by laser interferometric detectors, such as LIGO, TAMA, GEO600 and VIRGO. In this work we study the evolution and emission of gravitational radiation of these binaries. Modeling the neutron stars as compressible ellipsoids, obeying a polytropic equation of state, we determine equilibrium conditions, which we evolve by solving (numerically) a system of differential equations. For this aim we have developed a program, which can be seen in the appendix of this work. With the help of this program we study the stability of binaries and construct inspiral waveforms for various neutron star binaries.

Ευχαριστίες

Η πτυχιακή αυτή εργασία εκπονήθηκε το χρονικό διάστημα Οκτώβριος 2003 - Ιούνιος 2004. Όντας πλέον ολοκληρωμένη θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέπων καθηγητή κ. Νίκο Στεργιούλα για την ουσιαστική βοήθεια που μου παρείχε, για τις εύστοχες διορθώσεις στο κείμενο, καθώς και για την υπομονή και την άψογη συνεργασία που είχαμε όλα αυτά τα χρόνια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή	6
Κεφάλαιο 1 ^ο :	10
§ 1.1 Κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας	10
<i>Κυματομορφή πριν τη σύγκρουση - Κυματομορφή κατά τη σύγκρουση – Σφάλμα στη διαφορά φάσης της κυματομορφής πριν τη σύγκρουση – Εφαρμογές.</i>	
§ 1.2 Υδροδυναμικές αστάθειες και σύγκρουση	14
<i>Μεταφορά μάζας και εξάρτηση από τον λόγο μαζών των αστέρων – Φυσική των αστέρων νετρονίων.</i>	
§ 1.3 Μη-συγχρονισμένα διπλά συστήματα	20
§ 1.4 Διπλά συστήματα στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας	23
<i>Μετά-νευτώνειοι υπολογισμοί της ΕΕΚΤ – Πλήρως σχετικιστικοί υπολογισμοί της ΕΕΚΤ – Η τελική κατάσταση του συστήματος – Υπολογιστική σχετικότητα.</i>	
Κεφάλαιο 2 ^ο :	26
§ 2.1 Κατασκευή ακολουθιών Darwin-Riemann	26
<i>Βασικές υποθέσεις – Έκφραση της ενέργειας – Συνθήκες ισορροπίας – Κατασκευή ακολουθιών ισορροπίας.</i>	
§ 2.2 Δυναμικές εξισώσεις για διπλά συστήματα με πολύτροπα Darwin-Riemann	37
<i>Η συνάρτηση Lagrange – Διατηρήσιμα μεγέθη – Δυναμικές εξισώσεις – Ο όρος της πίεσης.</i>	

§ 2.3 Όροι βαρυτικής ακτινοβολίας	43
§ 2.4 Η δυναμική αστάθεια και οι επιπτώσεις αυτής στα διπλά συστήματα Darwin-Riemann	48
<i>Αιτία της δυναμικής αστάθειας – Φαινόμενα παλιρροιακής υστέρησης – Κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας – Κατάρρευση του διπλού συστήματος.</i>	
Κεφάλαιο 3 ^ο :	51
§ 3.1 Δομή και λειτουργία του προγράμματος	51
<i>Δομή του προγράμματος – Λειτουργία του προγράμματος – Μονάδες και προσεγγίσεις.</i>	
§ 3.2 Περιγραφή και σύγκριση αριθμητικών μεθόδων	59
<i>Αριθμητικές μέθοδοι στο πρόγραμμα – Υπολογισμός των ολοκληρωμάτων A_i - Επίλυση του αλγεβρικού συστήματος – Επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων – Σύγκριση των μεθόδων Runge-Kutta δεύτερης τάξης, Runge-Kutta τέταρτης τάξης και Runge-Kutta-Fehlberg.</i>	
§ 3.3 Αναπαραγωγή υπαρχόντων αποτελεσμάτων	69
<i>Αναπαραγωγή ακολουθιών ισορροπίας – Αναπαραγωγή χρονικής εξέλιξης συστημάτων.</i>	
§ 3.4 Εφαρμογές	78
<i>Κατασκευή ακολουθιών Darwin-Riemann – Χρονική εξέλιξη και εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας.</i>	
Παράρτημα: Πηγαίος κώδικας του προγράμματος	93
Βιβλιογραφία	150
Τέλος της πτυχιακής εργασίας	151

Εισαγωγή

Τα διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων παρουσιάζουν έντονο ενδιαφέρον διότι αναμένεται να αποτελέσουν μια από τις βασικότερες πηγές βαρυτικής ακτινοβολίας, ανιχνεύσιμη από τα συμβολόμετρα LIGO, TAMA, GEO και VIRGO. Τα διπλά αυτά συστήματα εκπέμπουν ανιχνεύσιμη ακτινοβολία, από τους σημερινούς ανιχνευτές, τόσο κατά τις τελευταίες τους περιστροφές πριν την σύγκρουση, όσο και κατά την σύγκρουση των δύο αστέρων και λίγο μετά αυτής. Από τα προηγούμενα είναι άμεσα αντιληπτό πως οι τελευταίες αυτές στιγμές της ζωής των διπλών συστημάτων (συνήθως πολύ λιγότερο από ένα δευτερόλεπτο) έχουν ιδιαίτερη αξία, αφού η εκπεμπόμενη βαρυτική ακτινοβολία θα δώσει χρήσιμες πληροφορίες για την δομή των αστέρων νετρονίων. Τέτοια διπλά συστήματα είναι γνωστό ότι υπάρχουν και στο δικό μας γαλαξία, όπως για παράδειγμα το PSR B1913+16 και PSR B1534+12, τα οποία εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία χαμηλής συχνότητας, πιθανώς ανιχνεύσιμη από μελλοντικούς ανιχνευτές, όπως το LISA.

Η κατάρρευση των διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων δείχνει να είναι αναπόφευκτη. Αυτό συμβαίνει διότι η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας προκαλεί απώλεια στροφορμής και ενέργειας του συστήματος μ' αποτέλεσμα να πλησιάζουν συνεχώς οι δύο αστέρες μεταξύ τους. Φτάνοντας σε μία αρκετά κοντινή απόσταση (περίπου 50km για αστέρες νετρονίων με ακτίνα 10km), αναπτύσσονται δυναμικές αστάθειες εξαιτίας των παλιρροιακών δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των αστέρων. Αυτές οι αστάθειες επιφέρουν αποσταθεροποίηση του συστήματος μ' αποτέλεσμα την σύγκρουση των δύο σωμάτων και την δημιουργία ενός σώματος, το οποίο στη συνέχεια ενδεχομένως να καταρρέει δημιουργώντας μια μελανή οπή.

Η εξέλιξη των διπλών συστημάτων όπως περιγράφηκε παραπάνω βασίζεται σε προσομοιώσεις, που γίνονται τα τελευταία 15 περίπου χρόνια. Οι προσομοιώσεις αυτές είναι εξαιρετικά δύσκολο να γίνουν, εφόσον λαμβάνουν χώρα στις τρεις διαστάσεις, και απαιτείται μεγάλη υπολογιστική ισχύς.

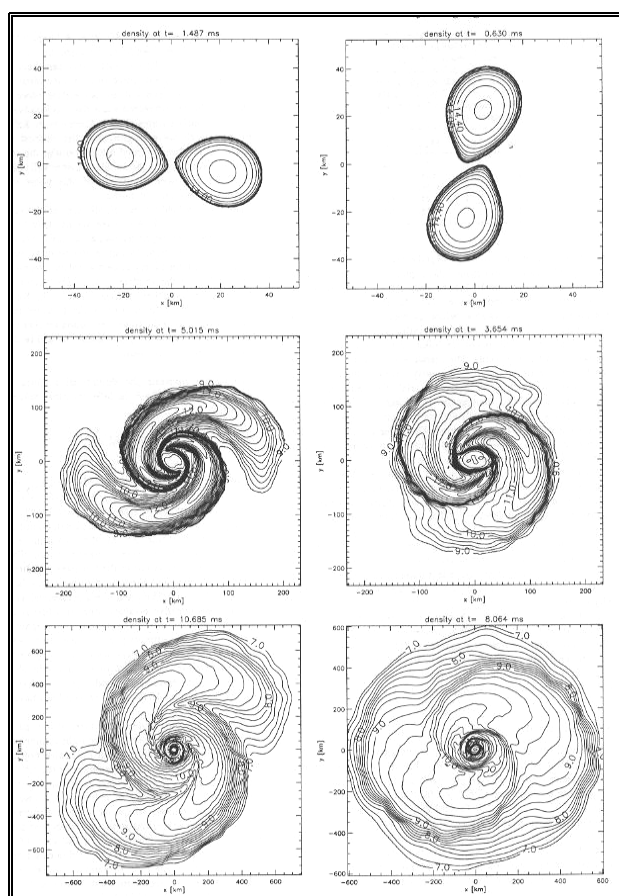
Μια πρώτη προσέγγιση έγινε αντιμετωπίζοντας τους αστέρες νετρονίων ως πολύτροπα που ακολουθούν την καταστατική εξίσωση $P = K\rho^\Gamma$, όπου P η πίεση, ρ η πυκνότητα της μάζας ηρεμίας, K μία σταθερά και Γ ο αδιαβατικός εκθέτης που συνδέεται με τον πολυτροπικό δείκτη, n , μέσω της σχέσεως $\Gamma = 1 + 1/n$. Αυτού του είδους τα μοντέλα (οι πιο απλές περιπτώσεις) μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τον Chandrasekhar το 1969 αναλυτικά. Μεταξύ άλλων οι Lai, Rasio και Shapiro

μελέτησαν πιο σύνθετες περιπτώσεις, αριθμητικά (Lai, Rasio & Shapiro 1993, 1994) και κατέληξαν στο συμπέρασμα πως οι αστάθειες που αρχικά εμφανίζονται, σύντομα καθίστανται καθολικές και προκαλούν την πλήρη αποσταθεροποίηση του συστήματος και συνεπώς την κατάρρευσή του. Ένα άλλο ενδιαφέρον στοιχείο αυτής της μελέτης είναι το γεγονός πως οι δυναμικές αστάθειες που εμφανίζονται στο σύστημα είναι νευτώνειας προέλευσης. Ωστόσο η μέθοδος αυτή είναι αρκετά προσεγγιστική και θα πρέπει να θεωρείται αξιόπιστη μόνο μέχρι την στιγμή που εμφανίζονται οι δυναμικές αστάθειες.

Μια καλύτερη προσέγγιση είναι αυτή της υδροδυναμικής ομαλοποιημένων σωματιδίων (Smoothed Particle Hydrodynamics, SPH), η οποία δίνει την δυνατότητα να ληφθούν υπόψη μια σειρά από παραμέτρους όπως η δομή του αστερά και εκπομπή νετρίνων μετά την σύγκρουση των αστερών νετρονίων. Έτσι μπόρεσε να μελετηθεί καλύτερα το γεγονός της σύγκρουσης και η δομή του σώματος που προκύπτει από την συγχώνευση των δύο αστερών νετρονίων.

Η πλήρης λύση του προβλήματος δίνεται σήμερα από την γενική θεωρία της σχετικότητας, ωστόσο η υπολογιστική ισχύς που απαιτείται για κάτι τέτοιο είναι εξαιρετικά μεγάλη και για τον λόγο αυτό ο αριθμός των συστημάτων που έχουν μελετηθεί είναι μικρός.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η σύγκρουση δύο αστερών νετρονίων ίδιας μάζας (αριστερά $1.4M_H$, δεξιά $2.0M_H$, όπου M_H , η μάζα του Ήλιου). Η προσομοίωση έγινε με την μέθοδο SPH.



Σχήμα E-1. Σύγκρουση δύο αστέρων νετρονίων ίδιας μάζας (Rosswog, Melvyn & Davies 2002)

Η τελική φάση της ζωής των διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων συνοδεύεται από έντονη εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας, η οποία μπορεί να γίνει αντιληπτή από τους ανιχνευτές βαρυτικής ακτινοβολίας LIGO, VIRGO, TAMA, GEO. Οι τελευταίοι αποτελούν συμβολόμετρα λέιζερ με ευαισθησία στην περιοχή συχνοτήτων $10-1000\text{Hz}$, όπου και αναμένεται να εκπέμπουν το μέγιστο της βαρυτικής ακτινοβολίας τα καταρρέοντα διπλά συστήματα. Συνολικά ο χρόνος που θα εκπέμπουν στη περιοχή ευαισθησίας των ανιχνευτών είναι περίπου τα τελευταία 15 λεπτά της ζωής τους, χρόνος που ανταποκρίνεται σε 16000 περίπου περιφορές. Ο αριθμός των γεγονότων που αναμένεται να μετρούν οι ανιχνευτές θα είναι της τάξης των $3\text{yr}^{-1}(\text{απόσταση}/200\text{Mpc})^3$, αν και πιο πρόσφατες μελέτες δείχνουν πως ο αριθμός αυτός ενδεχομένως να είναι πολύ μεγαλύτερος (μέχρι και 5 φορές). Τα διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων, μαζί με τα διπλά συστήματα μελανών οπών, καθώς και τα διπλά συστήματα αστέρα νετρονίων-μελανής οπής, αναμένεται να αποτελέσουν τον κύριο στόχο παρατήρησης των ανιχνευτών βαρυτικών κυμάτων.

Δεδομένης της εξαιρετικά μικρής έντασης των βαρυτικών κυμάτων και του θορυβώδους υπόβαθρου (από τον ανθρώπινο παράγοντα και από σεισμούς) οι πηγές βαρυτικών κυμάτων θα είναι αδύνατο να ανιχνευτούν αν δεν είναι με ακρίβεια γνωστή η κυματομορφή την οποία αναμένεται να έχουν. Μια τέτοια ακριβής γνώση της κυματομορφής μπορεί να προκύψει μόνο αν ληφθούν υπόψη σχετικιστικά φαινόμενα. Η λύση συνεπώς του προβλήματος των διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων επιβάλλεται να γίνει μέσω της γενικής θεωρίας της σχετικότητας.

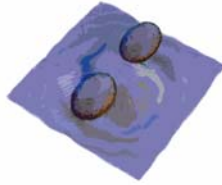
Ανιχνευτής βαρυτικών κυμάτων σχεδιάζεται να γίνει επίσης και στο διάστημα, όχι όμως πριν την επόμενη δεκαετία. Ένας τέτοιος ανιχνευτής θα είναι απαλλαγμένος από τον ανεπιθύμητο θόρυβο, που υπάρχει αναπόφευκτα στο γήινο περιβάλλον, και επομένως θα μπορεί να ανιχνεύει βαρυτικά κύματα σε συχνότητες που δεν θα μπορούν οι επίγειοι ανιχνευτές.

Στην εργασία αυτή θα αντιμετωπίσουμε τους αστέρες νετρονίων ως πολύτροπα που διέπονται από την καταστατική εξίσωση $P = K\rho^\Gamma$, στην οποία αναφερθήκαμε και παραπάνω, και ακολουθώντας την τεχνική που περιγράφηκε από τους Lai, Rasio και Shapiro θα δούμε ορισμένες περιπτώσεις διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων, κατασκευάζοντας και το ανάλογο λογισμικό.

Η προσέγγιση που ακολουθούμε είναι νευτώνεια ενώ η βαρυτική ακτινοβολία προέρχεται από κατάλληλες προσεγγίσεις του τανυστή τετραπολικής ροπής. Επίσης δεν λαμβάνουμε υπόψη μας κανένα είδος τριβής. Τα αποτελέσματα που θα πάρουμε δεν μπορούν να θεωρηθούν αξιόπιστα μετά την εμφάνιση της δυναμικής αστάθειας και κατά την σύγκρουση. Ωστόσο η απλότητα της μεθόδου καθώς και η αναπαραγωγή, ποιοτικά, πολλών αποτελεσμάτων την καθιστούν εξαιρετικά χρήσιμη.

Το κείμενο που ακολουθεί είναι χωρισμένο σε τρία κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια συνοπτική παρουσίαση της αντιμετώπισης του προβλήματος των διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων, παραθέτοντας και κάποια αποτελέσματα από σχετικές εργασίες. Στο δεύτερο κεφάλαιο αναπτύσσουμε το φορμαλισμό και τη μεθοδολογία για τη μοντελοποίηση των αστέρων νετρονίων ως ελλειψοειδή πολύτροπα. Στο τρίτο κεφάλαιο περιγράφουμε το πρόγραμμα που βασίστηκε στην ελλειψοειδή αντιμετώπιση του προβλήματος, όλες τις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν και παρατίθενται κάποιες εφαρμογές χρονικής εξέλιξης διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων. Τέλος στο παράρτημα παρατίθεται

ο πηγαίος κώδικας του προγράμματος. Μια μικρή εισαγωγή προηγείται κάθε κεφαλαίου αναλύοντας με περισσότερες λεπτομέρειες το περιεχόμενό του.



Κεφάλαιο 1^ο

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται συνοπτικά η θεωρία που αφορά στα διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων, παρουσιάζονται οι τρόποι αντιμετώπισης του προβλήματος και κάποια αποτελέσματα αυτών. Συγκεκριμένα η *πρώτη ενότητα* αναφέρεται στις κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας που αναμένεται να προέλθουν από τέτοια συστήματα. Η *δεύτερη ενότητα* αφορά στις αστάθειες που εμφανίζουν τα διπλά συστήματα, η οποία και τελικά οδηγεί στην σύγκρουση. Στην *τρίτη ενότητα* κάνουμε νύξη για μη συγχρονισμένα διπλά συστήματα, ενώ η *τελευταία ενότητα* είναι αφιερωμένη στη σχετικότητα και τις δυσκολίες ως προς την εφαρμογή της.

1.1 Κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας

Δυστυχώς σήμερα δεν υπάρχει η δυνατότητα μιας ενιαίας περιγραφής του φαινομένου της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολία από διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων (και μελανών οπών). Κάτι τέτοιο αναμένεται να επιτευχθεί με την αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Einstein της γενικής θεωρίας της σχετικότητας, εγχείρημα εξαιρετικά δύσκολο, αφού απαιτεί μεγάλη υπολογιστική ισχύ. Έτσι μη έχοντας τη δυνατότητα για μια καθολική περιγραφή του φαινομένου μπορεί κανείς να προσφύγει σε προσεγγίσεις.

Η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας από διπλά συστήματα προσεγγίζεται συνήθως σε δύο φάσεις, κάθε μια από τις οποίες αντιστοιχεί και σε μία εποχή της ζωής του διπλού συστήματος. Έτσι έχουμε την προσέγγιση για την περίοδο πριν την σύγκρουση των αστέρων (*inspiral waveform*), η οποία είναι το κομμάτι της ακτινοβολίας που εκπέμπεται σε χαμηλές συχνότητες, και την προσέγγιση για την σύγκρουση των δύο αστέρων (*coalescence waveform*), που είναι το κομμάτι της ακτινοβολίας σε υψηλές συχνότητες. Παρακάτω θα αναλύσουμε αυτά τα δύο κομμάτια ξεχωριστά.

Κυματομορφή πριν την σύγκρουση

Αυτή η περίοδος εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας χαρακτηρίζει τις τελευταίες δεκαπέντε χιλιάδες περίπου περιφορές του συστήματος. Κατά την περίοδο αυτή η συχνότητα εκπομπής ανεβαίνει από τα 10Hz στα 300Hz. Για να υπολογίσει κανείς τις αναμενόμενες κυματομορφές θα πρέπει να κάνει ανώτερης τάξης μετά-νευτώνειες προσεγγίσεις για το πρόβλημα των δύο σημειακών μαζών. Τα αποτελέσματα που προκύπτουν με την μέθοδο αυτή είναι αρκετά ακριβή, γεγονός απαραίτητο αν σκεφτεί κανείς ότι ένα σφάλμα στη διαφορά φάσης της τάξης $\approx 10^{-4}$ μετά από μερικές χιλιάδες περιστροφές θα μπορούσε να αποτρέψει την ανίχνευση του σήματος.

Ο μετά-νευτώνειος φορμαλισμός αποτελείται από ένα ανάπτυγμα της παραμέτρου $\varepsilon \approx M/r \approx u^2$, όπου M η μάζα του συστήματος, r η απόσταση μεταξύ των αστερών και u η τροχιακή ταχύτητα. Η παράμετρος αυτή είναι μικρή για ασθενή βαρυτικά πεδία και μικρές ταχύτητες. Στόχος είναι με μία σημειακή αντιμετώπιση των αστερών να υπολογίσει κανείς το μετά-νευτώνειο ανάπτυγμα μέχρι τον όρο $O[(u/c)^{11}]$ ώστε να επιτευχθεί ικανοποιητική ακρίβεια στον προσδιορισμό της κυματομορφής.

Κυματομορφή κατά την σύγκρουση

Για τον υπολογισμό της κυματομορφής κατά την σύγκρουση των αστερών δεν μπορεί να συνεχιστεί η προσέγγιση των σημειακών μαζών. Ενδιαφέροντα στοιχεία προκύπτουν από την επίλυση των νευτώνειων εξισώσεων της υδροδυναμικής, θεωρώντας την βαρυτική ακτινοβολία ως ένα διαταρακτικό όρο στην τετραπολική προσέγγιση. Για να έχει νόημα κάτι τέτοιο θα πρέπει να ικανοποιούνται οι ακόλουθες δύο ανισότητες:

$$\varepsilon \ll 1 \text{ και } M/R \ll 1 \quad (1.1.1)$$

όπου συμβολίσαμε με R την ακτίνα του αστερά νετρονίων.

Η νευτώνεια αντιμετώπιση της κατάρρευσης μπορεί να γίνει είτε με τρισδιάστατες αριθμητικές υδροδυναμικές προσομοιώσεις, είτε αναλυτικά μοντελοποιώντας τους αστέρες νετρονίων ως ελλειψοειδή. Η τελευταία αυτή αντιμετώπιση επιτρέπει την μελέτη φαινομένων όπως την επίδραση της παλιρροιακής διαταραχής στην εξέλιξη του συστήματος και την εσωτερική κίνηση του ρευστού, όμως δεν μπορεί να δώσει πληροφορίες για το γεγονός καθαυτό της κατάρρευσης του συστήματος. Στην περίπτωση αυτή απαιτούνται αριθμητικές προσομοιώσεις για να αντιμετωπίσουν τις πολύπλοκες υδροδυναμικές αλληλεπιδράσεις με εκτόξευση μάζας που συνήθως συνοδεύουν την σύγκρουση.

Για την ποσοτική αξιοπιστία των κυματομορφών απαιτούνται σχετικιστικοί υπολογισμοί, οι οποίοι αναμένεται να αναδείξουν και ποιοτικά κάποια φαινόμενα, όπως αυτό της κατάρρευσης του σώματος που θα προκύψει από την σύγκρουση δύο αστερών νετρονίων. Τέτοιοι υπολογισμοί απαιτούν αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Einstein σε 3+1 διαστάσεις, χωρίς προσεγγίσεις.

Σφάλμα στη διαφορά φάσης της κυματομορφής πριν την σύγκρουση

Όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτής της παραγράφου είναι απαραίτητο το φίλτρο που έχουμε κατασκευάσει (η κυματομορφή που υπολογίσαμε) και το σήμα που περιμένουμε να ληφθεί από τους ανιχνευτές να παραμένουν σε σύμπτωση φάσης κατά την διάρκεια ενός κλάσματος ενός κύκλου ($\delta N_{\text{cyc}} \leq 0.1$), καθώς το σήμα περνάει από την περιοχή ευαισθησίας του ανιχνευτή. Θεωρώντας σημειακές μάζες και εκπομπή τετραπολικής βαρυτικής ακτινοβολίας μπορούμε να πάρουμε την εξής σχέση για τους κύκλους που χάνουμε σε μια λογαριθμική κλίμακα συχνότητας:

$$\left(\frac{d\delta N_{\text{cyc}}}{d \ln f} \right)_0 = \frac{5}{96\pi} \frac{1}{M_c^{5/3} (\pi f)^{5/3}} \quad (1.1.2)$$

όπου $M_c \equiv \mu^{5/3} M^{2/5}$, μ η ανηγμένη μάζα και M η συνολική μάζα του συστήματος. Αναμένεται ότι οι ανιχνευτές LIGO/VIRGO θα μπορούν να προσδιορίζουν την M_c με ακρίβεια 0.04% για διπλά συστήματα αστερών νετρονίων και 0.3% για διπλά συστήματα μελανών οπών.

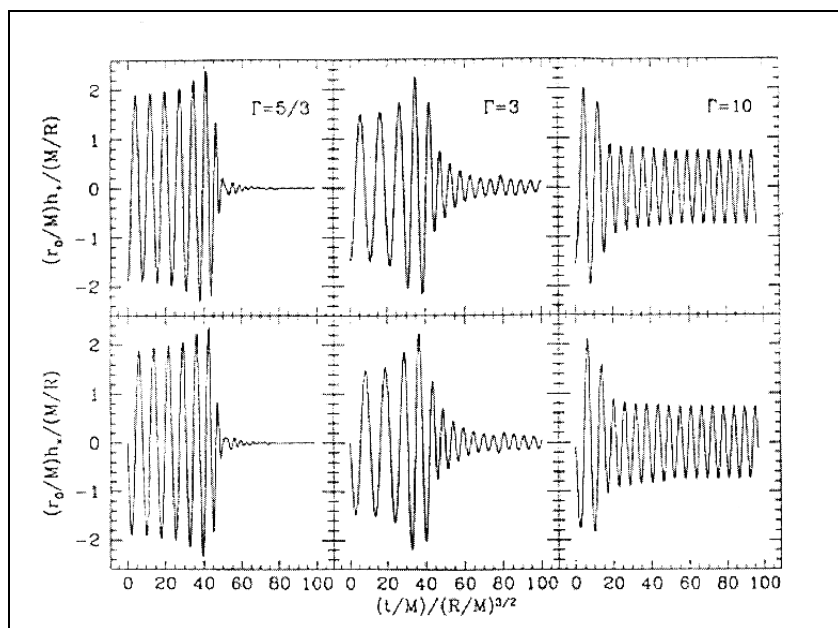
Η παραπάνω απλή προσέγγιση μπορεί να γίνει πιο σύνθετη και ως εκ τούτου πιο ακριβής, αν συνυπολογίσουμε μετά-νευτώνειους όρους. Έτσι, για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι ο ένας από τους αστέρες έχει ιδιοστροφορμή $\vec{S}$, η οποία σχηματίζει γωνία i με την κανονική διεύθυνση του τροχιακού επιπέδου, τότε η σχέση (1.1.2) θα διορθωθεί κατά έναν παράγοντα και θα προκύψει η παρακάτω σχέση:

$$\left(\frac{d\delta N_{\text{cyc}}}{d \ln f} \right) = \left(\frac{d\delta N_{\text{cyc}}}{d \ln f} \right)_0 \left[1 + \frac{113}{12} \frac{S}{M^2} x^{3/2} \cos i \right] \quad (1.1.3)$$

όπου $x \equiv (\pi M f)^{2/3} \equiv M/r$ και επιπλέον κάναμε την προσέγγιση ότι η μάζα του ενός αστέρα είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή του άλλου. Η εξάρτηση της συχνότητας από την ιδιοστροφορμή θα μας επιτρέψει να βγάλουμε συμπεράσματα για την κατανομή της ιδιοστροφορμής, αν και στην πραγματικότητα η διαδικασία θα είναι μάλλον αντίστροφη, δηλαδή γνωρίζοντας με κάποιον άλλον τρόπο την στροφορμή θα είμαστε σε θέση να βγάλουμε συμπεράσματα για την ανηγμένη μάζα του συστήματος.

Εφαρμογές

Παρακάτω παραθέτουμε ορισμένες κυματομορφές όπως αυτές υπολογίστηκαν κάνοντας προσομοιώσεις.

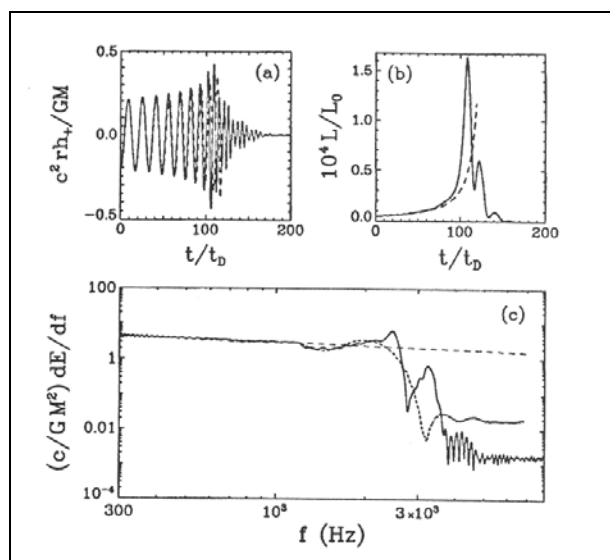


Σχήμα 1.1. Κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας για διάφορους πολυτροπικούς δείκτες (Rasio & Shapiro, 1994)

Στο Σχήμα 1.1 βλέπουμε τις κυματομορφές για διάφορους πολυτροπικούς δείκτες, συγκεκριμένα από αριστερά προς δεξιά $\Gamma = 5/3$, $\Gamma = 3$ και $\Gamma = 10$ (αντιστοιχούν στις τιμές $n = 3/2$, $n = 1/2$ και $n = 1/9$), για διπλό σύστημα με αστέρες ίδιας μάζας. Οι κυματομορφές καταγράφονται όπως θα φαίνονταν κατά την διεύθυνση περιστροφής, και σε απόσταση r_0 από το σύστημα. Η πάνω τριάδα αφορά στην “+” πόλωση, ενώ η κάτω τριάδα στην “×” πόλωση (Rasio & Shapiro, 1994). Παρατηρούμε ότι, καθώς αυξάνουμε τη τιμή του πολυτροπικού δείκτη n , η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας λίγο μετά την σύγκρουση φθίνει όλο και πιο απότομα και στην περίπτωση $n = 3/2$ αμέσως μετά την σύγκρουση δεν έχουμε εκπομπή ακτινοβολίας. Η συμπεριφορά αυτή είναι αναμενόμενη αφού για μικρές τιμές του πολυτροπικού δείκτη το ρευστό είναι περισσότερο ασυμπίεστο και συνεπώς το σώμα που προκύπτει αμέσως μετά την σύγκρουση διατηρεί μία ασύμμετρη δομή που στην πραγματικότητα είναι η πηγή της βαρυτικής ακτινοβολίας. Αντίθετα για την περίπτωση του ρευστού με πολυτροπικό δείκτη $n = 3/2$ το ρευστό είναι αρκετά συμπίεσιμο, ώστε το σώμα που θα προκύψει αμέσως μετά την σύγκρουση να αποκτήσει πιο γρήγορα σφαιρικό σχήμα και συνεπώς να χάσει την ικανότητά του να εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία.

Στο Σχήμα 1.2 φαίνονται τα χαρακτηριστικά της βαρυτικής ακτινοβολίας ενός διπλού συστήματος όπως τα έδωσε μια προσομοίωση με την μέθοδο SPH. Το σύστημα αποτελείται από δύο αστέρες ίσης μάζας και ακτίνας ($M = 1.4M_H$ και $R = 10km$ αντίστοιχα), ενώ οι αστέρες τοποθετήθηκαν αρχικά σε απόσταση $40km$. Μετά από την πάροδο χρόνου $t = 125t_D$, όπου $t_D = (R^3/GM)^{1/2}$, το σύστημα

κατέρρευσε. Οι συμπαγείς γραμμές αντιπροσωπεύουν το αποτέλεσμα της προσομοίωσης, ενώ οι διακεκομμένες τα αποτελέσματα για ισοδύναμο σύστημα ση-



Σχήμα 1.2. (α) Η βαρυτική κυματομορφή για ένα παρατηρητή στην διεύθυνση $\theta=\phi=0$ και σε απόσταση r από την πηγή. Η διακεκομμένη γραμμή αντιστοιχεί σε σημειακές μάζες. (β) Η φωτεινότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας συναρτήσει του χρόνου. (γ) Το ενεργειακό φάσμα του βαρυτικού κύματος dE/df (Zhuge, Centrella & McMillan, 1996).

μειακών μαζών. Παρατηρούμε ότι η διαφορά μεταξύ των δύο καμπυλών εμφανίζεται λίγο πριν την σύγκρουση (Zhuge, Centrella & McMillan, 1996).

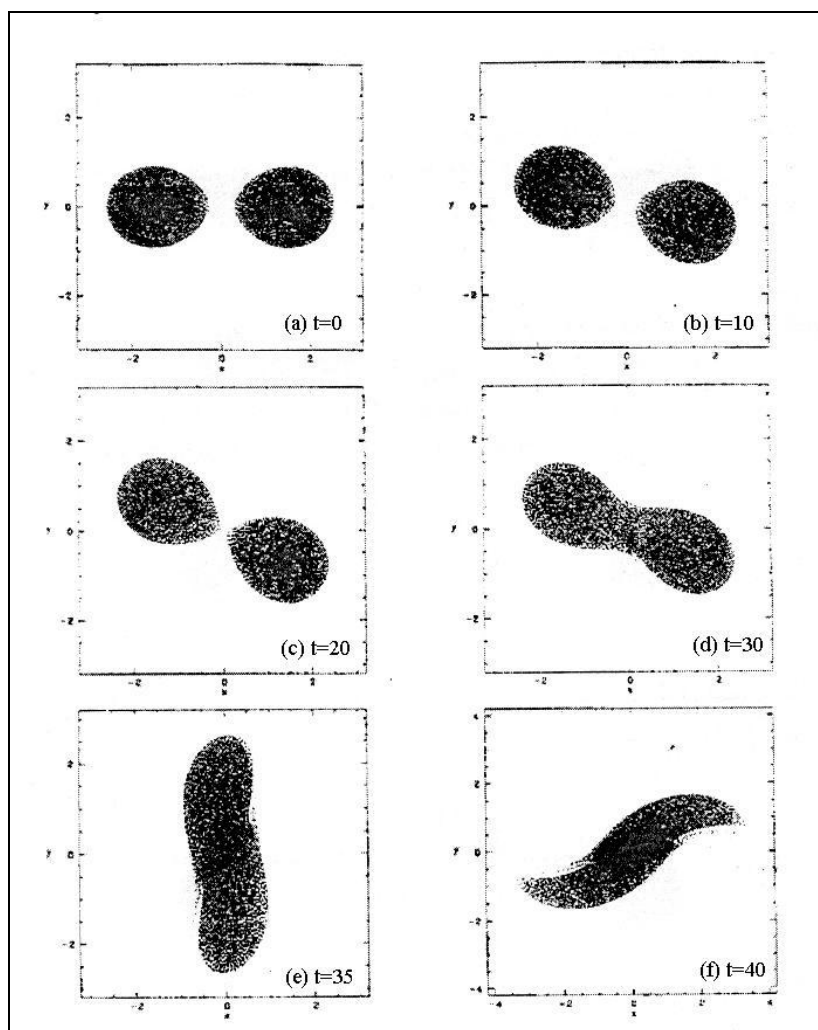
1.2. Υδροδυναμικές αστάθειες και σύγκρουση

Είναι γνωστό πως διπλά συστήματα με μικρή απόσταση μεταξύ των μελών τους είναι δυναμικά ασταθή, χωρίς να ληφθούν υπόψη σχετικιστικά φαινόμενα. Αυτό είναι γενικό χαρακτηριστικό όλων των συστημάτων που το δυναμικό τους είναι πιο «απότομο» από το νόμο $1/r$. Η αστάθεια εκδηλώνεται αφού τα δύο μέλη πλησιάσουν σε μικρή απόσταση. Στην περίπτωση αυτή η αστάθεια οφείλεται στο γεγονός ότι ασκούνται παλιρροϊκές δυνάμεις μεταξύ των αστέρων. Αν κανείς λάβει υπόψη και σχετικιστικά φαινόμενα, για αρκετά συμπαγή συστήματα, η αστάθεια δείχνει να ενισχύεται.

Η ευστάθεια των διπλών συστημάτων εξαρτάται ισχυρά από την καταστατική εξίσωση των αστέρων. Έτσι συστήματα με πολυτροπικό δείκτη $n \leq 1$ είναι πιο επιρρεπή στο να εκδηλώσουν αστάθεια απ' ό,τι τα συστήματα για τα οποία ισχύει $n \geq 1$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι στα πρώτα πρόκειται για περισσότερο ασυμπίεστο ρευστό και ως εκ τούτου οι παλιρροϊκές δυνάμεις μεταξύ των αστέρων θα είναι πολύ πιο ισχυρές. Οι Rasio και Shapiro έδειξαν ότι αστέρες με πολυτροπικό

δείκτη $n=1$ δεν μπορούν να δημιουργήσουν ευσταθή διπλά συστήματα για απόσταση μεταξύ τους $r \leq 3R_0$, όπου R_0 είναι η ακτίνα των αστέρων. Το αποτέλεσμα αυτό επαληθεύτηκε από ανεξάρτητες μελέτες και μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο.

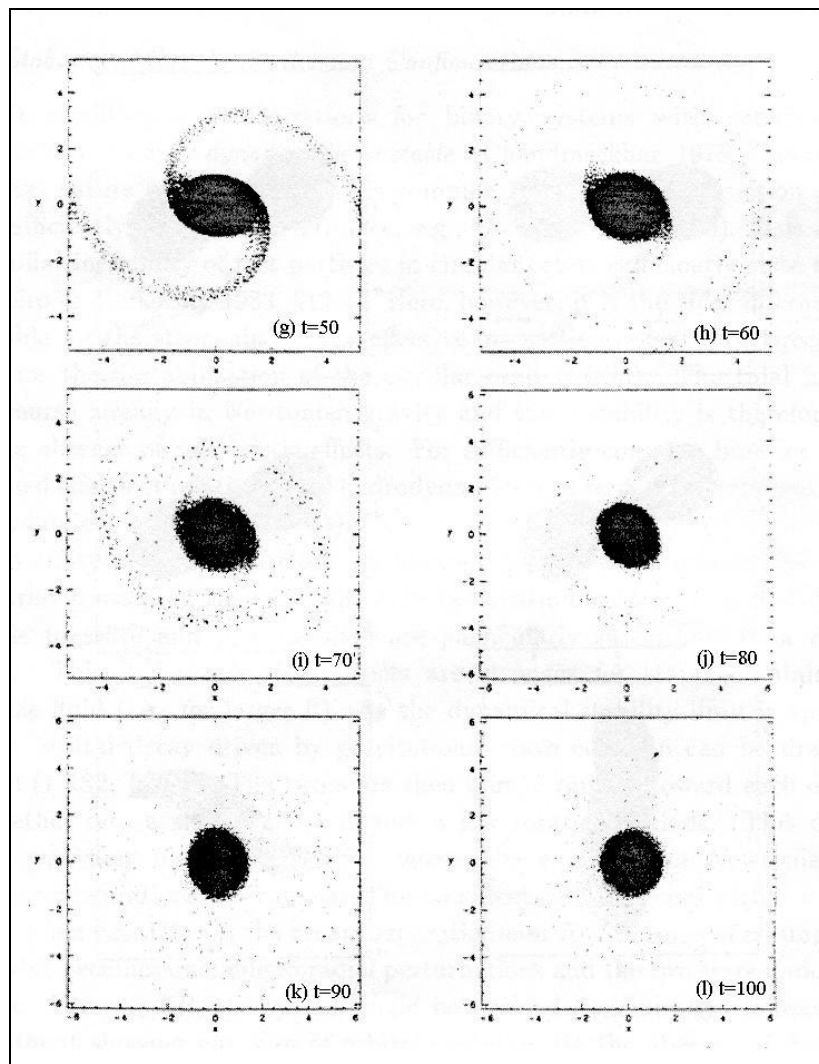
Στο Σχήμα 1.3 και 1.4 βλέπουμε την δυναμική εξέλιξη ενός διπλού συστήματος που αποτελείται από δύο όμοιους αστέρες. Το σύστημα είναι συγχρονισμένο και η περιστροφή των αστέρων γίνεται αντίθετα προς τους δείκτες του ρολογιού. Κατά το αρχικό, γραμμικό στάδιο της αστάθειας, οι δύο αστέρες πλησιάζουν ο ένας τον άλλον και έρχονται σε επαφή μετά από μία περίπου περιστροφή. Στο συμπεριστρεφόμενο σύστημα η σχετική ταχύτητα παραμένει υποηχητική και ως εκ τούτου η εξέλιξη σ' αυτό το στάδιο μπορεί να θεωρηθεί αδιαβατική. Μετά από δύο περίπου περιστροφές οι πυρήνες των δύο αστέρων έχουν συγκρουστεί και έχει σχηματιστεί το σώμα που βλέπουμε στο Σχήμα 1.3 (e). Στο σημείο αυτό της εξέλιξης ανακύπτει μια δεύτερη αστάθεια και απότομα εκτοξεύεται μάζα, η οποία διερχόμενη από τα εξωτερικά σημεία Lagrange διαχέεται με σπειροειδή κίνηση στον περιβάλλοντα χώρο.



Σχήμα 1.3. Εξέλιξη ενός ασταθούς συστήματος (για χρόνο από 0 ως 40) αποτελούμενο από δύο όμοιους αστέρες με πολυτροπικό δείκτη $n=1$. Η αρχική απόσταση μεταξύ των αστέρων είναι $r=2.95R$, όπου R η αρχική αδιατάρακτη ακτίνα των αστέρων. Η προσομοίωση έγινε με την μέθοδο SPH με 40000 σημεία (Rasio & Shapiro, 1994).

Στην τελική φάση οι βραχίονες που έχουν σχηματιστεί από την διάχυση μάζας ενώνονται και χάνουν την συμπαγή τους μορφή. Η σχετική ταχύτητα των γειτονικών βραχιόνων καθώς συγκρούονται είναι υπερηχητική μ' αποτέλεσμα τη δημιουργία κρουστικού κύματος. Η άλως που σχηματίζεται από την σύγκρουση έχει αξονική συμμετρία και περιστρέφεται γύρω από τον πυρήνα ακολουθώντας έναν νόμο της μορφής $\Omega \propto \tilde{\omega}^{-\nu}$ με $\nu \leq 2$ και $\tilde{\omega}$ η απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Η άλως αποτελεί το 20% περίπου της συνολικής μάζας των αστερών, ενώ το υπόλοιπο 80% αποτελεί ο πυρήνας. Η εξέλιξη του σχηματισμένου πλέον πυρήνα, δεν μπορεί να προβλεφθεί με ακρίβεια, από την μέθοδο SPH, αλλά απαιτείται η χρήση πιο εξελιγμένων αριθμητικών μεθόδων στη σχετικότητα.

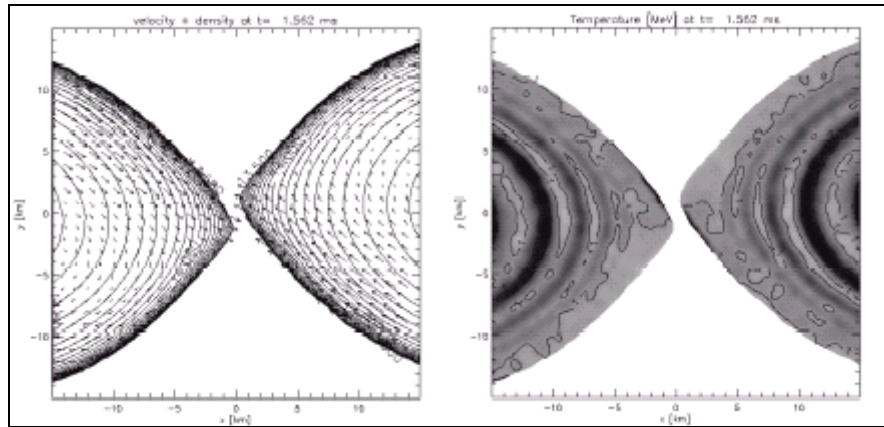
Οι κυματομορφές που προκύπτουν από την παραπάνω προσομοίωση είναι αυτές του Σχήματος 1.1 για $\Gamma = 3$. Η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας συμβαδίζει με την έλλειψη συμμετρικότητας, η οποία εξαρτάται άμεσα από την καταστατική εξίσωση που χρησιμοποιούμε. Όταν ο εκθέτης Γ έχει τιμή μικρότερη από μία κρίσιμη τιμή $\Gamma < \Gamma_{crit}$, όπου $\Gamma_{crit} \cong 2.3$ (που αντιστοιχεί σε πολυτροπικό δείκτη $n \cong 0.8$), τότε το σώμα αποκτά συμμετρία και σταματά να εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία. Αντιθέτως



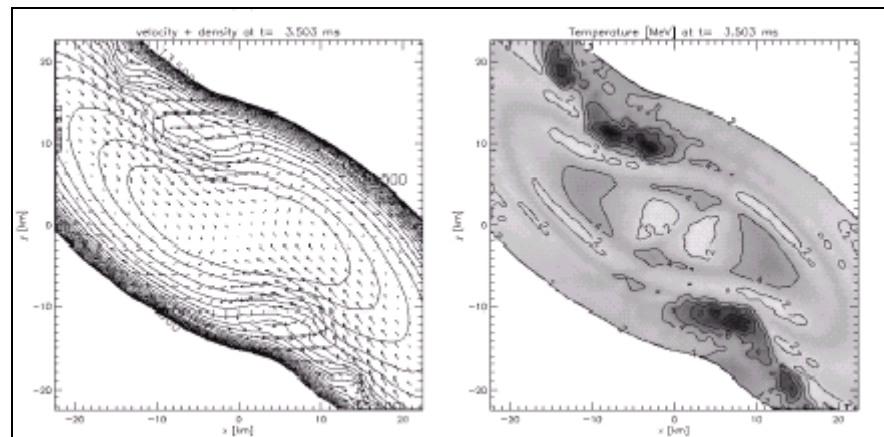
Σχήμα 1.4. Εξέλιξη του συστήματος του σχήματος 1.3 (από χρόνο 50 ως 100).

για $\Gamma > \Gamma_{crit}$ υπάρχει η δυνατότητα διατήρησης κάποιας ασυμμετρίας και γι' αυτό δεν σταματά η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας μετά την σύγκρουση. Ρεαλιστικά μοντέλα αναμένεται να έχουν $\Gamma \cong 2 - 3$. Η ανίχνευση πραγματικών κυματομορφών σαν αυτή του σχήματος 1.1 θα δώσουν μια ένδειξη, αν όχι απόδειξη, για την καταστατική εξίσωση που ακολουθούν οι αστέρες. Τέλος, ο συνυπολογισμός σχετικιστικών φαινομένων θα τροποποιήσει την κρίσιμη τιμή του πολυτροπικού δείκτη.

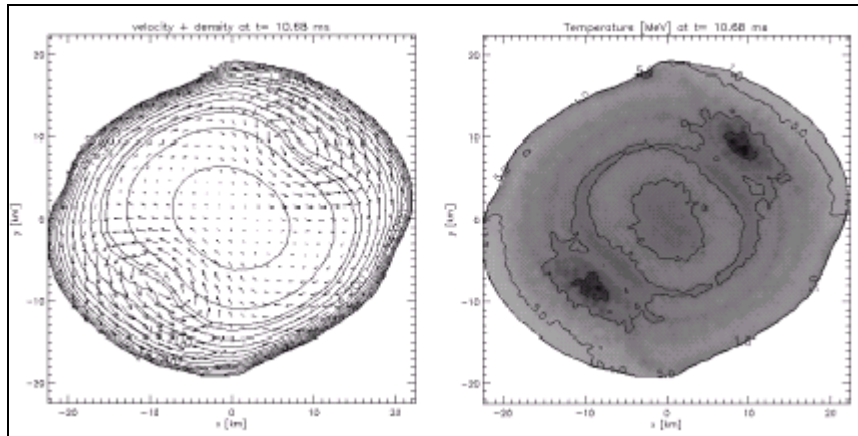
Στα Σχήματα 1.5, 1.6 και 1.7 φαίνεται η εξέλιξη ενός συγχρονισμένου διπλού συστήματος αποτελούμενο από δύο αστέρες νετρονίων ίδιας μάζας, ίσης με $1.4M_H$. Η προσομοίωση έγινε με την μέθοδο SPH και χρησιμοποιήθηκε τρισδιάστατο πλέγμα αποτελούμενο από 10^6 περίπου σημεία. Η αρχική απόσταση μεταξύ των αστέρων ήταν $48km$ και αγνοήθηκαν φαινόμενα τριβής.



Σχήμα 1.5. Προσομοίωση σύγκρουσης δύο αστέρων νετρονίων ίδιας μάζας, την χρονική στιγμή $t=1.562ms$. Αριστερά φαίνεται το πεδίο ταχυτήτων και οι ισόπυκνες καμπύλες ενώ δεξιά δίνονται οι αντίστοιχες θερμοκρασίες (Rosswog & Davies, 2002) .

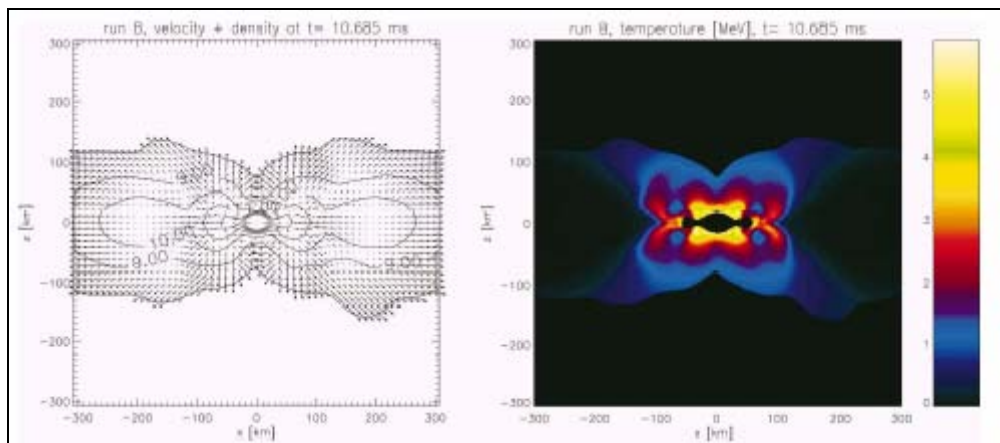


Σχήμα 1.6. Χρονική στιγμή $t=3.503m$. Εμφανίζονται δύο περιδινούμενες περιοχές. Στη διπλανή εικόνα φαίνεται πως έχουν υψηλές θερμοκρασίες (Rosswog & Davies, 2002).



Σχήμα 1.7. Χρονική στιγμή $t=10.68\text{ms}$. Οι δύο περιδινούμενες περιοχές που εμφανίστηκαν μετά την σύγκρουση παραμένουν και διατηρούν υψηλές θερμοκρασίες (Rosswog & Davies, 2002).

Στο δε Σχήμα 1.8 φαίνεται μια εγκάρσια τομή του συσσωματώματος που προέκυψε από την σύγκρουση (επίπεδο x-z).

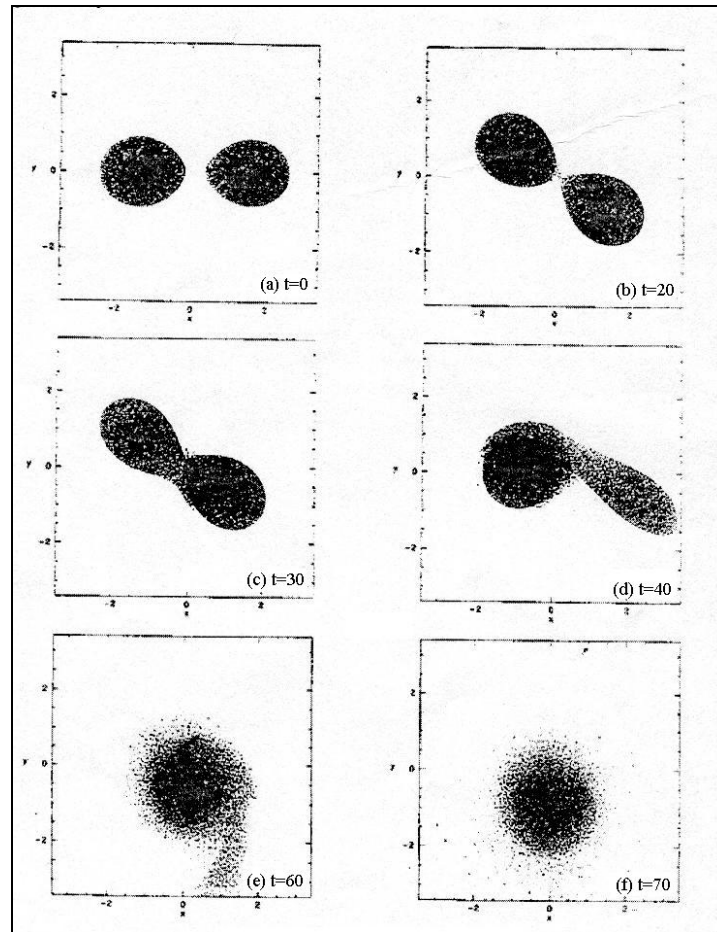


Σχήμα 1.8. Πεδίο ταχυτήτων και ισόπυκνες γραμμές (αριστερά) και η θερμοκρασία για το σώμα που προέκυψε της σύγκρουσης (δεξιά). Οι αποστάσεις εκφράζονται σε km και οι θερμοκρασίες σε Mev (Rosswog & Davies, 2002).

Μεταφορά μάζας και εξάρτηση από τον λόγο των μαζών των αστερών

Έντονο ενδιαφέρον παρουσιάζει το ερώτημα αν μπορεί να υπάρξει ευσταθής μεταφορά μάζας μεταξύ των μελών ενός διπλού συστήματος αστερών νετρονίων. Σχετικές μελέτες έχουν γίνει τα τελευταία τριάντα χρόνια με αντιφατικά αποτελέσματα. Φαίνεται ωστόσο πως για συστήματα με $\Gamma > 2$ οι δυναμικές αστάθειες εμφανίζονται πριν το όριο Roche και ως εκ τούτου πριν αρχίσει η μεταφορά μάζας το σύστημα είναι ήδη ασταθές και επομένως η ευσταθής μεταφορά μάζας είναι αδύνατη.

Σημαντικό ρόλο στο παραπάνω θέμα δείχνει να παίζει ο λόγος των μαζών για τους δύο αστέρες νετρονίων. Έτσι για σύστημα με πολυτροπικό εκθέτη $\Gamma = 3$ και λόγο μαζών $q = 0.85$, το όριο αστάθειας είναι $r/R_o = 2.95$, ενώ το όριο Roche είναι $r/R_o = 2.85$ και επομένως δεν μπορεί να υπάρξει ευσταθής μεταφορά μάζας. Ωστόσο η εξέλιξη ενός τέτοιου συστήματος δείχνει να είναι τελείως διαφορετική, από την εξέλιξη ενός συστήματος με αστέρες ίσης μάζας. Στο Σχήμα 1.5 φαίνεται η εξέλιξη ενός συστήματος με αστέρες που έχουν λόγο μαζών $q = 0.85$.



Σχήμα 1.9. Εξέλιξη ενός διπλού συστήματος με λόγο μαζών $q=0.85$ (Rasio & Shapiro, 1994).

Μετά από περίπου δύο περιφορές ο αστέρας μικρότερης μάζας υφίσταται τις παλιρροϊκές δυνάμεις του συνοδού του, οι οποίες μεταφέρουν το μεγαλύτερο ποσοστό της μάζας του αστέρα στην επιφάνεια του συνοδού του, ενώ ένα μικρό ποσό της μάζας του διαχέεται μέσω του εξωτερικού σημείου Lagrange, με σπειροειδή τρόπο στον περιβάλλοντα χώρο. Ο αστέρας μεγαλύτερης αρχικής μάζας σ' όλη τη φάση της εξέλιξης διαταράσσεται ελάχιστα και τελικά αποτελεί τον κεντρικό πυρήνα του νέου αστέρα που προήλθε από αυτή τη «σύγκρουση». Η εξέλιξη που περιγράψαμε είναι χαρακτηριστική για διπλά συστήματα με αστέρες λίγο διαφορετικής μάζας.

Η παράμετρος που επηρεάζει περισσότερο από κάθε άλλη την εκπεμπόμενη βαρυτική ακτινοβολία είναι ο λόγος M/R για τους αστέρες νετρονίων. Για το πρόβλημα των δύο σημειακών μαζών η εξάρτηση από την παραπάνω παράμετρο είναι, για το πλάτος του κύματος: $(r_o/M)h \propto M/R$, όπου r_o η απόσταση του παρατηρητή από το σύστημα, ενώ για την φωτεινότητα ισχύει: $L \propto (M/R)^5$. Παρομοίως και για την συχνότητα μέγιστης εκπομπής θα υπάρχει η εξάρτηση: $f_{\max} \propto (M/R)^{3/2}$. Οι περισσότερες καταστατικές εξισώσεις δίνουν $M/R \approx 0.1 - 0.2$ με ακτίνα $R \approx 10 \text{ km}$, σχεδόν ανεξάρτητη από την μάζα στην περιοχή $0.8M_o \leq M \leq 1.5M_o$.

Τόσο η υδροδυναμική όσο και η σχετικότητα τροποποιούν τις παραπάνω σχέσεις. Συμπεριλαμβάνοντας για παράδειγμα την σχετικότητα στους υπολογισμούς το πλάτος της κυματομορφής και η φωτεινότητα του σήματος θα δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$\left(\frac{r_o}{M}\right)h_{\max} = \tilde{H}(q, \Gamma, M/R) \times \left(\frac{M}{R}\right) \quad (1.2.1)$$

$$\frac{L}{L_o} = \tilde{L}(q, \Gamma, M/R) \times \left(\frac{M}{R}\right)^5 \quad (1.2.2)$$

όπου $\tilde{H}(q, \Gamma, M/R)$ και $\tilde{L}(q, \Gamma, M/R)$ είναι αδιάστατες ποσότητες.

1.3. Μη συγχρονισμένα διπλά συστήματα

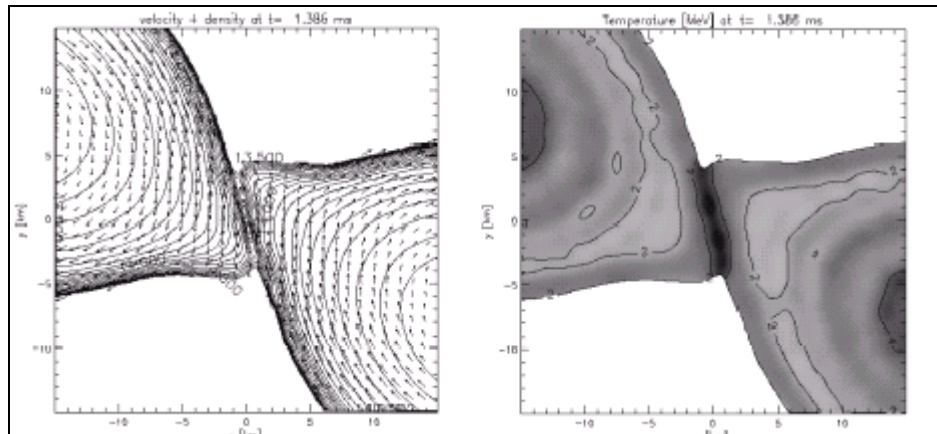
Ο χρόνος που απαιτείται για τον συγχρονισμό ενός διπλού συστήματος αστέρων νετρονίων συνήθως είναι πολύ μεγαλύτερος από τον χρόνο περιφοράς των αστέρων. Ακόμη και υποθέτοντας την ύπαρξη ιζώδους η τιμή του θα έπρεπε να είναι εξαιρετικά μεγάλη ώστε να επιφέρει τον συγχρονισμό του συστήματος.

Για τα μη συγχρονισμένα συστήματα η κατάρρευση είναι πιο σύνθετη απ' ό,τι για συγχρονισμένα συστήματα. Η κυματομορφή της σύγκρουσης διαφέρει αρκετά, γεγονός που οφείλεται και στην επιπλέον εξάρτηση αυτής από τις στροφορμές των αστέρων.

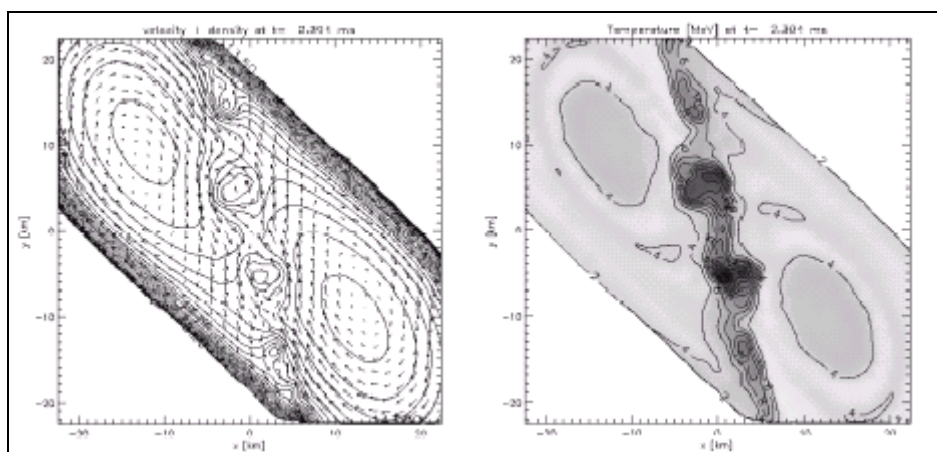
Στα Σχήματα 1.10, 1.11 και 1.12 φαίνεται η σύγκρουση δύο αστέρων νετρονίων, ίδιας μάζας ($1.4M_H$) οι οποίοι αρχικά δεν έχουν ιδιοστροφορμή. Οι δύο

αυτοί αστέρες στο συμπεριστρεφόμενο σύστημα αναφοράς θα έχουν αντίθετες στροφορές και ως εκ τούτου στο σημείο επαφής των επιφανειών τους θα δημιουργηθούν δίνες οι οποίες είναι ασταθείς κατά Kelvin-Helmholtz και εξαιρετικά δύσκολο να προσομοιωθούν ακόμη και στην περίπτωση των νευτώνειων εξισώσεων.

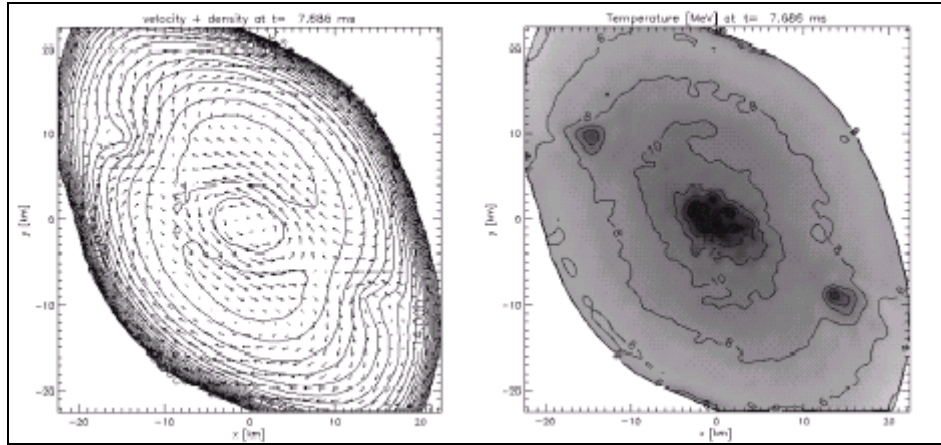
Τέλος στα σχήματα 1.13, 1.14 και 1.15 δίνεται το πεδίο ταχυτήτων και η θερμοκρασία του περιβάλλοντα χώρου για διάφορες χρονικές στιγμές.



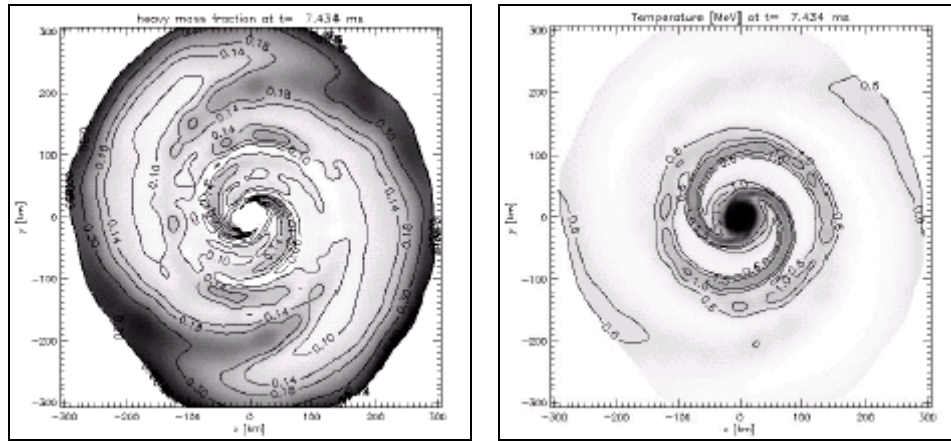
Σχήμα 1.10. Σύγκρουση δύο αστέρων νετρονίων ίδιας μάζας και μηδενικής ιδιοστροφορμής. Αριστερά φαίνεται το πεδίο ταχυτήτων και ισόπυκνες καμπύλες, ενώ δεξιά φαίνονται οι αντίστοιχες θερμοκρασίες (χρονική στιγμή $t=1.386\text{ms}$, προσομοίωση περίπου 350000 σημείων) (Rosswog & Davies, 2002).



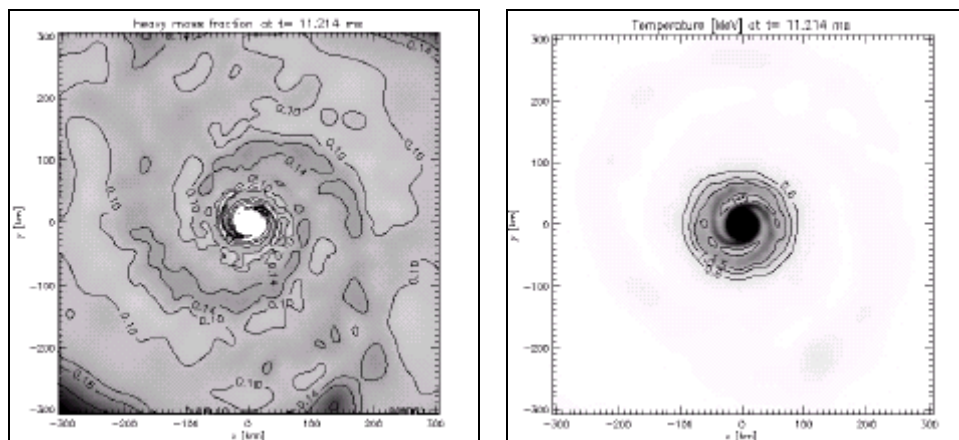
Σχήμα 1.11. Χρονική στιγμή $t=2.394\text{ms}$ της σύγκρουσης. Έχει εμφανιστεί μια ζώνη από δίνες στο σημείο επαφής των αστέρων (Rosswog & Davies, 2002).



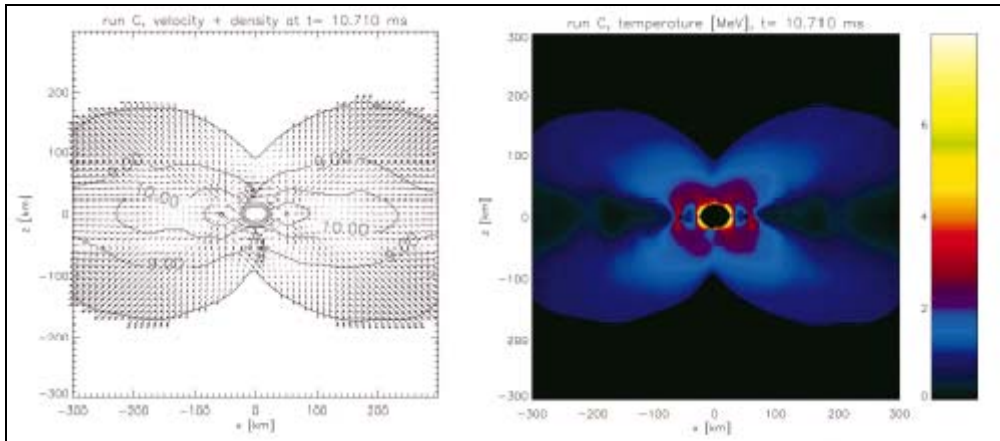
Σχήμα 1.12. Σχηματισμός ενός διαφορικά περιστρεφόμενου αστερά που προέκυψε από την σύγκρουση (Rosswog & Davies, 2002).



Σχήμα 1.13. Περιβάλλον χώρος της σύγκρουσης του συστήματος των σχημάτων 1.10 ως 1.12. Αριστερά φαίνεται η κατανομή μάζας και δεξιά η θερμοκρασία (χρονική στιγμή $t=7.434\text{ms}$) (Rosswog & Davies, 2002).



Σχήμα 1.14. Η διάχυση της μάζας στον περιβάλλον χώρο και η θερμοκρασία την χρονική στιγμή $t=11.214\text{ms}$ (Rosswog & Davies, 2002).



Σχήμα 1.15. Εγκάρσια τομή του πεδίου ταχυτήτων και της θερμοκρασίας στον περιβάλλοντα χώρο του συστήματος. Χρονική στιγμή $t=10.710\text{ms}$ (Rosswog & Davies, 2002).

1.4. Διπλά συστήματα στην Γενική Θεωρία της Σχετικότητας

Στα αυστηρά πλαίσια της θεωρίας της Σχετικότητας και όσο αφορά στα διπλά συστήματα δεν υπάρχουν κυκλικές τροχιές ισορροπίας, εξαιτίας της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας. Ωστόσο, όταν ο χρόνος που απαιτείται για την κατάρρευση του συστήματος από εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας είναι πολύ μεγαλύτερος από την περίοδο περιφοράς τότε το σύστημα μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται προσεγγιστικά σε ισορροπία. Από την θεώρηση αυτή προκύπτει και η έννοια της *εσώτατης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς* (EEKT), που αποτελεί την τελευταία τροχιά όπου η τροχιακή περίοδος του συστήματος είναι πολύ μεγαλύτερη από τον χρόνο που απαιτείται για την κατάρρευση εξαιτίας υδροδυναμικής ή σχετικιστικής τροχιακής αστάθειας του συστήματος.

Η ευστάθεια αυτών των περίπου κυκλικών τροχιών μπορεί να μελετηθεί στα πλαίσια της γενικής θεωρίας της σχετικότητας είτε περικλύποντας όρους στο μετάνευτώνειο ανάπτυγμα, είτε λύνοντας αριθμητικά μέρος των μη γραμμικών εξισώσεων Einstein. Αν και οι παραπάνω μέθοδοι δεν είναι παρά προσεγγίσεις, ωστόσο όλα τα αποτελέσματα που προκύπτουν δείχνουν να συμφωνούν στο γεγονός ότι για τον υπολογισμό της εσώτατης ευσταθούς κυκλικής τροχιάς είναι απαραίτητο να λάβει κανείς υπόψη του τόσο νευτώνεια παλιρροϊκά φαινόμενα, όσο και σχετικιστικά φαινόμενα. Παρακάτω αναπτύσσουμε σύντομα τους δύο τρόπους αντιμετώπισης σχετικιστικών φαινομένων για τον υπολογισμό της EEKT.

Μετά-Νευτώνειοι υπολογισμοί τις EEKT

Θεωρώντας τους αστέρες ως ελλειψοειδή πολύτροπα (κεφάλαιο 2^ο) και προσθέτοντας μετά-νευτώνειους όρους στις εκφράσεις της εσωτερικής και βαρυτικής ενέργειας, καθώς και κατάλληλους υβριδικούς τροχιακούς όρους, μπορεί κανείς να

κατασκευάσει ακολουθίες ισορροπίας, οι οποίες επιτρέπουν τον υπολογισμό της EEKT.

Τα μοντέλα αυτά είναι απλά, δεν απαιτούν μεγάλη υπολογιστική ισχύ και έτσι μπορούν να προσομοιωθούν και μη συγχρονισμένα διπλά συστήματα. Τα συμπεράσματα στα οποία κατέληξαν οι Lombardi, Rasio και Shapiro χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτή είναι ότι η συχνότητα εκπομπής στην EEKT για μη περιστρεφόμενα συστήματα είναι κατά 17% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη συγχρονισμένων συστημάτων για πολυτροπικό δείκτη $n = 0.5$ και κατά 20% για δείκτη $n = 1$ (Lombardi, Rasio & Shapiro, 1997).

Πλήρως σχετικιστικοί υπολογισμοί της EEKT

Οι πρώτοι υπολογισμοί διπλών συστημάτων σε ημι-ισορροπία λαμβάνοντας υπόψη την σχετικότητα έγιναν από τον Baumgarte (Baumgarte *et al* 1996, 1998). Αυτές αφορούσαν σε συγχρονισμένα διπλά συστήματα με πολύτροπα ίδιας μάζας σε κατάσταση ημισορροπίας. Ο Baumgarte κατασκεύασε ακολουθίες σταθερής μάζας ηρεμίας για διαφορετικές ακτίνες και καθόρισε σημεία καμψής στις καμπύλες ενέργειας. Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στην εμφάνιση δυναμικής αστάθειας και ως εκ τούτου στον προσδιορισμό της EEKT. Από τα αποτελέσματα που προέκυψαν με την μέθοδο αυτή δείχνει να επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι δεν μπορεί να υπάρξει EEKT για $n \geq 1.5$.

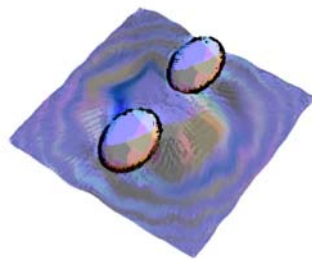
Η τελική κατάσταση του συστήματος

Για την μελέτη της τελικής κατάστασης του συστήματος, ο συνυπολογισμός σχετικιστικών φαινομένων είναι περισσότερο απαραίτητος από κάθε άλλη περίπτωση.

Έστω η περίπτωση δύο αστερών νετρονίων μάζας $0.5M_{\max}$ ο καθένας, όπου $M_{\max}$ η μέγιστη μάζα για έναν απομονωμένο αστέρα νετρονίων. Η σύγκρουση των δύο αστερών θα συνοδευτεί από την δημιουργία κρουστικών κυμάτων που θα κατευθυνθούν κατά μήκος της ευθείας σύγκρουσης των αστερών. Τα κρουστικά κύματα εξυπηρετούν στην μετατροπή κινητικής ενέργειας σε θερμική. Μετά το γεγονός αυτό υπάρχουν δύο πιθανοί τρόποι εξέλιξης του συστήματος. Σύμφωνα με τον πρώτο, το προκύπτον από την σύγκρουση σώμα εκτελεί μία η δύο ταλαντώσεις σε δυναμική κλίμακα ($\approx ms$) και στην συνέχεια καταρρέει σχηματίζοντας μια μελανή οπή. Στην δεύτερη περίπτωση η θερμική πίεση που προκύπτει από τα κρουστικά κύματα είναι ικανή να αναχαιτίσει προσωρινά την κατάρρευση μέχρις ότου η εκπομπή νετρίνων προκαλέσει την ψύξη του σώματος, σε μια χρονική κλίμακα της τάξης των 10sec. Οι δύο παραπάνω τρόποι εξέλιξης, που εξαρτώνται από τη μάζα των δύο αστερών και την καταστατική εξίσωση, δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα σε ότι αφορά την κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας και την εκπομπή νετρίνων.

Στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Einstein στις 3+1 διαστάσεις εμφανίζονται πολλές δυσκολίες, ορισμένες από τις οποίες θα αναφερθούν παρακάτω. Η επίλυση μη γραμμικών συστημάτων σε πολλές διαστάσεις αποτελεί πάντα μια δυσκολία, αν και δεν είναι η σχετικότητα η μοναδική περίπτωση εμφάνισης αυτής της δυσκολίας. Κάτι ανάλογο συμβαίνει και στην επίλυση των εξισώσεων της υδροδυναμικής στις τρεις διαστάσεις. Ιδιαιτερότητα της σχετικότητας αποτελεί ωστόσο η εμφάνιση ανωμαλιών στις αριθμητικές απεικονίσεις. Στις περιοχές όπου εμφανίζονται ανωμαλίες οι φυσικές ποσότητες απειρίζονται, κάτι που κάνει τις προσομοιώσεις να καταρρέουν, ακόμη και αν οι ανωμαλίες είναι απομονωμένες στο εσωτερικό μιας μελανής οπής. Μια ακόμη ιδιαιτερότητα των σχετικιστικών προσομοιώσεων είναι η δυσκολία στον προσδιορισμό της κυματομορφής της βαρυτικής ακτινοβολίας σε κάποια απόσταση από την πηγή. Το πρόβλημα αυτό ανακύπτει διότι η βαρυτική ακτινοβολία θεωρείται ως μία διαταραχή στην μετρική του χωροχρόνου. Έτσι, υπολογίζοντας με μεγαλύτερη ακρίβεια την εξέλιξη της περιοχής κοντά στο διπλό σύστημα, όπου οι εξισώσεις είναι περισσότερο μη γραμμικές, χάνει σε ακρίβεια η κυματομορφή μακριά από το σύστημα.

Τόσο τα διπλά συστήματα αστερών νετρονίων, όσο και τα αντίστοιχα μελανών οπών είναι εξαιρετικά δύσκολο να προσομοιωθούν στα πλαίσια της γενικής θεωρίας της σχετικότητας. Μια μη προσεγγιστική λύση των προβλημάτων αυτών θα απαιτούσε εξαιρετικά μεγάλη υπολογιστική ισχύ, η οποία τώρα αρχίζει να γίνεται διαθέσιμη. Αν και χρησιμοποιούνται ακόμη κάποιες προσεγγίσεις στην επίλυση των εξισώσεων Einstein, αυτές είναι πλέον δευτερεύουσας σημασίας και σύντομα αναμένονται αποτελέσματα χωρίς απολύτως καμία προσέγγιση. Οι σημερινές τεχνικές, αν και προσεγγιστικές, μπορούν να δώσουν σημαντικές πληροφορίες αν γίνουν με έξυπνο τρόπο.



Κεφάλαιο 2^ο

Στο κεφάλαιο αυτό αναπτύσσεται η βασική θεωρία πάνω στην οποία θα στηριχθεί ο υπολογιστικός κώδικας. Συγκεκριμένα, στην *πρώτη ενότητα* αναπτύσσεται η μέθοδος, βάσει της οποίας οδηγούμαστε σε καταστάσεις ισορροπίας για τα πολύτροπα. Πρόκειται για μία ενεργειακή αρχή μεταβολών, η οποία στην πραγματικότητα δίνει καταστάσεις ημι-ισορροπίας, οι οποίες όμως για χρονικά διαστήματα, της τάξης της περιόδου περιφοράς μπορούν να θεωρηθούν ως καταστάσεις ισορροπίας. Στην *δεύτερη ενότητα* παραθέτουμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος, χωρίς την ύπαρξη όρων βαρυτικής ακτινοβολίας, ενώ στην *τρίτη ενότητα* παραθέτουμε τις εξισώσεις εξέλιξης του συστήματος έχοντας συνυπολογίσει την βαρυτική ακτινοβολία. Τέλος, στην *τέταρτη ενότητα* συζητάμε το θέμα της ευστάθειας των διπλών συστημάτων αποτελούμενα από ελλειψοειδή πολύτροπα.

2.1 Κατασκευή ακολουθιών ισορροπίας Darwin-Riemann

Βασικές Υποθέσεις

Ας θεωρήσουμε ένα απομονωμένο ρευστό σύστημα. Αυτό θα χαρακτηρίζεται από διατηρήσιμα μεγέθη όπως η μάζα, M και η στροφορμή, J . Η δε ενέργεια μπορεί πάντοτε να γραφεί συναρτήσει της πυκνότητας και του πεδίου ταχυτήτων του ρευστού, $\rho(x)$ και $\vec{u}(x)$ αντίστοιχα.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι να αντικατασταθεί ο άπειρος αριθμός των βαθμός ελευθερίας που περιέχονται στις $\rho(x)$ και $\vec{u}(x)$, από έναν περιορισμένο αριθμό παραμέτρων $a_1, a_2, \dots$ με τέτοιο τρόπο ώστε η συνολική ενέργεια να γίνει συνάρτηση αυτών των παραμέτρων, δηλαδή

$$E = E(a_1, a_2, \dots; M, J, \dots) \quad (2.1.1)$$

Τότε μία κατάσταση ισορροπίας θα καθοριστεί ελαχιστοποιώντας την ενέργεια,

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.1.2)$$

Μία έκφραση σαν την (2.1.1) μπορεί να υπάρξει για ένα διπλό σύστημα αστέρων αρκεί να γίνουν μερικές παραδοχές σχετικά με την δομή του, συγκεκριμένα:

- θεωρούμε διπλά συστήματα μόνο σε κυκλική τροχιά
- υιοθετούμε μια πολυτροπική καταστατική εξίσωση

Κάτω από τις παλιρροιογόνες δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των αστέρων θα θεωρήσουμε πως οι αστέρες δεν διατηρούν το σφαιρικό τους σχήμα και για τον λόγο αυτό θα τους θεωρήσουμε ως ελλειψοειδή. Επίσης υποθέτουμε πως:

- οι ισόπυκνες επιφάνειες στο εσωτερικό κάθε αστερά είναι ομόκεντρα ελλειψοειδή
- η κατανομή της πυκνότητας $\rho(m)$, όπου m η μάζα μιας ισόπυκνης επιφάνειας, είναι ίδια με την αντίστοιχη σ' ένα σφαιρικό πολύτροπο του ίδιου όγκου.
- τέλος, το διάνυσμα του στροβιλισμού θεωρείται παράλληλο προς τον άξονα τροχιακής περιστροφής

Για έναν απομονωμένο περιστρεφόμενο αστερά οι παραπάνω υποθέσεις ικανοποιούνται πλήρως όταν το ρευστό είναι ασυμπίεστο ($n = 0$). Σ' αυτή τη περίπτωση η κατάσταση ισορροπίας αντιστοιχεί σ' ένα ομογενές ελλειψοειδές. Στην περίπτωση διπλού συστήματος οι παραπάνω υποθέσεις ικανοποιούνται στην περίπτωση ασυμπίεστου ρευστού, μόνο εφόσον λάβουμε υπόψη την αλληλεπίδραση μέχρι τον τετραπολικό όρο. Για την περίπτωση όπου $n \neq 0$ οι συνθήκες ικανοποιούνται προσεγγιστικά και σε συνδυασμό με την μέθοδο ελαχιστοποίησης της ενέργειας οι καταστάσεις των αστέρων θα πρέπει να εκληφθούν ως προσεγγιστικές καταστάσεις ισορροπίας.

Έκφραση της ενέργειας

Ας θεωρήσουμε δύο πολύτροπα μάζας M και M' αντίστοιχα (τονούμενες ποσότητες θα αναφέρονται στον δεύτερο αστερά), συμβολίζουμε τον λόγο των μαζών των δύο αστέρων ως $p = M/M'$. Οι καταστατικές εξισώσεις που θα χαρακτηρίζουν τους δύο αστέρες θα είναι οι εξής:

$$P = K\rho^{(1+1/n)} \quad \text{και} \quad P' = K'\rho'^{(1+1/n')} \quad (2.1.3)$$

Επίσης θα συμβολίσουμε με r την απόσταση μεταξύ των κέντρων των ελλειψοειδών με a_1, a_2, a_3 τους τρεις άξονες του πρώτου αστέρα και με a'_1, a'_2, a'_3 τους άξονες του δεύτερου αστέρα, αντιστοίχως. Οι a_1 και a'_1 κείτονται επί της ευθείας που ενώνει τα κέντρα των δύο αστέρων, οι a_2 και a'_2 έχουν την κατεύθυνση της τροχιακής κίνησης και τέλος οι a_3 και a'_3 είναι κάθετοι προς το επίπεδο που σχηματίζουν οι a_1, a_2 για τον πρώτο αστέρα και αντίστοιχα για τον δεύτερο αστέρα.

Σε κάποιες περιπτώσεις είναι βολικό να καθορίσουμε την κατασκευή του συστήματος από του αδιάστατους λόγους:

$$\lambda_1 = \left(\frac{a_3}{a_1} \right)^{2/3} \quad \text{και} \quad \lambda_2 = \left(\frac{a_3}{a_2} \right)^{2/3} \quad (2.1.4)$$

και την κεντρική πυκνότητα ρ_c . Αντίστοιχα ορίζουμε τις ποσότητες για τον δεύτερο αστέρα και τις συμβολίζουμε τονούμενες.

Το σύστημα πλέον καθορίζεται από τις επτά ανεξάρτητες μεταβλητές $\{r, \rho_c, \lambda_1, \lambda_2, \rho'_c, \lambda'_1, \lambda'_2\}$

Στη συνέχεια υπολογίσουμε την ολική ενέργεια του συστήματος. Αυτή θα είναι ίση με το άθροισμα:

$$E = U + U' + W + W' + T + W_i \quad (2.1.5)$$

όπου, U : η εσωτερική ενέργεια

W : η βαρυτική ενέργεια σύνδεσης

T : η κινητική ενέργεια του συστήματος

W_i : η ενέργεια βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο αστέρων

και αντίστοιχα οι τονούμενες ποσότητες για τον δεύτερο αστέρα. Υπολογίζουμε τον κάθε όρο χωριστά.

Η εσωτερική ενέργεια

Η εσωτερική ενέργεια για τον πρώτο αστέρα θα είναι:

$$U = \int \frac{nP}{\rho} dm = k_1 K \rho_c^{1/n} M \quad (2.1.6)$$

και αντίστοιχα για τον δεύτερο θα προκύψει αν αντικαταστήσουμε τις μη τονούμενες ποσότητες με τονούμενες. Το k_1 στον παραπάνω τύπο δίνεται από τη σχέση:

$$k_1 = \frac{n(n+1)}{5-n} \xi_1 |\theta'_1| \quad (2.1.7)$$

όπου θ, ξ οι συνήθειες μεταβλητές Lane-Emden για πολύτροπα

Η βαρυτική ενέργεια σύνδεσης

Η βαρυτική ενέργεια σύνδεσης είναι:

$$W = -\frac{3}{5-n} \frac{GM^2}{R} f = -k_2 GM^{5/3} \rho_c^{1/3} f \quad (2.1.8)$$

όπου συμβολίζουμε τη μέση ακτίνα με $R \equiv (a_1 a_2 a_3)^{1/3}$ και τους αδιάστατους όρους

$$f = f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{A_1 a_1^2 + A_2 a_2^2 + A_3 a_3^2}{2R^2} \quad (2.1.9)$$

(για την περίπτωση σφαίρας ισχύει $f = 1$). Οι όροι A_i είναι τα ολοκληρώματα

$$A_i \equiv a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)} \quad \text{με} \quad \Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u) \quad (2.1.10)$$

και επίσης

$$k_2 = \frac{3}{5-n} \left(\frac{4\pi |\theta'_1|}{\xi_1} \right)^{1/3} \quad (2.1.11)$$

Η έκφραση της βαρυτικής ενέργειας σύνδεσης για τον δεύτερο αστέρα προκύπτει αλλάζοντας μη τονούμενες με τονούμενες μεταβλητές.

Η κινητική ενέργεια

Ορίζουμε την αδιάστατη παράμετρο

$$f_R \equiv \frac{\zeta}{\Omega_{orb}} \quad (2.1.12)$$

όπου με Ω_{orb} συμβολίζουμε την τροχιακή γωνιακή ταχύτητα και με ζ τον στροβιλισμό στο συμπεριστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, θα είναι:

$$\zeta \equiv (\vec{\nabla} \times \vec{u}) \cdot \vec{e}_3 = -\frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1 a_2} \Lambda \quad (2.1.13)$$

όπου Λ είναι η κυκλική συχνότητα της εσωτερικής κίνησης του ρευστού. Το πεδίο ταχυτήτων, επίσης στο συμπεριστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, δίνεται από την σχέση:

$$\vec{u} = Q_1 x_2 \vec{e}_1 + Q_2 x_1 \vec{e}_2 \quad (2.1.14)$$

όπου

$$Q_1 = -\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta = +\frac{a_1}{a_2} \Lambda \quad \text{και} \quad Q_2 = +\frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \zeta = -\frac{a_2}{a_1} \Lambda \quad (2.1.15)$$

τα μοναδιαία διανύσματα αντιστοιχούν στις κατευθύνσεις των αξόνων a_1, a_2 των ελλειψοειδών. Η ταχύτητα και ο στροβιλισμός του ρευστού στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα δίνεται αντίστοιχα από τις εξισώσεις:

$$\vec{u}^{(0)} = \vec{u} + \vec{\Omega}_{orb} \times \vec{x} \quad (2.1.16)$$

$$\zeta^{(0)} \equiv (\vec{\nabla} \times \vec{u}^{(0)}) \cdot \vec{e}_3 = (2 + f_R) \Omega_{orb} \quad (2.1.17)$$

Παρατηρούμε ότι η σύγχρονη κίνηση προκύπτει όταν $f_R = \zeta = \Lambda = 0$, ενώ ένα μη περιστρεφόμενο πεδίο ταχυτήτων απαιτεί $f_R = -2$.

Η έκφραση για την κινητική ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής του αστερά θα είναι:

$$T_S = \frac{1}{2} I (\Lambda^2 + \Omega_{orb}^2) - \frac{2}{5} k_n M a_1 a_2 \Lambda \Omega_{orb} \quad (2.1.18)$$

όπου $I = \frac{1}{5} k_n M (a_1^2 + a_2^2)$ (2.1.19) είναι η ροπή αδράνειας. Τέλος είναι

$$k_n \equiv \frac{5}{3} \frac{\int_0^{\xi_1} \theta^n \xi^4 d\xi}{\xi_1^4 |\theta'_1|} \quad (2.1.20)$$

για το οποίο ισχύει $k_n = 1$ όταν $n = 0$.

Η έκφραση για την κινητική ενέργεια ιδιοπεριστροφής του δεύτερου αστερά προκύπτει αντικαθιστώντας τις διαφορές μεταβλητές με τις αντίστοιχες τονούμενες.

Η τροχιακή κινητική ενέργεια θα δίνεται από τη σχέση:

$$T_O = \frac{1}{2} \mu \Omega_{orb}^2 r^2 \quad (2.1.21)$$

όπου $\mu = \frac{MM'}{M + M'}$ η ανηγμένη μάζα του συστήματος. Έτσι η συνολική ενέργεια θα είναι ίση με το άθροισμα:

$$T = T_S + T'_S + T_O \quad (2.1.22)$$

Η ενέργεια βαρυτικής αλληλεπίδρασης

Η ενέργεια αυτή θα δίνεται από την σχέση:

$$W_i = -\frac{GMM'}{r} - \frac{GM}{2r^3}(2I'_{11} - I'_{22} - I'_{33}) - \frac{GM'}{2r^3}(2I_{11} - I_{22} - I_{33}) \quad (2.1.23)$$

$$\text{όπου συμβολίσαμε: } I_{ij} = \frac{1}{5} k_n M a_i^2 \delta_{ij} \quad \text{και} \quad I'_{ij} = \frac{1}{5} k'_n M' a_i'^2 \delta_{ij} \quad (2.1.24)$$

Έχοντας υπολογίσει όλους τους επιμέρους όρους της ενέργειας είναι εύκολο να πάρουμε την έκφραση αυτής από την σχέση (2.1.5) :

$$E = E(r, \rho_c, \lambda_1, \lambda_2, \rho'_c, \lambda'_1, \lambda'_2; M, M', \ell, \ell', J) = U + U' + W + W' + T + W_i \quad (2.1.5\alpha)$$

οι ποσότητες ℓ, ℓ' δίνονται από τις σχέσεις:

$$\ell \equiv \left(-\frac{1}{5\pi} k_n M \right) C = \left(-\frac{1}{5\pi} k_n M \right) \pi a_1 a_2 \zeta^{(0)} = I\Lambda - \frac{2}{5} k_n M a_1 a_2 \Omega_{orb} \quad (2.1.25)$$

$$\ell' \equiv \left(-\frac{1}{5\pi} k'_n M' \right) C' = \left(-\frac{1}{5\pi} k'_n M' \right) \pi a'_1 a'_2 \zeta'^{(0)} = I'\Lambda' - \frac{2}{5} k'_n M' a'_1 a'_2 \Omega_{orb} \quad (2.1.26)$$

συμβολίζουμε με $C = \pi a_1 a_2 \zeta^{(0)}$ την κυκλοφορία, η οποία είναι διατηρήσιμη ποσότητα και επειδή η ℓ είναι ευθέως ανάλογη της κυκλοφορίας την χαρακτηρίζουμε και αυτή κυκλοφορία του ρευστού.

Η δε στροφορμή του συστήματος J θα αποτελείται από το άθροισμα τριών όρων, δηλαδή τροχιακό όρο J_O και τους δύο όρους της στροφορμής λόγω περιστροφής των αστερών, J_S και J'_S . Έτσι θα έχουμε:

$$J_S = I\Omega_{orb} - \frac{2}{5} k_n M a_1 a_2 \Lambda \quad \text{και} \quad J'_S = I'\Omega_{orb} - \frac{2}{5} k'_n M' a'_1 a'_2 \Lambda' \quad (2.1.27)$$

$$J_O = \mu \Omega_{orb} r^2 \quad (2.1.28)$$

$$\text{και η συνολική στροφορμή θα είναι:} \quad J = J_S + J'_S + J_O \quad (2.1.29)$$

Συνθήκες ισορροπίας

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω οι συνθήκες ισορροπίας των πολυτρόπων θα προκύψουν από την ελαχιστοποίηση της ενέργειας τους συστήματος. Αυτό μαθηματικά μεταφράζεται στις εξισώσεις:

$$\frac{\partial E}{\partial a_i} = 0 \quad \text{όπου } a_i = \{r, \rho_c, \lambda_1, \lambda_2, \rho'_c, \lambda'_1, \lambda'_2\}$$

Η έκφραση της ενέργειας που παραγωγίζουμε είναι αυτή που δίνεται από την εξίσωση (1.1.5α).

Ξεκινώντας με την μεταβλητή r , $\partial E / \partial r = 0$ καταλήγουμε σε μία σχέση μεταξύ Ω_{orb}^2 και r , η οποία αποτελεί ένα «τροποποιημένο νόμο του Kepler». Η σχέση αυτή είναι η (2.1.30).

$$\Omega_{orb}^2 = \frac{G(M + M')}{r^3} (1 + \delta + \delta') \quad (2.1.30)$$

Ορίζοντας τις ποσότητες:

$$\mu_R = \frac{GM'}{r^3} \quad \text{και} \quad \mu'_R = \frac{GM}{r^3} \quad (2.1.31)$$

η σχέση (2.1.30) μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή:

$$\Omega_{orb}^2 = \mu_R (1 + p) (1 + \delta + \delta') = \mu'_R \left(1 + \frac{1}{p}\right) (1 + \delta + \delta') \quad (2.1.32)$$

όπου με δ και δ' συμβολίσαμε τις ποσότητες:

$$\delta = \frac{3}{2} \frac{(2I_{11} - I_{22} - I_{33})}{Mr^2} \quad \text{και} \quad \delta' = \frac{3}{2} \frac{(2I'_{11} - I'_{22} - I'_{33})}{M'r^2} \quad (2.1.33)$$

Από τη δεύτερη συνθήκη $\partial E / \partial \rho_c = 0$ προκύπτει το θεώρημα Virial για τον αστέρα μάζας M , συγκεκριμένα προκύπτει:

$$\frac{3}{n} U + W + 2T_s = -\frac{GMM'}{R} g_t \quad (2.1.34)$$

όπου συμβολίζουμε $g_t \equiv \frac{R}{Mr^3} (2I_{11} - I_{22} - I_{33}) = \frac{2}{3} \frac{R}{r} \delta$ (2.1.35). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (2.1.6) και (2.1.8) στην (2.1.34) θα καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση:

$$R = R_o \left[f(\lambda_1, \lambda_2) \left(1 - 2 \frac{T_s}{|W|} \right) - \left(\frac{5-n}{3p} \right) g_t \right]^{-n/(3-n)} \quad (2.1.36)$$

όπου R_o η ακτίνα του σφαιρικού πολύτροπου η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$R_o = \xi_1 \left(\xi_1^2 |\theta'_1| \right)^{-(1-n)/(3-n)} \left[\frac{(n+1)K}{4\pi G} \right]^{n/(3-n)} \left(\frac{M}{4\pi} \right)^{(1-n)/(3-n)} \quad (2.1.37)$$

Εντελώς ανάλογα η τρίτη συνθήκη $\partial E / \partial \rho'_c = 0$ θα δώσει μια έκφραση παρόμοια με την (2.1.36), την

$$R' = R'_o \left[f(\lambda'_1, \lambda'_2) \left(1 - 2 \frac{T'_s}{|W'|} \right) - \left(\frac{5-n'}{3} \right) p g'_t \right]^{-n/(3-n')} \quad (2.1.38)$$

ενώ και η έκφραση της R'_o θα είναι παρόμοια μ' αυτή της (2.1.37).

Η τέταρτη και πέμπτη συνθήκη, $\partial E / \partial \lambda_1 = \partial E / \partial \lambda_2 = 0$, συναρτήσει της σχέσης (2.1.34) θα δώσει:

$$\begin{aligned} -\frac{U}{n} &= M_{11} + I_{11} (\Omega_{orb}^2 + 2\mu_R + 2\Omega_{orb} Q_2) + I_{22} Q_1^2 \\ -\frac{U}{n} &= M_{22} + I_{22} (\Omega_{orb}^2 - \mu_R - 2\Omega_{orb} Q_1) + I_{11} Q_2^2 \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

$$-\frac{U}{n} = M_{33} - \mu_R I_{33}$$

όπου τα Q_i δίνονται στην εξίσωση (2.1.15) και επίσης ορίσαμε και τον τανυστή δυναμικής ενέργειας:

$$M_{ij} = -2\pi G \bar{\rho} A_i \left(\frac{M a_i^2 \delta_{ij}}{5-n} \right) \quad (\text{δεν έχουμε άθροιση}) \quad (2.1.40)$$

Ισχύει πως $M_{ii} = W$, ενώ η ποσότητα $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ είναι η μέση πυκνότητα του αστερά μάζας M . Από τις εξισώσεις (2.1.39) και (2.1.40) μπορούμε να πάρουμε τις

παρακάτω σχέσεις για τους άξονες των ελλειψοειδών:

$$q_n \tilde{\mu}_R \left\{ \frac{Q_1^2}{\mu_R} a_2^2 + \left[2 + (1+p)(1+\delta+\delta') + 2 \frac{Q_2 \Omega_{orb}}{\mu_R} \right] a_1^2 + a_3^2 \right\} = 2(a_1^2 A_1 - a_3^2 A_3) \quad (2.1.41)$$

$$q_n \tilde{\mu}_R \left\{ \frac{Q_2^2}{\mu_R} a_1^2 + \left[(1+p)(1+\delta+\delta') - 1 - 2 \frac{Q_1 \Omega_{orb}}{\mu_R} \right] a_2^2 + a_3^2 \right\} = 2(a_2^2 A_2 - a_3^2 A_3)$$

όπου συμβολίσαμε με $q_n \equiv k_n \left(1 - \frac{n}{5}\right)$, $\tilde{\mu}_R \equiv \frac{\mu_R}{\pi G \bar{\rho}}$. Επίσης χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.1.15) και (2.1.33) μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\frac{Q_i^2}{\mu_R} = \hat{Q}_i^2 (1+p)(1+\delta+\delta') f_R^2 \quad (2.1.42)$$

$$\frac{Q_i \Omega_{orb}}{\mu_R} = \hat{Q}_i (1+p)(1+\delta+\delta') f_R$$

$$\text{και συμβολίζουμε τα } \hat{Q}_i \text{ ως : } \hat{Q}_1 = -\frac{a_1^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad \text{και} \quad \hat{Q}_2 = \frac{a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \quad (2.1.43)$$

Εντελώς ανάλογα η έκτη και έβδομη συνθήκη, $\partial E / \partial \lambda'_1 = \partial E / \partial \lambda'_2 = 0$, θα δώσουν τις εξισώσεις:

$$q'_n \tilde{\mu}'_R \left\{ \frac{Q_1'^2}{\mu'_R} a_2'^2 + \left[2 + \left(1 + \frac{1}{p}\right)(1+\delta+\delta') + 2 \frac{Q_2' \Omega_{orb}}{\mu'_R} \right] a_1'^2 + a_3'^2 \right\} = 2(a_1'^2 A'_1 - a_3'^2 A'_3) \quad (2.1.44)$$

$$q'_n \tilde{\mu}'_R \left\{ \frac{Q_2'^2}{\mu'_R} a_1'^2 + \left[\left(1 + \frac{1}{p}\right)(1+\delta+\delta') - 1 - 2 \frac{Q_1' \Omega_{orb}}{\mu'_R} \right] a_2'^2 + a_3'^2 \right\} = 2(a_2'^2 A'_2 - a_3'^2 A'_3)$$

$$\text{όπου } q'_n \equiv k'_n \left(1 - \frac{n'}{5}\right), \quad \tilde{\mu}'_R \equiv \frac{\mu'_R}{\pi G \bar{\rho}'}, \quad \text{και} \quad \bar{\rho}' = 3M' / 4\pi R'^3.$$

Οι επτά εξισώσεις: (2.1.30), (2.1.36), (2.1.38), (2.1.41) και (2.1.44) καθορίζουν πλήρως την ισορροπία του συστήματος. Αν οι επτά μεταβλητές πάρουν τις τιμές της

κατάστασης ισορροπίας τότε από την εξίσωση (2.1.29) μπορούμε να πάρουμε την τιμή της στροφορμής για την κατάσταση ισορροπίας. Παρομοίως και με την τιμή της ενέργειας για την κατάσταση ισορροπίας, η οποία προκύπτει από τις προηγούμενες εξισώσεις ότι είναι:

$$E_{eq} = E_S + E'_S + \frac{1}{2} \mu r^2 \Omega_{orb}^2 - \frac{GMM'}{r} - \left(\frac{2n+3}{6} \right) \frac{GM'}{r^3} (2I_{11} - I_{22} - I_{33}) - \left(\frac{2n'+3}{6} \right) \frac{GM}{r^3} (2I'_{11} - I'_{22} - I'_{33}) \quad (2.1.45)$$

όπου

$$E_S = -\frac{(3-n)}{(5-n)} \frac{GM^2}{R} f(\lambda_1, \lambda_2) \left[1 - \left(\frac{3-2n}{3-n} \right) \frac{T_s}{|W|} \right] \quad (2.1.46)$$

και η έκφραση για το E'_S είναι ανάλογη.

Κατασκευή ακολουθιών ισορροπίας

Η κατασκευή ακολουθιών ισορροπίας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην περίπτωση διπλών συστημάτων, αφού μπορούν να αναδείξουν την ύπαρξη δυναμικών ασταθειών στα συστήματα αυτά. Επιπλέον, οι ακολουθίες ισορροπίας μπορούν σε μερικές περιπτώσεις να χρησιμοποιηθούν για την προσεγγιστική περιγραφή της εξέλιξης διπλών συστημάτων που χάνουν με κάποιον μηχανισμό ενέργεια (π.χ. εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας, ιξώδες). Τέλος μπορούν να κατασκευαστούν διαφόρων τύπων ακολουθίες, αναλόγως με την ποσότητα που επιλέγουμε να διατηρήσουμε σταθερή (κυκλοφορία του ρευστού, στροφορμή).

Η παραμετροποίηση των ακολουθιών ισορροπίας μπορεί να γίνει με την αδιάστατη ποσότητα (Lai, Rasio & Shapiro, 1994):

$$\hat{r} = \frac{r}{a_1 + a'_1} \quad (2.1.47)$$

Παρόλο που η ποσότητα $\hat{r}$ δεν καθορίζει μονοσήμαντα την απόσταση μεταξύ των σωμάτων, είναι πολύ χρήσιμη διότι για κάθε τιμή της αντιστοιχεί μία ακολουθία ισορροπίας και εκφράζει την απόσταση μεταξύ των επιφανειών των ελλειψοειδών. Η περίπτωση $\hat{r} = 1$ αντιστοιχεί στην επαφή των αστερών, ενώ φυσικές λύσεις απαιτούν $\hat{r} \geq 1$.

Ορίζοντας μια ακολουθία *Darwin-Riemann* ως μια ακολουθία στην οποία οι αδιάστατες ποσότητες f_R και f'_R διατηρούν σταθερή τιμή, μπορούμε να την κατασκευάσουμε καθορίζοντας τον λόγο των μαζών $p = M/M'$ και των ακτινών

R_O/R'_O (ή ισοδύναμα το K/K'), τις ποσότητες f_R και f'_R και μηδενίζοντας τις ποσότητες F_i , όπου:

$$F_1 = \hat{a}_1 + \hat{a}'_1 - 1 \quad (2.1.48)$$

$$F_2 = \frac{R}{R'} - \left(\frac{a_1 a_2 a_3}{a'_1 a'_2 a'_3} \right)^{1/3} \quad (2.1.49)$$

$$F_3 = AM(1.1.41a) - \Delta M(1.1.41a) \quad (2.1.50)$$

$$F_4 = AM(1.1.41\beta) - \Delta M(1.1.41\beta) \quad (2.1.51)$$

$$F_5 = AM(1.1.42a) - \Delta M(1.1.42a) \quad (2.1.52)$$

$$F_6 = AM(1.1.42\beta) - \Delta M(1.1.42\beta) \quad (2.1.53)$$

(AM : αριστερό μέλος της (...) εξίσωσης, ΔM : δεξί μέλος της (...) εξίσωσης)

Παραπάνω συμβολίσαμε με $\hat{a}_i \equiv a_i / (a_1 + a'_1)$, τις μεταβλητές ως προς τις οποίες λύνουμε τις εξισώσεις (2.1.48)-(2.1.53).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το κλασικό πρόβλημα της περίπτωσης δύο όμοιων σωμάτων με πολυτροπικό δείκτη $n=0$ σε σύγχρονη κίνηση μεταξύ τους (Chandrasekhar 1969) αποτελεί ειδική περίπτωση των ακολουθιών Darwin-Riemann, με $f_R = f'_R = 0$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν επίσης ακολουθίες σταθερής κυκλοφορίας ή σταθερής στροφορμής. Οι μεν πρώτες αποτελούν καλή προσέγγιση για συστήματα που εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία, αφού είναι γνωστό ότι οι δυνάμεις αντίδρασης που αναπτύσσονται λόγω εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας διατηρούν την κυκλοφορία του ρευστού (Miller, 1974). Στις ακολουθίες αυτές οι ποσότητες f_R και f'_R , εν γένει, δεν είναι σταθερές και συνεπώς για τον προσδιορισμό τους απαιτούνται δύο επιπλέον εξισώσεις (εκτός από τις προηγούμενες έξι). Οι εξισώσεις αυτές είναι:

$$F_7 = \left(-\frac{1}{5} k_n M \right) a_1 a_2 (2 + f_R) \Omega_{orb} - \ell \quad (2.1.54)$$

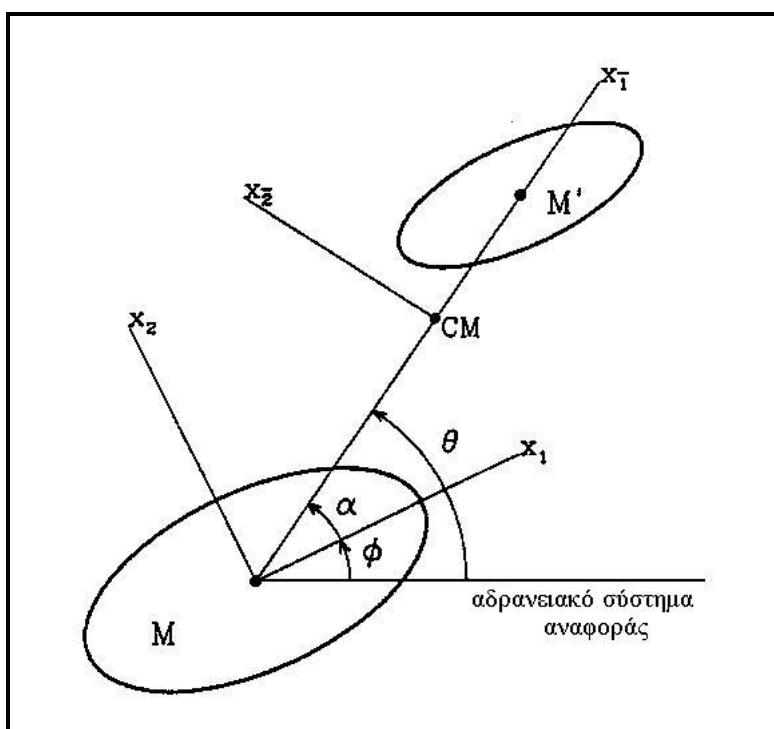
$$F_8 = \left(-\frac{1}{5} k'_n M' \right) a'_1 a'_2 (2 + f'_R) \Omega_{orb} - \ell' \quad (2.1.55)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μη περιστρεφόμενη ακολουθία Darwin-Riemann στην οποία ισχύει $f_R = f'_R = -2$, ($\ell = \ell' = 0$), ενώ οι τιμές αυτές διατηρούνται σταθερές.

Οι δε ακολουθίες σταθερής στροφορμής αποτελούν καλή προσέγγιση για συστήματα τα οποία έχουν μόνο ιξώδες. Στις περιπτώσεις αυτές καθορίζονται οι τιμές των f_R και f'_R έτσι ώστε να έχουμε μια μοναδική ακολουθία για $J = \text{σταθερό}$.

2.2 Δυναμικές εξισώσεις για διπλά συστήματα με πολύτροπα Darwin-Riemann

Θεωρούμε ένα διπλό σύστημα αποτελούμενο από δύο πολύτροπα Darwin-Riemann, τα οποία ακολουθούν τις καταστατικές εξισώσεις (2.1.3). Στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να δούμε την γεωμετρία ενός τέτοιου συστήματος.



Σχήμα 2.1. Η γεωμετρία διπλού συστήματος αποτελούμενο από δύο ελλειψοειδή.

Μεταξύ των γωνιών είναι εμφανές ότι ισχύει η σχέση: $\alpha = \theta - \phi$ και παρόμοια για το δεύτερο ελλειψοειδές: $\alpha' = \theta' - \phi'$. Ορίζουμε ως $\Omega = d\phi/dt$ και $\Omega' = d\phi'/dt$. Επίσης ορίζουμε τις γωνίες ψ και ψ' έτσι ώστε $\Lambda = d\psi/dt$ και $\Lambda' = d\psi'/dt$.

Οι εύρεση των διαφορικών εξισώσεων προϋποθέτει την γνώση της συνάρτησης Lagrange του συστήματος. Αυτή μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο όρων που

αναφέρονται στο κάθε αστέρα χωριστά (L_s και L'_s αντίστοιχα), καθώς και ένα όρο που αντιστοιχεί στην τροχιακή τους κίνηση, L_{orb} . Θα υπολογίσουμε τους παραπάνω όρους ξεχωριστά.

H συνάρτηση Lagrange

Εργαζόμενοι στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το πεδίο ταχυτήτων $\vec{u}$ του ρευστού εντός της μάζας M σε σχέση με το κέντρο μάζας μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\vec{u} = \left[\left(\frac{a_1}{a_2} \Lambda - \Omega \right) x_2 \vec{e}_1 + \left(-\frac{a_2}{a_1} \Lambda + \Omega \right) x_1 \vec{e}_2 \right] + \left[\frac{\dot{a}_1}{a_1} x_1 \vec{e}_1 + \frac{\dot{a}_2}{a_2} x_2 \vec{e}_2 + \frac{\dot{a}_3}{a_3} x_3 \vec{e}_3 \right] \quad (2.2.1)$$

όπου θεωρήσαμε τη βάση $\{\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3\}$ κατά μήκος της στιγμιαίας διεύθυνσης του κύριου άξονα του ελλειψοειδούς μάζας M με το διάνυσμα $\vec{e}_3$ κάθετο στο τροχιακό επίπεδο. Η δε κινητική ενέργεια του αστέρα μάζας M ως προς το κέντρο μάζας είναι:

$$T = \frac{1}{2} I (\Lambda^2 + \Omega^2) - \frac{2}{5} k_n M a_1 a_2 \Lambda \Omega + \frac{1}{10} k_n M (\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2) \quad (2.2.2)$$

όπου $I = k_n M (a_1^2 + a_2^2)/5$, ενώ η σταθερά k_n ορίστηκε στη σχέση (2.1.20). Αν συγκρίνουμε την έκφραση (2.1.18) και την (2.2.2) θα δούμε ότι διαφέρουν κατά ένα όρο

$$T_e = \frac{1}{10} k_n M (\dot{a}_1^2 + \dot{a}_2^2 + \dot{a}_3^2) \quad (2.2.3)$$

ο όρος αυτός T_e είναι η κινητική ενέργεια η οποία συνδέεται με τις διαστολές ή τις συστολές του ελλειψοειδούς και δεν λήφθηκε υπόψη στην συνολική κινητική ενέργεια (2.1.22) διότι αναζητούσαμε καταστάσεις ισορροπίας των αστέρων.

Η εσωτερική ενέργεια και η βαρυτική ενέργεια σύνδεσης της μάζας M θα δοθούν από τις σχέσεις (2.1.6) και (2.1.8) αντίστοιχα.

Λαμβάνοντας επομένως υπόψη τις (2.1.6), (2.1.8) και (2.2.2) υπολογίζεται ότι ο όρος για το σώμα μάζας M είναι:

$$L_s = T - U - W \quad (2.2.4)$$

Ο δε όρος L'_s προκύπτει αν αντικαταστήσουμε μη τονούμενες με τονούμενες ποσότητες.

Τέλος η τροχιακή συνιστώσα είναι:

$$L_{orb} = \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \mu r^2 \dot{\theta}^2 - W_i \quad (2.2.5)$$

Οι δύο πρώτοι όροι αντιστοιχούν στην τροχιακή κινητική ενέργεια, ενώ ο τρίτος όρος παριστά την βαρυτική αλληλεπίδραση των δύο σωμάτων, έχοντας λάβει υπόψη μας μέχρι και τον τετραπολικό όρο. Με μ συμβολίζουμε την ανηγμένη μάζα,

$$\mu = \frac{MM'}{M + M'}$$

Η έκφραση της βαρυτικής αλληλεπίδρασης μεταξύ των μαζών δίνεται από τον τύπο:

$$W_i = -\frac{GMM'}{r} - \frac{GM'}{2r^3} [I_{11}(3\cos^2 \alpha - 1) + I_{22}(3\sin^2 \alpha - 1) - I_{33}] - \frac{GM}{2r^3} [I'_{11}(3\cos^2 \alpha' - 1) + I'_{22}(3\sin^2 \alpha' - 1) - I'_{33}] \quad (2.2.6)$$

Από τους επιμέρους όρους προκύπτει η συνολική Λαγκρασιανή του συστήματος, $L = L_s + L'_s + L_{orb}$, και συνεπώς μπορούμε να βρούμε τις διαφορικές εξισώσεις κίνησης του συστήματος από τις εξισώσεις Euler-Lagrange, οι οποίες έχουν ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (2.2.7)$$

όπου $\{q_i\} = \{a_i, \phi, \psi, a'_i, \phi', \psi', r, \theta\}$, ενώ η τελεία παριστάνει την χρονική παράγωγο.

Διατηρήσιμα μεγέθη

Για $q_i = \phi$, θα έχουμε:

$$\frac{dJ_s}{dt} = \frac{3GM'}{2r^3} \sin 2\alpha (I_{11} - I_{22}) = N \quad (2.2.8)$$

όπου J_s η στροφορμή του αστερά μάζας M και N η παλιρροϊκή ροπή. Επίσης:

$$J_s = \frac{\partial L}{\partial \Omega} = I\Omega - \frac{2}{5}k_n Ma_1 a_2 \Lambda \quad (2.2.9)$$

Εντελώς ανάλογα για $q_i = \phi'$ θα πάρουμε:

$$\frac{dJ'_s}{dt} = \frac{3GM}{2r^3} \sin 2\alpha' (I'_{11} - I'_{22}) = N' \quad (2.2.10)$$

ακόμη για $q_i = \theta$ θα πάρουμε, με την βοήθεια της (2.2.10):

$$\frac{dJ_{orb}}{dt} = -N - N' \quad (2.2.11)$$

όπου $J_{orb} = \mu r^2 \dot{\theta}$ είναι η τροχιακή στροφορμή, έτσι η ολική στροφορμή θα είναι το άθροισμα των παραπάνω συνιστωσών, δηλαδή:

$$J = J_s + J'_s + J_{orb} \quad (2.2.12)$$

Παρατηρούμε ότι η συνολική στροφορμή διατηρείται.

Τέλος για $q_i = \psi$ και $q_i = \psi'$ θα έχουμε:

$$\frac{d\ell}{dt} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d\ell'}{dt} = 0 \quad (2.2.13)$$

όπου ℓ η κυκλοφορία του ρευστού στον αστέρα μάζας M και δίνεται από την σχέση (2.1.25), ενώ η ℓ' δίνεται από την (2.1.26). Παρατηρούμε συνεπώς ότι η κυκλοφορία του ρευστού στον κάθε αστέρα, διατηρείται.

Δυναμικές εξισώσεις

Εκτελώντας τις παραγωγίσεις που υποδεικνύουν οι εξισώσεις Euler-Lagrange για κάθε μία από τις γενικευμένες μεταβλητές θα καταλήξουμε σ' ένα σύστημα δώδεκα διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες θα περιγράφουν την εξέλιξη του συστήματος. Οι εξισώσεις δίνονται παρακάτω.

$$\ddot{a}_1 = a_1(\Omega^2 + \Lambda^2) - 2a_2\Omega\Lambda - \frac{2\pi G}{q_n}a_1A_1\bar{\rho} + \left(\frac{5k_1}{nk_n}\frac{P_c}{\rho_c}\right)\frac{1}{a_1} + \frac{GM'a_1}{r^3}(3\cos^2\alpha - 1) \quad (2.2.14)$$

$$\ddot{a}_2 = a_2(\Omega^2 + \Lambda^2) - 2a_1\Omega\Lambda - \frac{2\pi G}{q_n}a_2A_2\bar{\rho} + \left(\frac{5k_1}{nk_n}\frac{P_c}{\rho_c}\right)\frac{1}{a_2} + \frac{GM'a_2}{r^3}(3\sin^2\alpha - 1) \quad (2.2.15)$$

$$\ddot{a}_3 = -\frac{2\pi G}{q_n}a_3A_3\bar{\rho} + \left(\frac{5k_1}{nk_n}\frac{P_c}{\rho_c}\right)\frac{1}{a_3} - \frac{GM'a_3}{r^3} \quad (2.2.16)$$

$$\ddot{a}'_1 = a'_1(\Omega'^2 + \Lambda'^2) - 2a'_2\Omega'\Lambda' - \frac{2\pi G}{q'_n}a'_1A'_1\bar{\rho}' + \left(\frac{5k'_1}{n'k'_n}\frac{P'_c}{\rho'_c}\right)\frac{1}{a'_1} + \frac{GMa'_1}{r^3}(3\cos^2\alpha' - 1) \quad (2.2.17)$$

$$\ddot{a}'_2 = a'_2(\Omega'^2 + \Lambda'^2) - 2a'_1\Omega'\Lambda' - \frac{2\pi G}{q'_n}a'_2A'_2\bar{\rho}' + \left(\frac{5k'_1}{n'k'_n}\frac{P'_c}{\rho'_c}\right)\frac{1}{a'_2} + \frac{GMa'_2}{r^3}(3\cos^2\alpha' - 1) \quad (2.2.18)$$

$$\ddot{a}'_3 = -\frac{2\pi G}{q'_n}a'_3A'_3\bar{\rho}' + \left(\frac{5k'_1}{n'k'_n}\frac{P'_c}{\rho'_c}\right)\frac{1}{a'_3} - \frac{GMa'_3}{r^3} \quad (2.2.19)$$

$$\dot{\Omega} = \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right)^{-1} \left[2\left(\frac{\Omega}{a_2} + \frac{\Lambda}{a_1}\right)\dot{a}_1 - 2\left(\frac{\Omega}{a_1} + \frac{\Lambda}{a_2}\right)\dot{a}_2 - \frac{3GM'}{2r^3}\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)\sin 2\alpha \right] \quad (2.2.20)$$

$$\dot{\Omega}' = \left(\frac{a'_2}{a'_1} - \frac{a'_1}{a'_2}\right)^{-1} \left[2\left(\frac{\Omega'}{a'_2} + \frac{\Lambda'}{a'_1}\right)\dot{a}'_1 - 2\left(\frac{\Omega'}{a'_1} + \frac{\Lambda'}{a'_2}\right)\dot{a}'_2 - \frac{3GM}{2r^3}\left(\frac{a'_1}{a'_2} + \frac{a'_2}{a'_1}\right)\sin 2\alpha' \right] \quad (2.2.21)$$

$$\dot{\Lambda} = \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_2}\right)^{-1} \left[2\left(\frac{\Omega}{a_1} + \frac{\Lambda}{a_2}\right)\dot{a}_1 - 2\left(\frac{\Omega}{a_2} + \frac{\Lambda}{a_1}\right)\dot{a}_2 - \frac{3GM'}{r^3}\sin 2\alpha \right] \quad (2.2.22)$$

$$\dot{\Lambda}' = \left(\frac{a'_2}{a'_1} - \frac{a'_1}{a'_2}\right)^{-1} \left[2\left(\frac{\Omega'}{a'_1} + \frac{\Lambda'}{a'_2}\right)\dot{a}'_1 - 2\left(\frac{\Omega'}{a'_2} + \frac{\Lambda'}{a'_1}\right)\dot{a}'_2 - \frac{3GM}{2r^3}\sin 2\alpha' \right] \quad (2.2.23)$$

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{G(M+M')}{r^2} - \frac{3k_n G (M+M')}{10} \frac{1}{r^4} \left[a_1^2 (3\cos^2 \alpha - 1) + a_2^2 (3\sin^2 \alpha - 1) - a_3^2 \right] - \frac{3k'_n G (M+M')}{10} \frac{1}{r^4} \left[a_1'^2 (3\cos^2 \alpha' - 1) + a_2'^2 (3\sin^2 \alpha' - 1) - a_3'^2 \right] \quad (2.2.24)$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}\dot{\theta}}{r} - \frac{3k_n G (M+M')}{10} \frac{1}{r^5} (a_1^2 - a_2^2) \sin 2\alpha - \frac{3k'_n G (M+M')}{10} \frac{1}{r^5} (a_1'^2 - a_2'^2) \sin 2\alpha' \quad (2.2.25)$$

Ο όρος της πίεσης, $\left(\frac{5k_1}{nk_n} \frac{P_c}{\rho_c} \right)$ που εμφανίζεται σε όλες τις εξισώσεις είναι βολικότερο να αντικατασταθεί από μια έκφραση που θα περιέχει τους όρους M, R_o και άλλες δυναμικές μεταβλητές (αντίστοιχα για τον δεύτερο αστέρα), αφού κάτι τέτοιο βοηθάει στην αριθμητική επίλυση των εξισώσεων. Παρακάτω δίνεται η διαδικασία της εύρεσης της ισοδύναμης έκφρασης.

Ο όρος της πίεσης

Γράφοντας την καταστατική εξίσωση $\frac{P_c}{\rho_c} = K\rho_c^{1/n} \propto R^{-3/n}$, θα έχουμε $\frac{5k_1}{nk_n} \frac{P_c}{\rho_c} = C_n R^{-3/n}$, όπου C_n είναι μια σταθερή, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε αν θεωρήσουμε έναν μη περιστρεφόμενο σφαιρικό πολύτροπο σε ισορροπία. Σ' αυτή τη περίπτωση οι εξισώσεις (2.2.14)-(2.2.16) γίνονται:

$$0 = -\frac{2\pi G}{q_n} R_o A_1 \bar{\rho}_o + C_n R_o^{-3/n} \frac{1}{R_o}$$

και εφόσον είναι σφαίρα και επομένως $A_1 = 2/3$, θα πάρουμε $C_n = \frac{GM}{q_n} R_o^{3/n-1}$. Έτσι, ο όρος της πίεσης θα γίνει:

$$\frac{5k_1}{nk_n} \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{GM}{q_n R_o} \left(\frac{R_o}{R} \right)^{3/n} \quad (n \neq 0) \quad (2.2.26)$$

Η παραπάνω σχέση δεν ισχύει στην περίπτωση που $n = 0$. Στην περίπτωση αυτή, δηλαδή όταν $n \rightarrow 0$, τότε $\frac{k_1}{n} \rightarrow \frac{2}{5}$ και $k_n \rightarrow 1$, οπότε θα έχουμε:

$$\frac{5k_1}{nk_n} \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{2P_c}{\rho_c} \quad (n = 0)$$

Για να βρούμε την έκφραση της $2P_c/\rho_c$ θα κάνουμε χρήση της συνθήκης $a_1 a_2 a_3 = R_O^3 = \sigma \tau \alpha \theta$, την οποία αν παραγωγίσουμε θα πάρουμε:

$$\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_3}{a_3} = 0 \quad (2.2.27)$$

Προσθέτοντας τις (2.2.14)/ a_1 , (2.2.15)/ a_2 και (2.2.16)/ a_3 και λαμβάνοντας υπόψη την (2.2.27) θα πάρουμε:

$$\frac{5k_1}{nk_n} \frac{P_c}{\rho_c} = \frac{2P_c}{\rho_c} = \left(\sum_i \frac{1}{a_i^2} \right)^{-1} \left[\sum_i \left(\frac{\dot{a}_i}{a_i} \right)^2 - 2(\Omega^2 + \Lambda^2) + 2\Omega\Lambda \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) + 4\pi G \bar{\rho} \right] \quad (2.2.28)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $A_1 + A_2 + A_3 = 2$.

Έχοντας λοιπόν εκφράσει τον όρο της πίεσης ως συνάρτηση των M, R_O και άλλων δυναμικών μεταβλητών μπορούμε να επιλύσουμε τις εξισώσεις αριθμητικά, κάτι το οποίο θα κάνουμε αργότερα.

Στην επόμενη παράγραφο θα γράψουμε τις εξισώσεις εξέλιξης του συστήματος συνυπολογίζοντας και την βαρυτική ακτινοβολία.

2.3 Όροι βαρυτικής ακτινοβολίας

Θα θεωρήσουμε μια βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ με αρχή το κέντρο μάζας, το $\vec{e}_1$ κατά μήκος της διεύθυνσης που ενώνει τα κέντρα των αστερών μάζας M και M' , το $\vec{e}_3$ είναι κάθετο στο τροχιακό επίπεδο και το $\vec{e}_2$ κάθετο στα δύο προηγούμενα. Η βάση αυτή περιστρέφεται ως προς ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς με μία γωνιακή ταχύτητα Ω_{orb} . Στην προσέγγιση ασθενούς πεδίου της γενικής θεωρίας της σχετικότητας η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας δημιουργεί ένα δυναμικό ανάδρασης, Φ_{react} , το οποίο γράφεται ως εξής:

$$\Phi_{react} = \frac{G}{5c^5} I_{ij}^{(5)} x_i x_j \quad (2.3.1)$$

όπου $I_{ij}^{(5)}$ η 5^η παράγωγος της προβολής του απλοποιημένου τανυστή τετραπολικής ροπής του συστήματος στο τροχιακό σύστημα αναφοράς. Η αντίστοιχη δύναμη στη μονάδα μάζας του ρευστού, προκαλούμενη από το δυναμικό Φ_{react} θα είναι $-\vec{\nabla}\Phi_{react}$ και συνεπώς η απώλεια ενέργειας θα είναι:

$$W_M = -\int_M \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \Phi_{react} dm \quad (2.3.2)$$

όπου το W_M αφορά στο σώμα μάζας M και το πεδίο ταχυτήτων $\vec{v} = \vec{u} + \vec{u}_{orb}$ αφορά στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (εξίσωση (2.2.1)). Η αναλυτική έκφραση του W_M θα είναι (θα συμβολίσουμε με r_{cm} την απόσταση του κέντρου μάζας του συστήματος από το M):

$$\begin{aligned} W_M = & -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right) a_1 \dot{a}_1 \\ & -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right) a_2 \dot{a}_2 - \frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) I_{33}^{(5)} a_3 \dot{a}_3 \\ & -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \left(I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)} \right) \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (a_1^2 - a_2^2) \Omega \\ & -\frac{2G}{5c^5} M \left(I_{11}^{(5)} r_{cm} \dot{r}_{cm} + I_{12}^{(5)} r_{cm}^2 \Omega_{orb} \right) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Η έκφραση για την απώλεια ενέργειας του σώματος μάζας M' είναι εντελώς ανάλογη και η συνολική απώλεια ενέργειας θα δίνεται από άθροισμα των επιμέρους όρων, δηλαδή θα είναι:

$$W = W_M + W_{M'} \quad (2.3.4)$$

Η αναλυτική έκφραση της απώλειας ενέργειας, λόγω εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας δίνεται παρακάτω.

$$\begin{aligned}
W = & -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right) a_1 \dot{a}_1 \\
& -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right) a_2 \dot{a}_2 - \frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) I_{33}^{(5)} a_3 \dot{a}_3 \\
& -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \left(I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)} \right) \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (a_1^2 - a_2^2) \Omega \\
& -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) \left(I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha' + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha' - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha' \right) a'_1 \dot{a}'_1 \\
& -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) \left(I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha' + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha' + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha' \right) a'_2 \dot{a}'_2 - \frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) I_{33}^{(5)} a'_3 \dot{a}'_3 \\
& -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha' + \left(I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)} \right) \frac{1}{2} \sin 2\alpha' \right) (a'^2_1 - a'^2_2) \Omega' \\
& -\frac{2G}{5c^5} \mu \left(I_{11}^{(5)} r \dot{r} + I_{12}^{(5)} r^2 \Omega_{orb} \right)
\end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Συμβολίζουμε με $F_{q_i} = \partial W / \partial \dot{q}_i$ τις γενικευμένες δυνάμεις εξαιτίας της βαρυτικής ακτινοβολίας οι οποίες έχουν το αποτέλεσμα δυνάμεων τριβής και τις υπολογίζουμε:.

$$F_{a_1} = \frac{\partial W}{\partial \dot{a}_1} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right) a_1 \tag{2.3.6}$$

$$F_{a_2} = \frac{\partial W}{\partial \dot{a}_2} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right) a_2 \tag{2.3.7}$$

$$F_{a_3} = \frac{\partial W}{\partial \dot{a}_3} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) I_{33}^{(5)} a_3 \tag{2.3.8}$$

$$F_{a'_1} = \frac{\partial W}{\partial \dot{a}'_1} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) \left(I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha' + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha' - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha' \right) a'_1 \tag{2.3.9}$$

$$F_{a'_2} = \frac{\partial W}{\partial \dot{a}'_2} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) \left(I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha' + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha' + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha' \right) a'_2 \tag{2.3.10}$$

$$F_{a'_3} = \frac{\partial W}{\partial \dot{a}'_3} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k'_n M' \right) I_{33}^{(5)} a'_3 \tag{2.3.11}$$

$$F_{\dot{\phi}} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\phi}} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n M \right) \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \left(I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)} \right) \frac{1}{2} \sin 2\alpha \right) (a_1^2 - a_2^2) \tag{2.3.12}$$

$$F_{\dot{\phi}'} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\phi}'} = -\frac{2G}{5c^5} \left(\frac{1}{5} k_n' M' \right) \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha' + \left(I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)} \right) \frac{1}{2} \sin 2\alpha' \right) (a_1'^2 - a_2'^2) \quad (2.3.13)$$

$$F_{\psi} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}'} = 0 \quad (2.3.14)$$

$$F_{\psi'} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\psi}'} = 0 \quad (2.3.15)$$

$$F_r = \frac{\partial W}{\partial \dot{r}} = -\frac{2G}{5c^5} I_{11}^{(5)} \mu r \quad (2.3.16)$$

$$F_{\theta} = \frac{\partial W}{\partial \dot{\theta}} = -\frac{2G}{5c^5} I_{11}^{(5)} \mu r^2 \quad (2.3.17)$$

Παρατηρούμε ότι $F_{\psi} = F_{\psi'} = 0$ και συνεπώς η κυκλοφορία, σε κάθε αστέρα διπλού συστήματος που εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία κάτω από τις προϋποθέσεις που θέσαμε παραπάνω, διατηρείται. Έχοντας υπολογίσει τις γενικευμένες δυνάμεις F_{q_i} μπορούμε να βγάλουμε τις νέες εξισώσεις εξέλιξης του συστήματος. Αυτό θα γίνει και πάλι από τις εξισώσεις Euler-Lagrange έχοντας προσθέσει σ' αυτές τις παραπάνω γενικευμένες δυνάμεις. Συγκεκριμένα θα έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} + F_{q_i} \quad (2.3.18)$$

Εκτελώντας τις παραγωγές για όλες τις γενικευμένες μεταβλητές θα πάρουμε τις ακόλουθες εξισώσεις.

$$\ddot{a}_1 = \{...\} - \frac{2G}{5c^5} \left[I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right] a_1 \quad (2.3.19)$$

$$\ddot{a}_2 = \{...\} - \frac{2G}{5c^5} \left[I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha \right] a_2 \quad (2.3.20)$$

$$\ddot{a}_3 = \{...\} - \frac{2G}{5c^5} I_{33}^{(5)} a_3 \quad (2.3.21)$$

$$\ddot{a}_1' = \{...\} - \frac{2G}{5c^5} \left[I_{11}^{(5)} \cos^2 \alpha' + I_{22}^{(5)} \sin^2 \alpha' - I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha' \right] a_1' \quad (2.3.22)$$

$$\ddot{a}_2' = \{...\} - \frac{2G}{5c^5} \left[I_{11}^{(5)} \sin^2 \alpha' + I_{22}^{(5)} \cos^2 \alpha' + I_{12}^{(5)} \sin 2\alpha' \right] a_2' \quad (2.3.23)$$

$$\ddot{a}'_3 = \{\dots\} - \frac{2G}{5c^5} I_{33}^{(5)} a'_3 \quad (2.3.24)$$

$$\dot{\Omega} = \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} \right)^{-1} \left[\{\dots\} + \frac{2G}{5c^5} \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha \right) \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) \right] \quad (2.3.25)$$

$$\dot{\Omega}' = \left(\frac{a'_2}{a'_1} - \frac{a'_1}{a'_2} \right)^{-1} \left[\{\dots\} + \frac{2G}{5c^5} \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha' + \frac{1}{2} (I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha' \right) \left(\frac{a'_1}{a'_2} + \frac{a'_2}{a'_1} \right) \right] \quad (2.3.26)$$

$$\dot{\Lambda} = \left(\frac{a_2}{a_1} - \frac{a_1}{a_2} \right)^{-1} \left[\{\dots\} + \frac{4G}{5c^5} \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha \right) \right] \quad (2.3.27)$$

$$\dot{\Lambda}' = \left(\frac{a'_2}{a'_1} - \frac{a'_1}{a'_2} \right)^{-1} \left[\{\dots\} + \frac{4G}{5c^5} \left(I_{12}^{(5)} \cos 2\alpha' + \frac{1}{2} (I_{11}^{(5)} - I_{22}^{(5)}) \sin 2\alpha' \right) \right] \quad (2.3.28)$$

$$\ddot{r} = \{\dots\} - \frac{2G}{5c^5} I_{11}^{(5)} r \quad (2.3.29)$$

$$\ddot{\theta} = \{\dots\} - \frac{2G}{5c^5} I_{12}^{(5)} \quad (2.3.30)$$

όπου το $\{\dots\}$ συμβολίζει τους όρους που εμφανίζονται στις εξισώσεις (2.2.14) ως (2.2.25).

Απλές εκφράσεις για τις πέμπτες παραγώγους του τανυστή, $I_{ij}^{(5)}$, μπορούν να προκύψουν αν κάνουμε την υπόθεση ότι ο χρόνος μέσα στον οποίο αλλάζουν τόσο οι τροχιακές όσο και οι εσωτερικές ποσότητες είναι πολύ μικρότερος απ' ότι απαιτείται για μία περιστροφή, δηλαδή $|da_i/dt| \ll |\Omega a_i|$. Μ' αυτή τη προσέγγιση οι μη μηδενικές συνιστώσες θα είναι (Lai, Rasio & Shapiro, 1994):

$$\begin{aligned} I_{11}^{(5)} = -I_{22}^{(5)} = & 16\Omega^5 (I_{11} - I_{22}) \sin 2\alpha + 16\Omega'^5 (I'_{11} - I'_{22}) \sin 2\alpha' \\ & + 40\Omega_{orb}^3 [2\Omega_{orb} \mu r \dot{r} + 2\dot{\Omega}_{orb} \mu r^2] + 40\Omega^3 [\Omega(\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}) + 2\dot{\Omega}(I_{11} - I_{22})] \cos 2\alpha \\ & + 40\Omega'^3 [\Omega'(\dot{I}'_{11} - \dot{I}'_{22}) + 2\dot{\Omega}'(I'_{11} - I'_{22})] \cos 2\alpha' \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

$$\begin{aligned} I_{12}^{(5)} = I_{21}^{(5)} = & 16\Omega_{orb}^5 \mu r^2 + 16\Omega^5 (I_{11} - I_{22}) \cos 2\alpha \\ & + 16\Omega'^5 (I'_{11} - I'_{22}) \cos 2\alpha' - 40\Omega^3 [\Omega(\dot{I}_{11} - \dot{I}_{22}) + 2\dot{\Omega}(I_{11} - I_{22})] \sin 2\alpha \\ & - 40\Omega'^3 [\Omega'(\dot{I}'_{11} - \dot{I}'_{22}) + 2\dot{\Omega}'(I'_{11} - I'_{22})] \sin 2\alpha' \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

2.4 Η Δυναμική αστάθεια και οι επιπτώσεις αυτής στα διπλά συστήματα Darwin-Riemann

Αιτία της δυναμικής αστάθειας

Η δυναμική αστάθεια στα διπλά συστήματα Darwin-Riemann προέρχεται από τις παλιρροιογόνες δυνάμεις που ασκούν μεταξύ τους οι αστέρες. Το ύψος της εξοχής, h το οποίο εμφανίζεται στην επιφάνεια του σώματος μάζας M από τον συνοδό του μάζας M' είναι της τάξης $h \approx R(M/M')(R/r)^3$ και η αντίστοιχη δυναμική ενέργεια είναι:

$$W_{\text{tide}} \approx -\frac{M'Q}{r^3} \approx -k_n \frac{M'^2 R^5}{r^6} \quad (2.4.1)$$

όπου $Q \approx k_n MRh$ είναι η τετραπολική ροπή της μάζας M . Έτσι, δεδομένου ότι το k_n δεν είναι τόσο μικρό (για όχι και τόσο συμπιεστικούς αστέρες), η δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των δύο σωμάτων ($\approx -MM'/r + W_{\text{tide}}$) αυξάνει, για μικρές αποστάσεις μεταξύ των αστερών, πολύ πιο απότομα απ' ό,τι ο όρος $-MM'/r$ που αντιστοιχεί στην προσέγγιση των σημειακών αστερών. Αυτή ακριβώς είναι η αιτία που προκαλεί την δυναμική αστάθεια.

Φαινόμενα παλιρροιακής υστέρησης

Αποτέλεσμα της δυναμικής αστάθειας είναι μια καθυστέρηση στην περιστροφή της εξοχής που προκαλείται από την προσέγγιση των σωμάτων του διπλού συστήματος. Συγκεκριμένα για έναν αστέρα μάζας M σε διπλό σύστημα το δυναμικό που υφίσταται (της μορφής $1/r^3$) από τον συνοδό αστέρα μάζας M' , λειτουργεί ως διαταραχή με συχνότητα περιστροφής $\approx \Delta\Omega = \Omega_{\text{orb}} - \Omega_s$, όπου Ω_{orb} η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα και Ω_s η γωνιακή ταχύτητα ιδιοπεριστροφής του αστέρα. Αυτός έχει μια δυναμική συχνότητα της τάξης $\omega_o \approx (M/R_o^2)^{1/2}$. Ο νόμος που διέπει την παλιρροϊκή εξοχή ξ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\ddot{\xi} + \omega_o^2 \propto \frac{1}{r^3} e^{i\Delta\Omega t} \quad (2.4.2)$$

Θεωρώντας ότι $\omega_o \gg \Delta\Omega$ προκύπτει ότι:

$$\xi \propto \frac{1}{\omega_o r^3 (1 - i\alpha_{\text{dyn}})} e^{i\Delta\Omega t} \quad (2.4.3)$$

όπου η καθυστέρηση της γωνίας δίνεται από την σχέση: $\alpha_{dyn} \approx \frac{\Delta\Omega}{\omega_o^2 t_d}$ (2.4.4) και ο

χρόνος τροχιακής κατάρρευσης είναι: $t_d \approx |r/\dot{r}| \approx |\Omega_{orb}/\dot{\Omega}_{orb}|$. Η εμφάνιση της *δυναμικής παλιρροιακής υστέρησης* οφείλεται στον πεπερασμένο χρόνο που απαιτείται ώστε ο αστέρας να προσαρμόσει τη δομή του στο ταχύτατα μεταβαλλόμενο δυναμικό. Έτσι είναι λογικό να περιμένει κανείς εμφάνιση αυτού του φαινομένου ακόμα και χωρίς να λάβει υπόψη του την ύπαρξη ιζώδους τριβής.

Ανάλογο φαινόμενο μ' αυτό της δυναμικής παλιρροιακής υστέρησης εμφανίζεται και εξαιτίας της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας και έχει ως ποσοτική έκφραση την γωνία α_{gr} . Πριν την εμφάνιση της δυναμικής αστάθειας ο χρόνος τροχιακής κατάρρευσης είναι:

$$t_d \cong \left| \frac{r}{\dot{r}} \right| \cong \frac{5r^4}{64MM'(M+M')} \quad (2.4.5)$$

και από την εξίσωση (2.4.4) θα έχουμε:

$$\alpha_{dyn} \approx \frac{R_o^3 \Delta\Omega}{M} \left(\frac{64MM'(M+M')}{5r^4} \right) \approx \frac{64R_o^3 M'(M+M')^{3/2}}{5r^{11/2}} \quad (2.4.6)$$

Στην τελευταία σχέση θεωρήσαμε ότι η γωνιακή συχνότητα ιδιοπεριστροφής είναι μηδέν, $\Omega_s \cong 0$. Η αντίστοιχη γωνία που οφείλεται στην εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας θα δίνεται από την σχέση:

$$\alpha_{gr} \cong \frac{32}{15} \frac{M(M+M')^{3/2}}{r^{5/2}} \quad (2.4.7)$$

Συγκρίνοντας τις δύο γωνίες μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όσο οι αστέρες είναι απομακρυσμένοι μεταξύ τους ($r \geq 2R_o(M'/M)^{1/3}$) η γωνία α_{gr} , αν και μικρή $\alpha_{gr} \leq 0.01$, είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη που οφείλεται σε δυναμικά φαινόμενα, ωστόσο για μικρότερες αποστάσεις η α_{dyn} γίνεται πολύ μεγαλύτερη, έτσι ώστε η α_{gr} να μπορεί να αγνοηθεί, γράφουμε: $\alpha = \alpha_{dyn} + \alpha_{gr} \cong \alpha_{dyn}$.

Κυματομορφές βαρυτικής ακτινοβολίας

Χρησιμοποιώντας τον συνήθη τετραπολικό τύπο μπορούμε να πάρουμε τις κυματομορφές της βαρυτικής ακτινοβολίας. Αυτές είναι:

$$h_+ = -\frac{2}{D} \left[\mu r^2 \Omega_{orb}^2 \cos 2\theta + (I_{11} - I_{22}) \Omega^2 \cos 2\phi + (I'_{11} - I'_{22}) \Omega'^2 \cos 2\phi' \right] (1 + \cos^2 \Theta) \quad (2.4.8)$$

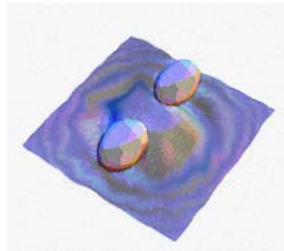
$$h_\times = -\frac{4}{D} \left[\mu r^2 \Omega_{orb}^2 \sin 2\theta + (I_{11} - I_{22}) \Omega^2 \sin 2\phi + (I'_{11} - I'_{22}) \Omega'^2 \sin 2\phi' \right] \cos \Theta$$

όπου D είναι η απόσταση της πηγής και το Θ καθορίζει την γωνία μεταξύ διεύθυνσης εκπομπής και του z-άξονα. Τέλος, αγνοώντας τη μικρή παλιρροιακή διόρθωση, η συχνότητα εκπομπής της ακτινοβολίας θα είναι

$$f \cong \frac{(M + M')^{1/2} r^{-3/2}}{\pi} \quad (2.4.9)$$

Κατάρρευση του διπλού συστήματος

Καθώς η δυναμική αστάθεια αυξάνει, το σύστημα θα καταρρεύσει υδροδυναμικά αφότου διαγράψει λίγες τροχιές. Η ακτινική ταχύτητα την στιγμή της επαφής φτάνει το 10% της ταχύτητας ελεύθερης πτώσης. Για την ίδια την κατάρρευση ως γεγονός αλλά και την εξέλιξη του σώματος που θα προκύψει στην συνέχεια η παραπάνω αντιμετώπιση δεν είναι η καλύτερη για να βγάλει κανείς συμπεράσματα



Κεφάλαιο 3^ο

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την λειτουργία του προγράμματος προσομοίωσης της εξέλιξη διπλών συστημάτων και θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα κάποιων εφαρμογών. Συγκεκριμένα στην *πρώτη ενότητα* περιγράφεται η λειτουργία του προγράμματος. Η *δεύτερη ενότητα* είναι αφιερωμένη στις αριθμητικές μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν, ενώ ταυτόχρονα θα δούμε την λειτουργία του προγράμματος και με άλλες μεθόδους, έχοντας έτσι την δυνατότητα να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Στην *τρίτη ενότητα* αναπαράγουμε ήδη υπάρχοντα αποτελέσματα με στόχο τον προσδιορισμό της αξιοπιστίας και της ακρίβειας του προγράμματος. Στην *τελευταία ενότητα* εξετάζουμε κάποιες περιπτώσεις διπλών συστημάτων αστέρων νετρονίων και κλείνουμε με συμπεράσματα και σχόλια για τα αποτελέσματα που προέκυψαν.

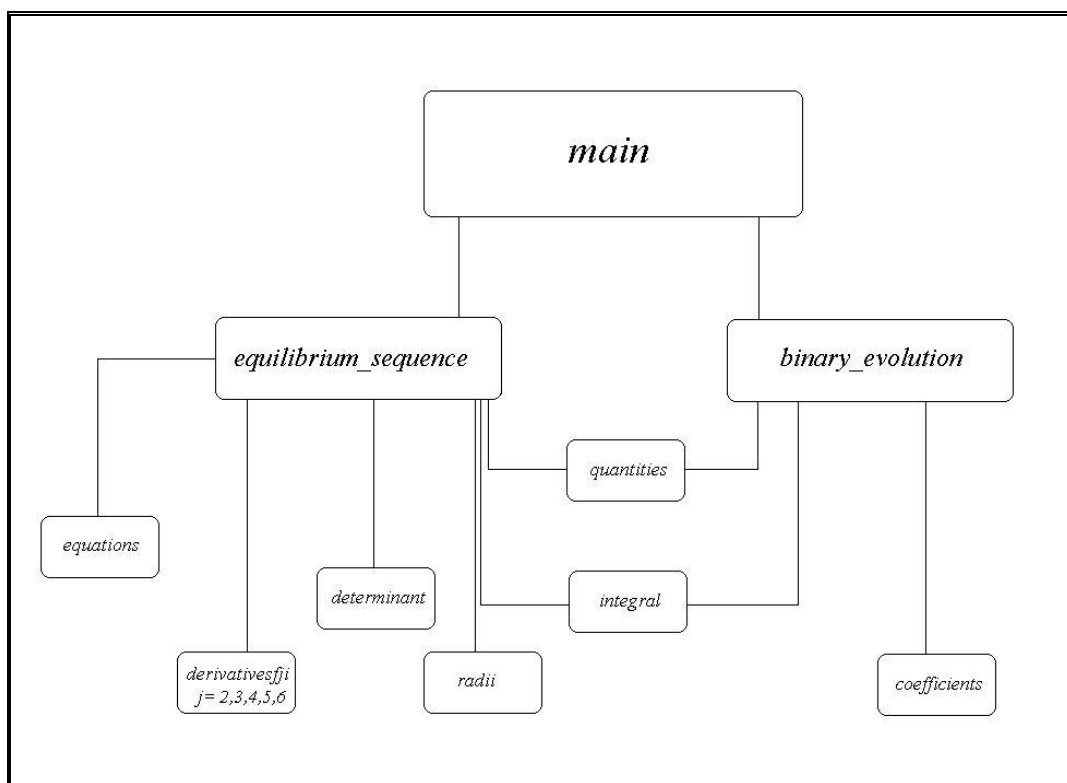
3.1. Δομή και λειτουργία του προγράμματος

Δομή του προγράμματος

Στην ουσία το πρόγραμμα αποτελείται από δύο κομμάτια. Το μεν πρώτο κατασκευάζει καταστάσεις ισορροπίας για το σύστημα των δύο αστέρων, το δε δεύτερο εξελίσσει αυτές τις καταστάσεις χρονικά.

Όπως έχει αναφερθεί εκτενώς στο δεύτερο κεφάλαιο οι καταστάσεις ισορροπίας ορίζονται στα πλαίσια ακολουθιών ισορροπίας με παράμετρο την $\hat{r} = r/(a_1 + a'_1)$. Με τον τρόπο αυτό λύνοντας ένα σύστημα έξι εξισώσεων, που προκύπτει στα πλαίσια της ελλειψοειδούς αντιμετώπισης του προβλήματος, προκύπτουν καταστάσεις ισορροπίας για τα μέλη των συστημάτων αυτών. Στην πραγματικότητα πρόκειται για καταστάσεις ημι-ισορροπίας, οι οποίες ωστόσο για την δική μας περίπτωση θα θεωρηθούν καταστάσεις ισορροπίας. Θεωρώντας αυτές τις καταστάσεις ως αρχικές συνθήκες εξελίσσουμε το σύστημα χρονικά λύνοντας τις εξισώσεις (2.2.14) ως (2.2.25), για συστήματα που δεν εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία και (2.3.19) ως (2.3.30) για συστήματα τα οποία εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία. Η επίλυση των συστημάτων αυτών γίνεται από το δεύτερο κομμάτι του προγράμματος.

Στο Σχήμα 3.1 φαίνεται η δομή του προγράμματος. Συνολικά ορίζονται 14 συναρτήσεις (οι derivativesfji αποτελούν πέντε συναρτήσεις) οι οποίες καλούνται μία ή περισσότερες φορές. Εκτός από την κύρια συνάρτηση, main, μόνο οι equilibrium_sequence και η binary_evolution καλούν άλλες συναρτήσεις. Οι υπόλοιπες συναρτήσεις απλώς υπολογίζουν κάποιες ποσότητες.



Σχήμα 3.1. Δομή του προγράμματος υπολογισμού αρχικών συνθηκών και χρονικής εξέλιξης διπλών συστημάτων.

Στον πίνακα που ακολουθεί φαίνονται τόσο οι συναρτήσεις, όσο και οι μεταβλητές που δέχονται ή επιστέφουν.

Συναρτήσεις που εμφανίζονται στο πρόγραμμα		
Συνάρτηση	Πληροφορία εισόδου*	Πληροφορία εξόδου*
equilibrium_sequence	p, r, Ro1, Ro2, M1, M2, kn1, kn2, n1, n2, fR1, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6.	a1_eq, a2_eq, a3_eq, a4_eq, a5_eq, a6_eq, r_eq, omega_eq, J_eq, E_eq, R1_eq, R2_eq.

binary_evolution	p, r, Ro1, Ro2, M1, M2, kn1, kn2, n1, n2, fR1, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, fe1, fe2, L1, L2, q, z1, z2, z3, z4, z5, z6, z7, z8, z11, z12, z13, z14, z15, h.	a1_t, a2_t, a3_t, a4_t, a5_t, a6_t, fe1_t, fe2_t, L1_t, L2_t, q_t, z1_t, z2_t, z3_t, z4_t, z5_t, z6_t, z7_t, z8_t, z11_t, z12_t, z13_t, z14_t, z15_t, omega_t, J_t, E_t.
equations	p, r, Ro1, Ro2, M1, M2, kn1, kn2, n1, n2, fR1, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A1, A2, A3, A4, A5, A6.	f1, f2, f3, f4, f5, f6.
integral	b1, b2, b3, Ro1, bima	area
derivativesf2i	p, r, Ro1, Ro2, M1, M2, kn1, kn2, n1, n2, fR1, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A1, A2, A3, A4, A5, A6.	f21, f22, f23, f24, f25, f26.
derivativesf3i	p, r, M1, M2, kn1, kn2, n1, fR1, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A1, A3.	f31, f32, f33, f34, f35, f36.
derivativesf4i	p, r, M1, M2, kn1, kn2, n1, fR1, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A2, A3.	f41, f42, f43, f44, f45, f46.
derivativesf5i	p, r, M1, M2, kn1, kn2, n2, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A4, A6.	f51, f52, f53, f54, f55, f56.
derivativesf6i	p, r, M1, M2, kn1, kn2, n2, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A5, A6.	f61, f62, f63, f64, f65, f66.
determinant	q11,q12,q13,q14,q15,q16 q21,q22,q23,q24,q25,q26 q31,q32,q33,q34,q35,q36 q41,q42,q43,q44,q45,q46 q51,q52,q53,q54,q55,q56 q61,q62,q63,q64,q65,q66	D
radii	p, r, Ro1, Ro2, M1, M2, kn1, kn2, n1, n2, fR1, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A1, A2, A3, A4, A5, A6.	R1, R2
quantities	p, r, Ro1, Ro2, M1, M2, kn1, kn2, n1, n2, fR1, fR2, a1, a2, a3, a4, a5, a6, A1, A2, A3, A4, A5, A6.	omega, J, E.
coefficients	a1, a2, a3, a4, a5, a6, fe1, fe2, L1, L2, r, q, z1, z2, z3, z4, z5, z6, z7, z8, z11, z12, z13, z14, z15, M1, M2, Ro1, Ro2, n1, n2, kn1, kn2, h, R1, R2, A1, A2, A3, A4, A5, A6.	x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, x5, y5, x6, y6, x7, y7, x8, y8, x9, x10, x11, y11, x12, y12.

* ορισμός συμβόλων			
p	Λόγος μαζών	a1, a2, a3, a4, a5, a6	Οι άξονες των ελλειψοειδών
M1, M2	Μάζες ελλειψοειδών		
Ro1, Ro2	Ακτίνες σφαιρών ίδιας μάζας με τα ελλειψοειδή	fe1, fe2, q(= θ)	γωνίες που φαίνονται στο σχήμα 2.1
n1, n2	Πολυτροπικοί δείκτες	L1, L2	Οι ποσότητες Λ και Λ'
kn1, kn2	Αδιάστατες παράμετροι που εξαρτώνται μόνο από τους πολυτροπικούς δείκτες	r	Απόσταση μεταξύ των αστερών
		z1, z2, z3, z4, z5, z6, z7, z8, z11, z12, z13, z14, z15	Παράγωγοι των a1, a2, a3, a4, a5, a6, fe1, fe2, r, q, z7, z8, z12 αντίστοιχα.
fR1, fR2	Ποσοτική έκφραση της διαφορικής περιστροφής του εσωτερικού κάθε ελλειψοειδούς	h	Το βήμα του χρόνου για την αριθμητική μέθοδο
A1, A2, A3, A4, A5, A6	Τα ολοκληρώματα που ορίστηκαν από τη σχέση (2.1.10)	omega	Η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα
f1, f2, f3, f4, f5, f6	Εξισώσεις (2.1.48) ως (2.1.53)	J	Η συνολική στροφορμή του συστήματος
f21, f22, f23, f24, f25, f26	Μερικές παράγωγοι της f2 ως προς a1, a2, κτλ.	E	Η συνολική ενέργεια του συστήματος
f31, f32, f33, f34, f35, f36, f41, f42, f43, f44, f45, f46, f51, f52, f53, f54, f55, f56, f61, f62, f63, f64, f65, f66	Αντίστοιχα με τις f21, f22, κτλ	R1, R2	Οι μέσες ακτίνες των ελλειψοειδών
		a1_eq, a2_eq, a3_eq, a4_eq, a5_eq, a6_eq, r_eq, omega_eq, J_eq, E_eq, R1_eq, R2_eq	Οι τιμές των μεταβλητών στην κατάσταση ισορροπίας του συστήματος

q_{ij} $i, j = 1,2,3,4,5,6$	Μεταβλητές για τον προσδιορισμό οριζουσών διαστάσεων 6x6	a1_t, a2_t, a3_t, a4_t, a5_t, a6_t, fe1_t, fe2_t, L1_t, L2_t, q_t, z1_t, z2_t, z3_t, z4_t, z5_t, z6_t, z7_t, z8_t, z11_t, z12_t, z13_t, z14_t, z15_t, omega_t, J_t, E_t.	Οι τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές μετά από κάθε βήμα του βρόχου for για την επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων
b1, b2, b3	Μεταβλητές για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων Ai		
bima	Μεταβλητή που καθορίζει την ακρίβεια στον υπολογισμό των Ai	D	Τιμή ορίζουσας 6x6
x1, y1, x2, y2, x3, y3, x4, y4, x5, y5, x6, y6, x7, y7, x8, y8, x9, x10, x11, y11, x12, y12.	Μεταβλητές για την μέθοδο επίλυσης του συστήματος διαφορικών εξισώσεων		

Πίνακας 1. Συναρτήσεις του προγράμματος και οι μεταβλητές εισόδου-εξόδου.

Λειτουργία του προγράμματος

Το πρόγραμμα λειτουργεί ως εξής: δίνουμε τιμές για τα μεγέθη p, r, n1, kn1, fR1, fR2 με εντολές scanf (αυτομάτως έχουμε προσδιορίσει και τις n2, kn2, αφού οι δύο αστέρες πρέπει να έχουν τον ίδιο πολυτροπικό δείκτη). Οι τιμές αυτές μαζί με κάποιες ακόμη στέλνονται στην equilibrium_sequence, η οποία στην ουσία αποτελείται από ένα βρόχο for. Σε κάθε εκτέλεση του βρόχου καλούνται με την εξής σειρά οι συναρτήσεις: integral (έξι φορές), equations, derivativesf2i, derivativesf3i, derivativesf4i, derivativesf5i, derivativesf6i, determinant, quantities.

Με την κλήση της συνάρτησης integral έξι φορές δίνουμε τιμές στα ολοκληρώματα Ai. Στη συνέχεια καλούμε τις equations, τις derivativesf2,3,4,5,6i και τη determinant, οι οποίες είναι απαραίτητες για την αριθμητική επίλυση του συστήματος με την μέθοδο Newton-Raphson. Τέλος, καλούμε την quantities, η οποία υπολογίζει την τροχιακή γωνιακή ταχύτητα, την συνολική στροφορμή και ενέργεια του συστήματος (σχέσεις (2.1.30), (2.1.29) και (2.1.45) αντίστοιχα). Ο βρόχος εκτελείται συνολικά 100 φορές και καταλήγει στις τιμές των μεταβλητών για την κατάσταση ισορροπίας, τις οποίες και στέλνει πίσω στη κύρια συνάρτηση (main).

Η main χρησιμοποιεί τις τιμές των μεταβλητών για την κατάσταση ισορροπίας, ως αρχικές συνθήκες και στη συνέχεια τις εξελίσσει λύνοντας τις διαφορικές εξισώσεις που αναφέραμε και παραπάνω. Συγκεκριμένα, δίνουμε και πάλι μέσω εντολών scanf τιμές για το χρονικό βήμα της μεθόδου και για τον συνολικό αριθμό των βημάτων, καθώς και για το αν θέλουμε να υπάρχει ακτινική διαταραχή στο σύστημα. Η main σε κάθε εκτέλεση του βρόχου for καλεί την binary_evolution, η

Τιμές της σταθεράς k_n συναρτήσει του πολυτροπικού δείκτη n			
n	k_n	n	k_n
0.0	1.	1.5	0.51149
0.1	0.96064	2.0	0.38712
0.2	0.92257	2.5	0.27951
0.3	0.88562	3.0	0.18839
0.4	0.84973	3.5	0.11387
0.5	0.81482	4.0	0.05643
1.0	0.65345	4.5	0.01724

Πίνακας 2. Τιμές του k_n για διάφορους πολυτροπικούς δείκτες.

Το πρόγραμμα εκτυπώνει τους λόγους των αξόνων των ελλειψοειδών που φαίνονται στο Σχήμα 3.3, τις ακριβείς τιμές όλων των αξόνων και την απόσταση μεταξύ των αστερών. Οι τιμές για τα παραπάνω μεγέθη είναι εκφρασμένες σε μονάδες μήκους R_{o1} . Επίσης, εκτυπώνονται η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα και η συνολική στροφορμή και ενέργεια του συστήματος.

```

please wait few seconds...

Initial conditions for the binary system have been calculated
-----
a2/a1=0.567382 a3/a1=0.520213 a5/a4=0.943674 a6/a4=0.896257

R1/Ro1=1.042240      R2/Ro2=1.006539

a1=1.565365          a4=1.064337
a2=0.888160          a5=1.004387
a3=0.814323          a6=0.953920

r=3.076751

Omega=0.388325      J=2.534624      E=-2.996622

please enter time step...
0.1
please enter the number of steps...
35

please type 1 for a presence of a small radial perturbation
or
type 2 for an unperturbed binary system
2

binary evolution in progress...

```

Σχήμα 3.3. Τιμές των μεταβλητών του συστήματος για την κατάσταση ισορροπίας και εισαγωγή παραμέτρων για την εκκίνηση της χρονικής εξέλιξης.

Εισάγοντας το βήμα του χρόνου, τον αριθμό των βημάτων που θέλουμε να εκτελεστούν και επιλέγοντας αν θέλουμε να υπάρχει μια τροχιακή διαταραχή στο σύστημα ή όχι ξεκινάει η χρονική εξέλιξη. Τα αποτελέσματα αυτής δίνονται σε τρεις στήλες, όπως φαίνονται στο Σχήμα 3.4 και εκτυπώνονται σε κάθε βήμα του βρόχου for. Η πρώτη από τις στήλες αντιστοιχεί στον χρόνο από την εκκίνηση της προσομοίωσης, η δεύτερη στην απόσταση μεταξύ των κέντρων των ελλειψοειδών και η τρίτη στον αριθμό των περιφορών που έχουν εκτελεστεί από το σύστημα.

binary evolution in progress...		
time	binary separation	orbital decays
0.000000	3.076751	0.002393
0.044721	3.076752	0.004785
0.089443	3.076755	0.007177
0.134164	3.076759	0.009567
0.178885	3.076765	0.011956
0.223607	3.076770	0.014344
0.268328	3.076775	0.016731
0.313050	3.076779	0.019117
0.357771	3.076781	0.021502
0.402492	3.076781	0.023885
0.447214	3.076777	0.026268
0.491935	3.076770	0.028650
0.536656	3.076759	0.031031
0.581378	3.076742	0.033411
0.626099	3.076720	0.035790
0.670820	3.076691	0.038168
0.715542	3.076655	0.040545
0.760263	3.076612	0.042921
0.804984	3.076561	0.045296
0.849706	3.076501	0.047670
0.894427	3.076432	0.050044
0.939149	3.076352	0.052416
0.983870	3.076263	0.054788
1.028591	3.076163	0.057159
1.073313	3.076051	0.059528
1.118034	3.075928	0.061897
1.162755	3.075792	0.064266
1.207477	3.075643	0.066633
1.252198	3.075481	0.069000
1.296919	3.075304	0.071366
1.341641	3.075113	0.073732
1.386362	3.074907	0.076096
1.431084	3.074686	0.078460
1.475805	3.074448	0.080824
1.520526	3.074193	0.083186
1.565248	3.073921	0.085549

Σχήμα 3.4. Χρονική εξέλιξη του συστήματος και ολοκλήρωση της εκτέλεσης του προγράμματος.

Με την ολοκλήρωση της εκτέλεσης του προγράμματος έχει δημιουργηθεί ένα αρχείο στο οποίο καταγράφεται η εξέλιξη του συστήματος. Συγκεκριμένα εκτυπώνεται για κάθε βήμα ο χρόνος, η απόσταση των κέντρων των ελλειψοειδών, οι άξονες αυτών ($a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$), οι γωνίες ϕ, ϕ' , οι ποσότητες Λ, Λ' , η γωνία θ , και οι παράγωγοι αυτών $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_{11}, z_{12}$, (δεν εκτυπώνονται οι παράγωγοι των Λ, Λ') η τροχιακή γωνιακή ταχύτητα, η συνολική στροφορμή και ενέργεια, η κυματομορφή και τέλος οι γωνίες $\alpha(\equiv \theta - \phi), \alpha'(\equiv \theta - \phi')$.

Μονάδες και προσεγγίσεις

Στο κομμάτι του προγράμματος που αφορά στην κατασκευή ακολουθιών ισορροπίας θεωρούμε ότι $G = R_o = M = 1$. Με την παραδοχή αυτή θα ισχύει ότι:

$L = R_o$, $M = M$, και $T = \left(\frac{R_o^3}{GM} \right)^{1/2}$. Έτσι τα μεγέθη που θα προκύψουν από τις εξισώσεις θα αναφέρονται σ' αυτό το σύστημα μονάδων. Εξαίρεση αποτελεί η γωνιακή ταχύτητα (Ω) που εκτυπώνει το πρόγραμμα και είναι η αδιάστατη ποσότητα $\bar{\Omega} = \Omega / (\pi G \bar{\rho}_o)^{1/2}$, όπου $\bar{\rho}_o = 3M / (4\pi R_o^3)$.

Στο κομμάτι του προγράμματος που αφορά στη χρονική εξέλιξη (με εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας) κάνουμε την παραδοχή ότι: $G = c = R_o = 1$, οπότε θα έχουμε ότι: $L = R_o$, $T = R_o / c$, και $M = \frac{R_o c^2}{G}$. Για να προσδιορίσουμε την μάζα κάνουμε την επιπλέον παραδοχή ότι $\frac{R_o}{M} = \frac{5G}{c^2}$, η οποία αποτελεί μια προσέγγιση για την καταστατική εξίσωση του αστέρα νετρονίων. Επίσης θεωρούμε ότι $R_o = R'_o$, κάτι το οποίο ισχύει προσεγγιστικά στην περιοχή μαζών από $0.8M_o$ ως $1.5M_o$, όπου M_o η μάζα του Ήλιου.

3.2. Περιγραφή και σύγκριση αριθμητικών μεθόδων

Αριθμητικές μέθοδοι στο πρόγραμμα

Η χρήση αριθμητικών μεθόδων ήταν απαραίτητη σε τρεις περιπτώσεις: στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων A_i , στην επίλυση του αλγεβρικού συστήματος (εξισώσεις (2.1.48) ως (2.1.53)) και στην επίλυση των συστημάτων διαφορικών εξισώσεων (2.2.14) ως (2.2.25) και (2.3.19) ως (2.3.30).

Υπολογισμός ολοκληρωμάτων A_i

Για τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων:

$$A_i \equiv a_1 a_2 a_3 \int_0^\infty \frac{du}{\Delta(a_i^2 + u)} \quad \text{με} \quad \Delta^2 = (a_1^2 + u)(a_2^2 + u)(a_3^2 + u)$$

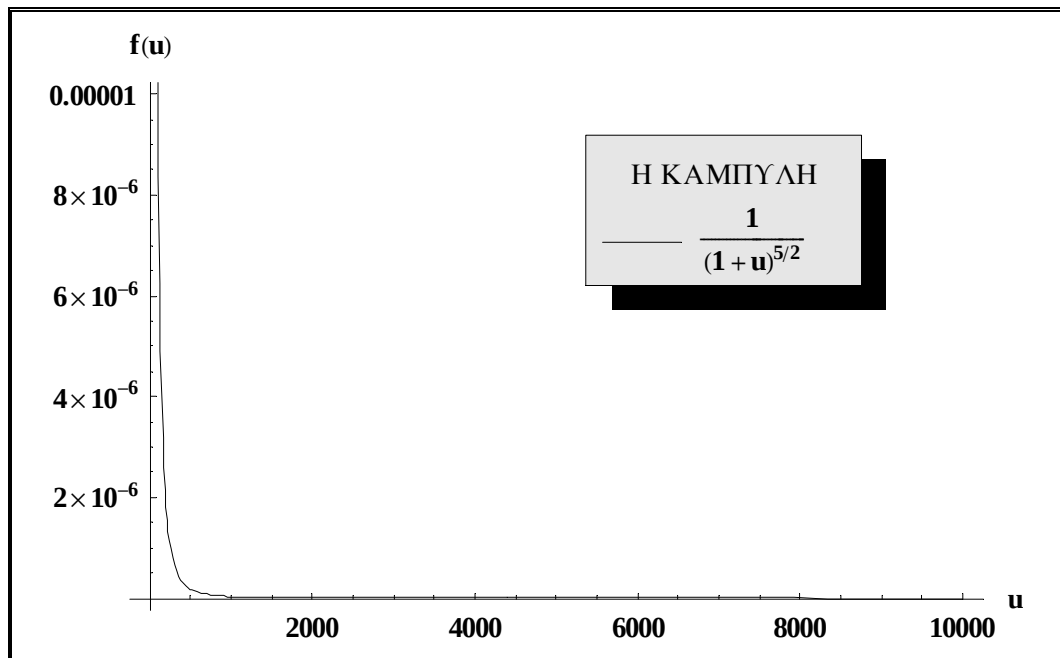
χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος των προσδιοριστέων συντελεστών και συγκεκριμένα ο τύπος των Euler-Maclaurin, ο οποίος έχει ως εξής:

$$\int_{x_o}^{x_n} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_o) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) - \frac{h^2}{12}(f'(x_n) - f'(x_o)) \\ + \frac{h^4}{720}(f'''(x_n) - f'''(x_o)) - \frac{h^6}{30240}(f^{(5)}(x_n) - f^{(5)}(x_o)) \quad (3.2.1)$$

Στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων A_i η συνάρτηση f είναι η:

$$f(u) = \frac{1}{\Delta(a_i^2 + u)}$$

όπου το Δ ορίστηκε παραπάνω. Φυσικά ο υπολογισμός δεν μπορεί να γίνει μέχρι το άπειρο, αλλά μόνον μέχρι κάποιο πεπερασμένο όριο. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(u)$ για την περίπτωση όπου $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ δίνεται στο Σχήμα 3.5. Η μορφή αυτής της καμπύλης δεν αλλάζει ουσιαστικά όταν οι άξονες δεν είναι ίσοι μεταξύ τους και πολύ διαφορετικοί από τη μονάδα, όπως στη περίπτωση των ελλειψοειδών. Έτσι, δεδομένου ότι οι τιμές της συνάρτησης $f(u)$ είναι πολύ μικρές για $u > 1000$ θέτουμε το πάνω όριο του ολοκληρώματος κάπου εκεί.



Σχήμα 3.5. Γραφική παράσταση της $f(u)$, για u από 0 ως 10000.

Συγκεκριμένα, στους υπολογισμούς ολοκληρωμάτων που γίνονται στην συνάρτηση `equilibrium_sequence` χρησιμοποιούνται τα όρια $u_1 = 0$ και $u_2 = 1000$.

Το βήμα που χρησιμοποιούμε είναι $h = 0.01$ και έτσι ο βρόχος for εκτελείται 10^5 φορές. Στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων που γίνονται στη συνάρτηση `binary_evolution` τα όρια είναι $u_1 = 0$ και $u_2 = 10000$, ενώ το βήμα είναι $h = 0.1$. Ο βρόχος εκτελείται και πάλι 10^5 φορές.

Επίλυση του αλγεβρικού συστήματος

Η επίλυση του αλγεβρικού συστήματος των εξισώσεων (2.1.48) ως (2.1.53) γίνεται με τη μέθοδο Newton-Raphson. Σύμφωνα μ' αυτή, για ένα σύστημα 6 εξισώσεων με 6 αγνώστους, όπως το δικό μας, η λύση θα προκύπτει με τη βοήθεια της σχέσεως:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} & \frac{\partial f_3}{\partial x_5} & \frac{\partial f_3}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} & \frac{\partial f_4}{\partial x_5} & \frac{\partial f_4}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_5}{\partial x_1} & \frac{\partial f_5}{\partial x_2} & \frac{\partial f_5}{\partial x_3} & \frac{\partial f_5}{\partial x_4} & \frac{\partial f_5}{\partial x_5} & \frac{\partial f_5}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_m^1 \\ \Delta x_m^2 \\ \Delta x_m^3 \\ \Delta x_m^4 \\ \Delta x_m^5 \\ \Delta x_m^6 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

όπου f_i οι εξισώσεις και Δx_m^i η διόρθωση στο m -οστό βήμα του x^i αγνώστου. Στην περίπτωση μας οι άγνωστοι είναι οι άξονες των ελλειψοειδών. Έτσι η συνάρτηση `equilibrium_sequence` υπολογίζει τις τιμές των μερικών παραγώγων και των εξισώσεων μέσω των συναρτήσεων `derivatives` και `equations` αντίστοιχα και στη συνέχεια με την συνάρτηση `determinant` επιλύει το γραμμικό σύστημα (3.2.2). Οι διορθώσεις που θα προκύψουν αθροίζονται στην τιμή των μεταβλητών και η διαδικασία εκτελείται εκ νέου. Συνολικά εκτελούνται 100 επαναλήψεις οπότε η παραπάνω μέθοδος συγκλίνει σε μία τιμή μέχρι και το έκτο δεκαδικό ψηφίο.

Επίλυση του συστήματος διαφορικών εξισώσεων

Το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (2.2.14) ως (2.2.25), όπως και το (2.3.19) ως (2.2.30), λύνονται με τη μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης. Πρόκειται για ένα σύστημα δώδεκα διαφορικών εξισώσεων (f_i με $i = 1, 2, \dots, 12$) με δώδεκα μεταβλητές,

τις $x_i = \{a_1, a_2, a_3, a'_1, a'_2, a'_3, \phi, \phi', \Lambda, \Lambda', r, \theta\}$. Οι δεύτερες χρονικές παράγωγοι στο αριστερό μέλος των εξισώσεων (εκτός από τις εξισώσεις 9 και 10, μεταβλητές Λ, Λ') επιβάλλουν την εξής αντικατάσταση:

$$\begin{aligned}\frac{dx_i}{dt} &= z_i \\ \frac{dz_i}{dt} &= f_i \quad i = 1, 2, \dots, 8, 11, 12\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

ενώ για τις εξισώσεις 9 και 10 έχουμε: $\frac{dx_9}{dt} = f_9$ και $\frac{dx_{10}}{dt} = f_{10}$ (3.2.4). Τώρα οι εξισώσεις (3.2.3) και οι (3.2.4), συνολικά 22, μπορούν να επιλυθούν με τη μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης. Οι αναδρομικές σχέσεις βάσει των οποίων λύνεται το σύστημα είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}x_{n+1}^i &= x_n^i + \frac{1}{2}(k_1^i + k_2^i) \quad i = 1, 2, \dots, 12 \\ z_{n+1}^i &= z_n^i + \frac{1}{2}(g_1^i + g_2^i) \quad i = 1, 2, \dots, 8, 11, 12\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

όπου οι συντελεστές $k_1^i, k_2^i, g_1^i, g_2^i$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned}k_1^i &= hf_i(x^i) \\ k_2^i &= hf_i(x^i + k_1^i) \quad i = 1, 2, \dots, 12\end{aligned}\tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}g_1^i &= hz_i \\ g_2^i &= h(z_i + g_1^i) \quad i = 1, 2, \dots, 8, 11, 12\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

το h είναι το βήμα της μεθόδου και στην περίπτωση μας αποτελεί το βήμα του χρόνου, το οποίο δεν καθορίζεται στον κώδικα, αλλά από τον χρήστη του προγράμματος κάθε φορά.

Παρομοία μπορεί να επιλυθεί το σύστημα με τις μεθόδους Runge-Kutta τέταρτης τάξης και Runge-Kutta-Fehlberg. Στον φορμαλισμό που αναπτύχθηκε παραπάνω θα είναι, για την Runge-Kutta τέταρτης τάξης :

$$x_{n+1}^i = x_n^i + \frac{1}{6}(k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i) \quad i = 1, 2, \dots, 12 \quad (3.2.8)$$

$$z_{n+1}^i = z_n^i + \frac{1}{6}(g_1^i + 2g_2^i + 2g_3^i + g_4^i) \quad i = 1, 2, \dots, 8, 11, 12$$

με τους συντελεστές να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} k_1^i &= hf_i(x^i) \\ k_2^i &= hf_i\left(x^i + \frac{1}{2}k_1^i\right) \quad i = 1, 2, \dots, 12 \\ k_3^i &= hf_i\left(x^i + \frac{1}{2}k_2^i\right) \\ k_4^i &= hf_i(x^i + k_3^i) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

$$\begin{aligned} g_1^i &= hz_i \\ g_2^i &= h\left(z_i + \frac{1}{2}g_1^i\right) \quad i = 1, 2, \dots, 8, 11, 12 \\ g_3^i &= h\left(z_i + \frac{1}{2}g_2^i\right) \\ g_4^i &= h(z_i + g_3^i) \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

και για την Runge-Kutta-Fehlberg:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^i &= x_n^i + \frac{16}{135}k_1^i + \frac{6656}{12825}k_3^i + \frac{28561}{56430}k_4^i - \frac{9}{50}k_5^i + \frac{2}{55}k_6^i \quad i = 1, 2, \dots, 12 \\ z_{n+1}^i &= z_n^i + \frac{16}{135}g_1^i + \frac{6656}{12825}g_3^i + \frac{28561}{56430}g_4^i - \frac{9}{50}g_5^i + \frac{2}{55}g_6^i \quad i = 1, 2, \dots, 8, 11, 12 \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

όπου οι συντελεστές είναι:

$$k_1^i = hf_i(x^i)$$

$$k_2^i = hf_i\left(x^i + \frac{1}{4}k_1^i\right)$$

$$k_3^i = hf_i\left(x^i + \frac{3}{32}k_1^i + \frac{9}{32}k_2^i\right) \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

(3.2.12)

$$k_4^i = hf_i\left(x^i + \frac{1932}{2197}k_1^i - \frac{7200}{2197}k_2^i + \frac{7296}{2197}k_3^i\right)$$

$$k_5^i = hf_i\left(x^i + \frac{439}{216}k_1^i - 8k_2^i + \frac{3680}{513}k_3^i - \frac{845}{4104}k_4^i\right)$$

$$k_6^i = hf_i\left(x^i - \frac{8}{27}k_1^i + 2k_2^i - \frac{3544}{2565}k_3^i + \frac{1859}{4104}k_4^i - \frac{11}{40}k_5^i\right)$$

$$g_1^i = hg_i(x^i)$$

$$g_2^i = hg_i\left(x^i + \frac{1}{4}k_1^i\right)$$

$$g_3^i = hg_i\left(x^i + \frac{3}{32}k_1^i + \frac{9}{32}k_2^i\right) \quad i = 1, 2, \dots, 12$$

$$g_4^i = hf_i\left(x^i + \frac{1932}{2197}g_1^i - \frac{7200}{2197}g_2^i + \frac{7296}{2197}g_3^i\right) \quad (3.2.13)$$

$$g_5^i = hg_i\left(x^i + \frac{439}{216}k_1^i - 8k_2^i + \frac{3680}{513}k_3^i - \frac{845}{4104}k_4^i\right)$$

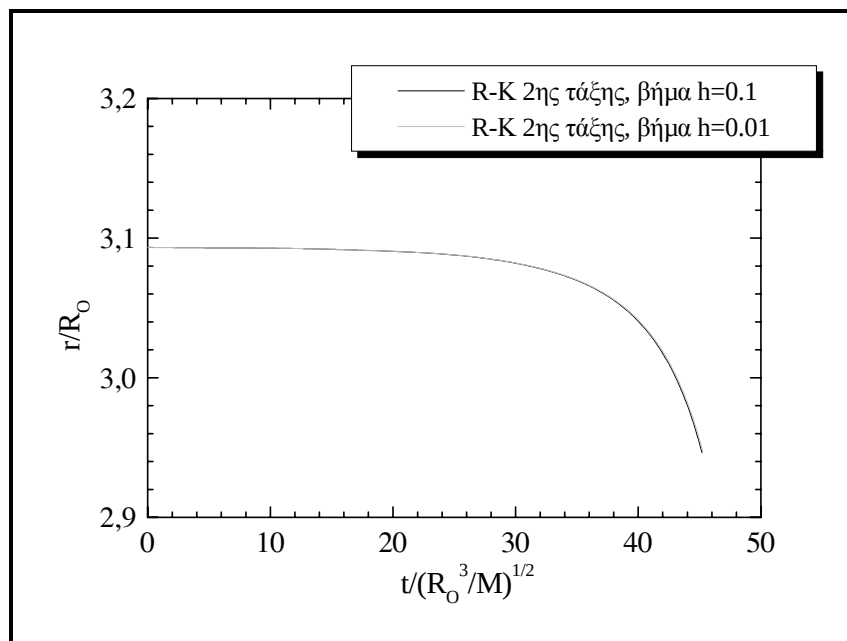
$$g_6^i = hg_i\left(x^i - \frac{8}{27}k_1^i + 2k_2^i - \frac{3544}{2565}k_3^i + \frac{1859}{4104}k_4^i - \frac{11}{40}k_5^i\right)$$

Σύγκριση των μεθόδων Runge-Kutta δεύτερης τάξης, Runge-Kutta τέταρτης τάξης και Runge-Kutta-Fehlberg.

Αν και οι μέθοδοι Runge-Kutta τέταρτης τάξης και Runge-Kutta-Fehlberg έχουν μεγαλύτερη ακρίβεια απ' ότι η Runge-Kutta δεύτερης τάξης, μεγαλώνουν τον χρόνο εκτέλεσης του προγράμματος, γεγονός που αποτελεί σημαντικό μειονέκτημα. Ακολουθεί η εκτέλεση του προγράμματος για διάφορα συστήματα με τις τρεις προαναφερθείσες μεθόδους με σκοπό τη σύγκρισή τους. Στον πίνακα 3 συνοψίζονται τα χαρακτηριστικά των συστημάτων που συγκρίνουμε.

	Τύπος συστήματος*	Πολυτροπικός Δείκτης	Λόγος μαζών	Απόσταση αστερών	Παρουσία διαταραχής
Σύστημα 1	1	0.5	0.5	1.15	ΝΑΙ
Σύστημα 2	1	0.5	1.	1.20	ΟΧΙ
Σύστημα 3	1	1.	1.	1.50	ΟΧΙ
Σύστημα 4	3	0.5	1.	1.50	ΟΧΙ
* τύπος 1: αποτελούμενο από λευκούς νάνους μικρής μάζας ή πλανήτες τύπος 2: αποτελούμενο από μικρής μάζας αστέρες της κύριας ακολουθίας τύπος 3: αποτελούμενο από αστέρες νετρονίων					

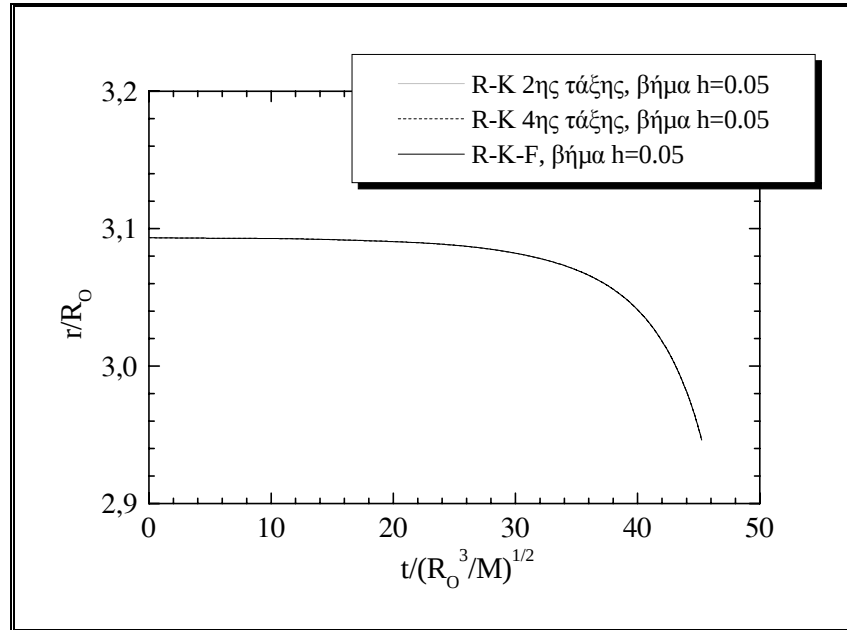
Πίνακας 3. Χαρακτηριστικά των συστημάτων για την σύγκριση των αριθμητικών μεθόδων.



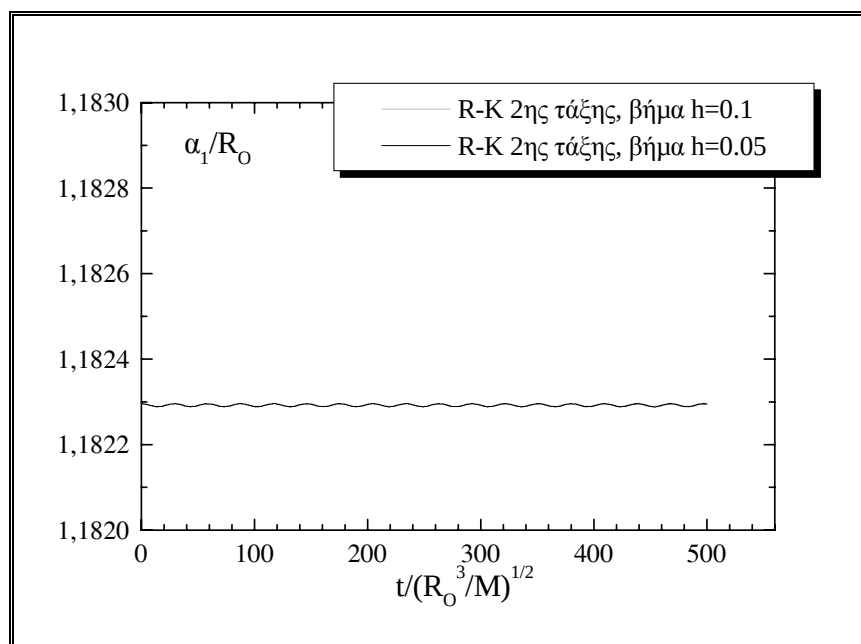
Σχήμα 3.6. αποτελέσματα μεθόδου Runge-Kutta δεύτερη τάξης για το σύστημα 1, για δύο διαφορετικά βήματα (γραφική παράσταση απόστασης αστερών-χρόνου).

Στο Σχήμα 3.6 φαίνονται τα αποτελέσματα που δίνει το πρόγραμμα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Runge-Kutta δεύτερης τάξης, για το πρώτο σύστημα για

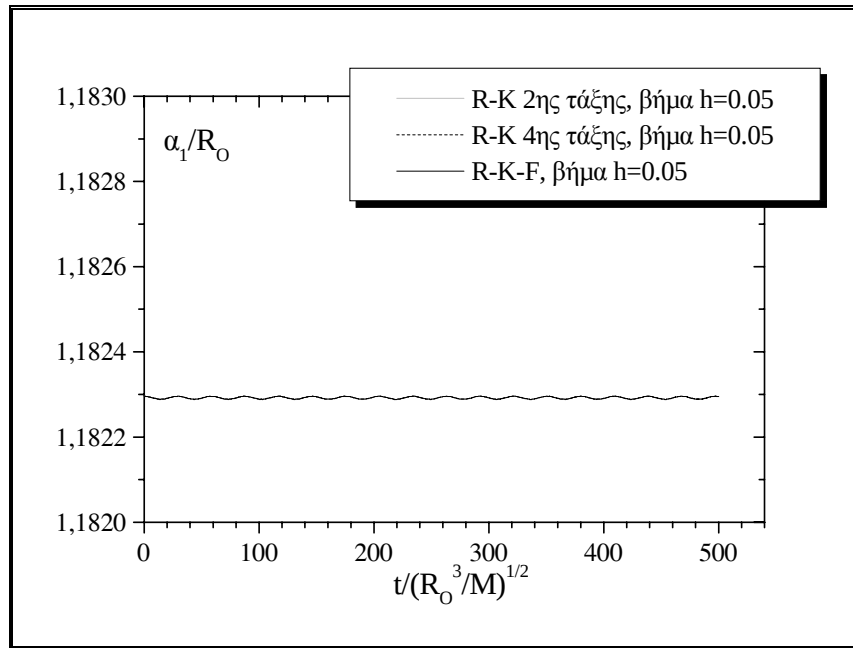
δύο διαφορετικά βήματα. Οι καμπύλες που προκύπτουν σχεδόν ταυτίζονται. Το ίδιο συμβαίνει και με τις καμπύλες του σχήματος 3.7, όπου συγκρίνονται οι τρεις μέθοδοι χρησιμοποιώντας το ίδιο βήμα.



Σχήμα 3.7. Σύγκριση των τριών μεθόδων για το σύστημα 1. Οι καμπύλες πρακτικά ταυτίζονται (γραφική παράσταση απόστασης αστέρων-χρόνου).

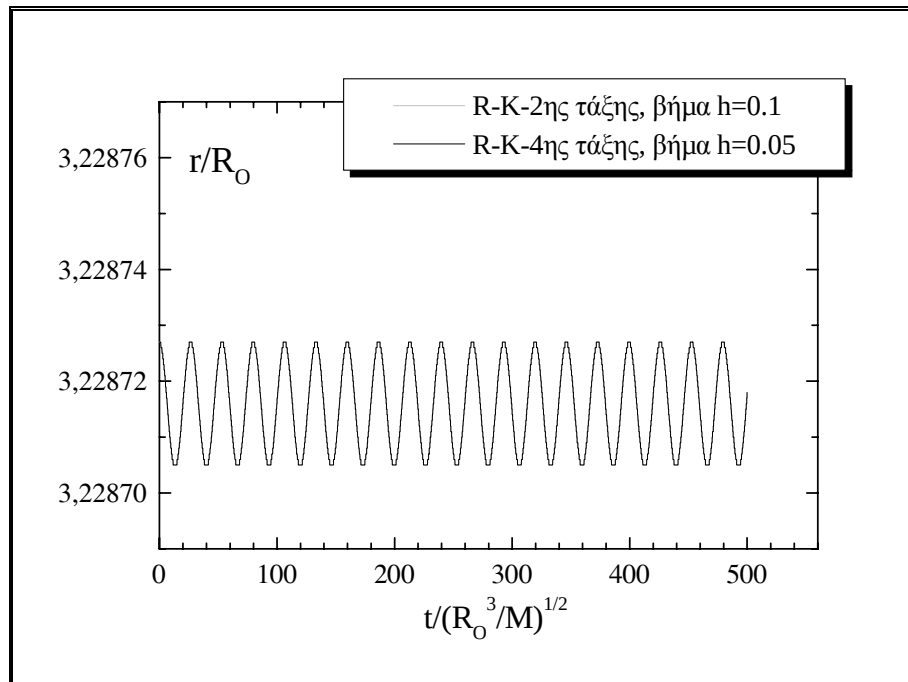


Σχήμα 3.8. Γραφική παράσταση ενός άξονα του ελλειψοειδούς συναρτήσεως του χρόνου, για το σύστημα 2.

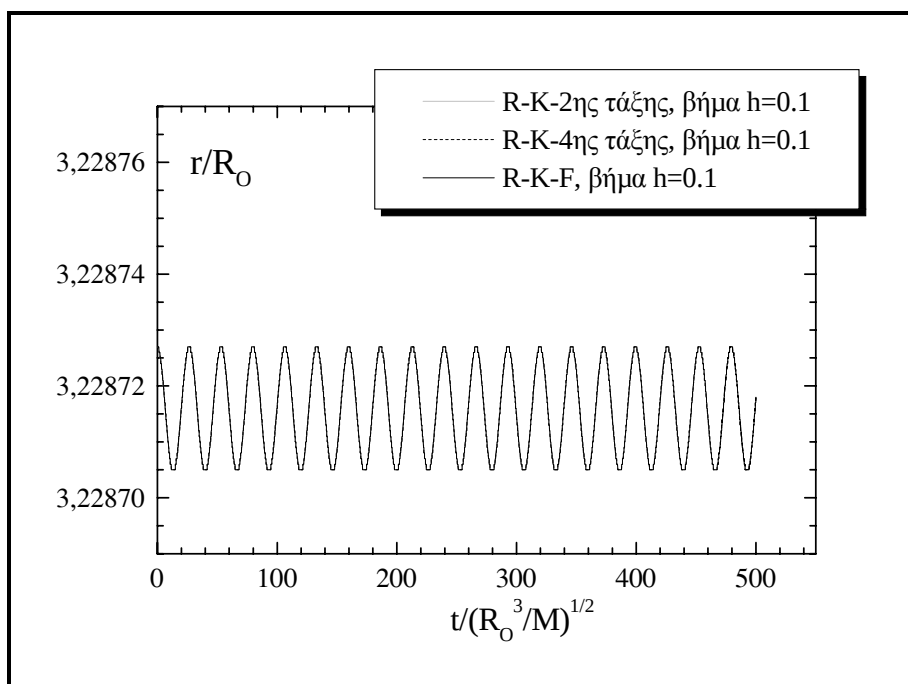


Σχήμα 3.9. Γραφική παράσταση ενός άξονα του ελλειψοειδούς συναρτήσει του χρόνου, για το σύστημα 2.

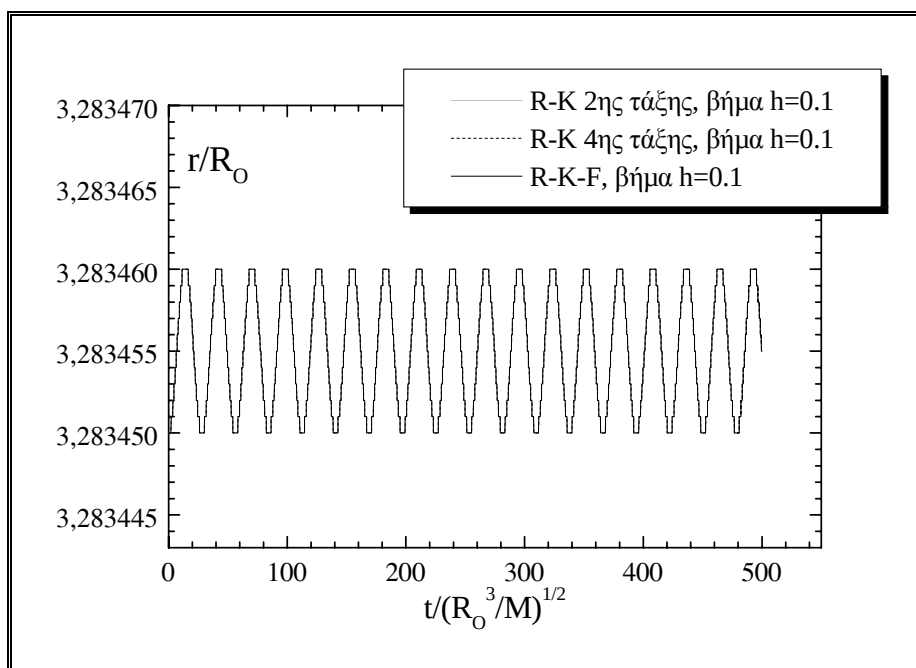
Στα σχήματα 3.8 και 3.9 γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων για το σύστημα 2. Οι καμπύλες ταυτίζονται όπως και στην περίπτωση του συστήματος 1. Στα σχήματα 3.10, 3.11 και 3.12 δίνονται τα αποτελέσματα για τα συστήματα 3 και 4.



Σχήμα 3.10. Γραφική παράσταση της απόστασης των αστερών συναρτήσει του χρόνου, για το σύστημα 3.



Σχήμα 3.11. Γραφική παράσταση της απόστασης των αστερών συναρτήσει του χρόνου, για το σύστημα 3.



Σχήμα 3.12. Γραφική παράσταση της απόστασης των αστερών συναρτήσει του χρόνου, για το σύστημα 4.

Σε αντίθεση με το σύστημα 1 που είναι ασταθές, τα συστήματα 2,3 και 4 είναι ευσταθή. Οι ταλαντώσεις στις τιμές των διάφορων μεταβλητών (στο πεμπτο δεκαδικό

ψηφίο) που παρατηρούνται οφείλονται στις προσεγγίσεις κατά τον προσδιορισμό των αρχικών συνθηκών και σε αριθμητικές προσεγγίσεις.

Παρατηρούμε ότι σε όλες τις περιπτώσεις οι καμπύλες που προκύπτουν για τα συγκεκριμένα μεγέθη, αλλά και για όλες τις άλλες μεταβλητές (που δεν έχουν παρασταθεί γραφικά), ταυτίζονται, γεγονός που σημαίνει ότι η ακρίβεια της Runge-Kutta δεύτερης τάξης σε ότι αφορά την εξέλιξη του συστήματος είναι το ίδιο καλή με την αντίστοιχη των μεθόδων Runge-Kutta τέταρτης τάξης και Runge-Kutta-Fehlberg και συνεπώς η χρήση της πρώτης είναι δικαιολογημένη.

3.3. Αναπαραγωγή υπαρχόντων αποτελεσμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα αναπαράγουμε ήδη υπάρχοντα αποτελέσματα με σκοπό να ελέγξουμε την αξιοπιστία του προγράμματος και να πάρουμε μία εκτίμηση για την ακρίβειά του.

Αναπαραγωγή ακολουθιών ισορροπίας

Αρχικά αναπαράγουμε τις ακολουθίες ισορροπίας που υπάρχουν στην εργασία των Lai, Rasio & Shapiro, 1994. Πρόκειται για διπλά συστήματα αποτελούμενα από λευκούς νάνους μικρής μάζας ή πλανήτες (τύπου 1). Τα αποτελέσματα που προκύπτουν από το πρόγραμμα δίνονται στον πίνακα 4. Οι στήλες του πίνακα παριστάνουν τις ποσότητες (από αριστερά προς δεξιά): $\hat{r} = r/(a_1 + a'_1)$, $\tilde{r} = r/(R_o + R'_o)$, τους αντίστοιχους λόγους και τα μεγέθη: $\bar{\Omega} = \Omega/(\pi G \bar{\rho}_o)^{1/2}$, $\bar{J} = J/(GM^3 R_o)^{1/2}$, $\bar{E} = E/(GM^2/R_o)$.

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_o	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_o	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n = 0, \quad p = 0.8$										
3,0	3,0459	0,9809	0,9702	1	0,9847	0,9739	1	0,1089	2,1913	-1,5645
2,5	2,5656	0,9673	0,9499	1	0,9739	0,9562	1	0,1410	2,0496	-1,5797
2,0	2,1012	0,9375	0,9074	1	0,9501	0,9192	1	0,1909	1,9190	-1,5982
1,8	1,9239	0,9156	0,8779	1	0,9327	0,8936	1	0,2186	1,8762	-1,6058
1,6	1,7552	0,8824	0,8354	1	0,9067	0,8571	1	0,2523	1,8453	-1,6120
1,5	1,6755	0,8594	0,8073	1	0,8888	0,8332	1	0,2717	1,8371	-1,6139
1,3	1,5308	0,7926	0,7310	1	0,8382	0,7702	1	0,3157	1,8448	-1,6118
1,2	1,4696	0,7431	0,6785	1	0,8030	0,7294	1	0,3397	1,8676	-1,6053
1,0	1,3953	0,5692	0,5129	1	0,7227	0,6428	1	0,3826	1,9899	-1,5664
$n = 0, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0463	0,9762	0,9653	1	0,9881	0,9769	1	0,1108	3,1942	-2,6421
2,5	2,5664	0,9593	0,9416	1	0,9797	0,9612	1	0,1434	2,9977	-2,6635
2,0	2,1026	0,9220	0,8919	1	0,9613	0,9286	1	0,1941	2,8223	-2,6888
1,8	1,9260	0,8943	0,8571	1	0,9479	0,9061	1	0,2221	2,7682	-2,6985
1,6	1,7585	0,8522	0,8069	1	0,9279	0,8745	1	0,2560	2,7334	-2,7056
1,5	1,6798	0,8227	0,7732	1	0,9144	0,8541	1	0,2754	2,7274	-2,7069
1,4	1,6062	0,7847	0,7316	1	0,8979	0,8301	1	0,2964	2,7326	-2,7056
1,3	1,5398	0,7345	0,6792	1	0,8779	0,8025	1	0,3185	2,7531	-2,7002
1,2	1,4848	0,6655	0,6109	1	0,8555	0,7727	1	0,3405	2,7956	-2,6880
1,1	1,4537	0,5608	0,5132	1	0,8375	0,7489	1	0,3579	2,8737	-2,6643

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
					$n = 0, \quad p = 0.2$					
3,0	3,0484	0,9654	0,953	1	0,9931	0,9799	1	0,1192	6,5239	-9,6403
2,5	2,5697	0,9405	0,9209	1	0,9882	0,9664	1	0,1542	6,2472	-9,6726
2,2	2,2901	0,9132	0,8869	1	0,9829	0,9522	1	0,1835	6,1235	-9,6905
2,0	2,1093	0,885	0,8531	1	0,9775	0,9385	1	0,2080	6,0732	-9,6990
1,8	1,9358	0,8431	0,8050	1	0,9698	0,9197	1	0,2373	6,0631	-9,7009
1,6	1,7746	0,7777	0,7340	1	0,9586	0,8940	1	0,2719	6,1129	-9,6897
1,5	1,7020	0,7303	0,6851	1	0,9514	0,8785	1	0,2908	6,1688	-9,6761
1,4	1,6393	0,6666	0,6219	1	0,9435	0,8618	1	0,3096	6,2506	-9,6548
1,3	1,5961	0,5756	0,5355	1	0,9367	0,8474	1	0,3253	6,3613	-9,6243
					$n = 0.5, \quad p = 0.8$					
3,0	3,0367	0,9853	0,9769	1,0010	0,9892	0,9815	1,0009	0,1119	2,1536	-1,4826
2,5	2,5527	0,9747	0,9609	1,0017	0,9816	0,9687	1,0015	0,1453	2,0054	-1,4989
2,0	2,0817	0,9513	0,9267	1,0033	0,9647	0,9416	1,0029	0,1977	1,8623	-1,5199
1,8	1,9004	0,9338	0,9024	1,0046	0,9523	0,9225	1,004	0,2272	1,8113	-1,5292
1,6	1,7263	0,9072	0,8669	1,0067	0,9336	0,8948	1,0056	0,2633	1,7689	-1,5382
1,5	1,6432	0,8884	0,8430	1,0082	0,9207	0,8764	1,0068	0,2844	1,7531	-1,5419
1,4	1,5639	0,8644	0,8134	1,0103	0,9046	0,8541	1,0083	0,3076	1,7427	-1,5446
1,3	1,4896	0,8329	0,7764	1,0131	0,8842	0,8271	1,0103	0,3328	1,7399	-1,5453
1,2	1,4225	0,7908	0,7293	1,0172	0,8588	0,7947	1,0129	0,3597	1,7482	-1,5428
1,0	1,3300	0,6408	0,5790	1,0347	0,7984	0,7225	1,0196	0,4105	1,8261	-1,5163
0					$n = 0.5, \quad p = 0.5$					
3,0	3,0391	0,9796	0,9701	1,0011	0,9923	0,9849	1,0008	0,1199	3,0766	-2,6366
2,5	2,5562	0,9649	0,9494	1,0020	0,9869	0,9746	1,0014	0,1555	2,8721	-2,6608
2,0	2,0877	0,9321	0,9052	1,004	0,9751	0,9528	1,0027	0,2112	2,6787	-2,6910
1,8	1,9082	0,9075	0,8736	1,0057	0,9666	0,9377	1,0036	0,2422	2,6122	-2,7041
1,6	1,7373	0,8694	0,8271	1,0085	0,9541	0,9162	1,0050	0,2799	2,5598	-2,7158
1,5	1,6568	0,8421	0,7954	1,0107	0,9458	0,9024	1,0059	0,3015	2,5423	-2,7202
1,4	1,5813	0,8066	0,7557	1,0138	0,9358	0,8862	1,0071	0,3248	2,5337	-2,7225
1,3	1,5134	0,7588	0,7047	1,0183	0,9241	0,8678	1,0084	0,3491	2,5378	-2,7213
1,2	1,4584	0,6916	0,6369	1,0256	0,9119	0,8489	1,0099	0,3726	2,5615	-2,7139
1,1	1,4323	0,5887	0,5394	1,0391	0,9043	0,8364	1,0111	0,3888	2,6219	-2,6938
					$n = 0.5, \quad p = 0.2$					
3,5	3,5376	0,9762	0,9674	1,0011	0,9975	0,9927	1,0005	0,1158	6,2702	-10,9012
3,0	3,0514	0,9623	0,9489	1,0017	0,9961	0,9886	1,0008	0,1446	5,9372	-10,9385
2,5	2,5747	0,9349	0,9138	1,0032	0,9935	0,981	1,0014	0,1868	5,6233	-10,9830
2,0	2,1199	0,8728	0,839	1,0070	0,9879	0,9656	1,0025	0,2506	5,3712	-11,0299
1,8	1,9519	0,8252	0,7853	1,0104	0,9842	0,9555	1,0033	0,2844	5,3099	-11,0440
1,7	1,8741	0,7918	0,7493	1,0131	0,9819	0,9494	1,0038	0,303	5,2942	-11,0480
1,6	1,8029	0,7490	0,7045	1,0170	0,9794	0,9428	1,0043	0,3221	5,2924	-11,0484
1,5	1,7427	0,6924	0,6476	1,0228	0,9768	0,9361	1,0049	0,3404	5,3093	-11,0436
1,4	1,7033	0,6145	0,5724	1,0323	0,9749	0,9307	1,0054	0,3546	5,3541	-11,0300
					$n = 1.5, \quad p = 0.8$					
3,0	3,0245	0,9913	0,9863	1,0028	0,9956	0,9924	1,0018	0,1230	2,0585	-1,2546
2,5	2,5353	0,9851	0,9766	1,0049	0,9925	0,9870	1,0030	0,1603	1,9032	-1,2735
2,2	2,2456	0,9781	0,9660	1,0072	0,9890	0,9812	1,0044	0,1923	1,8078	-1,2880
2,0	2,0553	0,9709	0,9552	1,0097	0,9855	0,9753	1,0059	0,2198	1,7443	-1,2993
1,8	1,8684	0,9601	0,9394	1,0135	0,9804	0,9668	1,0080	0,2537	1,6822	-1,3120
1,6	1,6870	0,9432	0,9155	1,0197	0,9727	0,9543	1,0113	0,2962	1,6238	-1,3258
1,5	1,5993	0,9311	0,8988	1,0242	0,9674	0,9458	1,0135	0,3212	1,5973	-1,3329
1,4	1,5147	0,9153	0,8776	1,0305	0,9608	0,9354	1,0164	0,3491	1,5737	-1,3397
1,3	1,4342	0,8939	0,8501	1,0392	0,9525	0,9226	1,0201	0,3798	1,5546	-1,3458
1,2	1,3599	0,8644	0,8137	1,0520	0,9423	0,9072	1,0247	0,4129	1,5423	-1,3499
1,1	1,2957	0,8214	0,7637	1,0724	0,9305	0,8897	1,0304	0,4467	1,5414	-1,3503
1,0	1,2518	0,7529	0,6900	1,1091	0,9198	0,8738	1,0359	0,4752	1,5619	-1,3420

Πίνακας 4. Αναπαράγωγή αποτελεσμάτων της εργασίας των Lai, Rasio & Shapiro (1994).

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n = 1.5, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0366	0,9827	0,9746	1,0048	0,9979	0,9958	1,0011	0,1574	2,7593	-2,7676
2,5	2,5532	0,9701	0,9566	1,0084	0,9965	0,9930	1,0019	0,2042	2,5560	-2,7991
2,2	2,2695	0,9560	0,9371	1,0127	0,9949	0,9899	1,0027	0,2438	2,4330	-2,8229
2,0	2,0852	0,9413	0,9173	1,0173	0,9934	0,9870	1,0035	0,2770	2,3528	-2,8409
1,8	1,9074	0,9191	0,8885	1,0247	0,9913	0,9829	1,0047	0,3170	2,2767	-2,8604
1,6	1,7408	0,8839	0,8447	1,0375	0,9884	0,9773	1,0063	0,3645	2,2103	-2,8800
1,5	1,6649	0,8581	0,8141	1,0477	0,9866	0,9739	1,0073	0,3905	2,1840	-2,8885
1,4	1,5974	0,8237	0,7749	1,0625	0,9848	0,9703	1,0083	0,4168	2,1660	-2,8948
1,3	1,5440	0,7761	0,7234	1,0852	0,9830	0,9668	1,0094	0,4407	2,1620	-2,8963
1,2	1,5179	0,7078	0,6535	1,1234	0,9820	0,9646	1,0101	0,4558	2,1844	-2,8875

Πίνακας 4. (συνέχεια)

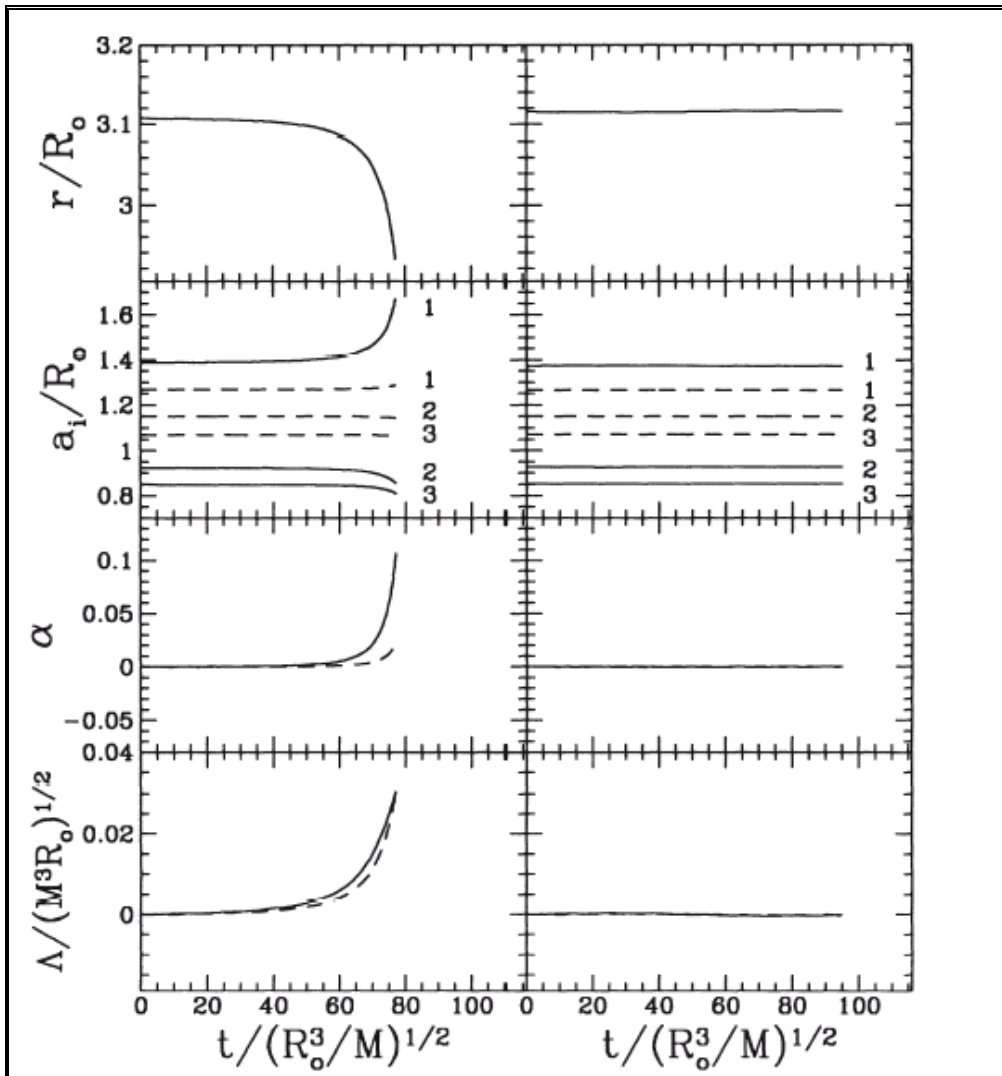
Στον πίνακα 5 δίνονται τα αποτελέσματα της προαναφερθείσας δημοσιεύσεις Συγκρίνοντας τους πίνακες 4 και 5 φαίνεται πως υπάρχει συμφωνία, αφού η σχετική διαφορά μεταξύ αντίστοιχων τιμών, σε κάθε περίπτωση, είναι μικρότερη από $2 \cdot 10^{-4}$. Οι διαφορές αυτές ενδεχομένως να προέρχονται από αριθμητικά σφάλματα καθώς και από στρογγυλοποιήσεις.

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n = 0, \quad p = 0.8$										
3,0	3,0459	0,9809	0,9702	1	0,9847	0,9740	1	0,1089	2,1913	-1,5645
2,5	2,5656	0,9673	0,9499	1	0,9739	0,9562	1	0,1410	2,0496	-1,5797
2,0	2,1012	0,9375	0,9075	1	0,9501	0,9192	1	0,1909	1,9190	-1,5982
1,8	1,9239	0,9156	0,8779	1	0,9328	0,8936	1	0,2186	1,8762	-1,6058
1,6	1,7552	0,8825	0,8354	1	0,9067	0,8571	1	0,2523	1,8453	-1,6120
1,5	1,6755	0,8595	0,8073	1	0,8888	0,8333	1	0,2717	1,8371	-1,6139
1,3	1,5308	0,7927	0,7310	1	0,8382	0,7702	1	0,3157	1,8448	-1,6118
1,2	1,4696	0,7432	0,6785	1	0,8031	0,7294	1	0,3397	1,8676	-1,6053
1,0	1,3953	0,5693	0,5130	1	0,7227	0,6428	1	0,3826	1,9898	-1,5664
$n = 0, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0463	0,9762	0,9653	1	0,9881	0,9769	1	0,1108	3,1942	-2,6422
2,5	2,5664	0,9593	0,9416	1	0,9797	0,9612	1	0,1434	2,9977	-2,6636
2,0	2,1026	0,9220	0,8920	1	0,9613	0,9286	1	0,1941	2,8223	-2,6888
1,8	1,9260	0,8944	0,8572	1	0,9479	0,9061	1	0,2221	2,7682	-2,6985
1,6	1,7585	0,8523	0,8069	1	0,9280	0,8745	1	0,2560	2,7334	-2,7056
1,5	1,6798	0,8228	0,7733	1	0,9145	0,8541	1	0,2754	2,7274	-2,7070
1,4	1,6062	0,7848	0,7316	1	0,8979	0,8302	1	0,2964	2,7326	-2,7057
1,3	1,5398	0,7346	0,6793	1	0,8780	0,8025	1	0,3185	2,7531	-2,7002
$n = 0, \quad p = 0.2$										
3,0	3,0484	0,9654	0,9530	1	0,9931	0,9799	1	0,1192	6,5239	-9,6405
2,5	2,5697	0,9405	0,9209	1	0,9882	0,9664	1	0,1542	6,2472	-9,6728
2,2	2,2901	0,9132	0,8869	1	0,9829	0,9522	1	0,1835	6,1235	-9,6907
2,0	2,1093	0,8850	0,8531	1	0,9775	0,9385	1	0,2080	6,0732	-9,6992
1,8	1,9358	0,8431	0,8051	1	0,9698	0,9197	1	0,2373	6,0631	-9,7010
1,6	1,7746	0,7778	0,7341	1	0,9586	0,8940	1	0,2719	6,1129	-9,6899
1,5	1,7020	0,7304	0,6851	1	0,9515	0,8785	1	0,2908	6,1688	-9,6762
1,4	1,6393	0,6667	0,6220	1	0,9436	0,8618	1	0,3096	6,2506	-9,6549
1,3	1,5961	0,5757	0,5356	1	0,9367	0,8474	1	0,3253	6,3613	-9,6244

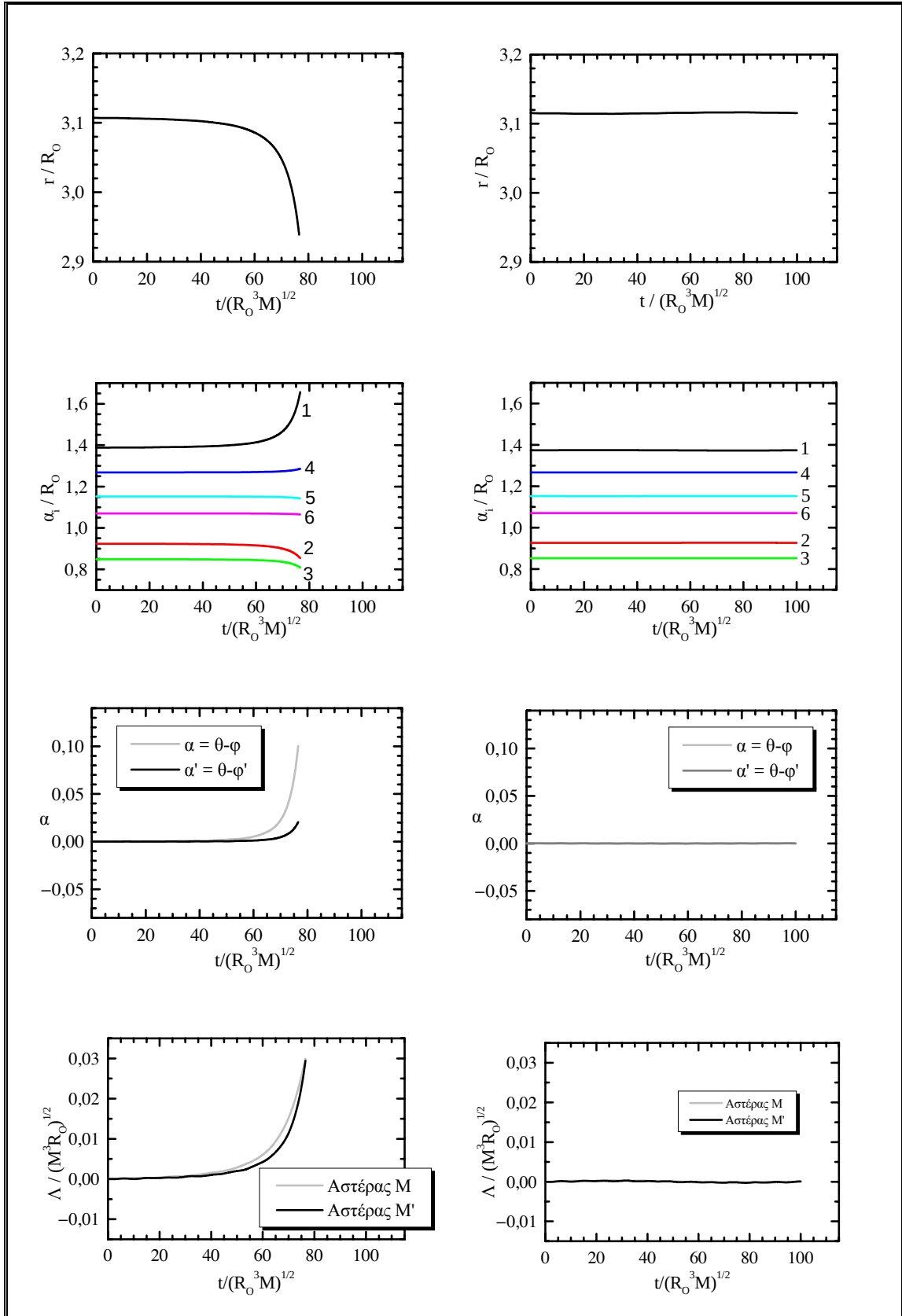
$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n = 0.5, \quad p = 0.8$										
3,0	3,0367	0,9853	0,9769	1,0010	0,9892	0,9815	1,0009	0,1119	2,1535	-1,4826
2,5	2,5527	0,9747	0,9609	1,0017	0,9816	0,9687	1,0015	0,1453	2,0053	-1,4989
2,0	2,0817	0,9513	0,9267	1,0033	0,9647	0,9416	1,0029	0,1977	1,8623	-1,5199
1,8	1,9004	0,9339	0,9025	1,0046	0,9523	0,9225	1,0040	0,2272	1,8113	-1,5292
1,6	1,7263	0,9072	0,8669	1,0067	0,9336	0,8948	1,0056	0,2633	1,7689	-1,5382
1,5	1,6432	0,8885	0,8430	1,0082	0,9208	0,8765	1,0068	0,2844	1,7531	-1,5419
1,4	1,5639	0,8644	0,8134	1,0102	0,9046	0,8542	1,0083	0,3076	1,7427	-1,5446
1,3	1,4896	0,8330	0,7764	1,0131	0,8843	0,8271	1,0103	0,3328	1,7399	-1,5453
1,2	1,4225	0,7909	0,7293	1,0172	0,8588	0,7948	1,0128	0,3597	1,7481	-1,5428
1,0	1,3300	0,6410	0,5791	1,0347	0,7984	0,7225	1,0196	0,4105	1,8260	-1,5164
$n = 0.5, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0391	0,9796	0,9701	1,0011	0,9923	0,9850	1,0008	0,1199	3,0766	-2,6367
2,5	2,5562	0,9649	0,9494	1,0020	0,9869	0,9746	1,0014	0,1555	2,8721	-2,6608
2,0	2,0876	0,9322	0,9052	1,0040	0,9751	0,9528	1,0027	0,2112	2,6786	-2,6911
1,8	1,9082	0,9075	0,8737	1,0057	0,9666	0,9377	1,0036	0,2422	2,6121	-2,7041
1,6	1,7373	0,8694	0,8272	1,0085	0,9541	0,9163	1,0050	0,2799	2,5598	-2,7159
1,5	1,6568	0,8422	0,7955	1,0107	0,9458	0,9024	1,0059	0,3015	2,5423	-2,7202
1,4	1,5813	0,8067	0,7558	1,0138	0,9358	0,8862	1,0071	0,3248	2,5336	-2,7226
1,3	1,5134	0,7589	0,7048	1,0183	0,9241	0,8678	1,0084	0,3491	2,5377	-2,7214
1,2	1,4584	0,6917	0,6370	1,0255	0,9119	0,8489	1,0099	0,3727	2,5614	-2,7139
$n = 0.5, \quad p = 0.2$										
3,5	3,5376	0,9762	0,9675	1,0011	0,9975	0,9927	1,0005	0,1158	6,2701	-10,9014
3,0	3,0513	0,9623	0,9490	1,0017	0,9961	0,9886	1,0008	0,1446	5,9372	-10,9387
2,5	2,5746	0,9349	0,9138	1,0032	0,9935	0,9810	1,0014	0,1868	5,6233	-10,9832
2,0	2,1198	0,8729	0,8391	1,0070	0,9879	0,9656	1,0025	0,2506	5,3711	-11,0301
1,8	1,9519	0,8252	0,7853	1,0104	0,9842	0,9555	1,0033	0,2844	5,3098	-11,0442
1,6	1,8029	0,7491	0,7046	1,0170	0,9794	0,9428	1,0043	0,3221	5,2922	-11,0486
1,5	1,7426	0,6925	0,6477	1,0228	0,9768	0,9361	1,0049	0,3404	5,3092	-11,0437
1,4	1,7032	0,6147	0,5726	1,0323	0,9749	0,9307	1,0054	0,3546	5,3540	-11,0302
$n = 1.5, \quad p = 0.8$										
3,0	3,0245	0,9913	0,9863	1,0028	0,9956	0,9924	1,0018	0,1230	2,0585	-1,2546
2,5	2,5353	0,9851	0,9766	1,0049	0,9925	0,9870	1,0030	0,1603	1,9032	-1,2735
2,2	2,2456	0,9781	0,9660	1,0072	0,9890	0,9812	1,0044	0,1924	1,8078	-1,2880
2,0	2,0552	0,9709	0,9552	1,0097	0,9855	0,9753	1,0059	0,2198	1,7443	-1,2993
1,8	1,8684	0,9601	0,9394	1,0135	0,9804	0,9668	1,0080	0,2537	1,6822	-1,3120
1,6	1,6869	0,9433	0,9155	1,0196	0,9727	0,9543	1,0113	0,2962	1,6238	-1,3259
1,5	1,5993	0,9312	0,8989	1,0242	0,9674	0,9458	1,0135	0,3212	1,5972	-1,3329
1,4	1,5146	0,9153	0,8777	1,0304	0,9608	0,9354	1,0164	0,3491	1,5737	-1,3398
1,3	1,4342	0,8940	0,8502	1,0392	0,9525	0,9227	1,0201	0,3798	1,5546	-1,3458
1,2	1,3599	0,8645	0,8138	1,0520	0,9424	0,9073	1,0247	0,4130	1,5423	-1,3500
1,0	1,2518	0,7531	0,6901	1,1090	0,9198	0,8739	1,0359	0,4753	1,5618	-1,3421
$n = 1.5, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0366	0,9827	0,9746	1,0047	0,9979	0,9958	1,0011	0,1574	2,7593	-2,7676
2,5	2,5532	0,9701	0,9566	1,0084	0,9965	0,9930	1,0019	0,2042	2,5560	-2,7992
2,2	2,2695	0,9560	0,9372	1,0127	0,9949	0,9899	1,0027	0,2438	2,4330	-2,8229
2,0	2,0851	0,9413	0,9174	1,0173	0,9934	0,9870	1,0035	0,2770	2,3527	-2,8410
1,8	1,9073	0,9192	0,8885	1,0247	0,9913	0,9829	1,0047	0,3170	2,2767	-2,8605
1,6	1,7408	0,8840	0,8448	1,0375	0,9884	0,9773	1,0063	0,3645	2,2103	-2,8800
1,5	1,6649	0,8582	0,8142	1,0477	0,9867	0,9739	1,0073	0,3905	2,1840	-2,8886
1,4	1,5974	0,8237	0,7750	1,0625	0,9848	0,9703	1,0083	0,4168	2,1660	-2,8949
1,3	1,5439	0,7763	0,7235	1,0852	0,9830	0,9668	1,0094	0,4408	2,1619	-2,8963

Πίνακας 5. Αποτελέσματα της δημοσίευσης (Lai, Rasio & Shapiro, 1994).

Στη συνέχεια αναπαράγουμε τα αποτελέσματα που υπάρχουν στη δημοσίευση των Lai & Shapiro (1995) για την χρονική εξέλιξη συστημάτων τόσο χωρίς εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας, όσο και με εκπομπή αυτής. Στο Σχήμα 3.13 φαίνεται η εξέλιξη συστήματος με πολυτροπικό δείκτη $n = 0.5$ και λόγο μαζών $p = 1$ για τις τιμές της παραμέτρου $\bar{r}$ 1.17 και 1.18 (αριστερά και δεξιά αντίστοιχα). Το σύστημα δεν εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία και οι συνιστώσες του είναι λευκοί νάνοι μικρής μάζας ή πλανήτες (τύπου 1). Στο σύστημα εισάγεται μία ακτινική διαταραχή που προσομοιώνει τις νευτώνειες παλιρροϊκές δυνάμεις. Στην περίπτωση όπου $\bar{r} = 1.17$ το σύστημα είναι ασταθές, ενώ στην περίπτωση $\bar{r} = 1.18$ είναι ευσταθές. Στο Σχήμα 3.14 δίνονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις, όπως αυτές έχουν προκύψει από το πρόγραμμα.

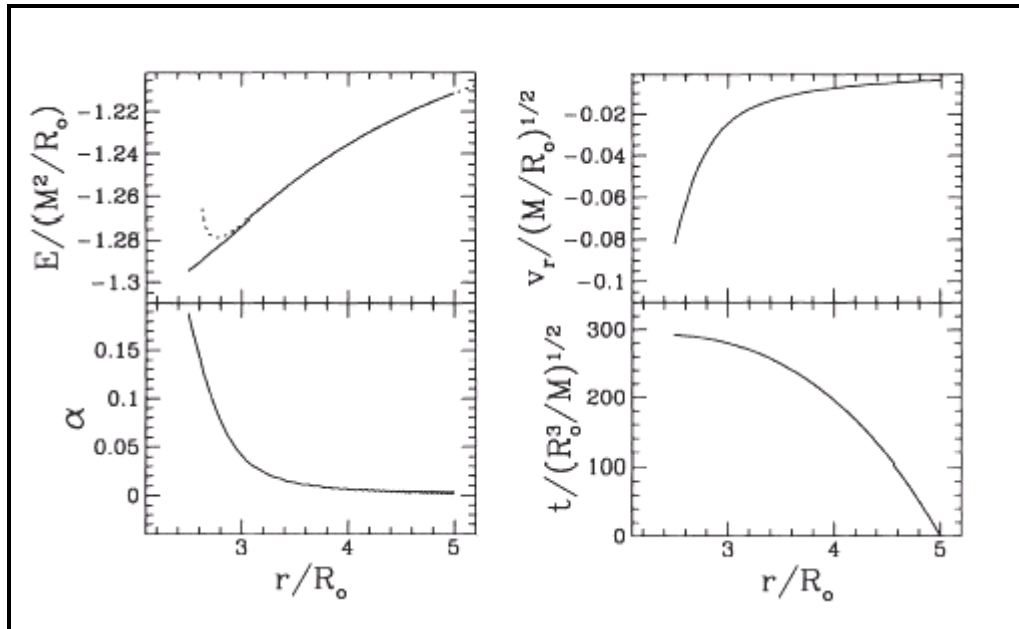


Σχήμα 3.13. Από πάνω προς τα κάτω φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της απόστασης μεταξύ των αστερών, των έξι αξόνων των ελλειψοειδών, της γωνίας α και του Λ (ορισμός στο 2^ο κεφάλαιο) συναρτήσει του χρόνου. Οι δύο περιπτώσεις βρίσκονται εκατέρωθεν του σημείου εμφάνισης της δυναμικής αστάθειας ($r=1.1741$), γι' αυτό είναι τόσο διαφορετική η εξέλιξή τους (Lai & Shapiro, 1995).

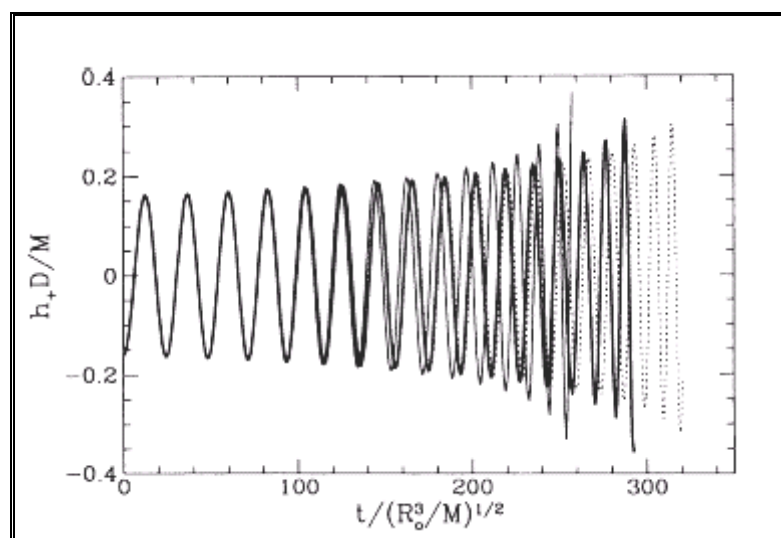


Σχήμα 3.14. Οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις με αυτές του σχήματος 3.13. Αριστερά η περίπτωση $r=1.17$ και δεξιά η περίπτωση $r=1.18$.

Στο Σχήμα 3.15 φαίνεται η εξέλιξη διπλού συστήματος αστέρων νετρονίων με πολυτροπικό δείκτη $n = 0.5$ και λόγο μαζών $p = 1$. Το σύστημα εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία και η κυματομορφή αυτής κατά την τελευταία φάση της ζωής του φαίνεται στο Σχήμα 3.16.

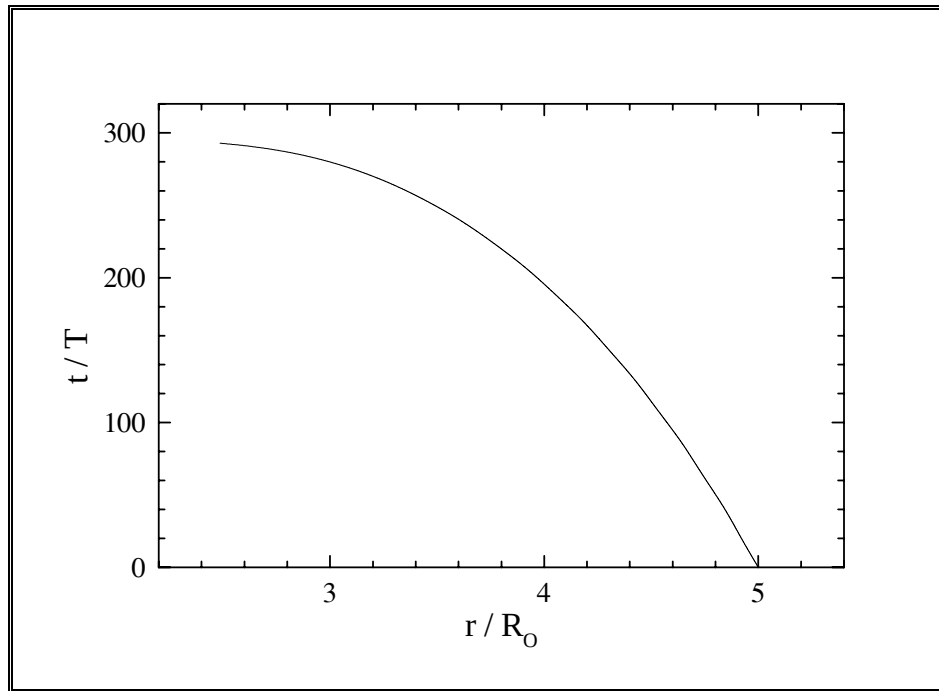


Σχήμα 3.15. Εξέλιξη συστήματος που εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία όπως δίνονται στην δημοσίευση των Lai & Shapiro (1995). Φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις της συνολικής ενέργειας του συστήματος, της γωνίας α , της ακτινικής ταχύτητας και του χρόνου συναρτήσει της απόστασης των κέντρων των δύο ελλειψοειδών.

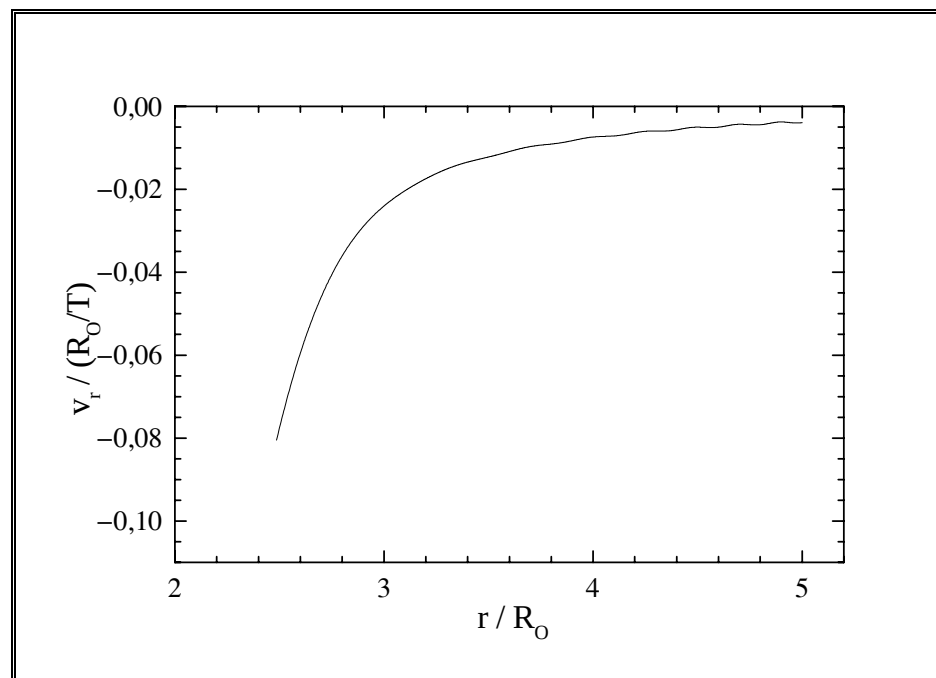


Σχήμα 3.16. Η κυματομορφή διπλού συστήματος αστέρων νετρονίων με πολυτροπικό δείκτη $n=0.5$ και λόγο μαζών $p=1$ (συμπαγής γραμμή).

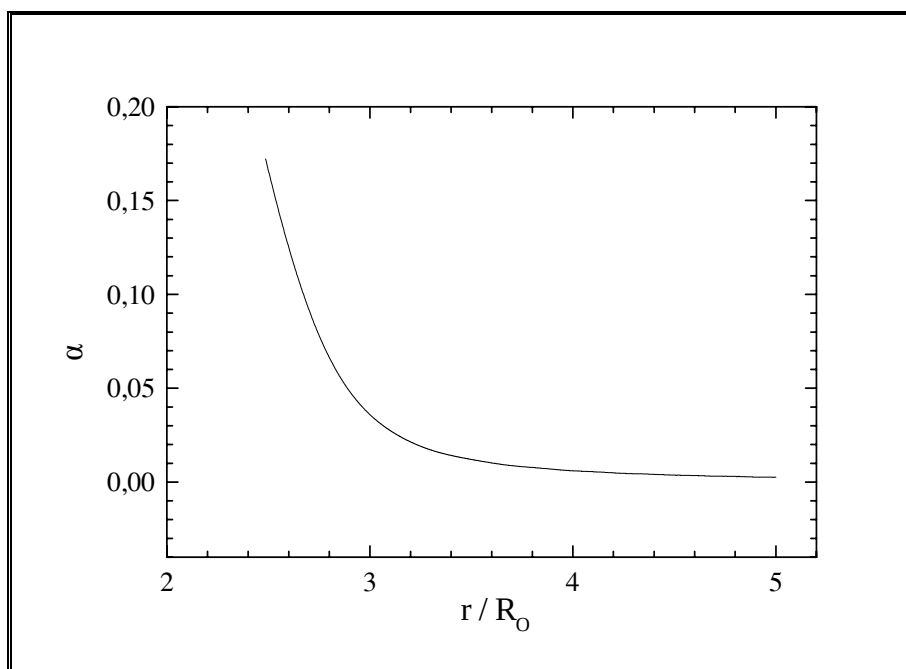
Στα σχήματα 3.17 ως και 3.20 δίνονται τα αντίστοιχα των διαγραμμάτων 3.15 και 3.16, όπως αυτά προέκυψαν από το πρόγραμμα.



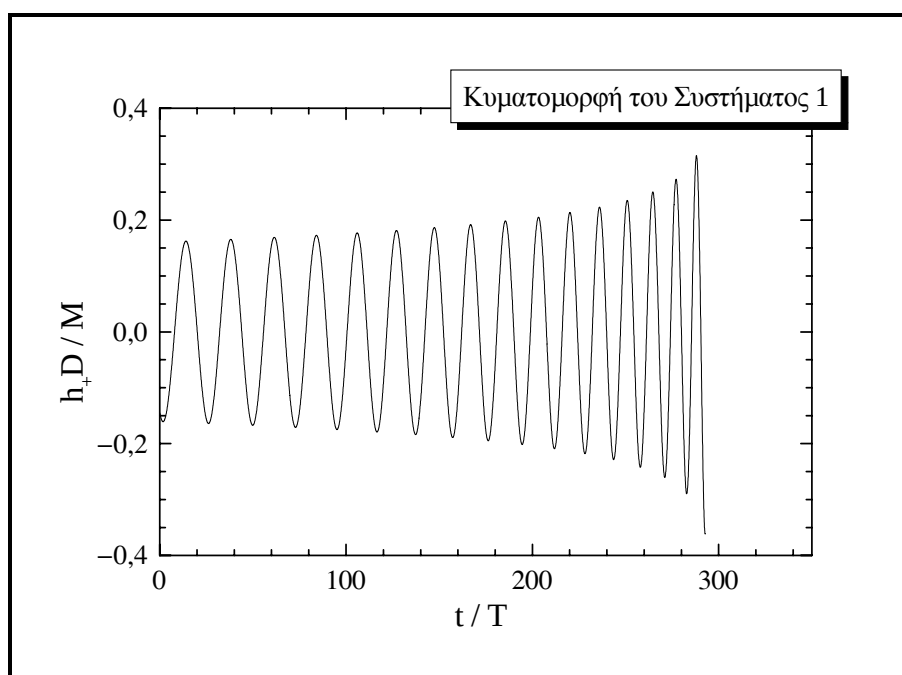
Σχήμα 3.17. Γραφική παράσταση του χρόνου συναρτήσει της απόστασης για το δεύτερο σύστημα της δημοσίευσης των Lai & Shapiro (1995).



Σχήμα 3.18. Γραφική παράσταση της ακτινικής ταχύτητας συναρτήσει της απόστασης για το δεύτερο σύστημα της δημοσίευσης των Lai & Shapiro (1995).



Σχήμα 3.19. Γραφική παράσταση της γωνίας α συναρτήσει της απόστασης για το δεύτερο σύστημα της δημοσίευσης των Lai & Shapiro (1995).



Σχήμα 3.20. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας από δεύτερο σύστημα της δημοσίευσης των Lai & Shapiro (1995).

Παρατηρούμε ότι σε κάποια σχήματα, όπως το σχήμα 3.18 οι καμπύλες παρουσιάζουν κάποιες ασάφειες με τη μορφή μικρών ταλαντώσεων. Αυτό οφείλεται σε κάποια αναπόφευκτα αριθμητικά σφάλματα και σε μια μικρή απροσδιοριστία στις

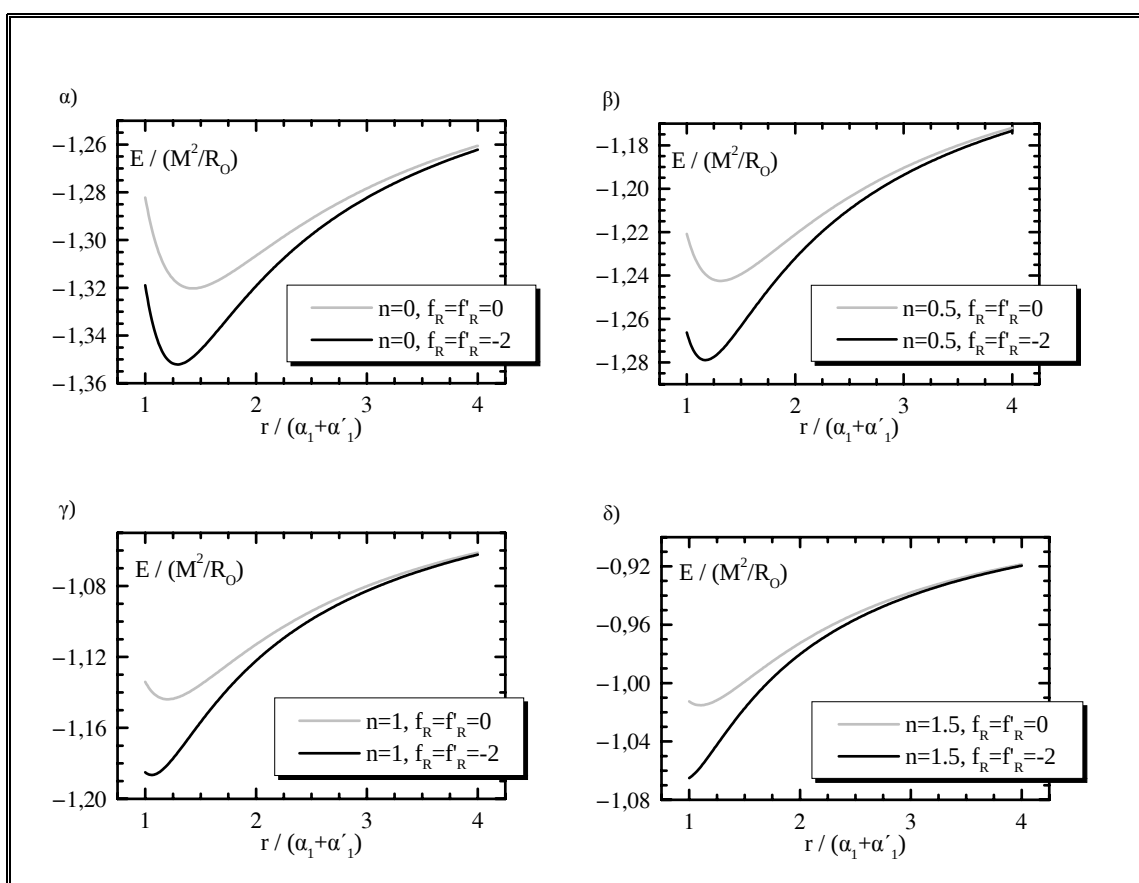
αρχικές συνθήκες. Ο τρόπος με τον οποίο μπορούν να μειωθούν περισσότερο θα συζητηθεί στην επόμενη παράγραφο.

3.4. Εφαρμογές

Στην παράγραφο αυτή κάνουμε κάποιες εφαρμογές με το πρόγραμμα που έχει κατασκευαστεί. Συγκεκριμένα, κατασκευάζουμε ακολουθίες Darwin-Riemann για κάποια διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων και μελετάμε ορισμένες περιπτώσεις χρονικής εξέλιξης με εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας.

Κατασκευή ακολουθιών Darwin-Riemann

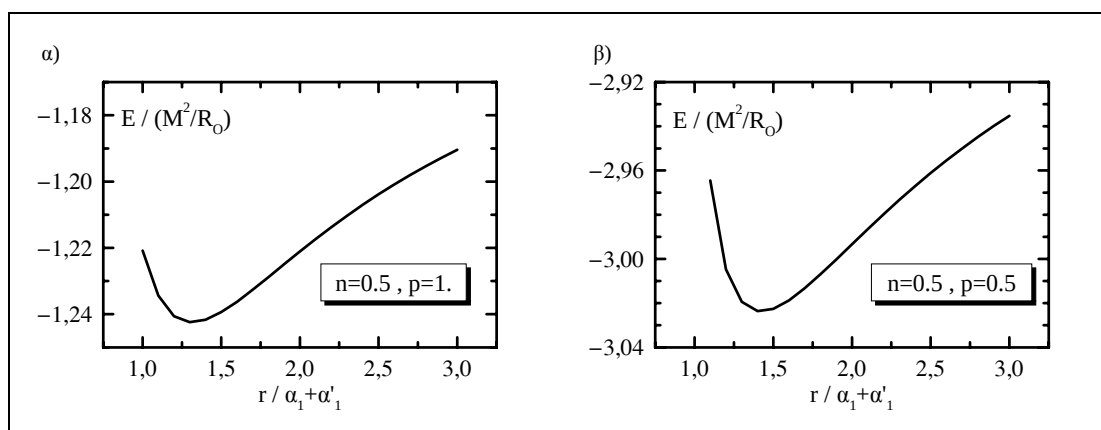
Αρχικά μελετούμε την ευστάθεια συστημάτων συναρτήσει του πολυτροπικού δείκτη. Στο Σχήμα 3.21 δίνονται οι καμπύλες της ενέργειας συναρτήσει της παραμέτρου $\tilde{r}$. Το σημείο εμφάνισης της δυναμικής αστάθειας εντοπίζεται στο ελάχιστο της καμπύλης, σύμφωνα με την αρχή μεταβολών που θεωρήσαμε στο 2^ο κεφάλαιο.



Σχήμα 3.21. Ακολουθίες Darwin-Riemann για διάφορες τιμές του πολυτροπικού δείκτη.

Από τα σχήματα είναι εμφανές ότι καθώς αυξάνει ο πολυτροπικός δείκτης το σημείο εμφάνισης της δυναμικής αστάθειας κινείται προς μικρότερα $\hat{r}$. Μια τέτοια συμπεριφορά είναι αναμενόμενη, αφού μεγαλύτεροι πολυτροπικοί δείκτες αντιστοιχούν σε περισσότερο συμπιεστό ρευστό. Ένας αστέρας αποτελούμενος από τέτοιο ρευστό έχει την τάση να διατηρεί το σφαιρικό του σχήμα και επομένως να περιορίζει την εμφάνιση εξοχών στο σχήμα του αστέρα, οι οποίες είναι υπεύθυνες για την δυναμική αστάθεια του συστήματος. Επίσης παρατηρούμε ότι το μη συγχρονισμένο σύστημα ($f_R = f'_R = -2$) εμφανίζει σε μικρότερες αποστάσεις δυναμική αστάθεια, σε αντίθεση με το αντίστοιχο συγχρονισμένο ($f_R = f'_R = 0$) και υπό αυτή την έννοια το πρώτο είναι πιο ευσταθές.

Στο σχήμα 3.22 δίνονται και πάλι οι καμπύλες ενέργειας συναρτήσει της παραμέτρου $\hat{r}$. Συγκρίνοντας τα 3.22 α) και β) παρατηρούμε ότι συστήματα με αστέρες ίδιας μάζας είναι πιο ευσταθή απ' ότι συστήματα με αστέρες διαφορετικής μάζας.



Σχήμα 3.22. Ακολουθίες Darwin-Riemann για δύο συστήματα πολυτροπικού δείκτη $n=0.5$ και λόγου μαζών $p=1$ και $p=0.5$.

Στον πίνακα 6 δίνονται τα χαρακτηριστικά διαφόρων διπλών συστημάτων καθώς αυτά «εξελίσσονται» κατά μήκος μιας ακολουθίας Darwin-Riemann. Οι τιμές των πολυτροπικών δεικτών και των λόγων μαζών είναι κοντά σ' αυτές που έχουν διπλά συστήματα αστερών νετρονίων. Η εμφάνιση των διαφόρων μεγεθών στις στήλες είναι όμοια μ' αυτή των πινάκων 4 και 5.

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n = 0.5, \quad p = 1.$										
3,0	3,0364	0,9874	0,9794	1,0009	0,9874	0,9794	1,0009	0,1092	1,8057	-1,1904
2,5	2,5523	0,9784	0,9651	1,0016	0,9784	0,9651	1,0016	0,1417	1,6809	-1,2038
2,4	2,4566	0,9756	0,9608	1,0018	0,9756	0,9608	1,0018	0,1501	1,6561	-1,2070
2,3	2,3616	0,9724	0,9558	1,0020	0,9724	0,9558	1,0020	0,1593	1,6315	-1,2103
2,2	2,2672	0,9686	0,9499	1,0023	0,9686	0,9499	1,0023	0,1695	1,6072	-1,2137
2,1	2,1736	0,9640	0,9430	1,0027	0,9640	0,9430	1,0027	0,1806	1,5834	-1,2173
2,0	2,0810	0,9585	0,9348	1,0031	0,9585	0,9348	1,0031	0,1929	1,5603	-1,2211
1,9	1,9895	0,9518	0,9250	1,0036	0,9518	0,925	1,0036	0,2066	1,5380	-1,2249
1,8	1,8995	0,9437	0,9132	1,0043	0,9437	0,9132	1,0043	0,2217	1,5171	-1,2288
1,7	1,8112	0,9338	0,8991	1,0051	0,9338	0,8991	1,0051	0,2385	1,4979	-1,2326
1,6	1,7251	0,9214	0,8819	1,0061	0,9214	0,8819	1,0061	0,2571	1,4810	-1,2362
1,5	1,6417	0,9058	0,8609	1,0074	0,9058	0,8609	1,0074	0,2777	1,4674	-1,2394
1,4	1,5620	0,8860	0,8352	1,0092	0,8860	0,8352	1,0092	0,3005	1,4583	-1,2417
1,3	1,4871	0,8605	0,8035	1,0115	0,8605	0,8035	1,0115	0,3254	1,4554	-1,2424
1,2	1,4188	0,8274	0,7642	1,0147	0,8274	0,7642	1,0147	0,3521	1,4616	-1,2406
1,1	1,3598	0,7837	0,7152	1,0193	0,7837	0,7152	1,0193	0,3798	1,4810	-1,2344
1,0	1,3151	0,7256	0,6543	1,0259	0,7256	0,6543	1,0259	0,4066	1,5208	-1,2208
$n = 0.5, \quad p = 0.8$										
3,0	3,0372	0,9842	0,9753	1,0010	0,9900	0,9827	1,0008	0,1157	2,1292	-1,5227
2,9	2,9398	0,9825	0,9727	1,0011	0,9889	0,9809	1,0009	0,1216	2,0999	-1,5257
2,8	2,8427	0,9806	0,9698	1,0013	0,9877	0,9789	1,0010	0,1278	2,0706	-1,5288
2,7	2,7459	0,9784	0,9664	1,0014	0,9863	0,9766	1,0011	0,1347	2,0413	-1,5322
2,6	2,6495	0,9758	0,9626	1,0016	0,9847	0,9739	1,0012	0,1421	2,0119	-1,5357
2,5	2,5534	0,9729	0,9581	1,0018	0,9828	0,9708	1,0014	0,1502	1,9826	-1,5394
2,4	2,4579	0,9694	0,9529	1,0020	0,9806	0,9672	1,0016	0,1591	1,9535	-1,5433
2,3	2,3630	0,9653	0,9469	1,0023	0,9781	0,9630	1,0018	0,1689	1,9246	-1,5474
2,2	2,2688	0,9604	0,9398	1,0027	0,9751	0,9581	1,0020	0,1796	1,8961	-1,5517
2,1	2,1754	0,9546	0,9315	1,0031	0,9715	0,9524	1,0023	0,1914	1,8683	-1,5562
2,0	2,0830	0,9476	0,9216	1,0036	0,9672	0,9456	1,0027	0,2044	1,8412	-1,5608
1,9	1,9918	0,9391	0,9097	1,0042	0,9621	0,9375	1,0031	0,2188	1,8153	-1,5656
1,8	1,9020	0,9287	0,8955	1,0050	0,9558	0,9278	1,0037	0,2347	1,7909	-1,5703
1,7	1,8141	0,9158	0,8783	1,0060	0,9482	0,9162	1,0043	0,2523	1,7686	-1,5750
1,6	1,7286	0,8997	0,8573	1,0073	0,9388	0,9023	1,0052	0,2719	1,7492	-1,5794
1,5	1,6460	0,8791	0,8315	1,0090	0,9272	0,8855	1,0062	0,2935	1,7337	-1,5832
1,4	1,5674	0,8526	0,7994	1,0113	0,9129	0,8653	1,0076	0,3172	1,7237	-1,5858
1,3	1,4942	0,8175	0,7590	1,0145	0,8952	0,8412	1,0093	0,3429	1,7215	-1,5864
1,2	1,4291	0,7697	0,7070	1,0193	0,8739	0,8132	1,0114	0,3698	1,7309	-1,5835
1,1	1,3773	0,7011	0,6371	1,0269	0,8506	0,7835	1,0139	0,3960	1,7586	-1,5743
$n = 0.5, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0445	0,9746	0,9630	1,0014	0,9938	0,9878	1,0007	0,1332	2,9650	-2,9352
2,9	2,9476	0,9719	0,9592	1,0016	0,9931	0,9865	1,0007	0,1398	2,9253	-2,9399
2,8	2,8511	0,9688	0,9549	1,0018	0,9924	0,9851	1,0008	0,1470	2,8857	-2,9448
2,7	2,7549	0,9653	0,9499	1,002	0,9916	0,9835	1,0009	0,1548	2,8461	-2,9500
2,6	2,6593	0,9611	0,9441	1,0022	0,9906	0,9816	1,0010	0,1632	2,8066	-2,9555
2,5	2,5641	0,9563	0,9375	1,0025	0,9895	0,9794	1,0011	0,1724	2,7673	-2,9612
2,4	2,4696	0,9507	0,9298	1,0029	0,9882	0,9770	1,0013	0,1825	2,7285	-2,9671
2,3	2,3759	0,9440	0,9209	1,0033	0,9867	0,9741	1,0014	0,1935	2,6901	-2,9734
2,2	2,2830	0,9361	0,9104	1,0038	0,9849	0,9707	1,0016	0,2055	2,6526	-2,9798
2,1	2,1913	0,9266	0,898	1,0044	0,9828	0,9668	1,0018	0,2187	2,6162	-2,9865
2,0	2,1008	0,9151	0,8833	1,0052	0,9803	0,9623	1,0021	0,2331	2,5812	-2,9934
1,9	2,0121	0,9012	0,8658	1,0062	0,9774	0,9569	1,0024	0,2490	2,5483	-3,0002
1,8	1,9254	0,8839	0,8447	1,0074	0,9740	0,9506	1,0028	0,2664	2,5181	-3,0070
1,7	1,8415	0,8624	0,8191	1,0090	0,9699	0,9433	1,0033	0,2853	2,4916	-3,0133
1,6	1,7613	0,8352	0,7877	1,0112	0,9651	0,9347	1,0038	0,3059	2,4703	-3,0187
1,5	1,6862	0,8001	0,7489	1,0143	0,9595	0,9250	1,0044	0,3278	2,4561	-3,0226
1,4	1,6190	0,7539	0,6999	1,0187	0,9534	0,9143	1,0052	0,3503	2,4527	-3,0236
1,3	1,5650	0,6911	0,6368	1,0255	0,9474	0,9037	1,0059	0,3716	2,4662	-3,0193
1,2	1,5370	0,6018	0,5519	1,0371	0,9436	0,8966	1,0065	0,3868	2,5105	-3,0047
1,1	1,5797	0,4664	0,4296	1,0606	0,9485	0,9027	1,0062	0,3797	2,6308	-2,9645

Πίνακας 6. Ακολουθίες Darwin-Riemann για διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων.

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n=1., p=1.$										
3,0	3,0290	0,9910	0,9852	1,0016	0,9910	0,9852	1,0016	0,1095	1,7909	-1,0801
2,7	2,7357	0,9877	0,9798	1,0022	0,9877	0,9798	1,0022	0,1276	1,7133	-1,0881
2,6	2,6385	0,9862	0,9775	1,0025	0,9862	0,9775	1,0025	0,1348	1,6872	-1,0910
2,5	2,5416	0,9845	0,9748	1,0028	0,9845	0,9748	1,0028	0,1426	1,6609	-1,0942
2,4	2,4451	0,9825	0,9716	1,0032	0,9825	0,9716	1,0032	0,1511	1,6347	-1,0975
2,3	2,3491	0,9802	0,9679	1,0036	0,9802	0,9679	1,0036	0,1605	1,6085	-1,1010
2,2	2,2536	0,9774	0,9636	1,0041	0,9774	0,9636	1,0041	0,1709	1,5823	-1,1048
2,1	2,1588	0,9741	0,9584	1,0047	0,9741	0,9584	1,0047	0,1823	1,5564	-1,1087
2,0	2,0648	0,9701	0,9523	1,0055	0,9701	0,9523	1,0055	0,1950	1,5309	-1,1129
1,9	1,9717	0,9653	0,9450	1,0064	0,9653	0,945	1,0064	0,2090	1,5059	-1,1173
1,8	1,8798	0,9594	0,9361	1,0076	0,9594	0,9361	1,0076	0,2247	1,4818	-1,1218
1,7	1,7893	0,9521	0,9253	1,0090	0,9521	0,9253	1,0090	0,2422	1,4588	-1,1265
1,6	1,7007	0,9429	0,9121	1,0108	0,9429	0,9121	1,0108	0,2617	1,4375	-1,1311
1,5	1,6144	0,9314	0,8958	1,0132	0,9314	0,8958	1,0132	0,2835	1,4185	-1,1356
1,4	1,5311	0,9166	0,8755	1,0163	0,9166	0,8755	1,0163	0,3077	1,4028	-1,1396
1,3	1,4518	0,8975	0,8501	1,0205	0,8975	0,8501	1,0205	0,3345	1,3918	-1,1426
1,2	1,3781	0,8723	0,8181	1,0262	0,8723	0,8181	1,0262	0,3638	1,3877	-1,1439
1,1	1,3121	0,8387	0,7774	1,0344	0,8387	0,7774	1,0344	0,3947	1,3937	-1,1418
1,0	1,2579	0,7932	0,7256	1,0463	0,7932	0,7256	1,0463	0,4258	1,4155	-1,1341
$n=1., p=0.8$										
3,0	3,0296	0,9887	0,9822	1,0018	0,9928	0,9876	1,0015	0,1162	2,1116	-1,3813
2,9	2,9316	0,9875	0,9804	1,0020	0,9921	0,9863	1,0016	0,1220	2,0813	-1,3844
2,8	2,8339	0,9861	0,9782	1,0023	0,9912	0,9848	1,0018	0,1284	2,0509	-1,3877
2,7	2,7365	0,9845	0,9758	1,0025	0,9902	0,9831	1,0020	0,1353	2,0203	-1,3912
2,6	2,6393	0,9827	0,973	1,0028	0,9890	0,9811	1,0022	0,1429	1,9896	-1,3949
2,5	2,5425	0,9806	0,9697	1,0032	0,9877	0,9789	1,0025	0,1511	1,9587	-1,3989
2,4	2,4461	0,9781	0,9659	1,0036	0,9861	0,9762	1,0028	0,1602	1,9279	-1,4030
2,3	2,3502	0,9751	0,9615	1,0041	0,9843	0,9732	1,0032	0,1701	1,8971	-1,4074
2,2	2,2548	0,9716	0,9562	1,0047	0,9821	0,9695	1,0037	0,1811	1,8664	-1,4121
2,1	2,1601	0,9674	0,9500	1,0055	0,9795	0,9653	1,0042	0,1932	1,8360	-1,4170
2,0	2,0663	0,9623	0,9426	1,0063	0,9763	0,9602	1,0048	0,2066	1,8061	-1,4222
1,9	1,9734	0,9562	0,9337	1,0074	0,9726	0,9541	1,0056	0,2214	1,7769	-1,4276
1,8	1,8817	0,9486	0,9230	1,0088	0,9680	0,9468	1,0066	0,2380	1,7487	-1,4332
1,7	1,7916	0,9392	0,9099	1,0105	0,9623	0,9379	1,0078	0,2564	1,7218	-1,4389
1,6	1,7033	0,9274	0,8938	1,0128	0,9554	0,9271	1,0093	0,2770	1,6970	-1,4447
1,5	1,6175	0,9124	0,8737	1,0157	0,9466	0,9139	1,0112	0,2999	1,6751	-1,4501
1,4	1,5350	0,8928	0,8486	1,0197	0,9357	0,8977	1,0137	0,3252	1,6572	-1,4550
1,3	1,4569	0,8669	0,8166	1,0252	0,9220	0,8780	1,0169	0,3531	1,6451	-1,4585
1,2	1,3852	0,8317	0,7751	1,0332	0,9048	0,8541	1,0210	0,3831	1,6415	-1,4596
1,1	1,3234	0,7815	0,7196	1,0457	0,8843	0,8265	1,0262	0,4139	1,6514	-1,4562
$n=1., p=0.5$										
3,0	3,0351	0,9819	0,9734	1,0025	0,9955	0,9912	1,0012	0,1338	2,9376	-2,6593
2,7	2,7434	0,9752	0,9638	1,0035	0,9939	0,9880	1,0016	0,1557	2,8134	-2,6748
2,5	2,5507	0,9687	0,9547	1,0044	0,9924	0,9851	1,0020	0,1737	2,7301	-2,6867
2,4	2,4550	0,9647	0,9490	1,0050	0,9915	0,9833	1,0023	0,1840	2,6885	-2,6931
2,3	2,3600	0,9599	0,9424	1,0057	0,9904	0,9811	1,0026	0,1953	2,6472	-2,6999
2,2	2,2657	0,9542	0,9346	1,0066	0,9891	0,9786	1,0029	0,2076	2,6062	-2,7070
2,1	2,1722	0,9473	0,9253	1,0077	0,9875	0,9757	1,0034	0,2213	2,5659	-2,7145
2,0	2,0798	0,9390	0,9143	1,0090	0,9857	0,9722	1,0038	0,2363	2,5265	-2,7223
1,9	1,9887	0,9289	0,9010	1,0107	0,9835	0,9681	1,0044	0,2529	2,4883	-2,7304
1,8	1,8993	0,9164	0,8849	1,0128	0,9809	0,9633	1,0052	0,2712	2,4520	-2,7386
1,7	1,8121	0,9008	0,8653	1,0155	0,9778	0,9575	1,0060	0,2913	2,4183	-2,7468
1,6	1,7277	0,8809	0,8410	1,0192	0,9740	0,9506	1,0071	0,3135	2,3882	-2,7547
1,5	1,6472	0,8552	0,8106	1,0242	0,9695	0,9426	1,0083	0,3375	2,3633	-2,7617
1,4	1,5725	0,8212	0,7720	1,0314	0,9643	0,9333	1,0098	0,3631	2,3461	-2,7669
1,3	1,5070	0,7748	0,7218	1,0422	0,9586	0,9232	1,0115	0,3890	2,3405	-2,7687
1,2	1,4582	0,7085	0,6540	1,0598	0,9534	0,9139	1,0131	0,4120	2,3552	-2,7636
1,1	1,4486	0,6066	0,5563	1,0934	0,9520	0,9106	1,0138	0,4221	2,4127	-2,7427

Πίνακας 6. (συνέχεια)

$\hat{r}$	$\tilde{r}$	a_2/a_1	a_3/a_1	R/R_0	a'_2/a'_1	a'_3/a'_1	R'/R'_0	$\bar{\Omega}$	$\bar{J}$	$\bar{E}$
$n = 1.5, \quad p = 1.$										
3,0	3,0232	0,9938	0,9898	1,0022	0,9938	0,9898	1,0022	0,1098	1,7783	-0,9379
2,7	2,7287	0,9915	0,9861	1,0031	0,9915	0,9861	1,0031	0,1281	1,6982	-0,9461
2,6	2,6309	0,9905	0,9844	1,0034	0,9905	0,9844	1,0034	0,1353	1,6711	-0,9492
2,5	2,5334	0,9894	0,9825	1,0038	0,9894	0,9825	1,0038	0,1432	1,6438	-0,9525
2,4	2,4363	0,9880	0,9803	1,0043	0,9880	0,9803	1,0043	0,1519	1,6163	-0,9560
2,3	2,3395	0,9864	0,9777	1,0049	0,9864	0,9777	1,0049	0,1614	1,5887	-0,9598
2,2	2,2431	0,9844	0,9747	1,0056	0,9844	0,9747	1,0056	0,1720	1,5610	-0,9638
2,1	2,1473	0,9821	0,9710	1,0065	0,9821	0,9710	1,0065	0,1836	1,5334	-0,9680
2,0	2,0522	0,9794	0,9667	1,0075	0,9794	0,9667	1,0075	0,1966	1,5058	-0,9726
1,9	1,9578	0,9760	0,9614	1,0088	0,9760	0,9614	1,0088	0,2110	1,4786	-0,9774
1,8	1,8644	0,9719	0,9550	1,0104	0,9719	0,9550	1,0104	0,2272	1,4517	-0,9825
1,7	1,7722	0,9668	0,9472	1,0123	0,9668	0,9472	1,0123	0,2453	1,4256	-0,9878
1,6	1,6815	0,9604	0,9375	1,0148	0,9604	0,9375	1,0148	0,2656	1,4005	-0,9934
1,5	1,5928	0,9522	0,9255	1,0180	0,9522	0,9255	1,0180	0,2884	1,3770	-0,9990
1,4	1,5066	0,9417	0,9103	1,0223	0,9417	0,9103	1,0223	0,3140	1,3558	-1,0045
1,3	1,4238	0,9280	0,8911	1,0280	0,9280	0,8911	1,0280	0,3425	1,3380	-1,0096
1,2	1,3456	0,9098	0,8663	1,0358	0,9098	0,8663	1,0358	0,3740	1,3253	-1,0135
1,1	1,2741	0,8853	0,8343	1,0470	0,8853	0,8343	1,0470	0,4080	1,3202	-1,0152
1,0	1,2124	0,8515	0,7925	1,0634	0,8515	0,7925	1,0634	0,4431	1,3272	-1,0126
$n = 1.5, \quad p = 0.8$										
3,0	3,0237	0,9923	0,9877	1,0025	0,9951	0,9914	1,0020	0,1165	2,0964	-1,1991
2,8	2,8272	0,9905	0,9850	1,0031	0,9939	0,9895	1,0024	0,1288	2,0339	-1,2058
2,6	2,6315	0,9881	0,9813	1,0039	0,9924	0,9870	1,0031	0,1435	1,9704	-1,2133
2,5	2,5341	0,9866	0,9790	1,0044	0,9915	0,9854	1,0034	0,1519	1,9382	-1,2174
2,4	2,4370	0,9849	0,9764	1,0049	0,9904	0,9835	1,0039	0,1610	1,9059	-1,2218
2,3	2,3403	0,9829	0,9732	1,0056	0,9891	0,9814	1,0044	0,1711	1,8735	-1,2264
2,2	2,2440	0,9805	0,9695	1,0064	0,9876	0,9788	1,0050	0,1823	1,8410	-1,2314
2,1	2,1483	0,9775	0,9651	1,0074	0,9858	0,9758	1,0058	0,1946	1,8085	-1,2367
2,0	2,0533	0,9740	0,9599	1,0086	0,9836	0,9721	1,0067	0,2084	1,7762	-1,2423
1,9	1,9591	0,9698	0,9535	1,0101	0,9810	0,9678	1,0078	0,2236	1,7441	-1,2483
1,8	1,8658	0,9645	0,9458	1,0119	0,9778	0,9625	1,0091	0,2407	1,7127	-1,2546
1,7	1,7738	0,958	0,9363	1,0143	0,9738	0,9561	1,0108	0,2598	1,6821	-1,2613
1,6	1,6835	0,9497	0,9245	1,0173	0,9688	0,9481	1,0129	0,2812	1,6528	-1,2681
1,5	1,5951	0,9391	0,9098	1,0212	0,9626	0,9383	1,0156	0,3052	1,6254	-1,2751
1,4	1,5095	0,9254	0,8910	1,0265	0,9547	0,9261	1,0190	0,3321	1,6009	-1,2818
1,3	1,4275	0,9071	0,8669	1,0338	0,9446	0,9109	1,0235	0,3619	1,5805	-1,2879
1,2	1,3507	0,8822	0,8353	1,0443	0,9318	0,8920	1,0295	0,3946	1,5664	-1,2925
1,1	1,2817	0,8468	0,7926	1,0603	0,9156	0,8689	1,0372	0,4292	1,5621	-1,294
$n = 1.5, \quad p = 0.5$										
3,0	3,0278	0,9876	0,9816	1,0034	0,9969	0,9939	1,0016	0,1342	2,9140	-2,3037
2,9	2,9298	0,9862	0,9797	1,0038	0,9966	0,9933	1,0018	0,1410	2,8714	-2,3088
2,8	2,8320	0,9847	0,9775	1,0042	0,9962	0,9926	1,0020	0,1484	2,8285	-2,3142
2,7	2,7344	0,9829	0,9749	1,0047	0,9958	0,9917	1,0022	0,1564	2,7853	-2,3199
2,6	2,6372	0,9809	0,9720	1,0053	0,9953	0,9908	1,0025	0,1652	2,7418	-2,3259
2,5	2,5402	0,9785	0,9685	1,0060	0,9948	0,9897	1,0028	0,1747	2,6981	-2,3323
2,4	2,4437	0,9757	0,9646	1,0068	0,9941	0,9884	1,0032	0,1852	2,6543	-2,3392
2,3	2,3477	0,9724	0,9599	1,0077	0,9933	0,9869	1,0036	0,1967	2,6104	-2,3464
2,2	2,2522	0,9685	0,9543	1,0089	0,9924	0,9851	1,0041	0,2094	2,5665	-2,3541
2,1	2,1574	0,9637	0,9477	1,0103	0,9913	0,9830	1,0047	0,2234	2,5229	-2,3623
2,0	2,0635	0,9580	0,9398	1,0121	0,9900	0,9805	1,0054	0,2389	2,4797	-2,3709
1,9	1,9706	0,9510	0,9303	1,0142	0,9885	0,9775	1,0062	0,2560	2,4372	-2,3800
1,8	1,8790	0,9423	0,9186	1,0170	0,9866	0,9740	1,0072	0,2751	2,3958	-2,3896
1,7	1,7892	0,9314	0,9042	1,0206	0,9843	0,9697	1,0085	0,2963	2,3560	-2,3994
1,6	1,7016	0,9175	0,8863	1,0253	0,9816	0,9645	1,0100	0,3197	2,3187	-2,4093
1,5	1,6171	0,8995	0,8638	1,0317	0,9782	0,9583	1,0118	0,3456	2,2850	-2,4190
1,4	1,5369	0,8757	0,8347	1,0408	0,9742	0,9510	1,0141	0,3737	2,2566	-2,4279
1,3	1,4635	0,8430	0,7966	1,0541	0,9695	0,9424	1,0168	0,4034	2,2364	-2,4346
1,2	1,4016	0,7963	0,7448	1,0754	0,9645	0,9334	1,0197	0,4326	2,2299	-2,4370
1,1	1,3638	0,7245	0,6700	1,1136	0,9607	0,9264	1,0221	0,4544	2,2500	-2,4292

Πίνακας 6. (συνέχεια)

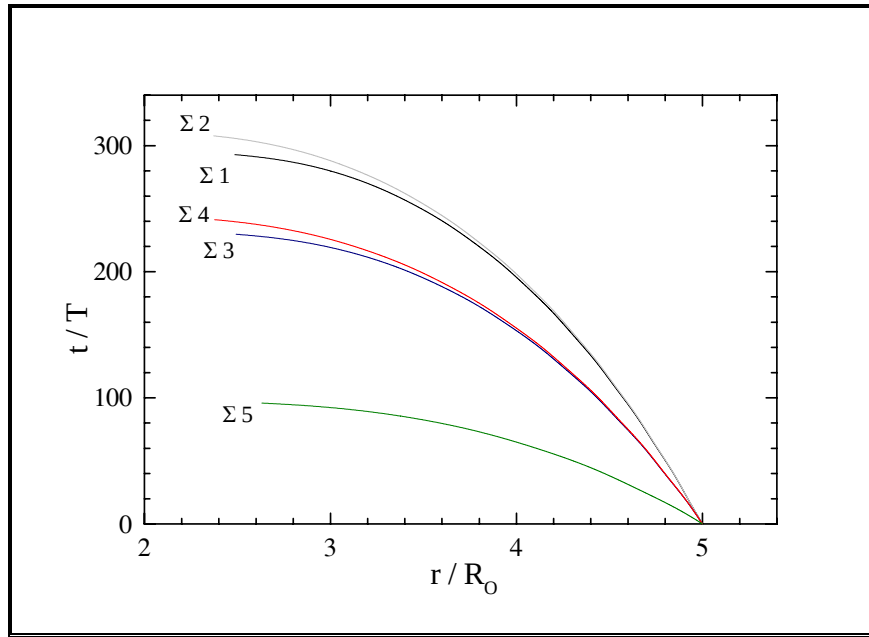
Η ύπαρξη βαρυτική ακτινοβολίας απαιτεί τον προσδιορισμό επιπλέον όρων που θα χρησιμοποιηθούν ως αρχικές συνθήκες, όπως για παράδειγμα μια μικρή διαφορά μεταξύ των γωνιών θ και ϕ (γωνία α_{gr} , σχέση 2.4.7). Οι όροι αυτοί ωστόσο δεν μπορούν να προσδιοριστούν παρά μόνο προσεγγιστικά. Κάτι τέτοιο μεταφέρει μια απροσδιοριστία στις αρχικές συνθήκες, γεγονός που γίνεται εμφανές στα πρώτα βήματα της εξέλιξης με τη μορφή ισχυρών ταλαντώσεων, οι οποίες φθίνουν καθώς το σύστημα εξελίσσεται. Για να αποφύγουμε τις ανεπιθύμητες αυτές ταλαντώσεις αφήνουμε το σύστημα να εξελιχθεί από μια μεγαλύτερη απόσταση από αυτή που θέλουμε να μελετήσουμε (π.χ. διπλάσια). Έτσι, όταν το σύστημα εισέλθει πλέον στην περιοχή που μας ενδιαφέρει έχει αποκτήσει ακριβείς αρχικές συνθήκες και δεν θα εμφανίζονται ταλαντώσεις. Στο όριο όταν $r \rightarrow \infty$ για συγχρονισμένα συστήματα ισχύει ότι $a_1 \rightarrow a_2$ και $\Omega \rightarrow \Omega_{orb} \rightarrow (M + M')^{1/2} / r^{3/2}$. Επίσης, $\Omega_s = -\Lambda$ και $\ell \rightarrow -I\Omega_s$. Έτσι, αν χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω προσεγγίσεις και βάλουμε τους αστέρες σε μεγάλη απόσταση τον έναν από τον άλλον (όσο μεγαλύτερη τόσο το καλύτερο) οι ταλαντώσεις κατά τις τελευταίες περιφορές του συστήματος θα έχουν εξαλειφθεί. Αγνοώντας την «ιστορία» του συστήματος μελετάμε τελικά μόνο την φάση που είναι απαλλαγμένη από ταλαντώσεις.

Ακολουθώντας τη παραπάνω τεχνική εξέλιξης θα μελετηθούν τα συστήματα που περιγράφονται αναλυτικά στον πίνακα 7. Το πρώτο από αυτά είναι ίδιο με αυτό της δημοσίευσης και η χρονική εξέλιξη κάποιων μεταβλητών έχει ήδη παρασταθεί γραφικά σε προηγούμενα σχήματα. Η απόσταση στην οποία αρχικά τοποθετούνται οι αστέρες είναι $r = 10R_o$, ενώ η μελέτη του συστήματος στην ουσία ξεκινάει από το ήμισυ της παραπάνω απόστασης, οπότε οι ταλαντώσεις έχουν αποσβεστεί.

Τα παρακάτω συστήματα είναι όλα συγχρονισμένα, ενώ οι τιμές των παραμέτρων έχουν επιλεγεί έτσι ώστε να προσομοιώνουν το δυνατόν καλύτερα διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων και να παραμένουν στα πλαίσια των προσεγγίσεων που έχουμε κάνει. Το τελευταίο σύστημα (Σ 5) αν και λιγότερο ρεαλιστικό ($p = 0.5$), θα δείξει καθαρά την εξάρτηση της εξέλιξης του συστήματος από τον λόγο μαζών και υπό αυτή την έννοια έχει επιλεγεί.

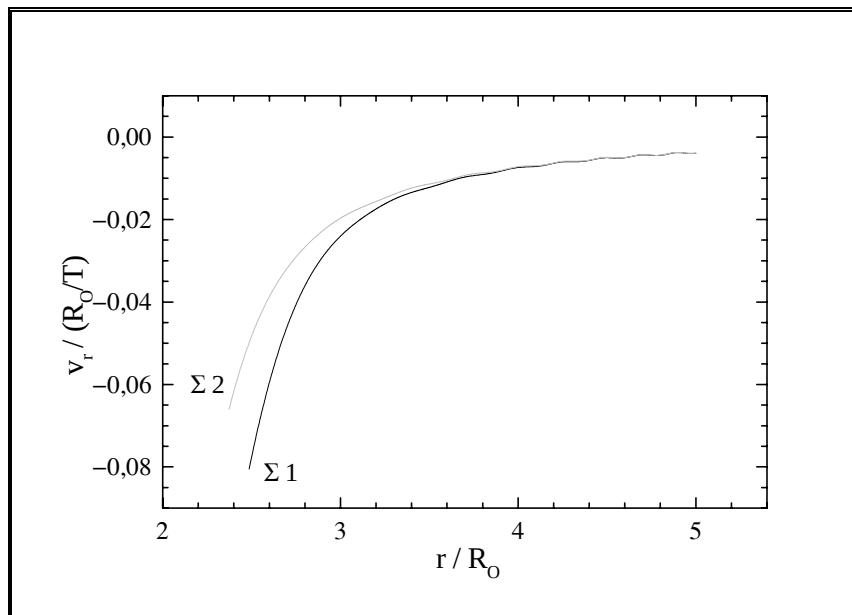
Σύστημα	n	p	f_R	f'_R	Βαρ. ακτ.
Σ 1	0.5	1.	0.	0.	NAI
Σ 2	1.	1.	0.	0.	NAI
Σ 3	0.5	0.85	0.	0.	NAI
Σ 4	1.	0.85	0.	0.	NAI
Σ 5	0.5	0.5	0.	0.	NAI

Πίνακας 7. Τα χαρακτηριστικά των συστημάτων που θα εξελιχθούν στη συνέχεια.



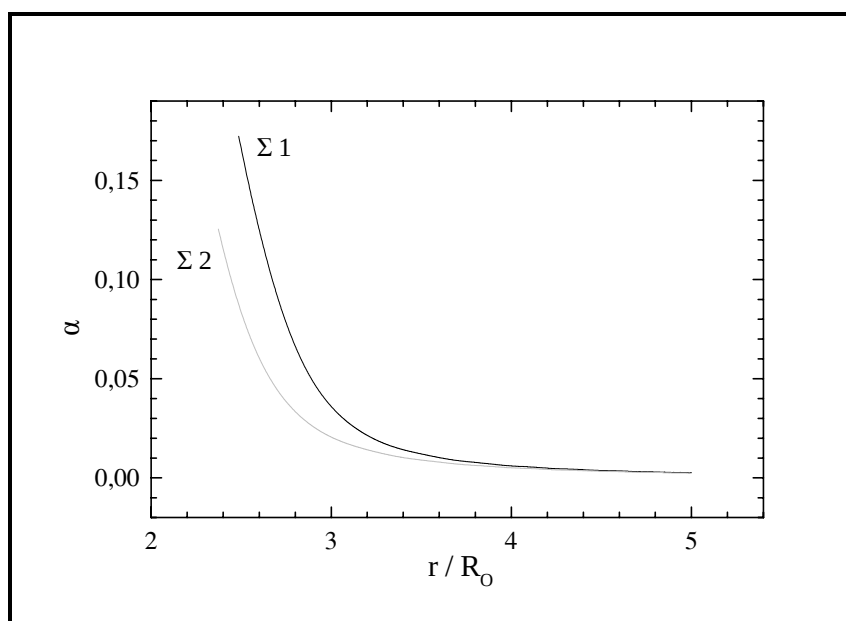
Σχήμα 3.23. Η τελική φάση της ζωής των συστημάτων (διάγραμμα t - r).

Στο Σχήμα 3.23 παριστάνεται γραφικά η εξέλιξη όλων των συστημάτων. Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται ότι τα συστήματα με πολυτροπικό δείκτη $n = 1$ καταρρέουν πιο αργά από τα αντίστοιχα με πολυτροπικό δείκτη $n = 0.5$, κάτι το οποίο είχε γίνει εμφανές και από τις ακολουθίες Darwin-Riemann και συνδέεται άμεσα με την δυναμική αστάθεια.



Σχήμα 3.24. Η ακτινική ταχύτητα συναρτήσει της απόστασης μεταξύ των αστέρων, για τα συστήματα Σ 1 και Σ 2.

Στο Σχήμα 3.24 παριστάνεται γραφικά η ακτινική ταχύτητα καθώς οι δύο αστέρες πλησιάζουν μεταξύ τους. Η ακτινική ταχύτητα αποτελεί έκφραση της διαταραχής της τροχιάς του συστήματος. Όπως φαίνεται και από το διάγραμμα, για το $\Sigma 1$ η ακτινική ταχύτητα αυξάνει γρηγορότερα από ότι στο $\Sigma 2$ και αυτός είναι ο λόγος που καταρρέει γρηγορότερα. Το ίδιο γεγονός γίνεται εμφανές και στο Σχήμα 3.25 όπου παριστάνεται γραφικά η γωνία α συναρτήσει της απόστασης των δύο αστερών. Στην πραγματικότητα κατά τις τελευταίες περιφορές, το σύστημα χάνει τον συγχρονισμό του, εξαιτίας της εμφάνισης της δυναμικής αστάθειας.

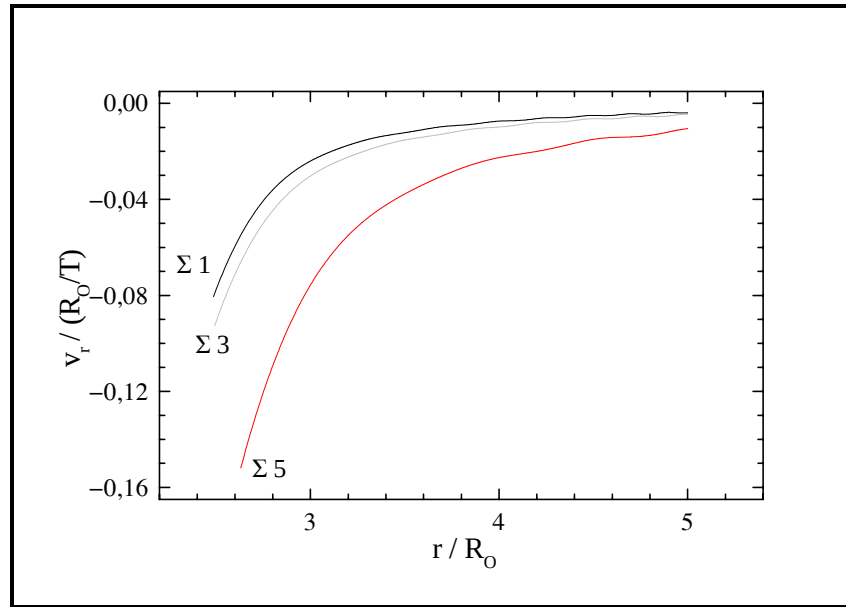


Σχήμα 3.25. Γραφική παράσταση της γωνίας α συναρτήσει της απόστασης των δύο αστερών.

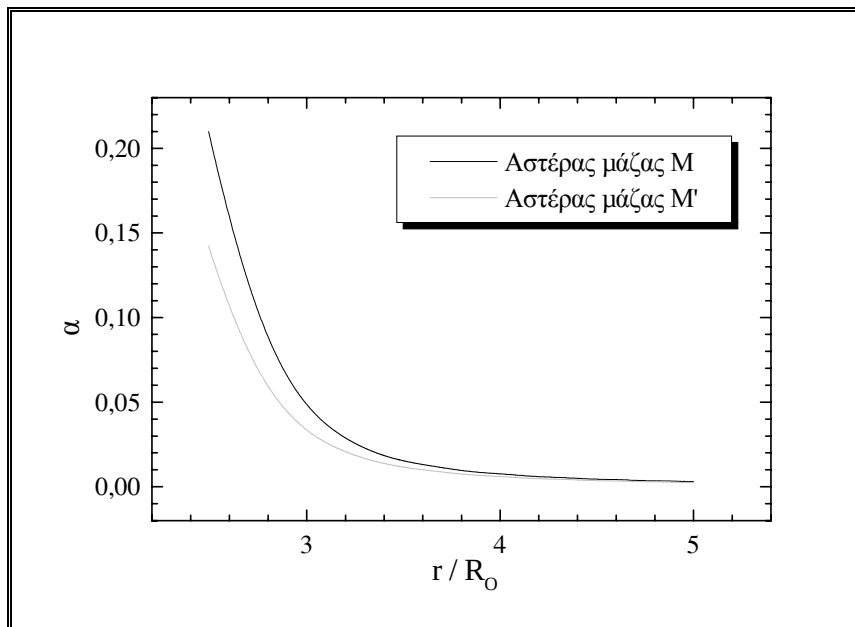
Στο παραπάνω σχήμα είναι εμφανές ότι η γωνία α έχει μια μικρή αλλά μη μηδενική τιμή κατά την εκκίνηση της προσομοίωσης, το ίδιο και η ακτινική ταχύτητα. Αυτό είναι αποτέλεσμα της τεχνικής εξέλιξης που χρησιμοποιήσαμε με σκοπό να έχουμε πιο ακριβείς αρχικές συνθήκες στην εκκίνηση της προσομοίωσης.

Επιστρέφοντας και πάλι στο Σχήμα 3.23 φαίνεται ότι τα συστήματα με λόγο μαζών μονάδα είναι πιο ευσταθή απ' ότι εκείνα με λόγο μαζών διάφορα της μονάδας. Η ισχυρή εξάρτηση της εξέλιξης του συστήματος από τον λόγο μαζών γίνεται εμφανής και στα επόμενα σχήματα. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 3.26 δίνεται η ακτινική ταχύτητα συναρτήσει της απόστασης των αστερών για συστήματα με ίδιο πολυτροπικό δείκτη και διαφορετικό λόγο μαζών. Είναι εμφανές ότι όσο μικραίνει ο λόγος των μαζών τόσο πιο ασταθές γίνεται το σύστημα.

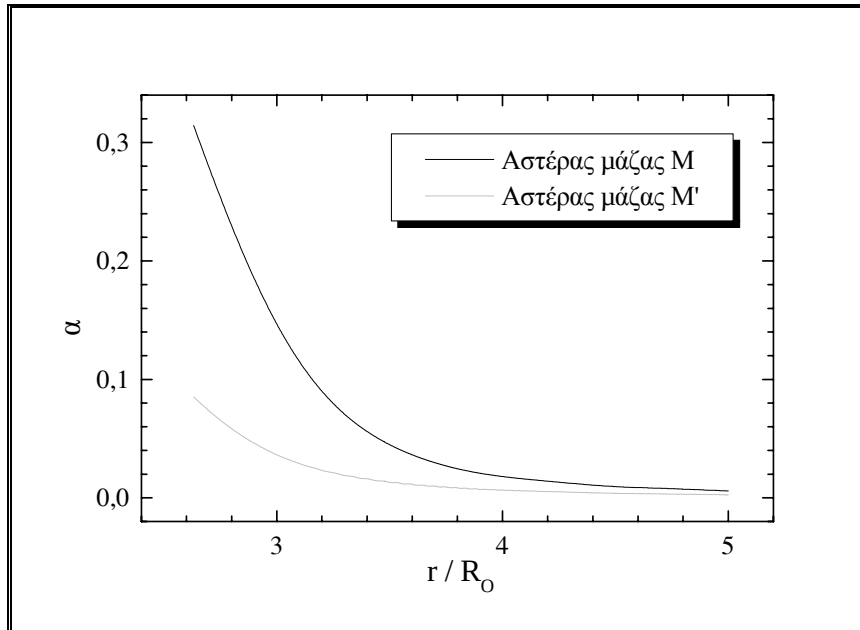
Στο Σχήμα 3.27 φαίνεται ο αποσυνγχρονισμός του συστήματος 3 καθώς οι αστέρες προσεγγίζουν ο ένας τον άλλον. Το φαινόμενο είναι ισχυρότερο στον αστέρα μικρότερης μάζας κάτι που γίνεται καλύτερα αντιληπτό στο Σχήμα 3.28 όπου αφορά στο σύστημα 4.



Σχήμα 3.26. Γραφική παράσταση της ακτινικής ταχύτητας συναρτήσει της απόστασης των αστείων για συστήματα με διαφορετικό λόγο μαζών.

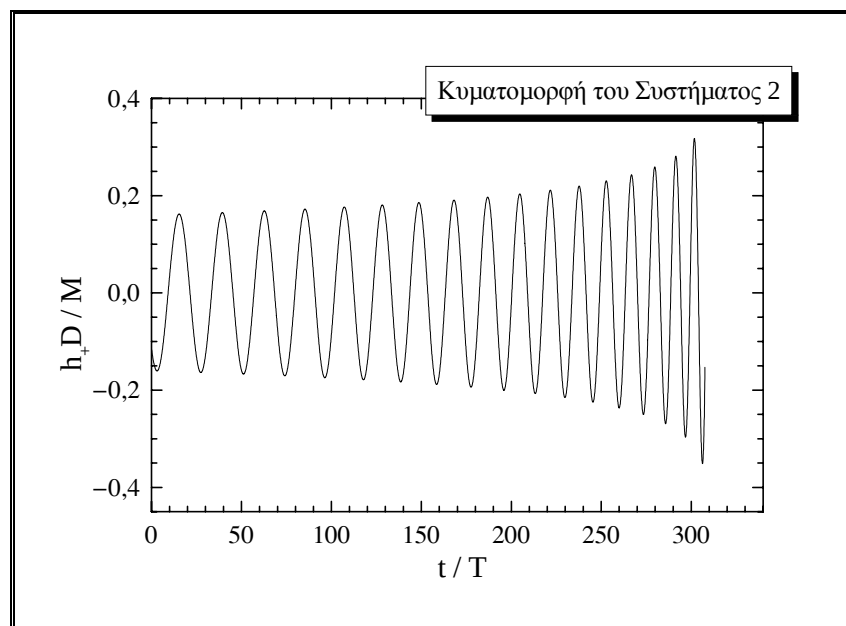


Σχήμα 3.27. Γραφική παράσταση της γωνίας α συναρτήσει της απόστασης των αστείων για το σύστημα 3 ($\Sigma 3$).

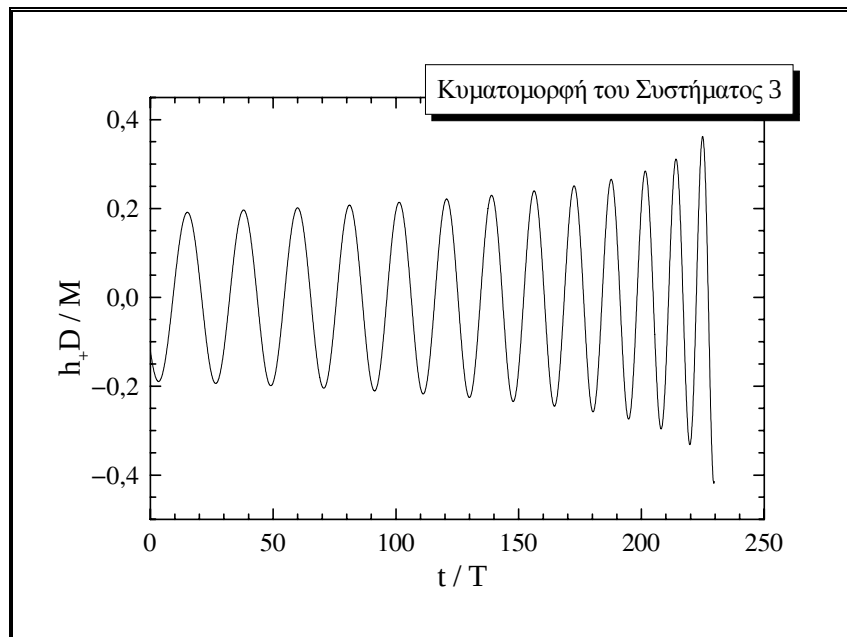


Σχήμα 3.28. Γραφική παράσταση της γωνίας α συναρτήσει της απόστασης των αστέρων για το σύστημα 4 (Σ 4).

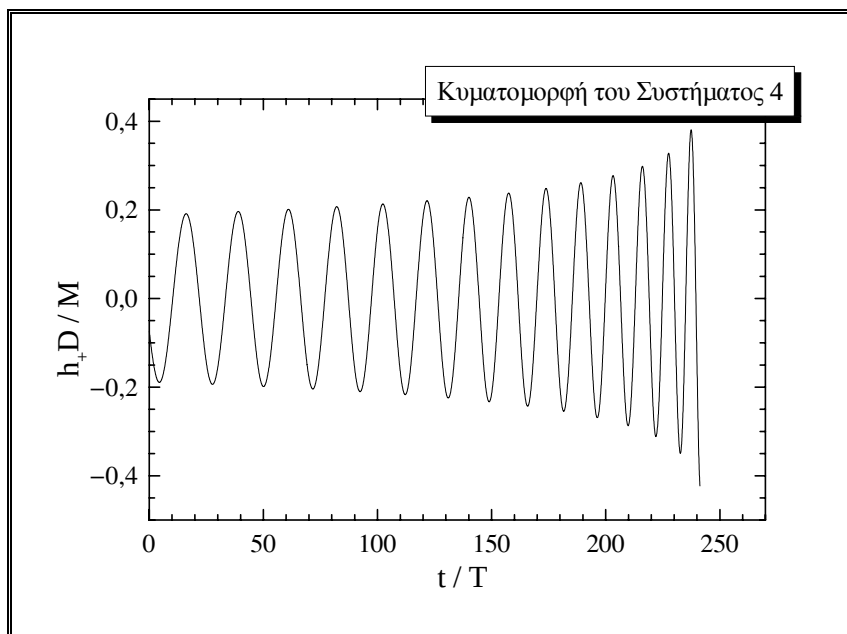
Στο Σχήμα 3.20 φαίνεται η κυματομορφή της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας από το σύστημα 1 σε απόσταση D από αυτό κατά μήκος του άξονα- z ($\Theta = 0$, σχέση (2.4.8)). Στην διεύθυνση αυτή οι δύο συνιστώσες πόλωσης της ακτινοβολίας ταυτίζονται. Παρακάτω παρατίθενται οι κυματομορφές της βαρυτικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από τα συστήματα που μελετούμε.



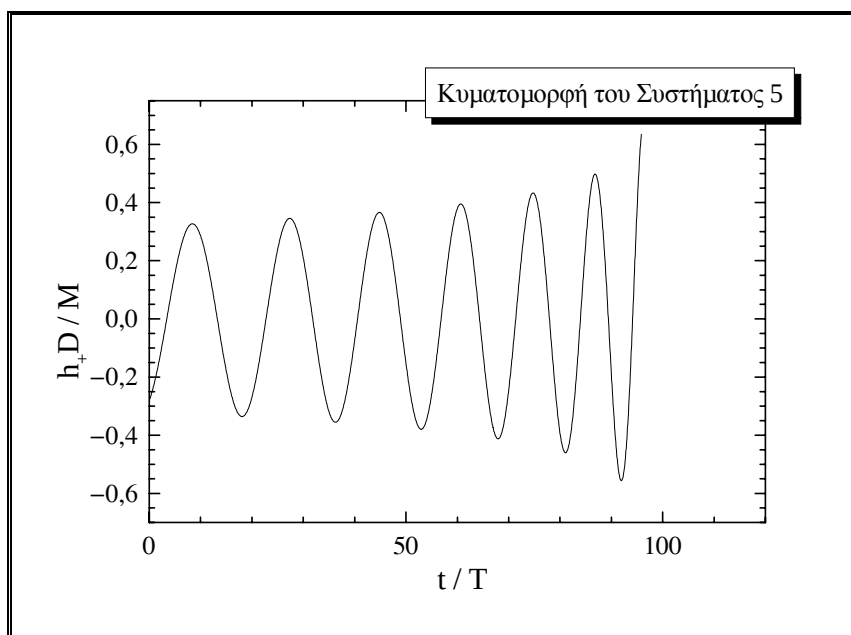
Σχήμα 3.29. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας για το σύστημα 2.



Σχήμα 3.30. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας για το σύστημα 3.

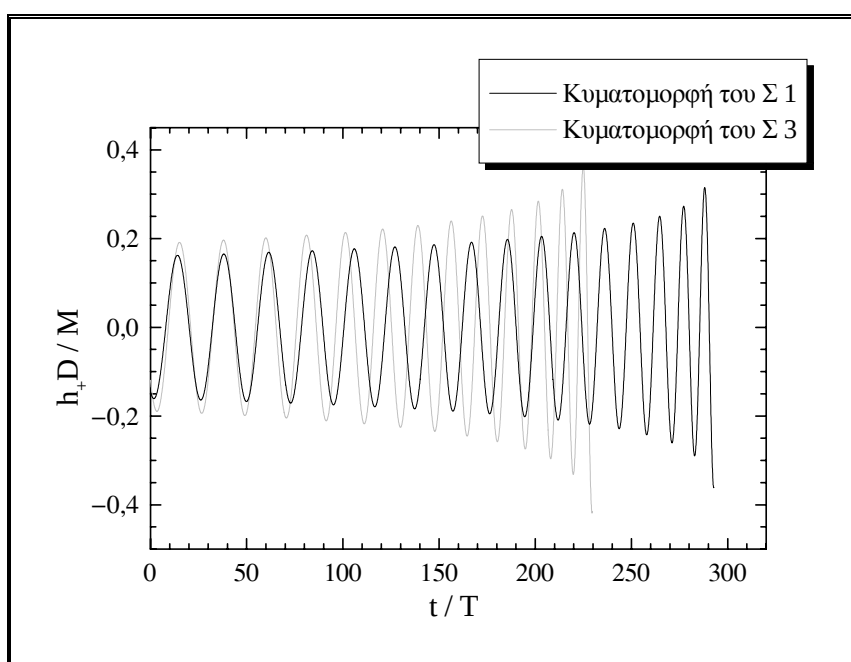


Σχήμα 3.31. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας για το σύστημα 4.

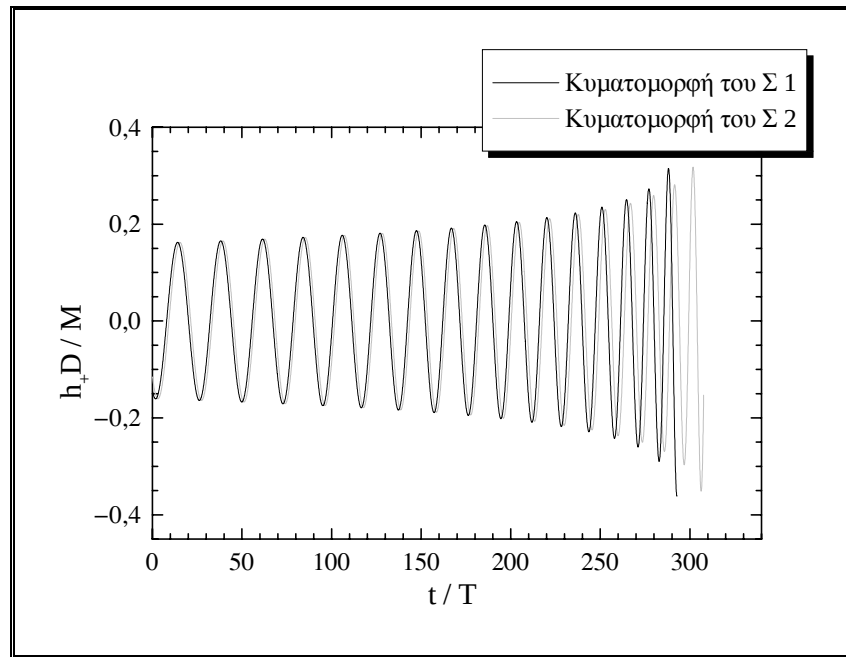


Σχήμα 3.32. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας για το σύστημα 5.

Στο Σχήμα 3.33 συγκρίνονται οι κυματομορφές των συστημάτων Σ 1 και Σ3. Μπορεί κανείς να παρατηρήσει την διαφορά τόσο στο πλάτος όσο και στη φάση, που οφείλεται στο διαφορετικό λόγο μαζών των συστημάτων. Αντιθέτως, η διαφορά στον πολυτροπικό δείκτη τροποποιεί μόνο την φάση και όχι το πλάτος, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3.34.

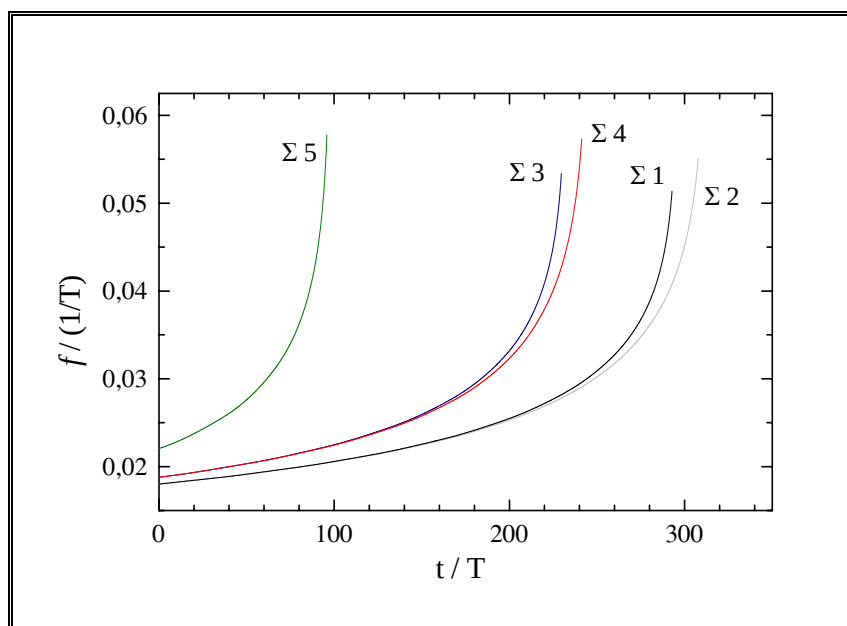


Σχήμα 3.33. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας από τα Σ 1 και Σ 3.



Σχήμα 3.34. Κυματομορφή της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας από τα $\Sigma 1$ και $\Sigma 2$.

Χρησιμοποιώντας τη προσεγγιστική σχέση (2.4.9) για την συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας παίρνουμε το Σχήμα 3.35, το οποίο παριστάνει γραφικά την συχνότητα συναρτήσει του χρόνου για όλα τα συστήματα.



Σχήμα 3.35. Συχνότητα εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας από τα συστήματα.

Για συστήματα που εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία, όπως αναφέρθηκε και στη παράγραφο 3.1, έχουμε κάνει την παραδοχή ότι $G = c = R_o = 1$ και οπότε οι μονάδες στις οποίες θα εκφραστούν τα μεγέθη θα προκύψουν ανάλογα. Για αστέρες νετρονίων με ακτίνα $R_o = 10km$ και μάζα $M = 1.4M_o$, οι παραπάνω προσομοιώσεις διαρκούν μερικά ms , ενώ η συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας κυμαίνεται από 400 μέχρι $1600Hz$, περίπου.

Τέλος

