

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ



ΜΑΡΚΟΥΛΗΣ ΑΝΤΩΝΙΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΤΩΝ ΤΡΙΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΗΝ
MATHEMATICA

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΒΟΥΓΙΑΤΖΗΣ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2010

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία μελετούμε την ακρίβεια αλλά και τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο των διάφορων μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιεί η Mathematica. Στην συνέχεια χρησιμοποιώντας τις κατάλληλες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης και με την βοήθεια των επιφανειών τομής Poicare αλλά και των εξισώσεων μεταβολών προσδιορίζουμε περιοδικές τροχιές του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος για το σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας-αντικείμενο της ζώνης Kuiper ($\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$). Για μία συγκεκριμένη οικογένεια η οποία περιέχει ευσταθείς και ασταθείς ελλειπτικές περιοδικές τροχιές μελετούμε τις μεταβολές του μεγέθους των ευσταθών περιοχών αλλά και την οριακή εκκεντρότητα των ελλειπτικών περιοδικών τροχιών για την οποία οι τροχιές από ευσταθείς γίνονται ασταθείς για 4 διαφορετικά συστήματα ($\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$, $\mu = 0,001$, $\mu = 0,01$, $\mu = 0,1$). Τέλος για κάθε ένα από τα παραπάνω συστήματα ξεκινώντας από μία ευσταθή περιοδική τροχιά του κυκλικού προβλήματος περνούμε στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα και μελετούμε την συμπεριφορά της τροχιάς σε αυτά με την βοήθεια του F.L.I..

Abstract

In this present thesis we study the accuracy and the computing time of the various methods of numerical integrations used by Mathematica. Having chosen the proper methods of numerical integration and by using the Poincare surfaces of section and the variational equations we find periodic orbits of the restricted circular problem for the system Sun-Neptune-Kuiper belt object ($\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$). For a certain family that contains both stable and unstable elliptic periodic orbits we study the changes that occur in the size of the stable areas along with the critical eccentricity of the elliptic periodic orbits for which the orbits form stable become unstable for 4 different systems ($\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}, \mu = 0,001, \mu = 0,01, \mu = 0,1$). Finally for each different system starting from a stable periodic orbit of the circular problem we pass into the elliptic and the general problem and study its behaviour using the F.L.I. .

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή στο πρόβλημα των 3 σωμάτων	1
1.1	Γενικά	1
1.2	Το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων	3
1.2.1	Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων	3
1.2.2	Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	4
1.3	Το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα των 3 σωμάτων	6
1.3.1	Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων	6
1.3.2	Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	7
1.4	Το περιορισμένο ελλειπτικό πρόβλημα των 3 σωμάτων	8
1.4.1	Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων	8
1.4.2	Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	8
2	Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης.	11
2.1	Implicit και Explicit μέθοδοι Αριθμητικής ολοκλήρωσης	11
2.2	Μέθοδοι 1ης τάξης.	12
2.2.1	Explicit Euler.	12
2.2.2	Linearly Implicit Euler	12
2.3	Μέθοδοι 2ης τάξης	12
2.3.1	Explicit Mid-Point (Leap-frog)	12
2.3.2	Explicit Modified Midpoint(Gragg)	14
2.3.3	Linearly Implicit Midpoint	14
2.3.4	Linearly Implicit Modified Midpoint	15
2.4	Μέθοδοι πολλαπλής τάξης	16
2.4.1	Adams	16
2.4.2	BDF (Backward Differentiation Formula)	16
2.4.3	Explicit-Runge Kutta	17
2.4.4	Implicit-Runge Kutta	18
3	Αποτελέσματα αριθμητικής ολοκλήρωσης για τις διάφορες προσεγγίσεις του προβλήματος των τριών σωμάτων.	20
3.1	Γενικό πρόβλημα τριών σωμάτων.	21
3.1.1	Explicit Euler	23
3.1.2	Linearly Implicit Euler	23
3.1.3	Explicit Midpoint	24
3.1.4	Explicit Modified Midpoint	25
3.1.5	Linearly Implicit Midpoint	25
3.1.6	Linearly Implicit Modified Midpoint	25
3.1.7	Adams	26
3.1.8	BDF	26
3.1.9	Explicit Runge-Kutta	26
3.1.10	Implicit Runge-Kutta	27
3.2	Περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα τριών σωμάτων	28
3.2.1	Explicit Euler	28
3.2.2	Linearly Implicit Euler	30
3.2.3	Explicit Midpoint	31
3.2.4	Explicit Modified Midpoint	31
3.2.5	Linearly Implicit Midpoint	32

3.2.6	Linearly Implicit Modified Midpoint	32
3.2.7	Adams	33
3.2.8	BDF	34
3.2.9	Explicit Runge-Kutta	34
3.2.10	Implicit Runge-Kutta	34
3.3	Συμπεράσματα	34
4	Περιοδικές τροχιές στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα	37
4.1	Επιφάνειες τομής Poincare	37
4.1.1	Ορισμός και ιδιότητες τομής Poincare	37
4.1.2	Υπολογιστική μέθοδος κατασκευής τομών Poincare	38
4.2	Εύρεση περιοδικών τροχιών στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα	39
4.2.1	Συμμετρικές περιοδικές τροχιές	41
4.2.2	Οι εξισώσεις μεταβολών	41
4.2.3	Ευστάθεια περιοδικής τροχιάς	43
4.2.4	Υπολογιστική διαδικασία εύρεσης συμμετρικής περιοδικής τροχιάς	44
4.2.5	Οικογένειες περιοδικών τροχιών	45
5	Μελέτη της οικογένειας II περιοδικών τροχιών του κυκλικού προβλήματος	48
5.1	Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Ποσειδώνας- K.B.O. ($\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$)	48
5.2	Συνέχιση περιοδικών τροχιών με παράμετρο το μ	51
5.3	Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Δίας-K.B.O. ($\mu = 0.001$)	52
5.4	Η οικογένεια II στο σύστημα με $\mu = 0.01$	53
5.5	Η οικογένεια II στο σύστημα με $\mu = 0.1$	54
6	Μετάβαση από το κυκλικό στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα	59
6.1	Ευστάθεια τροχιών στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα	59
6.2	Ο δείκτης χαοτικότητας F.L.I	59
6.3	Η τομή Poincare στο περιορισμένο ελλειπτικό πρόβλημα	61
7	Η συμπεριφορά των ευσταθών περιοδικών τροχιών της οικογένειας II περνώντας από το κυκλικό στο γενικό και το ελλειπτικό πρόβλημα	62
7.1	Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Ποσειδώνας-K.B.O. ($\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$)	63
7.1.1	Μεταβολή της εκκεντρότητας του Ποσειδώνα	63
7.1.2	Μεταβολή της μάζας του K.B.O.	65
7.2	Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Δίας-K.B.O. ($\mu = 0.001$)	66
7.2.1	Μεταβολή της εκκεντρότητας του Δία	66
7.2.2	Μεταβολή της μάζας του K.B.O.	68
7.3	Η οικογένεια II στο σύστημα με ($\mu = 0.01$)	69
7.3.1	Μεταβολή της εκκεντρότητας του πλανήτη	69
7.3.2	Μεταβολή της μάζας του K.B.O.	71
7.4	Η οικογένεια II στο σύστημα με ($\mu = 0.1$)	72
7.4.1	Μεταβολή της εκκεντρότητας του πλανήτη	72
7.4.2	Μεταβολή της μάζας του K.B.O.	73
7.5	Συνοπτικά αποτελέσματα	73
7.6	Συμπεράσματα	75
	Παράρτημα Α - Υπορουτίνες του κυκλικού προβλήματος	76
	Παράρτημα Β - Υπορουτίνες του ελλειπτικού προβλήματος	82
	Παράρτημα Γ - Υπορουτίνες του γενικού προβλήματος	85
	Βιβλιογραφία	89

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Επιστήμονες οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα των 3 σωμάτων	1
1.2	Οι ειδικές λύσεις του Lagrange που αντιστοιχούν στα σημεία ισορροπίας του σώματος χωρίς μάζα	2
1.3	Επιστήμονες οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα των 3 σωμάτων	3
1.4	Το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων στο επίπεδο στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων	3
1.5	Η σχέση μεταξύ περιστρεφόμενου και αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων	5
1.6	Οι θέσεις των σωμάτων στο επίπεδο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα των 3 σωμάτων στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων	7
1.7	Οι αρχικές θέσεις των πρωτεύοντων σωμάτων στο πρόβλημα των 2 σωμάτων	9
3.1	Η κίνηση του σώματος m_1 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο γενικό πρόβλημα	22
3.2	Η κίνηση του σώματος m_2 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο γενικό πρόβλημα	23
3.3	Η κίνηση του σώματος m_3 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο γενικό πρόβλημα	23
3.4	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Euler	24
3.5	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Linearly Implicit Euler	24
3.6	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Midpoint	24
3.7	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Modified Midpoint	25
3.8	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Linearly Implicit Midpoint	25
3.9	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Linearly Implicit Modified Midpoint	26
3.10	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Adams	26
3.11	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο BDF	27
3.12	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Runge-Kutta	27
3.13	Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Implicit Runge-Kutta	27
3.14	Η κίνηση του σώματος m_3 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο κυκλικό πρόβλημα	29
3.15	Η κίνηση του σώματος m_1 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο κυκλικό πρόβλημα	29
3.16	Η κίνηση του σώματος m_2 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο κυκλικό πρόβλημα	30
3.17	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Euler.	30
3.18	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Linearly Implicit Euler.	31
3.19	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Midpoint.	31
3.20	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Modified Midpoint.	32
3.21	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Linearly Implicit Midpoint.	32
3.22	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Linearly Implicit Modified Midpoint. . . .	33
3.23	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Adams.	33
3.24	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο BDF.	34
3.25	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Runge-Kutta.	35
3.26	Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Implicit Runge-Kutta.	35
4.1	Επιφάνεια τομής Poincare στην οποία φαίνονται χαοτικές, ευσταθείς και ασταθείς περιοδικές τροχιές	38
4.2	Κατασκευή τομής Poincare	39
4.3	Υπολογιστική μέθοδος κατασκευής επιφάνειας τομής Poincare	40

4.4	Μία συμμετρική περιοδική τροχιά	41
4.5	Υπολογιστική μέθοδος εύρεσης συμμετρικών περιοδικών τροχιών	46
4.6	Υπολογιστική μέθοδος εύρεσης οικογενειών συμμετρικών περιοδικών τροχιών	47
5.1	Οικογένειες περιοδικών τροχιών για τους συντονισμούς 1:2, 1:3, 1:4 στο σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας- δορυφόρος όπως υπολογίστηκαν απο τους Voyatzis, Kotoulas, Hadjidemetriou	48
5.2	Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας-Κ.Β.Ο.	49
5.3	Οι περιοδικές τροχιές των οποίων οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον πίνακα 5.1	50
5.4	Οικογένεια περιοδικών τροχιών ξεκινώντας απο $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$ και φτάνοντας σε μάζα $\mu = 0,1$	52
5.5	Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα Ήλιος-Δίας-Κ.Β.Ο.	53
5.6	Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα με $\mu = 0,01$	54
5.7	Οι περιοδικές τροχιές των οποίων οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον πίνακα 5.1	54
5.8	Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα με $\mu = 0,1$	55
5.9	Οι περιοδικές τροχιές των οποίων οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον πίνακα 5.8	57
5.10	Όλες οι οικογένειες περιοδικών τροχιών που μελετήθηκαν σε κοινό διάγραμμα	58
6.1	Η διακριτή συμπεριφορά μιας χαοτικής και μιας κανονικής τροχιάς	60
6.2	Κατασκευή τομής Poicare για το ελλειπτικό σύστημα	61
7.1	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$	63
7.2	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$	64
7.3	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$	65
7.4	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,001$	66
7.5	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,001$	67
7.6	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 0,001$	68
7.7	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,01$	69
7.8	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,01$	70
7.9	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 0,01$	71
7.10	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,1$	72
7.11	Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 0,1$	73

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στο πρόβλημα των 3 σωμάτων

1.1 Γενικά

Το πρόβλημα των 3 σωμάτων αφορά τον προσδιορισμό της κίνησης 3 σωμάτων των οποίων οι αρχικές θέσεις και ταχύτητες καθώς επίσης και οι μάζες είναι γνωστές. Ο προσδιορισμός της κίνησης αυτής γίνεται σε 2 άξονες. Από την μια έχουμε τους νόμους της κλασικής μηχανικής του Newton και από την άλλη έχουμε τον νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας. Συνεπώς η επίλυση του προβλήματος των 3 σωμάτων συνίσταται στην εύρεση κατάλληλης μεθόδου η οποία θα προσδιορίζει τις τροχιές των σωμάτων, χρησιμοποιώντας τους παραπάνω νόμους.



(α) Isaac Newton 1643 – 1727 (β) Johann Bernoulli 1667 – 1748 (γ) Leonhard Euler 1707 – 1783

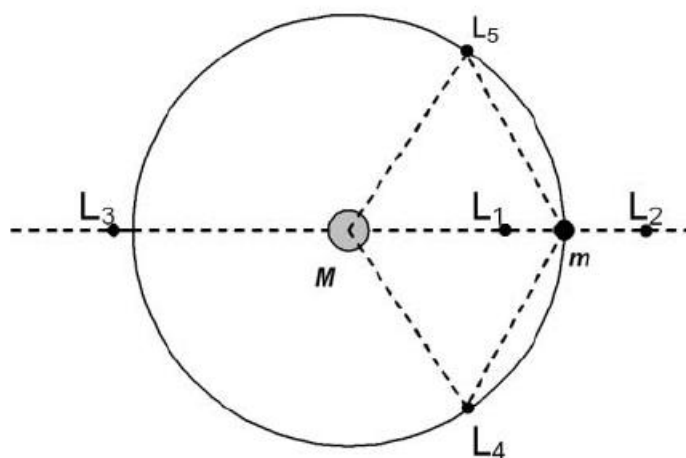
Σχήμα 1.1: Επιστήμονες οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα των 3 σωμάτων

Πριν συνεχίσουμε με την μελέτη του προβλήματος των 3 σωμάτων θα αναφερθούμε στο απλούστερο πρόβλημα των 2 σωμάτων. Αυτό το πρόβλημα επιλύθηκε από τον ίδιο τον Newton στο βιβλίο του Principia ήδη από το 1687. Ακόμη ο J. Bernoulli απέδειξε ότι 2 σώματα τα οποία αλληλεπιδρούν με βαρυτικές δυνάμεις δύναται να εκτελούν είτε ελλειπτικές, είτε υπερβολικές, είτε παραβολικές τροχιές. Τέλος ο Euler απέδειξε ότι το πρόβλημα των 2 σωμάτων είναι δυνατόν να αναχθεί σε πρόβλημα της κίνησης ενός σώματος με μάζα την ανηγμένη μάζα του συστήματος $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$.

Ο πρώτος ο οποίος ασχολήθηκε με το πρόβλημα των 3 σωμάτων ήταν ο Newton στο βιβλίο Principia. Ειδικότερα ασχολήθηκε με το “σεληνιακό” πρόβλημα (lunar problem) δηλαδή το πρόβλημα 3 σωμάτων που αφορά το σύστημα Ήλιος-Γη-Σελήνη. Το πρόβλημα αυτό απασχόλησε έντονα τους επιστήμονες του 18^{ου} αιώνα οι οποίοι προσπαθούσαν να

προσδιορίζουν εάν η κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο αλλά και η κίνηση της Σελήνης γύρω από την Γη είναι ευσταθείς.

Ακόμη την δεκαετία του 1740 οι J. D' Alembert και A. Clairaut προσπάθησαν να επιλύσουν τις διαφορικές εξισώσεις που περιέγραφαν το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διαδοχικές προσεγγίσεις. Μάλιστα είναι ο J. D' Alembert αυτός ο οποίος χρησιμοποίησε πρώτος το όνομα “ πρόβλημα των 3 σωμάτων ” το 1747. Η μελέτη του lunar problem συνεχίστηκε από τον Euler το 1772 ο οποίος και εισήγαγε την έννοια του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος των 3 σωμάτων στο οποίο το ένα σώμα θεωρείται ότι δεν έχει μάζα οπότε και δεν επηρεάζει την κίνηση των 2 άλλων σωμάτων τα οποία κινούνται σε κυκλικές τροχιές. Στην συνέχεια ο Lagrange το 1778 κατάφερε να προσδιορίσει μερικές ειδικές λύσεις του προβλήματος οι οποίες δημιουργούν το περίφημο ισόπλευρο τρίγωνο όπως αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.2.



Σχήμα 1.2: Οι ειδικές λύσεις του Lagrange που αντιστοιχούν στα σημεία ισορροπίας του σώματος χωρίς μάζα

Το περιορισμένο πρόβλημα μελετήθηκε περαιτέρω και από τον Jacobi ενώ χρησιμοποιήθηκε και για τον προσδιορισμό κομητών από τον Tisserand. Τέλος σημαντική δουλειά έγινε και από τους Hill (1878) και Delaunay (1860). Παρά την ενασχόληση πολλών επιστημόνων με το πρόβλημα έως εκείνη την στιγμή το πρόβλημα δεν είχε επιλυθεί πλην ορισμένων εξαιρετικών περιπτώσεων. Ο τελευταίος της κλασικής περιόδου ο οποίος και ασχολήθηκε με το πρόβλημα ήταν ο H. Poincare. Με αφορμή ένα βραβείο το οποίο θα έδινε ο βασιλιάς της Σουηδίας σε όποιον έλυne το πρόβλημα των N σωμάτων ο Poincare ασχολήθηκε ενεργά με το θέμα. Το αποτέλεσμα της δουλειάς αυτής το οποίο και απέφερε στον Poincare το βραβείο ήταν η απόδειξη ότι το πρόβλημα των 3 σωμάτων δεν έχει αναλυτική λύση.

Έτσι μετά από την απόδειξη αυτή του Poincare ο τρόπος αντιμετώπισης του προβλήματος άλλαξε καθώς ο μόνος τρόπος εύρεσης λύσεων ήταν η αριθμητική ολοκλήρωση. Συνεπώς γινόταν προσπάθεια για βήμα βήμα ολοκλήρωση η οποία εισήγαγε και την έννοια του αριθμητικού σφάλματος σε κάθε βήμα. Χαρακτηριστική είναι η προσέγγιση του Burrau με το περίφημο Πυθαγόρειο πρόβλημα των 3 σωμάτων όπου αρχικά τα σώματα βρίσκονται στις γωνίες ορθογωνίου τριγώνου και έχουν μάζα ανάλογη της απέναντι πλευράς. Η πραγματική όμως έκρηξη για την αριθμητική επίλυση του προβλήματος των 3 σωμάτων έγινε με την ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών από το 1950 έως και σήμερα η οποία διευκόλυνε πολύ την αριθμητική ολοκλήρωση. Σήμερα η μελέτη δεν είναι σε στάσιμο επίπεδο αλλά εξελίσσεται ραγδαία με την βελτίωση των υπολογιστών αλλά και των μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης.



(α) Jean le Rond d'Alembert 1717 - 1783 (β) Joseph-Louis Lagrange 1736 - 1813 (γ) Henri Poincaré 1854 - 1912

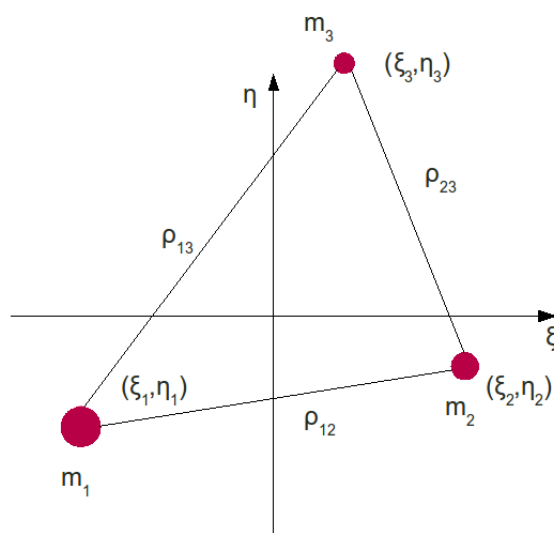
Σχήμα 1.3: Επιστήμονες οι οποίοι μελέτησαν το πρόβλημα των 3 σωμάτων

1.2 Το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων αναφέρεται σε 3 σώματα τα οποία αλληλεπιδρούν με βαρυτικές δυνάμεις. Προκειμένου να μελετήσουμε το πρόβλημα αυτό θα πρέπει να γράψουμε τις εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν την κίνηση των σωμάτων αλλά και να επιλέξουμε το κατάλληλο σύστημα συντεταγμένων πάνω στο οποίο θα μελετήσουμε τις τροχιές των σωμάτων.

1.2.1 Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

Ο πρώτος τρόπος μελέτης του προβλήματος είναι η χρήση ενός αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων το κέντρο του οποίου είναι το κέντρο μάζας του συστήματος. Συνεπώς με αυτόν τον τρόπο εάν γνωρίζουμε τις συντεταγμένες θέσης και ταχύτητας των 2 σωμάτων μπορούμε να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες του 3^{ου} σώματος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις που προκύπτουν από το κέντρο μάζας.



Σχήμα 1.4: Το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων στο επίπεδο στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

Ανάλογα με το εάν μελετούμε το πρόβλημα στο χώρο ή στο επίπεδο έχουμε 6 ή 4 βαθμούς ελευθερίας. Εμείς στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα των 3 σωμάτων στο επίπεδο για όλες τις προσεγγίσεις του. Για την περίπτωση λοιπόν του επιπέδου γενικού προβλήματος όπου όπως γνωρίζουμε το $(0,0)$ είναι το κέντρο μάζας των

3 σωμάτων οι συντεταγμένες της μιας μάζας προκύπτουν συναρτήσει των συντεταγμένων των άλλων 2 μαζών ως εξής:

$$\xi_1 = -\frac{(m_3\xi_3 + m_2\xi_2)}{m_1} \quad (1.1)$$

$$\eta_1 = -\frac{(m_3\eta_3 + m_2\eta_2)}{m_1} \quad (1.2)$$

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{(m_3\dot{\xi}_3 + m_2\dot{\xi}_2)}{m_1} \quad (1.3)$$

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{(m_3\dot{\eta}_3 + m_2\dot{\eta}_2)}{m_1} \quad (1.4)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων.

$$\ddot{\xi}_3 = -m_1 \frac{\xi_3 - \xi_1}{\rho_{13}^3} - m_2 \frac{\xi_3 - \xi_2}{\rho_{23}^3} \quad (1.5)$$

$$\ddot{\xi}_2 = -m_1 \frac{\xi_2 - \xi_1}{\rho_{12}^3} - m_3 \frac{\xi_2 - \xi_3}{\rho_{23}^3} \quad (1.6)$$

$$\ddot{\eta}_3 = -m_1 \frac{\eta_3 - \eta_1}{\rho_{13}^3} - m_2 \frac{\eta_3 - \eta_2}{\rho_{23}^3} \quad (1.7)$$

$$\ddot{\eta}_2 = -m_1 \frac{\eta_2 - \eta_1}{\rho_{12}^3} - m_3 \frac{\eta_2 - \eta_3}{\rho_{23}^3} \quad (1.8)$$

όπου ισχύει:

$$\rho_{12}^2 = (\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 \quad (1.9)$$

$$\rho_{13}^2 = (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 \quad (1.10)$$

$$\rho_{23}^2 = (\xi_3 - \xi_2)^2 + (\eta_3 - \eta_2)^2 \quad (1.11)$$

1.2.2 Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Ένας τρόπος να μελετήσουμε τον γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων είναι να αλλάξουμε το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε. Το σύστημα αυτό είναι το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο τα 2 μεγαλύτερα σώματα (ήλιος και πλανήτης) βρίσκονται πάντοτε πάνω στον άξονα των x έχουν δηλαδή $y = 0$ ενώ για το τρίτο σώμα δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για την κίνηση του. Αυτή η αλλαγή συντεταγμένων αφορά κάθε ένα από τα σώματα ξεχωριστά και μπορεί να αναπαρασταθεί με έναν πίνακα ως εξής:

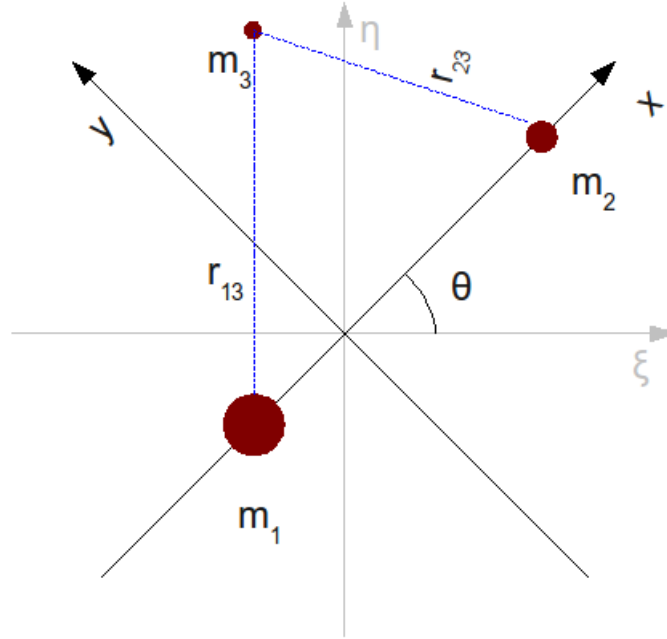
$$\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} = A_i \cdot \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad \text{όπου ο } A \text{ είναι ο πίνακας ο οποίος περιγράφει τον μετασχηματισμό.}$$

Ο πίνακας αυτός έχει την εξής μορφή:

$$A_{1,2} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Έχουμε 2 διαφορετικούς πίνακες μετατόπισης διότι ο πρώτος αφορά στα σώματα τα οποία βρίσκονται πάνω στον έναν άξονα του περιστρεφόμενου συστήματος ενώ ο άλλος αφορά στο σώμα το οποίο κινείται ελεύθερα.

Το νέο σύστημα συντεταγμένων φαίνεται στο σχήμα 1.5.



Σχήμα 1.5: Η σχέση μεταξύ περιστρεφόμενου και αδρανειακού συστήματος συντεταγμένων

Η Λαγκρανζιανή του συστήματος είναι η επόμενη :

$$\begin{aligned}
 L = & \frac{m_1}{2(1-\mu)}(\dot{x}_2^2 + \dot{x}_2^2\dot{\theta}^2) + \\
 & \frac{m_3}{2M}(m_1 + m_2)[\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + (x_3^2 + y_3^2)\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}^2(x_3\dot{y}_3 - y_3\dot{x}_3)] \\
 & + \frac{G(1-\mu)m_1m_2}{x_2} + \frac{Gm_1m_3}{[(x_3 - x_2)^2 + y_3^2]^{1/2}} + \frac{Gm_2m_3}{[(x_3 + \frac{m_1}{m_2}x_2)^2 + y_3^2]^{1/2}}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

όπου ισχύει $\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $M = m_1 + m_2 + m_3$ και G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης.

Αν μάλιστα τώρα κάνουμε αδιάστατο το πρόβλημα θεωρώντας ότι $G, M = 1$ προκύπτουν οι εξής εξισώσεις για το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων στο περιστρεφόμενο σύστημα.

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_2 - x_2\dot{\theta}^2 + (1-\mu)^3(1-m_3)\frac{1}{x_2^2} - (1-\mu)m_3\frac{x_3 - x_2}{[(x_3 - x_2)^2 + (y_3)^2]^{1/2}} + \\
 + (1-\mu)m_3\frac{x_3 + \frac{\mu}{1-\mu}x_2}{[(x_3 - \frac{\mu}{1-\mu}x_2)^2 + y_3^2]^{3/2}} = 0
 \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\ddot{x}_3 - 2\dot{y}_3\dot{\theta} - y_3\ddot{\theta} - x_3\dot{\theta}^2 + \mu\frac{x_3 - x_2}{[(x_3 - x_2)^2 + y_3^2]^{3/2}} + (1-\mu)\frac{x_3 + \frac{\mu}{1-\mu}x_2}{[(x_3 - \frac{\mu}{1-\mu}x_2)^2 + y_3^2]^{3/2}} = 0 \tag{1.14}$$

$$\ddot{y}_3 + 2\dot{x}_3\dot{\theta} + x_3\ddot{\theta} - y_3\dot{\theta}^2 + \mu\frac{y_3}{[(x_3 - x_2)^2 + y_3^2]^{3/2}} + (1-\mu)\frac{y_3}{[(x_3 - \frac{\mu}{1-\mu}x_2)^2 + y_3^2]^{3/2}} = 0 \tag{1.15}$$

1.3 Το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα των 3 σωμάτων

Έχοντας μελετήσει το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων το επόμενο βήμα το οποίο και κάνουμε είναι να προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε το πρόβλημα. Μία τέτοια προσέγγιση λοιπόν είναι το περιορισμένο πρόβλημα των 3 σωμάτων. Στην προσέγγιση αυτή θεωρούμε ότι το μικρότερο σώμα έχει μηδενική μάζα ($m_3 = 0$), συνεπώς δεν ασκεί καμία βαρυτική δύναμη στα 2 άλλα σώματα. Η προσέγγιση αυτή είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική σε συστήματα όπου η μάζα του τρίτου σώματος είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με την μάζα των άλλων 2. Το περιορισμένο πρόβλημα με την σειρά του μπορεί να αναλυθεί σε 2 διαφορετικές υποπεριπτώσεις ανάλογα με το είδος των τροχιών τις οποίες εκτελούν τα 2 σώματα τα οποία έχουν μάζες (πρωτεύοντα σώματα). Ουσιαστικά η μελέτη της κίνησης των 2 αυτών σωμάτων είναι μελέτη του προβλήματος των 2 σωμάτων, οπότε οι τροχιές που κάνουν τα 2 σώματα στο περιορισμένο πρόβλημα είναι είτε κυκλικές είτε ελλειπτικές. Έτσι δημιουργείται το κυκλικό και το ελλειπτικό περιορισμένο πρόβλημα των 3 σωμάτων. Η μελέτη των 2 προβλημάτων και πάλι μπορεί να γίνει σε 2 συστήματα συντεταγμένων, το αδρανειακό και το περιστρεφόμενο τα οποία ορίζονται όπως ακριβώς και στο γενικό πρόβλημα των σωμάτων.

1.3.1 Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

Η πορεία την οποία κάνουμε για να πάρουμε τις εξισώσεις στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα για το αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι αυτήν την φορά λίγο διαφορετική από αυτήν που ακολουθήσαμε στο γενικό πρόβλημα. Ξεκινώντας από τις εξισώσεις κίνησης του γενικού προβλήματος (σχέση 1.5 - 1.8) το πρώτο βήμα είναι να θέσουμε στον τύπο $m_3 = 0, m_1 = 1 - \mu, m_2 = \mu$. Έτσι οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα:

$$\ddot{\xi}_3 = -(1 - \mu) \frac{\xi_3 - \xi_1}{\rho_{13}^3} - \mu \frac{\xi_3 - \xi_2}{\rho_{23}^3} \quad (1.16)$$

$$\ddot{\eta}_3 = -(1 - \mu) \frac{\eta_3 - \eta_1}{\rho_{13}^3} - \mu \frac{\eta_3 - \eta_2}{\rho_{23}^3} \quad (1.17)$$

Ταυτόχρονα η αρχή του συστήματος των συντεταγμένων παραμένει το κέντρο μάζας οπότε εκ νέου ισχύουν οι τύποι (1.1-1.4) μόνο που αντικαθιστούμε εκ νέου $m_3 = 0, m_1 = 1 - \mu, m_2 = \mu$. Έτσι από την αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει:

$$\xi_1 = -\frac{\mu \xi_2}{1 - \mu} \quad (1.18)$$

$$\eta_1 = -\frac{\mu \eta_2}{1 - \mu} \quad (1.19)$$

$$\dot{\xi}_1 = -\frac{\mu \dot{\xi}_2}{1 - \mu} \quad (1.20)$$

$$\dot{\eta}_1 = -\frac{\mu \dot{\eta}_2}{1 - \mu} \quad (1.21)$$

Η διαφοροποίηση στην προσέγγιση του προβλήματος έχει να κάνει με τις περαιτέρω παραδοχές τις οποίες κάνουμε πέραν των διαφορικών εξισώσεων. Αναφέραμε ήδη ότι το περιορισμένο πρόβλημα έχει 2 υποπεριπτώσεις, το κυκλικό και το ελλειπτικό. Τα 2 προβλήματα δεν διαφέρουν στο σύστημα των εξισώσεων αλλά στο εάν τα πρωτεύοντα σώματα εκτελούν κυκλικές ή ελλειπτικές τροχιές. Αυτό εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες τις οποίες έχουν.

Στην περίπτωση του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος τα πρωτεύοντα σώματα τοποθετούνται ως εξής: Το σώμα με μάζα μ στην θέση $\xi_{20} = 1 - \mu$ και το σώμα με μάζα $1-\mu$ στην θέση $\xi_{10} = \mu$ ούτως ώστε να ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Ταυτόχρονα δίνουμε στο σώμα με μάζα $1-\mu$ αρχική ταχύτητα κάθετη στο αρχικό διάνυσμα θέσης κατάλληλη ώστε το σώμα να εκτελέσει κυκλική τροχιά. Το φαινόμενο είναι γνωστό από το πρόβλημα των 2 σωμάτων και η αρχική ταχύτητα ώστε το σώμα να εκτελέσει κυκλική τροχιά είναι $\dot{\eta}_{20} = 1 - \mu$. Όσον αφορά τώρα στο άλλο σώμα που έχει μάζα, και αυτό αναγκαστικά θα εκτελέσει κυκλική τροχιά, όπως προκύπτει από το πρόβλημα των 2 σωμάτων.

1.3.2 Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Περνώντας στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων η Λαγκρανζιανή δίνεται από τον τύπο:

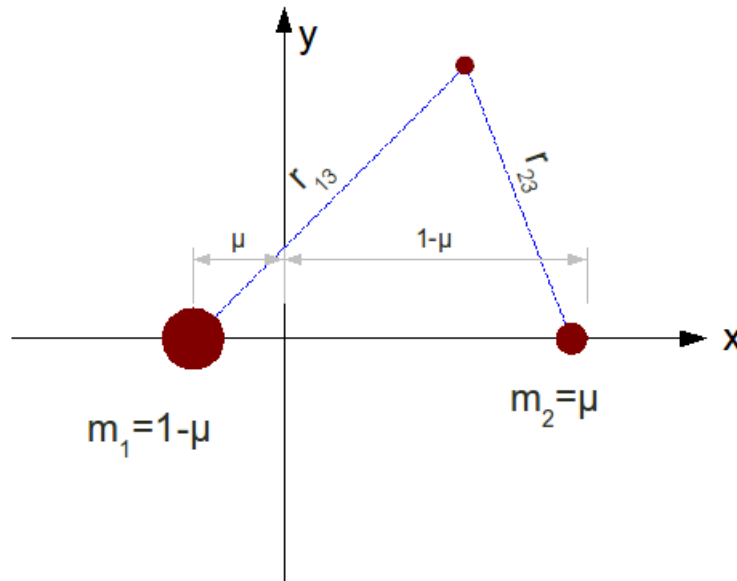
$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + x_3^2 + y_3^2) + x_3\dot{y}_3 - \dot{x}_3y_3 + \frac{(1-\mu)}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}} \quad (1.22)$$

όπου ισχύει:

$$r_{13}^2 = (x_3 - x_1)^2 + y_3^2 = (x_3 + \mu)^2 + y_3^2 \quad (1.23)$$

$$r_{23}^2 = (x_3 - x_2)^2 + y_3^2 = (x_3 + \mu - 1)^2 + y_3^2 \quad (1.24)$$

Παρατηρούμε την απουσία της γωνίας θ στην Λαγκρανζιανή του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος κάτι το οποίο προκύπτει από το γεγονός ότι τα 2 πρωτεύοντα σώματα εκτελούν κυκλικές τροχιές οπότε και η ταχύτητα με την οποία διαγράφουν τις κυκλικές τροχιές είναι σταθερή. Ως εκ τούτου η γωνία στην περίπτωση μας είναι αγνοήσιμη συντεταγμένη και θέτουμε στους τύπους μας $\theta = t$ όπου με t συμβολίζουμε τον χρόνο. Εξάλλου στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων τα σώματα αυτά είναι ακίνητα στις θέσεις $x_1 = -\mu, x_2 = 1 - \mu$ ενώ ισχύει και πάλι $m_1 = 1 - \mu, m_2 = \mu$. Τέλος το σώμα χωρίς μάζα κινείται ελεύθερα. Οι αρχικές συνθήκες των σωμάτων στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα φαίνονται στο σχήμα 1.6.



Σχήμα 1.6: Οι θέσεις των σωμάτων στο επίπεδο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα των 3 σωμάτων στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Έτσι οι εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι οι επόμενες:

$$\ddot{x}_3 = x_3 + 2\dot{y}_3 - (1 - \mu)\frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} - \mu\frac{x_3 - x_2}{r_{23}^2} \quad (1.25)$$

$$\ddot{y}_3 = y_3 - 2\dot{x}_3 - y_3\left(\frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3}\right) \quad (1.26)$$

1.4 Το περιορισμένο ελλειπτικό πρόβλημα των 3 σωμάτων

1.4.1 Αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

Έχοντας μελετήσει ενδελεχώς το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι πολύ εύκολο να επεκτείνουμε την μελέτη μας και στο αντίστοιχο ελλειπτικό πρόβλημα. Καταρχάς όπως αναφέραμε ήδη το σύστημα εξισώσεων και στις 2 περιπτώσεις είναι το ίδιο. Συνεπώς οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιγράφουν το ελλειπτικό πρόβλημα των σωμάτων είναι οι 1.16 - 1.17. Η διαφοροποίηση των 2 προβλημάτων οφείλεται στις αρχικές συνθήκες των πρωτεύοντων σωμάτων. Παρατηρήσαμε ότι στο κυκλικό πρόβλημα τα 2 σώματα τα τοποθετούσαμε αρχικά ως εξής: Το σώμα με μάζα μ στην θέση $\xi_2 = 1 - \mu$ και το σώμα με μάζα $1 - \mu$ στην θέση $\xi_1 = \mu$. Στην περίπτωση τώρα του ελλειπτικού προβλήματος εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι τα 2 πρωτεύοντα συμπεριφέρονται σαν σώματα του προβλήματος των 2 σωμάτων βρίσκουμε από την θεωρία ότι για να εκτελούν ελλειπτικές τροχιές θα πρέπει αρχικά να τοποθετούνται στις θέσεις $\xi_{20} = (1 - \mu)(1 + e)^{\frac{1}{3}}$, $\xi_{10} = \mu(1 + e)^{\frac{1}{3}}$ και με ταχύτητες κάθετες στο αρχικά διανύσματα θέσης $\dot{\eta}_{20} = (1 - \mu)(1 + e)^{\frac{1}{3}}$, $\dot{\eta}_{10} = \mu(1 + e)^{\frac{1}{3}}$. Μια ακόμα σημαντική αλλαγή που προκύπτει είναι στην περίοδο κίνησης των πρωτεύοντων. Στην περίπτωση του κυκλικού προβλήματος η περίοδος της κίνησης αυτών των σωμάτων αυτή ήταν σταθερά 2π . Τώρα για το ελλειπτικό πρόβλημα η περίοδος T είναι μεταβλητή όπως επίσης και ο μεγάλος ημιάξονας A της έλλειψης εξαρτώνται από την εκκεντρότητα και σύμφωνα με τον Ichtiaroglou [13] δίνονται από τους τύπους:

$$T = 2\pi\left[\frac{1 + e}{(1 - e)^3}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (1.27)$$

$$A^3 = \frac{1 - e}{(1 + e)^3} \quad (1.28)$$

1.4.2 Περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων

Και στην περίπτωση του ελλειπτικού προβλήματος μπορούμε να μελετήσουμε τις κινήσεις των σωμάτων στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Για την γωνία θ δεν μπορούμε να κάνουμε την ίδια απλοποίηση την οποία κάναμε στο κυκλικό πρόβλημα καθώς πλέον δεν είναι αγνοήσιμη συντεταγμένη του προβλήματος. Στην περίπτωση του κυκλικού προβλήματος μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι τα 2 σώματα με μάζα βρίσκονται σταθερά σε κάποιες θέσεις και λόγω κανονικοποίησης των μονάδων μας η μεταξύ τους απόσταση ήταν $r = 1$. Κάτι τέτοιο δεν ισχύει στο ελλειπτικό πρόβλημα. Πλέον η απόσταση μεταξύ των 2 σωμάτων που έχουν μάζα είναι μεταβλητή $r(t)$. Μπορεί όμως πολύ εύκολα αυτή η απόσταση να συσχετιστεί με την γωνία θ η οποία υπάρχει στην Λαγκρανζιανή του γενικού προβλήματος μελετώντας και πάλι ξεχωριστά το πρόβλημα των 2 πρωτεύοντων.

Από αυτό προκύπτει ότι ισχύει:

$$\dot{\theta} = \frac{P_{\theta}}{\frac{\mu}{1-\mu}x_2^2} \quad (1.29)$$

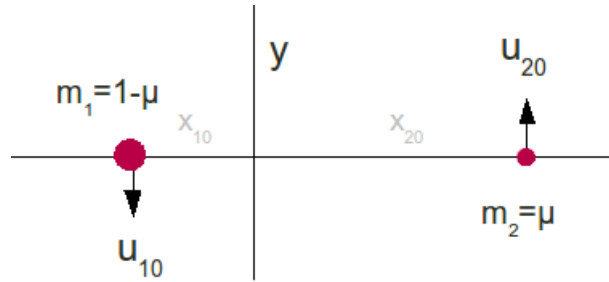
Ακόμα από την διατήρηση της στροφορμής του συστήματος εάν θεωρήσουμε τις αρχικές ταχύτητες των 2 σωμάτων κάθετες στα διανύσματα των μετατοπίσεων τους ισχύει:

$$P_{\theta} = P_1 + P_2 = (1-\mu)x_{10}u_{10} + \mu x_{20}u_{20} \quad (1.30)$$

Όμως μπορούμε να απλοποιήσουμε περαιτέρω τις ταχύτητες καθώς γνωρίζουμε ότι $\omega=1$:

$$u_{10} = \omega R = \omega x_{10} = x_{10} \quad (1.31)$$

$$u_{20} = \omega R = \omega x_{20} = x_{20} \quad (1.32)$$



Σχήμα 1.7: Οι αρχικές θέσεις των πρωτεύοντων σωμάτων στο πρόβλημα των 2 σωμάτων

Τέλος από την αρχή διατήρησης της ορμής ισχύει ότι:

$$\mu x_{20} = (1-\mu)x_{10} \Rightarrow x_{10} = \frac{\mu}{1-\mu}x_{20} \quad (1.33)$$

Η συνολική στροφορμή τελικά προκύπτει ότι είναι:

$$P_{\theta} = \frac{\mu}{1-\mu}x_{20}^2 \quad (1.34)$$

Συνεπώς αντικαθιστώντας την 1.34 στην 1.29 ισχύει :

$$\dot{\theta} = \frac{x_{20}^2}{x_2} \quad (1.35)$$

και

$$\ddot{\theta} = -\frac{2x_{20}^2}{x_2^3}\dot{x}_2 \quad (1.36)$$

Περνώντας στις συντεταγμένες των 2 πρωτεύοντων αυτές πλέον δίνονται από τους τύπους $x_1 = -\mu r$, $x_2 = (1-\mu)r$, ενώ για την μεταξύ τους απόσταση $r(t)$ ισχύει $r_0^3 = 1+e$ οπότε $x_{10} = -\mu(1+e)^{1/3}$, $x_{20} = (1-\mu)(1+e)^{1/3}$. Τέλος το τελευταίο στοιχείο το οποίο θα πρέπει να αναφέρουμε για την μελέτη του ελλειπτικού προβλήματος στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι η περίοδος και ο μεγάλος ημιάξονας για τα 2 πρωτεύοντα σώματα. Και σε αυτήν την περίπτωση ισχύουν οι τύποι που αναφέραμε στο αδρανειακό σύστημα (βλέπε σχέσεις 1.27-1.28). Η Λαγκρανζιανή του ελλειπτικού προβλήματος δίνεται από την σχέση:

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 + (x_3^2 + y_3^2)\dot{\theta}^2 + 2(x_3\dot{y}_3 - \dot{x}_3y_3)\dot{\theta}) + \frac{(1-\mu)}{r_{13}} + \frac{\mu}{r_{23}} \quad (1.37)$$

όπου ως γνωστόν ισχύει:

$$r_{13}^2 = (x_3 - x_1)^2 + y_3^2 \quad (1.38)$$

$$r_{23}^2 = (x_3 - x_2)^2 + y_3^2 \quad (1.39)$$

Τελικά παίρνουμε 2 διαφορικές εξισώσεις από την Λαγκρανζιανή του ελλειπτικού προβλήματος και μία ακόμα από το πρόβλημα των 2 σωμάτων. Το τελικό σύστημα εξισώσεων κίνησης είναι το επόμενο.

$$\ddot{x}_3 = x_3 \dot{\theta}^2 + 2\dot{y}_3 \dot{\theta} + y_3 \ddot{\theta} - (1 - \mu) \frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3} - \mu \frac{x_3 - x_2}{r_{23}^2} \quad (1.40)$$

$$\ddot{y}_3 = y_3 \dot{\theta}^2 - 2\dot{x}_3 \dot{\theta} - x_3 \ddot{\theta} - y_3 \left(\frac{1 - \mu}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3} \right) \quad (1.41)$$

$$\ddot{r} = \frac{x_{20}^4}{(1 - \mu)^4 r^3} - \frac{1}{r^2} \quad (1.42)$$

Μπορούμε σε αυτό το σημείο να παρατηρήσουμε ότι το κυκλικό πρόβλημα είναι υποπερίπτωση του ελλειπτικού καθώς για $e = 1, \dot{\theta} = 1, r = 1$ προκύπτουν οι εξισώσεις του κυκλικού προβλήματος 1.25, 1.26.

Κεφάλαιο 2

Μέθοδοι αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Η μελέτη εν γένει του προβλήματος των 3 σωμάτων ανάγεται στην αριθμητική επίλυση ενός συστήματος διαφορικών εξισώσεων οι οποίες είναι διαφορετικές ανάλογα με την προσέγγιση του προβλήματος την οποία μελετάμε. Σε κάθε περίπτωση αυτή η επίλυση γίνεται αριθμητικά χρησιμοποιώντας κάποια μέθοδο αριθμητικής ανάλυσης. Στα επόμενα θα αναφερθούμε στις διάφορες μεθόδους τις οποίες χρησιμοποιεί η Mathematica και τις οποίες καλούμε αλλάζοντας την παράμετρο **Method** της εντολής **NDSolve**. Το χαρακτηριστικό το οποίο διαχωρίζει τις διάφορες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης μεταξύ τους είναι ο αριθμός των βημάτων (steps) τα οποία εμπεριέχει κάθε μέθοδος αλλά και το εάν είναι Implicit η Explicit, κάτι το οποίο θα επεξηγήσουμε παρακάτω.

2.1 Implicit και Explicit μέθοδοι Αριθμητικής ολοκλήρωσης

Μία πολύ σημαντική παράμετρος στην αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι το εάν η μέθοδος μας είναι Implicit ή Explicit. Η μετάφραση των δύο αυτών λέξεων στα ελληνικά είναι πεπλεγμένες και λελυμένες μέθοδοι. Η διαφοροποίηση των 2 μεθόδων έγκειται στον τρόπο επίλυσης τους. Έτσι οι μεν Explicit μέθοδοι υπολογίζουν την κατάσταση του συστήματος σε επόμενη χρονική στιγμή από την δεδομένη ενώ αντίθετα οι Implicit μέθοδοι υπολογίζουν και την τωρινή κατάσταση του συστήματος αλλά και την μελλοντική. Έτσι εάν θεωρήσουμε την τωρινή μας κατάσταση σαν $X(t)$ και την μελλοντική κατάσταση έπειτα από χρόνο Δt όπου Δt είναι ένα πολύ μικρό βήμα ολοκλήρωσης τότε για την μεν Explicit μέθοδο η λύση προκύπτει από την

$$X(t + \Delta t) = F(x(t)) \quad (2.1)$$

ενώ για την Implicit μέθοδο προκύπτει από την επίλυση της εξίσωσης:

$$G(X(t), X(t + \Delta t)) = 0 \quad (2.2)$$

Ειδικότερα για την επίλυση της προηγούμενης εξίσωσης συνήθως χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson. Παρατηρούμε λοιπόν ότι η επίλυση μιας Implicit μεθόδου απαιτεί περισσότερο υπολογιστικό χρόνο οπότε δεν θα πρέπει να προτιμάται. Κάτι τέτοιο είναι ανακριβές διότι υπάρχουν εξισώσεις οι οποίες ονομάζονται stiff, οι οποίες έχουν ως χαρακτηριστικό ότι το βήμα Δt πρέπει να γίνει άπειρα μικρό προκειμένου να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση με Explicit μέθοδο κάτι το οποίο καθιστά μια τέτοια επίλυση αδύνατη. Έτσι σε τέτοιες περιπτώσεις στρεφόμαστε σε Implicit μεθόδους.

2.2 Μέθοδοι 1ης τάξης.

2.2.1 Explicit Euler.

Μία πολύ απλή μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης η οποία στηρίζεται σε διαφορές είναι η μέθοδος Euler. Στην Mathematica υπάρχει σαν έτοιμη μέθοδος η Explicit Euler η οποία αναφέρεται σε εμπρόσθιες διαφορές ενώ η Implicit Euler δεν υπάρχει ξεχωριστά αλλά προκύπτει από την μέθοδο Implicit Runge-Kutta 1ης τάξης όπως θα δούμε παρακάτω.

Έστω ένα πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.3)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.4)$$

Από το ανάπτυγμα Taylor προκύπτει ότι για ένα βήμα ολοκλήρωσης $t_{n+1} = t_n + h$ ισχύει και κρατώντας μόνο 2 όρους:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (2.5)$$

Βέβαια καθώς ομιλούμε για μία 1ης τάξεως προσέγγιση είναι πολύ λογικό να έχουμε αρκετά μεγάλο σφάλμα. Αυτό μπορεί να υπολογιστεί με μία σύγκριση των αποτελεσμάτων μας με το ανάπτυγμα Taylor. Έτσι από την μεν μέθοδο του Euler προκύπτει:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hf(t_0, y(t_0)) = y(t_0) + hy'(t_0) \quad (2.6)$$

ενώ από το ανάπτυγμα προκύπτει ότι:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hy'(t_0) + \frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3) \quad (2.7)$$

Συνεπώς το σφάλμα είναι:

$$\frac{1}{2}h^2y''(t_0) + O(h^3) \quad (2.8)$$

2.2.2 Linearly Implicit Euler

Μία ακόμα μέθοδος 1ης τάξης την οποία χρησιμοποιεί η Mathematica για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων είναι η Linearly Implicit Euler, η οποία είναι προέκταση της μεθόδου Euler την οποία αναφέραμε πιο πριν. Η μέθοδος αυτή είναι Implicit δηλαδή πρέπει να λυθεί μία εξίσωση προκειμένου να βρεθεί το y_{n+1} κάτι το οποίο επιτυγχάνεται με την μέθοδο Newton-Raphson. Το πλεονέκτημα αυτών των μεθόδων είναι ότι είναι σταθερότερες κάτι το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί μεγαλύτερο βήμα ολοκλήρωσης αλλά απαιτούν μεγαλύτερο υπολογιστικό χρόνο.

Η μέθοδος είναι ίδια με την Explicit Euler με την διαφορά ότι πλέον ισχύει:

$$y(t_0 + h) = y(t_0) + hf(t_0 + h, y(t_0 + h)) = y(t_0) + hf(t_0 + h, y_{n+1}) \quad (2.9)$$

2.3 Μέθοδοι 2ης τάξης

2.3.1 Explicit Mid-Point (Leap-frog)

Η μέθοδος αυτή είναι μία μέθοδος η οποία καλείται στην Mathematica με την εντολή ExplicitMidPoint. Ο τρόπος με τον οποίον λειτουργεί είναι ο εξής:

Προκειμένου να λύσουμε το σύστημα:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.10)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.11)$$

Χρησιμοποιούμε τον τύπο:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)) \quad (2.12)$$

όπου h είναι το εύρος του βήματος όπως προκύπτει από τον τύπο $t_n = t_0 + nh$ και $y_n = y(t_n)$ είναι η τιμή την οποία υπολογίζουμε. Προφανώς ο χαρακτηρισμός MidPoint προκύπτει από το ότι οι υπολογισμοί γίνονται για χρόνο $t = t_n + \frac{h}{2}$, το οποίο είναι το ενδιάμεσο σημείο Midpoint μεταξύ του t_n στο οποίο είναι γνωστή η τιμή της $y(t)$ και του t_{n+1} στο οποίο ψάχνουμε την y . Το σφάλμα σε κάθε βήμα είναι της τάξεως του $O(h^3)$, συνεπώς ακριβέστερα από την μέθοδο του Euler. Η μέθοδος Midpoint είναι μία βελτίωση της μεθόδου Euler

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \quad (2.13)$$

και προκύπτει με παρόμοιο τρόπο. Προκειμένου να προκύψει η μέθοδος η κύρια ανισότητα στην οποία στηριζόμαστε είναι η εξής:

$$y(t+h) \approx y(t) + hf(t, y(t)) \quad (2.14)$$

η οποία προκύπτει από την:

$$y'(t) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (2.15)$$

Ακριβέστερα για την μέθοδο Midpoint υπάρχει ο τύπος:

$$y' \left(t + \frac{h}{2} \right) \approx \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \quad (2.16)$$

όπου

$$y(t+h) \approx y(t) + hf \left(t + \frac{h}{2}, y \left(t + \frac{h}{2} \right) \right) \quad (2.17)$$

Στην συνέχεια με ανάπτυγμα Taylor προκύπτει ότι:

$$y(t+h) \approx y(t) + hf \left(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{h}{2}f(t, y(t)) \right) \quad (2.18)$$

Βεβαίως ο τύπος αυτός μπορεί να γραφτεί και διαφορετικά αν έχουμε ως σημείο αναφοράς το μέσο του βήματος και όχι την αρχή του όπως εργαζόμασταν έως τώρα. Σε αυτήν την περίπτωση η μέθοδος γράφεται ως εξής:

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n), n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

Όπως είναι προφανές το σημείο $n+1$ είναι το σημείο το οποίο αντιστοιχεί στο βήμα h , το σημείο $n-1$ είναι το αρχικό σημείο ενώ το σημείο n είναι το σημείο που αντιστοιχεί σε βήμα $\frac{h}{2}$.

Η μέθοδος αυτή στην βιβλιογραφία ειδικά με την μορφή που παίρνει στην τελευταία σχέση ονομάζεται μέθοδος Leap-frog λόγω του ότι απαιτείται και το σημείο $n+1$ αλλά και το σημείο $n-1$.

2.3.2 Explicit Modified Midpoint(Gragg)

Μία ακόμα Explicit μέθοδος την οποία χρησιμοποιεί η Mathematica και είναι παράγωγη της προηγούμενης είναι η Explicit Modified Midpoint στην οποία το ενδιάμεσο σημείο με βάση το οποίο γίνεται ο υπολογισμός δεν βρίσκεται στο μισό του βήματος $\frac{h}{2}$ αλλά είναι μεταβλητό.

Προκειμένου λοιπόν να λύσουμε ένα πρόβλημα της μορφής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.20)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.21)$$

η μέθοδος Modified Midpoint εφαρμόζει την

$$y_{n+1} = y_{n-1} + 2hf(t_n, y_n), n = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Η διαφοροποίηση από την προηγούμενη μέθοδο έρχεται όταν σε κάποιο βήμα N όπου το N είναι περιττός ακέραιος υπολογίζεται ξανά από τον τύπο:

$$y_N := \frac{1}{2}(y_N + y_{N-1} + hf(t_N, y_N)). \quad (2.23)$$

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται και μέθοδος του Gragg.

2.3.3 Linearly Implicit Midpoint

Έχοντας μελετήσει διεξοδικά προβλήματα αρχικών συνθηκών της μορφής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.24)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.25)$$

μπορούμε να γενικεύσουμε την μελέτη μας μελετώντας πλέον συστήματα όπως το:

$$My'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.26)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.27)$$

όπου ο M είναι σταθερός πίνακας ο οποίος αναφέρεται συνήθως σαν πίνακας μάζας (mass matrix).

Μελετώντας το παραπάνω σύστημα παρατηρούμε την αύξηση των προσαυξήσεων καθώς περιγράφουμε τις διάφορες μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης. Ειδικότερα για την Linearly Implicit Midpoint μπορούμε να θεωρήσουμε μια σειρά από βήματα χρησιμοποιώντας $n = n_k$ και $h = \frac{H}{n}$ ως εξής:

$$(M - hJ)\delta y_0 = hf(t_0, y_0) \quad (2.28)$$

$$y_1 = y_0 + \delta y_0 \quad (2.29)$$

$$(M - hJ)\delta y_1 = hf(t_1, y_1) \quad (2.30)$$

$$y_2 = y_1 + \delta y_1 \quad (2.31)$$

$$\dots \quad (2.32)$$

$$(M - hJ)\delta y_{n-1} = hf(t_{n-1}, y_{n-1}) \quad (2.33)$$

ή διαφορετικά:

$$(M - hJ)\delta y_0 = hf(t_0, y_0) \quad (2.34)$$

$$(M - hJ)\delta y_1 = hf(t_1, y_0 + \delta y_0) \quad (2.35)$$

$$(M - hJ)\delta y_2 = hf(t_1, y_0 + (\delta y_0 + \delta y_1)) \quad (2.36)$$

$$\dots \quad (2.37)$$

$$(M - hJ)\delta y_{n-1} = hf(t_{n-1}, y_0 + (\delta y_0 + \delta y_1) + \dots + \delta y_{n-2}) \quad (2.38)$$

όπου J είναι η ιακωβιανή της f ώστε $J = \frac{\partial f}{\partial y}(t_0, y_0)$.

Η λύση των εξισώσεων με τις προσαυξήσεις επιτυγχάνεται με έναν απλό μετασχηματισμό $M=LU$, όπου οι πίνακες L, U είναι κάτω και άνω τριγωνικοί αντίστοιχα και επιλύοντας τα αντίστοιχα προκύπτοντα τριγωνικά γραμμικά συστήματα για την δεξιά πλευρά τους.

Το αποτέλεσμα που προκύπτει είναι:

$$y_n = y_{n-1} + \delta y_{n-1} \quad (2.39)$$

2.3.4 Linearly Implicit Modified Midpoint

Η μέθοδος αυτή δουλεύει ως εξής: Έστω ένα βήμα της μεθόδου Linearly Implicit Euler ακολουθούμενο από πολλαπλά ImplicitMidpoint βήματα με $n = 2n_k$ και $h = \frac{H}{n}$, ώστε χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό των Bader, Deuflhard παίρνει την μορφή:

$$(M - hJ)\delta y_0 = hf(t_0, y_0) \quad (2.40)$$

$$y_1 = y_0 + \delta y_0 \quad (2.41)$$

$$(M - hJ)(\delta y_1 - \delta y_0) = 2(hf(t_1, y_1) - \delta y_0) \quad (2.42)$$

$$y_2 = y_1 + \delta y_1 \quad (2.43)$$

$$(M - hJ)(\delta y_2 - \delta y_1) = 2(hf(t_2, y_2) - \delta y_1) \quad (2.44)$$

$$y_3 = y_2 + \delta y_2 \quad (2.45)$$

$$\dots \quad (2.46)$$

$$(M - hJ)(\delta y_{n-1} - \delta y_{n-2}) = 2(hf(t_{n-1}, y_{n-1}) - \delta y_{n-2}) \quad (2.47)$$

ή διαφορετικά:

$$(M - hJ)\delta y_0 = hf(t_0, y_0) \quad (2.48)$$

$$(M - hJ)(\delta y_1 - \delta y_0) = 2(hf(t_1, y_0 + \delta y_0) - \delta y_0) \quad (2.49)$$

$$(M - hJ)(\delta y_2 - \delta y_1) = 2(hf(t_2, y_0 + (\delta y_0 + \delta y_1)) - \delta y_1) \quad (2.50)$$

$$\dots \quad (2.51)$$

$$(M - hJ)(\delta y_{2n-1} - \delta y_{2n-2}) = 2(hf(t_2, y_0 + (\delta y_0 + \delta y_1 + \dots + \delta y_{n-2})) - \delta y_{n-2}) \quad (2.52)$$

Αν επιλυθεί για $2n_{k-1}$ βήματα τότε η μέθοδος αυτή έχει συμμετρική εξέλιξη του σφάλματος.

Ειδικά για το βήμα εξομάλυνσης το οποίο προτείνει ο Bader και κάνει την μέθοδο μας Linearly Implicit **Modified** Midpoint αυτό προκύπτει ως εξής:

$$Sy_h(n) = \frac{1}{2}(y_n - y_{n-1}) \quad (2.53)$$

ή καλύτερα σε μορφή με προσαύξηση:

$$S\Delta y_h(n) = Sy_h(n) - y_0 = \Sigma \Delta y_n + \frac{1}{2}(\Delta y_n - \Delta y_{n-1}) \quad (2.54)$$

Το βήμα εξομάλυνσης για την μέθοδο αυτή δεν είναι το ίδιο με αυτό στην μέθοδο Gragg. Καθώς δεν υπάρχει εδώ αδύναμος σταθερός όρος για να παραληφθεί ο στόχος είναι η βελτίωση της ασυμπτωτικής σταθερότητας.

2.4 Μέθοδοι πολλαπλής τάξης

2.4.1 Adams

Η μέθοδος Adams είναι μία Explicit μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιείται για την επίλυση του προβλήματος αρχικών συνθηκών:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.55)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.56)$$

Η $y(t)$ στους χρόνους t_i προσεγγίζεται ως εξής:

$$t_i = t_0 + ih \quad (2.57)$$

$$y_i = y(t_i) = y(t_0 + ih) \quad (2.58)$$

$$f_i = f(t_i, y_i) \quad (2.59)$$

όπου και πάλι h είναι το βήμα. Κάθε γραμμική μέθοδος πολλαπλής τάξεως λειτουργεί ως εξής:

$$\begin{aligned} y_{n+k} &+ a_{k-1}y_{n+k-1} + a_{k-2}y_{n+k-2} + \cdots + a_0y_n \\ &= h(b_k f(t_{n+k}, y_{n+k}) + b_{k-1}f(t_{n+k-1}, y_{n+k-1}) + \cdots + b_0f(t_n, y_n)) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Με k συμβολίζεται η τάξη της μεθόδου. Ειδικότερα η Mathematica χρησιμοποιεί την Adams 5^{ης} τάξης, συνεπώς για τον υπολογισμό της τιμής του k είναι 5. Αυτό σημαίνει ότι για τον υπολογισμό του y_{n+5} απαιτείται να υπολογίσουμε πιο πριν τις τιμές των $y_{n+4}, y_{n+3}, y_{n+2}, y_{n+1}, y_n$. Καθώς διαθέτουμε μία μόνο αρχική συνθήκη ένας τέτοιος υπολογισμός δεν είναι δυνατόν να γίνει άμεσα. Η λύση είναι να υπολογίσουμε κάθε μια ξεχωριστά από την προηγούμενη με την μέθοδο Explicit Euler και στην συνέχεια να βρούμε την y_{n+5} .

Όσον αφορά στις τιμές των συντελεστών a_i για αυτούς ισχύει ότι $a_{k-1} = -1, a_{k-2} = \cdots = a_0 = 0$ ενώ για τους b_i επιλέγονται καταλλήλως ώστε η μέθοδος να έχει τάξη $k = 4$ μέσω πολύπλοκων πράξεων. Τελικά η μέθοδος γράφεται ως εξής:

$$\begin{aligned} y_{n+5} &= y_{n+4} + h\left(\frac{1901}{720}f(t_{n+4}, y_{n+4}) - \frac{1387}{360}f(t_{n+3}, y_{n+3}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{109}{30}f(t_{n+2}, y_{n+2}) - \frac{637}{360}f(t_{n+1}, y_{n+1}) + \frac{251}{720}f(t_n, y_n)\right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

2.4.2 BDF (Backward Differentiation Formula)

Η μέθοδος BDF είναι μία Implicit μέθοδος. Και πάλι χρησιμοποιείται για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών τα οποία συντάσσονται ως εξής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.62)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.63)$$

Με τις σχέσεις οπίσθιων διαφορών (BDF) βρίσκουμε προσεγγιστικά την τιμή της παραγώγου με την βοήθεια όμως της $y(t)$ για χρόνο t_n αλλά και για προηγούμενους χρόνους. Οι σχέσεις σχηματίζονται από το k ^{ης} τάξης παρεμβολόμενο πολυώνυμο καθώς η $y(t)$ προσεγγίζεται αρχικά με την βοήθεια των $y(t_n), y(t_{n-1}), \cdots, y(t_{n-k})$ για χρόνο t_n .

Για να κατανοήσουμε τα παραπάνω παίρνουμε μια τέτοια σχέση 1^{ης} τάξης. Έτσι κάνοντας γραμμική παρεμβολή η $y(t)$ γράφεται:

$$y(t) \approx y(t_n) + (t - t_n) \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad (2.64)$$

οπότε η παράγωγος γράφεται σαν:

$$y'_n \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{t_n - t_{n-1}} \quad (2.65)$$

Αν μάλιστα εισάγουμε την προηγούμενη τιμή της παραγώγου στην 2.62 τότε προκύπτει η μέθοδος Implicit Euler.

Επεκτείνοντας την μελέτη μας σε μεγαλύτερες τάξεις τότε οι σχέσεις οπίσθιων διαφορών (BDF) δίνονται από τον τύπο:

$$y(t) \approx y_n + \frac{1}{h}(t - t_n)\nabla y_n + \frac{1}{2h^2}(t - t_n)(t - t_{n-1})\nabla^2 y_n + \dots + \frac{1}{h^k k!}(t - t_n) \dots (t - t_{n-k+1})\nabla^k \quad (2.66)$$

όπου με ∇ δίνεται ο τελεστής $\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$ και $\nabla^p y_n = \nabla^{p-1} y_n - \nabla^{p-1} y_{n-1}$. Τελικά αν αντικαταστήσουμε στην σχέση 2.62 προκύπτει ότι οι σχέσεις B.D.F. γράφονται ως:

$$hy'_n = \sum_{j=0}^k \alpha_{kj} y_{n-j} \quad (2.67)$$

με τους συντελεστές α_{kj} εξαρτώνται από την τάξη k και φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

$$\begin{bmatrix} k & \alpha_{k0} & \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \alpha_{k3} & \alpha_{k4} & \alpha_{k5} & \alpha_{k6} \\ 1 & 1 & -1 & & & & & \\ 2 & 3/2 & -2 & 1/2 & & & & \\ 3 & 11/6 & -3 & 3/2 & -1/3 & & & \\ 4 & 25/12 & -4 & 3 & -4/3 & 1/4 & & \\ 5 & 137/60 & -5 & 5 & -10/3 & 5/4 & -1/5 & \\ 6 & 49/20 & -6 & 15/2 & -20/3 & 15/4 & -6/5 & 1/6 \end{bmatrix}$$

2.4.3 Explicit-Runge Kutta

Οι μέθοδοι Explicit-Runge Kutta είναι μέθοδοι πολλαπλής τάξης που χρησιμοποιούνται για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών τα οποία συντάσσονται ως εξής:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad (2.68)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (2.69)$$

Γενικά με την μέθοδο αυτήν η λύση της διαφορικής προκύπτει ως εξής:

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^k b_i k_i \quad (2.70)$$

όπου για τα k_i ισχύει:

$$k_i = f \left(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^k a_{ij} k_j \right). \quad (2.71)$$

ενώ ορίζεται ο μνημονικός πίνακας A (πίνακας του Butcher) ως εξής:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_2 & a_{2,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,k-1} & 0 \\ \text{με:} & b_1 & b_2 & \dots & b_{k-1} & b_k \end{bmatrix}$$

$$c_i = \sum_{j=1}^k a_{ij} \quad (2.72)$$

$$a_{i,j} = 0, j \geq i \quad (2.73)$$

$$j = 1, 2, \dots, k \quad (2.74)$$

Ο πίνακας A όπως παρατηρούμε είναι άνω τριγωνικός.

Περνώντας στην Explicit Runge Kutta 4^{ης} τάξης την οποία χρησιμοποιεί η Mathematica ο πίνακας A γίνεται :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$$

και κατά συνέπεια προκύπτουν οι εξής σχέσεις :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}h (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (2.75)$$

$$t_{n+1} = t_n + h \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_n, y_n) \\ k_2 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 &= f(t_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 &= f(t_n + h, y_n + hk_3) \end{aligned} \quad (2.77)$$

2.4.4 Implicit-Runge Kutta

Η μέθοδος αυτή μοιάζει με την Explicit Runge Kutta αλλά διαφοροποιείται όσον αφορά στον πίνακα του Butcher. Αυτός πλέον δεν είναι κατ' ανάγκην άνω τριγωνικός αλλά τυχαίος. Δίνεται λοιπόν ως εξής :

$$\begin{bmatrix} c_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,s} \\ c_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_s & a_{s,1} & a_{s,2} & \dots & a_{s,s} \\ & b_1 & b_2 & \dots & b_s \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε τον πολύ μεγάλο αριθμό συντελεστών οι οποίοι και απαιτούνται για την επίλυση του προβλήματος.

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s b_i k_i \quad (2.78)$$

$$k_i = f(t_n + c_i h, y_n + h \sum_{j=1}^s a_{i,j} k_j) \quad (2.79)$$

Η μέθοδος είναι πολύ σημαντική λόγω της σταθερότητας της. Το απλούστερο παράδειγμα της μεθόδου αυτής είναι η μέθοδος Implicit Euler. Είχαμε αναφέρει ότι η Mathematica δεν υποστηρίζει την μέθοδο μόνη της αλλά την εμπεριέχει στην μέθοδο Implicit-Runge Kutta. Σε αυτήν την περίπτωση ο πίνακας του Butcher είναι ο εξής:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array} \right]$$

Έτσι προκύπτει ο εξής τύπος:

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + h, y_{n+1}) \quad (2.80)$$

Η Mathematica χρησιμοποιεί την μέθοδο Implicit Runge Kutta Lobatto IIIA 4^{ης} τάξης της οποίας ο πίνακας του Butcher είναι ο εξής:

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 5/24 & 1/3 & -1/24 \\ 1 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array} \right]$$

Κεφάλαιο 3

Αποτελέσματα αριθμητικής ολοκλήρωσης για τις διάφορες προσεγγίσεις του προβλήματος των τριών σωμάτων.

Σε αυτό το τμήμα της εργασίας έχοντας παραθέσει αναλυτικά τις διάφορες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης τις οποίες χρησιμοποιούμε για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με την Mathematica τις επιλύουμε για τις διάφορες προσεγγίσεις του προβλήματος των 3 σωμάτων προσπαθώντας κάθε φορά να προσδιορίσουμε την ακρίβεια κάθε μεθόδου, καθώς επίσης και τον υπολογιστικό χρόνο ο οποίος απαιτείται για να επιλυθούν οι διαφορικές εξισώσεις. Όσον αφορά στην ακρίβεια αυτή ελέγχεται καθώς μελετούμε την εξέλιξη κατάλληλων ποσοτήτων οι οποίες γνωρίζουμε ότι διατηρούνται σταθερές ανάλογα με την προσέγγιση του προβλήματος των τριών σωμάτων την οποία μελετάμε. Τέτοιες είναι το ολοκλήρωμα της ενέργειας, ολοκλήρωμα του Jacobi καθώς επίσης και το ολοκλήρωμα της στροφορμής του συστήματος. Συνεπώς το πόσο καλά διατηρούνται αυτές οι ποσότητες μας δείχνουν την ακρίβεια της μεθόδου την οποία χρησιμοποιούμε.

Εξάλλου για τον προσδιορισμό του υπολογιστικού χρόνου χρησιμοποιούμε την εσωτερική εντολή **Timing** της Mathematica η οποία μας δίνει με ακρίβεια τον χρόνο ο οποίος απαιτείται για να γίνει κάποιος υπολογισμός. Σαν αριθμός ο χρόνος αυτός δεν έχει καμία σημασία διότι εξαρτάται από τον υπολογιστή στον οποίο γίνονται οι υπολογισμοί, από το λειτουργικό σύστημα αλλά και από την ίδια την έκδοση της Mathematica η οποία χρησιμοποιείται. Αλλά εφόσον όλα τα προηγούμενα παραμείνουν για όλες τις μετρήσεις μας ίδια τότε έχει νόημα η σύγκριση μεταξύ των διάφορων μεθόδων.

Κάτι το οποίο θα πρέπει να αναφέρουμε είναι η επιλογή της ακρίβειας με την οποία θέλουμε να εργάζεται η Mathematica. Αυτό στην περίπτωση της επίλυσης διαφορικών εξισώσεων μπορεί να ελεγχθεί με τις επιλογές **Precision** και **Accuracy Goal**. Με την επιλογή **Precision Goal** η Mathematica μας δίνει την δυνατότητα να ελέγχουμε τον αριθμό των δεκαδικών τα οποία θεωρούμε ότι είναι σωστά ώστε να χρησιμοποιηθούν σε επόμενες πράξεις ενώ με την **Accuracy Goal** μπορούμε να καθορίσουμε με πόσα δεκαδικά ακρίβεια να εκτελούνται οι υπολογισμοί. Η default τιμή που χρησιμοποιεί η Mathematica είναι 8 δεκαδικά.

Συνεπώς ανάλογα με την τιμή την οποία θα θέσουμε στις δύο αυτές παραμέτρους αυξάνουμε ή μειώνουμε την ακρίβεια με αντίστοιχο αποτέλεσμα και στον υπολογιστικό χρόνο. Θεωρητικά η Mathematica μας δίνει μέγιστη ακρίβεια 16 δεκαδικών ψηφίων. Όσον αφορά τώρα στην επιλογή των τιμών των παραμέτρων **Precision** και **Accuracy Goal** αυτή είτε είναι η μέγιστη δυνατή για την οποία παίρνουμε αποτέλεσμα είτε είναι

τέτοια ώστε ο υπολογιστικός χρόνος να είναι παρόμοιος με αυτόν των άλλων μεθόδων. Τέλος ο χρόνος ολοκλήρωσης t παίρνει την τιμή 100 σε όλες τις υποπεριπτώσεις του προβλήματος των 3 σωμάτων τις οποίες μελετήσαμε. Στο πρώτο κεφάλαιο της εργασίας αναφερθήκαμε εκτενώς στο πρόβλημα των 3 σωμάτων στο επίπεδο χωρίζοντας την μελέτη μας στο γενικό πρόβλημα, στο κυκλικό πρόβλημα και τέλος στο ελλειπτικό πρόβλημα χρησιμοποιώντας το αδρανειακό αλλά και το περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Σε αυτό το κεφάλαιο πλέον δεν θα ασχοληθούμε με την ακρίβεια που έχουμε επιτύχει σε όλες αυτές τις προσεγγίσεις παρά μόνον με αυτές με τις οποίες θα ασχοληθούμε στην συνέχεια της εργασίας μας. Έτσι θα αναφερθούμε για την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης για τις ακόλουθες προσεγγίσεις: για το γενικό πρόβλημα στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων καθώς επίσης και για το κυκλικό πρόβλημα στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων. Για το ελλειπτικό πρόβλημα δεν υπάρχει κάποιο ολοκλήρωμα της κίνησης και για αυτόν τον λόγο δεν αναφερόμαστε στην ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης σε αυτό.

Ακόμη θα παραθέσουμε τον τρόπο με τον οποίο συντάσσεται η εντολή **NDSolve** με την οποία επιλύουμε διαφορικές εξισώσεις. Η σύνταξη είναι ως εξής:

```
NDSolve[{equations+initial conditions},{solutions},{variable,minimun value,
maximum value},Method->"Method we want to use",AccuracyGoal->number of digits,
PrecisionGoal->number of digits]
```

Έτσι εάν θελήσουμε να επιλύσουμε την εξίσωση $\dot{x}(t) + 2x(t) = 0$ με $x(0) = 1$ με την μέθοδο Explicit Euler για χρόνο $t = 20$ και με ακρίβεια 10 δεκαδικών ψηφίων γράφουμε ως εξής:

```
NDSolve[{x'[t]+2x[t]==0,x[0]==1},{x[t]},{t,0,20},
Method->"ExplicitEuler",AccuracyGoal->10,PrecisionGoal->10]
```

Τέλος θα αναφέρουμε την μέθοδο ολοκλήρωσης StiffnessSwitching. Αυτή η μέθοδος δεν είναι μία ξεχωριστή μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης αλλά είναι ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να ελιχθούμε εάν δεν γνωρίζουμε το εάν το σύστημα διαφορικών εξισώσεων προς επίλυση είναι stiff ή όχι. Έτσι καλώντας την μέθοδο αυτή η Mathematica ξεκινά να επιλύει με μία Explicit μέθοδο η οποία είναι πολύ γρήγορη και εάν σε κάποιο σημείο οι διαφορικές εξισώσεις είναι stiff και απαιτείται απείρως μικρό βήμα ολοκλήρωσης για να συνεχίσει η διαδικασία τότε αυτόματα η Mathematica επιλέγει μία Implicit μέθοδο. Οι μέθοδοι τις οποίες χρησιμοποιούνται σαν default είναι οι ExplicitModifiedMidpoint και LinearlyImplicitEuler.

3.1 Γενικό πρόβλημα τριών σωμάτων.

Η πρώτη προσέγγιση του προβλήματος την οποία θα μελετήσουμε είναι το γενικό πρόβλημα των τριών σωμάτων. Έχουμε αναλύσει σε προηγούμενη παράγραφο λεπτομερώς το συγκεκριμένο πρόβλημα οπότε στα επόμενα θα ασχοληθούμε μόνο με τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν την κίνηση των σωμάτων καθώς επίσης και θα παραθέσουμε τα διάφορα ολοκληρώματα της κίνησης, ποσότητες δηλαδή οι οποίες θεωρητικά πρέπει να παραμένουν σταθερές και από την μεταβολή τους στον χρόνο ελέγχουμε την ακρίβεια των λύσεών μας. Τέτοια ολοκληρώματα είναι το ολοκλήρωμα της ενέργειας και το ολοκλήρωμα της στροφορμής. Αυτά δίνονται από τους επόμενους τύπους:

Το ολοκλήρωμα της ενέργειας δίνεται από τον τύπο:

$$E = \frac{1}{2}m_1(\dot{\xi}_1^2 + \dot{\eta}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2) + \frac{1}{2}m_3(\dot{\xi}_3^2 + \dot{\eta}_3^2) - \frac{m_1m_2}{\rho_{12}} - \frac{m_1m_3}{\rho_{13}} - \frac{m_2m_3}{\rho_{23}} \quad (3.1)$$

Το ολοκλήρωμα της στροφορμής είναι:

$$L_1 = m_1(\xi_1\dot{\eta}_1 - \dot{\xi}_1\eta_1) + m_2(\xi_2\dot{\eta}_2 - \dot{\xi}_2\eta_2) + m_3(\xi_3\dot{\eta}_3 - \dot{\xi}_3\eta_3) \quad (3.2)$$

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να υπενθυμίσουμε ότι το σύστημα των εξισώσεων το οποίο περιγράφει το γενικό πρόβλημα των 3 σωμάτων στο επίπεδο είναι οι εξισώσεις 1.5-1.8, οπότε η αριθμητική επίλυση του προβλήματος στηρίζεται στην επίλυση αυτού του συστήματος εξισώσεων. Όσον αφορά τώρα στις αρχικές συνθήκες τις οποίες ορίζουμε για το πρόβλημα, αυτές είναι οι εξής:

$$m_3 = 0.001, m_2 = 0.002, m_1 = 1 - (m_3 + m_2)$$

$$\xi_{30} = 1, \xi_{20} = 2, e = 0,$$

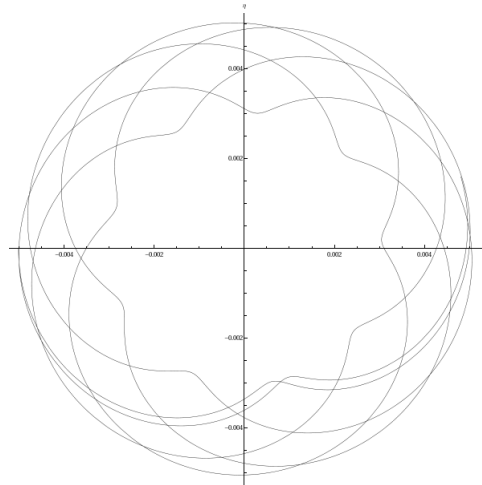
$$\eta_{30} = 0, \eta_{20} = 0,$$

$$\dot{\xi}_{30} = 0, \dot{\xi}_{20} = 0,$$

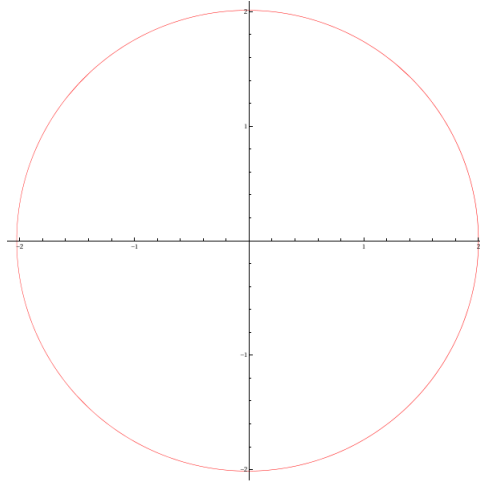
$$\dot{\eta}_{20} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \dot{\eta}_{30} = 1,$$

$$t_{min} = 0, t_{max} = 100$$

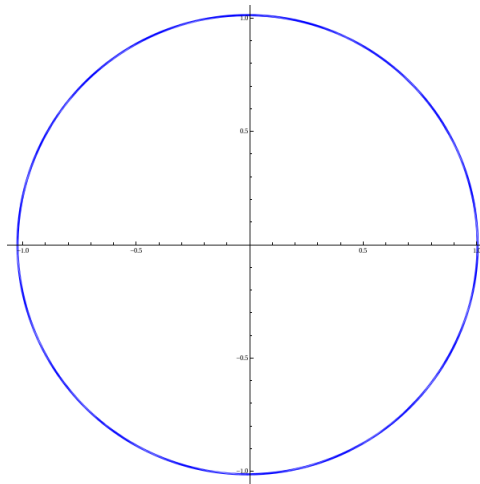
Η τροχιά των 3 σωμάτων για αυτές τις αρχικές συνθήκες στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων είναι οι επόμενες:



Σχήμα 3.1: Η κίνηση του σώματος m_1 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο γενικό πρόβλημα



Σχήμα 3.2: Η κίνηση του σώματος m_2 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο γενικό πρόβλημα



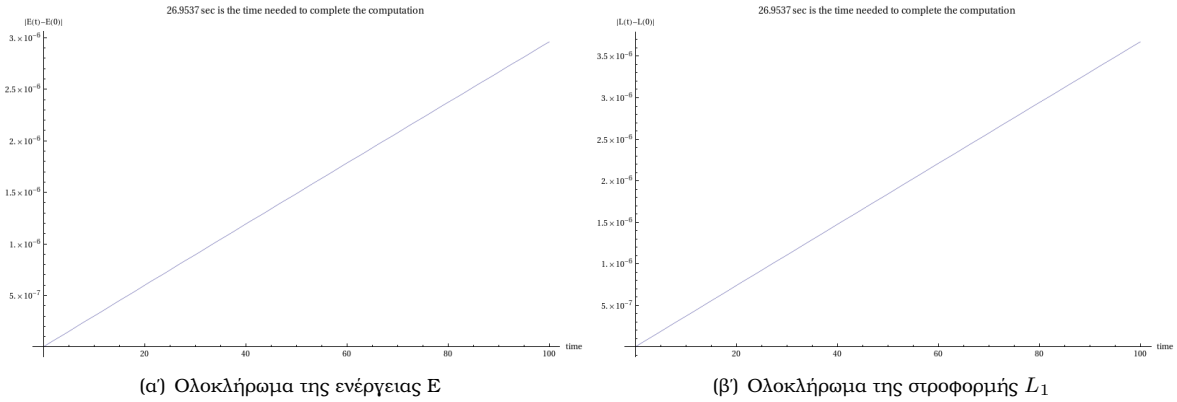
Σχήμα 3.3: Η κίνηση του σώματος m_3 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο γενικό πρόβλημα

3.1.1 Explicit Euler

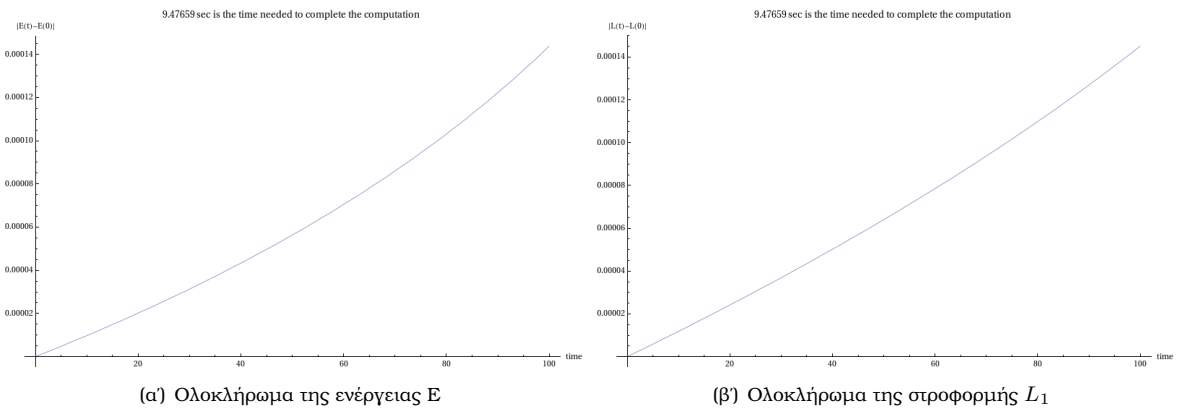
Ξεκινώντας την μελέτη της ακρίβειας που υπάρχει στην αριθμητική ολοκλήρωση που παρέχει κάθε μία από τις μεθόδους ολοκλήρωσης τις οποίες έχουμε περιγράψει πιο πάνω η πρώτη την οποία και χρησιμοποιήσαμε είναι η Linearly Implicit Euler. Έχοντας θέσει στα Precision και Accuracy Goal την τιμή 9 τα αποτελέσματα τα οποία παίρνουμε είναι τα εξής: Όσον αφορά στην ενέργεια η μεταβολή της είναι της τάξεως του 10^{-6} ενώ η μεταβολή της στροφορμής είναι της τάξης του 10^{-6} , ενώ ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος είναι 26,95 δευτερόλεπτα.

3.1.2 Linearly Implicit Euler

Η επόμενη μέθοδος την οποία χρησιμοποιήσαμε είναι η Linearly Implicit Euler. Οι υπολογισμοί μας έγιναν χρησιμοποιώντας σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 6 και ο υπολογιστικός χρόνος ο οποίος απαιτήθηκε ήταν 9,47 δευτερόλεπτα. Έτσι καταφέραμε να έχουμε διατήρηση της ενέργειας με ακρίβεια 10^{-4} και της στροφορμής με ακρίβεια 10^{-4} .



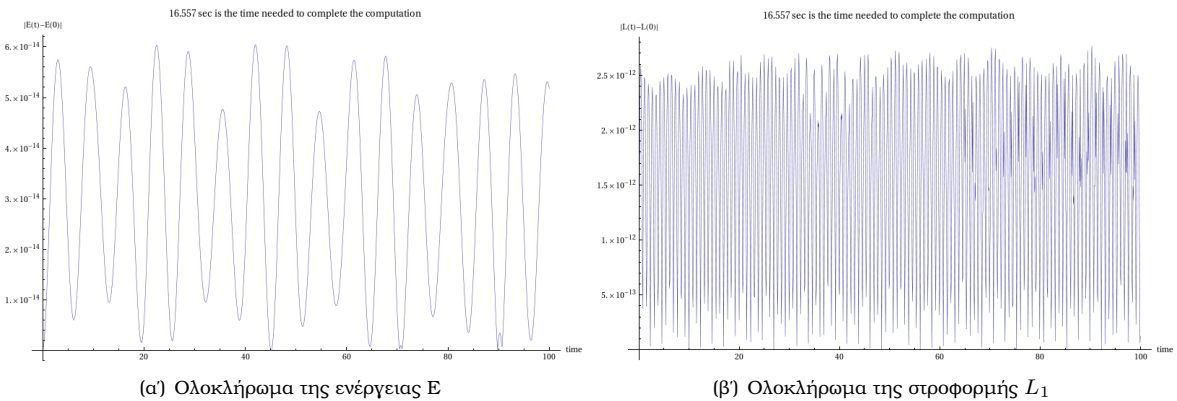
Σχήμα 3.4: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Euler



Σχήμα 3.5: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Linearly Implicit Euler

3.1.3 Explicit Midpoint

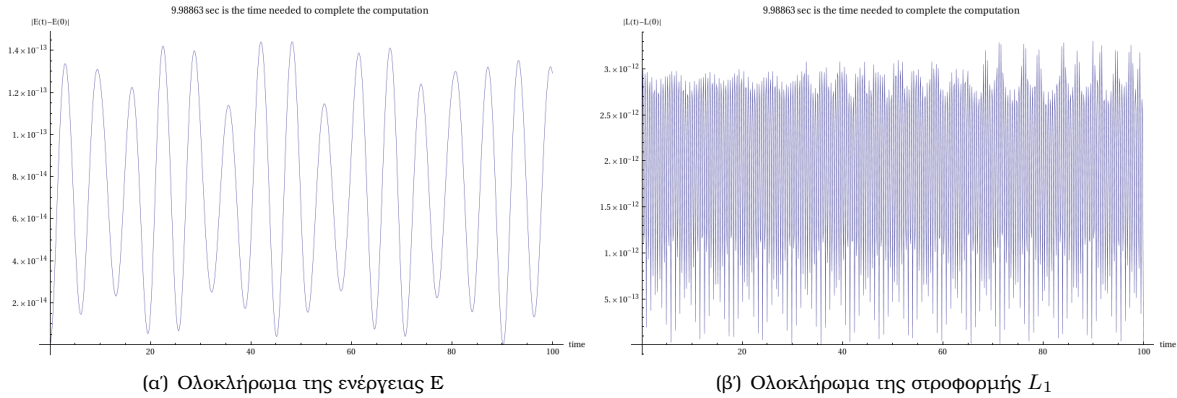
Μία ακόμα μέθοδος Explicit την οποία χρησιμοποιούμε είναι η Explicit Midpoint. Μέ αυτήν την μέθοδο η ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος της ενέργειας είναι της τάξεως του 10^{-14} και η ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος της στροφορμής είναι 10^{-12} . Τα αποτελέσματα αυτά προκύπτουν για Precision και Accuracy Goal 12 μέσα σε χρόνο 16,55 δευτερόλεπτα.



Σχήμα 3.6: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Midpoint

3.1.4 Explicit Modified Midpoint

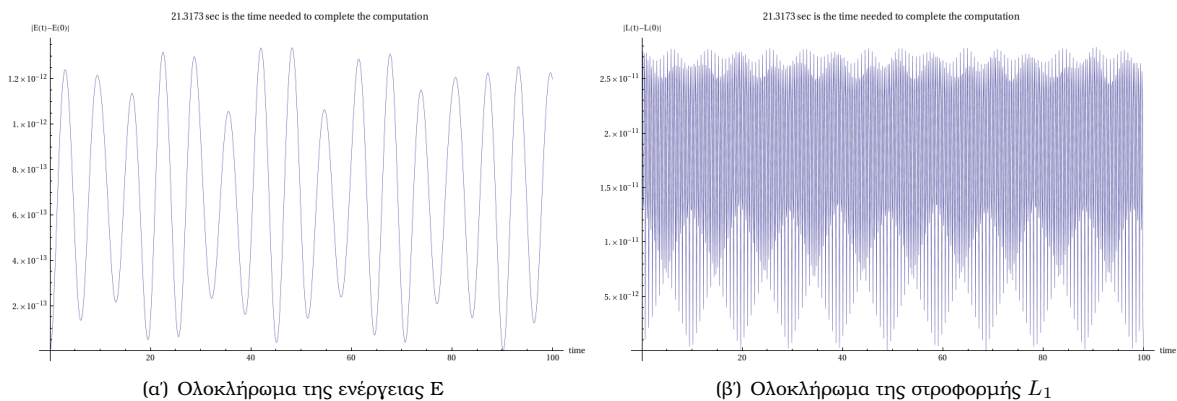
Με την χρήση της μεθόδου Explicit Modified Midpoint συνεχίζουμε την παράθεση των αποτελεσμάτων μας. Σε αυτήν την περίπτωση χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 11. Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων απαιτεί 9,98 δευτερόλεπτα και κατ' αυτόν τον τρόπο επιτυγχάνεται διατήρηση της ενέργειας με ακρίβεια 10^{-13} , ενώ η στροφορμή διατηρείται με ακρίβεια 10^{-12} .



Σχήμα 3.7: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Modified Midpoint

3.1.5 Linearly Implicit Midpoint

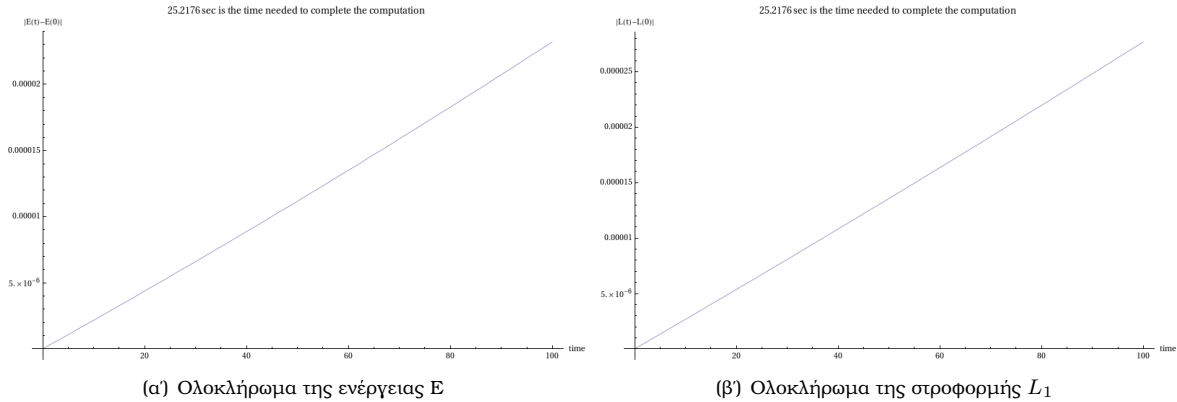
Για την μέθοδο Linearly Implicit Midpoint χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 10 επιτυγχάνοντας έτσι διατήρηση της ενέργειας με ακρίβεια 10^{-12} και της στροφορμής 10^{-11} . Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων απαιτεί χρόνο 21,31 δευτερόλεπτα.



Σχήμα 3.8: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Linearly Implicit Midpoint

3.1.6 Linearly Implicit Modified Midpoint

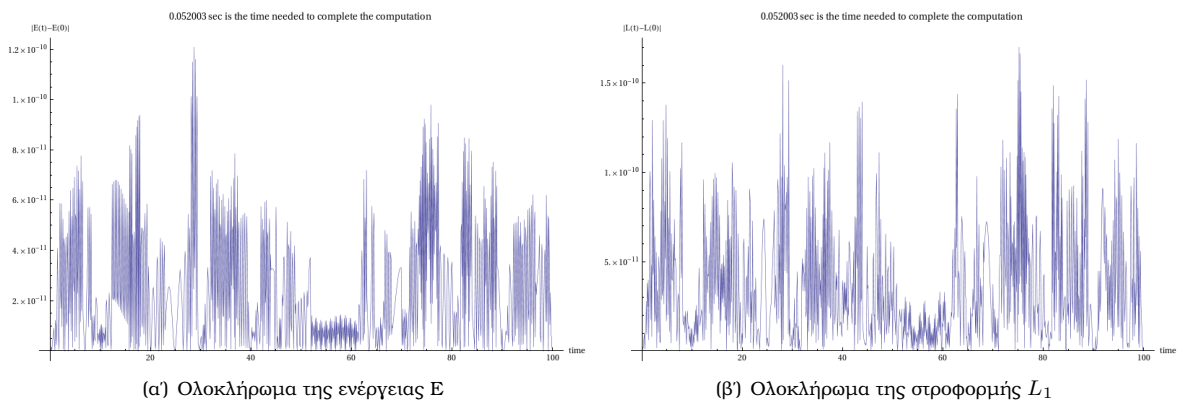
Η επόμενη μέθοδος την οποία χρησιμοποιήσαμε είναι η Linearly Implicit Modified Midpoint. Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων έγινε σε χρόνο 25,21 δευτερόλεπτα έχοντας θέσει στα Precision και Accuracy Goal την τιμή 10. Η ενέργεια προκύπτει ότι διατηρείται με ακρίβεια 10^{-5} . Η στροφορμή διατηρείται με ακρίβεια της τάξεως του 10^{-5} .



Σχήμα 3.9: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Linearly Implicit Modified Midpoint

3.1.7 Adams

Περνάμε πλέον στις μεθόδους πολλαπλών βημάτων (Multi-step) ξεκινώντας με την μέθοδο Adams. Η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων γίνεται σε χρόνο 0,05 δευτερόλεπτα θέτοντας σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 13. Όσον αφορά τώρα στα ολοκληρώματα της κίνησης αυτά διατηρούνται ως εξής. Η ενέργεια με ακρίβεια 10^{-10} και η στροφορμή με ακρίβεια 10^{-10} .



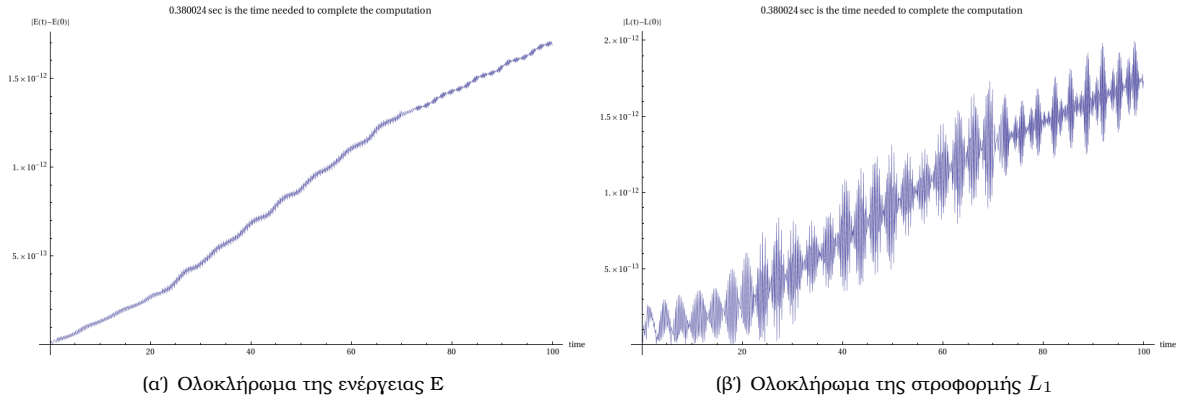
Σχήμα 3.10: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Adams

3.1.8 BDF

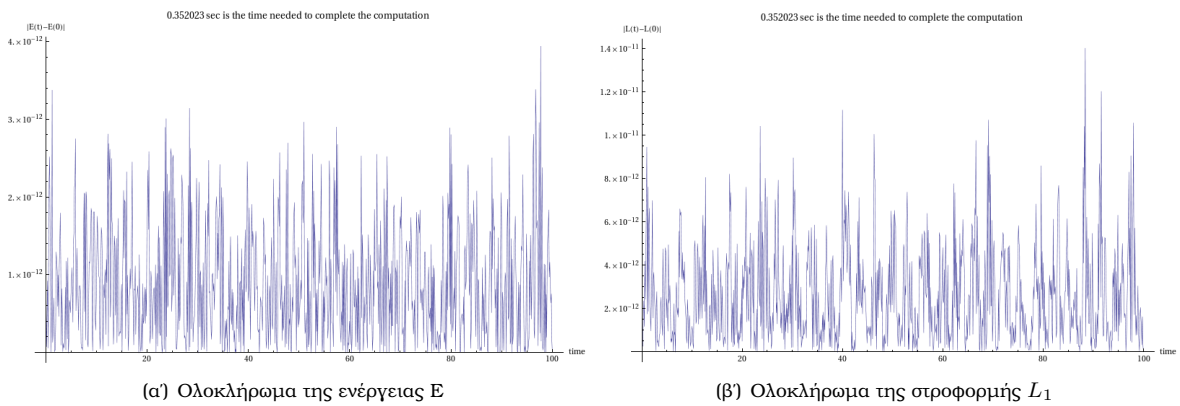
Η επόμενη μέθοδος Multi-step την οποία χρησιμοποιούμε στην επίλυση του επίπεδου γενικού προβλήματος είναι η BDF. Χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 13, οπότε η ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος του ενέργειας που επιτυγχάνεται είναι της τάξεως του 10^{-12} . Την ίδια στιγμή η στροφορμή με ακρίβεια της τάξης του 10^{-12} , ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος είναι 0,38 δευτερόλεπτα.

3.1.9 Explicit Runge-Kutta

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Explicit Runge-Kutta καθορίζοντας τα Precision και Accuracy Goal να έχουν την τιμή 16 επιτυγχάνεται ακρίβεια στην διατήρηση της ενέργειας της τάξεως του 10^{-12} . Όσον αφορά τώρα στο ολοκλήρωμα της στροφορμής αυτό διατηρείται με ακρίβεια 10^{-11} . Ο υπολογιστικός χρόνος ο οποίος απαιτείται είναι 0,35 δευτερόλεπτα.



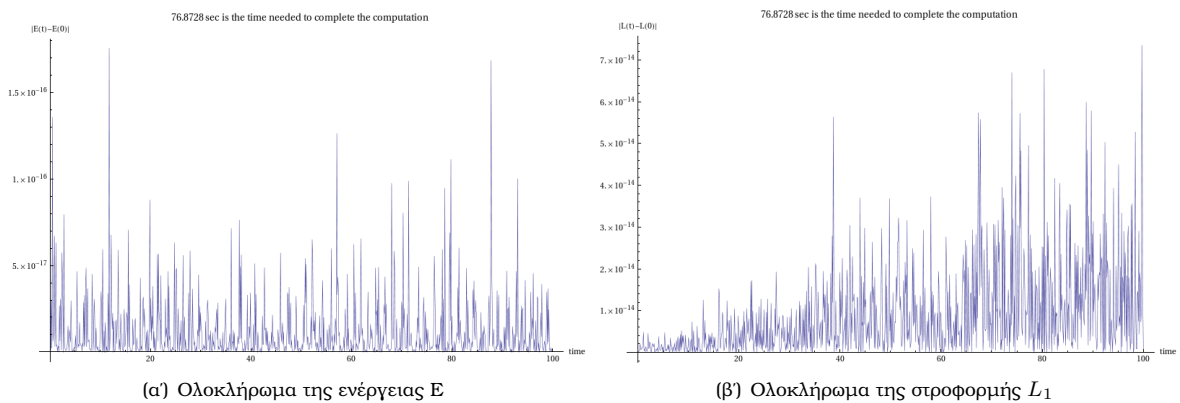
Σχήμα 3.11: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο BDF



Σχήμα 3.12: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Explicit Runge-Kutta

3.1.10 Implicit Runge-Kutta

Τέλος χρησιμοποιείται και η αντίστοιχη Implicit μέθοδος η οποία δίνει με τη σειρά της και για Precision και Accuracy Goal 14 τα εξής αποτελέσματα. Η διατήρηση της ενέργειας γίνεται με ακρίβεια 10^{-16} και η διατήρηση της στροφορμής με ακρίβεια 10^{-14} . Όσον αφορά τώρα στον χρόνο ο οποίος απαιτείται για την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων είναι 76,87 δευτερόλεπτα.



Σχήμα 3.13: Εξέλιξη των ολοκληρωμάτων της κίνησης με την μέθοδο Implicit Runge-Kutta

Μέθοδος	Precision και Accuracy Goal	Ακρίβεια E	Ακρίβεια L	χρόνος(sec)
Explicit Euler	9	10^{-6}	10^{-6}	26,95
Linearly Implicit Euler	6	10^{-4}	10^{-4}	9,47
Explicit Midpoint	12	10^{-14}	10^{-12}	16,55
Explicit Modified Midpoint	11	10^{-13}	10^{-12}	9,98
Linearly Implicit Midpoint	10	10^{-12}	10^{-11}	21,31
Linearly Implicit Modified Midpoint	10	10^{-5}	10^{-5}	25,21
Adams	13	10^{-10}	10^{-10}	0,05
BDF	13	10^{-12}	10^{-12}	0,38
Explicit Runge-Kutta	16	10^{-12}	10^{-11}	0,35
Implicit Runge-Kutta	14	10^{-16}	10^{-14}	76,87

Πίνακας 3.1: Σύγκριση των διάφορων μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης για το γενικό πρόβλημα

3.2 Περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα τριών σωμάτων

Συνεχίζοντας με την μελέτη της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης του προβλήματος των 3 σωμάτων περνούμε στο επίπεδο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα. Έχοντας κάνει ήδη εκτενή αναφορά στον τρόπο προσέγγισης του προβλήματος αυτού στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων, κρίνουμε σκόπιμο σε αυτήν την παράγραφο να υπενθυμίσουμε μόνο τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το συγκεκριμένο πρόβλημα. Αυτές είναι οι εξισώσεις 1.25, 1.26.

Προκειμένου τώρα να ελέγξουμε την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης στην περίπτωση του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος χρησιμοποιούμε το ολοκλήρωμα του Jacobi, ποσότητα η οποία διατηρείται σταθερή στο πρόβλημά μας. Το ολοκλήρωμα του Jacobi δίνεται από τον επόμενο τύπο:

$$C_j = \dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2 - x_3^2 - y_3^2 - \frac{2(1-\mu)}{r_{13}} - \frac{2\mu}{r_{23}} \quad (3.3)$$

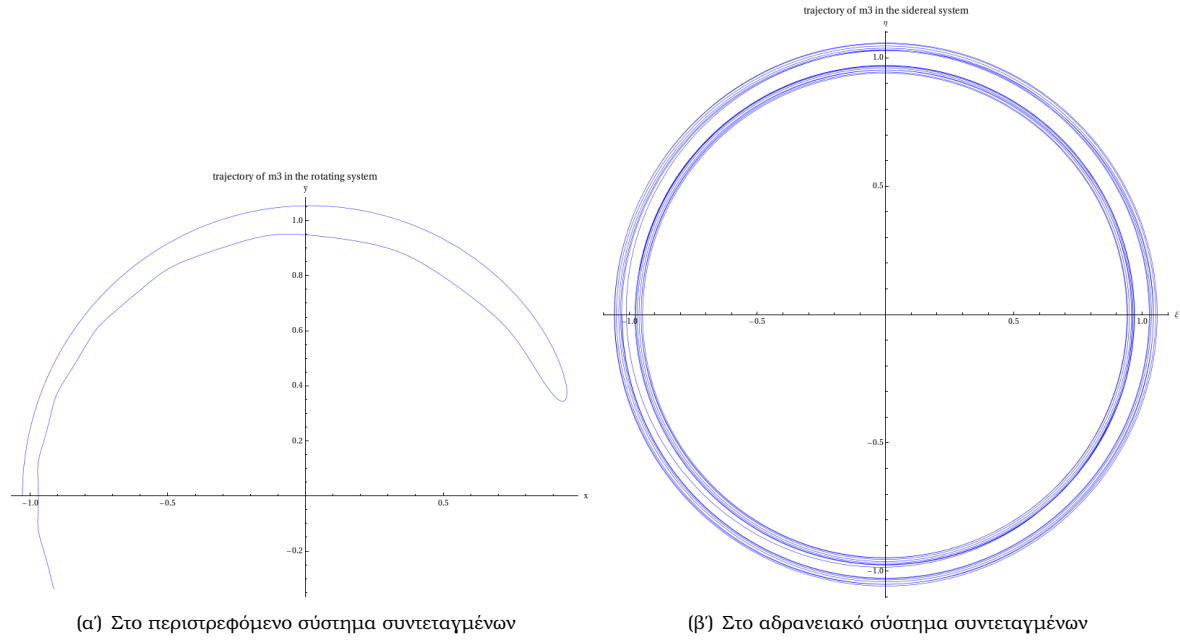
Οι αρχικές συνθήκες τις οποίες χρησιμοποιήσαμε προκειμένου να ελέγξουμε την ακρίβεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι οι επόμενες:

$$\begin{aligned} x_{30} &= -1.02745, y_{30} = 0, \\ \dot{x}_{30} &= 0, \dot{y}_{30} = 0.04032 \\ t_{min} &= 0, t_{max} = 100 \\ \mu &= 0.000953875, x_{10} = -\mu, x_{20} = 1 - \mu \end{aligned}$$

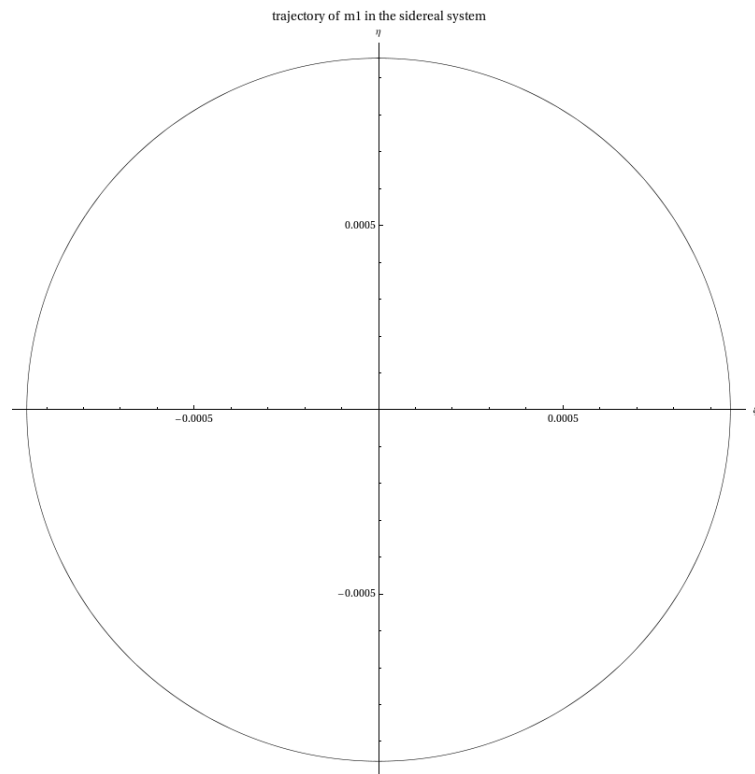
Οι τροχιές που εκτελούν τα σώματα για αυτές τις αρχικές συνθήκες είναι οι επόμενες:

3.2.1 Explicit Euler

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτήν για την επίλυση των διαφορικών μας εξισώσεων χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 9. Στο παρακάτω σχήμα παρατηρούμε την διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi κατά την χρονική εξέλιξη του

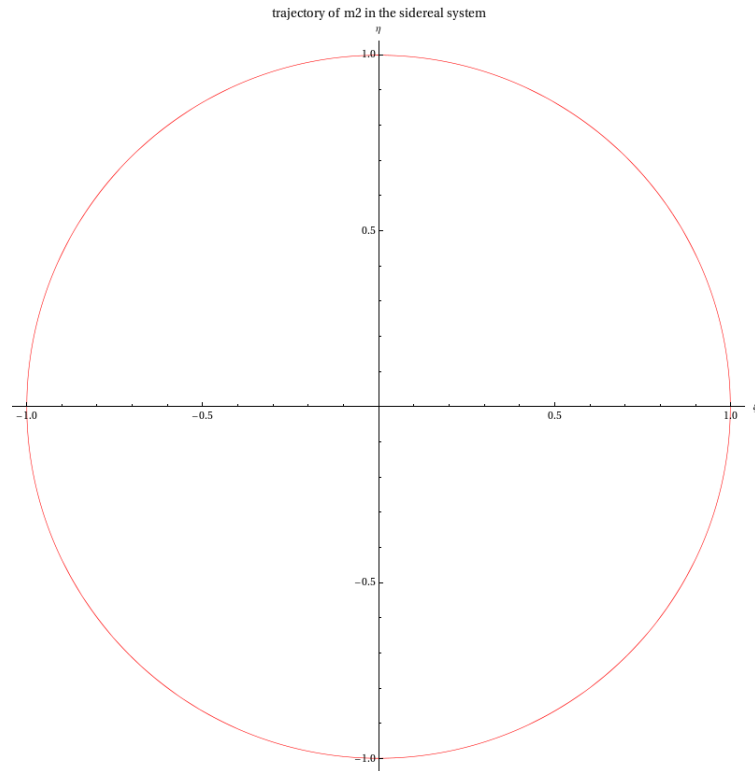


Σχήμα 3.14: Η κίνηση του σώματος m_3 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο κυκλικό πρόβλημα

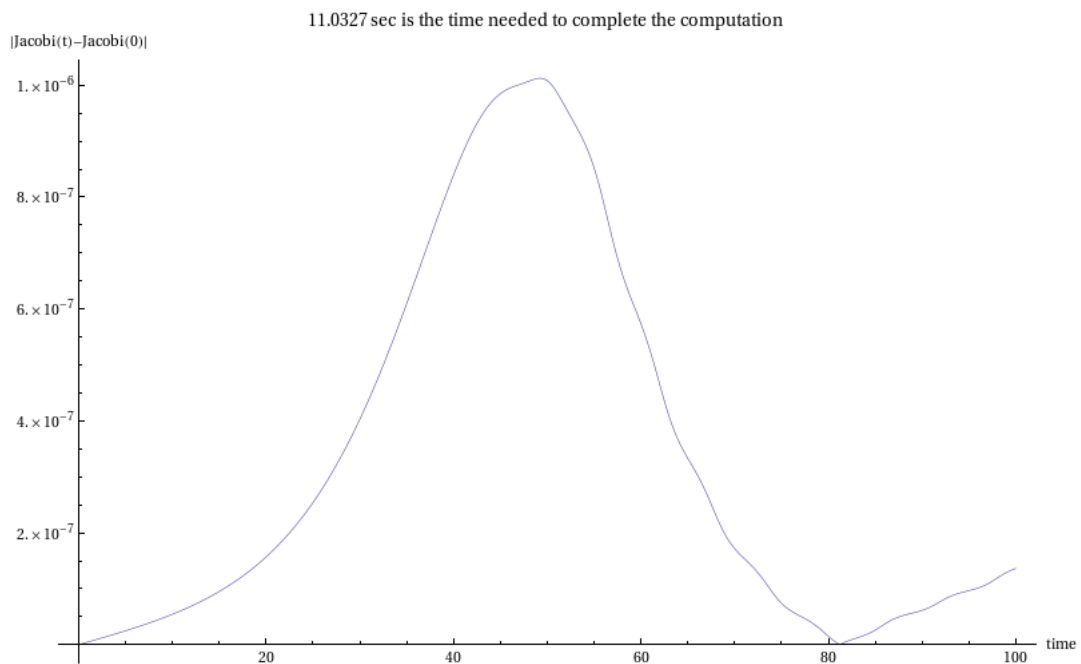


Σχήμα 3.15: Η κίνηση του σώματος m_1 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο κυκλικό πρόβλημα

συστήματος. Παρατηρούμε ότι ο χρόνος που απαιτείται για τον υπολογισμό είναι 11,03 δευτερόλεπτα και η ακρίβεια διατήρησης του ολοκληρώματος είναι 10^{-6} .



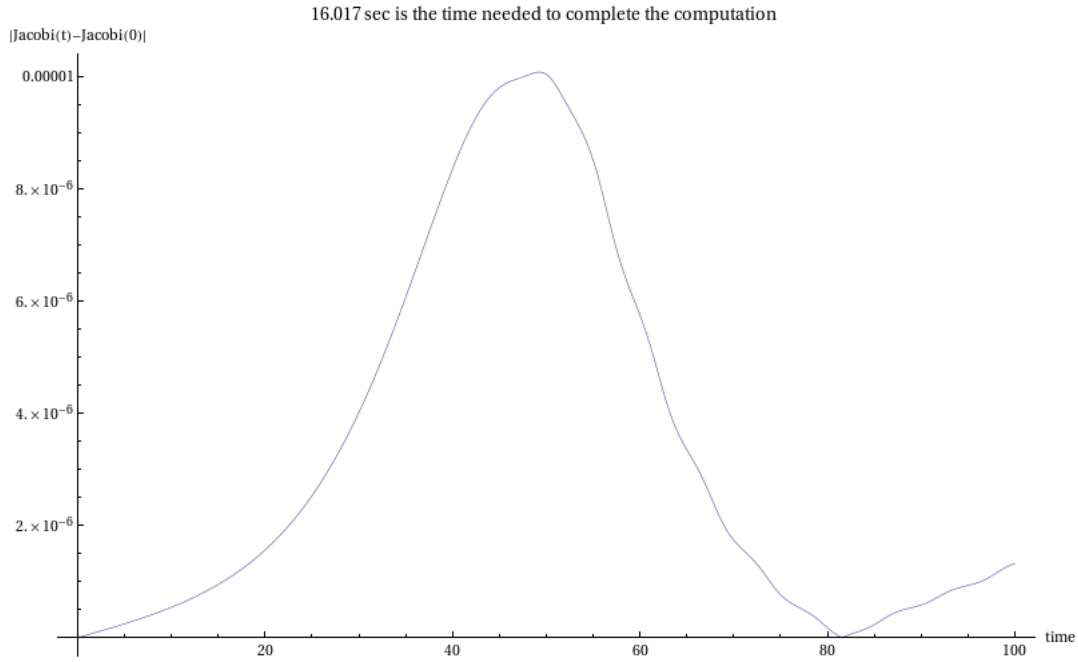
Σχήμα 3.16: Η κίνηση του σώματος m_2 για τις αρχικές συνθήκες με τις οποίες έγινε ο έλεγχος της ακρίβειας της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο κυκλικό πρόβλημα



Σχήμα 3.17: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Euler.

3.2.2 Linearly Implicit Euler

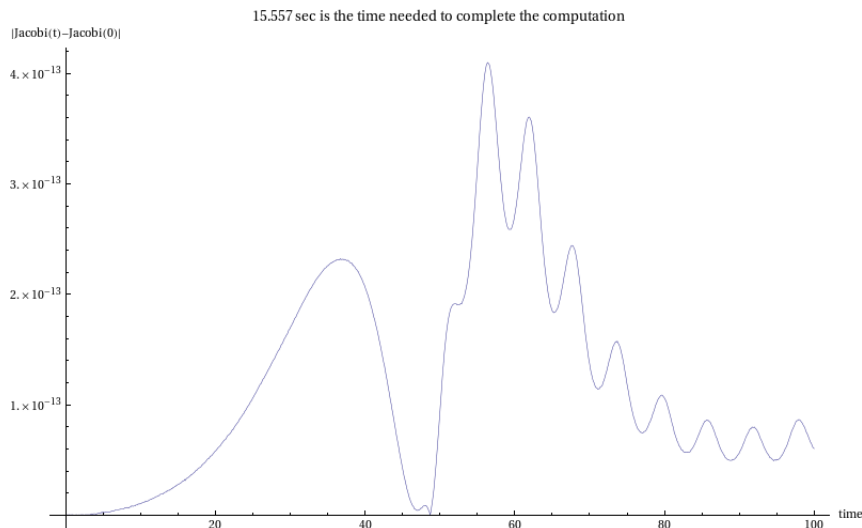
Χρησιμοποιώντας την μέθοδο αυτήν και θέτοντας σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 7 ο απαιτούμενος χρόνος είναι 16,02 δευτερόλεπτα. Η ακρίβεια την οποία επιτύγχάνει η μέθοδος στην διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi είναι της τάξεως του 10^{-5} .



Σχήμα 3.18: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Linearly Implicit Euler.

3.2.3 Explicit Midpoint

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Explicit Midpoint τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν για Precision και Accuracy Goal 13 είναι τα εξής. Ο μεν απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος ήταν 15,55 δευτερόλεπτα η δε ακρίβεια που επιτεύχθη στην διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi ήταν της τάξεως του 10^{-13} .

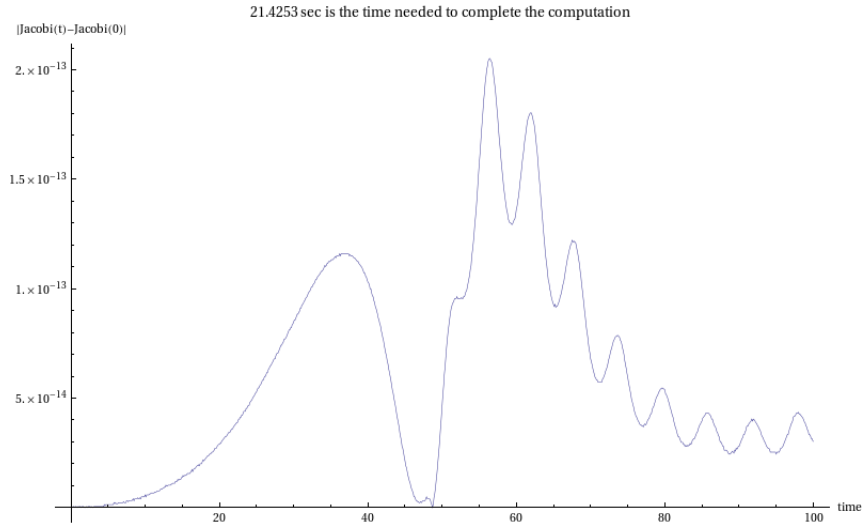


Σχήμα 3.19: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Midpoint.

3.2.4 Explicit Modified Midpoint

Συνεχίζοντας με τις διάφορες μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης η επόμενη η οποία μελετήθηκε είναι η Explicit Modified Midpoint. Με την μέθοδο αυτή τα αποτελέσματα που προκύπτουν για Precision και Accuracy Goal 13 είναι για τον μεν απαιτούμενο υπολογι-

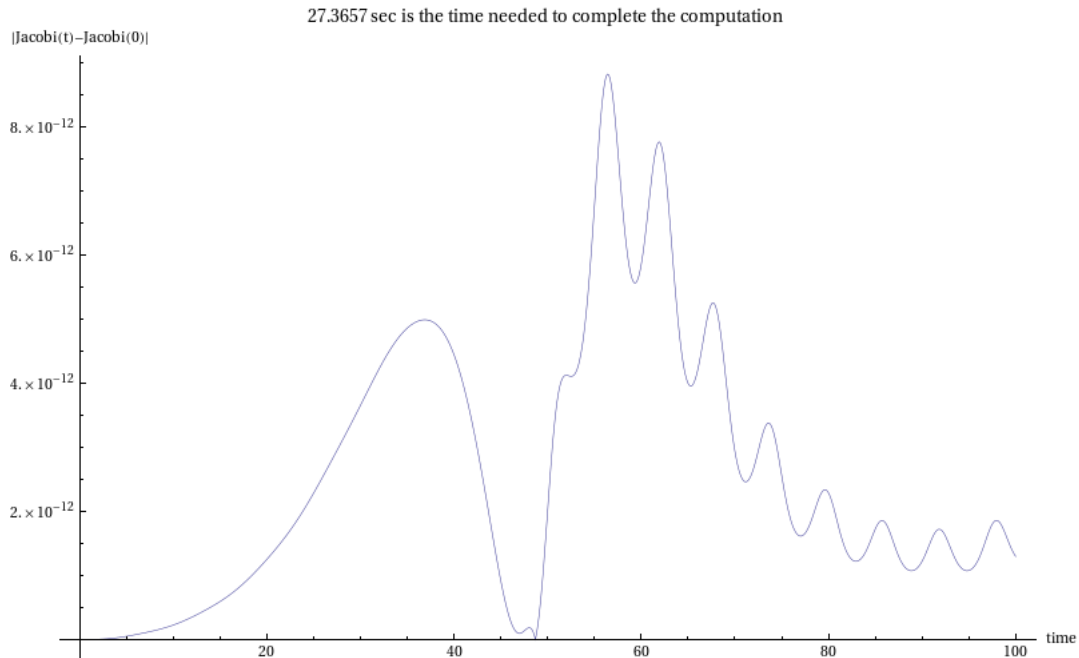
στικό χρόνο 21,42 δευτερόλεπτα, για την δε ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi περίπου 10^{-13} .



Σχήμα 3.20: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Modified Midpoint.

3.2.5 Linearly Implicit Midpoint

Για την μέθοδο Linearly Implicit Midpoint χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 11 και ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος προκύπτει 27,37 δευτερόλεπτα ενώ η ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi της τάξεως του 10^{-12} .

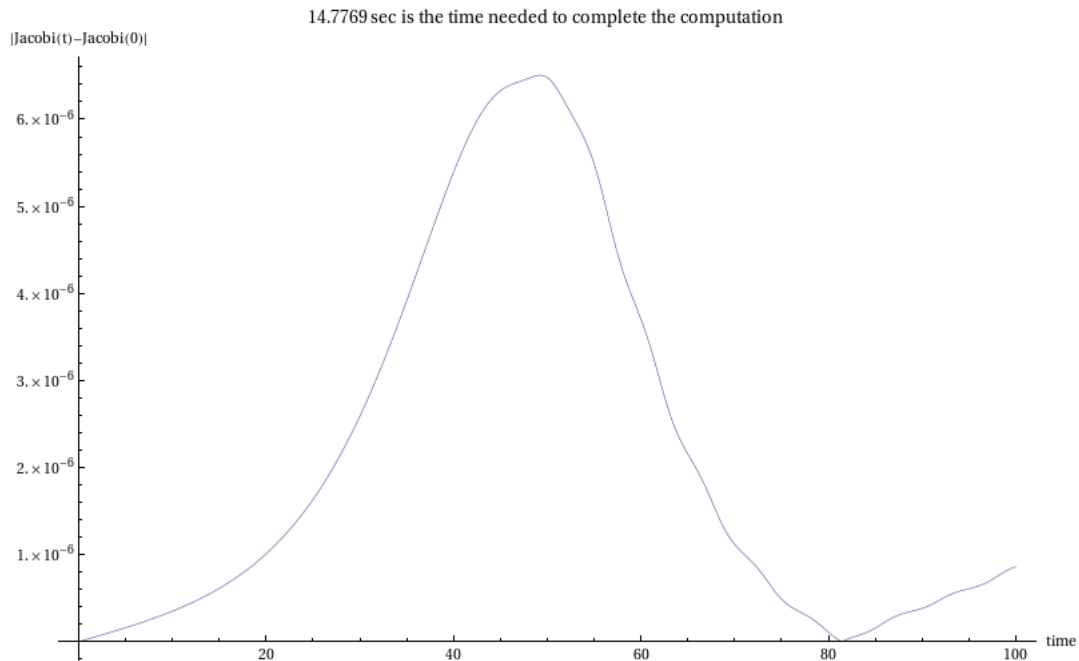


Σχήμα 3.21: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Linearly Implicit Midpoint.

3.2.6 Linearly Implicit Modified Midpoint

Στην μέθοδο Linearly Implicit Modified Midpoint χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 10. Η επίλυση των διαφορικών μας εξισώσεων απαιτεί 14,77

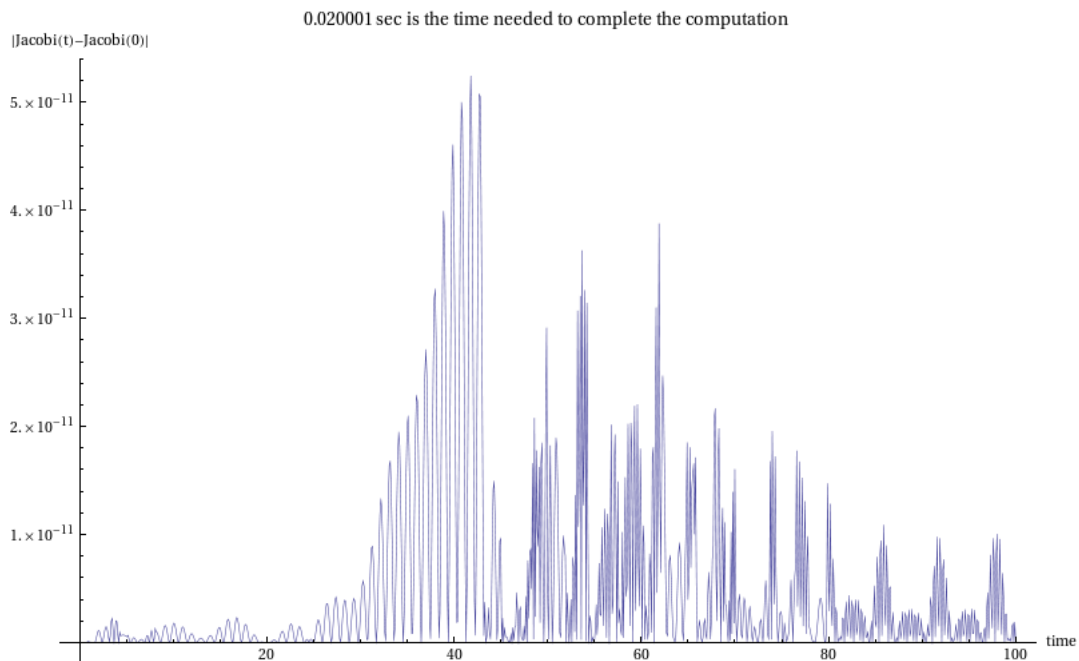
δευτερόλεπτα υπολογιστικού χρόνου ενώ η μέθοδος παρέχει ακρίβεια αναφορικά με το ολοκλήρωμα του Θ ασοβι της τάξεως του 10^{-6} .



Σχήμα 3.22: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Linearly Implicit Modified Midpoint.

3.2.7 Adams

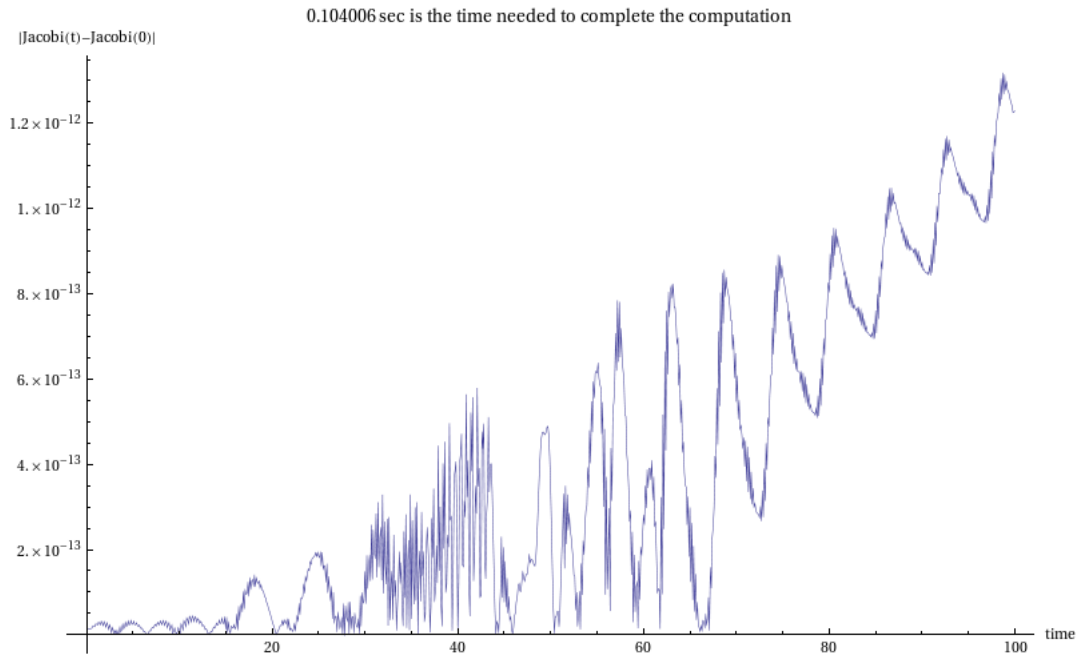
Χρησιμοποιώντας την μέθοδο Adams για την επίλυση των διαφορικών μας εξισώσεων η μέγιστη δυνατή ακρίβεια που μπορεί να επιτευχθεί είναι της τάξεως του 10^{-11} με τον απαιτούμενο υπολογιστικό χρόνο να είναι $0,02$ δευτερόλεπτα και για τιμές των Precision και Accuracy Goal 13.



Σχήμα 3.23: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Adams.

3.2.8 BDF

Με την μέθοδο BDF χρησιμοποιούμε σαν Precision και Accuracy Goal την τιμή 13, οπότε η ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi που επιτυγχάνεται είναι της τάξεως του 10^{-12} . Την ίδια στιγμή ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος είναι 0,1 δευτερόλεπτα.



Σχήμα 3.24: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο BDF.

3.2.9 Explicit Runge-Kutta

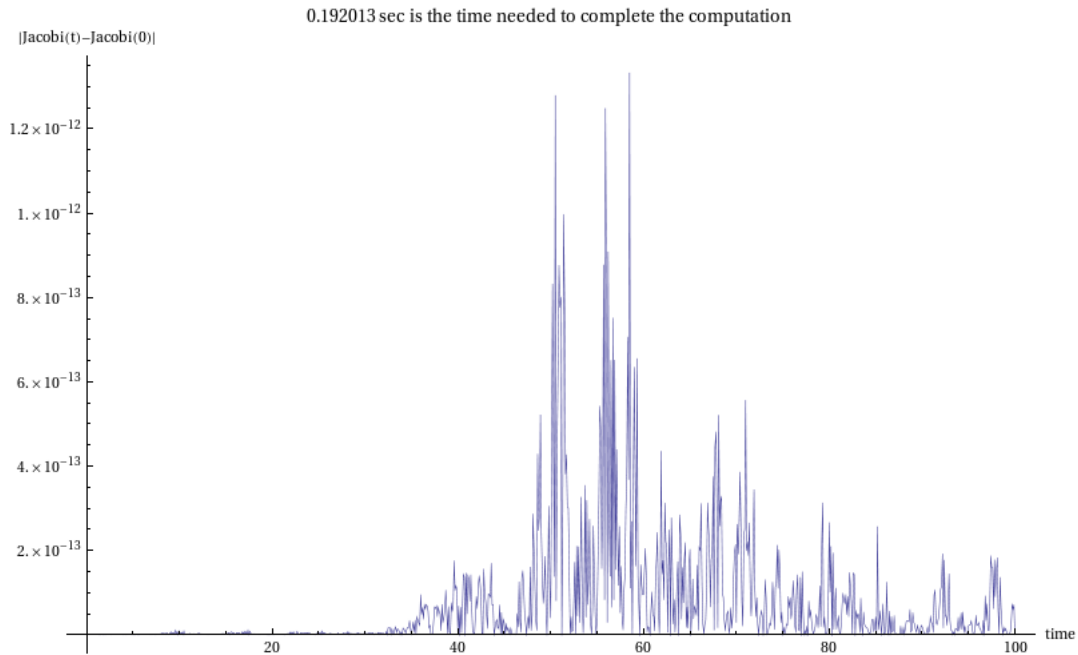
Η μέθοδος Explicit Runge-Kutta είναι μία μέθοδος η οποία φαίνεται έχει πολύ καλά αποτελέσματα. Αν καθορίσουμε τα Precision και Accuracy Goal να έχουν την τιμή 16 ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτείται είναι 0,19 δευτερόλεπτα και η ακρίβεια στην διατήρηση του ολοκληρώματος του Jacobi είναι της τάξης του 10^{-16} .

3.2.10 Implicit Runge-Kutta

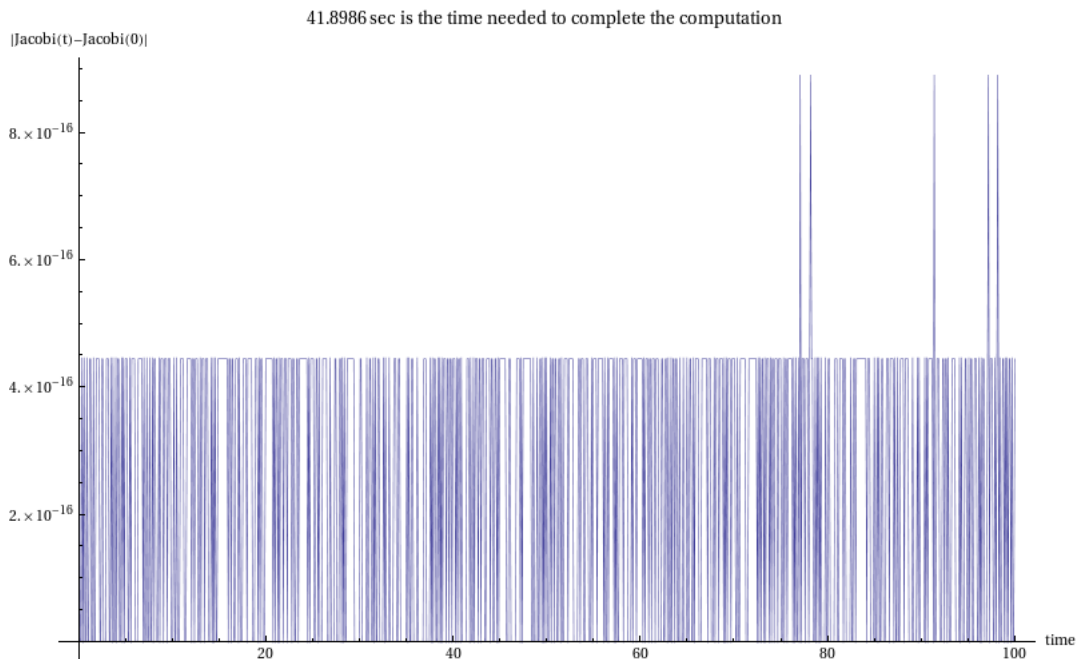
Εξαιρετικά φαίνεται ότι δουλεύει και η μέθοδος Implicit Runge-Kutta ειδικά όσον αφορά στο κομμάτι της ακρίβειας ολοκλήρωσης. Έτσι τα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με την μέθοδο αυτή αναφέρονται σε τιμή των Precision και Accuracy Goal 14. Ο απαιτούμενος υπολογιστικός χρόνος είναι 41,89 δευτερόλεπτα και η ακρίβεια που επιτυγχάνεται είναι της τάξεως του 10^{-16} .

3.3 Συμπεράσματα

Έχοντας πλέον δει τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε μεθόδου θα πρέπει πλέον να αποφασίσουμε το ποια μέθοδο θα χρησιμοποιούμε από εδώ και πέρα στους υπολογισμούς μας. Είναι προφανές ότι δεν υπάρχει μία μέθοδος η οποία να δουλεύει τόσο καλύτερα από όλες τις άλλες ώστε η χρήση της να είναι πανάκεια. Βεβαίως σε σχέση με τα αποτελέσματα μας μπορούμε να πειραματιστούμε ακόμα περισσότερο με τις διάφορες



Σχήμα 3.25: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Explicit Runge-Kutta.



Σχήμα 3.26: Εξέλιξη του ολοκληρώματος του Jacobi με την μέθοδο Implicit Runge-Kutta.

μεθόδους μας αυξομειώνοντας τα Precision και Accuracy Goal και παρατηρώντας τι επίδραση υπάρχει στον υπολογιστικό χρόνο και στην διατήρηση των ολοκληρωμάτων της κίνησης σε κάθε πρόβλημα ξεχωριστά.

Σε γενικές γραμμές οι μέθοδοι οι οποίες παρέχουν πολύ καλά αποτελέσματα αναφορικά με την ακρίβεια είναι οι multistep μέθοδοι Runge Kutta, Adams, BDF. Θα σταθούμε κυρίως στην Explicit Runge Kutta μέθοδο διότι είναι αρκετά γρήγορη ενώ ταυτόχρονα παρέχει και εξαιρετική ακρίβεια. Έτσι σε γενικές γραμμές στους υπολογισμούς μας προτιμήσαμε αυτήν σαν μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης. Μάλιστα όταν θέσαμε τα Precision και Accuracy Goal στην Explicit Runge Kutta τότε επιτύχαμε διατήρηση των

Μέθοδος	Precision και Accuracy Goal	Ακρίβεια	χρόνος(sec)
Explicit Euler	9	10^{-7}	11,91
Linearly Implicit Euler	7	10^{-5}	13,56
Explicit Midpoint	13	10^{-13}	17
Explicit Modified Midpoint	13	10^{-13}	23,63
Linearly Implicit Midpoint	11	10^{-11}	25,7
Linearly Implicit Modified Midpoint	10	10^{-5}	13,73
Adams	13	10^{-11}	0,015
BDF	13	10^{-13}	0,088
Explicit Runge-Kutta	16	10^{-12}	0,19
Implicit Runge-Kutta	14	10^{-16}	38,64

Πίνακας 3.2: Σύγκριση των διάφορων μεθόδων αριθμητικής ολοκλήρωσης για το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα

ολοκληρωμάτων της κίνησης εφάμιλλη με την Implicit μέθοδο και μάλιστα λίγο ταχύτερα. Όταν όμως είχαμε stiff εξισώσεις τότε αναγκαστικά είτε χρησιμοποιούσαμε την StiffnessSwitching μέθοδο είτε απευθείας την Implicit Runge Kutta κάτι το οποίο επιβράδυνε όπως είπαμε τους υπολογισμούς μας αλλά μας εξασφάλιζε την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων.

Σε κάποιες όμως περιπτώσεις δεν μας ενδιέφερε τόσο πολύ η ακρίβεια αλλά περισσότερο η ταχύτατη αριθμητική ολοκλήρωση. Σε τέτοιες περιπτώσεις (π.χ. υπολογισμός περιοδικών τροχιών) χρησιμοποιήσαμε την ταχύτατη μέθοδο Adams. Η μέθοδος αυτή παρέχει καλή ακρίβεια, όχι βέβαια τόσο καλή όσο άλλες μέθοδοι έχει το πλεονέκτημα όμως ότι είναι πάρα πολύ γρήγορη. Έτσι προτιμάται σε περιπτώσεις όπου έχουμε να επιλύσουμε ένα τεράστιο αριθμό διαφορικών εξισώσεων οπότε μας ενδιαφέρει πάρα πολύ η ταχύτητα σε βάρος της ακρίβειας.

Συνοψίζοντας η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου επαφίεται στο τι είδους αριθμητική ολοκλήρωση επιθυμούμε. Εάν το κριτήριο είναι η ακρίβεια τότε χρησιμοποιούμε την Explicit Runge Kutta, όταν έχουμε stiff εξισώσεις τότε χρησιμοποιούμε την Implicit Runge Kutta, ενώ τέλος όταν θέλουμε να έχουμε ταχύτατη επίλυση διαφορικών εξισώσεων έχοντας μια καλή ακρίβεια χρησιμοποιούμε την μέθοδο Adams.

Κεφάλαιο 4

Περιοδικές τροχιές στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα

4.1 Επιφάνειες τομής Poincare

4.1.1 Ορισμός και ιδιότητες τομής Poincare

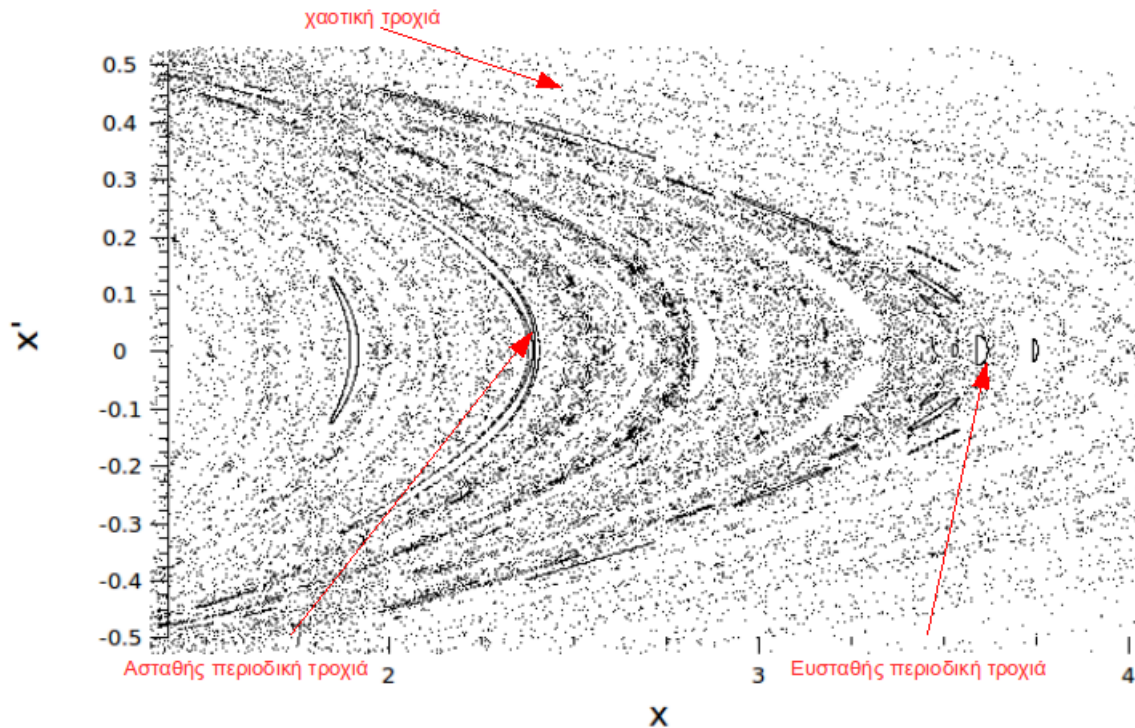
Πριν αναλύσουμε την διαδικασία εύρεσης περιοδικών τροχιών είναι αναγκαίο να αναφερθούμε σε ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία της Μηχανικής, τις επιφάνειες τομής Poincare. Καθώς αναφερόμαστε στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε ότι οι διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι 1.25-1.26. Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα πρόβλημα το οποίο έχει 2 βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς ο χώρος των φάσεων στην περίπτωση αυτή είναι ένας τετραδιάστατος χώρος (οι συντεταγμένες είναι οι θέσεις x, y και οι ορμές $\dot{x}, \dot{y}$) οπότε είναι πάρα πολύ δύσκολο να αναπαραστήσουμε στον χώρο αυτόν μία τροχιά. Όλες οι συντεταγμένες οι οποίες αναφέρονται στο κεφάλαιο αφορούν το 3^ο σώμα και για λόγους ευκολίας δεν θα τοποθετείται στο κεφάλαιο αυτό ο δείκτης 3 στις συντεταγμένες.

Το πρόβλημα δύναται να απλοποιηθεί αν λάβουμε υπόψιν μας την ύπαρξη ενός ολοκληρώματος της κίνησης στο κυκλικό πρόβλημα, του ολοκληρώματος του Jacobi. Με την βοήθεια αυτού μπορεί να εκφραστεί μία από τις συντεταγμένες συναρτήσει των άλλων 3 οπότε πλέον δημιουργείται ένας τριδιάστατος χώρος με συντεταγμένες τις $x, y, \dot{x}$. Ήδη κατά αυτόν τον τρόπο μπορούμε να οπτικοποιήσουμε τον χώρο των φάσεων. Εν τούτοις το πρόβλημα μπορεί να απλοποιηθεί περαιτέρω εάν θεωρήσουμε μία τομή του χώρου αυτού, παραδείγματος χάριν την $y = 0$. Πλέον δημιουργείται μία επίπεδη επιφάνεια η οποία ονομάζεται επιφάνεια τομής Poincare. Είναι πλήρως αντιληπτό ότι οι επιφάνειες τομής Poincare αποτελούν ένα εργαλείο μελέτης συστημάτων 2 βαθμών ελευθερίας για τον απλό λόγο της οπτικοποίησης του χώρου των φάσεων. Η όλη διαδικασία αποτελεί την μετάβαση από μια συνεχή ροή σε έναν πολύπλοκο χώρο των φάσεων σε μία διακριτή ροή σε έναν χώρο λιγότερων διαστάσεων.

Το επόμενο ερώτημα το οποίο εγείρεται είναι το τι είδους πληροφορία μπορούμε να αντλήσουμε από μία τομή Poincare για μία τροχιά. Η αλήθεια είναι ότι ανάλογα με το είδος της τροχιάς που έχουμε υπάρχει και διακριτή απεικόνιση της τροχιάς στην τομή. Έτσι μπορούμε μέσω της τομής να αποφανθούμε για το εάν η τροχιά που έχουμε είναι χαοτική ή κανονική και τέλος για το εάν είναι περιοδική ή ημιπεριοδική τροχιά.

Πράγματι η απεικόνιση μιας χαοτικής τροχιάς στην τομή είναι η ύπαρξη διάσπαρτων σημείων και είναι πλήρως διακριτή από την συμπεριφορά μιας κανονικής τροχιάς η οποία σχηματίζει μια αναλλοίωτη καμπύλη. Ακόμα μία περιοδική τροχιά αντιστοιχεί σε ένα σταθερό σημείο της απεικόνισης ενώ από την μορφή του χώρου γύρω από το σταθερό

σημείο της περιοδικής τροχιάς μπορούμε να προσδιορίσουμε το εάν έχουμε ευσταθή ή ασταθή περιοδική τροχιά. Εάν το σταθερό σημείο βρίσκεται εντός μιας νησίδας στην τομή τότε πρόκειται για ευσταθή περιοδική τροχιά ενώ όταν η περιοχή σχηματίζει μία υπερβολική δομή (ένα X) τότε πρόκειται για ασταθή περιοδική τροχιά. Για να γίνουν όλα τα παραπάνω αντιληπτά στο σχήμα 4.1 φαίνονται παραδείγματα των παραπάνω διακριτών συμπεριφορών.



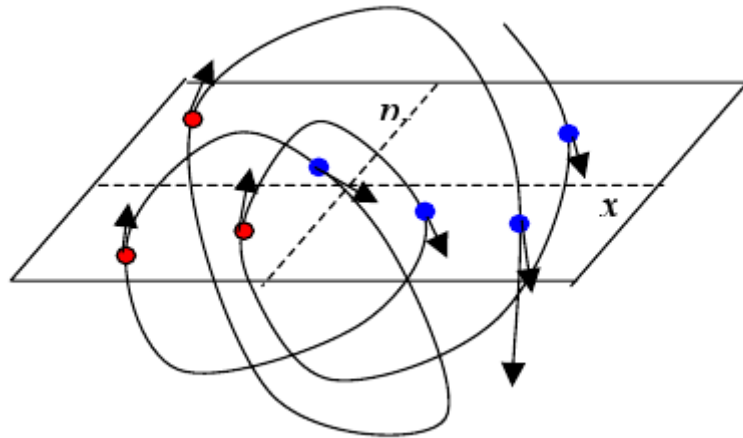
Σχήμα 4.1: Επιφάνεια τομής Poicare στην οποία φαίνονται χαοτικές, ευσταθείς και ασταθείς περιοδικές τροχιές

4.1.2 Υπολογιστική μέθοδος κατασκευής τομών Poicare

Η κατασκευή υπολογιστικά μίας τομής Poicare είναι μια σχετικά απλή διαδικασία. Σε πρώτη φάση όπως έχουμε ήδη πει εκμεταλευόμαστε το ότι υπάρχει ολοκλήρωμα της κίνησης για το κυκλικό πρόβλημα στο περιστρεφόμενο σύστημα. Έτσι για μία δεδομένη τιμή του ολοκληρώματος του Jacobi C_j μπορούμε να εκφράσουμε την μία μεταβλητή συναρτήσει των άλλων 3. Κατ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε γνωρίζοντας την τιμή του ολοκληρώματος του Jacobi και τις αρχικές συνθήκες 3 εκ των 4 μεταβλητών μας να προσδιορίσουμε και την 4^η μεταβλητή. Έχοντας αρχικές λοιπόν αρχικές συνθήκες για όλες τις μεταβλητές μπορούμε να επιλύσουμε τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημά μας.

Η εντολή NDSolve της Mathematica μπορεί να πάρει σαν option την εντολή Event Locator με την οποία ενώ επιλύει τις διαφορικές εξισώσεις ελέγχει ταυτόχρονα και το εάν κάποια μεταβλητή παίρνει την τιμή την οποία ορίζουμε στο πρόγραμμα να ελέγξει. Έτσι καθώς μιλάμε για τομή εμάς μας ενδιαφέρει όχι μόνο η επίλυση των διαφορικών εξισώσεων αλλά και ο έλεγχος της τιμής του y . Έτσι απαιτούμε από το πρόγραμμα όποτε το $y = 0$ να μας εκτυπώνει τις τιμές των άλλων 3 μεταβλητών. Κρατώντας μάλιστα το ζεύγος τιμών $(x_0, \dot{x}_0)$ μπορούμε στο επίπεδο $(x, \dot{x})$ να σχηματίσουμε ένα σημείο. Καθώς εξελίσσεται το σύστημα μας συμβαίνει και σε μελλοντικούς χρόνους το $y = 0$, οπότε

παίρνουμε περισσότερα σημεία. Η διαδικασία διακόπτεται κατ' εντολή μας αφού έχει τρέξει για κάποιο χρονικό διάστημα ή αλλιώς αν έχουμε πάρει έναν συγκεκριμένο αριθμό σημείων.



Σχήμα 4.2: Κατασκευή τομής Poincare

Θα πρέπει τέλος να προσέξουμε ότι καθώς η τροχιά τέμνει το επίπεδο $y = 0$ υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι διαγραφής του φαινομένου, από πάνω προς τα κάτω ($\dot{y} < 0$) και αντίστροφα ($\dot{y} > 0$). Εμάς σε κάθε περίπτωση μας ενδιαφέρει ένας από τους 2 τρόπους διαγραφής και όχι και οι 2. Αυτό μπορούμε να το δηλώσουμε στην Event Locator με την εντολή Direction. Στο πρόγραμμά μας συνήθως απαιτούσαμε ($\dot{y} < 0$).

Ο τρόπος σύνταξης της EventLocator φαίνεται στο επόμενο τμήμα κώδικα:

```
NDSolve[{equations+initial conditions},{solutions},
{variable,mininum value,maximum value},
Method->{EventLocator, "Event" -> function to be examined,
"Direction" -> direction of phenomenon,
"EventAction" :> action to be done when event is satisfied}]
```

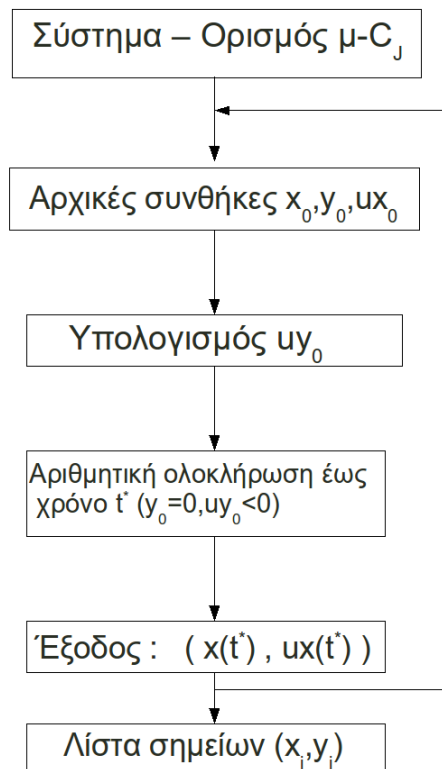
Αν παραδείγματος χάρη θέλουμε να εξετάσουμε την διαφορική εξίσωση $\ddot{x}(t) + 2x(t) = 0$ με $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$ ως προς το πότε η λύση $x(t)$ γίνεται 0 γράφουμε τα εξής:

```
NDSolve[{x''[t] + 20 x[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 1}, x, {t, 0, 10},
Method -> {EventLocator, "Event" -> x[t], "Direction" -> 1,
"EventAction" :> Print["t when x=0 t=", t]}]
```

Έχοντας αναλύσει τον τρόπο λειτουργίας του EventLocator κατασκευάζουμε μία υπορουτίνα προκειμένου να κατασκευάζουμε τομές Poincare. Αυτή είναι η **PoincareSection2** και ο τρόπος που λειτουργεί φαίνεται στο σχήμα 4.3.

4.2 Ευρεση περιοδικών τροχιών στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα

Έχοντας μελετήσει ένα πολύ σημαντικό εργαλείο όπως είναι η τομή Poincare είδαμε το ότι οι περιοδικές τροχιές παρουσιάζουν διακριτή συμπεριφορά οπότε μπορούμε να αποφανθούμε για τις αρχικές συνθήκες μιας περιοδικής τροχιάς. Η αλήθεια είναι ότι δεν είναι τόσο εύκολο να προσδιορίσουμε περιοδικές τροχιές Ασφαλώς είδαμε ότι μέσω της τομής είναι αρκετά εύκολο να προσδιορίσουμε που περίπου βρίσκεται μια περιοδική τροχιά εν



Σχήμα 4.3: Υπολογιστική μέθοδος κατασκευής επιφάνειας τομής Poincare

τούτοις το να την προσδιορίσουμε με μεγάλη ακρίβεια δεν είναι και τόσο εύκολο. Συνεπώς η διαδικασία εύρεσης μίας περιοδικής τροχιάς περιλαμβάνει την εκκίνηση από μία τροχιά η οποία βρίσκεται κοντά στην περιοδική και στην συνέχεια σταδιακή προσέγγιση της.

Για να προσδιορίσουμε όμως μια περιοδική τροχιά θα πρέπει να γνωρίζουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που την διαχωρίζουν από τις άλλες τροχιές. Έστω $x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0$ οι αρχικές συνθήκες μίας τροχιάς. Καθώς το σύστημα εξισώσεων του κυκλικού προβλήματος των 3 σωμάτων είναι οι (1.25-1.26), οι λύσεις του συστήματος μπορούν να γραφτούν με την μορφή:

$$x = x(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t)$$

$$y = y(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t)$$

Με βάση αυτόν τον φορμαλισμό για μία περιοδική τροχιά ισχύει:

$$x(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t + T) = x(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t)$$

$$y(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t + T) = y(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t)$$

αλλά και:

$$\dot{x}(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t + T) = \dot{x}(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t)$$

$$\dot{y}(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t + T) = \dot{y}(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0; t)$$

όπου με T συμβολίζεται η περίοδος της περιοδικής τροχιάς.

4.2.1 Συμμετρικές περιοδικές τροχιές

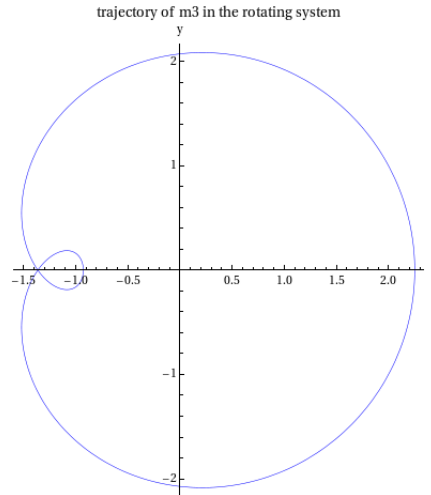
Στην παρούσα διπλωματική εργασία θα προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε συμμετρικές περιοδικές τροχιές οι οποίες αποτελούν και την πιο απλή κατηγορία περιοδικών τροχιών. Η διαφοροποίησή τους έγκειται στο γεγονός ότι είναι αναλλοίωτες κατά τον μετασχηματισμό :

$$x \rightarrow x \quad y \rightarrow -y \quad t \rightarrow -t$$

Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για τις συμμετρικές περιοδικές τροχιές όταν αυτές αναπαρασταθούν στο επίπεδο x, y υπάρχει άξονας συμμετρίας ο οποίος είναι ο άξονας $x'x$. Συνεπώς αντιλαμβανόμαστε ότι αυτό μπορεί να συμβεί μόνο όταν αρχικά το σώμα ξεκινήσει από κάποιο σημείο του άξονα $x'x$ με ταχύτητα κάθετη δηλαδή έχοντας αρχικές συνθήκες:

$$(x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0) = (x_0, 0, 0, \dot{y}_0) \quad (4.1)$$

Ουσιαστικά λοιπόν μια συμμετρική περιοδική τροχιά μπορεί να περιγραφεί από 2 μόνο αρχικές συνθήκες ως εξής: $(x_0, \dot{y}_0)$. Ασφαλώς είναι πολύ εύκολο να προσδιοριστεί και το ολοκλήρωμα του Jacobi μέσω αυτόν των 2 μεταβλητών οπότε οι αρχικές συνθήκες τις τροχιάς να γραφούν σαν (x_0, C_j) .



Σχήμα 4.4: Μία συμμετρική περιοδική τροχιά

4.2.2 Οι εξισώσεις μεταβολών

Έστω ότι έχουμε το μη γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\dot{x} = F_i(x_i, \dots, x_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.2)$$

και έστω μία λύση $x_{10}(t)$ του συστήματος αυτού. Μια γειτονική λύση μπορεί να γραφτεί με την μορφή

$$x'_i(t) = x_i(t) + \xi_i(t), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.3)$$

όπου οι $\xi_i(t)$ είναι οι μετατοπίσεις της γειτονικής λύσης ως προς την αρχική λύση για την ίδια χρονική στιγμή t . Εφόσον και η γειτονική λύση είναι λύση του αρχικού συστήματος ισχύει ότι:

$$\dot{x}_i(t) + \dot{\xi}_i(t) = F_i(x_i + \xi_i, \dots, x_n + \xi_n), \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.4)$$

Αναπτύσσοντας σε όρους $1^{\eta\varsigma}$ προκύπτει ότι :

$$\dot{x}_i(t) + \dot{\xi}_i(t) = F_i(x_i, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \xi_j, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.5)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν την 4.2 προκύπτει λοιπόν ότι οι εξισώσεις μεταβολών δίνονται από τον τύπο :

$$\dot{\xi}_i(t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \xi_j, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.6)$$

Η πληροφορία που μπορούμε να αντλήσουμε από τις εξισώσεις μεταβολών αφορά την συμπεριφορά στην περιοχή της λύσης $x_i(t)$ σε όρους πρώτης τάξης ως προς ξ_i .

Προκειμένου όμως να λυθούν οι εξισώσεις μεταβολών απαιτούνται και αντίστοιχες αρχικές συνθήκες. Οι αρχικές συνθήκες των εξισώσεων μεταβολών είναι οι :

$$\xi_i^{(k)}(0) = \frac{\partial x_{i0}}{\partial x_{k0}} = \delta_{ik} \quad (4.7)$$

όπου το δ_{ik} είναι το δέλτα του Kronecker.

Περνώντας στο κυκλικό πρόβλημα των 3 σωμάτων αλλάζουμε λίγο τον φορμαλισμό και συμβολίζουμε με $x, y, \dot{x} = u_x, \dot{y} = u_y$ τις λύσεις των εξισώσεων οι οποίες περιγράφουν το πρόβλημα και με w_1, w_2, w_3, w_4 τις αντίστοιχες διαταραχές.

Σύμφωνα με την 4.6 μπορούμε να γράψουμε για τις εξισώσεις μεταβολών την σχέση :

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u_x} & \frac{\partial F_1}{\partial u_y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u_x} & \frac{\partial F_2}{\partial u_y} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial u_x} & \frac{\partial F_3}{\partial u_y} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x} & \frac{\partial F_4}{\partial y} & \frac{\partial F_4}{\partial u_x} & \frac{\partial F_4}{\partial u_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

όπου

$$F_1 = \dot{x}_3$$

$$F_2 = \dot{y}_3$$

$$F_3 = \dot{u}_{x3} = \ddot{x}_3$$

$$F_4 = \dot{u}_{y3} = \ddot{y}_3$$

Συνεπώς ο πίνακας απλοποιείται περαιτέρω εκτελώντας τις πράξεις και γίνεται :

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \\ \dot{w}_3 \\ \dot{w}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ U_{xx} & U_{xy} & 0 & 2 \\ U_{xy} & U_{yy} & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

όπου ισχύει :

$$U_{xx} = 1 + \frac{\mu[2(x + \mu - 1)^2 - y^3]}{r_{23}^5} + (1 - \mu) \frac{2(x + \mu)^2 - y^2}{r_{13}^2} \quad (4.10)$$

$$U_{yy} = 1 + \mu \frac{2y^2 - (x + \mu - 1)^2}{r_{23}^5} + (1 - \mu) \frac{2y^2 - (x + \mu)^2}{r_{13}^2} \quad (4.11)$$

$$U_{xy} = 3y(\mu \frac{x + \mu - 1}{r_{23}^5} + (1 - \mu) \frac{x + \mu}{r_{13}^2}) \quad (4.12)$$

Όσον αφορά τώρα στην λύση του συστήματος των εξισώσεων μεταβολών αυτή εκφράζεται υπό μορφή πίνακα:

$$\vec{w}(t) = X(t)\vec{w}(0) \quad (4.13)$$

Ο πίνακας X ονομάζεται θεμελιώδης πίνακας λύσεων και τα στοιχεία του υπολογίζονται αν πάρουμε όλες τις δυνατούς συνδυασμούς αρχικών συνθηκών όπως προβλέπονται από το δέλτα του Kronecker, δηλαδή για αρχικές συνθήκες αποκλίσεων:

$$\vec{w}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Με βάση όλα τα παραπάνω τα στοιχεία του θεμελιώδη πίνακα λύσεων εκφράζουν τις εξής ποσότητες.

$$X(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial u_{x0}} & \frac{\partial x}{\partial u_{y0}} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial u_{x0}} & \frac{\partial y}{\partial u_{y0}} \\ \frac{\partial u_x}{\partial x_0} & \frac{\partial u_x}{\partial y_0} & \frac{\partial u_x}{\partial u_{x0}} & \frac{\partial u_x}{\partial u_{y0}} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x_0} & \frac{\partial u_y}{\partial y_0} & \frac{\partial u_y}{\partial u_{x0}} & \frac{\partial u_y}{\partial u_{y0}} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Είναι προφανές ότι για χρόνο $t = 0$ ισχύει για τον θεμελιώδη πίνακα λύσεων:

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων μας είναι ένας συμπλεκτικός πίνακας. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του πίνακα αυτού είναι 2 ζευγάρια μιγαδικών συζυγών αριθμών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να ισχύει για τις 4 ιδιοτιμές μας ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1$. Αυτή η ιδιότητα μπορεί έχει ως αποτέλεσμα την διατήρηση της ορίζουσας του πίνακα διότι:

$$\det(X(t)) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 1 \quad (4.17)$$

Οι ιδιότητες αυτές του θεμελιώδη πίνακα λύσεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της ακρίβειας των υπολογισμών μας.

Ακόμα ορίζεται σαν μονόδρομος πίνακας $X(T)$ ο θεμελιώδης πίνακας λύσεων για χρόνο $t = T$ όπου T είναι η περίοδος της περιοδικής τροχιάς. Μία επιπλέον ιδιότητα του μονόδρομου πίνακα είναι ότι $\lambda_1, \lambda_2 = 1$ οπότε οι ιδιοτιμές οι οποίες πλέον καταδεικνύουν την ευστάθεια της περιοδικής τροχιάς είναι οι λ_3, λ_4 .

4.2.3 Ευστάθεια περιοδικής τροχιάς

Η ευστάθεια μιας περιοδικής τροχιάς εξαρτάται από τις ιδιοτιμές του μονόδρομου πίνακα λύσεων. Ορίζεται σαν δείκτης ευστάθειας K (ή SI εκ του stability index στο πρόγραμμα μας) η ποσότητα:

$$K = \text{trace}(X(T)) - 2 \quad (4.18)$$

όπου $\text{trace}(X(T))$ είναι το ίχνος του μονόδρομου πίνακα $\text{trace}(X(T)) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$.

Από την τιμή του K εξαρτάται η ευστάθεια της περιοδικής τροχιάς. Έτσι προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις:

- $|K| < 2$ Ευσταθής περιοδική τροχιά
- $|K| > 2$ Ασταθής περιοδική τροχιά
- $|K| = 2$ Κρίσιμη ευσταθής περιοδική τροχιά

4.2.4 Υπολογιστική διαδικασία εύρεσης συμμετρικής περιοδικής τροχιάς

Αναφερθήκαμε ήδη στην διακριτή συμπεριφορά μιας περιοδικής τροχιάς στην επιφάνεια τομής Poincare. Συνεπώς μέσα από μια τέτοια τομή η οποία αντιστοιχεί σε δεδομένη ενέργεια C_J , ξέρουμε “περίπου” τις αρχικές συνθήκες μιας συμμετρικής περιοδικής τροχιάς βρίσκοντας προσεγγιστικά τα $(x_0, \dot{x}_0)$ μέσα από την τομή και γνωρίζοντας με ακρίβεια το C_J από την τομή και ότι $y_0 = 0$.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω προσεγγιστικές αρχικές συνθήκες μπορούμε να υπολογίσουμε και την u_{y0} . Έτσι πλέον μπορούμε να εκτελέσουμε την αριθμητική ολοκλήρωση για αυτήν την τροχιά έως τον χρόνο T ο οποίος αντιστοιχεί στον χρόνο που απαιτείται για να ξαναγίνει $y(T) = 0$. Προκειμένου να ελέγξουμε εάν η τροχιά μας είναι περιοδική ελέγχουμε τις συνθήκες περιοδικότητας. Εμείς στο πρόγραμμά μας ελέγξαμε τις παρακάτω συνθήκες.

$$\begin{aligned} y(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0}; T) &= y(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0}; 0) \\ u_x(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0}; T) &= u_x(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0}; 0) \end{aligned}$$

Ασφαλώς η τροχιά που επιλέξαμε με το “μάτι” από την τομή Poincare δεν είναι δυνατόν να είναι περιοδική και συνεπώς θα έχουμε απόκλιση από τις παραπάνω συνθήκες. Το επόμενο βήμα είναι να προσπαθήσουμε να διορθώσουμε τις αρχικές συνθήκες που είχαμε ώστε να πέσουμε πιο κοντά στην περιοδική τροχιά. Οι συνθήκες τις οποίες διορθώνουμε είναι ο χρόνος τομής T και η ταχύτητα $\dot{y} = u_y$.

Έτσι μετά την διόρθωση που κάνουμε θέλουμε να ισχύουν οι συνθήκες περιοδικότητας δηλαδή:

$$\begin{aligned} y(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0} + du_{y0}; T + dT) &= 0 \\ u_x(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0} + du_{y0}; T + dT) &= 0 \end{aligned}$$

Εάν αναπτύξουμε το πρώτο μέλος των 2 εξισώσεων σε ανάπτυγμα Taylor τότε προκύπτουν οι εξής σχέσεις

$$\begin{aligned} y(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0}; T) + \frac{\partial y}{\partial t}|_T \cdot dT + \frac{\partial y}{\partial u_{y0}}|_T \cdot du_{y0} &= 0 \\ u_x(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0}; T) + \frac{\partial u_x}{\partial t}|_T \cdot dT + \frac{\partial u_x}{\partial u_{y0}}|_T \cdot du_{y0} &= 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς λύνοντας το παραπάνω σύστημα εξισώσεων προκύπτει ότι οι διορθώσεις δίνονται από τους τύπους:

$$du_y = -\frac{u_x(T) \cdot \frac{\partial y}{\partial t}|_T - y(T) \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t}|_T}{\frac{\partial u_x}{\partial u_{y0}}|_T \cdot \frac{\partial y}{\partial t}|_T - \frac{\partial y}{\partial u_{y0}}|_T \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t}|_T} \quad (4.19)$$

$$dT = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial u_{y0}}|_T \cdot y(T) - \frac{\partial y}{\partial u_{y0}}|_T \cdot u_x(T)}{\frac{\partial y}{\partial u_{y0}}|_T \cdot \frac{\partial u_x}{\partial t}|_T - \frac{\partial u_x}{\partial u_{y0}}|_T \cdot \frac{\partial y}{\partial t}|_T} \quad (4.20)$$

Στον τύπο αυτό τα $u_x(T), y(T), \frac{\partial u_x}{\partial t}|_T = \dot{u}_x(T), \frac{\partial y}{\partial t}|_T = \dot{y}(T)$ βρίσκονται από την επίλυση των διαφορικών εξισώσεων ενώ τα $\frac{\partial y}{\partial u_{y0}}|_T, \frac{\partial u_x}{\partial u_{y0}}|_T$ βρίσκονται από την επίλυση των εξισώσεων μεταβολών ως στοιχεία του θεμελιώδη πίνακα λύσεων. Έτσι πλέον έχουμε τις νέες αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0, u_{x0}, u_{y0} + du_{y0}; T + dT)$ οι οποίες πλησιάζουν περισσότερο την περιοδική τροχιά. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται έως ότου προσεγγιστεί με την επιθυμητή ακρίβεια η περιοδική τροχιά. Ουσιαστικά έχουμε μία μέθοδο Newton-Raphson η οποία συγκλίνει εάν οι αρχικές μας συνθήκες βρίσκονται αρκούντως κοντά στην περιοδική τροχιά. Ως ακρίβεια με την οποία προσεγγίζουμε την περιοδική τροχιά ορίζεται η ποσότητα:

$$Acc = \sqrt{u_x(T)^2 + y(T)^2} \quad (4.21)$$

Μία τελευταία λεπτομέρεια την οποία οφείλουμε να επισημάνουμε για τις περιοδικές τροχιές είναι η πολλαπλότητα τους k . Μια περιοδική τροχιά λέμε ότι έχει πολλαπλότητα k όταν έως ότου να διαγραφεί ολόκληρη τέμνει k φορές το επίπεδο της τομής Poincare δηλαδή το $y = 0$ με συγκεκριμένη φορά διαγραφής (π.χ. $\dot{y} < 0$). Συνεπώς μία τροχιά μπορεί να είναι k περιοδική και αντίστοιχα περιγράφεται στην τομή Poincare από k σημεία. Υπολογιστικά εάν ψάχνουμε τέτοιες περιοδικές τροχιές η διαφοροποίηση την οποία πρέπει να κάνουμε έχει να κάνει με το ότι η μέθοδος MethodLocator δεν πρέπει να ψάχνει την 1^η φορά για την οποία θα γίνει το $y = 0$ αλλά την k^{η} , κάτι το οποίο ελέγχει ο ίδιος ο χρήστης. Η υπορουτίνα η οποία βρίσκει περιοδικές τροχιές είναι η **PeriodicOrbitVar** και ο τρόπος λειτουργίας της φαίνεται στο σχήμα 4.5:

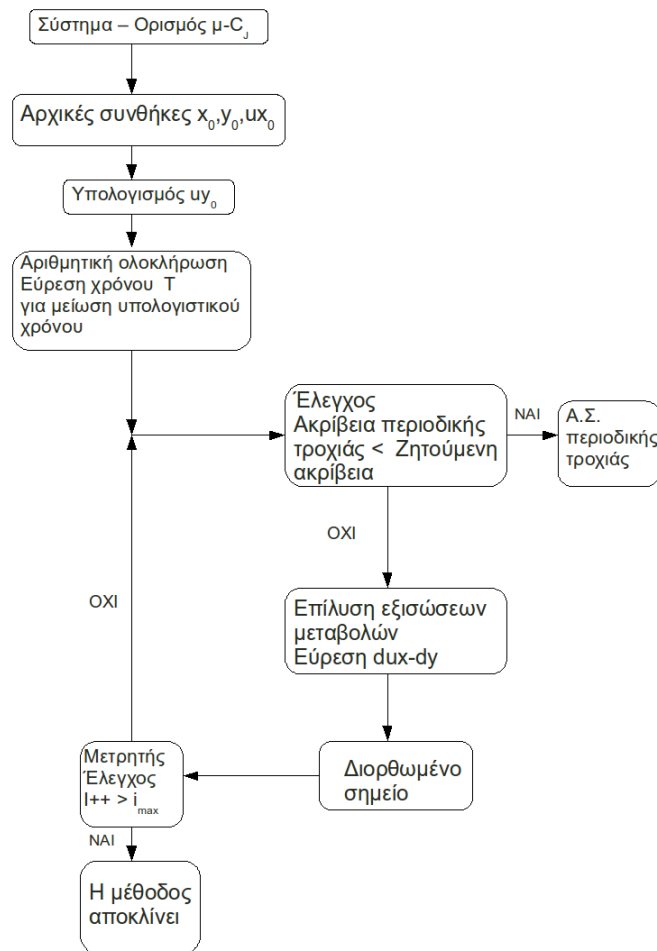
4.2.5 Οικογένειες περιοδικών τροχιών

Οι περιοδικές τροχιές σχηματίζουν οικογένειες κατά μήκος των οποίων μεταβάλλεται η περίοδος. Όσον αφορά τώρα στον τρόπο αναπαράστασης μίας τέτοιας οικογένειας περιοδικών τροχιών, όπως αναφέραμε και πριν μία περιοδική τροχιά περιγράφεται από 2 αρχικές συνθήκες, είτε $((x_0, \dot{y}_0))$ είτε σαν (x_0, C_j) . Έτσι μια οικογένεια περιοδικών τροχιών προκύπτει από την ένωση πολλών τέτοιων σημείων που αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές δημιουργώντας έτσι μία καμπύλη, την καμπύλη της οικογένειας.

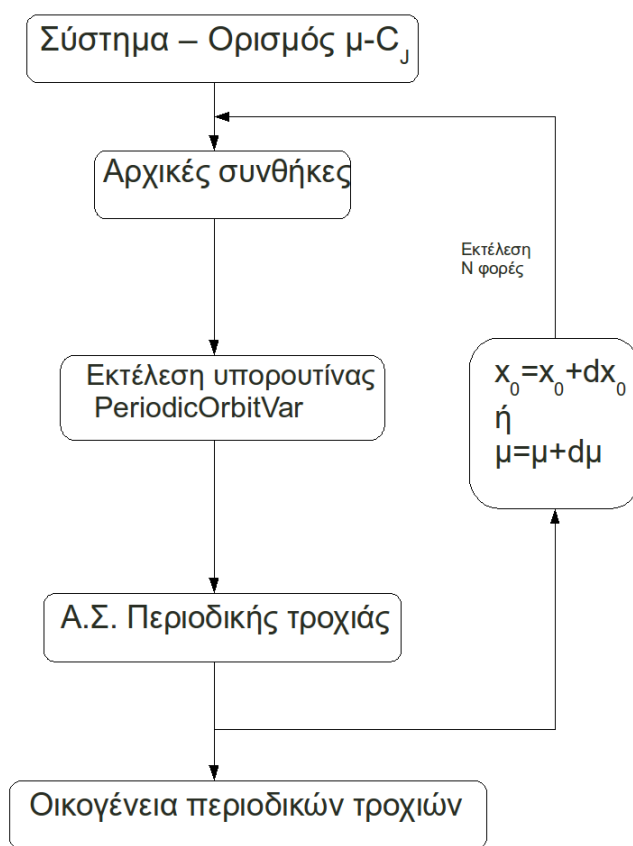
Πάντοτε λοιπόν σε μία τέτοια καμπύλη θα υπάρχει μία εξαρτημένη μεταβλητή και μία ανεξάρτητη. Ανάλογα με την επιλογή που θα κάνουμε για τις μεταβλητές μπορούμε να δημιουργήσουμε διαφορετικές οικογένειες περιοδικών τροχιών. Στην παρούσα εργασία θα μελετήσουμε οικογένειες που αφορούν το ζεύγος (x_0, C_j) είτε οικογένειες (x_0, μ) οι οποίες προκύπτουν καθώς μεταβάλλεται η μάζα.

Οι υπορουτίνες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για την κατασκευή των οικογενειών είναι στην πρώτη περίπτωση η **FamiliesXUY** όπου η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θέση x_0 και εξαρτημένη είναι η ενέργεια C_j και στην δεύτερη περίπτωση η **FamiliesMUY** όπου και ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η μάζα μ και εξαρτημένη είναι η ενέργεια C_j .

Υπολογιστικά και οι 2 υπορουτίνες στηρίζονται στην υπορουτίνα **PeriodicOrbitVar** η οποία εκτελείται N φορές όπου N είναι ο αριθμός των περιοδικών τροχιών τις οποίες θέλουμε να έχει η οικογένεια ενώ σε κάθε εκτέλεση μεταβάλλουμε την ανεξάρτητη μεταβλητή κατά έναν παράγοντα dx_0 ή $d\mu$ αντίστοιχα.



Σχήμα 4.5: Υπολογιστική μέθοδος εύρεσης συμμετρικών περιοδικών τροχιών



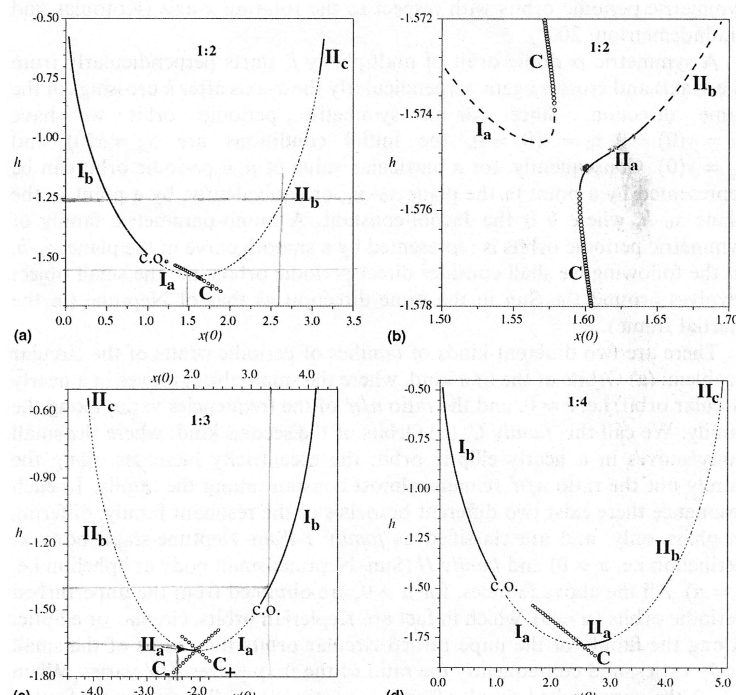
Σχήμα 4.6: Υπολογιστική μέθοδος εύρεσης οικογενειών συμμετρικών περιοδικών τροχιών

Κεφάλαιο 5

Μελέτη της οικογένειας II περιοδικών τροχιών του κυκλικού προβλήματος

5.1 Η οικογένεια II στο σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας- Κ.Β.Ο. ($\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$)

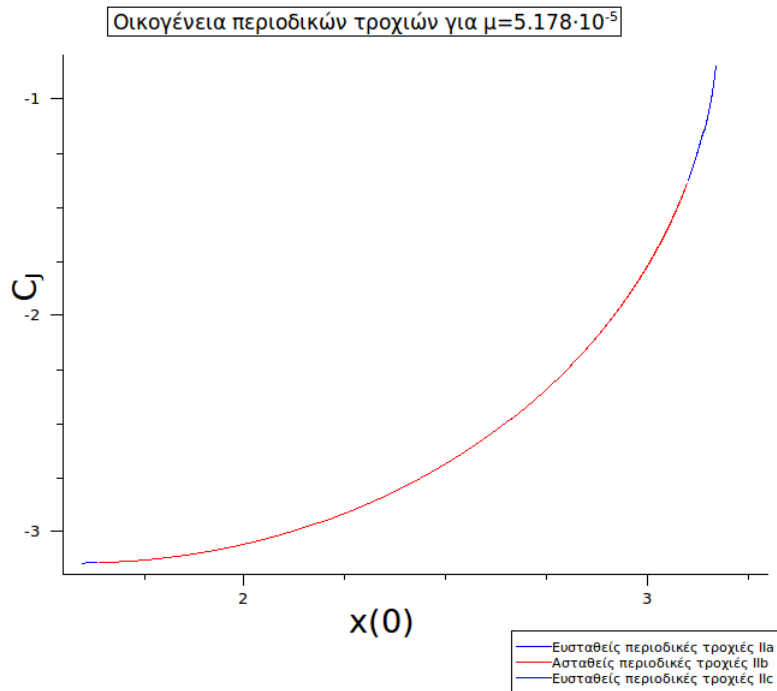
Το αντικείμενο με το οποίο θα ασχοληθούμε εκτενώς σε αυτό το κεφάλαιο είναι η μελέτη μίας συγκεκριμένης οικογένειας περιοδικών τροχιών έχοντας ως αφορμή την εργασία των [16]. Σε αυτήν την εργασία με βάση το περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα για το σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας-Κ.Β.Ο.(αντικείμενα της ζώνης Kuiper, αποδείχτηκε ότι για τους συντονισμούς 1:2,1:3,1:4 υπάρχουν 2 κλάδοι συμμετρικών ελλειπτικών περιοδικών τροχιών οι οποίοι έχουν ευσταθή και ασταθή τμήματα. Με τον όρο ελλειπτικές τροχιές εννοούμε ότι η τροχιά του 3^{ου} σώματος είναι ελλειπτική στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Στο σχήμα 5.1 φαίνονται τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής και για τους 3 συντονισμούς και διακρίνονται εμφανώς τα ασταθή και ευσταθή τμήματα των κλάδων.



Σχήμα 5.1: Οικογένειες περιοδικών τροχιών για τους συντονισμούς 1:2,1:3,1:4 στο σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας-δορυφόρος όπως υπολογίστηκαν από τους Voyatzis,Kotoulas,Hadjidemetriou

Εμείς στην εργασία μας ασχοληθήκαμε εκτενώς με τον συντονισμό 1:2. Συντονισμός 1:2 σημαίνει ότι η περίοδος του Κ.Β.Ο. είναι διπλάσια περίπου από την περίοδο του Ποσειδώνα και του Ήλιου οι οποίοι στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα εκτελούν κυκλικές τροχιές.

Αρχικά χρησιμοποιώντας τον δικό μας κώδικα και ειδικότερα την υπορουτίνα **FamiliesXUY** προσπαθήσαμε να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα των [16]. Πράγματι όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2 έχουμε επιβεβαιώσει τα αποτελέσματα για τον δεξιό κλάδο ο οποίος και είναι το αντικείμενο μελέτης μας.

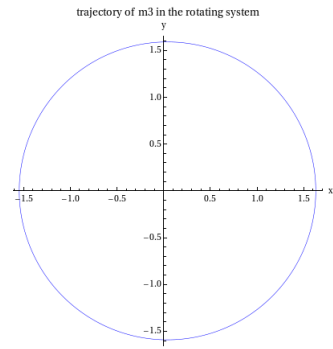


Σχήμα 5.2: Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα Ήλιος-Ποσειδώνας-Κ.Β.Ο.

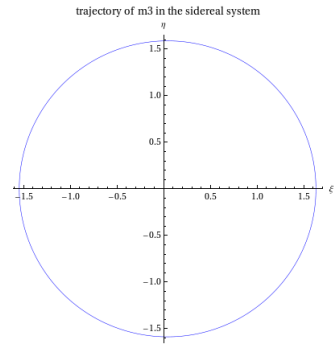
Έτσι έχουμε αρχικά ένα ευσταθές τμήμα περιοδικών τροχιών, στην συνέχεια για μεγαλύτερο x_0 ένα ασταθές τμήμα και τέλος ένα ακόμα ευσταθές τμήμα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει σε αυτό το σημείο να δούμε πως είναι αυτές οι τροχιές στο περιστρεφόμενο σύστημα και πως στο αδρανειακό. Θα μελετήσουμε 4 διαφορετικές περιοδικές τροχιές κατά μήκος της οικογένειας με αρχικές συνθήκες που φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Τροχιά	x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J	Ευστάθεια	e
1	1.6295	-0.856532	12.5634	-3.14905	E	0.0263577
2	2.182	-1.64662	12.5667	-2.96639	A	0.374527
3	2.782	-2.48376	12.5663	-2.28937	A	0.752538
4	3.157	-3.09739	12.5664	-1.00633	E	0.988782

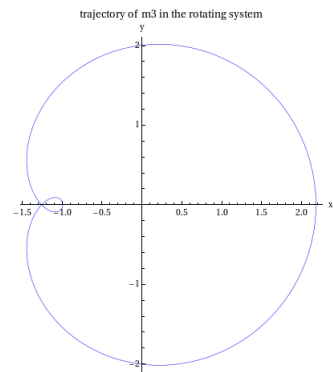
Πίνακας 5.1: Αρχικές συνθήκες περιοδικών τροχιών κατά μήκος της οικογένειας II για μάζα $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$



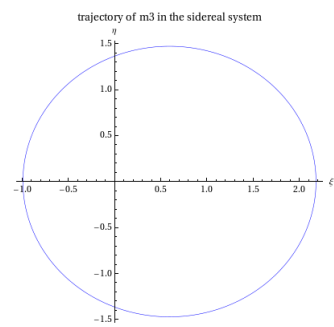
(α) Στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων



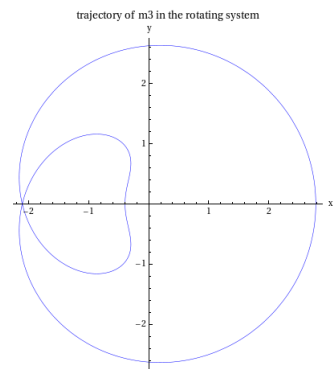
(β) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



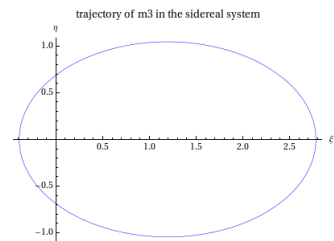
(γ) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



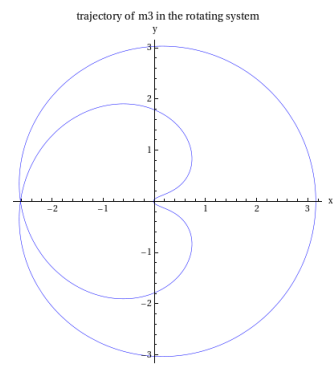
(δ) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



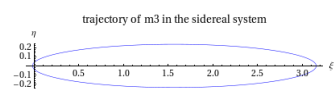
(ε) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



(ρ) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



(ζ) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



(η) Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

Σχήμα 5.3: Οι περιοδικές τροχιές των οποίων οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον πίνακα 5.1

Στον πίνακα 5.1 παρατηρούμε ότι η μία στήλη περιγράφει την εκκεντρότητα της τροχιάς του Κ.Β.Ο. στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων. Προκειμένου να υπολογιστεί αυτή η εκκεντρότητα απαιτείται να μετασχηματίσουμε τις συντεταγμένες στις οποίες εργαζόμαστε σε στοιχεία τροχιάς (orbital elements). Για να συμβεί αυτό καταρχήν περνούμε από το περιστρεφόμενο στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων με τους γνωστούς μετασχηματισμούς και στην συνέχεια εκμεταλλευόμαστε τους επόμενους τύπους οι οποίοι μας δίνουν τον μεγάλο ημιάξονα A και την εκκεντρότητα e αν γνωρίζουμε την θέση και την ταχύτητα του σώματος στο αδρανειακό σύστημα.

$$A = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2}} - \frac{\xi_3^2 + \eta_3^2}{1-\mu}} \quad (5.1)$$

$$e = \sqrt{\frac{1 - (\xi_3 \cdot \dot{\eta}_3 - \eta_3 \cdot \dot{\xi}_3)^2}{A(1-\mu)}} \quad (5.2)$$

Οι υπολογισμοί αυτοί εκτελούνται με την βοήθεια της υπορουτίνας **OrbitalElements**.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η εκτέλεση της υπορουτίνας **OrbitalElements** για την κρίσιμη περίπτωση ευστάθειας, δηλαδή το να προσδιορίσουμε για ποια εκκεντρότητα του Κ.Β.Ο. η τροχιά γίνεται απο ευσταθής ασταθής. Οι αρχικές συνθήκες καθώς επίσης και η εκκεντρότητα στην οποία συμβαίνει αυτή η αλλαγή φαίνεται στον επόμενο πίνακα :

x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J	e
1.642	-0.87512	12.5634	-3.14841	0.0342902

Πίνακας 5.2: Αρχικές συνθήκες περιοδική τροχιάς με κρίσιμη ευστάθεια για $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$

5.2 Συνέχιση περιοδικών τροχιών με παράμετρο το μ

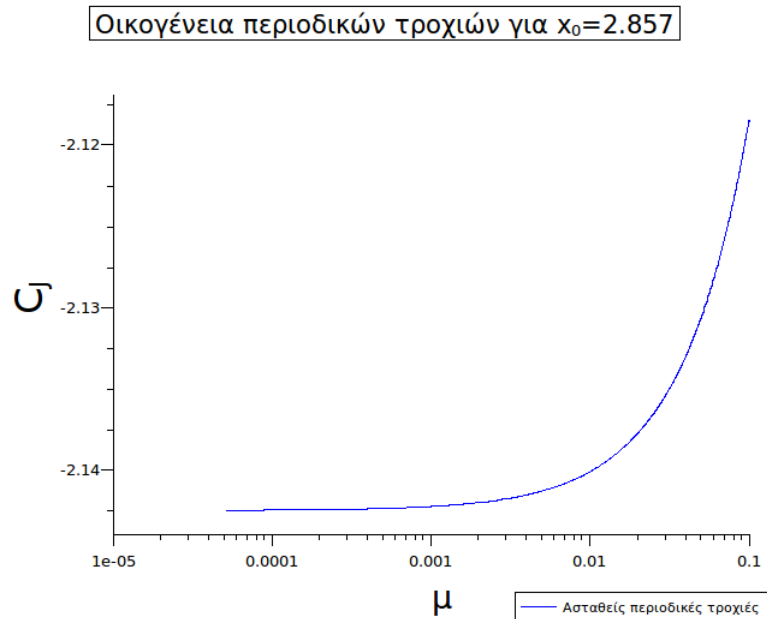
Το επόμενο ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι εάν υπάρχει κάποια οικογένεια περιοδικών τροχιών η οποία έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτήν που μελετήσαμε για διαφορετική τιμή της μάζας μ . Για να προσδιορίσουμε μία τέτοια οικογένεια περιοδικών τροχιών ξεκινάμε από αρχικές συνθήκες πάνω στην οικογένεια II για μάζα $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$. Στην συνέχεια δεν χρησιμοποιούμε σαν ανεξάρτητη μεταβλητή την θέση x_0 όπως κάναμε πριν αλλά την μάζα μ . Ουσιαστικά εάν θεωρήσουμε τον τριδιάστατο χώρο που ορίζεται από τις μεταβλητές x_0, C_J, μ στην πρώτη περίπτωση κινούμαστε πάνω στο επίπεδο $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$ ενώ στην δεύτερη στο επίπεδο $x_0 = \text{σταθερό}$. Έτσι θέλουμε να βρούμε που εντοπίζεται η οικογένεια II εάν ασφαλώς υπάρχει σε διαφορετικά επίπεδα μ . Υπολογιστικά για να το επιτύχουμε αυτό χρησιμοποιούμε την υπορουτίνα **FamiliesMUY** προκειμένου ακριβώς να αλλάξουμε επίπεδα μάζας και στην συνέχεια αφού εντοπίσουμε για αυτά μία περιοδική τροχιά η οποία συμπεριφέρεται όπως η αρχική χρησιμοποιούμε την υπορουτίνα **FamiliesXUY** για να πάρουμε όλη την οικογένεια II στο συγκεκριμένο επίπεδο.

Οι αρχικές συνθήκες από τις οποίες ξεκινήσαμε είναι οι:

x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J
2.857	-2.59229	12.5663	-2.14253444

Πίνακας 5.3: Αρχικές συνθήκες περιοδική τροχιάς πάνω στην II

Η περίεργη αυτή οικογένεια μπορεί να σχεδιαστεί στο επίπεδο $C_J - \mu$ και έχει την εξής μορφή :



Σχήμα 5.4: Οικογένεια περιοδικών τροχιών ξεκινώντας από $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$ και φτάνοντας σε μάζα $\mu = 0.1$

Οι τιμές του μ στις οποίες θα αναζητήσουμε οικογένεια που έχει την ίδια συμπεριφορά με την οικογένεια που παρατηρήσαμε για $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$ είναι οι $\mu = 0.001, \mu = 0.01, \mu = 0.1$. Συνεπώς θα πάρουμε τις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών για αυτές τις τιμές μάζας μ και στην συνέχεια θα εφαρμόσουμε την υπορουτίνα **FamiliesXUY**. Αυτές οι αρχικές συνθήκες είναι οι επόμενες:

μ	x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J
0,001	2.857	-2.59236	12.5645	-2.14231
0,01	2.857	-2.59299	12.5478	-2.14016
0,1	2.857	-2.59901	12.3944	-2.11853

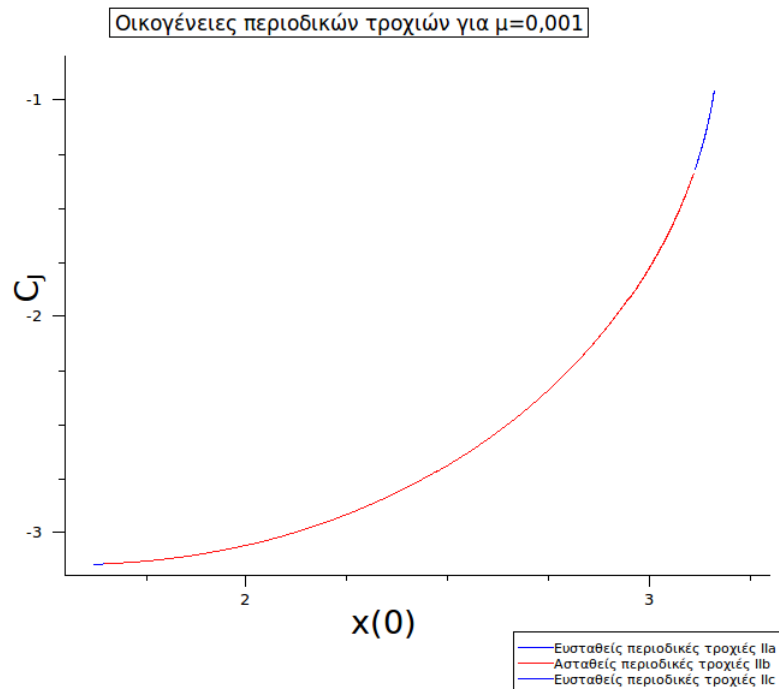
Πίνακας 5.4: Αρχικές συνθήκες περιοδικών τροχιών για διάφορες τιμές μ

5.3 Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Δίας-Κ.Β.Ο. ($\mu = 0.001$)

Η μάζα $\mu = 0.001$ είναι η μάζα του Δία οπότε είναι πολύ ενδιαφέρον να δούμε εάν υπάρχει τέτοιες ελλειπτικές συμμετρικές περιοδικές τροχιές. Πράγματι εφαρμόζοντας την υπορουτίνα **FamiliesXUY** παίρνουμε μία οικογένεια η οποία έχει ίδια χαρακτηριστικά με αυτήν που συναντήσαμε για μάζα $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$. Η οικογένεια φαίνεται στο επόμενο σχήμα:

Η παρατήρηση η οποία πρέπει να γίνει είναι ότι ναι μεν η μορφή των περιοδικών τροχιών της οικογένειας είναι ίδια για αυτό και δεν παραθέτουμε σε αυτό το σημείο και ενδεικτικές τροχιές όπως κάναμε για την μάζα του Ποσειδώνα, εν τούτοις παρατηρούμε ότι τα 2 ευσταθή τμήματα έχουν μικρύνει. Συνεπώς φαίνεται ότι η αύξηση της μάζας μ επιδρά αρνητικά στα ευσταθή τμήματα. Όσον αφορά τώρα στην εκκεντρότητα της τροχιάς που έχει κρίσιμη ευστάθεια οι αρχικές συνθήκες της φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

Αν και τα ευσταθή τμήματα έχουν μικρύνει εν τούτοις η εκκεντρότητα για την οποία παρουσιάζεται οριακή ευστάθεια εδώ είναι μεγαλύτερη αλλά σε κάθε περίπτωση συγκρίσιμη με αυτήν που παρατηρήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση. Κατ' αρχάς φαίνεται ότι η κρίσιμη εκκεντρότητα μεγαλώνει καθώς αυξάνεται η μάζα μ .



Σχήμα 5.5: Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα Ήλιος-Δίας-K.B.O.

x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J	e
1.6492	-0.885495	12.5371	-3.1496	0.03781

Πίνακας 5.5: Αρχικές συνθήκες περιοδική τροχιάς με κρίσιμη ευστάθεια για $\mu=0,001$

5.4 Η οικογένεια II στο σύστημα με $\mu = 0.01$

Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία την οποία αναλύσαμε πιο πριν προκειμένου να πάρουμε την οικογένεια II στο σύστημα με μάζα $\mu=0,01$. Η οικογένεια για αυτήν την μάζα έχει την μορφή:

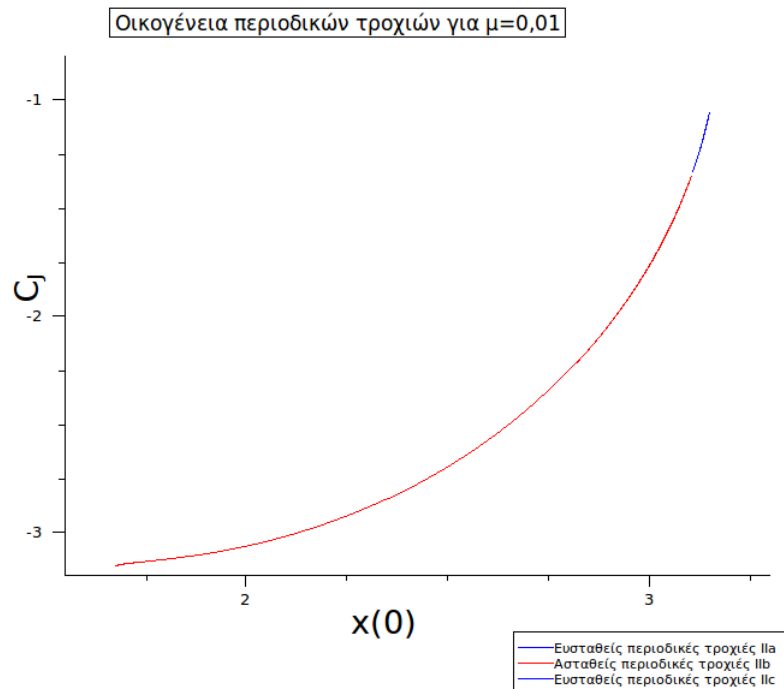
Και σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να παρατηρήσουμε το ότι η αύξηση του μ έχει ως αποτέλεσμα την περαιτέρω στένωση των ευσταθών περιοχών και ειδικά της πρώτης περιοχής. Αναφορικά τώρα με την εκκεντρότητα για την οποία έχουμε κρίσιμη ευστάθεια οι αρχικές συνθήκες της αντίστοιχης περιοδικής τροχιάς είναι οι επόμενες:

x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J	e
1.67634	-0.922853	12.3095	-3.16173	0.03429

Πίνακας 5.6: Αρχικές συνθήκες περιοδική τροχιάς με οριακή ευστάθεια για $\mu=0,01$

Όπως παρατηρούμε η εκκεντρότητα της ελλειπτικής τροχιάς μειώνεται τώρα ελάχιστα σε σχέση με πριν. Δεν θα ήταν λάθος να πούμε ότι πρακτικά η εκκεντρότητα για την οποία έχουμε οριακή ευστάθεια είναι περίπου η ίδια μέχρι τώρα καθώς οι αυξομειώσεις της είναι πολύ μικρές. Το άξιον όμως σχολιασμού τώρα είναι το γεγονός ότι πλέον αν και έχουμε περιοδικές τροχιές οι οποίες στο περιστρεφόμενο σύστημα έχουν ίδια μορφή με αυτές που συναντούσαμε πριν εν τούτοις περνώντας στο αδρανειακό σύστημα αυτό που βλέπουμε δεν είναι μία τέλεια έλλειψη. Σαν παράδειγμα αυτής της συμπεριφοράς παραθέτουμε την τροχιά με αρχικές συνθήκες:

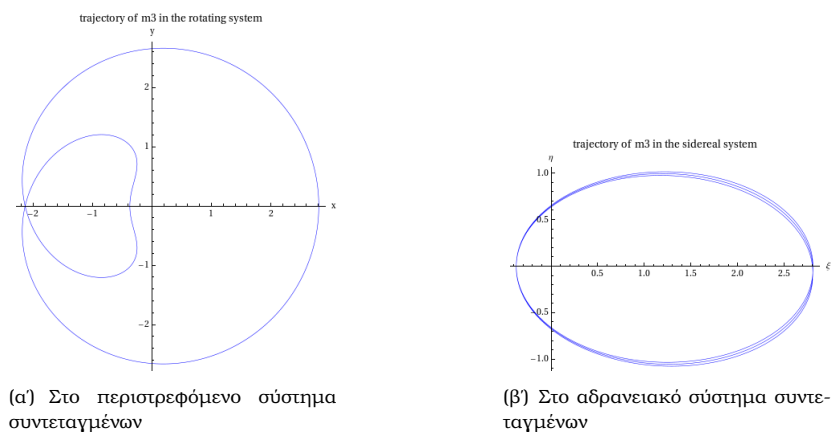
Η τροχιά είναι η επόμενη:



Σχήμα 5.6: Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα με $\mu = 0.01$

x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J	e
2.808	-2.52143	12.549871	-2.24088	0.767073

Πίνακας 5.7: Αρχικές συνθήκες τυχαίας περιοδική τροχιάς με $\mu=0.01$



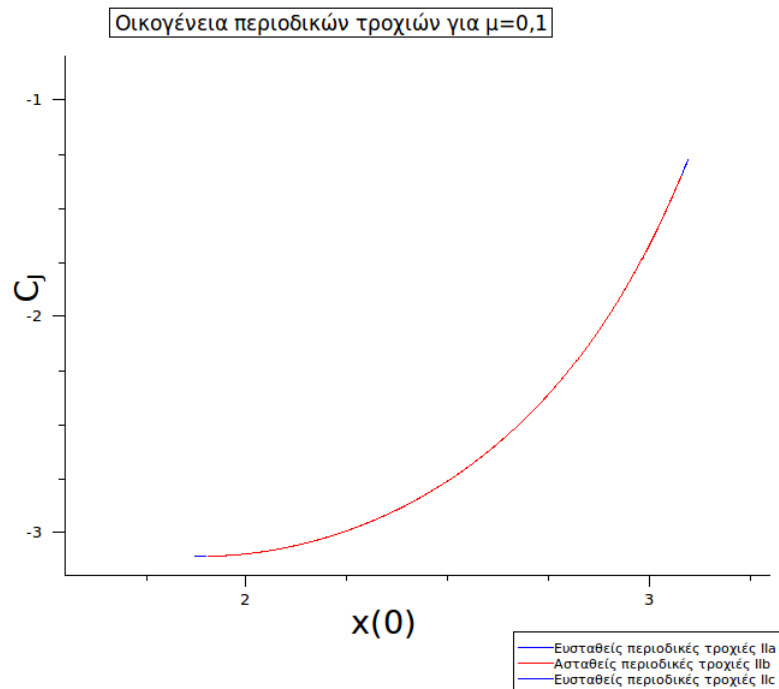
Σχήμα 5.7: Οι περιοδικές τροχιές των οποίων οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον πίνακα 5.1

Πράγματι λοιπόν φαίνεται σε αυτό το σχήμα το γεγονός ότι δεν έχουμε πλέον τέλειες ελλείψεις. Συνεπώς πλέον ίσως η έννοια της εκκεντρότητας να μην περιγράφει και τόσο καλά την τροχιά μας.

5.5 Η οικογένεια II στο σύστημα με $\mu = 0.1$

Σε αυτήν την μάζα πλέον όπως θα δούμε και στο σχήμα η συμπεριφορά της οικογένειας αλλάζει. Ναι μεν βρισκόμαστε λοιπόν στην ίδια οικογένεια με τις άλλες μάζες εν τούτοις υπάρχουν έντονες διαφοροποιήσεις στις παρατηρήσεις που κάναμε πριν. Η οικογένεια σε

αυτήν την μάζα φαίνεται στο επόμενο σχήμα :



Σχήμα 5.8: Η Οικογένεια περιοδικών τροχιών II στο σύστημα με $\mu = 0.1$

Σε αυτήν λοιπόν την περίπτωση συμβαίνει το παράδοξο της μεγέθυνσης της ευσταθούς περιοχής στο πρώτο τμήμα ενώ έχουμε στένωση του δεύτερου ευσταθούς τμήματος. Ακόμη το φαινόμενο των κακοσχηματισμένων ελλείψεων εδώ γίνεται εντονότερο, ενώ τέλος δεν μπορούμε να έχουμε ελλείψεις με πάρα πολύ μικρή εκκεντρότητα οι οποίες προσεγγίζουν τις κυκλικές τροχιές όπως πριν. Για να γίνουν σαφέστερα τα λεγόμενά μας θα πρέπει να παραθέσουμε κάποιες διαφορετικές τροχιές καθώς αυξάνεται το x_0 και μειώνεται η εκκεντρότητα όπως κάναμε και για την μάζα $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$. Στα παρακάτω σχήματα οι τροχιές μελετούνται για χρόνο 3πλάσιο από την περίοδο της περιοδικής τροχιάς και για αρχικές συνθήκες:

Τροχιά	x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J	Ευστάθεια
1	1.9	-1.2634	14.9855	-3.1137	E
2	2.101	-1.5247	13.5085	-3.0737	A
3	2.434	-1.9808	12.7499	-2.8414	A
4	3.085	-2.9734	12.4874	-1.3331	E

Πίνακας 5.8: Αρχικές συνθήκες περιοδικών τροχιών κατά μήκος της οικογένειας II για μάζα $\mu = 0, 1$

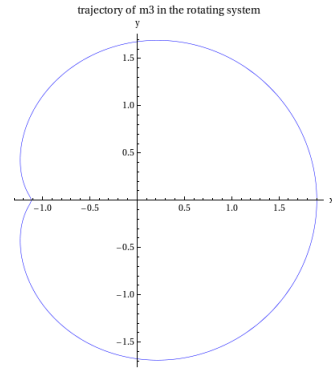
Παρατηρώντας το σχήμα 5.8 παρατηρούμε το γιατί πλέον δεν νοείτε να μιλήσουμε για εκκεντρότητα των ελλειπτικών τροχιών διότι πλέον έχουμε τεράστια παραμόρφωση σε αυτές. Παρ' όλα αυτά βλέπουμε ότι η μορφή των τροχιών στο περιστρεφόμενο σύστημα είναι ίδια με οπότε βρισκόμαστε στην σωστή οικογένεια. Προφανώς δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για οριακή εκκεντρότητα για την οποία έχουμε κρίσιμη ευστάθεια εν τούτοις παραθέτουμε τις αρχικές συνθήκες αυτής της τροχιάς.

Προκειμένου να κλείσουμε το κεφάλαιο που αφορά στην συμπεριφορά της οικογένειας αυτής σε διάφορες μάζες θα παραθέσουμε ένα τρισδιάστατο διάγραμμα με άξονες x_0, C_J, μ προκειμένου να δούμε καλύτερα την μορφή της οικογένειας για τις διάφορες μάζες. Επιπλέον θα παραθέσουμε και την οικογένεια που προήλθε όταν χρησιμοποιήσαμε ως

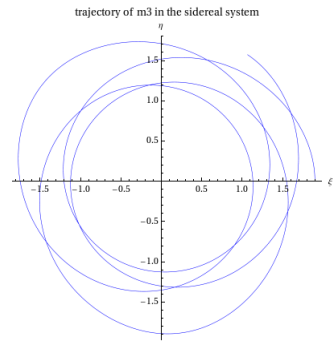
x_0	u_{y0}	Περίοδος	C_J
1.9049	-1.26967	14.9091	-3.1137

Πίνακας 5.9: Αρχικές συνθήκες περιοδική τροχιάς με οριακή ευστάθεια για $\mu=0,1$

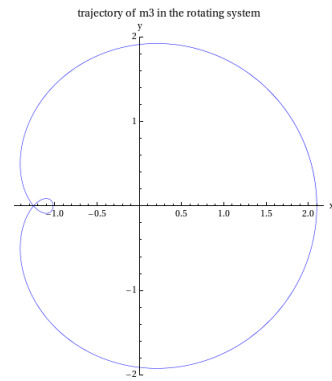
ανεξάρτητη συντεταγμένη το μ και η οποία μας βοήθησε να προσδιορίσουμε και τις άλλες οικογένειες:



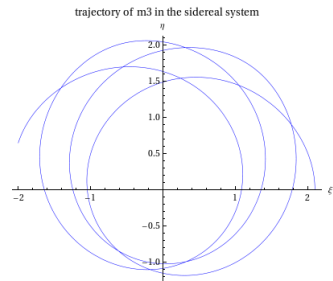
(α') Στο περιστρεφόμενο σύστημα συντεταγμένων



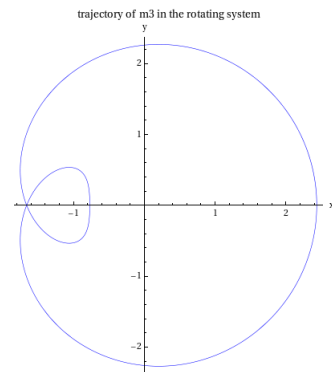
(β') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



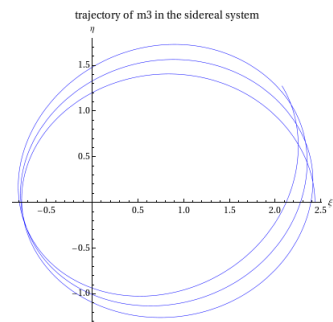
(γ') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



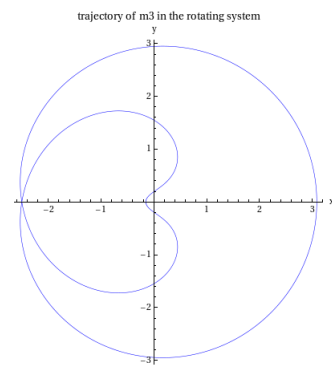
(δ') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



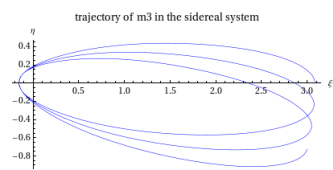
(ε') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



(ε') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

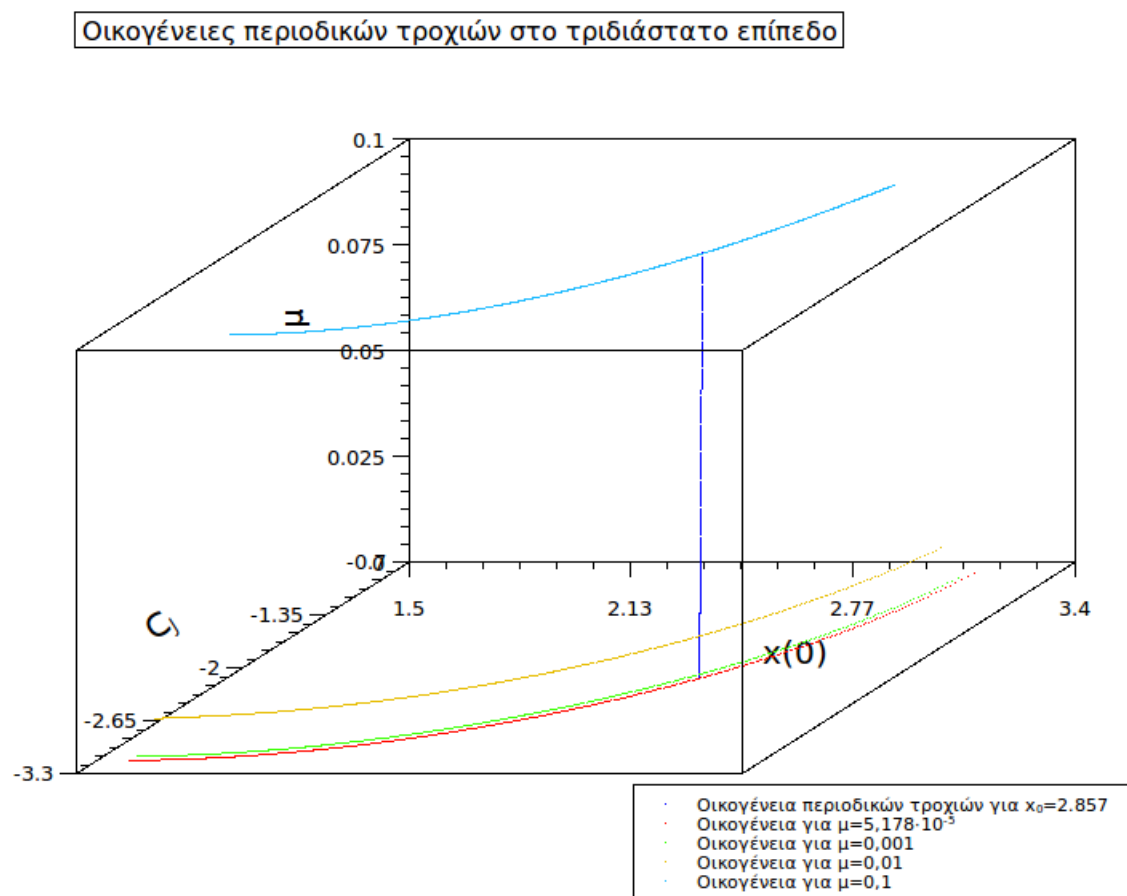


(ζ') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων



(η') Στο αδρανειακό σύστημα συντεταγμένων

Σχήμα 5.9: Οι περιοδικές τροχιές των οποίων οι αρχικές συνθήκες φαίνονται στον πίνακα 5.8



Σχήμα 5.10: Όλες οι οικογένειες περιόδων τροχιών που μελετήθηκαν σε κοινό διάγραμμα

Κεφάλαιο 6

Μετάβαση από το κυκλικό στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα

Το επόμενο θέμα το οποίο θα μας απασχολήσει στην παρούσα εργασία είναι το πως εξελίσσονται οι περιοδικές τροχιές τις οποίες μελετήσαμε στο περιορισμένο κυκλικό πρόβλημα όταν είτε το τρίτο σώμα αποκτήσει και αυτό μάζα δηλαδή περάσουμε στο γενικό πρόβλημα των τριών σωμάτων, είτε όταν οι τροχιές των δύο σωμάτων με μάζα στο κυκλικό πρόβλημα γίνουν ελλειπτικές δηλαδή όταν περάσουμε στο ελλειπτικό πρόβλημα των 3 σωμάτων.

Έτσι χρησιμοποιώντας αρχικές συνθήκες που αντιστοιχούν σε περιοδικές τροχιές του κυκλικού προβλήματος βλέπουμε την συμπεριφορά τους στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα. Η μελέτη που θα κάνουμε γίνεται σε 2 άξονες. Σε πρώτη φάση μελετούμε το εάν οι τροχιές είναι ευσταθείς ή ασταθείς και στην συνέχεια μελετούμε εάν οι τροχιές είναι κανονικές ή χαοτικές.

6.1 Ευστάθεια τροχιών στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα

Ξεκινώντας από την μελέτη της ευστάθειας του συστήματος είδαμε ότι στην περίπτωση του κυκλικού προβλήματος όταν είχαμε περιοδικές τροχιές χρησιμοποιούσαμε τον δείκτη ευστάθειας K προκειμένου να χαρακτηρίσουμε μία τροχιά. Τώρα είτε μιλάμε για το ελλειπτικό πρόβλημα είτε για το γενικό το ότι οι αρχικές συνθήκες θα προκύπτουν από περιοδικές τροχιές του κυκλικού προβλήματος δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη περιοδικής τροχιάς στο γενικό και το ελλειπτικό πρόβλημα. Μάλιστα υπάρχει ολόκληρη θεωρία για το που βρίσκονται οι περιοδικές τροχιές καθώς περνάμε από το κυκλικό στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα η οποία δεν θα αναλυθεί στα πλαίσια αυτής της εργασίας. Συνεπώς στην μελέτη που θα κάνουμε δεν είναι καθόλου χρήσιμος ο συντελεστής ευστάθειας. Αυτό το οποίο θα κάνουμε για να κάνουμε έναν τέτοιο χαρακτηρισμό είναι να εξελίξουμε την τροχιά για μεγάλο διάστημα και στην συνέχεια να μελετήσουμε την θέση του σώματος m_3 καθώς και την απόσταση μεταξύ των 2 άλλων σωμάτων. Έτσι αν οι τιμές αυτών των αποστάσεων ξεπερνούν μία τιμή κατωφλίου τότε θεωρούμε ότι έχουμε τροχιές διαφυγής ενώ σε αντίθετη περίπτωση έχουμε κανονικές τροχιές.

6.2 Ο δείκτης χαοτικότητας $F.L.I$

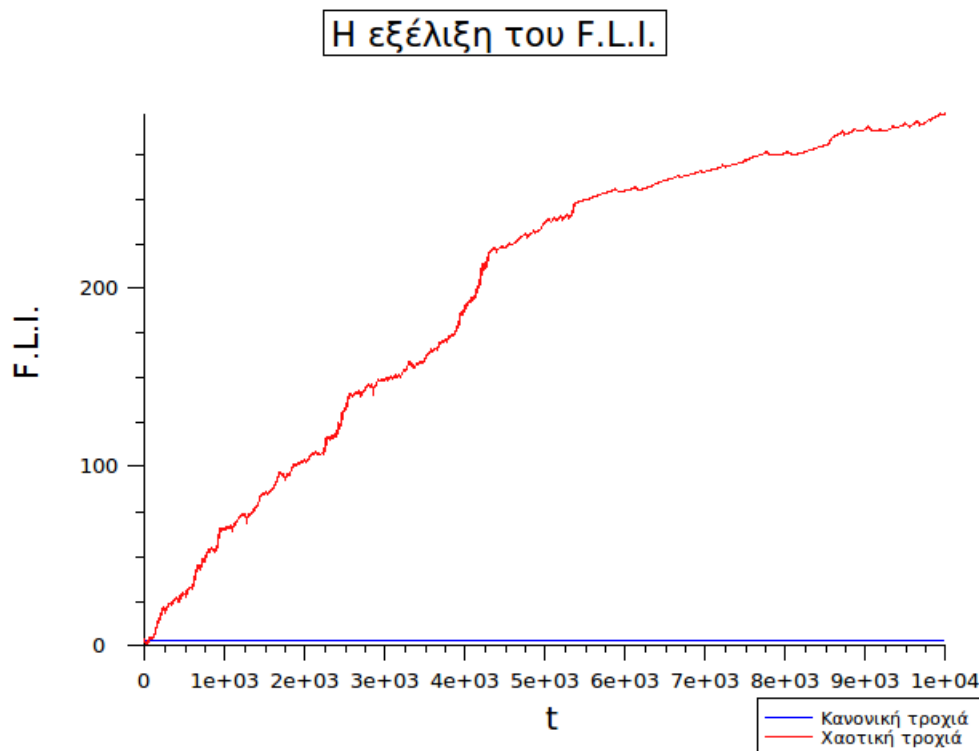
Προκειμένου τώρα να χαρακτηρίσουμε το εάν μία τροχιά είναι κανονική ή χαοτική υπάρχουν πολλοί διαφορετικοί δείκτες οι οποίοι απαντούν σε αυτό το ερώτημα. Τέτοιοι δείκτες είναι οι εκθέτες Lyapunov καθώς επίσης και οι δείκτες G.A.L.I. Ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν αυτοί οι δείκτες μπορούμε να αποφανθούμε αρκετά αξιόπιστα για το εάν οι τρο-

χίες είναι κανονικές οι χαοτικές. Στην παρούσα εργασία χρησιμοποιήθηκε ως εργαλείο για τον χαρακτηρισμό των τροχιών ο δείκτης F.L.I. , (Fast Lyapunov Indicator) κυρίως γιατί μπορεί πολύ σύντομα να χαρακτηρίσει μία τροχιά.

Ως δείκτης F.L.I. ορίζεται η ποσότητα :

$$F.L.I. = \sup(\log(\frac{|\vec{w}(t)|}{t})) \quad (6.1)$$

Ο χαρακτηρισμός μιας τροχιάς ως κανονική ή χαοτική γίνεται μέσα από το διάγραμμα του F.L.I., και στηρίζεται στην εμφανώς διακριτή συμπεριφορά μιας χαοτικής από μια κανονική τιμή. Έτσι ο δείκτης F.L.I. μιας κανονικής τροχιάς είναι περίπου σταθερός σε τιμές μικρότερες από 10 ενώ στην περίπτωση χαοτικής τροχιάς έχουμε ταχεία αύξηση του με το χρόνο σε τιμές μεγαλύτερες από 10. Στο διάγραμμα παρατηρούμε την διαφορετική αυτή συμπεριφορά.



Σχήμα 6.1: Η διακριτή συμπεριφορά μιας χαοτικής και μιας κανονικής τροχιάς

Καθώς θα χρησιμοποιούμε τον δείκτη F.L.I. θα πρέπει να προσέξουμε ότι δεν έχει νόημα να μιλήσουμε για χαοτικές τροχιές όταν έχουμε τροχιές διαφυγής. Συνεπώς χαρακτηρίζουμε ως χαοτική ή κανονική μία τροχιά που δεν διαφεύγει.

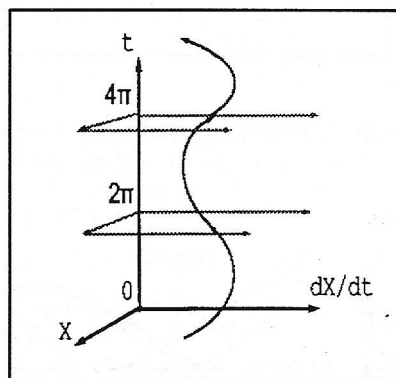
Ο προσδιορισμός του F.L.I. στηρίζεται στην επίλυση τως εξισώσεων μεταβολών. Το μόνο που θα πρέπει να προσέξουμε υπολογίζοντας τον είναι να γράψουμε σωστά τις εξισώσεις μεταβολών για κάθε περίπτωση του προβλήματος των 3 σωμάτων. Δηλαδή οι εξισώσεις μεταβολών είναι διαφορετικές στο ελλειπτικό και στο γενικό πρόβλημα από ότι στο κυκλικό πρόβλημα. Έχουμε αναφερθεί ήδη ενδελεχώς στον τρόπο υπολογισμού των εξισώσεων μεταβολών και για λόγους συντομίας δεν θα αναφέρουμε την μορφή τους στα 2 άλλα προβλήματα.

Υπολογιστικά ο F.L.I. βρίσκεται με την βοήθεια των υπορουτίνων **FLI**, **FLIElliptic** και **FLIGeneral** ανάλογα με το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει οι οποίες απλώς λύνουν τις εξισώσεις μεταβολών για κάθε περίπτωση και μετά απλά βρίσκουν τον λογάριθμο του μέτρου του αθροίσματός των τετραγώνων των λύσεων $w_i(t)$.

6.3 Η τομή Poincare στο περιορισμένο ελλειπτικό πρόβλημα

Ένας εναλλακτικός τρόπος που χρησιμοποιήσαμε στην εργασία μας και ιδιαίτερα στην περίπτωση του ελλειπτικού προβλήματος ώστε να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα που προέκυψαν από τον F.L.I. είναι εποπτικά μέσω της επιφάνειας τομής Poincare. Έτσι εκμεταλλευτήκαμε την διακριτή συμπεριφορά που έχουν οι χαοτικές και οι κανονικές τροχιές στην τομή.

Βεβαίως ο τρόπος με τον οποίο δημιουργείται μια επιφάνεια τομής Poincare στο ελλειπτικό πρόβλημα είναι διαφορετικός από αυτόν που είδαμε για το κυκλικό πρόβλημα. Στην περίπτωση του κυκλικού προβλήματος τα σημεία της τομής προέκυπταν στο επίπεδο $x - \dot{x}$ όταν για δεδομένη ενέργεια C_J γινόταν το $y = 0$. Στο ελλειπτικό πρόβλημα δεν υπάρχει το ολοκλήρωμα του Jacobi οπότε πρέπει να βρεθεί μία “εναλλακτική επιφάνεια τομής Poincare”. Η βασική ιδέα για την κατασκευή μιας τέτοιας επιφάνειας τομής είναι να παρακολουθούμε την εξέλιξη μιας τροχιάς στο χρόνο και ανά χρόνο T όπου T είναι η περίοδος της κίνησης των πρωτευόντων (υπολογισμός περιόδου βλέπε σχέση 1.27) να παίρνουμε τις συντεταγμένες $x, \dot{x}$ και να κατασκευάζουμε ένα σημείο στην τομή. Έτσι μπορούμε να πάρουμε μία σειρά απο σημεία τα οποία και δημιουργούν αυτήν την νέα επιφάνεια τομής Poincare. Αναλυτικότερα η διαδικασία φαίνεται στο σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Κατασκευή τομής Poincare για το ελλειπτικό σύστημα

Μέσω αυτής μπορούμε να διακρίνουμε αρκετά εύκολα στις περισσότερες περιπτώσεις το εάν μία τροχιά είναι κανονική ή χαοτική από την διάταξη των σημείων. Εάν τα σημεία είναι τυχαία διασκορπισμένα τότε η τροχιά μας είναι χαοτική ενώ εάν σχηματίζουν μια αναλλοίωτη καμπύλη τότε η τροχιά μας είναι κανονική. Ασφαλώς λόγω του ότι η μέθοδος είναι εποπτική και όχι αριθμητική υπάρχει η πιθανότητα να μην είναι εύκολη η διάκριση μεταξύ των 2 συμπεριφορών οπότε μία λύση είναι η αύξηση του χρόνου ολοκλήρωσης. Ακόμη και έτσι κάποιες φορές είναι πιθανό να μην μπορέσουμε να έχουμε εύκολα διακριτή συμπεριφορά. Ως εκ τούτου η μέθοδος χρησιμοποιείται όχι για την εξαγωγή συμπερασμάτων αλλά για την επιβεβαίωση των δεδομένων που προέρχονται από τον F.L.I..

Υπολογιστικά είναι πολύ εύκολα να κατασκευάσουμε μία τέτοια τομή απλώς εκτελώντας την αριθμητική ολοκλήρωση για τις δοθείσες αρχικές συνθήκες και στην συνέχεια παίρνοντας τις τιμές των $x, \dot{x}$ ανά χρόνο 2π . Η υπορουτίνα με την οποία δημιουργούμε αυτές τις επιφάνειες τομής Poincare είναι η **PoincareSectionElliptic**.

Κεφάλαιο 7

Η συμπεριφορά των ευσταθών περιοδικών τροχιών της οικογένειας II περνώντας από το κυκλικό στο γενικό και το ελλειπτικό πρόβλημα

Στο παρόν κεφάλαιο της εργασίας ως βάση των υπολογισμών μας θα έχουμε περιοδικές τροχιές οι οποίες βρίσκονται στο μέσο του πρώτου τμήματος (ευσταθούς) της οικογένειας II(IIa). Χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες αυτών των περιοδικών τροχιών εν συνεχεία είτε θα περνάμε στο ελλειπτικό πρόβλημα δίνοντας εκκεντρότητα στην κίνηση των 2 σωμάτων με μάζα είτε θα περνάμε στο γενικό πρόβλημα δίνοντας μάζα στο τρίτο σώμα m_3 .

Οι υπολογισμοί θα γίνουν για διάφορες τιμές εκκεντρότητας (εκκίνηση και από το περιήλιο και από το αφήλιο) αλλά και για διάφορες τιμές μάζας το τρίτου σώματος m_3 . Ασφαλώς προκειμένου να προχωρήσουμε θα πρέπει να δώσουμε τις αρχικές συνθήκες των περιοδικών τροχιών του κυκλικού προβλήματος τις οποίες θα μελετήσουμε. Οι περιοδικές τροχιές αυτές θα είναι 4, μία για κάθε τιμή του μ για την οποία υπολογίσαμε την οικογένεια II.

Τροχιά	μ	x_0	u_{y0}
1	$5,178 \cdot 10^{-5}$	1,63	-0,8572
2	0,001	1,63	-0,8561
3	0,01	1,6762	-0,9224
4	0,1	1,88	-1,2388

Πίνακας 7.1: Αρχικές συνθήκες περιοδικών τροχιών κατά μήκος της οικογένειας II για τις διάφορες τιμές μ .

Οι τιμές της εκκεντρότητας τις οποίες θα δώσουμε στο σύστημα όταν βρισκόμαστε στο ελλειπτικό πρόβλημα καθώς επίσης και οι τιμές της μάζας m_3 φαίνονται όλες στον πίνακα 7.2. Στην συνέχεια του κεφαλαίου θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν μέσω του F.L.I. για την κανονικότητα των τροχιών καθώς επίσης και το εάν οι τροχιές διαφεύγουν ή όχι με βάση την θεωρία που αναπτύξαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Για τροχιές διαφυγής όπως εξηγήσαμε και πριν δεν θα παραθέσουμε τον F.L.I. διότι δεν έχει κανένα νόημα σε αυτές τις περιπτώσεις. Τέλος δεδομένου ότι ο F.L.I. δύναται να χαρακτηρίσει το είδος μιας τροχιάς αρκετά σύντομα (για μικρό χρονικό διάστημα αριθμητικής ολοκλήρωσης), ο υπολογισμός του γίνεται για χρόνο $t = 1000$ εκτός από περιπτώσεις που η συμπεριφορά είναι οριακή οπότε τον υπολογίζουμε για περισσότερο χρόνο.

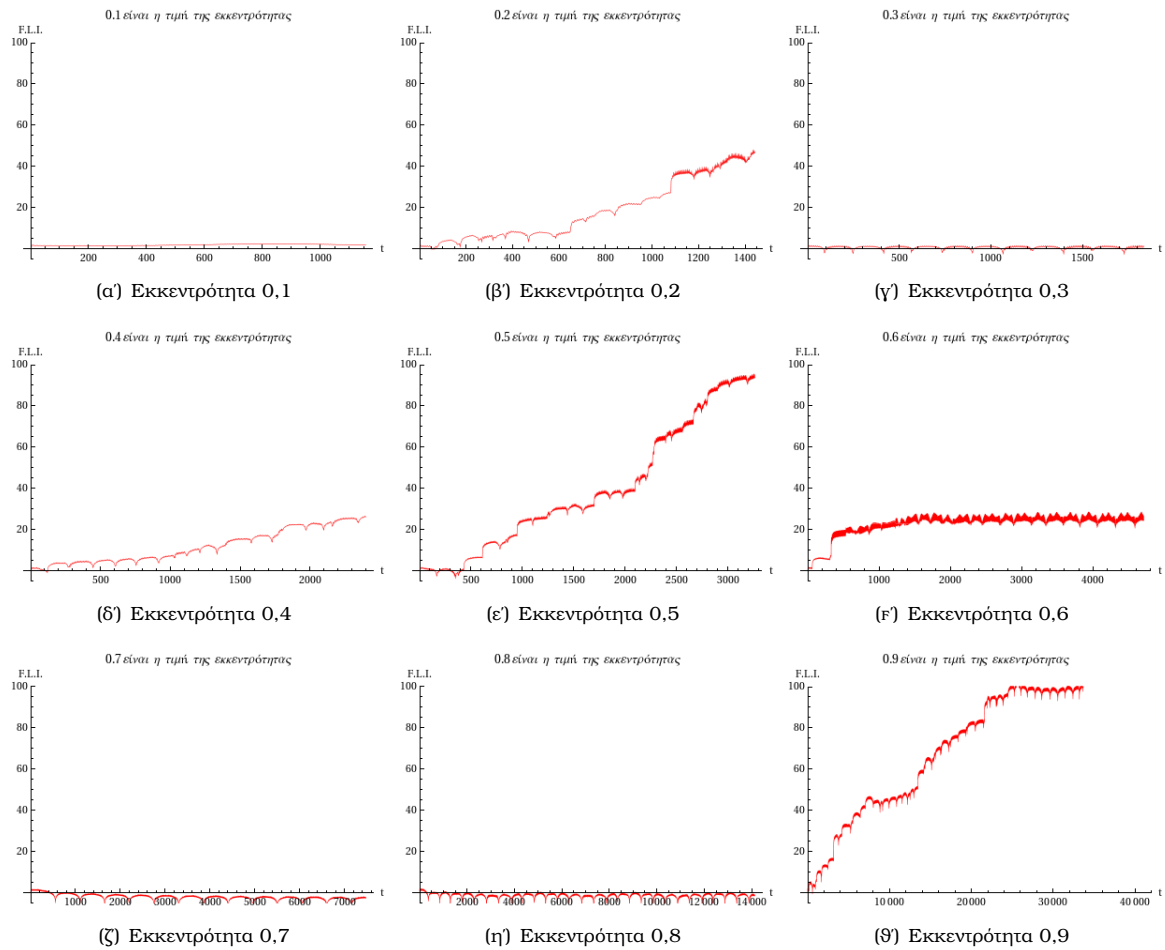
Ελλειπτικό Από περιήλιο	πρόβλημα Από αφήλιο	Γενικό πρόβλημα m_3
0,1	-0,1	10^{-10}
0,2	-0,2	10^{-9}
0,3	-0,3	10^{-8}
0,4	-0,4	10^{-7}
0,5	-0,5	10^{-6}
0,6	-0,6	10^{-5}
0,7	-0,7	10^{-4}
0,8	-0,8	10^{-3}
0,9	-0,9	10^{-2}

Πίνακας 7.2: Οι διάφορες τιμές της εκκεντρότητας και της μάζας m_3 οι οποίες μελετήθηκαν.

7.1 Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Ποσειδώνας-Κ.Β.Ο. ($\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$)

7.1.1 Μεταβολή της εκκεντρότητας του Ποσειδώνα

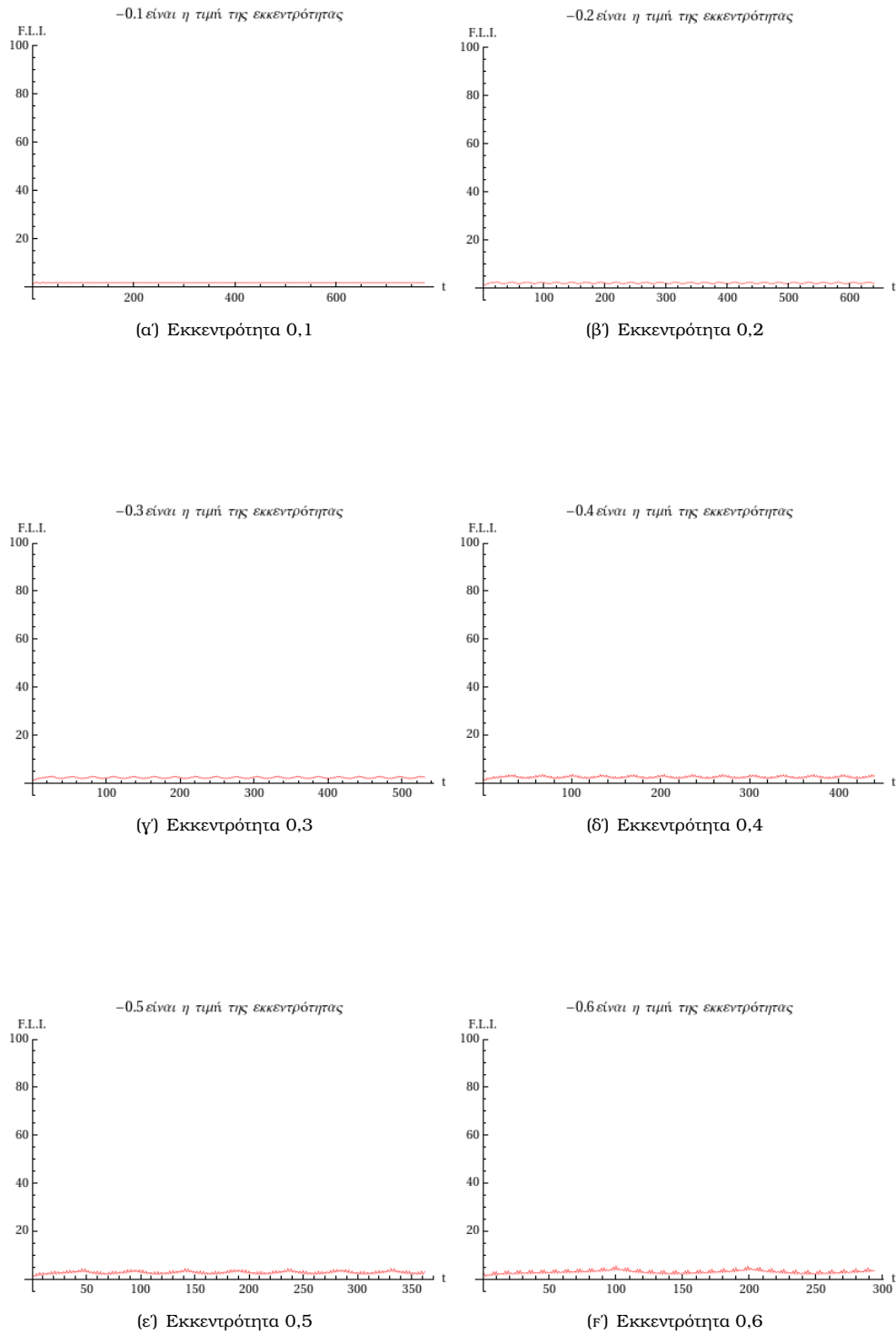
Εκκίνηση από το περιήλιο



Σχήμα 7.1: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$

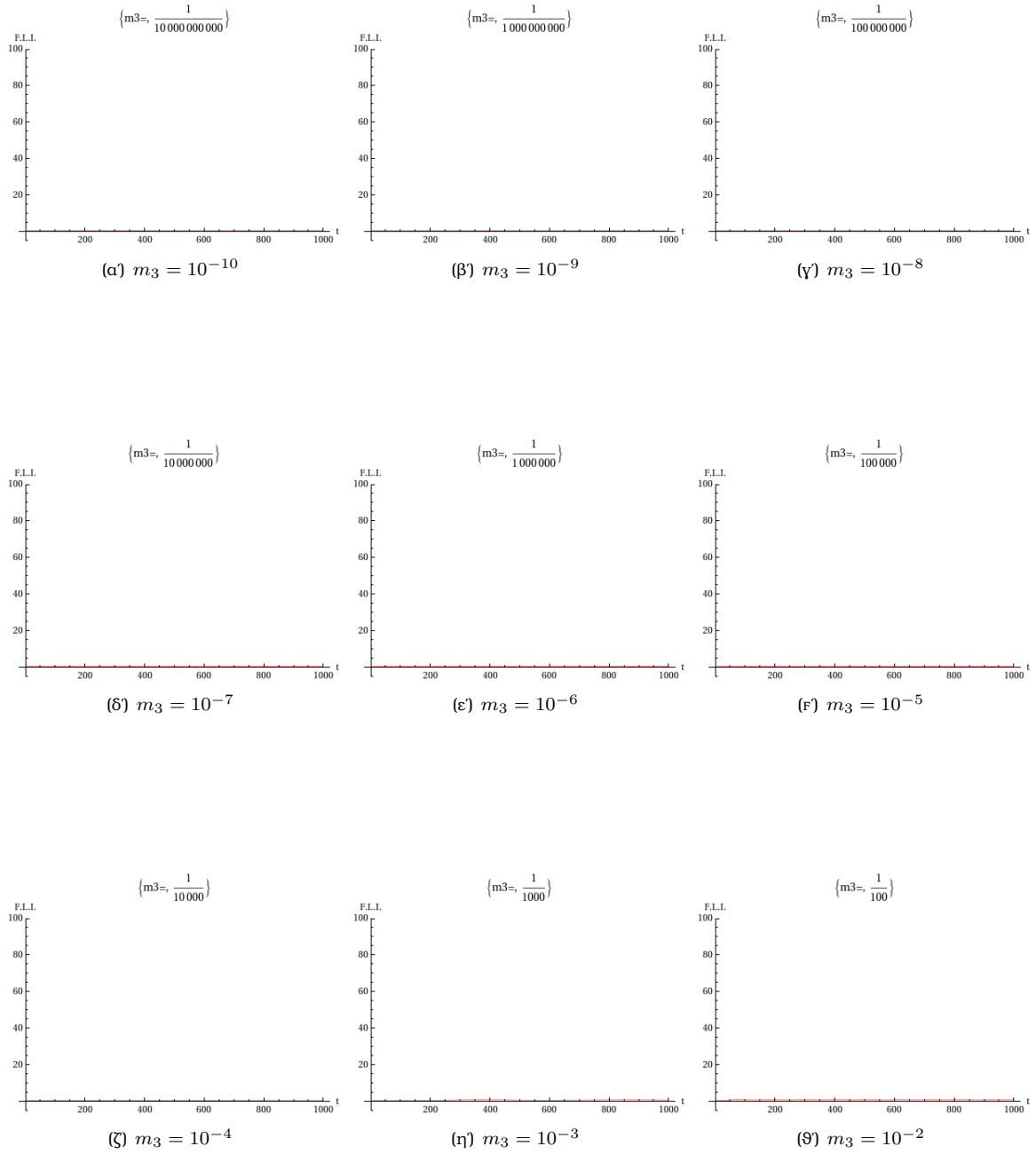
Εκκίνηση από το αφήλιο

Για την περίπτωση του αφήλιου πήραμε αποτελέσματα μόνο για 6 εκκεντρότητες γιατί για τις άλλες περιπτώσεις είχαμε τροχιές διαφυγής. Η εξέλιξη του F.L.I. φαίνεται στα 2 επόμενα διαγράμματα.



Σχήμα 7.2: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$

7.1.2 Μεταβολή της μάζας του Κ.Β.Ο.

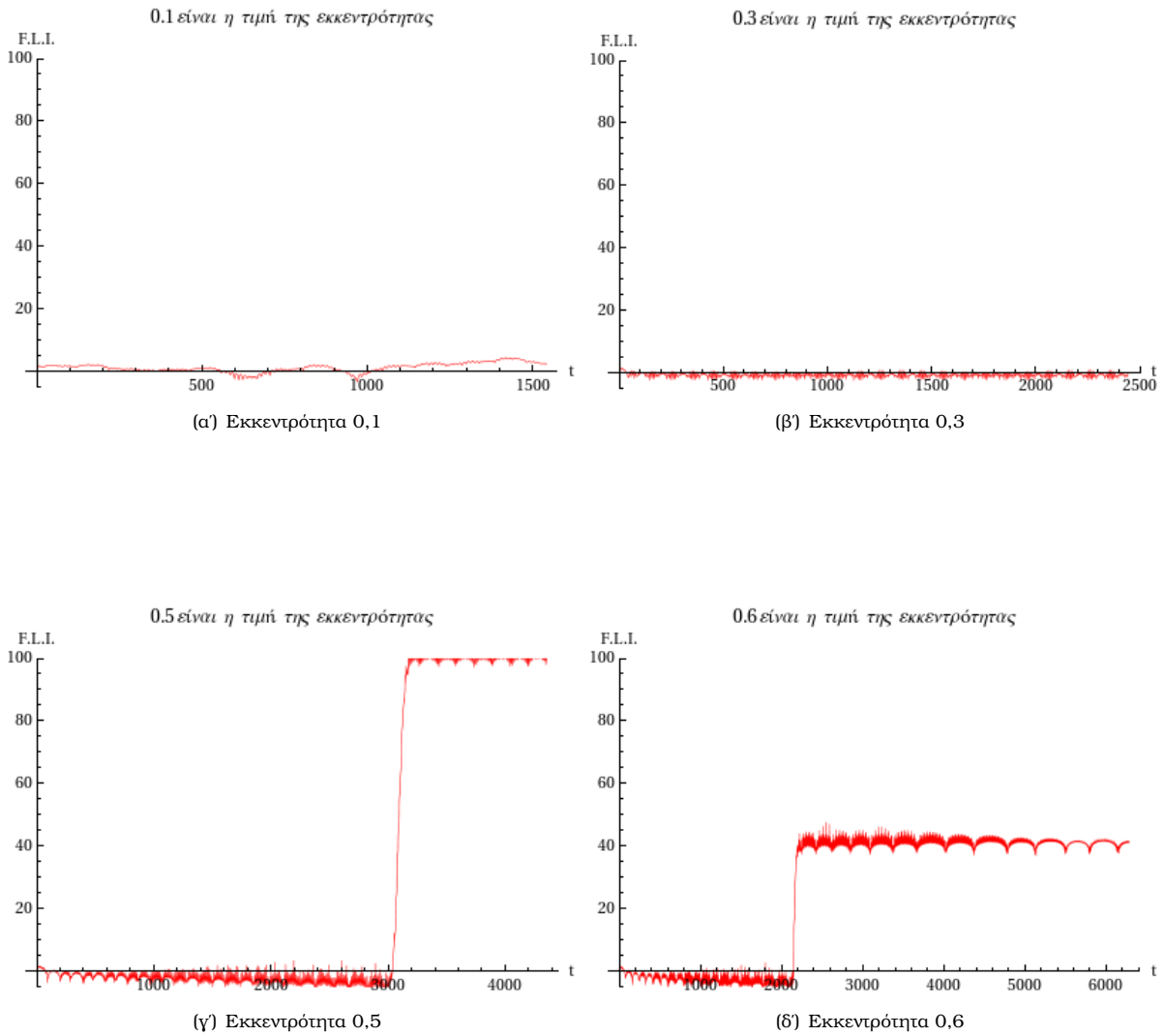


Σχήμα 7.3: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 5,178 \cdot 10^{-5}$

7.2 Η οικογένεια II στο σύστημα Ηλιος-Δίας-Κ.Β.Ο. ($\mu = 0.001$)

7.2.1 Μεταβολή της εκκεντρότητας του Δία

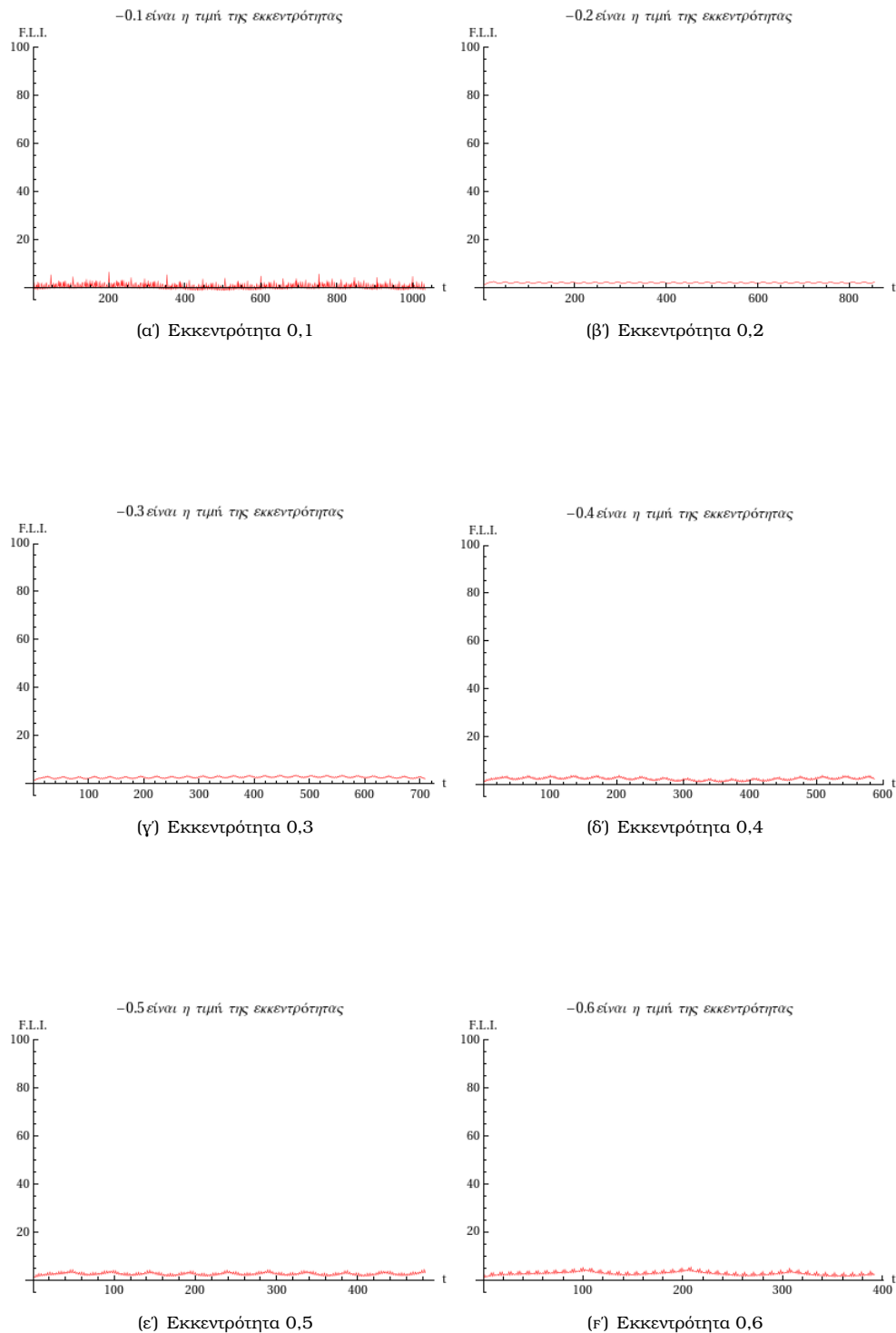
Εκκίνηση από το περιήλιο



Σχήμα 7.4: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,001$

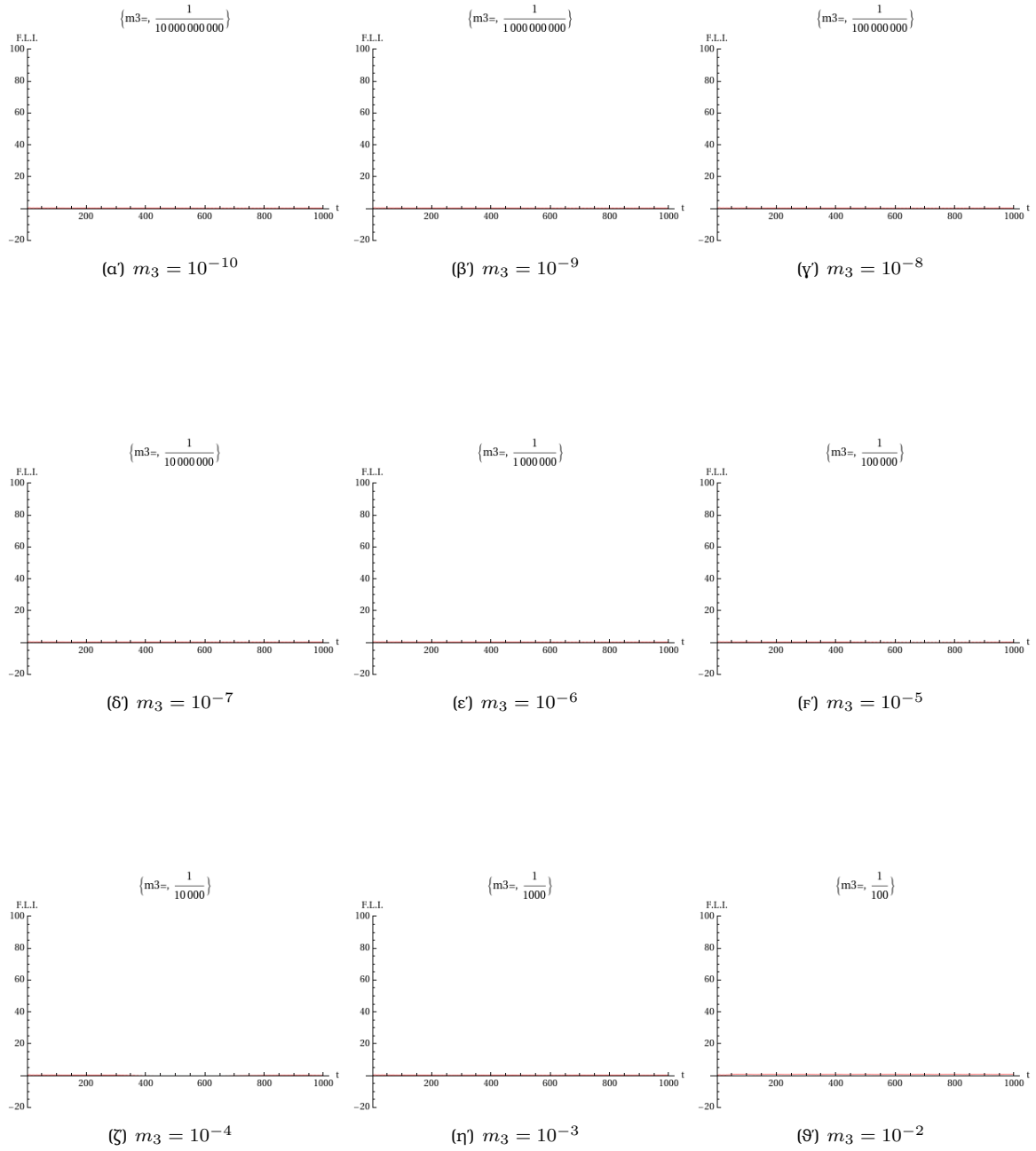
Εκκίνηση από το αφήλιο

Για την περίπτωση του αφήλιου πήραμε αποτελέσματα μόνο για 2 εκκεντρότητες γιατί για όλες τις άλλες περιπτώσεις είχαμε τροχιές διαφυγής. Η εξέλιξη του F.L.I. φαίνεται στα 2 επόμενα διαγράμματα.



Σχήμα 7.5: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,001$

7.2.2 Μεταβολή της μάζας του Κ.Β.Ο.



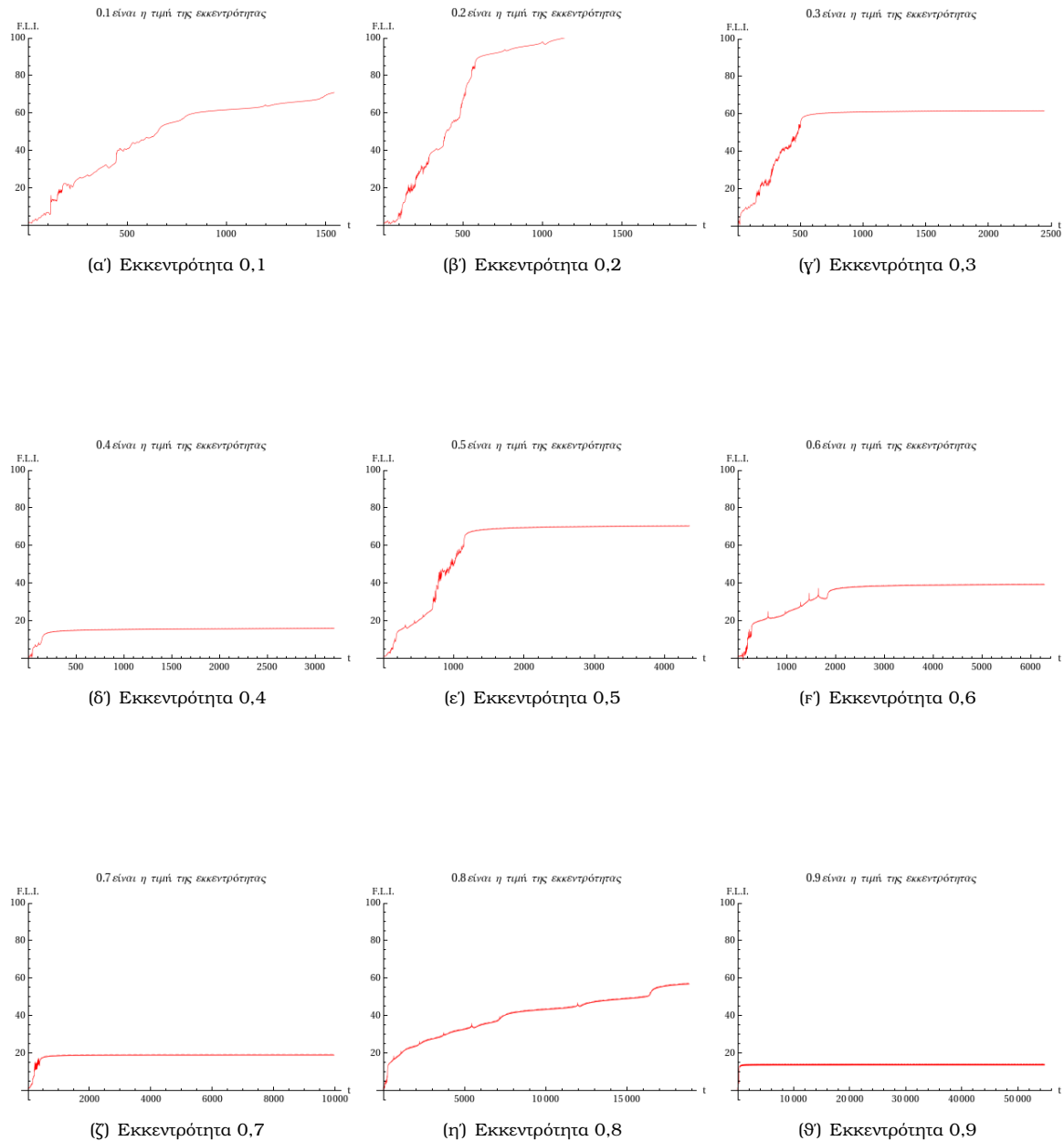
Σχήμα 7.6: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 0,001$

7.3 Η οικογένεια II στο σύστημα με $(\mu = 0.01)$

7.3.1 Μεταβολή της εκκεντρότητας του πλανήτη

Εκκίνηση από το περιήλιο

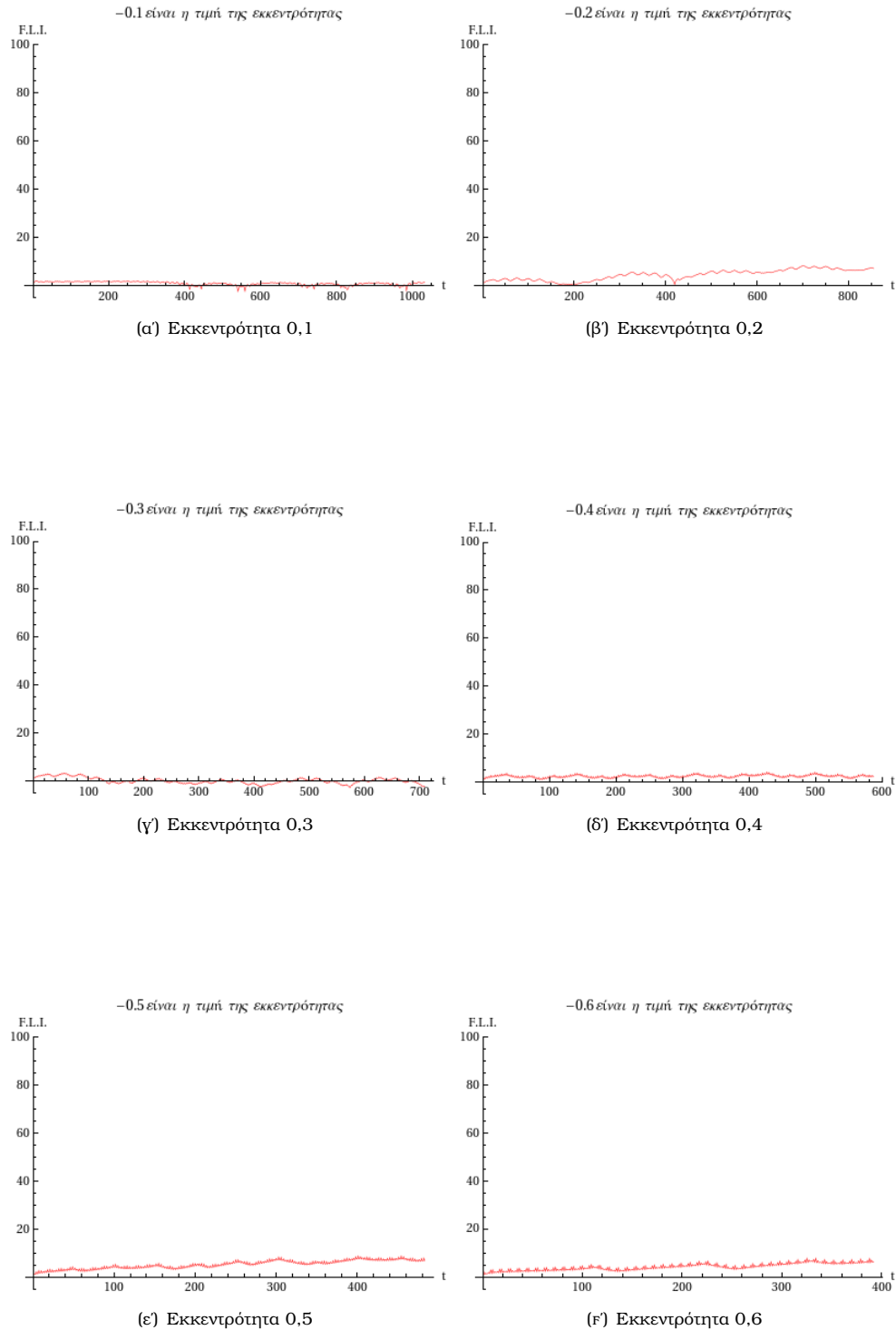
Δεν παραθέτουμε κανένα διάγραμμα του F.L.I. διότι όλες οι τροχιές είναι τροχιές διαφυγής.



Σχήμα 7.7: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,01$

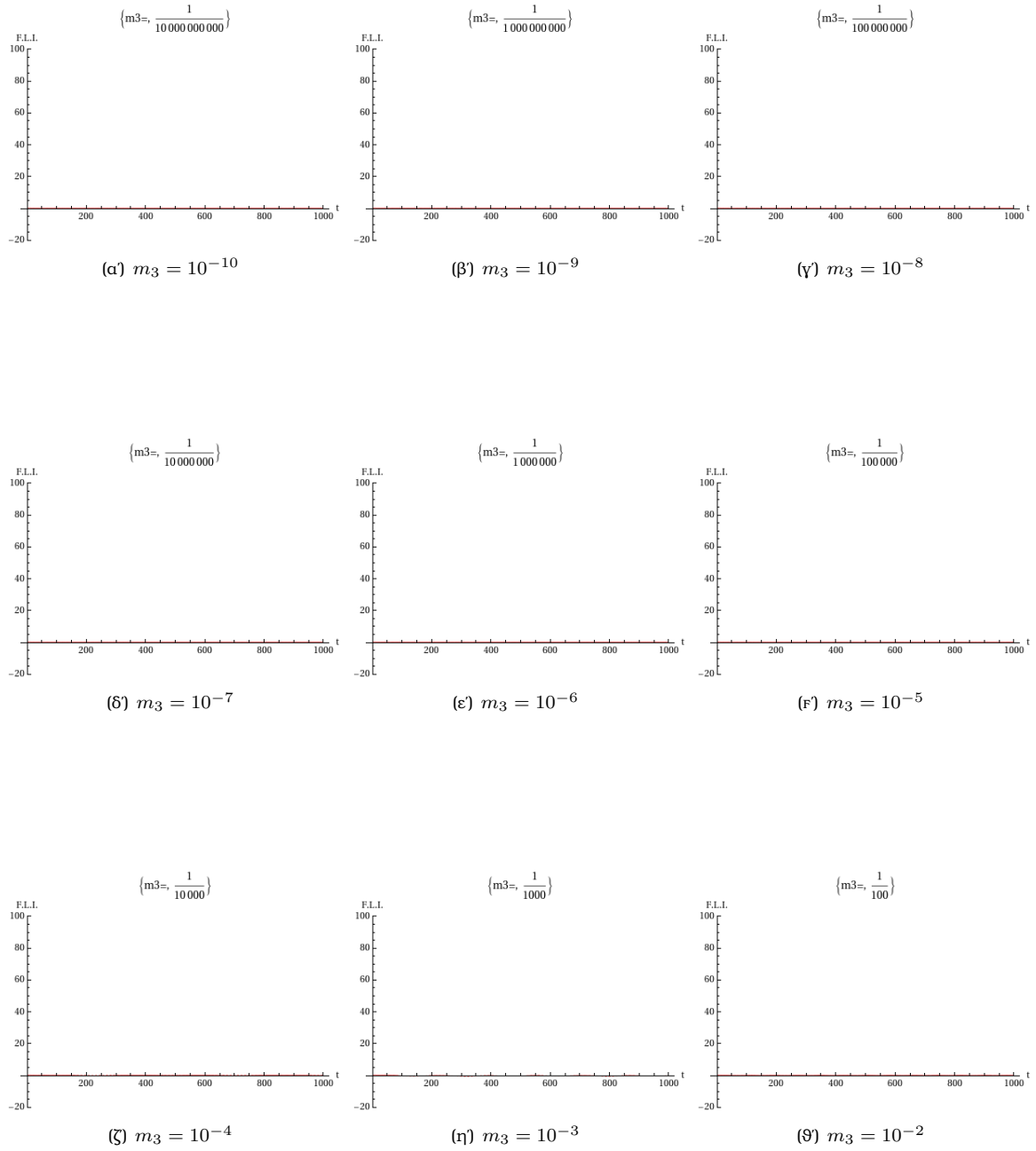
Εκκίνηση από το αφήλιο

Εδώ παραθέτουμε τα διαγράμματα για εκκεντρότητες έως 0,6 διότι από εκεί και πέρα έχουμε τροχιές διαφυγής.



Σχήμα 7.8: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,01$

7.3.2 Μεταβολή της μάζας του Κ.Β.Ο.



Σχήμα 7.9: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 0,01$

7.4 Η οικογένεια II στο σύστημα με $(\mu = 0.1)$

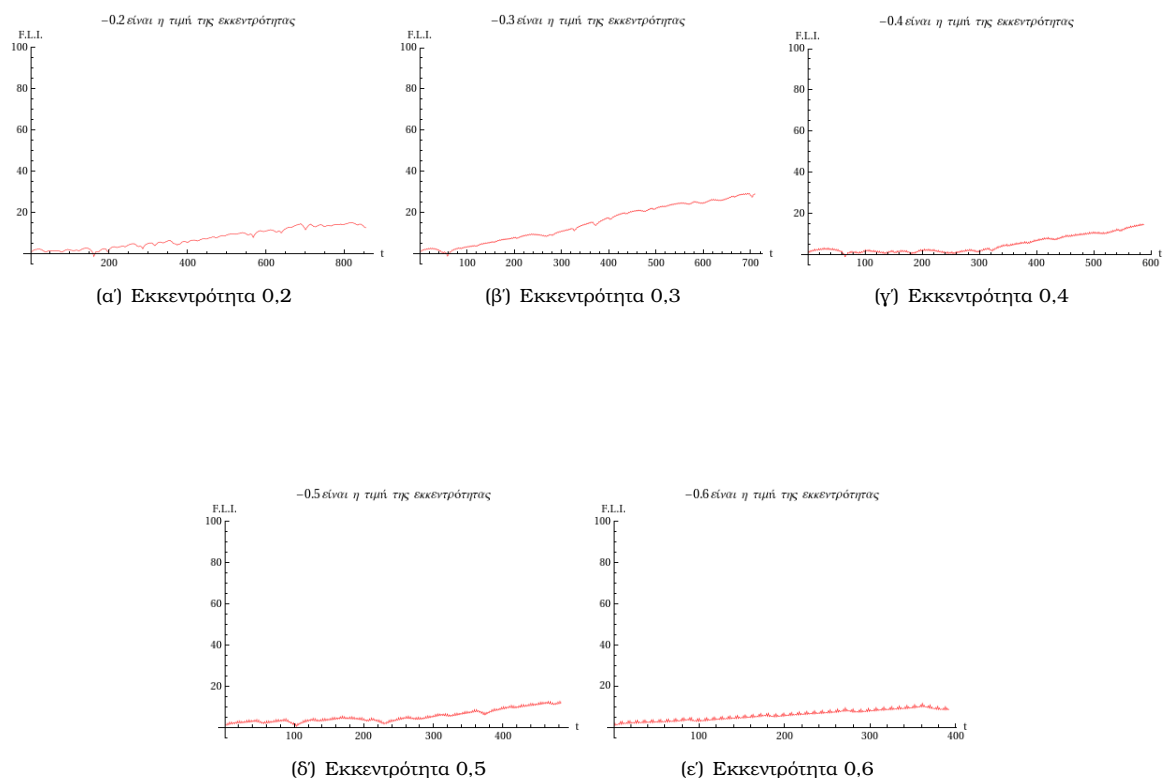
7.4.1 Μεταβολή της εκκεντρότητας του πλανήτη

Εκκίνηση από το περιήλιο

Εδώ για όλες τις εκκεντρότητες έχουμε τροχιές διαφυγής οπότε δεν παραθέτουμε διαγράμματα του F.L.I..

Εκκίνηση από το αφήλιο

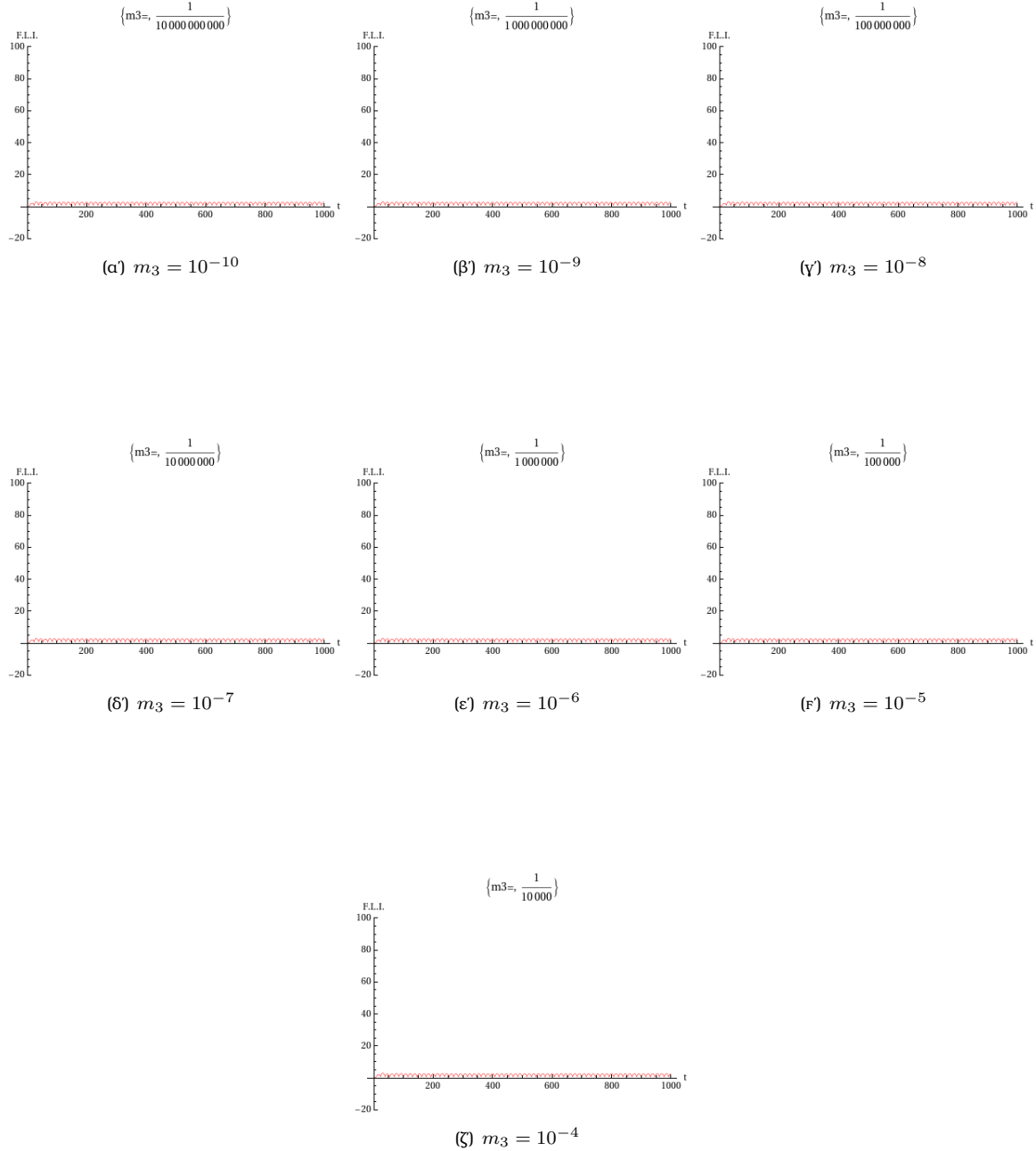
Στην περίπτωση αυτή έχουμε τροχιές διαφυγής για εκκεντρότητα 0,1 καθώς επίσης και για εκκεντρότητες μεγαλύτερες από 0,7. Έτσι παραθέτουμε τα διαγράμματα F.L.I. τροχιών οι οποίες δεν διαφεύγουν.



Σχήμα 7.10: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές εκκεντρότητας όταν $\mu = 0,1$

7.4.2 Μεταβολή της μάζας του Κ.Β.Ο.

Στην περίπτωση αυτή δεν παραθετούμε τα διαγράμματα για μάζα $m_3 = 10^{-2}, m_3 = 10^{-3}$ διότι σε αυτές τις περιπτώσεις έχουμε τροχιές διαφυγής.



Σχήμα 7.11: Υπολογισμός του F.L.I. για διάφορες τιμές του m_3 όταν $\mu = 0, 1$

7.5 Συνοπτικά αποτελέσματα

Σε αυτήν την παράγραφο θα παραθέσουμε 4 πίνακες, 1 για κάθε διαφορετική μάζα μ την οποία μελετήσαμε οι οποίοι θα περιέχουν τα αποτελέσματα για τις περιοδικές τροχιές του κυκλικού καθώς περνάμε στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα με βάση τα διαγράμματα τα οποία παραθέσαμε στο τρέχον κεφάλαιο.

Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	m_3	Χάος	Διαφυγή
Από περιήλιο			Από αφήλιο			Γενικό πρόβλημα		
$e = 0,1$	Όχι	Όχι	$e = -0,1$	Όχι	Όχι	10^{-10}	Όχι	Όχι
$e = 0,2$	Ναι	Όχι	$e = -0,2$	Όχι	Όχι	10^{-9}	Όχι	Όχι
$e = 0,3$	Όχι	Όχι	$e = -0,3$	Όχι	Όχι	10^{-8}	Όχι	Όχι
$e = 0,4$	Ναι	Όχι	$e = -0,4$	Όχι	Όχι	10^{-7}	Όχι	Όχι
$e = 0,5$	Ναι	Όχι	$e = -0,5$	Όχι	Όχι	10^{-6}	Όχι	Όχι
$e = 0,6$	Ναι	Όχι	$e = -0,6$	Όχι	Όχι	10^{-5}	Όχι	Όχι
$e = 0,7$	Όχι	Όχι	$e = -0,7$	-	Ναι	10^{-4}	Όχι	Όχι
$e = 0,8$	Όχι	Όχι	$e = -0,8$	-	Ναι	10^{-3}	Όχι	Όχι
$e = 0,9$	Ναι	Όχι	$e = -0,9$	-	Ναι	10^{-2}	Όχι	Όχι

Πίνακας 7.3: Αποτελέσματα για $\mu = 5.178 \cdot 10^{-5}$

Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	m_3	Χάος	Διαφυγή
Από περιήλιο			Από αφήλιο			Γενικό πρόβλημα		
$e = 0,1$	Όχι	Όχι	$e = -0,1$	Όχι	Όχι	10^{-10}	Όχι	Όχι
$e = 0,2$	-	Ναι	$e = -0,2$	Όχι	Όχι	10^{-9}	Όχι	Όχι
$e = 0,3$	Όχι	Όχι	$e = -0,3$	Όχι	Όχι	10^{-8}	Όχι	Όχι
$e = 0,4$	-	Ναι	$e = -0,4$	Όχι	Όχι	10^{-7}	Όχι	Όχι
$e = 0,5$	Ναι	Όχι	$e = -0,5$	Όχι	Όχι	10^{-6}	Όχι	Όχι
$e = 0,6$	Ναι	Όχι	$e = -0,6$	Όχι	Όχι	10^{-5}	Όχι	Όχι
$e = 0,7$	-	Ναι	$e = -0,7$	-	Ναι	10^{-4}	Όχι	Όχι
$e = 0,8$	-	Ναι	$e = -0,8$	-	Ναι	10^{-3}	Όχι	Όχι
$e = 0,9$	-	Ναι	$e = -0,9$	-	Ναι	10^{-2}	Όχι	Όχι

Πίνακας 7.4: Αποτελέσματα για $\mu = 0,001$

Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	m_3	Χάος	Διαφυγή
Από περιήλιο			Από αφήλιο			Γενικό πρόβλημα		
$e = 0,1$	-	Ναι	$e = -0,1$	Όχι	Όχι	10^{-10}	Όχι	Όχι
$e = 0,2$	-	Ναι	$e = -0,2$	Όχι	Όχι	10^{-9}	Όχι	Όχι
$e = 0,3$	-	Ναι	$e = -0,3$	Όχι	Όχι	10^{-8}	Όχι	Όχι
$e = 0,4$	-	Ναι	$e = -0,4$	Όχι	Όχι	10^{-7}	Όχι	Όχι
$e = 0,5$	-	Ναι	$e = -0,5$	Όχι	Όχι	10^{-6}	Όχι	Όχι
$e = 0,6$	-	Ναι	$e = -0,6$	Όχι	Όχι	10^{-5}	Όχι	Όχι
$e = 0,7$	-	Ναι	$e = -0,7$	-	Ναι	10^{-4}	Όχι	Όχι
$e = 0,8$	-	Ναι	$e = -0,8$	-	Ναι	10^{-3}	Όχι	Όχι
$e = 0,9$	-	Ναι	$e = -0,9$	-	Ναι	10^{-2}	Όχι	Όχι

Πίνακας 7.5: Αποτελέσματα για $\mu = 0,01$

Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	Εκκεντρότητα	Χάος	Διαφυγή	m_3	Χάος	Διαφυγή
Από περιήλιο			Από αφήλιο			Γενικό πρόβλημα		
$e = 0, 1$	-	Ναι	$e = -0, 1$	-	Ναι	10^{-10}	Όχι	Όχι
$e = 0, 2$	-	Ναι	$e = -0, 2$	Ναι	Όχι	10^{-9}	Όχι	Όχι
$e = 0, 3$	-	Ναι	$e = -0, 3$	Ναι	Όχι	10^{-8}	Όχι	Όχι
$e = 0, 4$	-	Ναι	$e = -0, 4$	Ναι	Όχι	10^{-7}	Όχι	Όχι
$e = 0, 5$	-	Ναι	$e = -0, 5$	Ναι	Όχι	10^{-6}	Όχι	Όχι
$e = 0, 6$	-	Ναι	$e = -0, 6$	Ναι	Όχι	10^{-5}	Όχι	Όχι
$e = 0, 7$	-	Ναι	$e = -0, 7$	-	Ναι	10^{-4}	Όχι	Όχι
$e = 0, 8$	-	Ναι	$e = -0, 8$	-	Ναι	10^{-3}	-	Ναι
$e = 0, 9$	-	Ναι	$e = -0, 9$	-	Ναι	10^{-2}	-	Ναι

Πίνακας 7.6: Αποτελέσματα για $\mu = 0, 1$

7.6 Συμπεράσματα

Η εργασία μας όπως είδαμε χωρίστηκε σε 2 μέρη, στο πρώτο μελετήσαμε τις δυνατότητες που μας προσφέρει η Mathematica όσον αφορά στην αριθμητική ολοκλήρωση του προβλήματος των 3 σωμάτων και στο δεύτερο μελετήσαμε μία οικογένεια ελλειπτικών περιοδικών τροχιών του κυκλικού προβλήματος

Αποδείχτηκε λοιπόν ότι η Mathematica είναι ένα ισχυρό εργαλείο αριθμητικής ολοκλήρωσης η οποία παρέχει ορισμένα πλεονεκτήματα σε σχέση με τις γλώσσες προγραμματισμού οι οποίες χρησιμοποιούνται για την ίδια δουλειά. Μας δίνει λοιπόν την δυνατότητα εξαγωγής αποτελεσμάτων όντας αρκετά απλή στον τρόπο σύνταξης αλλά και δίνοντας μας την δυνατότητα της εύκολης οπτικοποίησης των αποτελεσμάτων (διαγράμματα κ.λ.π.). Ακόμα η αλλαγή μεθόδου αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι πολύ εύκολη στην Mathematica κάτι που μας δίνει την δυνατότητα επιλογής της κατάλληλης μεθόδου ανάλογα με το πρόβλημά μας. Το κόστος το οποίο υπάρχει για όλες αυτές τις ευκολίες είναι η επιβράδυνση των υπολογισμών σε σχέση με μία γλώσσα προγραμματισμού αλλά και η μειωμένη ακρίβεια την οποία παρέχει. Σε κάθε περίπτωση η Mathematica παραμένει ένα χρήσιμο εργαλείο για την εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών.

Περνώντας στο δεύτερο μέρος της εργασίας μας καταφέραμε να επιβεβαιώσουμε παλαιότερους υπολογισμούς για μια οικογένεια ελλειπτικών περιοδικών τροχιών του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος για τον Ποσειδώνα και στην συνέχεια καταφέραμε να δούμε την μορφή της οικογένειας αυτής καθώς αλλάζει η μάζα μ . Το αποτέλεσμα ήταν ότι καθώς αυξανόταν η μάζα η περιοχή ευστάθειας της οικογένειας μειωνόταν. Τέλος από την περιοχή ευστάθειας του περιορισμένου κυκλικού προβλήματος δίνοντας είτε εκκεντρότητα στην κίνηση των 2 πρωτεύοντων σωμάτων είτε μάζα στο 3ο σώμα είδαμε την συμπεριφορά των τροχιών στο ελλειπτικό και το γενικό πρόβλημα. Περνώντας στο γενικό πρόβλημα παρατηρήσαμε μόνο κανονικές τροχιές οι οποίες ως επί το πλείστον δεν ήταν τροχιές διαφυγής. Περνώντας όμως στο ελλειπτικό πρόβλημα παρατηρήσαμε όλων των ειδών της τροχιές, κανονικές και χαοτικές αλλά και τροχιές διαφυγής. Αντιληφθήκαμε λοιπόν ότι ακόμα και η εκκίνηση από μία ευσταθή τροχιά του κυκλικού προβλήματος δεν εξασφαλίζει ομαλή συμπεριφορά της τροχιάς καθώς περνάμε στο γενικό και το ελλειπτικό πρόβλημα αλλά η τροχιά μπορεί να συμπεριφερθεί με όλους τους δυνατούς τρόπους.

Παράρτημα Α - Υπορουτίνες του κυκλικού προβλήματος

```

DifferentialEquations[x0_, y0_, ux0_, uy0_] :=
Module[{Deq1, Deq2, Deq3, Deq4},
(*module setting up the differential equations*)
Deq1 = x'[t] == ux[t];
Deq2 = y'[t] == uy[t];
Deq3 = ux'[t] == -((1 - \[Mu]) (x[t] - x1))/((x[t] - x1)^2 + y[t]^2)^(3/2)) -
(\[Mu] (x[t] - x2))/((x[t] - x2)^2 + y[t]^2)^(3/2)
+ 2 uy[t] + x[t];
Deq4 = uy'[t] == -((1 - \[Mu]) y[t])/((x[t] - x1)^2 + y[t]^2)^(3/2)) -
(\[Mu] y[t])/((x[t] - x2)^2 + y[t]^2)^(3/2)
- 2 ux[t] + y[t];

{Deq1, Deq2, Deq3, Deq4, x[0] == x0, y[0] == y0, ux[0] == ux0,
uy[0] == uy0} (*outting of this module are the first parameters of
the ndsolve following syntax NDSolve[out,{functions to be found},{integration time}]*)
]

VariationalEquations2[x0_, y0_, ux0_, uy0_, w10_, w20_, w30_, w40_] :=
Module[{Deq1, Deq2, Deq3, Deq4, Deq5, Deq6, Deq7, Deq8},

(*setting up backup functions*)

U = 1/2 (x[t]^2 + y[t]^2) + (1 - \[Mu])/Sqrt[(x[t] - x1)^2 + y[t]^2] + \[Mu]/Sqrt[(x[t] - x2)^2 + y[t]^2];

F1 = ux[t];
F2 = uy[t];
F3 = 2*uy[t] + D[U, x[t]];
F4 = -2*ux[t] + D[U, y[t]];
Deq1 = x'[t] == ux[t];
Deq2 = y'[t] == uy[t];
Deq3 = ux'[t] == -((1 - \[Mu]) (x[t] - x1))/((x[t] - x1)^2 + y[t]^2)^(3/2)) -
(\[Mu] (x[t] - x2))/((x[t] - x2)^2 + y[t]^2)^(3/2) + 2 uy[t] + x[t];
Deq4 = uy'[t] == -((1 - \[Mu]) y[t])/((x[t] - x1)^2 + y[t]^2)^(3/2)) -
(\[Mu] y[t])/((x[t] - x2)^2 + y[t]^2)^(3/2) - 2 ux[t] + y[t];
Deq5 = w1'[t] == w1[t]*D[F1, x[t]] + w2[t]*D[F1, y[t]] + w3[t]*D[F1, ux[t]] + w4[t]*D[F1, uy[t]];
Deq6 = w2'[t] == w1[t]*D[F2, x[t]] + w2[t]*D[F2, y[t]] + w3[t]*D[F2, ux[t]] + w4[t]*D[F2, uy[t]];
Deq7 = w3'[t] == w1[t]*D[F3, x[t]] + w2[t]*D[F3, y[t]] + w3[t]*D[F3, ux[t]] + w4[t]*D[F3, uy[t]];
Deq8 = w4'[t] == w1[t]*D[F4, x[t]] + w2[t]*D[F4, y[t]] + w3[t]*D[F4, ux[t]] + w4[t]*D[F4, uy[t]];

{Deq1, Deq2, Deq3, Deq4, Deq5, Deq6, Deq7, Deq8, x[0] == x0, y[0] == y0, ux[0] == ux0, uy[0] == uy0,
w1[0] == w10, w2[0] == w20, w3[0] == w30, w4[0] == w40}
(*outting of this module are the first parameters of the ndsolve
following syntax NDSolve[out,{functions to be found},{integration time}]*)
]

PMS2[tmin_, tmax_] := Module[{},
(*setting up the variational equations for 4 different sets of initial conditions
in order to create the primary solution matrix*)

VEa = VariationalEquations2[x0, y0, ux0, uy0, 1, 0, 0, 0];
VEb = VariationalEquations2[x0, y0, ux0, uy0, 0, 1, 0, 0];
VEc = VariationalEquations2[x0, y0, ux0, uy0, 0, 0, 1, 0];
VED = VariationalEquations2[x0, y0, ux0, uy0, 0, 0, 0, 1];

(*solving the above listed sets of variational equations*)

sola = NDSolve[{VEa}, {x[t], y[t], ux[t], uy[t], w1[t], w2[t], w3[t],
w4[t]}, {t, tmin, tmax},
MaxSteps -> 20000000, Method -> "Adams", PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal ->
12];

```

```

solb = NDSolve[{VEb}, {x[t], y[t], ux[t], uy[t], w1[t], w2[t], w3[t],
w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000, Method -> "Adams", PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal ->
  12];
solc = NDSolve[{VEc}, {x[t], y[t], ux[t], uy[t], w1[t], w2[t], w3[t],
w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000, Method -> "Adams", PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal ->
  12];
sold = NDSolve[{VEd}, {x[t], y[t], ux[t], uy[t], w1[t], w2[t], w3[t],
w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000, Method -> "Adams", PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal ->
  12];

(*creating the primary solution matrix using as elements Subscript[a, ij]
the solutions of the above listed sets of equations*)
a1[t_] = w1[t] /. sola[[1]];
a2[t_] = w2[t] /. sola[[1]];
a3[t_] = w3[t] /. sola[[1]];
a4[t_] = w4[t] /. sola[[1]];
b1[t_] = w1[t] /. solb[[1]];
b2[t_] = w2[t] /. solb[[1]];
b3[t_] = w3[t] /. solb[[1]];
b4[t_] = w4[t] /. solb[[1]];
c1[t_] = w1[t] /. solc[[1]];
c2[t_] = w2[t] /. solc[[1]];
c3[t_] = w3[t] /. solc[[1]];
c4[t_] = w4[t] /. solc[[1]];
d1[t_] = w1[t] /. sold[[1]];
d2[t_] = w2[t] /. sold[[1]];
d3[t_] = w3[t] /. sold[[1]];
d4[t_] = w4[t] /. sold[[1]];

X = ({
  {a1[t], b1[t], c1[t], d1[t]},
  {a2[t], b2[t], c2[t], d2[t]},
  {a3[t], b3[t], c3[t], d3[t]},
  {a4[t], b4[t], c4[t], d4[t]}
});
(*Print[" We have succesfully evaluated X(t)"];*)
]

PoincareSection2[x0_, y0_, ux0_, JacobiConstant_, tmax_] := Module[{x, y, t},

uy0 = -\Sqrt[(-ux0^2 + y0^2 + x0^2 + (2*(1 - \[Mu]))/Sqrt[(x1 - x0)^2 + y0^2] +
(2 \[Mu])/Sqrt[(x2 - x0)^2 + y0^2] + JacobiConstant)];
(*uy0=Sqrt[2(JacobiConstant-0.5 x0^2-(2*(1 - \[Mu]))/Sqrt[(x1 - x0)^2] + (2 \[Mu])/Sqrt[(x2 - x0)^2])] ;*)
Print["number of points of ppoints before the loop ", a0=Length[ppoints]];

NDSolve[{
  x'[t] == -(1 - \[Mu])*(x[t] -
    x1)/(Sqrt[(x1 - x[t])^2 + y[t]^2])^3 - \[Mu]*(x[t] -
    x2)/(Sqrt[(x2 - x[t])^2 + y[t]^2])^3 + 2*y'[t] + x[t],
  y'[t] == -((1 - \[Mu])/(Sqrt[(x1 - x[t])^2 +
    y[t]^2])^3 + \[Mu]/(Sqrt[(x2 - x[t])^2 + y[t]^2])^3)*
    y[t] - 2*x'[t] + y[t],
  y[0] == y0,
  y'[0] == uy0,
  x[0] == x0,
  x'[0] == ux0
},
{x, y}, {t, 0, tmax}, MaxSteps -> 1000000,
Method -> {EventLocator, Method -> "Adams", PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal ->
  12, "Event" -> y[t], "Direction" -> -1,
  "EventAction" -> AppendTo[ppoints, {x[t], x'[t]}]}
]

Print["ppoints list is ready"];
Print["number of points ", b0=Length[ppoints]];
Print[" uy = ", uy0];
]

PeriodicOrbitVar[x0_, multiplicity_, JacobiConstant_, tmax_] := Module[{}],

uy0 = -\Sqrt[(-ux0^2 + x0^2 + (2*(1 - \[Mu]))/Sqrt[(x1 - x0)^2] + (2 \[Mu])/Sqrt[(x2 - x0)^2] + JacobiConstant)];
(*Print["prin apo oloklirowsi (x0,y0,ux0,uy0) = ", {x0//N,y0//N,ux0//N,uy0//N}];*)

tseclist = {};
DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
sol1 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, tmax},
  MaxSteps -> 20000000,
  Method -> {EventLocator, "Event" -> y[t], "Direction" -> -1,
    "EventCondition" -> (Length[tseclist] <= multiplicity),
    "EventAction" -> AppendTo[tseclist, t],
    Method -> "Adams", PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal ->

```



```

12}};
xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
uxx[t_] = ux[t] /. sol1[[1]];
uyy[t_] = uy[t] /. sol1[[1]];

tsec = tseclist[[multiplicity]];
Print[" tsec initial = ",tsec];

For[k = 0; tolerance = 1, tolerance > 10^(-10)&& k<20, k++,

  Print[{x0, y0, ux0, uy0}];

  DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
  sol1 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, 1.2 tsec},
    MaxSteps -> 20000000, Method -> "Adams", PrecisionGoal->12, AccuracyGoal->
    12];
  xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
  yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
  uxx[t_] = ux[t] /. sol1[[1]];
  uyy[t_] = uy[t] /. sol1[[1]];

  PMS2[0, 1.1 tsec];
  tolerancel = Abs[uxx[tsec]];
  tolerance2 = Abs[yy[tsec]];
  Print[" tolerancel = ", tolerancel, "      tolerance2 = ",
    tolerance2];

  duy = -((
    uxx[tsec]* uyy[tsec] -
    yy[tsec] *uxx'[tsec])/((X[[3, 4]] /. {t -> tsec}))*
    uyy[tsec] - (X[[2, 4]] /. {t -> tsec})* uxx'[tsec]));

  dt = -((X[[2, 4]] /. {t -> tsec})*
    uxx[tsec] - (X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    yy[tsec])/(-(X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    uyy[tsec] + (X[[2, 4]] /. {t -> tsec})* uxx'[tsec]));
  tolerance = tolerancel + tolerance2;

  (*If[k<=1,uy0 = uy0 + duy;]*)
  If[tolerance > 10^(-10)(&&k>1*), uy0 = uy0 + duy;tsec = tsec + dt;];
  If[k>=19,Print["the method does not converge, change initial conditions"];];
  Print[" k = ", k, "      tolerance = ", tolerance, " duy = ", duy,
    " dt = ",dt," tsec = ",tsec];
  ];
Print["Telos olwn tw n loop"];

Print["idiotimes einai oi epomenes ",Eigenvalues[X /. {t -> tsec}]];

SI = 2 - Tr[X /. {t -> tsec}];
Print["SI=",SI];
(*If[Abs[SI] <= 2 , Print["The orbit is stable"],Print["The orbit is unstable"]]*)
(* we are testing the values of the primary solution matrix*)
J=uy0^2 - x0^2 - (2*(1-\[Mu]))/Sqrt[(x1 - x0)^2]-(2*\[Mu])/Sqrt[(x2 - x0)^2];
resonance=tsec/(2*\[Pi]);
Print["(x0,y0,ux0,uy0,\[Mu],SI,J,T,resonance) = ", {x0//N,y0//N,ux0//N,uy0//N,\[Mu]//N,SI//N,J//N,tsec,resonance}];

]

FamiliesXUY[NoPoints_,multiplicity_, dx_] := Module[{},

  x1 = -\[Mu];(*starting position in the rotating system for the \
  heavier body*)
  x2 = 1 - \[Mu];(*starting position in the rotating system for the \
  lighter body*)

  (*initial conditions of x0 and energy*)

  (*finding approximate period of the orbit in order to accelerate the \
  computations*)

  For[i = 1, i<=NoPoints, i++,

```

```

tseclist = {};
DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
sol1 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, tmax},
  MaxSteps -> 20000000,
  Method -> {EventLocator, "Event" -> y[t], "Direction" -> -1,
    "EventCondition" -> (Length[tseclist] <= multiplicity),
    "EventAction" -> AppendTo[tseclist, t],
    Method -> "Adams", PrecisionGoal->12, AccuracyGoal->
    12}];
xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
uxx[t_] = ux[t] /. sol1[[1]];
uyy[t_] = uy[t] /. sol1[[1]];

tsec = tseclist[[multiplicity]];

For[k = 0; tolerance = 1, tolerance > 10^(-10)&&k<20, k++,

  DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
  sol1 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, 1.2 tsec}, Method -> "Adams",
  PrecisionGoal->12, AccuracyGoal->
    12, MaxSteps -> 20000000];
  xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
  yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
  uxx[t_] = ux[t] /. sol1[[1]];
  uyy[t_] = uy[t] /. sol1[[1]];

  PMS2[0, 1.1 tsec];
  tolerance1 = Abs[uxx[tsec]];
  tolerance2 = Abs[yy[tsec]];

  duy = -((
    uxx[tsec]* uyy[tsec] -
    yy[tsec]*uxx'[tsec])/((X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    uyy[tsec] - (X[[2, 4]] /. {t -> tsec})* uxx'[tsec]));

  dt = -((X[[2, 4]] /. {t -> tsec})*
    uxx[tsec] - (X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    yy[tsec])/(-(X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    uyy[tsec] + (X[[2, 4]] /. {t -> tsec})* uxx'[tsec]));
  tolerance = tolerance1 + tolerance2;

  If[tolerance > 10^(-10), uy0 = uy0 + duy; tsec = tsec + dt;]
  If[k>=19, Print["the method does not converge, change initial conditions"];];

];
(*PMS2[tmin, 1.1 tsec2];*)

(* findinG the primary solution matrix for \
our specific periodic orbit*)
Eigenvalues[X /. {t -> tsec}];

SI = 2 - Tr[X /. {t -> tsec}];
(*Print["SI=", SI];
If[SI <= 2 || SI >= -2, Print["The orbit is stable"]; Print["The orbit is unstable"];]
(* we are testing the values of the primary solution matrix*)
*)
J=uy0^2 - x0^2 - (2 Sqrt[(x0 - x1)^2])/(x0 - x1)^2 + (2 Sqrt[(x0 - x1)^2] \[Mu])/(x0 - x1)^2
- (2 Sqrt[(x0 - x2)^2] \[Mu])/(x0 - x2)^2;
AppendTo[Families, {x0//N, y0//N, ux0//N, uy0//N, \[Mu]//N, SI//N, J//N, tsec}];
Print["i=", i];

(*Print["H periodos tis periodikis troxias einai T = ", tsec2];
Print["H akribieia me tin opoia exei brethei einai Acc = ", Abs[tolerance]];*)
Print["(x0,y0,ux0,uy0,\[Mu],SI,J,T,tolerance) = ", {x0//N, y0//N, ux0//N, uy0//N, \[Mu]//N, SI//N, J//N, tsec, tolerance}];
(*Print["EigenValues are", Eigenvalues[X /. {t -> tsec2}]]//Chop;
Print["i orizousa tou pinaka einai", Det[X /. {t -> tsec2}]];*)
x0 = x0 + dx;]
]

FamiliesMUY[NoPoints_, multiplicity_, d\[Mu]_] := Module[{},

For[i = 1, i<=NoPoints, i++,

```

```

x1 = -\[Mu];(*starting position in the rotating system for the \
heavier body*)
x2 = 1 - \[Mu];(*starting position in the rotating system for the lighter \
body*)
tseclist = {};
DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
sol1 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, tmax},
  MaxSteps -> 20000000,
  Method -> {EventLocator, "Event" -> y[t], "Direction" -> -1,
    "EventCondition" -> (Length[tseclist] <= multiplicity),
    "EventAction" -> AppendTo[tseclist, t],
    Method -> "Adams", PrecisionGoal->12, AccuracyGoal->
    12}}];
xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
uxx[t_] = ux[t] /. sol1[[1]];
uyy[t_] = uy[t] /. sol1[[1]];

tsec = tseclist[[multiplicity]];

For[k = 0; tolerance = 1, tolerance > 10^(-10)&&k<20, k++,

  DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
  sol1 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, 1.2 tsec},
    MaxSteps -> 20000000, Method -> "Adams", PrecisionGoal->12, AccuracyGoal->
    12];
  xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
  yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
  uxx[t_] = ux[t] /. sol1[[1]];
  uyy[t_] = uy[t] /. sol1[[1]];

  PMS2[0, 1.1 tsec];
  tolerancel = Abs[uxx[tsec]];
  tolerance2 = Abs[yy[tsec]];

  duy = -((
    uxx[tsec]* uyy[tsec] -
    yy[tsec] *uxx'[tsec])/((X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    uyy[tsec] - (X[[2, 4]] /. {t -> tsec})* uxx'[tsec]));

  dt = -(((X[[2, 4]] /. {t -> tsec})*
    uxx[tsec] - (X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    yy[tsec])/(-(X[[3, 4]] /. {t -> tsec})*
    uyy[tsec] + (X[[2, 4]] /. {t -> tsec})* uxx'[tsec]));
  tolerance = tolerancel + tolerance2;

  If[tolerance > 10^(-10), uy0 = uy0 + duy; tsec = tsec + dt;]
  If[k>=19, Print["the method does not converge, change initial conditions"];]
  (*Print[" k = ", k, " tolerance = ", tolerance, " duy = ", duy,
    " dt = ", dt, " tsec = ", tsec];*)
];
(*PMS2[tmin, 1.1 tsec2];*)

(* findinG the primary solution matrix for \
our specific periodic orbit*)
Eigenvalues[X /. {t -> tsec}];

SI = 2 - Tr[X /. {t -> tsec}];
(*Print["SI=", SI];
If[SI <= 2 || SI >= -2, Print["The orbit is stable"]; Print["The orbit is unstable"];]
(* we are testing the values of the primary solution matrix*)
*)
J=uy0^2 - x0^2 - (2 Sqrt[(x0 - x1)^2])/(x0 - x1)^2 + (2 Sqrt[(x0 - x1)^2] \[Mu])/(x0 - x1)^2
- (2 Sqrt[(x0 - x2)^2] \[Mu])/(x0 - x2)^2;
AppendTo[Families, {x0//N, y0//N, ux0//N, uy0//N, \[Mu]//N, SI//N, J//N, tsec}];
Print["i=", i];

(*Print["H periodos tis periodikis troxias einai T = ", tsec2];
Print["H akribieia me tin opoia exei brethei einai Acc = ", Abs[tolerance]];*)
Print["(x0,y0,ux0,uy0,\[Mu],SI,J,T,tolerance) = ", {x0//N, y0//N, ux0//N, uy0//N, \[Mu]//N, SI//N, J//N, tsec, tolerance}];
(*Print["EigenValues are", Eigenvalues[X /. {t -> tsec2}]]//Chop;
Print["i orizousa tou pinaka einai", Det[X /. {t -> tsec2}]];*)
\[Mu] = \[Mu] + d\[Mu]; x0 = x0 + ddx;]
]

```

```

FLI[x0_,y0_,ux0_,uy0_,tmin_,tmax_,method_]:=Module[{}],

VFLI = VariationalEquations2[x0,y0,ux0,uy0,1, 0, 0, 0];
solFLI = NDSolve[VFLI, {x[t], y[t], ux[t], uy[t], w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> Infinity,Method->method,
  PrecisionGoal->8,AccuracyGoal->8];

ww1[t_] = w1[t] /. solFLI[[1]];
ww2[t_] = w2[t] /. solFLI[[1]];
ww3[t_] = w3[t] /. solFLI[[1]];
ww4[t_] = w4[t] /. solFLI[[1]];

Fli[t_]=Log[Sqrt[ww1[t]^2 + ww2[t]^2 + ww3[t]^2 + ww4[t]^2]/t];

]

OrbitalElements[x0_, y0_, ux0_, uy0_,tsec2_] :=
Module[{}],

DE = DifferentialEquations[x0, y0, ux0, uy0];
sol5 = NDSolve[DE, {x[t], y[t], ux[t], uy[t]}, {t, 0, 1.1*tsec2},
  MaxSteps -> 20000000, Method -> "ExplicitRungeKutta",
  PrecisionGoal -> 12, AccuracyGoal -> 12];

xx[t_] = x[t] /. sol5[[1]];
yy[t_] = y[t] /. sol5[[1]];
uxx[t_] = ux[t] /. sol5[[1]];
uyy[t_] = uy[t] /. sol5[[1]];

\[Xi]\[Xi][t_] = xx[t] Cos[t] - yy[t] Sin[t];
\[Eta]\[Eta][t_] = xx[t] Sin[t] + yy[t] Cos[t];
u\[Xi]\[Xi][t_] = \[Xi]\[Xi]'[t];
u\[Eta]\[Eta][t_] = \[Eta]\[Eta]'[t];

aa=2/Sqrt[\[Xi]\[Xi][tsec2]^2+\[Eta]\[Eta][tsec2]^2-(u\[Xi]\[Xi][tsec2]^2+u\[Eta]\[Eta][tsec2]^2)/(1-\[Mu])];
AA=1/aa;
hz=\[Xi]\[Xi][tsec2]*u\[Eta]\[Eta][tsec2]-\[Eta]\[Eta][tsec2]*u\[Xi]\[Xi][tsec2];
ecc=Sqrt[1-(hz^2*aa)/(1-\[Mu])];
Resonance = T/(2 \[Pi]);

Print["Major semiaxis A = ",AA,"      Eccentricity e=",ecc,"      Resonance=",Resonance];
]

```

Παράρτημα Β - Υπορουτίνες του ελλειπτικού προβλήματος

```
DifferentialEquationsElliptic[x0_, y0_, ux0_, uy0_] :=
Module[{deq1, deq2, deq3},
(*module setting up the differential equations*)

x2 = (1-\[Mu])*r[t];
x1 = -\[Mu]*r[t] ;
(*x20 = (1 + e)^(1/3);*)
x20 = r0*(1-\[Mu]);
ux2 = (1-\[Mu])*r'[t];
r0 = (1 + e)^(1/3);
(*r0 = (1 + e)^(1/3)/(1 - \[Mu]);*)
dth = (*(\[Mu]*x20*Sqrt[1+e])/((1 - \[Mu])*Sqrt[1-e]*r[t]^2)*x20^2/(r[t]*(1-\[Mu]))^2;
ddth = (*-(2*x20*\[Mu]*r'[t]*Sqrt[1+e])/((1 - \[Mu])*r[t]^3*Sqrt[1-e])*(-2*x20^2*ux2)/((r[t]*(1-\[Mu]))^3);
r1=Sqrt[(x[t]-x1)^2 + y[t]^2];
r2=Sqrt[(x[t]-x2)^2 + y[t]^2];

deq1=r''[t]-x20^4/((1-\[Mu])^4 r[t]^3)+1/r[t]^2==0;
deq2 = x''[t] == -((1 - \[Mu])*(x[t] - x1))/(r1^3)) - (\[Mu]*(x[t] - x2))/(r2^3))
+ 2*y'[t]*dth + x[t]*(dth)^2 + y[t]*ddth;
deq3 = y''[t] == -((1 - \[Mu])*y[t])/(r1^3)) - (\[Mu]*y[t])/(r2^3))
- 2*x'[t]*dth + y[t]*(dth)^2 - x[t]*ddth;
(*old equations seem to work*)

{deq1, deq2, deq3, r[0] == r0, r'[0] == 0, x[0] == x0, x'[0] == ux0, y[0] == y0, y'[0] == uy0}

(*outting of this module are the first parameters of the ndsolve following syntax
NDSolve[out,{functions to be found},{integration time}]*

]

VariationalEquationsElliptic2[x0_, y0_, ux0_, uy0_, w10_, w20_, w30_, w40_] :=
Module[{Deq1, Deq2, Deq3, Deq5, Deq6, Deq7, Deq8},

x2 = (1-\[Mu])*r[t];
x1 = -\[Mu]*r[t] ;
(*x20 = (1 + e)^(1/3);*)
x20 = r0*(1-\[Mu]);
ux2 = (1-\[Mu])*r'[t];
r0 = (1 + e)^(1/3);
(*r0 = (1 + e)^(1/3)/(1 - \[Mu]);*)
dth = (*(\[Mu]*x20*Sqrt[1+e])/((1 - \[Mu])*Sqrt[1-e]*r[t]^2)*x20^2/(r[t]*(1-\[Mu]))^2;
ddth = (*-(2*x20*\[Mu]*r'[t]*Sqrt[1+e])/((1 - \[Mu])*r[t]^3*Sqrt[1-e])*(-2*x20^2*ux2)/((r[t]*(1-\[Mu]))^3);
r1=Sqrt[(x[t]-x1)^2 + y[t]^2];
r2=Sqrt[(x[t]-x2)^2 + y[t]^2];

Uxx = dth^2 + \[Mu]*(2 (x[t] - x2)^2 - y[t]^2)/((x2 - x[t])^2 + y[t]^2)^(5/2)
+ (1 - \[Mu])*(2 (x[t] - x1)^2 - y[t]^2)/((x1 - x[t])^2 + y[t]^2)^(5/2);
Uyy = dth^2 + \[Mu]*(2*y[t]^2 - (x[t] - x2)^2)/((x2 - x[t])^2 + y[t]^2)^(5/2)
+ (1 - \[Mu])*(2*y[t]^2 - (x[t] - x1)^2)/((x1 - x[t])^2 + y[t]^2)^(5/2);
Uxy = 3*y[t] (\[Mu]*(x[t] - x2)/((x2 - x[t])^2 + y[t]^2)^(5/2)
+ (1 - \[Mu])*(x[t] - x1)/((x1 - x[t])^2 + y[t]^2)^(5/2));

Deq1 =r''[t]-x20^4/((1-\[Mu])^4 r[t]^3)+1/r[t]^2==0;
Deq2 = x''[t] == -((1 - \[Mu])*(x[t] - x1))/(r1^3)) - (\[Mu]*(x[t] - x2))/(r2^3))
+ 2*y'[t]*dth + x[t]*(dth)^2 + y[t]*ddth;
Deq3 = y''[t] == -((1 - \[Mu])*y[t])/(r1^3)) - (\[Mu]*y[t])/(r2^3))
- 2*x'[t]*dth + y[t]*(dth)^2 - x[t]*ddth;

(*module setting up the variational equations*)
```

```

Deq5 = w1'[t] == w3[t];
Deq6 = w2'[t] == w4[t];
Deq7 = w3'[t] == w1[t]*Uxx + w2[t]*(Uxy+ddth) + 2*dth*w4[t];
Deq8 = w4'[t] == w1[t]*(Uxy-ddth) + w2[t]*Uyy - 2*dth*w3[t];

{Deq1,Deq2,Deq3,Deq5, Deq6, Deq7, Deq8, r[0] == r0, r'[0] == 0, x[0] == x0,
 x'[0] == ux0, y[0] == y0, y'[0] == uy0,w1[0] == w10,
w2[0] == w20, w3[0] == w30, w4[0] == w40}
(*outting of this module are the first parameters of the ndsolve
following syntax NDSolve[out,{functions to be found},{integration time}]*
)

PMS2Elliptic[tmin_,tmax_]:=Module[{},
(*setting up the variational equations for 4 different sets of initial
conditions in order to create the primary solution matrix*)

VEa = VariationalEquationsElliptic2[x0,y0,ux0,uy0,1, 0, 0, 0];
VEb = VariationalEquationsElliptic2[x0,y0,ux0,uy0,0, 1, 0, 0];
VEc = VariationalEquationsElliptic2[x0,y0,ux0,uy0,0, 0, 1, 0];
VED = VariationalEquationsElliptic2[x0,y0,ux0,uy0,0, 0, 0, 1];

(*solving the above listed sets of variational equations*)

sola = NDSolve[{VEa}, {x[t], y[t], r[t],w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000(*, Method->InMethod,PrecisionGoal -> acc, AccuracyGoal -> acc*)];
solb = NDSolve[{VEb}, {x[t], y[t], r[t],w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000(*, Method->InMethod,PrecisionGoal -> acc, AccuracyGoal -> acc*)];
solc = NDSolve[{VEc}, {x[t], y[t], r[t],w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000(*, Method->InMethod,PrecisionGoal -> acc, AccuracyGoal -> acc*)];
sold = NDSolve[{VED}, {x[t], y[t], r[t],w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 20000000(*, Method->InMethod,PrecisionGoal -> acc, AccuracyGoal -> acc*)];

(*creating the primary solution matrix using as elements
Subscript[a, ij] the solutions of the above listed sets of equations*)
a1[t_] = w1[t] /. sola[[1]];
a2[t_] = w2[t] /. sola[[1]];
a3[t_] = w3[t] /. sola[[1]];
a4[t_] = w4[t] /. sola[[1]];
b1[t_] = w1[t] /. solb[[1]];
b2[t_] = w2[t] /. solb[[1]];
b3[t_] = w3[t] /. solb[[1]];
b4[t_] = w4[t] /. solb[[1]];
c1[t_] = w1[t] /. solc[[1]];
c2[t_] = w2[t] /. solc[[1]];
c3[t_] = w3[t] /. solc[[1]];
c4[t_] = w4[t] /. solc[[1]];
d1[t_] = w1[t] /. sold[[1]];
d2[t_] = w2[t] /. sold[[1]];
d3[t_] = w3[t] /. sold[[1]];
d4[t_] = w4[t] /. sold[[1]];

X = ({
  {a1[t], a2[t], a3[t], a4[t]},
  {b1[t], b2[t], b3[t], b4[t]},
  {c1[t], c2[t], c3[t], c4[t]},
  {d1[t], d2[t], d3[t], d4[t]}
});

]

PlotTrajectoryElliptic[x0_,y0_,ux0_,uy0_,e_,tmin_,tmax_]:=Module[{},

DEel = DifferentialEquationsElliptic[x0, y0, ux0, uy0];
sol1 = NDSolve[DEel, {r[t], x[t], y[t]}, {t, tmin, tmax},
  MaxSteps -> 10000000, Method -> "ExplicitRungeKutta",
  PrecisionGoal -> 10, AccuracyGoal -> 10];

rr[t_] = r[t] /. sol1[[1]];
urr[t_] = rr'[t];
xx[t_] = x[t] /. sol1[[1]];
yy[t_] = y[t] /. sol1[[1]];
uxx[t_] = xx'[t];
uyy[t_] = yy'[t];
xx2[t_] = (1 - \[Mu]) rr[t];
xx1[t_] = -\[Mu] rr[t];
l11 = NDSolve[{th'[t] == x20^2/xx2[t]^2, th[0] == 0},
  th[t], {t, tmin, tmax},MaxSteps -> 10000000, Method -> "ExplicitRungeKutta",
  PrecisionGoal -> 10, AccuracyGoal -> 10];
theta[t_] = th[t] /. l11[[1]];

```

```

\[Xi][t_] = xx[t] Cos[theta[t]] - yy[t] Sin[theta[t]];
\[Eta][t_] = xx[t] Sin[theta[t]] + yy[t] Cos[theta[t]];

\[Xi]1[t_] = xx1[t] Cos[theta[t]];
\[Eta]1[t_] = xx1[t] Sin[theta[t]];

\[Xi]2[t_] = xx2[t] Cos[theta[t]];
\[Eta]2[t_] = xx2[t] Sin[theta[t]];

p4=ParametricPlot[{xx[t], yy[t]}, {t, tmin, tmax}, PlotStyle -> Blue,AxesLabel ->
{"x", "y"},ImageSize->400,PlotLabel->"trajectory of m3 in the rotating system",PlotPoints->1000];

p3 = ParametricPlot[{\[Xi][t], \[Eta][t]}, {t, tmin, tmax},PlotStyle -> Blue,
AxesLabel -> {"\[Xi]", "\[Eta]"},ImageSize->400,PlotLabel->"trajectory of m3 in the sidereal system",PlotPoints->1000];

p1 = ParametricPlot[{\[Xi]1[t], \[Eta]1[t]}, {t, tmin, tmax},PlotStyle -> Black,AxesLabel ->
{"\[Xi]", "\[Eta]"},ImageSize->400,PlotLabel->"trajectory of m1 in the sidereal system",PlotPoints->1000];

p2 = ParametricPlot[{\[Xi]2[t], \[Eta]2[t]}, {t, tmin, tmax},PlotStyle -> Red,AxesLabel ->
{"\[Xi]", "\[Eta]"},ImageSize->400,PlotLabel->"trajectory of m2 in the sidereal system",PlotPoints->1000];

({
{p4, p3},
{p1, p2}
})
]

FLIElliptic[x0_,y0_,ux0_,uy0_,meth_,tmin_,tmax_]:=Module[{VFLI},

VFLI=VariationalEquationsElliptic2[x0, y0, ux0, uy0,1, 0, 0, 0];
soll = NDSolve[VFLI, {r[t], x[t], y[t], w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin,
tmax}, MaxSteps -> Infinity,Method->meth,
PrecisionGoal->11,AccuracyGoal->11];
ww1[t_] = w1[t] /. soll[[1]];
ww2[t_] = w2[t] /. soll[[1]];
ww3[t_] = w3[t] /. soll[[1]];
ww4[t_] = w4[t] /. soll[[1]];
rr[t_] = r[t] /. soll[[1]];
urr[t_] = rr'[t];
xx[t_] = x[t] /. soll[[1]];
yy[t_] = y[t] /. soll[[1]];
uxx[t_] = xx'[t];
uyy[t_] = yy'[t];
xx2[t_] = (1 - \[Mu]) rr[t];
xx1[t_] = -\[Mu] rr[t];

Fli[t_]=Log[Sqrt[ww1[t]^2 + ww2[t]^2 + ww3[t]^2 + ww4[t]^2]/t];

]

PoincareSectionElliptic[x0_, y0_, ux0_,uy0_,method_,points_] := Module[{}],
Tprimary = 2 Pi*Sqrt[(1 + e)/((1 - e)^3)];
tmax=points*Tprimary;

DEel = DifferentialEquationsElliptic[x0, y0, ux0, uy0];
soll = NDSolve[DEel, {r[t], x[t], y[t]}, {t, tmin, tmax},
MaxSteps -> Infinity, Method -> method,
PrecisionGoal -> 10, AccuracyGoal -> 10];
rr[t_] = r[t] /. soll[[1]];
urr[t_] = rr'[t];
xx[t_] = x[t] /. soll[[1]];
yy[t_] = y[t] /. soll[[1]];
uxx[t_] = xx'[t];
uyy[t_] = yy'[t];
xx2[t_] = (1 - \[Mu]) rr[t];
xx1[t_] = -\[Mu] rr[t];

For[k=1,k<+points,k++
AppendTo[ppoints,{xx[k*Tprimary],uxx[k*Tprimary]}}
];
(*Print["ppoints list is ready"];*)

]

```

Παράρτημα Γ - Υπορουτίνες του γενικού προβλήματος

```

DifferentialEquationsGeneral[\[Xi]20_,\[Xi]30_,\[Eta]20_,\[Eta]30_,u\[Xi]20_,u\[Xi]30_,
u\[Eta]20_,u\[Eta]30_,m1_,m2_,m3_]:=
Module[{deq1,deq2,deq3,deq4,deq5,deq6,deq7,deq8},
\[Xi]10=-(m3*\[Xi]30+m2*\[Xi]20)/m1;
\[Eta]10=-(m3*\[Eta]30+m2*\[Eta]20)/m1;
u\[Xi]10=-(m3*u\[Xi]30+m2*u\[Xi]20)/m1;
u\[Eta]10=-(m3*u\[Eta]30+m2*u\[Eta]20)/m1;

\[Xi]1=-(m3 \[Xi]3[t]+m2 \[Xi]2[t])/m1;
\[Eta]1=-(m3 \[Eta]3[t]+m2 \[Eta]2[t])/m1;
r12=Sqrt[(\[Xi]1-\[Xi]2[t])^2+(\[Eta]1-\[Eta]2[t])^2];
r13=Sqrt[(\[Xi]1-\[Xi]3[t])^2+(\[Eta]1-\[Eta]3[t])^2];
r23=Sqrt[(\[Xi]3[t]-\[Xi]2[t])^2+(\[Eta]3[t]-\[Eta]2[t])^2];

H=1/2 m1 (u\[Xi]1^2+u\[Eta]1^2)+1/2 m2 (u\[Xi]2[t]^2+u\[Eta]2[t]^2)+1/2 m3 (u\[Xi]3[t]^2+
u\[Eta]3[t]^2)-(m1 m2)/r12-(m1 m3)/r13-(m2 m3)/r23 ;

deq1 = u\[Xi]2[t] == \[Xi]2'[t];
deq2 = u\[Xi]3[t] == \[Xi]3'[t];
deq3 = u\[Eta]2[t] == \[Eta]2'[t];
deq4 = u\[Eta]3[t] == \[Eta]3'[t];
deq5 = -m1 (\[Xi]2[t]-\[Xi]1)/r12^3-m3 (\[Xi]2[t]-\[Xi]3[t])/r23^3 == u\[Xi]2'[t]; (*px1*)
deq6 = -m1 (\[Xi]3[t]-\[Xi]1)/r13^3-m2 (\[Xi]3[t]-\[Xi]2[t])/r23^3 == u\[Xi]3'[t]; (*px2*)
deq7 = -m1 (\[Eta]2[t]-\[Eta]1)/r12^3-m3 (\[Eta]2[t]-\[Eta]3[t])/r23^3 == u\[Eta]2'[t]; (*py1*)
deq8 = -m1 (\[Eta]3[t]-\[Eta]1)/r13^3-m2 (\[Eta]3[t]-\[Eta]2[t])/r23^3 == u\[Eta]3'[t]; (*py2*)

{deq1, deq2, deq3, deq4, deq5, deq6, deq7, deq8, \[Xi]3[0]==\[Xi]30, \[Xi]2[0]==\[Xi]20,
\[Eta]3[0]==\[Eta]30, \[Eta]2[0]==\[Eta]20,u\[Xi]3[0]==u\[Xi]30, u\[Xi]2[0]==u\[Xi]20,
u\[Eta]3[0]==u\[Eta]30, u\[Eta]2[0]==u\[Eta]20}

]

TestAccuracy[\[Xi]20_,\[Xi]30_,\[Eta]20_,\[Eta]30_,u\[Xi]20_,u\[Xi]30_,u\[Eta]20_,
u\[Eta]30_,m1_,m2_,m3_,Meth_,acc_]:=Module[{},

DEG = DifferentialEquationsGeneral[\[Xi]20, \[Xi]30, \[Eta]20, \[Eta]30, u\[Xi]20,
u\[Xi]30,u\[Eta]20, u\[Eta]30, m1, m2, m3];
time=Timing[sol = NDSolve[
DEG, {\[Xi]2[t], \[Xi]3[t], \[Eta]2[t], \[Eta]3[t], u\[Xi]2[t], u\[Xi]3[t], u\[Eta]2[t],
u\[Eta]3[t]}, {t, tmin, tmax}, Method -> Meth,
AccuracyGoal -> acc, PrecisionGoal -> acc, MaxSteps -> Infinity]];

\[Xi]\[Xi]3[t_] = \[Xi]3[t] /. sol[[1]];
\[Xi]\[Xi]2[t_] = \[Xi]2[t] /. sol[[1]];
\[Eta]\[Eta]3[t_] = \[Eta]3[t] /. sol[[1]];
\[Eta]\[Eta]2[t_] = \[Eta]2[t] /. sol[[1]];
u\[Xi]\[Xi]3[t_] = u\[Xi]3[t] /. sol[[1]];
u\[Xi]\[Xi]2[t_] = u\[Xi]2[t] /. sol[[1]];
u\[Eta]\[Eta]3[t_] = u\[Eta]3[t] /. sol[[1]];
u\[Eta]\[Eta]2[t_] = u\[Eta]2[t] /. sol[[1]];
\[Xi]\[Xi]1[t_] = -(m3 \[Xi]\[Xi]3[t] + m2 \[Xi]\[Xi]2[t])/m1;
\[Eta]\[Eta]1[t_] = -(m3 \[Eta]\[Eta]3[t] + m2 \[Eta]\[Eta]2[t])/m1;
u\[Xi]\[Xi]1[t_] = -(m3 u\[Xi]\[Xi]3[t] + m2 u\[Xi]\[Xi]2[t])/m1;
u\[Eta]\[Eta]1[t_] = -(m3 u\[Eta]\[Eta]3[t] + m2 u\[Eta]\[Eta]2[t])/m1;

Ener[t_] = H /. {\[Xi]1 -> \[Xi]\[Xi]1[t], \[Eta]1 -> \[Eta]\[Eta]1[t],
\[Xi]2[t] -> \[Xi]\[Xi]2[t],
\[Eta]2[t] -> \[Eta]\[Eta]2[t], \[Xi]3[t] -> \[Xi]\[Xi]3[t],
\[Eta]3[t] -> \[Eta]\[Eta]3[t],u\[Xi]1 ->
u\[Xi]\[Xi]1[t], u\[Eta]1 -> u\[Eta]\[Eta]1[t], u\[Xi]2[t] -> u\[Xi]\[Xi]2[t],
u\[Eta]2[t] -> u\[Eta]\[Eta]2[t],
u\[Xi]3[t] -> u\[Xi]\[Xi]3[t], u\[Eta]3[t] -> u\[Eta]\[Eta]3[t]};

(*pall[t_] = m1 (\[Xi]\[Xi]1'[t] + \[Eta]\[Eta]1'[t]) + m2 (\[Xi]\[Xi]2'[t] + \[Eta]\[Eta]2'[t])

```



```

+ m3 (\[Xi]\[Xi]3'[t] + \[Eta]\[Eta]3'[t]);*)

L1[t_] = m1 (\[Xi]\[Xi]1[t] \[Eta]\[Eta]1'[t] - \[Xi]\[Xi]1'[t] \[Eta]\[Eta]1[t])
+ m2 (\[Xi]\[Xi]2[t] \[Eta]\[Eta]2'[t] - \[Xi]\[Xi]2'[t] \[Eta]\[Eta]2[t])
+ m3 (\[Xi]\[Xi]3[t] \[Eta]\[Eta]3'[t]
- \[Xi]\[Xi]3'[t] \[Eta]\[Eta]3[t]);

numdata1={};numdata2={};
For[i = 1, i <= 1000, i++,
AppendTo[numdata1, {i/10 // N, Abs[Ener[i/10] - Ener[0]]}];
AppendTo[numdata2, {i/10 // N, Abs[L1[i/10] - L1[0]]}];
numdataplot1 = ListLinePlot[numdata1, AxesLabel -> {"time", "|E(t)-E(0)|"},
PlotLabel -> "sec is the time needed to complete the computation " time[[1]],
PlotRange -> All, ImageSize -> 800];
numdataplot2 = ListLinePlot[numdata2, AxesLabel -> {"time", "|L(t)-L(0)|"},
PlotLabel -> "sec is the time needed to complete the computation " time[[1]],
PlotRange -> All, ImageSize -> 800];
]
]

VariationalEquationsGeneral[\[Xi]20_,\[Xi]30_,\[Eta]20_,\[Eta]30_,u\[Xi]20_,
u\[Xi]30_,u\[Eta]20_,u\[Eta]30_,w10_,w20_,w30_,w40_,w50_,w60_,w70_,w80_,m1_,m2_,m3_] :=
Module[{deq1,deq2,deq3,deq4,deq5,deq6,deq7,deq8,deq9,deq10,deq11,deq12,deq13,deq14,deq15,deq16},
\[Xi]10=-(m3*\[Xi]30+m2*\[Xi]20)/m1;
\[Eta]10=-(m3*\[Eta]30+m2*\[Eta]20)/m1;
u\[Xi]10=-(m3*u\[Xi]30+m2*u\[Xi]20)/m1;
u\[Eta]10=-(m3*u\[Eta]30+m2*u\[Eta]20)/m1;

\[Xi]1=-(m3 \[Xi]3[t]+m2 \[Xi]2[t])/m1;
\[Eta]1=-(m3 \[Eta]3[t]+m2 \[Eta]2[t])/m1;
r12=Sqrt[(\[Xi]1-\[Xi]2[t])^2+(\[Eta]1-\[Eta]2[t])^2];
r13=Sqrt[(\[Xi]1-\[Xi]3[t])^2+(\[Eta]1-\[Eta]3[t])^2];
r23=Sqrt[(\[Xi]3[t]-\[Xi]2[t])^2+(\[Eta]3[t]-\[Eta]2[t])^2];

H=1/2 m1 (u\[Xi]1^2+u\[Eta]1^2)+1/2 m2 (u\[Xi]2[t]^2+u\[Eta]2[t]^2)
+1/2 m3 (u\[Xi]3[t]^2+u\[Eta]3[t]^2)-(m1 m2)/r12-(m1 m3)/r13-(m2 m3)/r23 ;

F1 = u\[Xi]3[t];
F2 = u\[Eta]3[t];
F3 = -m1 (\[Xi]3[t]-\[Xi]1)/r13^3-m2 (\[Xi]3[t]-\[Xi]2[t])/r23^3;
F4 = -m1 (\[Eta]3[t]-\[Eta]1)/r13^3-m2 (\[Eta]3[t]-\[Eta]2[t])/r23^3;
F5 = u\[Xi]2[t];
F6 = u\[Eta]2[t];
F7 = -m1 (\[Xi]2[t]-\[Xi]1)/r12^3-m3 (\[Xi]2[t]-\[Xi]3[t])/r23^3;
F8 = -m1 (\[Eta]2[t]-\[Eta]1)/r12^3-m3 (\[Eta]2[t]-\[Eta]3[t])/r23^3;

(*module setting up the variational equations*)

deq1 = u\[Xi]2[t] == \[Xi]2'[t];
deq2 = u\[Xi]3[t] == \[Xi]3'[t];
deq3 = u\[Eta]2[t] == \[Eta]2'[t];
deq4 = u\[Eta]3[t] == \[Eta]3'[t];
deq5 = -m1 (\[Xi]2[t]-\[Xi]1)/r12^3-m3 (\[Xi]2[t]-\[Xi]3[t])/r23^3
== u\[Xi]2'[t]; (*px1*)
deq6 = -m1 (\[Xi]3[t]-\[Xi]1)/r13^3-m2 (\[Xi]3[t]-\[Xi]2[t])/r23^3
== u\[Xi]3'[t]; (*px2*)
deq7 = -m1 (\[Eta]2[t]-\[Eta]1)/r12^3-m3 (\[Eta]2[t]-\[Eta]3[t])/r23^3
== u\[Eta]2'[t]; (*py1*)
deq8 = -m1 (\[Eta]3[t]-\[Eta]1)/r13^3-m2 (\[Eta]3[t]-\[Eta]2[t])/r23^3
== u\[Eta]3'[t]; (*py2*)
deq9 = w1'[t] == w1[t]*D[F1, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F1, \[Eta]3[t]] +
w3[t]*D[F1, u\[Xi]3[t]] + w4[t]*D[F1, u\[Eta]3[t]]
+ w5[t]*D[F1, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F1, \[Eta]2[t]] +
w7[t]*D[F1, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F1, u\[Eta]2[t]];
deq10 = w2'[t] == w1[t]*D[F2, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F2, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F2, u\[Xi]3[t]]
+ w4[t]*D[F2, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F2, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F2, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F2, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F2, u\[Eta]2[t]];
deq11 = w3'[t] == w1[t]*D[F3, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F3, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F3, u\[Xi]3[t]] + w4[t]*D[F3, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F3, \[Xi]2[t]]
+ w6[t]*D[F3, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F3, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F3, u\[Eta]2[t]];
deq12 = w4'[t] == w1[t]*D[F4, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F4, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F4, u\[Xi]3[t]]
+ w4[t]*D[F4, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F4, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F4, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F4, u\[Xi]2[t]]
+ w8[t]*D[F4, u\[Eta]2[t]];
deq13 = w5'[t] == w1[t]*D[F5, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F5, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F5, u\[Xi]3[t]]
+ w4[t]*D[F5, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F5, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F5, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F5, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F5, u\[Eta]2[t]];

```

```

deq14 = w6'[t] == w1[t]*D[F6, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F6, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F6, u\[Xi]3[t]]
+ w4[t]*D[F6, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F6, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F6, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F6, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F6, u\[Eta]2[t]];
deq15 = w7'[t] == w1[t]*D[F7, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F7, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F7, u\[Xi]3[t]]
+ w4[t]*D[F7, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F7, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F7, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F7, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F7, u\[Eta]2[t]];
deq16 = w8'[t] == w1[t]*D[F8, \[Xi]3[t]] + w2[t]*D[F8, \[Eta]3[t]]
+ w3[t]*D[F8, u\[Xi]3[t]]
+ w4[t]*D[F8, u\[Eta]3[t]] + w5[t]*D[F8, \[Xi]2[t]] + w6[t]*D[F8, \[Eta]2[t]]
+ w7[t]*D[F8, u\[Xi]2[t]] + w8[t]*D[F8, u\[Eta]2[t]];

{deq1, deq2, deq3, deq4, deq5, deq6, deq7, deq8, deq9, deq10, deq11, deq12, deq13,
deq14, deq15, deq16,
\[Xi]3[0]==\[Xi]30, \[Xi]2[0]==\[Xi]20, \[Eta]3[0]==\[Eta]30,
\[Eta]2[0]==\[Eta]20, u\[Xi]3[0]==u\[Xi]30,
u\[Xi]2[0]==u\[Xi]20, u\[Eta]3[0]==u\[Eta]30, u\[Eta]2[0]==u\[Eta]20, w1[0] == w10,
w2[0] == w20, w3[0] == w30, w4[0] == w40,
w5[0] == w50, w6[0] == w60, w7[0] == w70, w8[0] == w80}

]

```

```

PMSGGeneral[tmin_, tmax_] := Module[{},
(*setting up the variational equations for 4 different sets of initial
conditions in order to create the primary solution matrix*)

VEGa = VariationalEquationsGeneral[\[Xi]20, \[Xi]30, \[Eta]20, \[Eta]30, u\[Xi]20,
u\[Xi]30, u\[Eta]20, u\[Eta]30, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m1, m2, m3];
VEGb = VariationalEquationsGeneral[\[Xi]20, \[Xi]30, \[Eta]20, \[Eta]30, u\[Xi]20,
u\[Xi]30, u\[Eta]20, u\[Eta]30, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m1, m2, m3];
VEGc = VariationalEquationsGeneral[\[Xi]20, \[Xi]30, \[Eta]20, \[Eta]30, u\[Xi]20,
u\[Xi]30, u\[Eta]20, u\[Eta]30, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, m1, m2, m3];
VEGd = VariationalEquationsGeneral[\[Xi]20, \[Xi]30, \[Eta]20, \[Eta]30, u\[Xi]20,
u\[Xi]30, u\[Eta]20, u\[Eta]30, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, m1, m2, m3];

(*solving the above listed sets of variational equations*)

sola = NDSolve[{VEGa}, {\[Xi]3[t], \[Xi]2[t], \[Eta]3[t], \[Eta]2[t], u\[Xi]3[t], u\[Xi]2[t],
u\[Eta]3[t], u\[Eta]2[t], w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
MaxSteps -> 20000000 (*, Method->"BDF", PrecisionGoal -> 13, AccuracyGoal -> 13*)];
solb = NDSolve[{VEGb}, {\[Xi]3[t], \[Xi]2[t], \[Eta]3[t], \[Eta]2[t], u\[Xi]3[t], u\[Xi]2[t],
u\[Eta]3[t], u\[Eta]2[t], w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
MaxSteps -> 20000000 (*, Method->"BDF", PrecisionGoal -> 13, AccuracyGoal -> 13*)];
solc = NDSolve[{VEGc}, {\[Xi]3[t], \[Xi]2[t], \[Eta]3[t], \[Eta]2[t], u\[Xi]3[t], u\[Xi]2[t],
u\[Eta]3[t], u\[Eta]2[t], w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
MaxSteps -> 20000000 (*, Method->"BDF", PrecisionGoal -> 13, AccuracyGoal -> 13*)];
sold = NDSolve[{VEGd}, {\[Xi]3[t], \[Xi]2[t], \[Eta]3[t], \[Eta]2[t], u\[Xi]3[t], u\[Xi]2[t],
u\[Eta]3[t], u\[Eta]2[t], w1[t], w2[t], w3[t], w4[t]}, {t, tmin, tmax},
MaxSteps -> 20000000 (*, Method->"BDF", PrecisionGoal -> 13, AccuracyGoal -> 13*)];

(*creating the primary solution matrix using as elements Subscript[a, i]
the solutions of the above listed sets of equations*)
a1[t_] = w1[t] /. sola[[1]];
a2[t_] = w2[t] /. sola[[1]];
a3[t_] = w3[t] /. sola[[1]];
a4[t_] = w4[t] /. sola[[1]];
b1[t_] = w1[t] /. solb[[1]];
b2[t_] = w2[t] /. solb[[1]];
b3[t_] = w3[t] /. solb[[1]];
b4[t_] = w4[t] /. solb[[1]];
c1[t_] = w1[t] /. solc[[1]];
c2[t_] = w2[t] /. solc[[1]];
c3[t_] = w3[t] /. solc[[1]];
c4[t_] = w4[t] /. solc[[1]];
d1[t_] = w1[t] /. sold[[1]];
d2[t_] = w2[t] /. sold[[1]];
d3[t_] = w3[t] /. sold[[1]];
d4[t_] = w4[t] /. sold[[1]];

X = ({
{a1[t], b1[t], c1[t], d1[t]},
{a2[t], b2[t], c2[t], d2[t]},
{a3[t], b3[t], c3[t], d3[t]},
{a4[t], b4[t], c4[t], d4[t]}
});
Print[" We have succesfully evaluated X(t)"];
]

```

```

FLIGeneral[\[Xi]20_, \[Xi]30_, \[Eta]20_, \[Eta]30_, u\[Xi]20_, u\[Xi]30_, u\[Eta]20_,
u\[Eta]30_, tmin_, tmax_, method_]
:= Module[{VFLIGeneral},

```

```

VFLIGeneral=VariationalEquationsGeneral[\[Xi]20,\[Xi]30,\[Eta]20,\[Eta]30,u\[Xi]20,
u\[Xi]30,u\[Eta]20,u\[Eta]30,1,0,0,0,0,0,0,m1,m2,m3];
solg = NDSolve[VFLIGeneral, {\[Xi]3[t],\[Xi]2[t],\[Eta]3[t],\[Eta]2[t],
u\[Xi]3[t],u\[Xi]2[t],u\[Eta]3[t],u\[Eta]2[t],w1[t],w2[t],w3[t],w4[t],
w5[t],w6[t],w7[t],w8[t]},
{t,tmin,tmax},MaxSteps->Infinity,Method->method,
PrecisionGoal->11,AccuracyGoal->11];

ww1[t_]=w1[t]/.solg[[1]];
ww2[t_]=w2[t]/.solg[[1]];
ww3[t_]=w3[t]/.solg[[1]];
ww4[t_]=w4[t]/.solg[[1]];
ww5[t_]=w5[t]/.solg[[1]];
ww6[t_]=w6[t]/.solg[[1]];
ww7[t_]=w7[t]/.solg[[1]];
ww8[t_]=w8[t]/.solg[[1]];

FliGeneral[t_]=Log[Sqrt[ww1[t]^2+ww2[t]^2+ww3[t]^2+ww4[t]^2+ww5[t]^2
+ww6[t]^2+ww7[t]^2+ww8[t]^2]/t];

]

```

Βιβλιογραφία

- [1] Press, W, H. *Numerical Recipes in C++: the art of scientific computing*. Cambridge University Press, 2002.
- [2] Χατζηδημητρίου, Ι. *Θεωρητική Μηχανική, Τόμος Α*. Εκδόσεις Γιαχούδη, 2000.
- [3] Χατζηδημητρίου, Ι. *Θεωρητική Μηχανική, Τόμος Β*. Εκδόσεις Γιαχούδη, 2000.
- [4] Ascher, U, M and Petzold, L, R. *Computer methods for ordinary differential equations and differential algebraic equations*. SIAM, 1998.
- [5] Griffiths, D, V and Smith, I, M. *Numerical methods for engineers: a programming approach*. CRC-Press, 1999.
- [6] Bashforth, F and Adams, J, C. *Theories of Capillary Action*. Cambridge University Press, 1883.
- [7] Dahlquist, G and Tierney, T and Bjorck , A. *Numerical Methods*. Dover Publications, 2003.
- [8] Beyer, W, H. *Standard Mathematical Tables - 24th Revised edition*. CRC Press, 1976 .
- [9] Cartwright, J, H, E. and Piro, O. *The Dynamics of Runge-Kutta Methods*. Int. J. Bifurcations Chaos 2, 427-449, 1992.
- [10] Murray, C, D. and Dermott, S. F. *Solar System Dynamics*, Cambridge University Press, 1999
- [11] Χρηστίδης, Θ. *Συνέχιση οικογενειών περιοδικών τροχιών από το περιορισμένο στο γενικό πρόβλημα των τριών σωμάτων*. Τμήμα Φυσικής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Διδακτορική Διατριβή, 1978
- [12] Γκόλιας, Ι. *Η προσέγγιση Hill στην μελέτη της κίνησης φυσικών δορυφόρων*, Τμήμα Φυσικής, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, Διπλωματική εργασία, 2009
- [13] Ichtiaroglou, S, *Elliptic Hill's problem - The continuation of periodic orbits*. Astronomy & Astrophysics, 92:139 141, 1980.
- [14] Szebehely, V, *The Theory of Orbits*, Academic Press, 1967.
- [15] Valtonen, M and Karttunen, H, *The Three-Body Problem*, Cambridge University Press , 2006).
- [16] G.Voyatzis, T. Kotoulas and J.D.Hadjidemetriou (2004), *Symmetric and nonsymmetric periodic orbits in the exterior mean motion resonances with neptune*. Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, Volume 91, Issue 1-2, pp. 191-202,

- [17] Hagihara, Y: *Celestial Mechanics. (Vol I and Vol II pt 1 and Vol II pt 2.)* MIT Press, 1970.
- [18] Celetti, A and Perrozzì, E, *Celestian Mechanics : the waltz of planets*, Springer Praxis Books, 2007.
- [19] Butcher, J. *Numerical methods for ordinary differential equations*, John Wiley and sons, 2003.
- [20] Wolfram ,S . *The Mathematica Book, Fifth Edition*. 2003
- [21] Wolfram, S . *Wolfram Mathematica 7 Documentation Center* “<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>”, 2007-2010.
- [22] Don,E. *Schaum’s Outline of Mathematica*, McGraw-Hill. 2009.
- [23] Μπούντης,Τ και Πνευματικός, Σ. *Τάξη και Χάος στα Μη Γραμμικά Δυναμικά Συστήματα, Τόμος Δεύτερος*. Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικός, 1989
- [24] Hairer,E and Wanner, G, *Solving ordinary differential equations II: Stiff and differential-algebraic problems, second edition*, Springer Verlag, Berlin, 1996.