Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Σχολή Θετικών Επιστημών Τμήμα Φυσικής

Η Μέθοδος IDO και η Υλοποίησή της σε CUDA C

Διπλωματική Εργασία για το Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Υπολογιστικής Φυσικής

Αντωνιάδης Παναγιώτης - Δημήτριος

Επιβλέπων : Στεργιούλας Νικόλαος, Επ. Καθηγητής

23 Ιουνίου 2010

Περιεχόμενα

1	Εισ	αγωγή	7
	1.1	Γενική λύση και το πρόβλημα του Riemann	$\overline{7}$
		1.1.1 Υπερβολικές εξισώσεις	7
		1.1.2 Γραμμικά Υπερβολικά Συστήματα	10
		1.1.3 Μη-γραμμικές Υπερβολικές Εξισώσεις	15
		1.1.4 Μη-γραμμικά Υπερβολικά Συστήματα	21
	1.2	Οι εξισώσεις Navier-Stokes	25
		1.2.1 Η διατήρηση της μάζας	27
		1.2.2 Η διατήρηση της ορμής	27
		1.2.3 Η διατήρηση της ενέργειας	29
	1.3	Οι εξισώσεις του Euler	31
		1.3.1 Η εξίσωση κατάστασης	31
		1.3.2 Οι εξισώσεις του Euler σε μία διάσταση	35
		1.3.3 Euler-1D : η πλήρης και ακριβής λύση στο πρόβλημα του	
		Riemann	48
2	Inte	rpolated Differential Operator Scheme	61
2	Inte 2.1	erpolated Differential Operator Scheme	61 61
2	Inte 2.1 2.2	erpolated Differential Operator Scheme	61 61 61
2	Inte 2.1 2.2 2.3	prpolated Differential Operator Scheme 0 Εισαγωγή 1 Η μέθοδος 1 Υλοποίηση 1	61 61 61 62
2	Inte 2.1 2.2 2.3	erpolated Differential Operator Scheme 6 Εισαγωγή	61 61 61 62 62
2	Inte 2.1 2.2 2.3	prpolated Differential Operator Scheme 6 Εισαγωγή	 61 61 62 62 63
2	Inte 2.1 2.2 2.3	erpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή	 61 61 62 62 63 64
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4	Prpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή	 61 61 62 62 63 64 64
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4	erpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή	 61 61 62 62 63 64 64 65
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4	Prpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή	61 61 62 62 63 64 64 65 71
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4	Prpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή	 61 61 62 62 63 64 64 65 71 72
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4	Prpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή Η μέθοδος Υλοποίηση 2.3.1 Συμπτωτικό πολυώνυμο 2.3.2 Χρονική εξέλιξη Προβλήματα 2.4.1 Η εξίσωση του Burgers 2.4.2 Οι εξισώσεις του Euler 2.4.3 Δύο αλληλεπιδρώντα εκρηκτικά κύματα 2.4.4 Συμπεράσματα Υλοποίηση με Runge Kutta	 61 61 62 62 63 64 64 65 71 72 73
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4	Prpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή Η μέθοδος Υλοποίηση 2.3.1 Συμπτωτικό πολυώνυμο 2.3.2 Χρονική εξέλιξη Προβλήματα 2.4.1 Η εξίσωση του Burgers 2.4.2 Οι εξισώσεις του Euler 2.4.3 Δύο αλληλεπιδρώντα εκρηκτικά κύματα 2.4.4 Συμπεράσματα Υλοποίηση με Runge Kutta 2.5.1	 61 61 62 62 63 64 64 65 71 72 73 74
2	Inte 2.1 2.2 2.3 2.4 2.5	erpolated Differential Operator Scheme Εισαγωγή	 61 61 62 62 63 64 64 65 71 72 73 74 76

3	CU	DA	79	
	3.1	Εισαγωγή	79	
	3.2	CUDA Xal CUDA C	80	
	3.3	Το προγραμματιστικό μοντέλο	80	
		3.3.1 Η ιεραρχία των threads	81	
		3.3.2 Η σύνδεση με την C	82	
	3.4	Αξιοποίηση των πόρων της συσκευής	84	
		3.4.1 Βαθμός κατάληψης	85	
		3.4.2 Μεταφορές Μνήμης	88	
		3.4.3 Συγχρονισμός	88	
	3.5	Υλοποίηση της IDO σε κώδικα CUDA C	89	
		3.5.1 Οι παράμετροι εκτέλεσης ενός παράλληλου κώδικα	89	
		3.5.2 Σύγκριση Taylor με Runge Kutta	93	
		3.5.3 Σύγκριση του παράλληλου με τον συμβατικό κώδικα	94	
	3.6	Συμπεράσματα	95	
			~ -	
Α	$A\pi c$	οδείζεις σχέσεων κεφαλαίου θεωρίας	97	
	A'.I	Απόδειζη Ι	97	
	A.2	Αποδειζη 2	97	
	A.3	Αποδειζη 3	98	
	A.4	Αποσειζη 4	98	
	A.5	$A = \{S = S = S = S = S = S = S = S = S = $	99	
	A .0	Αποσειζη δ	00	
	A .7	Αποδειζη /Ι	01	
Β' Σνέσεις απαραίτητες για την υπολογιστική υλοποίηση				
	των	ν εξισώσεων του Euler με IDO 10	05	
T /	TZ /		~~	
Г	Κω	δ in a state of the analysis of the set o	J9	
Δ	ίΚώ	δικας που υλοποιεί την μέθοδο IDO 1:	21	
E'	кA	$\delta war \pi \omega \omega c \pi \omega T = 0$	25	
Ľ	F' 1	To reverse adu h:	25	
	E' 9	To apyrio au constra h 1	36	
	E' 2	To appendix function 1	37	
	E' 4	To appendix function 1	38	
	E' 5	To append end 1	30 70	
	E' 6	To appendiate 1	-10 /0	
	ш.0		±J	

4

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Η εργασία αυτή πραγματεύεται την μέθοδο IDO, μία νέα σχετικά μέθοδο που μπορεί να χρησιμοποιείται για την επίλυση ευρέος φάσματος μερικών διαφορικών εξισώσεων, και την υλοποίησής της σε κώδικα CUDA C για παράλληλη εκτέλεση σε GPU τεχνολογίας CUDA.

Αρχικά περιγράφονται οι λύσεις στο πρόβλημα του Riemann για τις περιπτώσεις γραμμικών εξισώσεων, γραμμικών συστημάτων, μη-γραμμικών εξισώσεων και μη-γραμμικών συστημάτων εξισώσεων. Στην συνέχεια αναπαράγονται οι εξισώσεις Navier-Stokes, για να οδηγήσουν μετά από απλοποιήσεις στο σύστημα των μονοδιάστατων εξισώσεων του Euler, που χρησιμοποιούνται για την δοκιμή της υπό μελέτη μεθόδου. Για τις εξισώσεις αυτές αναπαράγεται λεπτομερώς η ακριβής λύση στο πρόβλημα του Riemann, ενώ δίνεται και ο τρόπος αριθμητικής υλοποίησής της.

Η παρουσίαση της μεθόδου IDO συνοδεύεται από την χρήση της για επίλυση Riemann προβλημάτων με την εξίσωση του Burgers και τις εξισώσεις του Euler. Καθότι δύο οι τρόποι υλοποίησης της μεθόδου, με την χρονική εξέλιξη της αριθμητικής λύσης να δίνεται είτε από αναπτύγματα Taylor, είτε με τη μεθόδου Runge Kutta, τα αποτελέσματα των προβλημάτων μαζί με συγκρίσεις και σχόλια δίνονται και για τις δύο περιπτώσεις.

Τέλος, περιγράφονται τα πλεονεχτήματα της τεχνολογίας CUDA, όπως επίσης και το προγραμματιστικό μοντέλο που την συνοδεύει. Με βάση τον παράλληλο κώδικα της IDO περιγράφονται οι τρόποι βελτίωσης της απόδοσης κατά την εκτέλεση ενός προγράμματος στην κάρτα γραφικών, ενώ γίνεται και σύγκριση του παράλληλου προγράμματος με το συμβατικό, δίνοντας τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα και για τις δύο περιπτώσεις.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

6

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Γενική λύση και το πρόβλημα του Riemann

Η μελέτη των εξισώσεων του Euler προϋποθέτει γνώση των ιδιοτήτων και λύσεων απλούστερων, μαθηματικά, οντοτήτων. Έτσι, οι παράγραφοι που ακολουθούν (μία σύνοψη βασικών αποτελεσμάτων από το σύγγραμμα του Ε.F. Toro [1]) ασχολούνται με υπερβολικές εξισώσεις και συστήματα μερικών παραγώγων, δίνοντας την γενική τους λύση, όπως και την λύση τους στο πρόβλημα του Riemann. Στο Παράρτημα Α΄ δίνονται επιπλέον λεπτομερείς αποδείξεις για τις βασικότερες σχέσεις που παρουσιάζονται εδώ.

1.1.1 Υπερβολικές εξισώσεις

Όπως για την μελέτη συνήθων διαφορικών εξισώσεων είναι χρήσιμο να ξεκινήσει κανείς από την απλούστερη αυτών

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \beta = const$$

έτσι και για τις ανάγκες της εργασίας αυτής η ανάλυση ξεκινάει από το πρόβλημα αρχικών συνθηκών για μία απλουστευμένη περίπτωση της εξίσωσης μεταφοράς που είναι μία υπερβολική ΔΕΜΠ (διαφορική εξίσωση μερικών παραγώγων).

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_x = 0, \ -\infty < x < \infty, \ t > 0, \\ \text{me arguing fixes using } u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$
(1.1)

όπου α είναι μία σταθερή ταχύτητα μετάδοσης χύματος.

Χαρακτηριστικές καμπύλες

Χαρακτηριστικές ορίζονται οι καμπύλες x = x(t) στο επίπεδο t - x κατά μήκος των οποίων μία ΔΕΜΠ γίνεται συνήθης διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ).

Για την περίπτωση της (1.1) θεωρείται οτι x = x(t) και u = u(x(t), t), οπότε ο ρυθμός μεταβολής του u κατά μήκος της x = x(t) θα είναι:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$
(1.2)

Στην περίπτωση που η καμπύλη x = x(t) ικανοποιεί την συνήθη $\Delta \mathbf{E}$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \alpha,\tag{1.3}$$

τότε η σχέση (1.2) γίνεται:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \stackrel{(\mathbf{1.1})}{=} 0.$$
(1.4)

Δηλαδή, κατά μήκος της χαρακτηριστικής καμπύλης - ευθείας - $\frac{dx}{dt} = \alpha$, η ΔΕΜΠ (1.1) μετατρέπεται στην ΣΔΕ $\frac{du}{dt} = 0$. Επιπρόσθετα, η ΣΔΕ υποδηλώνει οτι το u παραμένει σταθερό κατά μήκος της χαρακτηριστικής ευθείας. Το α είναι η κλίση της χαρακτηριστικής ευθείας και αποκαλείται χαρακτηριστική ταχύτητα. Στην πράξη είναι περισσότερο σύνηθες ο σχεδιασμός των χαρακτηριστικών καμπύλων να γίνεται στο x - t επίπεδο, που στην περίπτωση αυτή η κλίση θα είναι $1/\alpha$.



Σχήμα 1.1: Εικόνα χαρακτηριστικών για την γραμμική εξίσωση διάδοσης με θετική χαρακτηριστική ταχύτητα α. Οι αρχικές συνθήκες για t = 0 καθορίζουν την αρχική θέση x_0 . Σχήμα 2.1 από [1].

Στο σχήμα 1.1 φαίνεται η οικογένεια των χαρακτηριστικών ευθειών που δίνονται από την ΣΔΕ (1.3) για $\alpha > 0$, που είναι μία μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων. Ένα μέλος της οικογένειας αυτής προσδιορίζεται όταν καθορίζεται μία αρχική συνθήκη για την (1.3). Για παράδειγμα, για την αρχική συνθήκη $x(0) = x_0$, η λύση της (1.3) είναι η

$$x = x_0 + \alpha t, \tag{1.5}$$

που είναι η χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(x_0, 0)$.

Γενιχή λύση

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κατά μήκος μίας χαρακτηριστικής το u παραμένει σταθερό. Τότε, και επειδή όπως περιγράφεται από την (1.1) για t = 0 θα είναι $u(x, 0) = u_0(x)$, σε όλο το μήκος της χαρακτηριστικής $x(t) = x_0 + \alpha t$ θα είναι

$$u(x,t) = u_0(x_0) \stackrel{(1.5)}{=} u_0(x - \alpha t).$$
(1.6)

Αυτή είναι και η γενική λύση για το (1.1) η οποία μεταφράζεται ως εξής: δοθέντος ενός αρχικού προφίλ $u_0(x)$, η ΔΕΜΠ απλά μετατοπίζει το προφίλ αυτό με ταχύτητα α προς τα δεξιά, εάν $\alpha > 0$, ή προς τα αριστερά, εάν $\alpha < 0$. Κατά την μετατόπιση το αρχικό προφίλ παραμένει αναλλοίωτο.

Πρέπει να σημειωθεί οτι η παραλληλότητα των χαραχτηριστικών καμπύλων είναι χαραχτηριστικό των υπερβολικών ΔΕΜΠ με σταθερούς συντελεστές, όπως επίσης και ότι η σχέση (1.1) που μελετήθηκε έχει κάποια από τα βασικά χαρακτηριστικά φαινομένων διάδοσης κυμάτων.

Το πρόβλημα του Riemann

Μία ειδική περίπτωση προβλήματος αρχικών συνθηκών είναι το πρόβλημα του Riemann. Για την ίδια υπερβολική ΔΕΜΠ (βλ. (1.1)) το πρόβλημα αυτό έχει ως εξής:

$$\begin{cases} u_t + \alpha u_x = 0\\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{av } x < 0\\ u_R & \text{av } x > 0 \end{cases}$$
(1.7)

όπου u_L και u_R δύο σταθερές τιμές, που στην περίπτωση που είναι ίσες μεταξύ τους το πρόβλημα γίνεται τετριμμένο και η λύση του έχει ήδη συζητηθεί. Σύμφωνα με όσα ειπώθηκαν στην προηγούμενη παράγραφο, κάθε σημείο του προφίλ πρέπει να διαδίδεται σε απόσταση αt σε χρόνο t. Αυτό θα συμβαίνει και για το σημείο $x_0 = 0$, όπου συμβαίνει η ασυνέχεια στις αρχικές συνθήκες της (1.7). Το σημείο αυτό ακολουθεί την χαρακτηριστική ευθεία $x = \alpha t$ που χωρίζει τον χώρο x - t σε δύο ημιεπίπεδα. Σε αυτό δεξιά της ευθείας που η λύση παίρνει την τιμή u_R και σε αυτό αριστερά που παίρνει την τιμή u_L :

$$u(x,t) = u_0(x - \alpha t) = \begin{cases} u_L & \text{and} \quad x - \alpha t < 0\\ u_R & \text{and} \quad x - \alpha t > 0 \end{cases}$$
(1.8)

1.1.2 Γραμμικά Υπερβολικά Συστήματα

Τώρα, επεκτείνεται η μελέτη από την απλούστερη υπερβολική ΔΕΜΠ σε γραμμικό σύστημα υπερβολικών εξισώσεων της μορφής

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0, \tag{1.9}$$

όπου **A** ο πίνακας σταθερών συντελεστών. Προηγουμένως όμως, πρέπει να τεκμηριωθεί η μορφή της (1.9), αλλά και να δοθούν κάποιοι ορισμοί που χρησιμοποιούνται παρακάτω.

Ορισμοί

Διατηρητικοί νόμοι ονομάζονται τα συστήματα ΔΕΜΠ που μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0 \tag{1.10}$$

όπου

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}, \ \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix},$$

όπου το U αποχαλείται διάνυσμα των διατηρούμενων μεταβλητών. Το $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ αποχαλείται διάνυσμα ροών με στοιχεία τις ροές f_i που είναι εν γένει συναρτήσεις των στοιχείων u_i του U.

Ιακωβιανός πίνακας : Ιακωβιανή του διανύσματος ροών $\mathbf{F}(\mathbf{U})$ ονομάζεται ο πίνακας

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1 / \partial u_1 & \cdots & \partial f_1 / \partial u_m}{\partial f_2 / \partial u_1 & \cdots & \partial f_2 / \partial u_m} \\ \vdots & \vdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m / \partial u_1 & \cdots & \partial f_m / \partial u_m}{\partial t_m} \end{bmatrix}.$$
 (1.11)

Σημειώνεται, τώρα, οτι αφού ισχύει

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x},$$

η (1.10) μπορεί να γραφεί:

$$(1.10) \stackrel{(1.11)}{\Longrightarrow} \mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0$$

Εύχολα φαίνεται οτι η (1.9) είναι αυτής της μορφής, μόνο που τα στοιχεία του πίναχα \mathbf{A} , αντί να είναι συναρτήσεις των u_i είναι σταθεροί συντελεστές.

Διαγωνιοποιήσιμο Σύστημα : Ένας πίναχας **Α** λέγεται διαγωνιοποιήσιμος όταν μπορεί να γραφτεί ως:

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}\Lambda\mathbf{K}^{-1} \,\,\acute{\eta}\,\Lambda = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{K},\tag{1.12}$$

όπου ο Λ είναι ένας διαγώνιος πίναχας με στοιχεία τις ιδιοτιμές του πίναχα \mathbf{A} , και ο \mathbf{K} είναι ένας πίναχας που έχει για στήλες τα δεξιά ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές του πίναχα \mathbf{A} .

Ένα σύστημα λέγεται οτι είναι διαγωνιοποιήσιμο όταν ο πίναχας συντελεστών **A** είναι διαγωνιοποιήσιμος.

Χαρακτηριστικές Μεταβλητές Η ύπαρξη του αντίστροφου πίναχα \mathbf{K}^{-1} καθιστά δυνατό τον ορισμό ενός νέου συνόλου εξαρτημένων μεταβλητών $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \ldots, w_m)^T$ μέσω του μετασχηματισμού

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{U} \, \mathbf{\acute{\eta}} \, \mathbf{U} = \mathbf{K} \mathbf{W}, \tag{1.13}$$

με βάση τις οποίες όταν εχφράζεται ένα σύστημα εξισώσεων της μορφής (1.9), έρχεται σε τετριμμένη μορφή· κάθε εξίσωση του συστήματος, δηλαδή, περιλαμβάνει μία και μόνο εξαρτημένη μεταβλητή. Οι μεταβλητές του νέου αυτού συνόλου **W** αποκαλούνται χαρακτηριστικές μεταβλητές.

Υπερβολικό Σύστημα ή σύστημα υπερβολικών εξισώσεων ονομάζεται το σύστημα της μορφής $\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x + \mathbf{B} = 0$ (δηλαδή όχι απαραίτητα διατηρητικό) το οποίο σε ένα σημείο (x, t) έχει πίνακα \mathbf{A} με m πραγματικές ιδιοτιμές και m αντίστοιχα γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Περαιτέρω, το σύστημα λέγεται αυστηρώς υπερβολικό, εάν όλες οι ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} είναι διακεκριμένες.

Με βάση τον παραπάνω ορισμό του διαγωνιοποιήσιμου πίναχα, σχέση (1.12), υπερβολιχό μπορεί να οριστεί ένα σύστημα της μορφής (1.9) που έχει πραγματιχές ιδιοτιμές χαι διαγωνιοποιήσιμο πίναχα συντελεστών.

Η Γενική Λύση

Όπως αναφέρθηκε και στον ορισμό των χαρακτηριστικών μεταβλητών, η χρήση τους φέρνει το σύστημα (1.9) σε τετριμμένη μορφή. Πιο αναλυτικά, επειδή ο πίνακας **A** είναι σταθερός, σταθερός θα είναι επίσης και ο πίνακας **K**. Τότε, οι μερικές παράγωγοι \mathbf{U}_t και \mathbf{U}_x θα γίνονται

$$(1.13) \longrightarrow \mathbf{U}_t = \mathbf{K}\mathbf{W}_t , \ \mathbf{U}_x = \mathbf{K}\mathbf{W}_x. \tag{1.14}$$

Η αντικατάσταση αυτών στην (1.9) δίνει:

$$(1.9) \Rightarrow \mathbf{KW}_t + \mathbf{AKW}_x \stackrel{(1.12)}{\Longrightarrow} \mathbf{W}_t + \Lambda \mathbf{W}_x = 0.$$
(1.15)

Σε αυτή τη σχέση, επειδή ο
 Λ είναι διαγώνιος πίναχας, χάθε εξίσωση του συστήματος θα
έχει ως εξής

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial w_i}{\partial x} = 0,$$

και θα περιέχει μία και μόνο εξαρτημένη μεταβλητή $w_i(x,t)$. Η εξίσωση αυτή είναι της ίδιας μορφής με την εξίσωση μεταφοράς (1.1), όπου τώρα η χαρακτηριστική ταχύτητα είναι λ_i , και θα είναι τόσες οι χαρακτηριστικές καμπύλες, όσες οι εξαρτημένες μεταβλητές w_i .

Τώρα, στο πρόβλημα αρχικών συνθηκών του συστήματος (1.9), οι αρχικές συνθήκες θα δίνονται ως εξής:

$$\mathbf{U}^{(0)} = (u_1^{(0)}, u_2^{(0)}, \dots, u_m^{(0)})^T.$$
(1.16)

Πρώτο βήμα προς την γενική λύση, θα είναι να βρεθεί η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών συνθηκών για την τετριμμένη μορφή του συστήματος, συναρτήσει των χαρακτηριστικών μεταβλητών. Οι αρχικές συνθήκες για αυτές τις μεταβλητές θα είναι $\mathbf{W}^{(0)} = (w_1^{(0)}, w_2^{(0)}, \ldots, w_m^{(0)})^T$ και θα δίνονται με την βοήθεια της (1.13) ως

$$\mathbf{W}^{(0)} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{U}^{(0)}. \tag{1.17}$$

Λόγω της ομοιότητας όλων των εξισώσεων του συστήματος με την εξίσωση μεταφοράς, η λύση της καθεμίας θα έχει την ίδια μορφή με την (1.6) και επομένως η λύση του συστήματος θα δίνεται απευθείας ως

$$w_i(x,t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) , \quad i = 1, \dots, m.$$
 (1.18)

Αυτή η λύση, τώρα, μπορεί να μετασχηματιστεί σύμφωνα με την σχέση $\mathbf{U} = \mathbf{K}\mathbf{W}$ (βλ. (1.13)) ώστε να καταλήξει στην γενική λύση συναρτήσει των αρχικών μεταβλητών.

Για να φανεί πιο ξεκάθαρα η μορφή της τελικής λύσης, μπορεί κανείς να γράψει την σχέση $\mathbf{U}=\mathbf{K}\mathbf{W}$ αναλυτικά:

$$u_{1} = w_{1}k_{1}^{(1)} + w_{2}k_{1}^{(2)} + \ldots + w_{m}k_{1}^{(m)}$$
$$u_{i} = w_{1}k_{i}^{(1)} + w_{2}k_{i}^{(2)} + \ldots + w_{m}k_{i}^{(m)}$$
$$u_{m} = w_{1}k_{m}^{(1)} + w_{2}k_{m}^{(2)} + \ldots + w_{m}k_{m}^{(m)},$$

12

ή σε μορφή πινάχων

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} k_1^{(1)} \\ k_2^{(1)} \\ \vdots \\ k_m^{(1)} \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} k_1^{(2)} \\ k_2^{(2)} \\ \vdots \\ k_m^{(2)} \end{bmatrix} + \dots + w_m \begin{bmatrix} k_1^{(m)} \\ k_2^{(m)} \\ \vdots \\ k_m^{(m)} \end{bmatrix},$$

που συνοπτικά μπορεί να γραφεί:

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} w_i(x,t) \mathbf{K}^{(i)},$$

που δείχνει οτι η λύση μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των ιδιοδιανυσμάτων $\mathbf{K}^{(i)}$. Αντικαθιστώντας τώρα από την (1.18), η μορφή της λύσης προχωρεί ακόμα ένα βήμα

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{i=1}^{m} w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) \mathbf{K}^{(i)}.$$
 (1.19)

Από εδώ, μπορεί να δει κανείς την λύση του **U** σαν υπέρθεση m κυμάτων καθένα από τα οποία διαδίδεται ανεξάρτητα χωρίς μεταβολή στο σχήμα του. Το κύμα i θα έχει σχήμα $w_i^{(0)}(x)\mathbf{K}^{(i)}$ και θα διαδίδεται με ταχύτητα λ_i .

Το πρόβλημα του Riemann

Η διατύπωση του προβλήματος του Riemann για υπερβολικό σύστημα εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές έχει ως εξής:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

αρχ. συνθήχες
$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, \quad x < 0 & \cdot \\ \mathbf{U}_R, \quad x > 0 \end{cases}$$
(1.20)

Θεωρείται ότι το σύστημα είναι αυστηρώς υπερβολικό, οι ιδιοτιμές του πραγματικές και αριθμούνται έτσι ώστε

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m$$

Η δομή της λύσης: Η δομή της λύσης του προβλήματος όπως αυτή απεικονίζεται στο επίπεδο (x - t) φαίνεται στο σχήμα 1.2. Αποτελείται από m κύματα που ξεκινούν από την αρχή των αξόνων, ένα για κάθε ιδιοτιμή λ_i . Κάθε κύμα i φέρει μία ασυνέχεια στην λύση U η οποία διαδίδεται με ταχύτητα λ_i . Παρατηρώντας το σχήμα εύκολα καταλαβαίνει κανείς οτι η λύση αριστερά του κύματος λ_1 - αυτού δηλαδή που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 - είναι απλώς οι αρχικές συνθήκες U_L, και δεξιά του κύματος λ_m είναι U_R. Στόχος επομένως είναι να βρεθεί η λύση στα διαστήματα μεταξύ των κυμάτων λ_1 και λ_m .



Σχήμα 1.2: Η δομή της λύσης για το πρόβλημα του Riemann για ένα $m\times m$ υπερβολικό σύστημα σταθερών συντελεστών. Σχήμα 2.4 από [1].

Επειδή το σύστημα (1.20) είναι υπερβολικό, εξ΄ ορισμού θα έχει γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Έτσι, οι σταθερές καταστάσεις \mathbf{U}_L και \mathbf{U}_R που δίνονται στις αρχικές συνθήκες μπορούν να εκφραστούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί των ιδιοδιανυσμάτων:

$$\mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^m \alpha_i \mathbf{K}^{(i)} , \ \mathbf{U}_R = \sum_{i=1}^m \beta_i \mathbf{K}^{(i)}, \qquad (1.21)$$

όπου τα α_i , β_i με $i = 1 \rightarrow m$ είναι σταθεροί συντελεστές. Η λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών (1.20) θα δίνεται με την μορφή που φαίνεται στην σχέση (1.19). Εύκολα παρατηρεί κανείς οτι καθεμία από τις (1.21) είναι μία περίπτωση της (1.19). Συγκρίνοντας, τώρα τις (1.19) και (1.21) και λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, θα είναι

$$w_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \alpha_i & \text{an } x < 0\\ \beta_i & \text{an } x > 0 \end{cases} \quad \text{ fig } i = 1, 2, \dots, m ,$$

για την χρονική στιγμή 0. Επεκτείνοντας την έκφραση αυτή ώστε να συμπεριλαμβάνει και την εξέλιξη στον χρόνο θα είναι

$$w_i(x,t) = w_i^{(0)}(x - \lambda_i t) = \begin{cases} \alpha_i & \text{an } x - \lambda_i t < 0\\ \beta_i & \text{an } x - \lambda_i t > 0 \end{cases}$$

Θεωρώντας, τώρα, ένα σημείο του επιπέδου απειχόνισης (x,t), θα υπάρχει μία ιδιοτιμή λ_I τέτοια ώστε $\lambda_I < \frac{x}{t} < \lambda_{I+1}$ (ή ισοδύναμα $x - \lambda_i t > 0$, $\forall i \leq I$). Σε εχείνο το σημείο η λύση στο πρόβλημα του Riemann, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα δίνεται ως εξής:

$$\mathbf{U}(x,t) = \sum_{i=1}^{I} \beta_i \mathbf{K}^{(i)} + \sum_{i=I+1}^{m} \alpha_i \mathbf{K}^{(i)}, \qquad (1.22)$$

όπου I είναι η μέγιστη τιμή του i για την οποία $x - \lambda_i t > 0$.

1.1.3 Μη-γραμμικές Υπερβολικές Εξισώσεις

Σε αυτή την παράγραφο γίνεται μελέτη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των μη γραμμικών, υπερβολικών, διατηρητικών νόμων. Τέτοια χαρακτηριστικά είναι ο σχηματισμός έντονων βαθμίδων στα κύματα (wave steepening) όπως επίσης και ο σχηματισμός κρουστικών κυμάτων . Για τις ανάγκες της περιγραφής χρησιμοποιείται ο μη-γραμμικός διατηρητικός νόμος

$$u_t + f(u)_x = 0. (1.23)$$

Ο νόμος αυτός μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$u_t + \lambda(u)u_x = 0, \quad \lambda(u) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = f'(u), \tag{1.24}$$

όπου λ η χαραχτηριστική ταχύτητα. Στην περίπτωση που η μελέτη γινόταν γύρω από σύστημα του οποίου οι εξισώσεις είχαν έρθει σε αυτή τη μορφή, τα λ, σύμφωνα και με την περιγραφή της γενικής λύσης παραπάνω, θα είναι οι ιδιοτιμές του Ιακωβιανού πίνακα. Στην αντίστοιχη γραμμική περίπτωση η χαρακτηριστική ταχύτητα ήταν σταθερή, $\lambda(u) = \alpha = \text{ct}$, και η δε λύση ήταν ένα αρχικό προφίλ που μετατοπίζονταν με ταχύτητα α αναλλοίωτο. Τώρα, στην μη-γραμμική περίπτωση, η χαρακτηριστική ταχύτητα έιναι συνάρτηση της ίδιας της λύσης, γεγονός που δημιουργεί παραμορφώσεις αυτές οι παραμορφώσεις είναι ιδιαίτερο χαρακτηριστικό των μη-γραμμικών προβλημάτων.

Σχηματισμός έντονων βαθμίδων στα κύματα

Η συμπεριφορά της συνάρτησης ροής f(u) έχει μεγάλη επίδραση στην συμπεριφορά της λύσης u(x,t) του διατηρητικού νόμου. Μία πολύ σημαντική ιδιότητα είναι η μονοτονία της χαρακτηριστικής ταχύτητας $\lambda(u)'$ μπορούν να διακριθούν 3 περιπτώσεις:

• η $\lambda(u)$ να είναι μονοτόνως αύξουσα συνάρτηση του u

$$rac{\mathrm{d}\lambda(u)}{\mathrm{d}u} = \lambda'(u) = f''(u) > 0$$
 (χυρτή f) .

η $\lambda(u)$ να είναι μονοτόνως φθίνουσα συνάρτηση του u

$$rac{\mathrm{d}\lambda(u)}{\mathrm{d}u} = \lambda'(u) = f''(u) < 0$$
 (χοίλα f).

η $\lambda(u)$ να έχει ακρότατα για κάποι

$$\frac{\mathrm{d}\lambda(u)}{\mathrm{d}u} = \lambda'(u) = f''(u) = 0$$
 (ούτε χοίλα, ούτε χυρτή f) .

Πρέπει επίσης να σημειωθεί οτι στην περίπτωση συστήματος διατηρητικών νόμων, ο τύπος της συνάρτησης ροής καθορίζεται από την εξίσωση κατάστασης (Equation Of State, EOS).



Σχήμα 1.3: Η δημιουργία έντονων βαθμίδων σε κύματα για ένα κυρτό, μη-γραμμικό υπερβολικό διατηρητικό νόμο: (α) η αρχική κατάσταση και (β) η αντίστοιχη απεικόνιση των χαρακτηριστικών. Σχήμα 2.12 από [1].

Για την περιγραφή του φαινομένου της παραμόρφωσης ενός χύματος επιστρατεύεται το σχήμα 1.3. Στο 1.3α φαίνεται ένα ομαλό αρχικό προφίλ, μαζί με πέντε αρχικά σημεία $x_0^{(i)}$ και τις αντίστοιχες αρχικές τιμές $u_0^{(i)} = u_0(x_0^{(i)}).$ Θεωρείται, τώρα, οτι η συνάρτηση ροών του παραδείγματος που εξετάζεται είναι κυρτή (δηλ. $\lambda'(u) = f''(u) > 0$). Σύμφωνα με τα παραπάνω η χαρακτηριστιχή ταχύτητα θα είναι αύξουσα συνάρτηση του u, δηλαδή μεγαλύτερες τιμές $u_0(x)$ θα ταξιδεύουν ταχύτερα από άλλες μικρότερες τιμές $u_0(x)$. Στο σχήμα 1.3β φαίνονται οι χαραχτηριστιχές $x^{(i)}(t)$ που ξεχινούν από τα αντίστοιχα αρχικά σημεία $x_0^{(i)}$ και μεταφέρουν σταθερές αρχικές τιμές $u_0^{(i)}$ κατά μήκος τους. Μπορούν να διακριθούν δύο διαστήματα κατά μήκος του x άξονα στα οποία οι παραμορφώσεις είναι εμφανείς. Τα διαστήματα αυτά είναι τα $I_E = [x_0^{(1)}, x_0^{(3)}]$ και $I_C = [x_0^{(3)}, x_0^{(5)}]$. Στο I_E , η αρχική τιμή $u_0^{(3)}$ θα διαδίδεται ταχύτερα από την $u_0^{(2)}$ και αυτή με την σειρά της τα διαδίδεται ταχύτερα από την $u_0^{(1)}$. Από την διεύθυνση των αντίστοιχων χαραχτηριστιχών ευθειών εύχολα χαταλαβαίνει χανείς, οτι σε μία μετέπειτα χρονική στιγμή τα αρχικά δεδομένα στο I_E θα έχουν μετατραπεί σε ένα περισσότερο εκτεταμένο και ομαλότερο προφίλ. Το διάστημα I_E λέγεται οτι είναι μία επεκτεινόμενη περιοχή (expansive region) και εδώ η χαραχτηριστική ταχύτητα αυξάνεται με την αύξηση του $x, \lambda_x > 0.$

Αχριβώς το αντίθετο συμβαίνει στο διάστημα I_C . Εδώ $\lambda_x < 0$ και η τιμή $u_0^{(3)}$ θα ταξιδεύει ταχύτερα από την $u_0^{(4)}$ και αυτή με την σειρά της ταχύτερα από την $u_0^{(5)}$. Το προφίλ σε αυτό το διάστημα θα έχει την τάση να γίνεται πιο απόχρημνο και στενότερο με την εξέλιξη του χρόνου, και η περιοχή αυτή ονομάζεται συμπιεζόμενη (compressive region).Ο μηχανισμός αυτός που κάνει τα κύματα περισσότερο απόχρημνα με την εξέλιξη του χρόνου τελικά θα οδηγήσει σε αναδίπλωση του προφίλ της λύσης, την τομή των αντίστοιχων χαραχτηριστικών χαμπύλων και τριπλό εχφυλισμό της λύσης.

1.1. ΓΕΝΙΚΉ ΛΎΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΌΒΛΗΜΑ ΤΟΥ RIEMANN

Αυτή η ανώμαλη κατάσταση μπορεί να αντιμετωπιστεί αναζητώντας λύση στην φυσική σημασία και το προσεγγιστικό μοντέλο που περιγράφει η υπό μελέτη εξίσωση. Σημειώνεται οτι η (1.24) είναι η μη-γραμμική επέκταση της γραμμικής εξίσωσης διάδοσης (1.1). Σε ένα βελτιωμένο μοντέλο ο ρυθμός μεταβολής του u, δεν θα οφειλόταν απλά στον παράγοντα διάδοσης $f(u)_x$, αλλά σε μία ανταγωνιστική ισορροπία μεταξύ ενός όρου διάδοσης και ενός άλλου διάχυσης. Η πιο ολοκληρωμένη περιγραφή του φυσικού μέρους του προβλήματος θα προλάμβανε την αναδίπλωση της λύσης. Αντί όμως να περιπλέκεται το πρόβλημα εισάγοντας ιξώδη στην περιγραφή του, υπάρχει η δυνατότητα να διατηρηθεί το μοντέλο όπως έχει, επιτρέποντας την δημιουργία ασυνεχειών - χουστικών κυμάτων - σαν επακόλουθη διαδικασία της συνεχώς αυξανόμενης συμπίεσης.

Κρουστικά κύματα

Τα κρουστικά κύματα στον αέρα είναι μικρά μεταβατικά στρώματα στα οποία συμβαίνουν πολύ απότομες μεταβολές φυσικών ποσοτήτων όπως πίεσης, πυκνότητας και θερμοκρασίας (σωματιδιακής ταχύτητας). Το μεταβατικό στρώμα για ένα ισχυρό κρουστικό κύμα είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με ένα κενό περίπου 10⁻⁷m. Επομένως η αντικατάσταση αυτών των κυμάτων με μαθηματικές ασυνέχειες είναι μία λογική προσέγγιση. Πολύ αδύναμα κρουστικά κύματα αποτελούν εξαίρεση και σε αυτές τις περιπτώσεις η προσέγγιση με ασυνέχειες μπορεί να είναι πολύ ανακριβής.

Έχοντας τεκμηριώσει οτι είναι έγκυρη η αξιοποίηση του απλοποιημένου μοντέλου (1.23), χρησιμοποιείται η ολοκληρωτική του μορφή

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{x_L}^{x_R} u(x,t) \mathrm{d}x = f(u(x_L,t)) - f(u(x_R,t)).$$
(1.25)

Θεωρείται, τώρα, μία λύση u(x,t) τέτοια ώστε τα u(x,t), f(u) και οι παράγωγοί τους να είναι συνεχείς σε όλο το επίπεδο x - t εκτός από την ευθεία s = s(t) όπου η u(x,t) έχει ασυνέχεια. Επιλέγονται δύο σταθερά σημεία x_L , x_R στο άζονα x τέτοια ώστε $x_L < s(t) < x_R$. Τότε από την (1.25) θα είναι

$$f(u(x_L,t)) - f(u(x_R,t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{x_L}^{s(t)} u(x,t) \mathrm{d}x + \int_{s(t)}^{x_R} u(x,t) \mathrm{d}x. \quad (1.26)$$

Αξιοποιώντας την ιδιότητα

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \int_{\xi_1(a)}^{\xi_2(a)} f(\xi, a) \mathrm{d}\xi = \int_{\xi_1(a)}^{\xi_2(a)} \frac{\partial f}{\partial a} \mathrm{d}\xi + f(\xi_2, a) \frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}a} - f(\xi_1, a) \frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}a}$$

η (1.26) γίνεται

$$\begin{cases} f(u(x_L,t)) - f(u(x_R,t)) = [u(s_L,t) - u(s_R,t)] S + \\ + \int_{x_L}^{s(t)} u_t(x,t) dx + \int_{s(t)}^{x_R} u_t(x,t) dx \end{cases}$$

όπου $u(s_L,t)$ είναι το όριο του u(s(t),t) χαθώς το x τείνει στο $s(t)^-$, το $u(s_R,t)$ είναι το όριο του u(s(t),t) χαθώς το x τείνει στο $s(t)^+$, και S = ds(t)/dt είναι η ταχύτητα της ασυνέχειας. Επειδή η $u_t(x,t)$ είναι φραγμένη, τα ολοκληρώματα αλληλοεξουδετερώνονται καθώς το όριο s(t) προσεγγίζεται απο αριστερά και δεξιά, με αποτέλεσμα η παραπάνω σχέση να γίνεται

$$f(u(x_L, t)) - f(u(x_R, t)) = [u(s_L, t) - u(s_R, t)] S.$$

Η αλγεβρική αυτή έκφραση που συνδέει τα $\Delta f = f(u(x_L,t)) - f(u(x_R,t))$, $\Delta u = u(s_L,t) - u(s_R,t)$ και την ταχύτητα S της ασυνέχειας αποκαλείται συνθήκη των Rankine-Hugoniot και συνήθως γράφεται ως εξής:

$$\Delta f = S \Delta u. \tag{1.27}$$

Για την εφαρμογή των παραπάνω χρησιμοποιείται σαν παράδειγμα το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, \ f(u) = \frac{1}{2}u^2, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_L & \text{av} \quad x < 0 \\ u_R & \text{av} \quad x > 0 \end{cases}$$
(1.28)

όπου θεωρείται οτι $u_L > u_R$ και η f(u) είναι κυρτή. Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα, οι χαρακτηριστικές ταχύτητες στα αριστερά θα είναι μεγαλύτερες από αυτές δεξιά $\lambda_L > \lambda_R$. Η περίπτωση αυτή είναι ίδια με το διάστημα $I_C = [x_0^{(3)}, x_0^{(5)}]$ του σχήματος 1.3 που είναι μία συμπιεζόμενη περιοχή. Η ασυνεχής λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών θα είναι:

$$u(x,t) = egin{cases} u_L & ext{av} & x-St < 0 \ u_R & ext{av} & x-St > 0 \end{cases}$$

όπου η ταχύτητα της ασυνέχειας θα δίνεται από την συνθήκη Rankine-Hugoniot (1.27) και θα είναι:

$$S = \frac{1}{2}(u_L + u_R). \tag{1.29}$$

,

Η ασυνεχής αυτή λύση είναι ένα κρουστικό κύμα, συμπιεστό στην φύση του όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.4. Όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς από την (1.29) θα ισχύει η ακόλουθη ανισότητα

$$\lambda(u_L) > S > \lambda(u_R), \tag{1.30}$$

που αποχαλείται "συνθήκη της εντροπίας".



Σχήμα 1.4: (α) Συμπιεζόμενα και ασυνεχή αρχικά δεδομένα (β) απεικόνιση των χαρακτηριστικών (γ) απεικόνιση της λύσης στο επίπεδο x - t. Σχήμα 2.13 από [1].

Κρουστικό κύμα αραίωσης

Θεωρείται, τώρα, και πάλι το πρόβλημα αρχικών συνθηκών (1.28) αλλά αυτή τη φορά με $u_L < u_R$. Λόγω του οτι η f(u) είναι κυρτή θα ισχύει $\lambda_L < \lambda_R$ και το αρχικό προφίλ της λύσης θα επεκτείνεται και θα εξομαλύνεται ακριβώς όπως η περιοχή I_E στο σχήμα 1.3. Μία πρώτη μαθηματική προσέγγιση για τη λύση θα ήταν όμοια με αυτή στην περίπτωση του κρουστικού κύματος

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L & \text{av} \quad x - St < 0\\ u_R & \text{av} \quad x - St > 0 \end{cases}, \qquad S = \frac{\Delta f}{\Delta u}.$$
 (1.31)

Η ασυνέχεια όμως σε αυτή την περίπτωση δεν είναι αποτέλεσμα συμπίεσης και οι χαρακτηριστικές αποκλίνουν από την ασυνέχεια (βλ. σχήμα 1.5). Η λύση αποκαλείται κρουστικό κύμα αραίωσης ή αλλιώς κρουστικό κύμα παραβίασης εντροπίας καθώς δεν ικανοποιεί την (1.30)· αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο η λύση αυτή δεν είναι αποδεκτή από φυσικής άποψης. Πέρα από αυτό, η λύση είναι ασταθής. Δηλαδή, μικρές διαταραχές στις αρχικές συνθήκες οδηγούν σε μεγάλες αλλαγές στην λύση, ακόμα και στην αλλαγή των χαρακτηριστικών της. Αυτός είναι και ο κύριος λόγος για τον οποίο απορρίπτεται.

Κύμα αραίωσης : Μία άλλη θεώρηση είναι η λύση να αποτελείται από τις δύο σταθερές καταστάσεις u_L και u_R που διαχωρίζονται από μία περιοχή ομαλής μετάβασης μεταξύ τους (βλ. σχήμα 1.6). Στην περιοχή αυτή το $u_0(x)$ παίρνει όλες τις τιμές μεταξύ των u_L και u_R , και αντίστοιχα το $\lambda(u_0(x))$ παίρνει όλες



Σχήμα 1.5: (α) επεκτεινόμενα και ασυνεχή αρχικά δεδομένα (β) απεικόνιση των χαρακτηριστικών (γ) η λύση κρουστικό κύμα αραίωσης στο επίπεδο x - t. Σχήμα 2.14 [1].

τις τιμές μεταξύ των λ_L και λ_R . Αυτό αποκαλείται κύμα αραίωσης (rarefaction wave). Στο δεξιό άκρο του κύματος η χαρακτηριστική ευθεία θα είναι η

$$x = x_R + \lambda(u_R)t , \qquad (1.32)$$

θα φέρει την τιμή $u_0(x_R) = u_R$ και αποκαλείται κεφαλή (Head) του κύματος αραίωσης. Αντίστοιχα, στο αριστερό άκρο του κύματος η χαρακτηριστική ευθεία θα είναι η

$$x = x_L + \lambda(u_L)t , \qquad (1.33)$$

θα φέρει την τιμή $u_0(x_L) = u_L$ και αποκαλείται ουρά (Tail) του κύματος αραίωσης σης. Σε αυτό το σημείο επισημαίνεται οτι το ποιο άκρο του κύματος αραίωσης χαρακτηρίζεται ως κεφαλή και ποιο ως ουρά, έχει να κάνει με το ποια πλευρά έχει τη μεγαλύτερη τιμή στις αρχικές συνθήκες. Εδώ $u_R > u_L$ και επομένως η κεφαλή βρίσκεται στα δεξιά. Προφανώς, στο αντίστροφο πρόβλημα θα αντιστρεφόταν και η φορά του κύματος αραίωσης. Ολοκληρωμένα διατυπωμένη η λύση του προβλήματος αρχικών συνθηκών θα έχει ως εξής:

$$\begin{cases} u(x,t) = u_L & \text{an } \frac{x}{t} \leq \lambda_L \\ \lambda(u) = \frac{x}{t} & \text{an } \lambda_L < \frac{x}{t} < \lambda_R \\ u(x,t) = u_R & \text{an } \frac{x}{t} \geq \lambda_R \end{cases}$$

και συμπληρώνεται οπτικά από το σχήμα 1.6. Η λύση αυτή σε αντίθεση με την λύση του κρουστικού κύματος αραίωσης (1.31) είναι σταθερή και η μορφή της

διατηρείται ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλο ή μικρό είναι το διάστημα $\Delta x = x_R - x_L$ στο οποίο εκτείνονται τα ασυνεχή δεδομένα του προβλήματος αρχικών συνθηκών (1.28).



Σχήμα 1.6: κύμα αραίωσης: (α) επεκτεινόμενα και ασυνεχή αρχικά δεδομένα (β) απεικόνιση των χαρακτηριστικών (γ) η λύση του κύματος αραίωσης στο επίπεδο x - t. Σχήμα 2.16 από [1].

1.1.4 Μη-γραμμικά Υπερβολικά Συστήματα

Στην παράγραφο αυτή περιγράφεται η μορφή της λύσης στο πρόβλημα του Riemann για μη-γραμμικά υπερβολικά συστήματα. Πριν όμως ξεκινήσει η ανάλυση προηγείται η παράθεση ορισμών και ιδιοτήτων που χρησιμοποιούνται παρακάτω.

Χαρακτηριστικά Πεδία

Θεωρείται ένα υπερβολικό σύστημα διατηρητικών νόμων της μορφής (1.10) με πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_i(\mathbf{U})$ και αντίστοιχα δεξιά ιδιοδιανύσματα $\mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{U})$. Η χαρακτηριστική ταχύτητα $\lambda_i(\mathbf{U})$ ορίζει ένα χαρακτηριστικό πεδίο, το λ_i πεδίο. Κάποιες φορές μπορεί κάποιος να αναφερθεί στο $\mathbf{K}^{(i)}$ -πεδίο, εννοώντας το χαρακτηριστικό πεδίο που ορίζεται από το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{K}^{(i)}$.

 γραμμικώς εκφυλισμένα πεδία. Ένα λ_i-χαρακτηριστικό πεδίο λέγεται οτι είναι γραμμικά εκφυλισμένο αν

$$\nabla \lambda_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{U}) = 0, \quad \forall (U) \in \Re^m.$$
(1.34)

 αμιγώς μη-γραμμικά πεδία. Ένα λ_i-χαρακτηριστικό πεδίο λέγεται οτι είναι αμιγώς μη-γραμμικό αν

$$\nabla \lambda_i(\mathbf{U}) \cdot \mathbf{K}^{(i)}(\mathbf{U}) \neq 0, \quad \forall (U) \in \Re^m.$$
(1.35)

όπου και στις δύο περιπτώσεις το \Re^m είναι το σύνολο των πραγματικών διανυσμάτων m διαστάσεων.

Εύκολα φαίνεται οτι επειδή στα γραμμικά υπερβολικά συστήματα οι ιδιοτιμές λ_i είναι σταθερές θα είναι και $\nabla \lambda_i(\mathbf{U}) = 0$ και επομένως τα χαρακτηριστικά πεδία θα είναι γραμμικώς εκφυλισμένα.

Συνθήχες των Rankine-Hugoniot

Στην προηγούμενη παράγραφο η συνθήκη Rankine - Hugoniot προέκυψε στην προσπάθεια περιγραφής μίας ασυνέχειας σε πρόβλημα της μη-γραμ-μικής εξίσωσης διάδοσης. Τώρα, θεωρώντας ένα σύστημα υπερβολικών διατηρητικών νόμων

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0,$$

και μία ασυνέχεια ταχύτητας S_i που σχετίζεται με το λ_i-χαρακτηριστικό πεδίο, οι συνθήκες Rankine-Hugoniot εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{F} = S_i \Delta \mathbf{U} \quad \text{óπου} \\ \Delta \mathbf{U} \equiv \mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L , \ \Delta \mathbf{F} \equiv \mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) \end{cases}, \tag{1.36}$$

και \mathbf{U}_L , \mathbf{U}_R είναι οι καταστάσεις αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα, από την ασυνέχεια. Πρέπει να σημειωθεί οτι σε αντίθεση με την περίπτωση της μηγραμμικής εξίσωσης διάδοσης (1.27), εδώ $\epsilon \nu$ γένει δεν είναι δυνατή η επίλυση ως προς την ταχύτητα S_i . Για γραμμικό σύστημα με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}\mathbf{U}_x = 0,$$

με ιδιοτιμές λ_i , i = 1, 2, ..., m, οι συνθήχες Rankine-hugoniot κατά μήκος του κύματος με ταχύτητα $S_i \equiv \lambda_i$, γράφονται ως εξής:

$$\Delta \mathbf{F} = \mathbf{A} \Delta \mathbf{U} = \lambda_i (\Delta \mathbf{U})_i . \tag{1.37}$$

Τα Γενικευμένα Αναλλοίωτα του Riemann (Generalised Riemann Invariants)

Για ένα γενικό ψευδο-γραμμικό σύστημα υπερβολικών εξισώσεων

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x = 0, \tag{1.38}$$

όπου

$$\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_m]^T,$$

το διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών, θεωρείται το χύμα που συνδέεται με το *i*-χαραχτηριστικό πεδίο της λ_i ιδιοτιμής χαι το αντίστοιχο δεξί ιδιοδιάνυσμα

$$\mathbf{K}^{(i)} = [k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \dots, k_m^{(i)}]^T$$

Τα γενικευμένα αναλλοίωτα του Riemann είναι σχέσεις που ισχύουν για το χύμα της λ_i ιδιοτιμής και εκφράζονται μέσω των ακόλουθων (m-1) συνήθων διαφορικών εξισώσεων:

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{k_1^{(i)}} = \frac{\mathrm{d}w_2}{k_2^{(i)}} = \frac{\mathrm{d}w_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{\mathrm{d}w_m}{k_m^{(i)}}.$$
(1.39)

Στους αριθμητές τα dw_s είναι οι μεταβολές των ποσοτήτων που επιφέρει το χύμα στις καταστάσεις εκατέρωθέν του, και στους παρανομαστές τα $k_s^{(i)}$ είναι οι αντίστοιχες συνιστώσες του ιδιοδιανύσματος που αντιστοιχεί στην λ_i ιδιοτιμή. Εκφράζοντας κανείς με λόγια αυτό που περιγράφουν οι εξισώσεις θα μπορούσε να πει : 'οι μεταβολές που προκαλεί το $\mathbf{K}^{(i)}$ κύμα στις μεταβλητές του συστήματος, είναι ανάλογες των αντίστοιχων συντεταγμένων του ιδιοδιανύσματος $\mathbf{K}^{(i)}$.

Πρέπει να σημειωθεί οτι οποιοδήποτε σύστημα διατηρητικών νόμων μπορεί να εκφραστεί στην μορφή (1.38) κάνοντας χρήση του Ιακωβιανού του πίνακα.

Στοιχειώδεις χυματικές λύσεις στο πρόβλημα του Riemann

Το πρόβλημα του Riemann για έν
α $m\times m$ μη-γραμμικό υπερβολικό σύστημα διατυπώνεται ως εξής:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0\\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{av} \quad x < 0\\ \mathbf{U}_R & \text{av} \quad x > 0 \end{cases}$$
(1.40)

Η λύση U(x,t) απειχονίζεται στο επίπεδο x-t ως m+1 σταθερές καταστάσεις που διαχωρίζονται από m χύματα. Για κάθε ιδιοτιμή λ_i υπάρχει και μία χυματική οιχογένεια. Στην περίπτωση που το σύστημα ήταν γραμμικό με σταθερούς συντελεστές, κάθε χύμα θα ήταν μία ασυνέχεια ταχύτητας $S_i = \lambda_i$ και θα όριζε ένα γραμμικά εχφυλισμένο πεδίο. Τώρα, στην μη-γραμμική περίπτωση τα χύματα μπορεί να είναι ασυνέχειες, όπως χρουστικά χύματα και ασυνέχειες επαφής, ή χύματα ομαλής μετάβασης όπως τα χύματα αραίωσης. Οι πιθανοί τύποι των χυμάτων της λύσης στο πρόβλημα του Riemann εξαρτώνται σε πολύ μεγάλο βαθμό από τις συνοριαχές συνθήχες.

Οι τύποι αυτοί των χυμάτων περιγράφονται στην συνέχεια θεωρώντας την περίπτωση που η λύση στο πρόβλημα του Riemann αποτελείται από τις αρχιχές χαταστάσεις που διαχωρίζονται από ένα μη-τετριμμένο χύμα.



Σχήμα 1.7: Στοιχειώδεις κυματικές λύσεις στο πρόβλημα του Riemann: (α) κρουστικό κύμα ταχύτητας S_i (β) ασυνέχεια επαφής ταχύτητας S_i (γ) κύμα αραίωσης. Σχήμα 2.20 από [1].

κρουστικό κύμα : Σε αυτή την περίπτωση οι δύο σταθερές καταστάσεις U_L και U_R διαχωρίζονται από μία *ασυνέχεια* σε ένα *αμιγώς μη-γραμμικό πεδίο* και ισχύουν οι ακόλουθες συνθήχες:

• οι συνθήχες Rankine-Hugoniot

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = S_i(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L).$$

• η συνθήχη της εντροπίας

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) > S_i > \lambda_i(\mathbf{U}_R).$$

Στο σχήμα 1.7α φαίνεται ένα κρουστικό κύμα ταχύτητας S_i . Οι χαρακτηριστικές αριστερά και δεξιά από το κρουστικό κύμα συντρέχουν σε αυτό, χαρακτηριστικό που αναδεικνύει τον χαρακτήρα συμπίεσης που έχει το κύμα.

ασυνέχεια επαφής : Σε μία ασυνέχεια επαφής, οι δύο καταστάσεις \mathbf{U}_L και \mathbf{U}_R διαχωρίζονται από μία ασυνέχεια ταχύτητας S_i σε ένα γραμμικά εκφυλισμένο πεδίο, και οι αχόλουθες συνθήκες ισχύουν:

• οι συνθήχες Rankine-Hugoniot

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_L) = S_i(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L).$$

• τα γενικευμένα αναλλοίωτα του Riemann

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{k_1^{(i)}} = \frac{\mathrm{d}w_2}{k_2^{(i)}} = \frac{\mathrm{d}w_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{\mathrm{d}w_m}{k_m^{(i)}}.$$

• η συνθήκη παραλληλισμού των χαρακτηριστικών καμπύλων

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) = \lambda_i(\mathbf{U}_R) = S_i.$$

στο σχήμα 1.7β φαίνεται μία ασυνέχεια επαφής. Οι χαρακτηριστικές αριστερά και δεξιά είναι παράλληλες με την ασυνέχεια σε αυτή την περίπτωση.

κύμα αραίωσης : Σε αυτή την περίπτωση, οι δύο καταστάσεις \mathbf{U}_L και \mathbf{U}_R διαχωρίζονται από μία περιοχή ομαλής μετάβασης σε ένα αμιγώς μη-γραμμικό πεδίο και οι ακόλουθες συνθήκες ισχύουν:

• τα γενικευμένα αναλλοίωτα του Riemann

$$\frac{\mathrm{d}w_1}{k_1^{(i)}} = \frac{\mathrm{d}w_2}{k_2^{(i)}} = \frac{\mathrm{d}w_3}{k_3^{(i)}} = \dots = \frac{\mathrm{d}w_m}{k_m^{(i)}}.$$

• απόκλιση των χαρακτηριστικών

$$\lambda_i(\mathbf{U}_L) < \lambda_i(\mathbf{U}_R)$$

στο σχήμα 1.7γ φαίνεται ένα κύμα αραίωσης. Οι χαρακτηριστικές αριστερά και δεξιά, όπως επίσης και αυτές στο εσωτερικό του κύματος αποκλίνουν.

1.2 Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Για την περιγραφή συμπιεστών υλιχών, όπως αερίων ή ρευστών σε υψηλές πιέσεις, χρησιμοποιούνται οι εξισώσεις Navier-Stokes. Στις εξισώσεις αυτές καταλήγει κανείς αχολουθώντας τους πλέον θεμελιώδεις νόμους της φυσιχής, τους νόμους διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Πρίν όμως γίνει ανάλυση και επεξεργασία των νόμων αυτών, παρατίθεται η επόμενη παράγραφος που ασχολείται με την ολιχή παράγωγο ως προς το χρόνο, όπως αυτή χρησιμοποιείται στα παραχάτω.

Η ολική παράγωγος ως προς το χρόνο $\frac{D\phi}{Dt}$

Εάν θεωρήσει κανείς την αριθμητική συνάρτηση $\phi(x, y, z, t)$, τότε η μεταβολή του ϕ ως προς το χρόνο έτσι όπως θα την κατέγραφε ένας παρατηρητής που κινείται με την ταχύτητα του ρευστού $\vec{V} = (u, v, w)$ δίνεται από την σχέση

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}\phi.$$
(1.41)

Όπως φαίνεται και από τη σχέση αυτή, η ολική αυτή παράγωγος αποτελείται από δύο όρους. Ο πρώτος όρος $\partial \phi / \partial t$ αναπαριστά τον τοπικό ρυθμό μεταβολής, ενώ ο δεύτερος ($\vec{V} \cdot \text{grad}\phi$) δίνει τον χωρικό ρυθμό μεταβολής του ϕ . Η (1.41)

μπορεί να γραφτεί συμβολικά και για διανύσματα, εννοώντας ουσιαστικά την ισχύ της σχέσης για κάθε συνιστώσα του διανύσματος ξεχωριστά. Θεωρώντας το διάνυσμα $\vec{V} = (u, v, w)$, η εφαρμογή της (1.41) σε αυτό θα ήταν

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = \frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}\vec{V}.$$
(1.42)

Εύκολα βλέπει κανείς το `άτυπο' της σχέσης αυτής, καθώς όπως είναι γνωστό ο τελεστής της κλίσης grad εφαρμόζεται μόνον σε αριθμητικά μεγέθη, και όχι σε διανυσματικά. Όπως αναφέρθηκε όμως η (1.42) έχει συμβολική ισχύ και η πλήρης ανάπτυξή της έχει ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \frac{Du}{Dt} \\ \frac{Dv}{Dt} \\ \frac{Dw}{Dt} \end{pmatrix}^{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{pmatrix}^{T} + (u, v, w) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Η σχέση αυτή, και κατ΄ επέκταση η (1.42) είναι ουσιαστικά το διάνυσμα επιτάχυνσης ενός στοιχείου κινούμενου ρευστού.

Θεωρείται τώρα ένα ρευστό και στο εσωτερικό του, όγκος V που περικλείεται από ομαλή, κλειστή επιφάνεια A, η οποία μετακινείται μαζί με το περιεχόμενο που ορίζει. Έστω η συνάρτηση

$$\Psi(t) = \int_{V} \phi(x, y, z, t) \,\mathrm{d}V, \qquad (1.43)$$

όπου φ είναι οποιαδήποτε αριθμητική συνάρτηση. Αποδεικνύεται οτι η ολική παράγωγος της Ψ δίνεται από την σχέση

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{V} \frac{\partial\phi}{\partial t} \,\mathrm{d}V + \int_{A} (\hat{n} \cdot \phi \vec{V}) \,\mathrm{d}A, \qquad (1.44)$$

όπου \hat{n} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας A. Ο πρώτος όρος της σχέσης αυτής αντιπροσωπεύει την τοπική συνεισφορά της συνάρτησης ϕ στην χρονική μεταβολή της $\Psi(t)$, ενώ ο δεύτερος όρος είναι η συνεισφορά λόγω της κίνησης της επιφάνειας με ταχύτητα, όση είναι η ταχύτητα του ρευστού \vec{V} .

Σε αυτό το σημείο, λόγω του οτι χρησιμοποιείται κατά κόρον στα επόμενα, παρατίθεται το θεώρημα του Gauss, το οποίο χρησιμεύει στον μετασχηματισμό ενός ολοκληρώματος επιφάνειας στο ολοκλήρωμα του αντίστοιχου περιεχόμενου όγκου, σύμφωνα με την ακόλουθη σχέση:

$$\int_{A} (\hat{n} \cdot \vec{\Phi}) \,\mathrm{d}A = \int_{V} \operatorname{div} \vec{\Phi} \,\mathrm{d}V. \tag{1.45}$$

Σημειώνεται, οτι τώρα η Φ είναι διανυσματική συνάρτηση $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ και οτι η ισχύς του θεωρήματος προϋποθέτει τη διαφορησιμότητα της.

1.2. OI $E \Xi I \Sigma' \Omega \Sigma E I \Sigma$ NAVIER-STOKES

1.2.1 Η διατήρηση της μάζας

Θεωρείται και πάλι μία κλειστή, ομαλή επιφάνει
αAπου περικλείει όγκοVστο εσωτερικό ενός ρευστού,
τότε, η μάζα η περιεχόμενη στην επιφάνει
αAθα δίνεται από την σχέση

$$M(t) = \int_{V} \rho \,\mathrm{d}V. \tag{1.46}$$

Θεωρώντας επιπλέον οτι η επιφάνεια A χινείται με την ταχύτητα του ρευστού έτσι ώστε να μην την διαπερνούν ροές μάζας, όπως επίσης και οτι στο εσωτερικό της δεν δημιουργείται ούτε καταστρέφεται μάζα, τότε ο νόμος διατήρησης της μάζας δίνεται ως εξής:

$$\frac{DM}{Dt} = 0. \tag{1.47}$$

Μπορεί όμως κανείς πολύ εύκολα να παρατηρήσει την ομοιότητα της σχέσης (1.46) με την (1.43). Επομένως και η ολική παράγωγος στην (1.47) μπορεί να αναλυθεί σύμφωνα με την (1.44) ως εξής:

$$(1.47) \stackrel{(1.44)}{\Longrightarrow} \int_{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \,\mathrm{d}V + \int_{A} \hat{n}(\rho \cdot \vec{V}) \,\mathrm{d}A = 0, \qquad (1.48)$$

που είναι και η ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της μάζας. Υπό την προϋπόθεση οτι η υπο ολοκλήρωση ποσότητα στον δεύτερο όρο είναι αρκετά ομαλή στις μεταβολές της ώστε να ισχύει το θεώρημα του Gauss (1.45), θα είναι

$$\int_{A} \hat{n} \cdot (\rho \vec{V}) \, \mathrm{d}A = \int_{V} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \, \mathrm{d}V,$$

και επομένως

$$(1.48) \Rightarrow \int_{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) \right] \mathrm{d}V = 0, \qquad (1.49)$$

που σημαίνει οτι η υπό ολοχλήρωση ποσότητα θα είναι ίση με το 0:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 \Rightarrow$$

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0. \qquad (1.50)$$

Η σχέση αυτή είναι ο νόμος διατήρησης της μάζας στην διαφορική του μορφή, ή αλλιώς όπως αποκαλείται *εξίσωση συνέχειας*.

1.2.2 Η διατήρηση της ορμής

Όπως έγινε και στην προηγούμενη παράγραφο, στην ολοχληρωτική και στην συνέχεια στην διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής καταλήγει κανείς ξεκινώντας από τα πλέον βασικά, και σε αυτή την περίπτωση από την εφαρμογή του νόμου του Νεύτωνα: "ο ρυθμός μεταβολής της ορμής εντός του όγκου V είναι ίσος με τη συνολική δύναμη που ασκείται επάνω στον όγκο

αυτό''. Η συνολική δύναμη χωρίζεται σε επιφανεια
κές δυνάμεις f_S και δυνάμεις όγκου f_V , που δίνονται αντίστοι
χα από τις σχέσεις:

$$f_S = \int_A \vec{S} \, \mathrm{d}A, \quad f_V = \int_V \rho \vec{g} \, \mathrm{d}V. \tag{1.51}$$

Εδώ, $\vec{S} = \hat{n} \cdot S$, όπου \vec{S} είναι το διάνυσμα των τάσεων, S ο τανυστής των τάσεων και \hat{n} , όπως και πριν, το μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας A. Ο τανυστής των τάσεων με την σειρά του είναι $S = -p\mathbf{I} + \Pi$ όπου το $-p\mathbf{I}$ είναι ένας σφαιρικά συμμετρικός τανυστής που οφείλεται στην πίεση ενώ Π είναι ο τανυστής που περιγράφει τις τάσεις λόγω ιξώδους. Αντίστοιχα, στην έκφραση για τις δυνάμεις όγκου, το \vec{g} είναι ένα διάνυσμα που αντιπροσωπεύει τις δυνάμεις αδρανείας, τις βαρυντικές, τις ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις κλπ.

Εκφράζοντας τώρα την συνολική ορ
μή εντός του όγκου Vως

$$P(t) = \int_{V} \rho \vec{V} \,\mathrm{d}V, \qquad (1.52)$$

και βλέποντας την αντιστοιχία της σχέσης αυτής με την (1.43), ο νόμος του Νεύτωνα διατυπώνεται ως εξής:

$$\frac{DP}{Dt} = f_S + f_V. \tag{1.53}$$

Αλλά λόγω της (1.44) θα είναι:

$$(1.53) \stackrel{(1.44)}{\Longrightarrow} \int_{V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \, \mathrm{d}V = -\int_{A} \vec{V} (\hat{n} \cdot \rho \vec{V}) \, \mathrm{d}A + f_{S} + f_{V},$$

που, αντικαθιστώντας τις δυνάμεις f_S και f_V από την (1.51) γίνεται

$$\int_{V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \, \mathrm{d}V = -\int_{A} [\vec{V}(\hat{n} \cdot \rho \vec{V}) + p\hat{n} - \Pi \hat{n}] \, \mathrm{d}A + \int_{V} \rho \vec{g} \, \mathrm{d}V.$$
(1.54)

Σε αυτό το σημείο εισάγεται το σύμβολο της πράξης του ευθέως γινομένου $\otimes,$ που στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται ως εξής:

$$\vec{V}(\hat{n}\cdot\rho\vec{V}) = \hat{n}\rho\cdot\vec{V}\otimes\vec{V} = \hat{n}\rho\cdot\left[\begin{array}{ccc}u^2 & uv & uw\\uv & v^2 & vw\\uw & vw & w^2\end{array}\right].$$

Με τον νέο συμβολισμό

$$\int_{V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \, \mathrm{d}V = -\int_{A} [\hat{n}\rho \cdot \vec{V} \otimes \vec{V} + p\hat{n} - \Pi \hat{n}] \, \mathrm{d}A + \int_{V} \rho \vec{g} \, \mathrm{d}V, \qquad (1.55)$$

και τώρα, θεωρώντας πάντα οτι η επιφάνεια A είναι ομαλή και οτι ισχύουν οι προϋποθέσεις διαφορισημότητας των υπο ολοκλήρωση ποσοτήτων, εφαρμόζεται

το θεώρημα του Gauss (σχ. (1.45)) με αποτέλεσμα η παραπάνω σχέση να γίνει

$$\int_{V} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) \, \mathrm{d}V = -\int_{V} [\operatorname{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V}) + \operatorname{grad} p - \operatorname{div}\Pi] \, \mathrm{d}V + \int_{V} \rho \vec{g} \, \mathrm{d}V, \quad (1.56)$$

και λόγω της ισχύος της σχέσης αυτής για κάθεV,μπορεί να γράφεται και ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \operatorname{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p\mathbf{I} - \Pi) = \rho \vec{g}, \qquad (1.57)$$

που είναι και η διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής.

1.2.3 Η διατήρηση της ενέργειας

Όπως έγινε και στις δύο προηγούμενες παραγράφους για την μάζα και την ορμή, έτσι και τώρα θεωρείται η συνολική ενέργεια που περικλείεται σε έναν όγκο V

$$\Psi(t) = \int_{V} E \,\mathrm{d}V. \tag{1.58}$$

Η συνολική αυτή ενέργεια διαχωρίζεται στην E_{surf} που οφείλεται σε επιφανειακές δυνάμεις και στην E_{vol} που οφείλεται σε δυνάμεις όγκου. Έτσι, αξιοποιώντας την σχέση (1.51) η E_{surf} μπορεί να εκφραστεί ως το έργο των δυνάμεων επιφανείας f_S . Επομένως θα είναι:

$$(1.51) \rightarrow f_S = \int_A \hat{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \Pi) \, \mathrm{d}A \Rightarrow$$
$$E_{surf} = -\int_A p(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, \mathrm{d}A + \int_A \vec{V}(\hat{n} \cdot \Pi) \, \mathrm{d}A. \tag{1.59}$$

Αντίστοιχα και η ενέργει
α E_{vol} μπορεί να εκφραστεί ως το έργο των δυνάμεων όγκου:

$$(1.51) \Rightarrow E_{vol} = \int_{V} \rho(\vec{V}\vec{g}) \mathrm{d}V.$$
(1.60)

Προχειμένου, τώρα να ληφθεί υπόψη και πιθανή ροή ενέργειας από την περιχλείουσα επιφάνεια A, εισάγεται το διάνυσμα ροής ενέργειας $\vec{Q} = (q_1, q_2, q_3)$. Η ροή ενέργειας ανά μονάδα χρόνου από το στοιχειώδες στοιχείο επιφάνειας $d\vec{A}$ θα είναι $-(\hat{n} \cdot \vec{Q}) dA$ και η συνολική ενέργεια που θα ανταλλάσσεται από τον όγχο V με το περιβάλλον σύστημα θα είναι

$$E_{infl} = -\int_{A} (\hat{n} \cdot \vec{Q}) \mathrm{d}A. \tag{1.61}$$

Έχοντας πλέον λάβει υπόψη όλους τους παράγοντες που μπορεί να συνεισφέρουν στην ενέργεια, παρατίθεται μία πρώτη διατύπωση του νόμου διατήρησής της:

$$\frac{D\Psi}{Dt} = E_{surf} + E_{vol} + E_{infl}.$$
(1.62)

Κατά τα γνωστά, λόγω της εμφανούς ομοιότητας της σχέσης (1.58) με την (1.43), το ολικό διαφορικό στο αριστερό μέρος μπορεί να γραφεί σύμφωνα με την (1.44) ως

$$\frac{D\Psi}{Dt} = \int_{V} \frac{\partial E}{\partial t} \, \mathrm{d}V + \int_{A} (\hat{n} \cdot E\vec{V}) \mathrm{d}A.$$
(1.63)

Αντικαθιστώντας τώρα και τις E_{surf} , E_{vol} , E_{infl} από τις σχέσεις (1.59), (1.60) και (1.61) αντίστοιχα, η (1.62) γίνεται:

$$\int_{V} \frac{\partial E}{\partial t} \, \mathrm{d}V + \int_{A} (\hat{n} \cdot E\vec{V}) \mathrm{d}A = -\int_{A} p(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, \mathrm{d}A + \int_{A} \vec{V}(\hat{n} \cdot \Pi) \mathrm{d}A - \int_{A} (\hat{n} \cdot \vec{Q}) \mathrm{d}A + \int_{V} \rho(\vec{V}\vec{g}) \mathrm{d}V. \quad (1.64)$$

Σε αυτό το σημείο εφαρμόζεται το θεώρημα του Gauss στα επιεπιφάνεια ολοκληρώματα, αφού επισημανθεί και πάλι οτι η εφαρμογή του προϋποθέτει διαφορησιμότητα των υπο ολοκλήρωση ποσοτήτων, όπως επίσης και την ομαλή φύση της επιφάνειας A. Τότε θα είναι:

$$\begin{split} \int_A (\hat{n} \cdot E\vec{V}) \mathrm{d}A &= \int_V \mathrm{div}(E \cdot \vec{V}) \mathrm{d}V \\ \int_A p(\vec{V} \cdot \hat{n}) \, \mathrm{d}A &= \int_V \mathrm{div}(p\vec{V}) \mathrm{d}V \\ \int_A (\hat{n} \cdot \vec{Q}) \mathrm{d}A &= \int_V \mathrm{div}\vec{Q} \, \mathrm{d}V. \end{split}$$

Επίσης, λόγω της συμμετρίας του τελεστή Π, ισχύει $\vec{V}(\hat{n}\cdot\Pi) = \hat{n}(\vec{V}\cdot\Pi)$ με αποτέλεσμα και σε αυτή την περίπτωση να είναι

$$\int_{A} \vec{V}(\hat{n} \cdot \Pi) \mathrm{d}A = \int_{V} \mathrm{div}(\vec{V} \cdot \Pi) \mathrm{d}V.$$

Αντικαθιστώντας όλες αυτές τις σχέσεις στην ολοκληρωτική μορφή του νόμου διατήρησης της ενέργειας (1.64), λαμβάνει κανείς:

$$\int_{V} \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[(E+p)\vec{V} - \vec{V} \cdot \Pi + \vec{Q}] \mathrm{d}V = \int_{V} \rho(\vec{V} \cdot \vec{g}) \mathrm{d}V, \qquad (1.65)$$

και τότε τα ολοκληρώματα όγκου μπορούν να παραληφθούν ώστε να μείνει η διαφορική μορφή του νόμου διατήρησης της ενέργειας

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[(E+p)\vec{V} - \vec{V} \cdot \Pi + \vec{Q}] = \rho(\vec{V} \cdot \vec{g}).$$
(1.66)

Με την ανάλυση που έχει γίνει μέχρι αυτό το σημείο, βλέπει κανείς πως προχύπτει η διαφορική μορφή των νόμων διατήρησης της μάζας, της ορμής και της ενέργειας. Από τις σχέσεις στις οποίες καταλήξαμε, η (1.57) αποτελεί ουσιαστικά την διαφορική έκφραση των εξισώσεων Navier-Stokes, οι οποίες όμως, για πληρότητα στην περιγραφή ενός ρευστού, συνήθως συνοδεύονται και από τις εξισώσεις (1.50) και (1.66).

1.3 Οι εξισώσεις του Euler

Όπως γίνεται στη μελέτη οποιουδήποτε συστήματος, έτσι και για τα ρευστά ξεκινάει κανείς τη μελέτη από το πλέον απλοποιημένο μοντέλο. Τι ποιο λογικό, επομένως, απο το να θεωρηθεί οτι οι τάσεις λόγω ιξώδους είναι αμελητέες, όπως επίσης και οι επιδράσεις των βαρυντικών, ηλεκτρομαγνητικών, δυνάμεων αδρανείας και άλλων, αλλά και ότι δεν υπάρχει ροή ενέργειας από τα τοιχώματα της επιφάνειας A. Οι απλοποιήσεις αυτές στην πράξη σημαίνουν την απαλοιφή των παραγόντων με τον τανυστή Π και αυτών με το διάνυσμα \vec{g} από τις εξισώσεις (1.57) και (1.66), όπως επίσης και την απαλοιφή του διανύσματος \vec{Q} από την εξίσωση (1.66) αντίστοιχα. Έτσι, η εξίσωση συνέχειας παραμένει ως έχει (απλά παρατίθεται εδώ για λόγους πληρότητας)

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0,$$

η διαφοριχή μορφή του νόμου διατήρησης της ορμής γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) + \operatorname{div}(\rho \vec{V} \otimes \vec{V} + p\mathbf{I}) = 0,$$

ενώ ο νόμος διατήρησης της ενέργειας γίνεται

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}[(E+p) \cdot \vec{V}] = 0.$$

Αυτές είναι οι εξισώσεις του Euler οι οποίες σε πλήρη ανάπτυξη έχουν ως εξής:

$$\rho_t + (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z = 0 \tag{1.67}$$

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x + (\rho uv)_y + (\rho uw)_z = 0$$

$$(\rho v)_t + (\rho u v)_x + (\rho v^2 + p)_y + (\rho v w)_z = 0$$
(1.68)
$$(\rho w)_t + (\rho u w)_x + (\rho v w)_y + (\rho w^2 + p)_z = 0$$

$$E_t + [u(E+p)]_x + [v(E+p)]_y + [w(E+p)]_z = 0.$$
(1.69)

Βέβαια πρέπει να αναφερθεί οτι, αυστηρά μηλώντας, οι εξισώσεις Euler είναι μόνον οι (1.68).

1.3.1 Η εξίσωση κατάστασης

Για να μπορεί κανείς να περιγράψει ένα ρευστό, σημαίνει οτι επιλύοντάς το μπορεί να βρίσκει σε κάθε σημείο του ρευστού την θέση και την ταχύτητα. Αυτή η λύση όμως είναι μία εξάδα τιμών (θέση (x, y, z) και ταχύτητα (u, v, w)), που καθιστά τις εξισώσεις $(1.67) \rightarrow (1.69)$ - πέντε σε αριθμό - ανεπαρκείς για την περιγραφή του συστήματος. Η μία επιπλέον σχέση που επιστρατεύεται έχει να κάνει με την φύση του ρευστού και αποκαλείται εξίσωση κατάστασης. Συνδέει μεταξύ τους θερμοδυναμικές μεταβλητές και συνήθως κάποιες από τις πλέον βασικές, όπως πυκνότητα ρ , πίεση p, θερμοκρασία T, ειδική εσωτερική ενέργεια e και εντροπία s.

Ιδανικό αέριο

Η εξίσωση κατάστασης για το ιδανικό α
έριο προκύπτει από την πλέον θεμελιώδη σχέση της θερμοδυναμική
ς 1

$$de = T dS - p dv \rightarrow \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = T \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T - p \left(\frac{\partial v}{\partial v}\right)_T.$$
(1.70)

αλλά προηγουμένως, υπενθυμίζεται η σχέση που δίνει την ελεύθερη ενέργεια Helmholtz

$$f = e - Ts \longrightarrow \mathrm{d}f = -s\mathrm{d}T - p\mathrm{d}v,$$

από όπου εύχολα προκύπτει η ακόλουθη σχέση του Maxwell

$$\left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v.$$
(1.71)

Εισάγοντας τώρα τον συντελεστή κυβικής διαστολής α και τον συντελεστή ισόθερμης συμπιεστότητας β που δίνονται από τις σχέσεις

$$\alpha = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p, \ \beta = -\frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial p} \right)_T, \tag{1.72}$$

αποδειχνύεται² οτι το δεξί μέλος της εξίσωσης (1.71), επομένως χαι το αριστερό, είναι ίσο με α/β χαι τότε η (1.70) γίνεται

$$\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = \frac{\alpha T - \beta p}{\beta}.$$
(1.73)

Όμως έχει γίνει η θεώρηση του ιδανικού αερίου και επομένως θα ισχύει και η θερμική καταστατική εξίσωση $pV = nRT \rightarrow pv = RT$. Τότε οι συντελεστές κυβικής διαστολής και ισόθερμης συμπιεστότητας από τις σχέσεις (1.72) γίνονται

$$\alpha = \frac{1}{T} , \ \beta = \frac{1}{p},$$

με αποτέλεσμα

$$(1.70) \Rightarrow \left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)_T = 0. \tag{1.74}$$

Αυτό σημαίνει
οτι η εσωτερική ενέργεια είναι συνάρτηση μόνον της θερμοκρασίας,
 e=e(T)και θα είναι

$$\mathrm{d}e = \mathrm{d}Q = C_v \mathrm{d}T \Rightarrow e = C_v T,$$

32

 $^{^1}προσοχή συνίσταται στο σημείο αυτό γιατί το <math display="inline">v$ εδώ συμβολίζει τον ειδικό όγκο και όχι συνιστώσα της ταχύτητας

²βλ. απόδειξη 1 παράρτημα 1

1.3. OI $E \Xi I \Sigma \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

όπου C_v η θερμοχωρητικότητα υπό σταθερό όγκο που παραμένει σταθερή για πολυτροπικές μεταβολές. Αξιοποιώντας, τώρα τον λόγο των θερμοχωρητικοτήτων $\gamma = C_p/C_v$ όπως και την θερμική καταστατική εξίσωση των ι.α. καταλήγει κανείς³ στο οτι

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho},\tag{1.75}$$

που είναι και η εξίσωση κατάστασης για το ιδανικό αέριο.

Σε αυτό το σημείο επισημαίνεται οτι το E στις εξισώσεις του Euler σχ. (1.69) είναι η συνολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου, ενώ το e είναι η ειδική εσωτερική ενέργεια. Οι δύο αυτές ποσότητες συνδέονται με την σχέση

$$E = \rho \left(\frac{1}{2}\vec{V}^2 + e\right), \qquad (1.76)$$

όπου $\frac{1}{2}\vec{V}^2=\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)$ η ειδική κινητική ενέργεια.

Ταχύτητα του ήχου : Μία αχόμα παράμετρος που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στα επόμενα χεφάλαια χαι που συνδέει θερμοδυναμιχές μεταβλητές είναι η ταχύτητα του ήχου *a* που ορίζεται ως εξής:

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}.$$
(1.77)

Αξιοποιώντας κανείς τις εξισώσεις κατάστασης που αντιστοιχούν στο σύστημα που μελετά, καταλήγει σε σχέσεις που δίνουν το *a* για την αντίστοιχη περίπτωση.

Για παράδειγμα, η ενθαλπία, ως γνωστόν δίνεται από την σχέση (μετασχηματισμός *Lezendre*):

$$h = e + pv \longrightarrow dh = Tds + vdp.$$
 (1.78)

Μπορεί επίσης να εκφραστεί σύμφωνα με την θερμική εξίσωση κατάστασης $h=h(p,\rho)$ οπότε θα είναι

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} dp + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p} d\rho.$$
(1.79)

Αναλύοντας, τώρα το d
 pθεωρώντας $p=p(\rho,s)$ και εξισώνοντας τις (1.78)
 και (1.79) προκύπτει

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} \mathrm{d}p + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p} \mathrm{d}\rho = T\mathrm{d}s + \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s} \mathrm{d}\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho} \mathrm{d}s \right].$$

³βλ. απόδειξη 2 στο παράρτημα 1

Αξιοποιώντας, τώρα,
οτι η μεταβολή του pστον ορισμό του
 aσχ.(1.77) γίνεται ισεντροπικά (d
 s=0) αποδεικνύεται 4 οτι:

$$a^{2} = -\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p}}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} - \frac{1}{\rho}}.$$

Από αυτή την σχέση και θεωρώντας οτι
ισχύει η εξίσωση κατάστασης pv=RTπροκύπτει, όπως δείχνεται και στην απόδει
ξη 2β παράρτημα 1, οτι

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}.$$
 (1.80)

Αυτή είναι η σχέση που δίνει την ταχύτητα του ήχου για το ιδανικό αέριο.

Πυχνά αέρια σε υψηλές πιέσεις

Μία πολύ απλή γενίκευση της θερμικής εξίσωσης κατάστασης του ιδανικού αερίου pv=RTείναι η αποκαλούμενη σύνογκος καταστατική εξίσωση

$$p(v-b) = RT.$$
 (1.81)

Αυτή η εξίσωση ισχύει για πυχνά αέρια σε υψηλές θερμοχρασίες για τα οποία ο όγχος που χαταλαμβάνεται από τα μόρια αυτά χαθ΄ αυτά παύει να είναι αμελητέος. Έτσι, υπάρχει μία μείωση στον όγχο που είναι διαθέσιμος για την χίνηση των μορίων.

Η παράμετρος b αποκαλείται σύνογκος και οι μονάδες του στο SI είναι m^3kg^{-1} . Στην πιο απλή μορφή της (1.81) το b θεωρείται σταθερό και προσδιορίζεται πειραματικά ή από θερμοχημικούς υπολογισμούς σε ισορροπία. Αναφορές σε καλά πειραματικά δεδομένα αναφέρουν οτι οι καλύτερες τιμές του οδηγούν σε σφάλματα μικρότερα του 2%. Σε μία ακριβέστερη μορφή της καταστατικής εξίσωσης, το b ορίζεται σαν συνάρτηση του ρ .

Από την (1.75) και για όγκο μειωμένο κατά
 $b~(v\to v-b)$ προκύπτει η ακόλουθη EOS με την μορφ
ή $e=e(p,\rho)$:

$$e = \frac{p(1-b\rho)}{\rho(\gamma-1)}.$$
(1.82)

Επίσης αποδειχνύεται οτι η ταχύτητα του ήχου τώρα δίνεται από τη σχέση

$$a = \sqrt{\frac{p}{\rho^2 e_p} - \frac{e_\rho}{e_p}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho(1 - b\rho)}}.$$
(1.83)

⁴βλ. απόδειξη 3 παράρτημα 1

1.3.2 Οι εξισώσεις του Euler σε μία διάσταση

Μέχρι στιγμής έχουν δοθεί τα απαραίτητα εργαλεία για την περιγραφή των στοιχειωδών χυματικών λύσεων στο πρόβλημα του Riemann για μη-γραμμικά υπερβολικά συστήματα διατηρητικών νόμων (βλ. παράγραφος 1.1.4), επομένως υπάρχει η δυνατότητα να γίνει και αντίστοιχη περιγραφή της λύσης στο πρόβλημα του Riemann για τις εξισώσεις του Euler. Αυτός είναι και ο στόχος αυτής της παραγράφου, αλλά για ένα σύστημα εξισώσεων αχόμα πιο απλοποιημένο από τις σχέσεις (1.67) \rightarrow (1.69), τις εξισώσεις του Euler σε μία διάσταση. Η διατηρητική μορφή για την περίπτωση αυτή έχει ως εξής

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0$$
$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(E+p) \end{bmatrix}, \quad (1.84)$$

όπου U και F(U) είναι τα διανύσματα των διατηρούμενων ποσοτήτων και των ροών αντίστοιχα. Εδώ, η πυκνότητα ρ , η πίεση p, η σωματιδιακή ταχύτητα u και η ολική ενέργεια ανά μονάδα όγκου E συνδέονται μέσω της σχέσης

$$E = \rho(\frac{1}{2}u^2 + e), \qquad (1.85)$$

όπου e η ειδική εσωτερική ενέργεια που για την θεώρηση του ιδανικού αερίου έχει δειχθεί⁵ οτι δίνεται από την εξίσωση κατάστασης

$$e = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho}.\tag{1.86}$$

Οι διαφορετικές μορφές των εξισώσεων

Οι εξισώσεις του Euler μπορούν να περιγραφούν και με όρους άλλους από τις διατηρούμενες μεταβλητές. Για ομαλές λύσεις, όλες οι εκφράσεις είναι ισοδύναμες. Για λύσεις που περιέχουν κρουστικά κύματα, όμως, οι εκφράσεις με τις μη-διατηρούμενες μεταβλητές δίνουν λανθασμένα αποτελέσματα. Πέραν αυτού, η χρήση τους έχει πλεονεκτήματα σε άλλους τομείς, όπως για παράδειγμα, στην ανάλυση των εξισώσεων. Επιπλέον, η χρήση μορφοποιήσεων με διατηρούμενες ποσότητες ενέχει όχι και τόσο προφανείς κινδύνους· όπως αποδεικνύεται σε επόμενη παράγραφο η χρήση εξισώσεων με την μορφή διατηρητικών νόμων που όμως δεν έχουν φυσική σημασία οδηγεί στον λανθασμένο υπολογισμό της τα-χύτητας κρουστικών κυμάτων, όταν αυτά είναι μέρος της λύσης, και επομένως σε λανθασμένες λύσεις. Στα παρακάτω, εκτός της μορφής (1.84), αξιοποιούνται και δύο άλλες εκφράσεις των εξισώσεων Euler. Η μία από αυτές στην ψευδο-γραμμική της μορφή (βλ. εξ. (1.38) αξιοποιεί σαν διάνυσμα μεταβλητών το $W = (\rho, u, p)^T$, ενώ η δεύτερη εισάγει την εντροπία s στις εξισώσεις, έχει

 $^{^5}$ απόδειξη σχέσης (1.75)

σαν διάνυσμα μεταβλητών το $W = (\rho, u, s)^T$. Σε αυτό το σημείο βρίσκονται οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα και για τις τρεις εκφράσεις των εξισώσεων του Euler, αφού όπως έχει αποδειχθεί στο κεφάλαιο 1.1 τα χαρακτηριστικά αυτά είναι κρίσιμα για την περιγραφή της κυματικής λύσης ενός συστήματος.

Διατηρητική Μορφοποίηση : Οι διατηρητικοί νόμοι (1.84), μπορούν να γραφούν επίσης στην ψευδο-γραμμική τους μορφή

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{A}(\mathbf{U})\mathbf{U}_x = 0, \tag{1.87}$$

όπου $\mathbf{A}(\mathbf{U})$ είναι ο Ιαχωβιανός πίναχας. Ο Ιαχωβιανός πίναχας, όμως έχει σαν στοιχεία του τις μεριχές παραγώγους ($\partial f_i/\partial u_i$) (βλ. σχέση (1.11)). Επομένως για να μπορέσει να υπολογιστεί, θα πρέπει πρώτα το διάνυσμα \mathbf{F} να εχφραστεί συναρτήσει των u_i :

$$(1.85) \xrightarrow{(1.86)} u_3 = u_1 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{u_2^2}{u_1^2} + \frac{p}{(\gamma - 1)u_1} \right),$$

και επιλυοντας ως προς p:

$$p = (\gamma - 1)[u_3 - \frac{1}{2}(u_2^2/u_1)].$$

Τώρα η F μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_2 \\ \frac{1}{2}(3-\gamma)\frac{u_2^2}{u_1} + (\gamma-1)u_3 \\ \gamma \frac{u_2}{u_1}u_3 - \frac{1}{2}(\gamma-1)\frac{u_2^3}{u_1^2} \end{bmatrix},$$

και πλέον εύκολα υπολογίζεται ο Ιακωβιανός πίνακας

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ -\frac{1}{2}(\gamma - 3)(\frac{u_2}{u_1})^2 & (3 - \gamma)(\frac{u_2}{u_1}) & \gamma - 1\\ -\frac{\gamma u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma - 1)(\frac{u_2}{u_1})^3 & \frac{\gamma u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)(\frac{u_2}{u_1})^2 & \gamma(\frac{u_2}{u_1}) \end{bmatrix}.$$
(1.88)

Ο πίναχας (1.88) μπορεί επίσης να εχφραστεί συναρτήσει της ταχύτητας του ήχου a (σχ. 1.80) (η θεώρηση παραμένει αυτή του ιδανιχού αερίου) χαι της σωματιδιαχής ταχύτητας u ως εξής⁶:

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1\\ \frac{1}{2}(\gamma - 2)u^3 - \frac{a^2u}{\gamma - 1} & \frac{3 - 2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma - 1} & \gamma u \end{bmatrix}$$

 $^6 \rm Aναλυτικά ο τρόπος που αναπαράγεται η σχέση δίνεται στην απόδειξ
η<math display="inline">4,$ παράρτημα1
1.3. OI $E \Xi I \Sigma \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

Μία άλλη έκφραση του Ιακωβιανού πίνακα περιλαμβάνει στα στοιχεία του την ολική ειδική ενθαλπία H, που συνδέεται με την ειδική ενθαλπία h και τις υπόλοιπες βασικές θερμοδυναμικές μεταβλητές μέσω των σχέσεων

$$H = \frac{(E+p)}{\rho} \equiv \frac{1}{2}u^2 + h , \quad h = e + \frac{p}{\rho},$$
(1.89)

και τότε η Ιακωβιανή αποδεικνύεται⁷ οτι γίνεται

$$\mathbf{A}(\mathbf{U}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ \frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 & (3 - \gamma)u & \gamma - 1\\ u[\frac{1}{2}(\gamma - 1)u^2 - H] & H - (\gamma - 1)u^2 & \gamma u \end{bmatrix}.$$
 (1.90)

Η χρήση της έκφρασης (1.90) του \mathbf{A} και του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ δίνει, κατά τα γνωστά, τις ακόλουθες ιδιοτιμές:

$$\lambda_1 = u - a , \quad \lambda_2 = u , \quad \lambda_3 = u + a,$$
 (1.91)

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα που ικανοποιούν την σχέση $\mathbf{A}\mathbf{K}=\lambda\mathbf{K}$ είναι τα εξής:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\\ u-a\\ H-ua \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1\\ u\\ \frac{1}{2}u^2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1\\ u+a\\ H+ua \end{bmatrix}.$$
(1.92)

Χρησιμοποιώντας τις βασικές Θερμοδυναμικές μεταβλητές : Όπως έχει ήδη αναφερθεί, για αυτή την περίπτωση, το διάνυσμα των μεταβλητών στην ψευδο-γραμμική μορφή (1.87) είναι το $W = (\rho, u, p)^T$. Για να έρθει το σύστημα (1.84) σε αυτή την μορφή, ξεκινάει κανείς από την ανάπτυξη της πρώτης των εξισώσεων, η οποία γίνεται:

$$\rho_t + u\rho_x + \rho u_x = 0. \tag{1.93}$$

Το ίδιο γίνεται και για την δεύτερη σχέση που έρχεται στην μορφή

$$u[\rho_t + u\rho_x + \rho u_x] + \rho \left[u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x\right] = 0,$$

αλλά λόγω της σχέσης (1.93) μηδενίζεται ο πρώτος όρος οπότε γίνεται

$$u_t + uu_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0. (1.94)$$

⁷Απόδειξη 5 παράρτημα 1

Για την ανάπτυξη της τελευταίας σχέσης στο σύστημα (1.84), τώρα, χρησιμοποιούνται οι εχφράσεις (1.85) και (1.86) που εύκολα οδηγούν στο οτι οι παράγωγοι της ολικής ενέργειας E ως προς t και x δίνονται ως εξής:

$$E_t = \frac{1}{2}u^2\rho_t + \rho u u_t + \frac{p_t}{(\gamma - 1)}, \quad E_x = \frac{1}{2}u^2\rho_x + \rho u u_x + \frac{p_x}{(\gamma - 1)}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές στην εξίσωση που περιγράφει την διατήρηση της ενέργειας, και αξιοποιώντας τις σχέσεις (1.93) κ (1.94) οδηγείται κανείς στην παρακάτω έκφραση:

$$p_t + \rho a^2 u_x + u p_x = 0. (1.95)$$

Οι (1.93), (1.94) και (1.95) μπορούν και γράφονται σαν σύστημα στην ακόλουθη ψευδο-γραμμική μορφή:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x = 0$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{bmatrix}.$$
(1.96)

Το σύστημα αυτό έχει τις εξής πραγματικές ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = u - a , \quad \lambda_2 = u , \quad \lambda_3 = u + a,$$
 (1.97)

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματά τους είναι:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\\ -a/\rho\\ a^2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1\\ 0\\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1\\ a/\rho\\ a^2 \end{bmatrix}.$$
(1.98)

Χρησιμοποιώντας την εντροπία : Η εντροπία δίνεται ως εξής:

$$s = c_v \ln(\frac{p}{\rho^{\gamma}}) + C_0 , \quad C_0 = \text{stad}.$$
(1.99)

 Απ΄ όπου εύχολα μπορεί χανείς να λύσει ως προ
ςp

$$p = C_1 \rho^{\gamma} e^{s/c_v}.$$
 (1.100)

Σε αυτή τη σχέση η πίεση φαίνεται σαν συνάρτηση της πυκνότητας και της εντροπίας και επομένως υπάρχει η δυνατότητα να αντικατασταθεί η πίεση στην μορφή (1.96) ώστε αυτή να έρθει στην επιθυμητή μορφή, αυτή δηλαδή που έχει σαν διάνυσμα μεταβλητών το $W = (\rho, u, s)^T$.

Η πρώτη από τις σχέσεις (1.96) δεν περιέχει την πίεση και επομένως παραμένει αναλλοίωτη. Για την επεξεργασία της δεύτερης σχέσης αξιοποιείται η (1.100):

$$(1.100): p = p(\rho, s) \Rightarrow p_x = \frac{\partial p}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} .$$
(1.101)

1.3. OI $E \equiv I \Sigma' \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

Θεωρώντας επίσης ισεντροπική μεταβολή (κάτι που αποδεικνύεται αμέσως μετά), μπορεί και αξιοποιείται η σχέση (1.77)

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s},$$

και τελικά η δεύτερη από τις σχέσεις (1.96) γίνεται

$$u_t + \frac{a^2}{\rho}\rho_x + uu_x + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}s_x.$$
 (1.102)

Παραγωγίζοντας, τώρα την εξίσωση (1.99) ως προς t και x, και αντικαθιστώντας την ταχύτητα του ήχου για ιδανικό αέριο $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$, λαμβάνει κανείς

$$s_t = \frac{c_v}{p} [p_t - a^2 \rho_t] , \quad s_x = \frac{c_v}{p} [p_x - a^2 \rho_x].$$
 (1.103)

Κάνοντας την άθροιση $(s_t + us_x)$ και αντικαθιστώντας το p_t από την (1.95), προκύπτει

$$s_t + us_x \stackrel{(1.95)}{=} \frac{c_v a^2}{p} [-\rho u_x - \rho_t - \rho_x u] \stackrel{(1.93)}{=} 0.$$
 (1.104)

Έχει αποδειχθεί δηλαδή οτι είναι

$$s_t + us_x = 0,$$
 (1.105)

που είναι και η τρίτη σχέση του συστήματος.

Για να εξηγηθεί η φυσική σημασία του αποτελέσματος αυτού, βλέπει κανείς την εντροπία σαν συνάρτηση s=s(x(t),t) και επομένως

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} = s_t + us_x \stackrel{(1.105)}{=} 0 \; .$$

Επομένως, σε περιοχές ομαλής ροής, η εντροπία διατηρείται σταθερή κατά μήκος διαδρομών όπου η σωματιδιακή ταχύτητα είναι dx/dt = u. Κατά μήκος αυτών των διαδρομών θα ισχύει ο 'ισεντροπικός νόμος'

$$p = C\rho^{\gamma}, \tag{1.106}$$

όπου $C = C(s_0)$ είναι συνάρτηση της αρχικής εντροπίας s_0 και παραμένει σταθερή όσο η ροή παραμένει ομαλή. Όταν πρόκειται για το πρόβλημα του Riemann, η αρχική εντροπία μπορεί να υπολογιστεί στα αρχικά δεδομένα του προβλήματος που είναι σταθερά εκατέρωθεν της ασυνέχειας. Στην περίπτωση που το C είναι σταθερό κατά μήκος όλης της ροής, τότε μιλάει κανείς για ισεντροπική ροή.

Συγχεντρώνοντας τις τρεις εξισώσεις (την πρώτη από τις (1.96) αναλλοίωτη, την (1.102) χαι την (1.105)) σε ένα ψευδο-γραμμικό σύστημα, η μορφοποίηση της εντροπίας' έχει ως εξής:

$$\mathbf{W}_t + \mathbf{A}(\mathbf{W})\mathbf{W}_x = 0$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ a^2/\rho & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{bmatrix}.$$
 (1.107)

Οι ιδιοτιμές του συστήματος αυτού είναι

$$\lambda_1 = u - a , \quad \lambda_2 = u , \quad \lambda_3 = u + a , \quad (1.108)$$

και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα έχουν ως εξής:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1\\ -a/\rho\\ 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial p}{\partial s}\\ 0\\ a^2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 1\\ a/\rho\\ 0 \end{bmatrix}.$$
(1.109)

Στοιχειώδεις χυματικές λύσεις και ιδιότητες

Σε αυτή την παράγραφο περιγράφονται οι στοιχειώδεις χυματικές λύσεις των εξισώσεων του Euler στο πρόβλημα του Riemann. Για καθεμία από τις τρείς περιπτώσεις, κρουστικά κύματα, ασυνέχειες επαφής ή κύματα αραίωσης, γίνεται ποιοτική ανάλυση, δίνονται τα χαρακτηριστικά της, όπως επίσης εξάγονται οι μαθηματικές σχέσεις που την περιγράφουν, που σε μετέπειτα παράγραφο θα βοηθήσουν στο να βρεθεί η ακριβής λύση στο πρόβλημα του Riemann.



Σχήμα 1.8: Η δομή της λύσης στο το πρόβλημα του Riemann για το μονοδιάστατο, χρονοεξαρτημένο σύστημα εξισώσεων του Euler. Η λύση αποτελείται από τρία χύματα που συνδέονται με τις ιδιοτιμές *u* - *a*, *u* και *u* + *a*. Σχήμα 3.1 από [1].

1.3. OI $E \Xi I \Sigma \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

Το πρόβλημα του Riemann για τις μονοδιάστατες χρονο-εξαρτημένες εξισώσεις του Euler (1.84) είναι το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = 0\\ \mathbf{U}(x, 0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{av} \quad x < 0\\ \mathbf{U}_R & \text{av} \quad x > 0 \end{cases}$$
(1.110)

Η δομή της λύσης φαίνεται στο σχήμα 1.8. Αποτελείται από τρία χύματα, ένα για χάθε ιδιοτιμή λ_i , i = 1, 2, 3, χαθένα από τα οποία συνδέεται χαι με ένα χαραχτηριστικό πεδίο. Τα τρία αυτά χύματα διαχωρίζουν τέσσερις σταθερές καταστάσεις. Από αριστερά προς τα δεξιά αυτές είναι \mathbf{U}_L , η αριστερή κατάσταση που δίνεται και στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, η \mathbf{U}_{*L} , η κατάσταση μεταξύ του 1^{ου} και του 2^{ου} χύματος, η \mathbf{U}_{*R} , η κατάσταση μεταξύ του 2^{ου} κάματος, χαι η \mathbf{U}_R , η δεξιά κατάσταση όπως δίνεται από τις αρχικές συνθήκες τοι η περιοχή ανάμεσα στα χαραχτηριστικά πεδία $\mathbf{K}^{(1)}$ και $\mathbf{K}^{(3)}$ στην διεθνή βιβλιογραφία αποκαλείται.

Αξιοποιώντας τις σχέσεις (1.34), (1.35) και τις ιδιοτιμές με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα από τις σχέσεις (1.91), (1.92) για την περίπτωση της μορφοποίησης με τις διατηρούμενες μεταβλητές, εύκολα βρίσκει κανείς οτι το $\mathbf{K}^{(2)}$ χαρακτηριστικό πεδίο είναι γραμμικώς εκφυλισμένο, ενώ τα $\mathbf{K}^{(1)}$, $\mathbf{K}^{(3)}$ χαρακτηριστικά πεδία είναι αμιγώς μη-γραμμικά. Όπως έχει αναλυθεί στην παράγραφο 1.1.4, ένα γραμμικώς εκφυλισμένο πεδίο είναι χαρακτηριστικό μίας ασυνέχειας επαφής, επομένως και το κύμα που αντιστοιχεί στην λ_2 ιδιοτιμή είναι ασυνέχεια επαφής. Με την ίδια λογική βεβαιώνεται κανείς οτι τα κύματα που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_1 , λ_3 θα είναι είτε κρουστικά κύματα (ασυνέχειες), είτε κύματα αραίωσης (περιοχές ομαλής ροής), χωρίς να μπορεί να ξέρει κανείς εκ των προτέρων για ποια περίπτωση πρόκειται. Παρακάτω αναλύεται η κάθε περίπτωση κύματος διεξοδικά.

Ασυνέχεια επαφής : Σύμφωνα με την ανάλυση που έγινε στην παράγραφο 1.1.4, για μία ασυνέχεια επαφής ισχύουν τα γενιχευμένα αναλλοίωτα του Riemann (1.39). Λαμβάνοντας υπόψη οτι το χύμα αυτό αντιστοιχεί στην δεύτερη ιδιοτιμή χαι αξιοποιώντας την μορφοποίηση με τις διατηρούμενες μεταβλητές (ιδιοδιανύσματα από τη σχέση (1.92)) οι εξισώσεις αυτές θα έχουν ως εξής:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{1} = \frac{\mathrm{d}(\rho u)}{u} = \frac{\mathrm{d}E}{\frac{1}{2}u^2}.$$
(1.111)

Από την πρώτη ισότητα, εύχολα προχύπτει οτι $u = \sigma \tau a \vartheta$. Αξιοποιώντας τις σχέσεις (1.85), (1.86) εκφράζει χανείς την ολιχή ενέργεια συναρτήσει των p και ρ . Ο υπολογισμός του ολιχού διαφοριχού, λαμβάνοντας υπόψη οτι $u = \sigma \tau a \vartheta$ έχει ως εξής:

$$\mathrm{d}E = \frac{\partial E}{\partial p} \mathrm{d}p + \frac{\partial E}{\partial \rho} \mathrm{d}\rho \xrightarrow{(\mathbf{1.85}),(\mathbf{1.86})} \mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}p}{(\gamma - 1)} + \frac{1}{2}u^2 \mathrm{d}\rho \; .$$

Τότε, από την ισότητα του 1^{ου} και 3^{ου} όρου της (1.111), προκύπτει οτι p =σταθ. Στα ίδια συμπεράσματα καταλήγει κανείς παρατηρώντας το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{K}^{(2)}$ (σχ. (1.98)) στην μορφοποίηση με βάση τις βασικές Θερμοδυναμικές μεταβλητές.

<u>Συνοψίζοντας</u>, η ασυνέχεια επαφής αφήνει αμετάβλητες την πίεση και την σωματιδιακή ταχύτητα, προκαλεί όμως τον σχηματισμό ασυνεχούς βαθμίδας στην μεταβολή της πυκνότητας, όπως επίσης σε μεταβλητές που εξαρτώνται από αυτήν, όπως στην ειδική εσωτερική ενέργεια, τη θερμοκρασία, την ταχύτητα του ήχου, την εντροπία κ.α.. Επειδή η ασυνέχεια επαφής βρίσκεται σε ένα γραμμικώς εκφυλισμένο πεδίο (ισχύει η συνθήκη παραλληλισμού των χαρακτηριστικών καμπύλων) η ταχύτητα της ασυνέχειας επαφής δίνεται ως εξής:

$$S_2 = \lambda_2(\mathbf{U}_{*L}) = \lambda_2(\mathbf{U}_{*R}) \stackrel{(1.97)}{=} u_*$$
 (1.112)

Κύμα αραίωσης : Όπως έγινε για την ασυνέχεια επαφής, έτσι και εδώ αξιοποιείται η ισχύς των γενικευμένων αναλλοίωτων του Riemann. Αυτή τη φορά η κατασκευή τους βασίζεται στην μορφοποίηση των εξισώσεων του Euler που περιέχουν την εντροπία και έτσι οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα που χρησιμοποιούνται στις παρακάτω εκφράσεις είναι αυτά των σχέσεων (1.108) και (1.109). Για την περίπτωση που το κύμα αραίωσης αντιστοιχεί στην $λ_1$ ιδιοτιμή, η μορφή τους είναι η ακόλουθη:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{1} = \frac{\mathrm{d}u}{-a/\rho} = \frac{\mathrm{d}s}{0} \ . \tag{1.113}$$

Άμεσα φαίνεται οτι η εντροπία s παραμένει σταθερή. Επίσης, από την πρώτη ισότητα είναι

$$-\frac{a}{\rho}\mathrm{d}
ho = \mathrm{d}u$$

Η σχέση αυτή ολοκληρώνεται λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό της ταχύτητας του ήχου (1.77), και ακριβώς επειδή η εντροπία διατηρείται σταθερή, η πίεση p θα δίνεται από τον ισεντροπικό νόμο σχέση (1.106). Το αποτέλεσμα της ολοκλήρωσης είναι $(u + 2a/(\gamma - 1) = \sigma \tau \alpha \vartheta$.). Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αναλύονται τα γενικευμένα αναλλοίωτα και στην περίπτωση που το κύμα αραίωσης αντιστοιχεί στην λ_3 ιδιοτιμή. Το μόνο που αλλάζει είναι ένα πρόσημο που διαφοροποιεί την δεύτερη ποσότητα που διατηρείται, η οποία τώρα είναι η $(u - 2a/(\gamma - 1) = \sigma \tau \alpha \vartheta$.).

<u>Συνοψίζοντας</u>, το κύμα αραίωσης είναι ένα ομαλό κύμα που συνδέεται με τα χαρακτηριστικά πεδία 1 και 3 και επιφέρει μεταβολές στα ρ, u και p. Το κύμα οριοθετείται από δύο χαρακτηριστικές που αντιστοιχούν στην κεφαλή(H) και στην ουρά(T) του. Σύμφωνα με αυτό που εκφράζουν οι σχέσεις (1.32) και (1.33), και σύμφωνα με τις ιδιοτιμές που φαίνονται στην (1.97) στην περίπτωση που το κύμα συνδέεται με το $\mathbf{K}^{(1)}$ χαρακτηριστικό πεδίο οι ταχύτητες της κεφαλής και της ουράς δίνονται ως εξής:

$$S_{HL} = \lambda_1(\mathbf{U}_L) = u_L - a_L$$
, $S_{TL} = \lambda_1(\mathbf{U}_{*L}) = u_* - a_{*L}$, (1.114)

ενώ για την περίπτωση που συνδέεται με το $\mathbf{K}^{(3)}$ χαρακτηριστικό πεδίο θα δίνονται ως εξής:

$$S_{HR} = \lambda_3(\mathbf{U}_R) = u_R + a_R$$
, $S_{TR} = \lambda_3(\mathbf{U}_{*R}) = u_* + a_{*R}$. (1.115)

Επίσης, για το κύμα αραίωσης ισχύουν τα γενικευμένα αναλλοίωτα του Riemann, το αποτέλεσμα των οποίων συγκεντρώνεται στην ακόλουθη σχέση:

$$I_L(u,a) = u + \frac{2a}{\gamma - 1} = \operatorname{stad}.$$

$$s = \operatorname{stad}.$$

$$\{\gamma : \alpha \quad \lambda_1 = u - a \quad (1.116)$$

$$I_R(u,a) = u - \frac{2a}{\gamma - 1} = \operatorname{stad}. \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{yla} & \lambda_3 = u + a \\ s = \operatorname{stad}. \end{array} \right\} \operatorname{yla} \quad \lambda_3 = u + a \ . \tag{1.117}$$

Κρουστικό κύμα: Ένα κρουστικό κύμα συνεπάγεται μεταβολή και στις τρεις ποσότητες ρ , u, p από την σταθερή κατάσταση στη μία πλευρά του προς την άλλη. Στα παρακάτω κατασκευάζονται σχέσεις που συνδέουν πλήθος ποσοτήτων που χρειάζονται για την επίλυση του προβλήματος του Riemann. Για την ώρα, γίνεται η παραδοχή οτι το κρουστικό κύμα που μελετάται σχετίζεται με το $\mathbf{K}^{(3)}$ μη-γραμμικό χαρακτηριστικό πεδίο (δηλαδή την λ_3 ιδιοτιμή), οτι έχει φορά προς τα δεξιά και κινείται με σταθερή ταχύτητα S_3 . Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, p_R)^T$ για την κατάσταση μπροστά από το κύμα και ο $\mathbf{W}_* = (\rho_*, u_*, p_*)^T$ για την κατάσταση πίσω από αυτό.



Σχήμα 1.9: Κρουστικό κύμα με φορά προς τα δεξιά: (α) στο *ακίνητο* σύστημα αναφοράς το κύμα έχει ταχύτητα S₃ (β) στο κινούμενο σύστημα συντεταγμένων η ταχύτητα του κύματος είναι μηδενική. Σχήμα 3.3 από [1].

Για τις ανάγχες της επεξεργασίας που γίνεται στην συνέχεια κρίνεται σχόπιμο το πρόβλημα να μετασχηματιστεί σε ένα νέο σύστημα συντεταγμένων που κινείται μαζί με το κύμα (βλ. σχήμα 1.9). Οι μόνες μεταβλητές που επηρεάζονται από αυτή την αλλαγή είναι οι u_R και u_* που στο νέο κινούμενο σύστημα

συντεταγμένων θα είνα
ι \hat{u}_R και \hat{u}_* (σχετικές ταχύτητες πλέον) σύμφων
α με τον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\hat{u}_* = u_* - S_3 , \quad \hat{u}_R = u_R - S_3 .$$
 (1.118)

Εφαρμογή των συνθηκών Rankine-Hugoniot (σχ. (1.36)) στο κινούμενο σύστημα συντεταγμένων όπου η ταχύτητα της ασυνέχειας είναι 0, έχει ως εξής:

$$\Delta \mathbf{F} = S_i \Delta \mathbf{U} \Rightarrow \Delta \mathbf{F} = 0 \; .$$

Αξιοποιώντας, τώρα, την μορφοποίηση των εξισώσεων Euler με τις διατηρούμενες μεταβλητές (1.84) η έκφραση αυτή οδηγεί στις ακόλουθες σχέσεις:

$$\rho_* \hat{u}_* = \rho_R \hat{u}_R \tag{1.119}$$

$$\rho_* \hat{u}_*^2 + p_* = \rho_R \hat{u}_R^2 + p_R \tag{1.120}$$

$$\hat{u}_*(\hat{E}_* + p_*) = \hat{u}_R(\hat{E}_R + p_R).$$
 (1.121)

Η (1.121) λόγω της (1.119) γίνεται

$$\frac{E_* + p_*}{\rho_*} = \frac{E_R + p_R}{\rho_R} \ . \tag{1.122}$$

Εδώ, αντικαθιστώντας την ολική ενέργει
α Ε από την σχέση (1.85) και εισάγοντας την ειδική ενθαλπί
αh

$$h_* = e_* + p_*/\rho_*$$
, $h_R = e_R + p_R/\rho_R$, (1.123)

η (1.122) γίνεται

$$\frac{1}{2}\hat{u}_*^2 + h_* = \frac{1}{2}\hat{u}_R^2 + h_R. \qquad (1.124)$$

Χρησιμοποιώντας την (1.119) στην (1.120), αυτή γίνεται

$$\rho_* \hat{u}_*^2 = (\rho_R \hat{u}_R) \hat{u}_R + p_R - p_* \stackrel{(1.119)}{=} (\rho_* \hat{u}_*) \frac{\rho_* \hat{u}_*}{\rho_R} + p_R - p_* ,$$

και μετά από πράξεις λαμβάνει κανείς

$$\hat{u}_*^2 = \left(\frac{\rho_R}{\rho_*}\right) \left[\frac{p_R - p_*}{\rho_R - \rho_*}\right],\tag{1.125}$$

όπως επίσης και

$$\hat{u}_R^2 = \left(\frac{\rho_*}{\rho_R}\right) \left[\frac{p_R - p_*}{\rho_R - \rho_*}\right].$$
(1.126)

Αντικαθιστώντας τα $\hat{u}_*^2,\,\hat{u}_R^2$ στην (1.124) προκύπτει
οτι

$$h_* - h_R = \frac{1}{2}(p_* - p_R) \left[\frac{\rho_* + \rho_R}{\rho_* \rho_R}\right].$$

1.3. OI $E \Xi I \Sigma \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

Αυτή η σχέση ξαναγράφεται αξιοποιώντας τις (1.123) ως εξής:

$$e_* - e_R = \frac{1}{2}(p_* + p_R) \left[\frac{\rho_* - \rho_R}{\rho_* \rho_R}\right].$$
 (1.127)

Η (1.127) έχει γενική ισχύ. Κάνοντας, τώρα, επιπλέον την παραδοχή του ιδανικού αερίου και χρησιμοποιώντας την (1.86) αποδεικνύεται⁸ οτι από την (1.127) καταλήγει κανείς στην ακόλουθη σχέση:

$$\frac{\rho_*}{\rho_R} = \frac{\left(\frac{p_*}{p_R}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)}{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)\left(\frac{p_*}{p_R}\right) + 1}.$$
(1.128)

Εδώ πρέπει να σημειωθεί οτι η σχέση αυτή έχει ισχύ ανεξάρτητη του συστήματος συντεταγμένων καθώς περιέχει μόνον ρ και p. Επομένως σε αυτό το σημείο υπάρχει η δυνατότητα και επιστρέφει η περιγραφή στο αρχικό *ακίνητο* σύστημα συντεταγμένων.

Εισάγονται ο αριθμός Mach της ροής εμπρός από το χύμα M_R , όπως επίσης και ο αριθμός Mach του χρουστικού χύματος M_S που δίνονται από τις σχέσεις:

$$M_R = u_R/a_R$$
, $M_S = S_3/a_R$. (1.129)

Επεξεργασία των εξισώσεων (1.126), (1.128) και (1.129) οδηγεί στις ακόλουθες εκφράσεις που δίνουν τους λόγους των τιμών πυκνότητας και πίεσης στις ροές αριστερά και δεξιά από το κρουστικό κύμα, σαν συνάρτηση του σχετικού αριθμού Mach $(M_R - M_S)$

$$\frac{\rho_*}{\rho_R} = \frac{(\gamma+1)(M_R - M_S)^2}{(\gamma-1)(M_R - M_S)^2 + 2}$$
(1.130)

$$\frac{p_*}{p_R} = \frac{2\gamma (M_R - M_S)^2 - (\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} \,. \tag{1.131}$$

Στην προσπάθεια να εκφραστεί το S_3 σαν συνάρτηση του λόγου των πιέσεων (κάτι αντίστοιχο μπορεί να γίνει και με τον λόγω των πυκνοτήτων), η (1.131) ξαναγράφεται ως εξής:

$$M_R - M_S = -\sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\left(\frac{p_*}{p_R}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)},$$

απ΄ όπου, αντικαθιστώντας τους αριθμούς Mach από τις σχέσεις (1.129) καταλήγει κανείς στο εξής

$$S_3 = u_R + a_R \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\left(\frac{p_*}{p_R}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}.$$
 (1.132)

⁸απόδειξη 6 παράρτημα 1

Από εδώ φαίνεται οτι το πρόσημο μπροστά από την ρίζα στην σχέση του σχετικού αριθμού Mach έχει επιλεγεί έτσι ώστε καθώς ο λόγος των πιέσεων τείνει στην μονάδα (που ισοδυναμεί με αποδυνάμωση του κρουστικού κύματος, εκφυλισμό της ασυνέχειας), η ταχύτητα του κρουστικού κύματος να τείνει στην χαρακτηριστική ταχύτητα $\lambda_3 = u_R + a_R$ (βλ. σχ. (1.91)).

Από την (1.119) και την (1.118) μπορεί επίσης να εκφραστεί η σωματιδιακή ταχύτητα πίσω από το κρουστικό κύμα σαν συνάρτηση του λόγου των πυκνοτήτων:

$$u_* = (1 - \rho_R / \rho_*) S_3 + u_R \rho_R / \rho_* \,. \tag{1.133}$$

Για την περίπτωση που το χρουστικό κύμα που εξετάζεται σχετίζεται με την λ_1 ιδιοτιμή, η ανάλυση είναι τελείως ανάλογη καθώς το πρόβλημα θα είναι το συμμετρικό αυτού που μόλις περιγράφηκε. Το κύμα τώρα θα κινείται προς τα αριστερά με ταχύτητα S_1 . Η κατάσταση μπροστά από το κύμα θα είναι η $W_L = (\rho_L, u_L, p_L)^T$ και αυτή πίσω του $W_* = (\rho_*, u_*, p_*)^T$. Οι λόγοι των πυκνοτήτων και των πιέσεων θα συνδέονται μέσω της σχέσης

$$\frac{\rho_*}{\rho_L} = \frac{\left(\frac{p_*}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)}{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)\left(\frac{p_*}{p_L}\right) + 1},\tag{1.134}$$

ενώ σαν συνάρτηση του σχετιχού αριθμού Mach θα είναι

$$\frac{\rho_*}{\rho_L} = \frac{(\gamma+1)(M_L - M_S)^2}{(\gamma-1)(M_L - M_S)^2 + 2}$$
$$\frac{p_*}{p_L} = \frac{2\gamma(M_L - M_S)^2 - (\gamma-1)}{(\gamma+1)}.$$

Η έχφραση του S1 σαν συνάρτηση του λόγου των πιέσεων θα έχει ως εξής

$$S_1 = u_L - a_L \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \left(\frac{p_*}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}.$$
 (1.135)

Όπου εδώ φαίνεται οτι με την εξασθένιση του χρουστιχού χύματος (ο λόγος των πιέσεων να τείνει στην μονάδα), η ταχύτητα S_1 τείνει στην χαραχτηριστιχή ταχύτητα $\lambda_1 = u_L - a_L$ (βλ. αντιστοίχιση με την σχ. (1.91)). Η σωματιδιαχή ταχύτητα πίσω από το χρουστιχό χύμα θα είναι

$$u_* = (1 - \rho_L / \rho_*) S_1 + u_L \rho_L / \rho_* \,. \tag{1.136}$$

Κίνδυνοι στη χρήση μορφών με βάση διατηρούμενες ποσότητες

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, η χρήση μορφών με διατηρούμενες ποσότητες μπορεί να οδηγούν σε λάθος λύσεις όταν σε αυτές υπάρχουν κρουστικά κύματα.

1.3. OI $E \Xi I \Sigma \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

Αυτό συμβαίνει όταν οι εξισώσεις που μελετώνται έρχονται στην μορφή διατηρητικών νόμων, αλλά μόνο σαν αποτέλεσμα μαθηματικών πράξεων χωρίς να έχει φυσική σημασία η διατήρηση των ποσοτήτων των νόμων αυτών. Σαν παράδειγμα χρησιμοποιείται το ακόλουθο σύστημα (1d shallow water equations):

$$\begin{bmatrix} \phi \\ \phi u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \phi u \\ \phi u^2 + \frac{1}{2}\phi^2 \end{bmatrix}_x = 0.$$
 (1.137)

Αναλύοντας την πρώτη εξίσωση είναι

$$\phi_t + u\phi_x + \phi u_x = 0\,,$$

και αξιοποιώντας αυτή τη σχέση στην παραγώγηση της δεύτερης εξίσωσης του συστήματος (1.137) προκύπτει

$$u_t + uu_x + \phi_x = 0.$$

Η σχέση αυτή ξαναγράφεται ως εξής:

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2 + \phi\right)_x = 0.$$
 (1.138)

Χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση από τις (1.137) και την (1.138) ξανακατασκευάζεται το υπό μελέτη σύστημα με την μορφή νέων διατηρητικών νόμων:

$$\begin{bmatrix} \phi \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \phi u \\ \frac{1}{2}u^2 + \phi \end{bmatrix}_x = 0.$$
 (1.139)

Το σύστημα αυτό εκφράζει τη διατήρηση της μάζας (όπως και πριν) και της σωματιδιακής ταχύτητας. Από φυσικής άποψης, ο δεύτερος νόμος διατήρησης που εκφράζεται δεν έχει κανένα νόημα. Στην περίπτωση που η λύση σε ένα πρόβλημα περιλάμβανε ένα κρουστικό κύμα (χωρίς αναίρεση της γενικότητας θεωρείται οτι αυτό το κύμα έχει μέτωπο προς τα δεξιά), για την περίπτωση του συστήματος (1.137) η ταχύτητα αυτού του κρουστικού κύματος θα δινόταν ως εξής

$$\begin{cases} S = u_R + Q/\phi_R \\ Q = \left[\frac{1}{2}(\phi_* + \phi_R)\phi_*\phi_R\right]^{1/2}, \end{cases}$$

ενώ για την περίπτωση του συστήματος (1.139) θα δινόταν ως εξής:

$$\begin{cases} \hat{S} = u_R + \hat{Q}/\phi_R \\ \hat{Q} = \left[\frac{2}{\phi_* + \phi_R}\right]^{1/2} \phi_* \phi_R \ . \end{cases}$$

Όπως φαίνεται, η λύση για το νέο σύστημα διατηρητικών νόμων δίνει ταχύτητα του κρουστικού κύματος μικρότερη από αυτή που δίνει το σύστημα (1.137) και σαν επακόλουθο οδηγεί σε λάθος αποτελέσματα. Επομένως η χρήση συστημάτων διατηρητικών νόμων σαν τον (1.139) χωρίς φυσική σημασία μπορεί να γίνεται μόνον όταν οι λύσεις περιλαμβάνουν ομαλές ροές.

1.3.3 Euler-1D : η πλήρης και ακριβής λύση στο πρόβλημα του Riemann

Η πλήρης λύση στο πρόβλημα του Riemann (1.110) όπως περιγράφεται στην παράγραφο αυτή είναι χρήσιμη για πολλούς λόγους. Ένας από αυτούς, ο ποιο εμφανής, είναι οτι αντιπροσωπεύει τη λύση για ένα σύστημα υπερβολικών διατηρητικών νόμων που υπόκεινται στην πλέον απλή, αλλά μη τετριμμένη, περίπτωση αρχικών συνθηκών. Η αιτία, όμως, που δίνει στη λύση αυτή ανεκτίμητη αξία είναι οτι αποτελεί μέτρο σύγκρισης για τον έλεγχο της ορθότητας αλλά και της απόδοσης νέων αλγορίθμων και των προγραμμάτων τους στα πρώτα στάδια της κατασκευής τους.

Δεν υπάρχει αναλυτική λύση στο το πρόβλημα του Riemann για τις εξισώσεις του Euler και την περίπτωση του ιδανικού αερίου, για την ακρίβεια δεν υπάρχει ούτε για πολύ πιο απλά μοντέλα, όπως για τις ισεντροπικές και ισόθερμες εξισώσεις. Παρόλα αυτά υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής επαναληπτικών μεθόδων που υπολογίζουν αριθμητικά την λύση σε οποιοδήποτε επιθυμητό επίπεδο ακρίβειας.



Σχήμα 1.10: Η απεικόνιση της δομής της λύσης στο πρόβλημα του Riemann στο επίπεδο x-t για την μονοδιάστατη περίπτωση των χρονο-εξαρτημένων εξισώσεων του Euler. Σχήμα 4.1 από [1].

Η στρατηγική της λύσης

Η διατύπωση του προβλήματος του Riemann για την περίπτωση των μονοδιάστατων χρονο-εξαρτημένων εξισώσεων του Euler, είναι το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών συνθηκών:

$$\mathbf{U}_{t} + \mathbf{F}(\mathbf{U})_{x} = 0$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^{2} + p \\ u(E+p) \end{bmatrix}, \quad (1.140)$$

με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{U}(x,0) = \mathbf{U}^{(0)}(x) = \begin{cases} \mathbf{U}_L & \text{av} \quad x < 0\\ \mathbf{U}_R & \text{av} \quad x > 0 \end{cases}$$
(1.141)

Παρόλο που η διατύπωση του προβλήματος έχει γίνει χρησιμοποιώντας τη διατηρητική μορφοποίηση, η λύση που ακολουθεί αξιοποιεί το διάνυσμα των βασικών θερμοδυναμικών μεταβλητών $\mathbf{W} = (\rho, u, p)^T$. Έτσι, οι δοθείσες αρχικές συνθήχες θα είναι οι $\mathbf{W}_L = (\rho_L, u_L, p_L)^T$ και $\mathbf{W}_R = (\rho_R, u_R, p_R)^T$ αριστερά και δεξιά του x = 0 αντίστοιχα. Στη δομή της λύσης (σχήμα 1.10) όπως έχει περιγραφεί και στις προηγούμενες παραγράφους, μεταξύ των δύο αυτών σταθερών καταστάσεων παρεμβάλλονται η \mathbf{W}_{*L} μεταξύ των χαρακτηριστικών πεδίων 1 και 2, και η \mathbf{W}_{*R} μεταξύ των χαρακτηριστικών πεδίων 2 και 3. Στο χαρακτηριστικό πεδίο 2 αντιστοιχεί πάντα μία ασυνέχεια επαφής το οποίο αφήνει αμετάβλητες την πίεση και τη σωματιδιακή ταχύτητα και επομένως οι δύο καταστάσεις διατηρούν σταθερές τις τιμές τους σε όλη την star region. επομένως θα είναι $\mathbf{W}_{*L} = (\rho_{*L}, u_*, p_*)^T$ και $\mathbf{W}_{*R} = (\rho_{*R}, u_*, p_*)^T$. Επίσης, στο χαρακτηριστικό πεδίο 1, όπως και στο χαρακτηριστικό πεδίο 3 αποδείχθηκε οτι αντιστοιχεί είτε κρουστικό κύμα, είτε κύμα αραίωσης. Έτσι, υπάρχουν τέσσερις πιθανές ακολουθίες χυμάτων που μπορεί να αποτελούν τη λύση στο πρόβλημα, οι οποίες φαίνονται στο σχήμα 1.11.



Σχήμα 1.11: πιθανοί συνδυασμοί χυμάτων στη λύση του προβλήματος του Riemann: (α) αριστερό χύμα αραίωσης, ασυνέχεια επαφής, δεξί χρουστιχό χύμα (β) αριστερό χρουστιχό χύμα, ασυνέχεια επαφής, δεξί χύμα αραίωσης (γ) αριστερό χύμα αραίωσης, ασυνέχεια επαφής, δεξί χύμα αραίωσης (δ) αριστερό χρουστιχό χύμα, ασυνέχεια επαφής, δεξί χρουστιχό χύμα αραίωσης (δ) αριστερό χρουστιχό χύμα, ασυνέχεια επαφής, δεξί χρουστιχό χύμα 4.2 από [1].

Η λύση που περιγράφεται βασίζεται στη διατήρηση των ποσοτήτων u, p αριστερά και δεξιά της ασυνέχειας επαφής. Έτσι, αρχικά υπολογίζεται το p_* με μία επαναληπτική διαδικασία με βάση τη μέθοδο Newton - Raphson, και στην συνέχεια από μία σχέση που αποδεικνύεται δίνεται το u_* . Ακολουθεί ο

υπολογισμός των ρ_{*L} και ρ_{*R} , που εξαρτάται από τους τύπους των κυμάτων που αντιστοιχούν στα χαρακτηριστικά πεδία 1 και 3. Έχοντας υπολογίσει τις τέσσερις αυτές ποσότητες, η μόνη περίπτωση λύσης που μπορεί να περιγραφεί πλήρως είναι αυτή που φαίνεται στο 1.11δ στην οποία δεν περιλαμβάνεται κύμα αραίωσης. Στην περίπτωση που περιλαμβάνεται τέτοιος τύπος κύματος στην λύση, θα πρέπει να βρεθούν οι σχέσεις που δίνουν τα (ρ, u, p) στην ομαλή ροή που περιλαμβάνεται μεταξύ της κεφαλής και της ουράς του.

Με βάση όλα αυτά, είναι δυνατός ο υπολογισμός των (ρ, u, p) σε κάθε σημείο του επιπέδου (x - t). Αυτό που μένει για την ολοκλήρωση της υπολογιστικής επίλυσης είναι ο μηχανισμός που για κάθε σημείο του επιπέδου (x - t) μπορεί να βρίσκει σε ποια κατάσταση αυτό ανήκει: στην \mathbf{W}_L , την \mathbf{W}_{*L} , την \mathbf{W}_{*R} , την \mathbf{W}_R ή στο εσωτερικό κάποιου κύματος αραίωσης, εάν αυτό υπάρχει, σε όποια θέση και αν βρίσκεται. Ο υπολογιστικός αυτός μηχανισμός ονομάζεται δειγματοληψία και η σωστή κατασκευή του είναι κρίσιμης σημασίας για την αποτελεσματική λειτουργία ενός υπολογιστικού αλγόριθμου.

Υπολογισμός των p_* και u_* - η ανάπτυξη των σχέσεων

Αρχικός στόχος είναι να βρεθούν, για τις τέσσερις καταστάσεις του σχήματος 1.11, σχέσεις που να περιέχουν μόνον τα p_* , u_* και τις σταθερές καταστάσεις W_L και W_R που δίνονται σαν αρχικές συνθήκες του προβλήματος

Περίπτωση αριστερού χρουστιχού χύματος : Όπως έγινε και σε προηγούμενη παράγραφο για την ανάλυση δεξιού χρουστιχού χύματος, αντίστοιχα και εδώ χρησιμοποιείται κινούμενο προς τα αριστερά με ταχύτητα S_L σύστημα αναφοράς όπως φαίνεται και στο σχήμα 1.12. Οι παράμετροι που επηρεάζονται από το μετασχηματισμό είναι οι σωματιδιαχές ταχύτητες u_L και u_* που τώρα γίνονται \hat{u}_L και \hat{u}_* και δίνονται ως εξής:

$$\hat{u}_L = u_L - S_L$$
, $\hat{u}_* = u_* - S_L$. (1.142)

Οι συνθήκες Rankine-Hugoniot στο κινούμενο σύστημα συντεταγμένων θα είναι:

$$\rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_* \tag{1.143}$$

$$\rho_L \hat{u}_L^2 + p_L = \rho_{*L} \hat{u}_*^2 + p_* \tag{1.144}$$

$$\hat{u}_L(\hat{E}_L + p_L) = \hat{u}_*(\hat{E}_* + p_*).$$
 (1.145)

Τώρα, εισάγεται η παράμετρος μεταβολής μάζας Q_L που με την βοήθεια της (1.143) δίνεται ως εξής:

$$Q_L \equiv \rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_* \,. \tag{1.146}$$

Από την (1.144) θα είναι

$$(\rho_L \hat{u}_L)\hat{u}_L + p_L = (\rho_{*L} \hat{u}_*)\hat{u}_* + p_*,$$

και η χρήση της (1.146) δίνει

$$Q_L = -\frac{p_* - p_L}{\hat{u}_* - \hat{u}_L} \stackrel{(1.142)}{=} -\frac{p_* - p_L}{u_* - u_L}.$$
 (1.147)

Από την σχέση αυτή προκύπτει

$$u_* = u_L - \frac{p_* - p_L}{Q_L} \,. \tag{1.148}$$

₹ 2	L		0		
ρ _L	ρ _{*L}	ρ_L		ρ _{*L}	
u _L	U.	\hat{u}_L		û,	
₽ _L	p∗	P_L		p∗	
(2	a)		(b)		

Σχήμα 1.12: αριστερό κρουστικό κύμα ταχύτητας S_L : (α) στο ακίνητο σύστημα αναφοράς (β) στο κινούμενο με ταχύτητα S_L σύστημα αναφοράς. Σχήμα 4.4 από [1].

Χρησιμοποιώντας και πάλι την (1.146) θα είναι

$$\hat{u}_L = \frac{Q_L}{\rho_L} , \quad \hat{u}_* = \frac{Q_L}{\rho_{*L}} .$$

Αντικαθιστώντας τα \hat{u}_L και \hat{u}_* στην (1.147) (πρώτη ισότητα) καταλήγει κανείς στο οτι

$$Q_L^2 = -\frac{p_* - p_L}{\frac{1}{\rho_{*L}} - \frac{1}{\rho_L}} \,.$$

Εάν στην σχέση αυτή αντικατασταθεί το ρ_{*L} από την (1.134) (λόγος πυκνοτήτων) και στην συνέχεια το Q_L αντικατασταθεί στην (1.148) προκύπτει η ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} u_* &= u_L - f_L(p_*, \mathbf{W}_L) ,\\ \text{(from } f_L(p_*, \mathbf{W}_L) &= (p_* - p_L) \left[\frac{A_L}{p_* + B_L} \right]^{\frac{1}{2}} ,\\ \text{(1.149)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(1.149)} \\ \text{(1.149)} \end{aligned}$$

που συνδέει το u_* με το p_* και την κατάσταση W_L .

Περίπτωση αριστερού χύματος αραίωσης : Εδώ αναλύεται η περίπτωση που το χύμα στο $\mathbf{K}^{(1)}$ χαραχτηριστιχό πεδίο είναι χύμα αραίωσης (σχήμα 1.13). Στόχος και πάλι είναι μία σχέση που να συνδέει το u_* με το p_* και την κατάσταση \mathbf{W}_L .



 Σ χήμα 1.13: Η περίπτωση που το αριστερό χύμα είναι ένα χύμα αραίωσης που συνδέει την αριστερή χατάσταση \mathbf{W}_L με την άγνωστη χατάσταση \mathbf{W}_{*L} εντός της star region χαι αριστερά της ασυνέχειας επαφής. Σχήμα 4.5 από [1].

Από την στιγμή που το χύμα αραίωσης είναι περιοχή ομαλής ροής μετάβασης από την W_L στην W_{*L} , μπορεί να χρησιμοποιηθεί ο ισεντροπικός νόμος (1.106) και η εφαρμογή του θα έχει ως εξής:

$$p_L = C \rho_L^{\gamma} \Rightarrow C = \frac{p_L}{\rho_L^{\gamma}}, \quad p_* = C \rho_{*L}^{\gamma} \Rightarrow C = \frac{p_*}{\rho_{*L}^{\gamma}},$$

όπου $C = C(s_0)$ παραμένει σταθερό όσο η ροή παραμένει ομαλή, επομένως είναι το ίδιο στις δύο περιπτώσεις. Επομένως από αυτές τις σχέσεις θα είναι

$$\rho_{*L} = \rho_L \left(\frac{p_*}{p_L}\right)^{\frac{1}{\gamma}} . \tag{1.150}$$

Αντικατάσταση του ρ_{*L} στον ορισμό της ταχύτητας του ήχου a_{*L} (από την σχέση (1.77)) δίνει

$$a_{*L} = a_L \left(\frac{p_*}{p_L}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{2\gamma}}.$$
 (1.151)

Εφαρμογή της σχέσης (1.116), που έχει προχύψει από τα γενιχευμένα αναλλοίωτα του Riemann, στην περίπτωση του αριστερού χύματος αραίωσης που αναλύεται δίνει:

$$u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = u_* + \frac{2a_{*L}}{\gamma - 1},$$

και αντικατάσταση της (1.151) σε αυτή οδηγεί στην ακόλουθη σχέση για το

 u_* :

$$\begin{cases} u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{W}_L) \\ f_L(p_*, \mathbf{W}_L) = \frac{2a_L}{(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma}} - 1 \right]. \end{cases}$$
(1.152)

Περίπτωση δεξιού κρουστικού κύματος : Για την παραγωγή της αντίστοιχης σχέσης που δίνει το u_* στην περίπτωση δεξιού κρουστικού κύματος, η διαδικασία είναι όμοια με αυτή που ακολουθήθηκε και για το αριστερό. Το σύστημα αναφοράς μετασχηματίζεται όπως έχει γίνει στο σχήμα 1.9. Στο νέο σύστημα αναφοράς τα \hat{u}_R και \hat{u}_* δίνονται από την σχέση (1.118), ενώ η εφαρμογή των συνθηκών Rankine-Hugoniot αναπτύσσεται στις σχέσεις (1.119) - (1.121). Η παράμετρος μεταβολής μάζας τώρα, ορίζεται με την βοήθεια της (1.119) ως

$$Q_R \equiv -\rho_{*R}\hat{u}_* = -\rho_R\hat{u}_R \,,$$

και με επεξεργασία αντίστοιχη με αυτή που έγινε για την περίπτωση του αριστερού κρουστικού κύματος στις σχέσεις (1.146) - (1.149) τελικά η σωματιδιακή ταχύτητα u_* γίνεται:

$$\begin{cases} u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{W}_R) ,\\ \text{όπου} \quad f_R(p_*, \mathbf{W}_R) = (p_* - p_R) \left[\frac{A_R}{p_* + B_R} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{хаι} \quad A_R = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R} , \quad B_R = \frac{(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} p_R . \end{cases}$$
(1.153)

Περίπτωση δεξιού κύματος αραίωσης : Ομοίως με την προηγούμενη περίπτωση, έτσι και εδώ η παραγωγή της σχέσης που δίνει το u_{*} είναι όμοια της διαδικασίας που ακολουθήθηκε για την περίπτωση του αριστερού κύματος αραίωσης. Ο ισεντροπικός νόμος, τώρα θα δίνει:

$$\rho_{*R} = \rho_R \left(\frac{p_*}{p_R}\right)^{\frac{1}{\gamma}} . \tag{1.154}$$

Αντικατάσταση του ρ_{*R} στον ορισμό (1.77) για την ταχύτητα του ήχου a_{*R} δίνει

$$a_{*R} = a_R \left(\frac{p_*}{p_R}\right)^{\frac{(\gamma-1)}{2\gamma}}$$
 (1.155)

Αξιοποιώντας τα γενιχευμένα αναλλοίωτα του Riemann, η (1.117) γίνεται:

$$u_R - \frac{2a_R}{\gamma - 1} = u_* - \frac{2a_{*R}}{\gamma - 1}$$
.

Αντικαθιστώντας τη σχέση (1.155) σε αυτή, προκύπτει η επιθυμητή σχέση που συνδέει το u_* με το p_* και την σταθερή κατάσταση δεξιά \mathbf{W}_R

$$\begin{cases} u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{W}_R) \\ f_R(p_*, \mathbf{W}_R) = \frac{2a_R}{(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p_*}{p_R} \right)^{\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma}} - 1 \right]. \end{cases}$$
(1.156)

Συγκεντρώνοντας τις σχέσεις (1.149) και (1.152) προκύπτει η ακόλουθη έκφραση που δίνει το u_* όπως αυτό συνδέεται με την αριστερή κατάσταση \mathbf{W}_L , ό,τι τύπου και αν είναι το κύμα αριστερά

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{W}_L) \quad \text{όπου}$$

$$f_L(p_*, \mathbf{W}_L) = \begin{cases} (p_* - p_L) \left[\frac{A_L}{p_* + B_L}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{an } p_* > p_L \text{ (προυστιπό πύμα)} \\ \frac{2a_L}{(\gamma - 1)} \left[\left(\frac{p_*}{p_L}\right)^{\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma}} - 1\right] & \text{an } p_* < p_L \text{ (πύμα αραίωσης).} \end{cases}$$

$$(1.157)$$

Αντίστοιχα, συγκεντρώνοντας τις (1.153) και (1.156) προκύπτει η αντίστοιχη έκφραση για το u_* όπως αυτό συνδέεται με την δεξιά κατάσταση \mathbf{W}_R .

$$u_{*} = u_{R} + f_{R}(p_{*}, \mathbf{W}_{R}) \quad \text{frou}$$

$$f_{R}(p_{*}, \mathbf{W}_{R}) = \begin{cases} \left(p_{*} - p_{R}\right) \left[\frac{A_{R}}{p_{*} + B_{R}}\right]^{\frac{1}{2}} & \text{an } p_{*} > p_{L} \text{ (prousting sigma)} \\ \frac{2a_{R}}{\left(\gamma - 1\right)} \left[\left(\frac{p_{*}}{p_{R}}\right)^{\frac{(\gamma - 1)}{2\gamma}} - 1\right] & \text{an } p_{*} < p_{L} \text{ (number of sigma)}, \end{cases}$$

$$(1.158)$$

όπου στις παραπάνω σχέσεις είναι

$$\begin{cases} A_L = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_L} , & B_L = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}p_L \\ A_R = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_R} , & B_R = \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)}p_R . \end{cases}$$

Απαλείφοντας το u_* από τις (1.157) και (1.158) προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση

$$f(p_*, \mathbf{W}_L, \mathbf{W}_R) \equiv f_L(p_*, \mathbf{W}_L) + f_R(p_*, \mathbf{W}_R) + \Delta u = 0, \ \Delta u \equiv u_R - u_L,$$
(1.159)

η ρίζα της οποίας είναι η τιμή του p στην star region.

Έχοντας υπολογίσει το p_* (ο τρόπος αναλύεται παραχάτω), στην συνέχεια το u_* μπορεί χαι υπολογίζεται από χάποια από τις πρώτες σχέσεις των (1.149), (1.152), (1.153), (1.156) ανάλογα βέβαια με τους τύπους των χυμάτων που

βρίσκονται στα χαρακτηριστικά πεδία 1, 3. Εναλλακτικά μπορεί να υπολογιστεί από μία μέση τιμή από την σχέση

$$u_* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}[f_R(p_* - f_L(p_*)]].$$
(1.160)

Αριθμητική επίλυση -Η μέθοδος Newton - Raphson

Η μέθοδος : Η σχέση (1.159) επιλύεται αριθμητικά για να βρεθεί το p_* . Δεδομένης της ιδιαίτερα απλής συμπεριφοράς της f(p), όπως επίσης και του οτι είναι διαθέσιμη η αναλυτική της έκφραση προς παραγώγηση, επιλέγεται η μέθοδος Newton-Raphson για την εύρεση της ρίζας της f(p) = 0. Η μέθοδος αυτή έχει ως εξής:

Έστω οτι υπάρχει μία αρχική προσεγγιστική τιμή p_0 για την λύση p_* . Από την στιγμή που η f είναι ομαλή (και επομένως παραγωγίσιμη), μπορεί να βρεθεί μία προσεγγιστική τιμή της f(p) στο γειτονικό σημείο $p_0 + \delta$ αξιοποιώντας το ανάπτυγμα του Taylor:

$$f(p_0 + \delta) = f(p_0) + \delta f'(p_0) + O(\delta^2).$$

Εάν το νέο σημείο $p_0 + \delta$ είναι λύση της f(p) = 0, τότε

$$f(p_0) + \delta f'(p_0) = 0,$$

και επομένως η νέα διορθωμένη τιμή $p_1 = p_0 + \delta$ θα είναι

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

Η σχέση αυτή διατυπώνεται στην αναδρομική της μορφή ως εξής

$$p_{(i+1)} = p_{(i)} - \frac{f(p_{(i)})}{f'(p_{(i)})}, \qquad (1.161)$$

και για να βρεθεί η λύση με την επιθυμητή ακρίβεια, η αναδρομική σχέση σταματάει να επαναλαμβάνεται όταν η σχετική μεταβολή της πίεσης

$$\frac{|p_{(i+1)} - p_{(i)}|}{\frac{1}{2}[p_{(i+1)} + p_{(i)}]}$$

γίνει μικρότερη από μία προκαθορισμένη ανοχή TOL.

Η αρχική τιμή p_0 : Για να μπορεί να εφαρμοστεί η επαναληπτική διαδικασία που μόλις περιγράφηκε, χρειάζεται μία αρχική προσεγγιστική τιμή p_0 για να ξεκινήσει. Δεδομένης της απλής συμπεριφοράς της f, μία πρόχειρη επιλογή p_0 δεν είναι και τόσο καταστροφική αφού το μόνο αποτέλεσμα που φέρει είναι μεγάλος αριθμός επαναλήψεων μέχρι να επιτευχθεί σύγκλιση. Μία δύσκολη περίπτωση που απαιτεί ειδική μεταχείριση είναι όταν η ρίζα της εξίσωσης βρίσκεται κοντά στο μηδέν, και το p_0 είναι πολύ μεγάλο· τότε η τιμή του p μετά την επόμενη ολοκλήρωση μπορεί να είναι μικρότερη του μηδενός.

Για το πρόβλημα που μελετάται χρησιμοποιούνται τέσσερις διαφορετικές προσεγγίσεις στο θέμα του υπολογισμού του p_0 :

 Η προσέγγιση των δύο κυμάτων αραίωσης (two rarefactions, χρησιμοποιείται ο δείκτης TR). Η τιμή του p₀ εδώ προκύπτει εάν στην (1.159) θεωρηθεί οτι και τα δύο μη-γραμμικά κύματα είναι κύματα αραίωσης και στη συνέχεια επιλυθεί ως προς p_{*}.

$$p_{TR} = \left[\frac{a_L + a_R - \frac{1}{2}(\gamma - 1)(u_R - u_L)}{\frac{a_L}{p_L^{(\frac{\gamma - 1}{2\gamma})}} + \frac{a_R}{p_R^{(\frac{\gamma - 1}{2\gamma})}}}\right]^{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}.$$
 (1.162)

Στην περίπτωση που η λύση περιέχει πράγματι δύο
 χύματα αραίωσης, η p_{TR} είναι η αχριβής λύση για τ
ο $p_{\ast}.$

 Εδώ, η τιμή που επιλέγεται για p₀ είναι η λύση p_{*} που θα έβρισχε κάποιος εάν αντιμετώπιζε το (1.140) σαν γραμμικό υπερβολικό σύστημα (βλ. παράγραφος 1.1.2). Το αποτέλεσμα βρίσκεται με την θεώρηση της λύσης σαν γραμμικό συνδυασμό των ιδιοδιανυσμάτων (1.98). Επειδή στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται η μορφή των βασικών θερμοδυναμικών μεταβλητών (primitive variables), για τον συμβολισμό χρησιμοποιείται ο δείκτης PV.

$$\begin{cases} p_{PV} = \frac{1}{2}(p_L + p_R) - \frac{1}{8}(u_R - u_L)(\rho_L + \rho_R)(a_L + a_R) \\ p_0 = \max(TOL, p_{PV}). \end{cases}$$
(1.163)

 Η προσέγγιση των δύο κρουστικών κυμάτων (two shocks, χρησιμοποιείται ο δείκτης TS). Εάν στην (1.159) θεωρηθεί οτι και τα δύο μη-γραμμικά κύματα είναι κρουστικά κύματα και τότε λυθεί ως προς p_{*}, το αποτέλεσμα θα είναι

$$\begin{cases} p_{TS} = \frac{g_L(\hat{p})p_L + g_R(\hat{p})p_R - \Delta u}{g_L(\hat{p}) + g_R(\hat{p})} \\ \text{όπου} \quad g_K(p) = \left(\frac{A_K}{p + B_K}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{xal} \quad \hat{p} = p_0 \text{ aπό την (1.163)}. \end{cases}$$

Τότε η προσεγγιστική τιμή που θα ξεκινάει την επαναληπτική διαδικασία θα είναι

$$p_0 = \max(TOL, p_{TS}).$$
 (1.164)

1.3. OI $E \Xi I \Sigma \Omega \Sigma E I \Sigma T O \Upsilon E U L E R$

 Η μέση τιμή των αρχικών συνθηκών. Αυτή, η πιο απλή περίπτωση όλων, αξιοποιεί τις αρχικές συνθήκες και θεωρεί

$$p_0 = \frac{1}{2}(p_L + p_R). \qquad (1.165)$$

Σημειώνεται οτι οι προσεγγιστικές λύσεις μπορεί λανθασμένα να προβλέψουν αρνητική τιμή για το p. Για αυτό το λόγο χρησιμοποιείται η ποσότητα TOL ώστε σε περίπτωση τέτοιου σφάλματος να επαναφέρει το p στα θετικά.

Η πλήρης λύση

Μέχρι στιγμής έχει αναλυθεί ο τρόπος υπολογισμού των p_* και u_* . Για να επιτευχθεί το πλήρες τις λύσης, θα πρέπει όπου και εάν υπάρχουν κρουστικά κύματα να υπολογιστεί η πυκνότητα πίσω από το κύμα και η ταχύτητα του κύματος, ενώ όπου και εάν υπάρχουν κύματα αραίωσης θα πρέπει να βρεθεί η πυκνότητα πίσω από το κύμα, οι χαρακτηριστικές ταχύτητες της κεφαλής και της ουράς, όπως επίσης και η πλήρης λύση στο εσωτερικό το κύματος.

Αρχικά δίνεται η ανάλυση για την περιοχή αριστερά της ασυνέχειας επαφής:

αριστερό κρουστικό κύμα : Όταν ισχύει $p_* > p_L$, τότε στο χαρακτηριστικό πεδίο $\mathbf{K}^{(1)}$ αντιστοιχεί κρουστικό κύμα. Η πυκνότητα ρ_{*L} σε αυτή την περίπτωση θα δίνεται από την σχέση (1.134) ως εξής:

$$\rho_{*L} = \rho_L \left[\frac{\left(\frac{p_*}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)}{\left(\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\right)\left(\frac{p_*}{p_L}\right) + 1} \right].$$
(1.166)

Επίσης, η ταχύτητα του κρουστικού κύματος θα δίνεται από την σχέση (1.135):

$$S_L = u_L - a_L \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right) \left(\frac{p_*}{p_L}\right) + \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma}\right)}.$$
 (1.167)

αριστερό κύμα αραίωσης : Όταν ισχύει $p_* \leq p_L$, τότε στο χαρακτηριστικό πεδίο $\mathbf{K}^{(1)}$ αντιστοιχεί κύμα αραίωσης. Η πυκνότητα ρ_{*L} θα υπολογίζεται από την σχέση (1.150) ως εξής:

$$\rho_{*L} = \rho_L \left(\frac{p_*}{p_L}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \,.$$

Επίσης, υπολογίζοντας το a_{*L} από την σχέση (1.151) μπορεί κανείς να υπολογίζει τις χαρακτηριστικές ταχύτητες της κεφαλής (Head - Left) και της ουράς (Tail - Left) από τις σχέσεις (1.114) ως εξής:

$$S_{HL} = u_L - a_L$$
, $S_{TL} = u_* - a_{*L}$. (1.168)

Αυτό που απομένει είναι η εύρεση της λύσης στο εσωτερικό του κύματος. Θεωρείται ένα σημείο (x,t) στο εσωτερικού του κύματος αραίωσης. Η κλήση της χαρακτηριστικής ευθείας που διέρχεται από το (0,0) και το σημείο (x,t) (λόγω της ιδιοτιμής που αντιστοιχεί στο χαρακτηριστικό πεδίο $\mathbf{K}^{(1)}$) θα είναι

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{x}{t} = u - a \,.$$

Επίσης, η εφαρμογή των γενιχευμένων αναλλοίωτων του Riemann από την σχέση (1.116) δίνουν

$$u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = u + \frac{2a}{\gamma - 1} \,.$$

Αξιοποίηση των δύο τελευταίων σχέσεων μαζί με την σχέση που δίνει την ταχύτητα του ήχου $a = \sqrt{\gamma p/\rho}$ και τον ισεντροπικό νόμο

$$p = C \cdot \rho^{\gamma} \to \frac{p}{p_L} = \frac{\rho^{\gamma}}{\rho_L^{\gamma}},$$

αποδειχνύεται⁹ οτι οδηγούν στις σχέσεις:

$$\mathbf{W}_{Lfan} = \begin{cases} \rho = \rho_L \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_L} (u_L - \frac{x}{t}) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u = \frac{2}{(\gamma+1)} \left[a_L + \frac{(\gamma-1)}{2} u_L + \frac{x}{t} \right] \\ p = p_L \left[\frac{2}{\gamma+1} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_L} (u_L - \frac{x}{t}) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$
(1.169)

Ακολουθεί η αντίστοιχη ανάλυση για την περιοχή δεξιά της ασυνέχειας επαφής:

δεξί κρουστικό κύμα : Όταν ισχύει $p_* > p_R$, τότε στο χαρακτηριστικό πεδίο $\mathbf{K}^{(3)}$ αντιστοιχεί κρουστικό κύμα. Η πυκνότητα ρ_{*R} θα δίνεται από την σχέση (1.128) ως εξής:

$$\rho_{*R} = \rho_R \left[\frac{\left(\frac{p_*}{p_R}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)}{\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{p_*}{p_R}\right) + 1} \right].$$
(1.170)

Παράλληλα, η ταχύτητα του κρουστικού κύματος θα δίνεται από την σχέση (1.132):

$$S_R = u_R + a_R \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{2\gamma}\right) \left(\frac{p_*}{p_R}\right) + \left(\frac{\gamma-1}{2\gamma}\right)}.$$
 (1.171)

⁹αποδειξη 7 παράρτημα 1

δεξί κύμα αραίωσης : Όταν ισχύει $p_* \leq p_R$, τότε στο χαρακτηριστικό πεδίο $\mathbf{K}^{(3)}$ αντιστοιχεί κύμα αραίωσης. Η πυκνότητα ρ_{*R} θα υπολογίζεται από την σχέση (1.154) :

$$\rho_{*R} = \rho_R \left(\frac{p_*}{p_R}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζοντας το a_{*R} από την σχέση (1.155), υπολογίζει κανείς τις χαρακτηριστικές ταχύτητες της κεφαλής και της ουράς με βάση την σχέση (1.115) ως εξής:

$$S_{HR} = u_R + a_R , \quad S_{TR} = u_* + a_{*R} .$$
 (1.172)

Η λύση στο εσωτερικό του κύματος δίνεται με τρόπο ανάλογο της περίπτωσης του αριστερού κύματος αραίωσης. Σημειώνεται οτι τώρα τα γενικευμένα αναλλοίωτα του Riemann αφορούν το $\mathbf{K}^{(3)}$ χαρακτηριστικό πεδίο και δίνονται από την σχέση (1.117). Αυτό δικαιολογεί κάποιες αλλαγές στα πρόσημα σε σχέση με την περίπτωση του αριστερού κύματος αραίωσης.

$$\mathbf{W}_{Rfan} = \begin{cases} \rho = \rho_R \left[\frac{2}{\gamma+1} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_R} (u_R - \frac{x}{t}) \right]^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u = \frac{2}{(\gamma+1)} \left[-a_R + \frac{(\gamma-1)}{2} u_R + \frac{x}{t} \right] \\ p = p_R \left[\frac{2}{\gamma+1} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_R} (u_R - \frac{x}{t}) \right]^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \end{cases}$$
(1.173)

Δειγματοληψία

Πλέον, υπάρχει η δυνατότητα πλήρους περιγραφής της λύσης για οποιοδήποτε από τους τέσσερις χυματιχούς συνδυασμούς του σχήματος 1.11. Σε ένα πρόγραμμα που υλοποιεί αυτή την λύση, σαρώνεται ο άξονας x (ένα πεπερασμένο τμήμα του βέβαια) για αυξανόμενες τιμές του t, ώστε σε χάθε σημείο να αντιστοιχίζεται μία τριάδα τιμών $\mathbf{W} = (\rho, u, p)$. Για να γίνει αυτό όμως, μεσολαβεί η διαδιχασία της δεηματοληψίας που συγχρίνει την ταχύτητα (x/t)της χαραχτηριστιχής ευθείας, που ανήχει το σημείο, με τις ταχύτητες των χρουστιχών χυμάτων χαι των χυμάτων αραίωσης, όπου υπάρχουν, χαι έτσι εντοπίζει την σχετιχή θέση του σημείου μέσα στην τριάδα των χυμάτων της λύσης. Στην συνέχεια, ανάλογα με την θέση του σημείου αντιστοιχίζεται σε αυτό μία λύση σύμφωνα με τα παραχάτω:

Για $S=x/t\leq u_{*}$ (αριστερά της ασυνέχειας επαφής)

- εάν $p_* > p_L$ (στο χαραχτηριστικό πεδίο $\mathbf{K}^{(1)}$ υπάρχει κρουστικό κύμα)

$$\mathbf{W}(x,t) = \begin{cases} \mathbf{W}_{*L}^{sho} & \text{ean} & S_L \leq \frac{x}{t} \ (\leq u_*) \\ \mathbf{W}_L & \text{ean} & \frac{x}{t} \leq S_L \,. \end{cases}$$

εάν $p_* \leq p_L$ (το κύμα αριστερά είναι κύμα αραίωσης)

$$\mathbf{W}(x,t) = \begin{cases} \mathbf{W}_{*L}^{fan} & \text{ean} & S_{TL} \leq \frac{x}{t} \ (\leq u_*) \\ \mathbf{W}_{Lfan} \ (\text{ano} \ \text{tyn} \ (1.169)) & \text{ean} & S_{HL} \leq \frac{x}{t} \leq S_{TL} \\ \mathbf{W}_L & \text{ean} & \frac{x}{t} \leq S_{HL} \ . \end{cases}$$

 Γ ια $S=x/t\geq u_*$ (δεξιά της ασυνέχειας επαφής)

εάν $p_* > p_R$ (στο χαρακτηριστικό πεδίο ${\bf K}^{(3)}$ υπάρχει κρουστικό κύμα)

$$\mathbf{W}(x,t) = \begin{cases} \mathbf{W}_{*R}^{sho} & \text{ean} & (u_* \leq) \frac{x}{t} \leq S_R \\ \mathbf{W}_R & \text{ean} & \frac{x}{t} \geq S_R \, . \end{cases}$$

- εαν $p_* \leq p_R$ (το κύμα δεξιά είναι κύμα αραίωσης)

$$\mathbf{W}(x,t) = \begin{cases} \mathbf{W}_{*R}^{fan} & \text{ean} & (u_* \leq) \frac{x}{t} \leq S_{TR} \\ \mathbf{W}_{Rfan} & (\text{ano tyn} & (1.173)) & \text{ean} & S_{TR} \leq \frac{x}{t} \leq S_{HR} \\ \mathbf{W}_R & \text{ean} & \frac{x}{t} \geq S_{HR} \\ \end{cases}$$

Το πρόγραμμα σε γλώσσα C++ που υλοποιεί την αναλυτική λύση για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες παρατήθεται στο Παράρτημα Γ΄.

60

Κεφάλαιο 2

Interpolated Differential Operator Scheme

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφεται η αριθμητική μέθοδος IDO (Interpolated Differential Operator scheme - μέθοδος παρεμβαλλόμενου διαφορικού τελεστή). Οι περισσότερες μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων αξιοποιούν την διατηρητική μορφή τους. Η μέθοδος IDO, λύνοντας τις εξισώσεις στην μορφοποίηση βασικών μεταβλητών, χωρίς κανέναν μετασχηματισμό των ανεξάρτητων μεταβλητών, μπορεί και αξιοποιείται σε διάφορους τύπους διαφορικών εξισώσεων, είτε αυτοί περιέχουν μη-ομογενείς όρους, είτε όχι.

Στα παραχάτω παρουσιάζεται η μέθοδος, όπως επίσης και τα αριθμητικά αποτελέσματα που δίνει σε ενδεικτικά προβλήματα ασυνεχειών, όπου λύνει την εξίσωση του Burgers και τις εξισώσεις του Euler.

2.2 Η μέθοδος

Για να λυθεί μία υπερβολική Δ.Ε. με την μέθοδο IDO, το προφίλ της λύσης στον χώρο προσεγγίζεται με ένα συμπτωτικό πολυώνυμο το οποίο θα πρέπει να μπορεί να περιγράφει χωρικές παραγώγους ανώτερης τάξης με επαρκή ακρίβεια. Αυτές οι ανώτερης τάξης παράγωγοι σε συνδυασμό με τις Δ.Ε. που διέπουν το πρόβλημα χρησιμοποιούνται για την αντικατάσταση όλων των χρονικών παραγώγων που χρειάζονται, με χωρικές. Τέλος, η εξέλιξη στον χρόνο πραγματοποιείται κάνοντας χρήση ενός απλού αναπτύγματος Taylor.

Όπως είναι προφανές, η τάξη της χωριχής παραγώγου που υπολογίζεται από το συμπτωτικό πολυώνυμο δεν μπορεί να ξεπερνάει την τάξη του ίδιου του πολυωνύμου. Στις εφαρμογές της μεθόδου που ακολουθούν, το συμπτωτικό πολυώνυμο που χρησιμοποιείται είναι το πολυώνυμο Hermite, αλλά υπάρχουν και άλλες επιλογές αρχεί να η τάξη του πολυωνύμου να δίνει την δυνατότητα υπολογισμού των χωρικών παραγώγων που απαιτούνται. Για παράδειγμα, η *rational function*, στην βιβλιογραφία ([2], [3]) χρησιμοποιείται για την αριθμητική επίλυση προβλημάτων παρουσία έντονων κρουστικών κυμάτων.

Μία βελτίωση της μεθόδου είναι να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος Runge Kutta [4] για την χρονική εξέλιξη αντί του αναπτύγματος Taylor, ώστε να υπάρχει η δυνατότητα βελτίωσης της ακρίβειας στην χρονική εξέλιξη, χωρίς να υπάρχει η αντίστοιχη απαίτηση για ύπαρξη παραγώγων ανώτερης τάξης και χωρίς να αυξάνεται ανάλογα το υπολογιστικό κόστος.

2.3 Υλοποίηση

2.3.1 Συμπτωτικό πολυώνυμο

Όπως αναφέρθηκε και πιο πάνω, το συμπτωτικό πολυώνυμο που επιλέχθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου στα παρακάτω παραδείγματα είναι το πολυώνυμο Hermite. Αυτό υπολογίζεται από την απαίτηση, πέρα από τις τιμές να συμπίπτουν και οι παράγωγοι στα σημεία επαφής¹. Επομένως οι παράμετροι (έστω στην μία διάσταση – την x) f, f_x αντιμετωπίζονται σαν ανεξάρτητες μεταβλητές και θεωρείται οτι δίνονται –στις αρχικές συνθήκες– σε όλα τα σημεία του πλέγματος. Η επιλογή του πολυωνύμου Hermite προσφέρει επαρκή ακρίβεια, απαιτεί λιγότερη υπολογιστική ισχύ, και αξιοποιεί την πληροφορία που υπάρχει μόνο στα γειτονικά σημεία του πλέγματος.

Για την υλοποίηση της μεθόδου χρησιμοποιούνται δύο τύποι παρεμβολής που χρησιμοποιούν το πολυώνυμο Hermite. Η πρώτη είναι η **upwind** παρεμβολή, η οποία εφαρμόζεται στους **όρους διάδοσης** της εξίσωσης. Έτσι, για παράδειγμα, στην διαφορική εξίσωση $f_t + uf_x = 0$ η ταχύτητα διάδοσης u θα καθορίζει ποια σημεία του πλέγματος θα χρησιμοποιηθούν για να γίνει upwind παρεμβολή στον όρο διάδοσης uf_x . Εάν η u είναι θετική, για την παρεμβολή θα χρησιμοποιηθούν τα σημεία i - 1 και i. Το συμπτωτικό πολυώνυμο θα είναι το

$$F(x) = a_u x^3 + b_u x^2 + f_{x,i} x + f_i, \qquad (2.1\alpha')$$

και οι συντελεστές θα καθορίζονται από τις συνθήκες $F(-\Delta x)=f_{i-1}$, $F_x(-\Delta x)=f_{x,i-1},$ οπότε θα είναι

$$\begin{cases} a_u = \frac{(f_{x,i} + f_{x,i-1})}{\Delta x^2} - 2\frac{(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^3}, \\ b_u = \frac{(2f_{x,i} + f_{x,i-1})}{\Delta x} - 3\frac{(f_i - f_{i-1})}{\Delta x^2}. \end{cases}$$
(2.1β')

Εάν η u είναι αρνητική, τότε για την παρεμβολή θα χρησιμοποιηθούν τα σημεία i και i + 1, και οι συντελεστές του πολυωνύμου (2.1α') θα καθορίζονται από

 $^{^1\}Sigma$ ημεία στα οποία το συμπτωτικό πολυώνυμο καλείται να παίρνει τις ίδιες τιμές με το δοθέν σύνολο τιμών που προσεγγίζεται

2.3. $\Upsilon \Lambda O \Pi O \Pi H \Sigma H$

τις σχέσεις $F(\Delta x) = f_{i+1}$ και $F_x(\Delta x) = f_{x,i+1}$ ως εξής:

$$\begin{cases} a_u = \frac{(f_{x,i} + f_{x,i+1})}{\Delta x^2} + 2\frac{(f_i - f_{i+1})}{\Delta x^3}, \\ b_u = -\frac{(2f_{x,i} + f_{x,i+1})}{\Delta x} - 3\frac{(f_i - f_{i+1})}{\Delta x^2}. \end{cases}$$
(2.1 γ)

Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης και ανώτερες λαμβάνονται από την παραγώγηση του συμπτωτικού πολυωνύμου ως $f_{xx} = F_{xx}(0) = 2b_u$ και $f_{3x} = F_{3x}(0) = 6a_u$ στο σημείο i και οι παράγωγοι ανώτερης της τρίτης τάξης λαμβάνονται ίσες με το μηδέν.

Εν γένει, κατά την αριθμητική επίλυση, η πληροφορία διαδίδεται προς όλες τις κατευθύνσεις, και επομένως στους υπόλοιπους όρους (τους άλλους από αυτούς της διάδοσης) η παρεμβολή θα είναι κεντρική[.] θα πρέπει δηλαδή, να καλύπτει την περιοχή του πλέγματος από το i - 1 ως το i + 1 σημείο. Το πολυώνυμο του Hermite σε αυτή την περίπτωση καθορίζεται από τις συνθήκες $F(-\Delta x) = f_{i-1}, F_x(-\Delta x) = f_{x,i-1}, F(\Delta x) = f_{i+1}$ και $F_x(\Delta x) = f_{x,i+1}$, και έχει την μορφή:

$$F(x) = a_c x^5 + b_c x^4 + c_c x^3 + d_c x^2 + f_{x,i} x + f_i, \qquad (2.2\alpha')$$

και οι συντελεστές του καθορίζονται από τις σχέσεις

$$a_c = -\frac{3}{4\Delta x^5}(f_{i+1} - f_{i-1}) + \frac{1}{4\Delta x^4}(f_{x,i+1} + 4f_{x,i} + f_{x,i-1})$$
(2.2β')

$$b_c = -\frac{1}{2\Delta x^4} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) + \frac{1}{4\Delta x^3} (f_{x,i+1} - f_{x,i-1})$$
(2.2 γ)

$$c_c = \frac{5}{4\Delta x^3} (f_{i+1} - f_{i-1}) - \frac{1}{4\Delta x^2} (f_{x,i+1} + 8f_{x,i} + f_{x,i-1})$$
(2.26)

$$d_c = \frac{1}{\Delta x^2} (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) - \frac{1}{4\Delta x} (f_{x,i+1} - f_{x,i-1}).$$
 (2.2ε')

Οι παράγωγοι δεύτερης τάξης και ανώτερες λαμβάνονται όπως και πριν, από την παραγώγηση του συμπτωτικού πολυωνύμου ως προς x. Στο σημείο i οι τιμές τους θα είναι $f_{xx} = F_{xx}(0) = 2d_c$, $f_{3x} = F_{3x}(0) - 6c_c$, $f_{4x} = F_{4x}(0) = 24b_c$ και $f_{5x} = F_{5x}(0) = 120a_c$. Οι παράγωγοι ανώτερης τάξης θα είναι ίσες με το μηδέν.

2.3.2 Χρονική εξέλιξη

Καθότι για τον υπολογισμό των πολυωνύμων Hermite πρέπει μαζί με την f να αντιμετωπίζεται και η f_x σαν ανεξάρτητη μεταβλητή, αυτό σημαίνει οτι και οι

δύο ποσότητες πρέπει να εξελίσσονται χρονικά με τα αναπτύγματα Taylor.

$$f^{n+1} = f^n + f^n_t \Delta t + f^n_{tt} \frac{\Delta t^2}{2} + f^n_{ttt} \frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4)$$
(2.3)

$$f_x^{n+1} = f_x^n + f_{tx}^n \Delta t + f_{ttx}^n \frac{\Delta t^2}{2} + f_{tttx}^n \frac{\Delta t^3}{6} + O(\Delta t^4).$$
(2.4)

Όπου οι εχθέτες n + 1 και n υποδηλώνουν οτι οι τιμές αντιστοιχούν στις χρονικές στιγμές $t+\Delta t$ και t αντίστοιχα. Οι χρονικές παράγωγοι στα δεξιά μέλη των (2.3) και (2.4) μετατρέπονται σε χωρικές παραγώγους με την βοήθεια της Δ .Ε. που επιλύεται, οι οποίες με την σειρά τους υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τα πολυώνυμα Hermite όπως περιγράφηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

2.4 Προβλήματα

2.4.1 Η εξίσωση του Burgers

Το πρώτο πρόβλημα που επιλέγεται να αντιμετωπιστεί είναι η διάδοση κρουστικού κύματος σύμφωνα με την εξίσωση του Burgers $u_t + uu_x - ku_{xx} = 0$, όπου k μία σταθερά διάχυσης. Ο όρος της διάχυσης προστίθεται με μία μικρή σταθερά (στο συγκεκριμένο παράδειγμα k = 0.3) προκειμένου να μπορεί η μέθοδος, καθότι είναι μη-διατηρητικής μορφής, να περιγράψει το κρουστικό κύμα.

Για αρχική συνθήκη του προβλήματος θεωρείται οτι στο μονοδιάστατο πλέγμα των 200 σημείων, για x < 50 είναι $u_a = 1$, ενώ για $x \ge 50$ είναι $u_b = -0.5$.

Λύση

Η περιγραφή της υπολογιστικής αντιμετώπισης του προβλήματος γίνεται αντίστροφα. Η αναπαραγωγή του προφίλ της λύσης την επόμενη χρονική στιγμή, σύμφωνα με την παραπάνω ανάλυση της μεθόδου IDO, θα γίνεται μέσω των σχέσεων:

$$u^{n+1} = u^n + u^n_t \Delta t + u^n_{tt} \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3)$$
(2.5)

$$u_x^{n+1} = u_x^n + u_{tx}^n \Delta t + u_{ttx}^n \frac{\Delta t^2}{2} + O(\Delta t^3), \qquad (2.6)$$

όπου οι άγνωστες χρονικές παράγωγοι στα δεξιά μέλη ανάγονται σε χωρικές παραγώγους κάνοντας χρήση της εξίσωσης του Burgers:

$$u_t = -uu_x + k\tilde{u}_{xx} \tag{2.7}$$

$$u_{tx} = -uu_{xx} - u_x^2 + k\tilde{u}_{3x} \,. \tag{2.8}$$

Το σύμβολο ~ υποδηλώνει οτι ο συγχεχριμένος όρος δεν είναι όρος διάδοσης, και επομένως θα χρησιμοποιηθεί χεντριχή παρεμβολή, δηλαδή πολυώνυμο Hermite 5^{ου} βαθμού. Παραγωγίζοντας την 2.7 ως προς το χρόνο και στην συνέχεια

2.4. ΠΡΟΒΛΉΜΑΤΑ

ως προς x,

$$u_{tt} = -u_t u_x - u u_{tx} + k u_{txx} \tag{2.9}$$

$$u_{ttx} = -u_{tx}u_x - u_tu_{xx} - u_xu_{tx} - uu_{txx} + ku_{t3x}, \qquad (2.10)$$

και με διαδοχικές παραγωγίσεις της (2.8) ως προς x προκύπτει:

$$u_{txx} = -uu_{3x} - 3u_x u_{xx} + k\tilde{u}_{4x} \tag{2.11}$$

$$u_{t3x} = -uu_{4x} - 4u_x u_{3x} - 3u_{xx}^2 + k\tilde{u}_{5x}.$$
(2.12)

Οπότε πλέον, όλες οι άγνωστες παράμετροι στα δεξιά μέλη των (2.5) και (2.6) μπορούν και αντικαθίστανται από παραγώγους ως προς x, οι οποίες με την σειρά τους μπορούν και υπολογίζονται μέσω των πολυωνύμων Hermite, όπως υποδεικνύεται στην παράγραφο 2.3.1.

Close Hdcpy About Anim Replot Deriv			Deriv	X Graph
u				•
1.0000				pace/ido/burgers/data.txt (0)
1.0000				pace/ido/burgers/data.txt (1)
0.9000				
0.8000				
0.7000				
0.6000				
0.5000				
0.4000				
0.3000				
0.2000				
0.1000				
-0.0000				
-0.1000				
-0.2000				
-0.3000				
-0.4000				
-0.5000				X
0.0	000	100.0000	200	00.0000

Σχήμα 2.1: Το προφίλ της αριθμητικής λύσης της εξίσωσης του Burgers τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 200.

Για το υπολογιστικό κομμάτι της λύσης η απόσταση μεταξύ των σημείων του πλέγματος θεωρήθηκε $\Delta x = 1$, όπως επίσης μεταξύ των χρονικών βημάτων θεωρήθηκε $\Delta t = 0.05$. Το σχήμα 2.1 απεικονίζει το προφίλ της λύσης τις χρονικές στιγμές t = 0 και t = 200. Το κρουστικό κύμα διατηρεί την μορφή του, και έχει μετατοπιστεί από την θέση x = 50 στην x = 100. Η ταχύτητα του κρουστικού κύματος, 0.25, είναι σε συμφωνία με την ασθενή λύση της διαφορικής εξίσωσης, σύμφωνα με την οποία $ssp = (u_a + u_b)/2$.

2.4.2 Οι εξισώσεις του Euler

Στην συνέχεια αναπτύσσεται ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζονται οι μονοδιάστατες εξισώσεις του Euler με την μέθοδο IDO. Τα προβλήματα στα οποία δοχιμάζεται ο αλγόριθμος είναι 4 (σελ. 129 [1]), με διαφορετιχές δυσχολίες το χαθένα, ώστε να υπάρχει δυνατότητα να βγούν συμπεράσματα για την απόδοση της μεθόδου συνολιχά.

Προχειμένου να μπορεί η μέθοδος να απειχονίζει σωστά τα χρουστιχά χύματα, εισάγεται ένας τεχνητός παράγοντας ιξώδους q (όπως και στην εργασία των A. Nishiguchi, T. Yabe [5]), ο οποίος προστίθεται στην πίεση, με αποτέλεσμα οι υπό μελέτη εξισώσεις να γίνονται ως εξής:

$$\rho_t = -(\rho u)_x \tag{2.13a'}$$

$$u_t = -uu_x - \frac{(p_x + q_x)}{\rho} \tag{2.13\beta'}$$

$$e_t = -ue_x - \frac{(p+q)}{\rho}u_x. \qquad (2.13\gamma')$$

Το q αποτελείται από δύο όρους

$$q = q_A + q_B \,, \tag{2.14}$$

όπου

$$q_A = -a\rho C_s u_x \Delta x \tag{2.15a'}$$

$$q_B = b\rho u_x^2 \Delta x^2 \,. \tag{2.15\beta'}$$

Ο πρώτης τάξης όρος q_A (όπου C_s η ταχύτητα του ήχου) χρησιμοποιείται για την καταπολέμηση των αριθμητικών ταλαντώσεων, όπως επίσης και του 'overshooting' φαινομένου, κρατώντας παράλληλα το εύρος του μετώπου του κρουστιχού χύματος στο ελάχιστο. Εάν όμως χρησιμοποιηθεί αποχλειστιχά αυτός ο όρος σε ένα έντονο κρουστικό κύμα, επειδή ακριβώς είναι πρώτης τάξης, η τιμή του θα παραμένει μιχρή στο μέτωπο του χύματος, με αποτέλεσμα να χρειάζονται μεγάλες μεταβολές στην παράμετρο a ώστε να προσαρμόζεται στην ένταση του κρουστικού κύματος για καλύτερους υπολογισμούς. Στην αντίθετη περίπτωση που χρησιμοποιηθεί μόνον ο δεύτερης τάξης -τύπου von Neumann [6]όρος q_B της εξίσωσης (2.15β'), το εύρος του μετώπου του κρουστικού κύματος γίνεται πολύ μεγάλο με αποτέλεσμα να αλλοιώνεται η ακρίβεια με την οποία η μέθοδος το απειχονίζει. Με βάση τις πληροφορίες αυτές για τους δύο όρους του τεχνητού ιξώδους, οι τιμές των a και b πρέπει να επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να εξυπηρετούν τις ανάγκες της κάθε περίπτωσης. Τα προβλήματα που περιγράφονται παραχάτω, λόγω του ότι περιέχουν είτε πολύ ήπια χρουστικά κύματα, είτε πολύ έντονα, βρέθηκε οτι, στις συγκεκριμένες περιπτώσεις, η καλύτερη επιλογή ήταν η αποκλιστική χρήση του πρώτου ή του δεύτερου όρου αντίστοιχα. Επίσης, πρέπει να αναφερθεί οτι ο παράγοντας του τεχνητού ιξώδους προστίθεται μόνον σε περιοχές συμπίεσης (σε αντίθετη περίπτωση θα είναι q = 0), και το κριτήριο για να θεωρείται οτι ένα σημείο του πλέγματος ανήχει σε περιοχή συμπίεσης προσαρμόζεται χαι αυτό στο εχάστοτε πρόβλημα.

Σύμφωνα με όσα έχουν ειπωθεί παραπάνω, η εξέλιξη στον χρόνο θα πραγματοποιείται για τα ρ , u, e αλλά και τα ρ_x , u_x , e_x με αναπτύγματα Taylor και (όπως και στην περίπτωση της εξίσωσης του Brugers λαμβάνονται όροι μέχρι και δεύτερης τάξης):

$$\rho^{n+1} = \rho^n + \rho_t^n \Delta t + \frac{1}{2} \rho_{tt}^n \Delta t^2 \qquad (2.16\alpha')$$

$$\rho_x^{n+1} = \rho_x^n + \rho_{tx}^n \Delta t + \frac{1}{2} \rho_{ttx}^n \Delta t^2$$
(2.16β')

$$u^{n+1} = u^n + u^n_t \Delta t + \frac{1}{2} u^n_{tt} \Delta t^2$$
 (2.16 γ)

$$u_x^{n+1} = u_x^n + u_{tx}^n \Delta t + \frac{1}{2} u_{ttx}^n \Delta t^2$$
 (2.166')

$$e^{n+1} = e^n + e^n_t \Delta t + \frac{1}{2} e^n_{tt} \Delta t^2 \qquad (2.16\varepsilon')$$

$$e_x^{n+1} = e_x^n + e_{tx}^n \Delta t + \frac{1}{2} e_{ttx}^n \Delta t^2 .$$
 (2.16 τ)

Στα δεξιά μέλη των εξισώσεων αυτών φαίνονται οι όροι που πρέπει να υπολογίζονται στην πορεία της υπολογιστικής επίλυσης, η αναλυτική μορφή των οποίων παρατίθεται στο παράρτημα Β΄.

Πρόβλημα 1°

Το πρώτο πρόβλημα που μελετάται για την περίπτωση των εξισώσεων του Euler είναι το πρόβλημα του Sod. Στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος αυτού, για x < 1 είναι $\rho = 1$, p = 1, ενώ για $x \ge 1$ είναι $\rho = 0.125$, p = 0.1. Σε όλο το πλέγμα είναι u = 0, ενώ επίσης θεωρείται οτι ο λόγος των θερμοχωρητικοτήτων $\gamma = 1.4$. Για τις ανάγκες της υπολογιστικής λύσης έχει θεωρηθεί $\Delta x = 0.01$ η απόσταση μεταξύ των σημείων του πλέγματος, ενώ τα διαδοχικά χρονικά βήματα απέχουν $\Delta t = 0.001$. Επίσης, για το τεχνητό ιξώδες, καθότι το πρόβλημα θεωρείται πολύ ήπιο, έχει θεωρηθεί a = 0.75 και b = 0. Το κριτήριο για να θεωρεί ο κώδικας οτι το σημείο i που επιλύει βρίσκεται σε περιοχή συμπίεσης είναι να ισχύει μία από τρεις συνθήκες: $u_{x,i-1} < 0$ ή $u_{x,i} < 0$ ή $u_{x,i+1} < 0$.



Σχήμα 2.2: Το προφίλ του ρ στο πρόβλημα του Sod για την χρονική στιγμή t = 0.25 όπως δίνεται από την μέθοδο IDO (κόκκινο), και από τον exact solver (πράσινο).

Στην εικόνα 2.2 φαίνεται το προφίλ της πυκνότητας ρ στην ακριβή λύση (πράσινο) την χρονική στιγμή t = 0.25, όπως επίσης και στη λύση όπως δίνεται από την μέθοδο IDO (κόκκινο) την ίδια χρονική στιγμή. Στην ασυνέχεια επαφής εμφανίζονται δύο μικρές αποκλίσεις από την αναλυτική λύση με ένα μικρό overshoot και undershoot, χωρίς να αλλοιώνεται το προφίλ της λύσης συνολικά. Το πόσο απόλυτο απεικονίζεται το μέτωπο του κρουστικού κύματος εξαρτάται από την τιμή του a, και για a < 0.3 η μέθοδος γίνεται ασταθής.

Πρόβλημα 2°

Το δεύτερο πρόβλημα που μελετάται είναι το λεγόμενο '123 problem', και η λύση του αποτελείται από δύο έντονα κύματα αραίωσης και μία τετριμμένη στατική ασυνέχεια επαφής. Το πρόβλημα αυτό είναι χρήσιμο στην αξιολόγηση της απόδοσης αριθμητικών μεθόδων για ροές χαμηλής πίεσης. Οι αρχικές συνθήκες για x < 1 είναι $\rho = 1$, u = -2 και p = 0.4, ενώ για $x \ge 1$ είναι $\rho = 1$, u = -2 και p = 0.4, ενώ για $x \ge 1$ είναι $\rho = 1$, u = 2 και p = 0.4, ενώ για $x \ge 1$ είναι $\rho = 1$, u = 2 και p = 0.4. Τα Δx , Δt , οι σταθερές του τεχνητού ιξώδους που χρησιμοποιούνται για την αριθμητική επίλυση, όπως επίσης και η συνθήκη για τον ορισμό της περιοχής συμπίεσης, είναι τα ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του 1^{ou} προβλήματος.



Σχήμα 2.3: Το προφίλ του ρ στη λύσης του 123 problem όπως αναπαράγεται από την μέθοδο IDO(κόκκινο) σε σύγκριση με την αναλυτική λύση (πράσινο). Η χρονική στιγμή που απεικονίζεται είναι t = 0.15.

Στην ειχόνα 2.3 απειχονίζεται το προφίλ της πυχνότητας της λύσης του προβλήματος την χρονιχή στιγμή t = 0.15. Σε πράσινο χρώμα φαίνεται η αναλυτιχή λύση, ενώ σε χόχχινο η λύση με την μέθοδο IDO.

Πρόβλημα 3°

Το τρίτο πρόβλημα στο οποίο δοχιμάζεται η μέθοδος IDO είναι ένα πολύ επίπονο πρόβλημα, η λύση του οποίου αποτελείται από ένα αριστερό χύμα αραίωσης, μία ασυνέχεια επαφής και ένα δεξί κρουστικό κύμα. Πρόκειται για το αριστερό μισό του γνωστού προβλήματος των Woodward και Colella two interacting blast waves [7]. Οι αρχικές συνθήκες έχουν ως εξής: για x < 1 είναι $\rho = 1, p = 1000$, για $x \ge 1$ είναι $\rho = 1, p = 0.01$, ενώ σε όλο το υπολογιστικό πλέγμα είναι u = 0. Λόγω της παρουσίας του πολύ έντονου κρουστικού χύματος σε αυτό το πρόβλημα το Δt ελαττώνεται και γίνεται $\Delta t = 10^{-5}$ για να διατηρηθεί η σταθερότητα της μεθόδου (το Δx παραμένει 0.01) και οι σταθερές του τεχνητού ιξώδους επιλέγονται να είναι a = 0, b = 1.0. Επίσης, το κριτήριο για να θεωρεί ο αλγόριθμος οτι το σημείο *i* που επιλύει βρίσκεται σε περιοχή συμπίεσης, είναι $u_{x,i} < 0$.



Σχήμα 2.4: Το προφίλ της λύσης (πυκνότητα) του αριστερού μισού του προβλήματος των Woodward και Colella τις χρονικές στιγμές t = 0.012 και t = 0.024.

Στην εικόνα 2.4 φαίνεται το προφίλ της πυκνότητας ρ όπως αυτό δίνεται από την μέθοδο IDO, μαζί με την αναλυτική λύση για τις χρονικές στιγμές t = 0.012 και t = 0.024. Είναι εμφανές οτι σε αυτό το πρόβλημα, η αριθμητική μέθοδος αδυνατεί να απεικονίσει με ακρίβεια την μέγιστη τιμή της πυκνότητας. Παράλληλα, παρατηρούνται δύο μικρά undershoot στην oupá του κύματος αραίωσης, και στην μετάβαση από την star-left region προς την ασυνέχεια επαφής. Εκτός αυτού όμως, τα χαρακτηριστικά του προφίλ αναπαράγονται σωστά και, όπως επίσης φαίνεται με την ταυτόχρονη αυτή προβολή των δύο χρονικών στιγμών, η ταχύτητα του κρουστικού κύματος είναι ίδια με αυτή της αναλυτικής λύσης.

Πρόβλημα 4°

Το επόμενο πρόβλημα που μελετάται είναι το δεξί μισό του προβλήματος των Woodward και Colella. Η λύση σε αυτή την περίπτωση αποτελείται από ένα αριστερό κρουστικό κύμα, μία ασυνέχεια επαφής και ένα δεξί κύμα αραίωσης, όπως φαίνεται στην εικόνα 2.5. Στις αρχικές συνθήκες αυτού του προβλήματος, για x < 1 είναι $\rho = 1$, p = 0.01, ενώ για $x \ge 1$ είναι $\rho = 1$, p = 100. Σε όλο το πλέγμα είναι u = 0, και όπως σε όλα αυτά τα προβλήματα θεωρείται $\gamma = 1.4$. Τα Δx και Δt , όπως επίσης και οι σταθερές a και b του τεχνητού ιξώδους και το κριτήριο της περιοχής συμπίεσης παραμένουν ίδια με αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο πρόβλημα 3.



Σχήμα 2.5: Το προφίλ της λύσης (ρ) όπως αναπαράγεται από τον αλγόριθμο που υλοποιεί την αναλυτική λύση, και την μέθοδο IDO τις χρονικές στιγμές t = 0.035 και t = 0.07.

Το προφίλ που παρατίθεται στην εικόνα 2.5 είναι αυτό της λύσης για t = 0.035 και t = 0.07. Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, η λύση όπως δίνεται από την μέθοδο IDO παρατίθεται μαζί με την αναλυτική λύση για να υπάρχει η δυνατότητα σύγκρισης.

2.4.3 Δύο αλληλεπιδρώντα εκρηκτικά κύματα

Σαν ένα περισσότερο πολύπλοκο παράδειγμα συμπιεστής ροής, εξετάζεται το πρόβλημα των δύο αλληλεπιδρώντων εκρηκτικών κυμάτων [7]. Στις αρχικές συνθήκες του προβλήματος η πυκνότητα ρ είναι παντού 1, ενώ η πίεση p είναι 1000 στο πρώτο δέκατο του πλέγματος από αριστερά, 100 στο δεξί δέκατο του πλέγματος, και στον ενδιάμεσο χώρο είναι παντού 0.01. Όπως και πρίν, σε όλο το πλέγμα είναι u = 0, και $\gamma = 1.4$.

Υπολογιστική υλοποίηση

Οι εξισώσεις που περιγράφουν το πρόβλημα είναι οι μονοδιάστατες εξισώσεις του Euler, οι οποίες αναλύονται με τον ίδιο τρόπο με πριν, και ο αλγόριθμος που τις επιλύει είναι ο ίδιος, με μία προσθήκη που αναλύεται παρακάτων. Οι παράμετροι του προβλήματος που αλλάζουν είναι ο υπολογιστικός χώρος που τώρα είναι μονάδα, και καλύπτεται με ένα πλέγμα 800 ισοκατανεμημένων σημείων. Επίσης, έχει θεωρηθεί οτι τα διαδοχικά χρονικά βήματα απέχουν μεταξύ τους $\Delta t = 10^{-6}$. Στις σταθερές του τεχνητού ιξώδους έχουν δοθεί οι τιμές a = 0 και b = 1.5, ενώ το κριτήριο για να θεωρείται το i σημείο του πλέγματος σε περιοχή συμπίεσης είναι $u_{x,i} < 0$.



Σχήμα 2.6: Τα προφίλ των ρ και u στη λύση του προβλήματος "two interacting blast waves" την χρονική στιγμή t = 0.016.

Πρέπει να αναφερθεί οτι στον υπολογιστικό αλγόριθμο για αυτό το πρόβλημα έχουν χρησιμοποιηθεί, για τα άκρα του πλέγματος, συνοριακές συνθήκες σταθερού συνόρου [8]. Για τον ορισμό αυτών των συνθηκών, και ορίζοντας r την τάξη ακρίβειας στον άξονα των x, χρησιμοποιούνται τα βοηθητικά σημεία $u_0^n, ..., u_{-r+1}^n$ του πλέγματος για το αριστερό όριο (τοίχο) και τα σημεία $u_{j+1}^n, ..., u_{j+r}^n$ για το δεξί όριο. Σε αυτά τα σημεία οι τιμές των μεταβλητών ορίζονται ως εξής:

$$\rho_{-j+1}^{n} = \rho_{j}^{n}, \qquad u_{-j+1}^{n} = -u_{j}^{n}, \qquad p_{-j+1}^{n} = p_{j}^{n}, \qquad j = 1, \dots r$$

$$(2.17\alpha')$$

$$\rho_{J+j}^{n} = \rho_{J-j+1}^{n}, \qquad u_{J+j}^{n} = -u_{J-j+1}^{n}, \qquad p_{J+j}^{n} = p_{J-j+1}^{n}, \qquad j = 1, \dots r .$$

$$(2.17\beta')$$

Αποτελέσματα

Στα σχήματα 2.6α΄ και 2.6β΄ φαίνεται το προφίλ της λύσης του προβλήματος για τα ρ και u αντίστοιχα, την χρονική στιγμή t = 0.016. Αντίστοιχα, στα σχήματα 2.7 προβάλλονται οι λύσεις για τα ρ και u την χρονική στιγμή t = 0.038. Παρόλο που για τους υπολογισμούς έχει χρησιμοποιηθεί πλέγμα 800 σημείων, τα αποτελέσματα είναι σε πολύ καλή συμφωνία με αυτά των Woodward και Colella [7] όπου χρησιμοποιείται πλέγμα 3096 σημείων.

2.4.4 Συμπεράσματα

Από τα γραφήματα των λύσεων στα προβλήματα που παρουσιάστηκαν, φαίνεται οτι η μέθοδος δίνει σταθερούς υπολογισμούς με κατάλληλη επιλογή του Δt.


Σχήμα 2.7: Τα προφίλ των ρ και u στη λύση του προβλήματος "two interacting blast waves" την χρονική στιγμή t = 0.038.

Τα αποτελέσματα έχουν πολύ ικανοποιητική ακρίβεια, παρά την μη-διατηρητική μορφή της μεθόδου. Το μειονέκτημα που έχει ήδη αναφερθεί παραπάνω στην παράγραφο 2.2, είναι οτι η τάξη του συμπτωτικού πολυωνύμου περιορίζει την ακρίβεια στην χρονική εξέλιξη μέσω των αναπτυγμάτων Taylor. Για να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα, ένας τρόπος είναι να γίνεται η χρονική εξέλιξη μέσω της μεθόδου Runge Kutta, κάτι που καλύπτεται αμέσως μετά.

2.5 Υλοποίηση με Runge Kutta

Κάνοντας χρήση της μεθόδου Runge Kutta για την χρονική εξέλιξη δεν σημαίνει οτι η μέθοδος IDO αλλάζει δραστικά· οι βασικές αρχές `λειτουργίας΄ της παραμένουν οι ίδιες. Στόχος είναι οι χρονικές παράγωγοι που απαιτούνται για να προχωρήσει η λύση ένα χρονικό βήμα, να αντικατασταθούν από χωρικές παραγώγους, οι οποίες είναι υπολογίσιμες με την βοήθεια της παρεμβολής που γίνεται στον άξονα των x (Hermite - βλ. (2.1α'), (2.2α')). Το πλεονέκτημα είναι οτι με την μέθοδο Runge Kutta, μπορεί να αυξάνεται η τάξη της ακρίβειας στην χρονική εξέλιξη, χωρίς να αυξάνεται ανάλογα η απαίτηση να υπολογίζονται αντίστοιχης τάξης χρονικές παράγωγοι [4]. Στα παραδείγματα που παρατίθενται στην συνέχεια χρησιμοποιείται Runge Kutta 2^{ης} τάξης, κάτι που δεν αναδεικνύει το κύριο αυτό πλεονέκτημα της χρήσης Runge Kutta στην χρονική εξέλιξη· παρ΄ όλα αυτά, υπάρχει σημαντικό όφελος στο υπολογιστικό κομμάτι της λύσης, όπου λόγω των πολύ λιγότερων υπολογισμών που απαιτούνται (σε σχέση με την περίπτωση που χρησιμοποιείται Taylor στην χρονική εξέλιξη) ο υπολογιστικός χρόνος και η ισχύς που απαιτούνται είναι ελαττωμένα. Για μία μονοδιάστατη εξίσωση της μορφής $f_t = f_t(f, f_x)$, η χρονική εξέλιξη χρήσει της μεθόδου Runge Kutta απαιτεί τον υπολογισμό των γνωστών ποσοτήτων, τόσο για την f, όσο και για την f_x :

$$k_1 = \Delta t \cdot f_t(f, f_x) \tag{2.18}$$

$$k_{x1} = \Delta t \cdot f_{tx}(f, f_x, f_{xx}) \tag{2.19}$$

$$k_2 = \Delta t \cdot f_t (f + k_1, f_x + k_{x1}) \tag{2.20}$$

$$k_{x2} = f_{tx}(f + k_1, f_x + k_{x1}, f_{xx}(f + k_1, f_x + k_{x1})).$$
(2.21)

Τότε οι τιμές των f και f_x στο επόμενο χρονικό βήμα θα είναι:

$$f^{n+1} = f^n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \tag{2.22}$$

$$f_x^{n+1} = f_x^n + \frac{1}{2}(k_{x1} + k_{x2}).$$
(2.23)

2.5.1 Αποτελέσματα

Σε αυτό το σημείο παρατίθενται οι λύσεις σε 3 από τα προβλήματα Euler-1D που δοχιμάστηχε η *απλή* μέθοδος IDO (Taylor) για να υπάρχει δυνατότητα σύγχρισης μεταξύ των δύο επιλογών υλοποίησης της χρονιχής εξέλιξης.

Euler-1D πρόβλημα 1

Το 1° Euler-1D πρόβλημα που περιγράφηκε πιο πάνω, επιλύεται τώρα με διαφοροποιημένες κάποιες παραμέτρους ώστε να εξασφαλίζεται η σταθερότητα της μεθόδου με Runge Kutta χρονική εξέλιξη. Το $\Delta x = 0.01$ παραμένει, για να μπορεί να γίνει σύγκριση, αλλά τώρα $\Delta t = 0.0001$. Στο τεχνητό ιξώδες οι σταθερές παραμένουν a = 0.75 και b = 0, όπως επίσης και το κριτήριο για να θεωρείται οτι το *i* σημείο βρίσκεται σε περιοχή συμπίεσης μένει το ίδιο.



2.5. $\Upsilon \Lambda O \Pi O \Pi E H ME RUNGE KUTTA$

Σχήμα 2.8: Το προφίλ του ρ στη λύση του προβλήματος του Sod όπως δίνεται από την IDO με Runge Kutta χρονιχή εξέλιξη την χρονιχή στιγμή t = 0.25.

Στην ειχόνα 2.8 απειχονίζεται το προφίλ του ρ τη χρονιχή στιγμή t = 0.25. Φαίνεται οτι το undershoot στην ασυνέχεια επαφής είναι εντονότερο από οτι στην περίπτωση της χρονιχής εξέλιξης με Taylor (ειχόνα 2.2), χωρίς αυτό να επηρεάζει την συνολιχή μορφή της λύσης που συμβαδίζει ιχανοποιητιχά με την αναλυτιχή λύση.

Euler-1D πρόβλημα 3

Στην επίλυση του απαιτητικού αυτού Riemann προβλήματος το $\Delta x = 0.01$ παραμένει, ενώ επιλέγεται $\Delta t = 10^{-6}$. Οι σταθερές του τεχνητού ιξώδους είναι a = 0, b = 1.0 όπως και στην περίπτωση που το πρόβλημα λύθηκε με Taylor στην χρονική εξέλιξη της IDO. Το κριτήριο για την περιοχή συμπίεσης είναι επίσης το ίδιο με εκείνη την περίπτωση, δηλαδή για το σημείο i θα πρέπει να είναι $u_{x,i} < 0$.



Σχήμα 2.9: Οι χρονικές στιγμές t = 0.012 και t = 0.024 στο αριστερό μισό του Two Interacting Blast Waves problem όπως αναπαράγονται από την IDO με Runge Kutta στην χρονική εξέλιξη.

Στην εικόνα 2.9 δίνεται το ρ στην λύση του προβλήματος τις χρονικές στιγμές t = 0.012 και t = 0.024. Εάν και το Δt είναι ελαττωμένο σε σχέση με την εκτέλεση του κώδικα με Taylor στην χρονική εξέλιξη, το προφίλ φαίνεται να ακολουθεί λιγότερο πιστά αυτό της αναλυτικής λύσης (με ελάχιστη διαφορά) σε σχέση με εκείνη την περίπτωση (εικόνα 2.4).



Σχήμα 2.10: Η λύση των Two Interacting Blast Waves την χρονική στιγμή t = 0.016όταν στην χρονική εξέλιξη της IDO χρησιμοποιείται Runge Kutta.

Δύο αλληλεπιδρώντα εκρηκτικά κύματα

Για αυτό το πρόβλημα, σε όλες τις παραμέτρους που χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς δόθηκαν τιμές ίδιες με αυτές που χρησιμοποιήθηκαν στην περίπτωση της χρονικής εξέλιξης με Taylor, εκτός απο το Δt που ελαττώθηκε για να εξασφαλιστεί η σταθερότητα της μεθόδου. Πιο συγκεκριμένα $\Delta x =$ $1/800, \ \Delta t = 10^{-7},$ για το τεχνητό ιξώδες $a = 0, \ b = 1.5$ και το κριτήριο για να θεωρείται οτι το σημείο i ανήχει σε περιοχή υψηλής συμπίεσης είναι $u_{x,i} < 0$. Επίσης χρησιμοποιούνται και solid walls σαν συνοριακές συνθήκες στα άκρα Στις εικόνες 2.10 προβάλλονται τα ρ και u στην λύση του του πλέγματος. προβλήματος την χρονική στιγμή t = 0.016, ενώ τα αντίστοιχα προφίλ για την χρόνική στιγμή t = 0.038 απεικονίζονται στις εικόνες 2.11. Συκρίνοντας τα γραφήματα αυτά με αυτά που φαίνονται στις εικόνες 2.6 και 2.7, παρατηρεί κανείς οτι η μορφή των γραφημάτων μένει η ίδια, με μικρές διαφορές. Κάποιες μικρές ταλαντώσεις που κάνει η μέθοδος και φαίνονται στο γράφημα της uτην χρονική στιγμή t = 0.016, ίσως θα μπορούσε να πει κανείς οτι είναι ελάχιστα πιο έντονες στην περίπτωση που η χρονική εξέλιξη γίνεται με Runge Kutta (σχήμα 2.10β').

2.5.2 Συμπεράσματα

Από τα παραπάνω φαίνεται οτι το υπολογιστικό όφελος που προσφέρει ο αλγόριθμος με τις λιγότερες πράξεις που απαιτεί, αντισταθμίζεται από τα περισσότερα χρονικά βήματα που απαιτούνται (μικρότερα Δt) για να εξασφαλιστεί η σταθερότητα της μεθόδου. Αποτέλεσμα αυτού είναι οτι το όφελος που μπορεί



 $\Sigma\chi$ ήμα 2.11: Η λύση των Two Interacting Blast Waves την χρονική στιγμήt=0.038με την μέθοδο IDO όταν χρονική εξέλιξή της χρησιμοποιείται Runge Kutta.

να χαρπωθεί χανείς χάνοντας χρήση της Runge Kutta, γίνεται εμφανές μόνον όταν και στους δύο αλγορίθμους της μεθόδου –υλοποίηση με Runge Kutta και Taylor– χρησιμοποιηθεί το ίδιο χρονικό βήμα.

Από τα γραφήματα που παρατέθηκαν φαίνεται οτι η μέθοδος IDO προσφέρει καλύτερη αριθμητική ακρίβεια και σταθερότητα στα μονοδιάστατα προβλήματα όταν για την χρονική εξέλιξη χρησιμοποιείται ανάπτυγμα Taylor. Στην εργασία των Yoshida, Aoki και Utsumi [4] δείχνεται οτι στις δύο διαστάσεις η χρονική εξέλιξη με Runge Kutta προσφέρει καλύτερη αριθμητική σταθερότητα.

Το πρόγραμμα που υλοποιεί την μέθοδο IDO παρατήθεται στο Παράρτημ
α Δ'

$78 KE \Phi A \Lambda A IO~2. \ INTERPOLATED~DIFFERENTIAL~OPERATOR~SCHEME$

Κεφάλαιο 3

CUDA

3.1 Εισαγωγή

Η χρόνο με τον χρόνο αυξανόμενη υπολογιστική ισχύς που προσφέρεται από τους εξελισσόμενους επεξεργαστές των ηλεκτρονικών υπολογιστών περιγραφόταν με επιτυχία μέχρι πριν από κάποια χρόνια από τον γνωστό νόμο του Moore. Ο νόμος αυτός έπαψε να προβλέπει επιτυχώς την εν λόγω αύξηση, με την εξέλιξη των επεξεργαστών στις κάρτες γραφικών (GPU - Graphics Processing Unit). Η εικόνα 3.1 απεικονίζει την παρεχόμενη ισχύ σε GFLOPS¹ των υπολογιστικών μονάδων στις κάρτες γραφικών (σε πράσινο χρώμα), σε σύγκριση με αυτή των κεντρικών υπολογιστικών μονάδων CPU (σε μπλε χρώμα) μέσα στην τελευταία δεκαετία.



Σχήμα 3.1: Η υπολογιστική ισχύς κορυφαίων GPU (σε πράσινο χρώμα) και CPU (σε μπλε χρώμα). Σχήμα 1-1 από [9].

 $^{^1{\}rm Floating}$ point operations per second : (αριθμός πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς) $\times 10^9/s$

Το γεγονός οτι οι GPU εξελίχθηκαν με στόχο την εξειδίκευση σε 'επίπονους' παράλληλους υπολογισμούς, συστατικό απαραίτητο για την επεξεργασία και απεικόνιση των γραφικών σε έναν υπολογιστή, σε συνδυασμό με την ακόρεστη ζήτηση ενός απαιτητικού αγοραστικού κοινού για τρισδιάστατα γραφικά υψηλής ανάλυσης σε πραγματικό χρόνο, οδήγησαν σε αυτή την διαφορά, που όπως φαίνεται κλιμακώνεται με το πέρασμα του χρόνου.

Έχοντας οι GPU να επιδείξουν τέτοιες δυνατότητες σε παράλληλους υπολογισμούς, δεν μπορούσε παρά να επεκταθεί η χρήση τους και σε άλλους τομείς –πέρα από την επεξεργασία εικόνας– όπου υπολογιστικά προβλήματα μπορούν διαμορφωθούν ώστε να επιδέχονται παράλληλη επεξεργασία δεδομένων· τομείς τέτοιοι υπάρχουν πολλοί και εκτείνονται από την υπολογιστική βιολογία και την βιοιατρική, έως την επεξεργασία σήματος, τα υπολογιστικά χρηματοοικονομικά και βεβαίως την υπολογιστική φυσική, όπως φαίνεται και από την εργασία αυτή.

3.2 CUDA xai CUDA C

CUDATMείναι ένα λογότυπο ιδιοχτησία της εταιρίας NVIDIA, που υποδηλώνει μία γενικής χρήσης αρχιτεχτονική κατάλληλη για παράλληλους υπολογισμούς. Η CUDA συνοδεύεται από ένα νέο προγραμματιστικό μοντέλο που δίνει την δυνατότητα εχμετάλλευσης της 'παράλληλης' υπολογιστικής δύναμης στις GPU της NVIDIA για την λύση σύνθετων υπολογιστικών προβλημάτων, με έναν τρόπο αποδοτικότερο από αυτόν που θα λύνονταν σε μία CPU.

Το λογισμικό που συνοδεύει την τεχνολογία CUDA είναι μία επέκταση της πολύ γνωστής high level γλώσσας προγραμματισμού C. Η επέκταση αυτή ονομάζεται CUDA C, και διευκολύνει τους χρήστες της δημοφιλούς γλώσσας προγραμματισμού να αξιοποιήσουν την υπολογιστική δύναμη των GPU σε ένα οικείο περιβάλλον, χρησιμοποιώντας πολλά από τα χαρακτηριστικά, όπως σύνταξη, κατασκευή δομών και άλλα, όπως τα γνωρίζουν. Πέρα από την CUDA C, υπάρχουν και εναλλακτικές γλώσσες προγραμματισμού, όπως επίσης και άλλα APIs² που υποστηρίζονται, όπως η CUDA FORTRAN, η OpenCL και η DirectCompute, αλλά για την εργασία αυτή, ο προγραμματισμός της μεθόδου IDO για επίλυση σε GPU έγινε σε CUDA C. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκε το runtime API, μέρος του λογισμικού πακέτου CUDA toolkit 3.0, όπως παρέχεται από την NVIDIA στην επίσημη ιστοσελίδα.

3.3 Το προγραμματιστικό μοντέλο

Η παράγραφος αυτή περιγράφει τα βασικά στοιχεία του προγραμματιστικού μοντέλου CUDA, πως αυτά αξιοποιούνται μέσω της C, και την λογική που πρέπει να έχει κανείς για να αξιοποιήσει τους πόρους που παρέχει μία GPU (σύνοψη θεμελιωδών πρακτικών και εννοιών από την περιγραφή τους στα [9], [10]).

²Application Programming Interfaces



Σχήμα 3.2: Στον αλγόριθμο ενός προγράμματος CUDA, όπου το πρόβλημα έχει κατάλληλα διαχωριστεί σε ανεξάρτητα επιλυόμενα υποπροβλήματα, ο driver προγραμματίζει με τέτοιο τρόπο την εκτέλεση των blocks, ώστε σε μία GPU με περισσότερα cores, το πρόγραμμα να ολοκληρώνεται ταχύτερα. Σχήμα 1-4 από [9].

3.3.1 Η ιεραρχία των threads

Η ιεραρχία των threads (νήματα, στο εξής threads), είναι θεμελιώδης στο να καταλάβει κανείς την λογική με την οποία προγραμματίζει σε CUDA C. Ένα thread, ακολουθεί σε ένα παράλληλο κώδικα την πορεία που θα ακολουθούσε η CPU, εκτελώντας έναν συμβατικό κώδικα. Το εντυπωσιακό είναι οτι η κεντρική μονάδα στην αρχιτεκτονική της CUDA, o streaming multiprocessor (στο εξής SM), έχει σχεδιαστεί ώστε να εκτελεί εκατοντάδες threads ταυτόχρονα, αυξάνοντας κατά πολύ την απόδοση του κώδικα.

Καλείται επομένως ο προγραμματιστής να διαχωρίσει το πρόβλημά του σε έναν αριθμό υπο-προβλημάτων που μπορούν να λυθούν ανεξάρτητα μεταξύ τους και παράλληλα σε thread blocks (συστάδες από νήματα, στο εξής blocks). Επίσης, κάθε υποπρόβλημα, θα πρέπει να μπορεί να διαχωρίζεται σε μικρότερα κομμάτια που θα μπορούν να λύνονται συλλογικά και παράλληλα, από τα threads που περιέχονται σε ένα block.

Αυτή αχριβώς η λογική αποσύνθεσης του προβλήματος και η παράλληλη επίλυση των υποπροβλημάτων είναι που επιτρέπει την ιδιότητα των προγραμμάτων γραμμένων σε CUDA C, να ολοκληρώνονται ταχύτερα όταν εκτελούνται σε GPUs με περισσότερους πόρους, χωρίς καμία τροποποίηση. Πράγματι, ο οδηγός της κάρτας γραφικών, μπορεί να προγραμματίσει κάθε thread block για επίλυση σε οποιοδήποτε από τα διαθέσιμα processor cores, με οποιαδήποτε σειρά, ταυτόχρονα με άλλα, ή σε αναμονή σε σχέση με κάποια άλλα, ώστε ένα πρόγραμμα CUDA, να μπορεί να εκτελεστεί α)με οποιοδήποτε διαθέσημο αριθμό cores, β) ταχύτερα όταν υπάρχουν περισσότερα διαθέσιμα cores όπως φαίνεται στην εικόνα 3.2.

Σε αυτό το σημείο διευχρινίζεται, οτι στις κάρτες γραφικών που παράγονται με την σημερινή τεχνολογία, ένας SM περιέχει 8 cores, ενώ μπορεί να διατηρεί ενεργά (ώστε είτε να εκτελούνται ή να είναι προγραμματισμένα για εκτέλεση) 768 ή και πολύ περισσότερα threads, ανάλογα με την υπολογιστική ικανότητα (compute capability) της GPU. Στην εικόνα 3.3 φαίνονται ενδεικτικά τα χαρακτηριστικά των GPU με υπολογιστική ικανότητα 1.1 και 1.3. Επίσης, σε μία κάρτα γραφικών μπορεί να υπάρχουν πολλοί SMs, οπότε αντίστοιχα αυξάνονται και οι διαθέσιμοι πόροι. Για παράδειγμα, το μοντέλο Tesla C1060 της NVIDIA που χρησιμοποιήθηκε για τις συγκρίσεις που περιγράφονται παρακάτω, είναι υπολογιστικής ικανότητας 1.3, διαθέτει 30 SMs, και συνεπώς 240 cores, και μπορεί να έχει ενεργά 30720 threads κάθε στιγμή!

Physical Limits for GPU Compute Capability:	1.1	1.3
Threads per Warp	32	32
Warps per Multiprocessor	24	32
Threads per Multiprocessor	768	1024
Thread Blocks per Multiprocessor	8	8
Total # of 32-bit registers per Multiprocessor	8192	16384
Register allocation unit size	256	512
Register allocation granularity	block	block
Shared Memory per Multiprocessor (bytes)	16384	16384
Shared Memory Allocation unit size	512	512
Warp allocation granularity (for register allocation)	2	2

Σχήμα 3.3: Τεχνικά χαρακτηριστικά GPU με υπολογιστική ικανότητα 1.1 και 1.3

3.3.2 Η σύνδεση με την C

Όπως ήδη αναφέρθηκε, η CUDA C είναι μία επέκταση της γλώσσας προγραμματισμού C. Αυτό σημαίνει, οτι η βασική δομή του προγράμματος είναι όπως αυτή ενός συμβατικού κώδικα, με εντολές να εκτελούνται από την CPU, με την διαφορά οτι υπάρχει η δυνατότητα κατασκευής και κλήσης συναρτήσεων που εκτελούνται παράλληλα στην GPU, και που ονομάζονται kernels. Η CPU με τους πόρους της (που στο εξής θα αποκαλείται σύστημα), είναι ένα σύνολο αποκομμένο από την GPU στην κάρτα γραφικών (στο εξής συσκευή), όπως και το αντίστροφο. Η μόνες δυνατές ενέργειες από την μεριά του συστήματος, είναι η δέσμευση/αποδέσμευση περιοχών της –global– μνήμης της συσχευής, αντιγραφή μνήμης από χαι προς την –global– μνήμη της συσχευής, όπως επίσης χαι η εχτέλεση ενός kernel³.

O_i kernels

Οι συναρτήσεις αυτές, εξ΄ ορισμού καλούνται από το σύστημα, και εκτελούνται στην συσκευή, ενώ κατά τον ορισμό τους, στον κώδικα, συνοδεύονται από το πρόθεμα __global__. Κατά την κλήση τους ο προγραμματιστής πέρα από τα ορίσματα που χρησιμοποιεί σε κάθε συνάρτηση της C, ορίζει και τον αριθμό των threads ανά block, όπως επίσης και τον συνολικό αριθμό των blocks (που αποτελούν το grid) που θα χρησιμοποιηθούν για την υλοποίηση της συνάρτησης. Ένας kernel (σε συμφωνία με όσα ειπώθηχαν παραπάνω) δεν μπορεί να έχει πρόσβαση στην μνήμη του συστήματος, όπως επίσης δεν μπορεί να επιστρέφει στο σύστημα οποιουδήποτε τύπου μεταβλητή -είναι δηλαδή συνάρτηση τύπου void. Άλλοι περιορισμοί των kernels είναι οτι δεν μπορούν να έχουν μεταβλητό αριθμό παραμέτρων, να καλούν τον εαυτό τους, ή να έχουν στατικές μεταβλητές. Μέσα από έναν kernel, δηλαδή στα πλαίσια εχτέλεσης χώδιχα στην συσκευή, μπορούν να καλούνται συναρτήσεις τύπου device (βλ. αμέσως μετά). Για να εκτελεστεί ένας kernel θα πρέπει να έχει ολοκληρωθεί οποιαδήποτε άλλη διαδικασία –είτε αντιγραφή μνήμης, είτε εκτέλεση άλλου kernel- που ενδεχομένως εκτελείται ήδη στην συσκευή. Επίσης, αφού δοθεί η εντολή από την CPU για εκτέλεση ενός kernel στην συσκευή, η CPU συνεχίζει να εκτελεί χώδιχα στο σύστημα, χωρίς να περιμένει την ολοχλήρωση των διεργασιών του kernel στην συσκευή· η ιδιότητα αυτή ονομάζεται ασύγχρονη εκτέλεση.

Συναρτήσεις τύπου device

Οι συναρτήσεις αυτές στον ορισμό τους φέρουν το πρόθεμα __device__. Εξ΄ ορισμού, μπορούν να καλούνται από την συσκευή και να εκτελούνται στην συσκευή, ενώ δεν μπορούν να καλούνται από το σύστημα όπως οι kernels.

Όπως οι kernels, έτσι και οι device συναρτήσεις, δηλαδή οι συναρτήσεις που εκτελούνται στην συσκευή, έχουν πρόσβαση στις εξής εγγενώς ορισμένες μεταβλητές:

- dim3 gridDim;
 Οι διαστάσεις του grid (το πολύ δύο), μετρούμενες σε αριθμό blocks
- dim3 blockDim;
 Οι διαστάσεις του block, μετρούμενες σε αριθμό threads
- dim3 blockIdx;
 Ο δείχτης του block μέσα στο grid

³την φορά



Σχήμα 3.4: Ο προγραμματιστής μπορεί χάνοντας χρήση των gridDim, blockDim, blockIdx και threadIdx να ξεχωρίζει το κάθε thread μέσα στο block και στο grid ώστε να του αντιστοιχεί ένα διαφορετικό set παραμέτρων που θα επεξεργαστεί

• dim3 threadIdx;

Ο δείχτης του thread μέσα στο block

Με τις μεταβλητές αυτές, αποδίδεται σε χάθε thread μία μοναδική τιμή που το ξεχωρίζει μέσα στο block που ανήχει, ή αχόμα χαι μέσα στο grid, με αποτέλεσμα να εχτελεί την λειτουργία που του ορίζει ο kernel για ένα συγχεχριμένο set παραμέτρων. Για παράδειγμα, στην ειχόνα 3.4 φαίνεται ενα μονοδιάστατο grid, με gridDim.x = 3, που περιέχει μονοδιάστατα blocks με blockDim.x = 5. Σε αυτή την περίπτωση ο προγραμματιστής μπορεί να ξεχωρίζει το χάθε thread μέσα στο block που ανήχει με την μεταβλητή threadIdx.x που θα παίρνει τιμές από το 0 έως το 4, ή να το ξεχωρίζει μέσα στο grid με την έχφραση (blockIdx.x * blockDim.x + threadIdx.x) που θα παίρνει τιμές από το 0 έως το 14. Ο λόγος για τον οποίο δίνεται η δυνατότητα ορισμού δισδιάστατων grid χαι block, όπως επίσης χαι τρισδιάστατων block (μέσω μεταβλητών τύπου dim3), είναι για να διευχολύνεται ο προγραμματιστής στην αντιστοίχιση threads με τις αντίστοιχες θέσεις μνήμης που θα επεξεργαστούν, όταν αντιμετωπίζει προβλήματα που περιέχουν δισδιάστατους, ή χαι τρισδιάστατους πίναχες.

dim3 είναι μία δομή της CUDA C, η οποία έχει ως μέλη της τρεις διαστάσεις· όταν –από την μεριά του συστήματος– ορίζονται οι διαστάσεις του grid και των blocks που θα επιλύσουν έναν kernel, υπάρχει η δυνατότητα να παραλειφθούν οι διαστάσεις που είναι περιττές, και αυτές αυτόματα θα αρχικοποιηθούν στην μονάδα.

3.4 Αξιοποίηση των πόρων της συσκευής

Ένα πολύ σημαντικό κριτήριο για να εξασφαλίζεται καλή απόδοση, στην εκτέλεση των –παράλληλων– κομματιών του κώδικα στην συσκευή, είναι η σωστή αξιοποίηση των πόρων της συσκευής· να παραμένουν δηλαδή, οι multiprocessors της συσκευής, όσο πιο απασχολημένοι γίνεται. Το μέτρο αυτό που περιγράφει την καλή εκμετάλλευση της συσκευής λέγεται βαθμός κατάληψης (occupancy, $\beta\lambda$. [10]).

3.4.1 Βαθμός κατάληψης

Η εκτέλεση των εντολών στην συσκευή γίνεται σε warps. Ένας MS, μέσω ενός warp, για την εκτέλεση του οποίου αφιερώνει 4 κύκλους μηχανής (clock cycles), δίνει την ίδια εντολή στα 8 processor cores του, για να την εκτελέσει το καθένα σε 4 threads (32 threads στο σύνολο) που επιδρούν σε διαφορετικό set δεδομένων το καθένα. Στον πίνακα του σχήματος 3.3 φαίνεται οτι κάθε SM υπολογιστικής ικανότητας 1.3 υποστηρίζει 32 *ενεργά* warps (1024 threads)· από αυτά, ένα εκτελείται κάθε 4 κύκλους μηχανής, ενώ τα υπόλοιπα είναι προγραμματισμένα για εκτέλεση (έχουν διοριστεί οι registers σε κάθε thread κ.λ.π.). Βαθμός κατάληψης είναι ο λόγος των ενεργών warps ενός SM κατά την εκτέλεση ενός kernel, προς τον μέγιστο αριθμό warps που υποστηρίζει.

Ο υψηλότερος βαθμός κατάληψης δεν σημαίνει και καλύτερη απόδοση σε κάθε περίπτωση. Είναι ένα σημείο πάνω από το οποίο ο επιπλέον βαθμός κατάληψης δεν προσφέρει βελτίωση. Παρ΄ όλα αυτά, χαμηλός βαθμός κατάληψης τις πιο πολλές φορές σημαίνει κακό προγραμματισμό των ενεργών threads (από την πλευρά της συσκευής και του οδηγού της) και επομένως πτώση της απόδοσης.

Αριθμός thread ανά block

Η διάσταση του grid –σε blocks–, όπως επίσης και η διάσταση των blocks –σε threads– είναι και τα δύο σημαντικοί παράγοντες. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, όπου για παράδειγμα το υπολογιστικό πλέγμα που θα επιλυθεί σε έναν kernel είναι μιας δεδομένης διάστασης, οι δύο παράγοντες αυτοί είναι αλληλένδετοι. Κατά την επιλογή του αριθμού των blocks που θα χρησιμοποιηθούν, κύριο μέλημα είναι η κατά το δυνατόν μεγαλύτερη κατάληψη της GPU. Ο αριθμός αυτός θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των SMs, ώστε όλοι οι multiprocessors να έχουν από ένα τουλάχιστον block να εκτελέσουν.

Κατά την επιλογή του μεγέθους των block, είναι σημαντικό να λαμβάνεται υπόψη οτι κάθε SM μπορεί να επεξεργάζεται ταυτόχρονα πολλαπλά blocks, επομένως ο αριθμός αυτός δεν καθορίζει αποκλειστικά τον βαθμό κατάληψης. Για παράδειγμα, σε μία συσκευή υπολογιστικής ικανότητας 1.1, ένας kernel που χρησιμοποιεί την μέγιστη χωρητικότητα των 512 threads σε ένα block, οδηγεί σε βαθμό κατάληψης 66%. Αυτό γιατί ο μέγιστος αριθμός των threads ανά SM είναι 768 (βλ. σχήμα 3.3) και επομένως ένας SM δεν μπορεί παρά να επεξεργάζεται ένα block την φορά. Εάν όμως ο ίδιος kernel επιλεγεί να εκτελεστεί με 256 threads ανά block, θα οδηγήσει σε 100% βαθμό κατάληψης, αξιοποιώντας 3 ενεργά blocks ανά SM.

Γενικά υπάρχουν κάποιες 'συνταγές' για την καλύτερη αξιοποίηση της υπολογιστικής ισχύος μιας GPU:

- Λόγω του μεγέθους ενός warp (που για όλες τις κάρτες γραφικών σήμερα είναι 32 threads), ο αριθμός των threads ανά block θα πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 32. Έτσι δεν χάνεται υπολογιστική ισχύς σε warps χαμηλής χωρητικότητας.
- Στις περιπτώσεις που αντιστοιχούν περισσότερα του ενός blocks ανά SM, θα πρέπει να χρησιμοποιούνται τουλάχιστον 64 threads ανά block.
- Οι τιμές μεταξύ 128 και 256 είναι ένα καλό εύρος για πειραματισμούς όσον αφορά το μέγεθος των block στην αναζήτηση βελτίωσης της απόδοσης.

Registers

Είναι ένας αχόμα πόρος της GPU ο οποίος είναι περιορισμένος, και η σωστή διαχείρισή του οδηγεί σε καλύτερη απόδοση. Ουσιαστικά είναι θέσεις, πολύ γρήγορης σε ταχύτητα μνήμης, τις οποίες αξιοποιεί ένα thread προχειμένου να διεκπεραιώσει την διαδικασία που του ορίζεται από τον SM. Για παράδειγμα, εαν ένας kernel που απαιτεί 60 registers ανά thread κληθεί να εκτελεστεί σε μία GPU υπολογιστικής ικανότητας 1.1 χρησιμοποιώντας 128 threads ανά block, τότε αναγκαστικά θα εκτελεστεί με 17% βαθμό κατάληψης. Αυτό γιατί σύμφωνα με τον πίνακα του σχήματος 3.3, ο SM διαθέτει 8192 registers συνολικά, ενώ 1 μόνο block στην συγκεκριμένη εκτέλεση απαιτεί 7680 registers. Δηλαδή, από τα 768 τηρεαδς που μπορεί να έχει ενεργά ταυτόχρονα ο SM, θα αξιοποιεί μόνον τα 128.

Υπάρχει η δυνατότητα κατά την στιγμή του compile, ο προγραμματιστής να επιλέξει να μην διατίθενται περισσότερα από έναν συγκεκριμένο αριθμό registers σε κάθε thread. Σε αυτή την περίπτωση, η μνήμη που αντιστοιχεί στους επιπλέον registers που χρειάζονται για την εκτέλεση του προγράμματος, θα διατεθεί από την κεντρική μνήμη (global memory) της συσκευής. Κάτι τέτοιο μπορεί να αυξήσει τον βαθμό κατάληψης του/των SM(s), αλλά οδηγεί σε σημαντική ελλάτωση της ταχύτητας μεταφοράς των δεδομένων, καθότι η κεντρική μνήμη είναι πολύ πιο αργή από τους registers.

Μία πραχτική που ακολουθείται για να μειωθούν οι registers που απαιτούνται ανά thread, είναι να χωρίζεται ο kernel σε άλλους μικρότερους που θα καλούνται διαδοχικά. Εναλλακτικά, και εφόσον είναι εφικτό, ανάλογα με τον τύπο του προβλήματος που επιλύεται, μπορεί να μετατραπεί ο αλγόριθμος του προγράμματος ωστε να αξιοποιεί την κοινή μνήμη (shared memory), αντί των registers.

Η κοινή μνήμη

Πρόχειται για ένα ταχύτατο χομμάτι μνήμης –ίδιας ταχύτητας με τους registers-, το οποίο εαν αξιοποιηθεί σωστά βελτιώνει κατά πολύ την απόδοση ενός παράλληλου προγράμματος. Ονομάζεται χοινή μνήμη γιατί πρόχειται για μνήμη που είναι προσβάσιμη μονον από τα threads του ίδιου block. Η χρήση

86



 Σ χήμα 3.5: CUDA GPU OCCUPANCY CALCULATOR

της μπορεί να οδηγήσει σε ελάττωση των απαιτούμενων registers ανά thread, αλλά μπορεί να λειτουργήσει ανασταλτικά και στον συνολικό βαθμό κατάληψης. Όπως φαίνεται και στον πίνακα 3.3, για τις GPU υπολογιστικής ικανότητας 1.1 και 1.3 είναι μόλις 16kb! Κάτι ακόμα που πρέπει να προσέχει κανείς όταν αξιοποιεί την κοινή μνήμη είναι τα conflicts. Ένα conflict δημιουργείται όταν δύο threads απαιτήσουν πρόσβαση στην ίδια θέση μνήμης⁻ τότε, λόγω της κατασκευής της μνήμης, η εκτέλεση των αιτημάτων, από παράλληλη γίνεται σειριακή οδηγώντας σε σημαντική πτώση της απόδοσης.

Όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, μεγαλύτερος βαθμός κατάληψης δεν συνεπάγεται πάντα καλύτερη απόδοση. Μία αύξηση από το 66% σε 100% γενικά δεν οδηγεί σε αντίστοιχη αύξηση απόδοσης. Χαμηλότερος βαθμός κατάληψης μπορεί να οδηγεί και στο να διαθέτει ο SM περισσότερους registers ανά thread, έχοντας λιγότερες απώλειες στην τοπική μνήμη και οδηγώντας πολλές φορές σε βελτίωση στην απόδοση. Τυπικά, όταν επιτυγχάνεται ένα 50%, οι περαιτέρω αλλαγές για αύξηση του βαθμού κατάληψης, θα πρέπει να είναι πολύ προσεγμένες για να οδηγούν και σε αύξηση της απόδοσης.

Για να μπορεί να υπολογίζει με ευχολία ο προγραμματιστής τον βαθμό κατάληψης της GPU για τον kernel που έχει κατασχευάσει, η NVIDIA διαθέτει στο επίσημο site της ένα υπολογιστικό φύλλο με τίτλο 'CUDA GPU OCCU-PANCY CALCULATOR' (βλ. σχήμα 3.5). Σε αυτό, δηλώνεται η υπολογιστική ικανότητα της συσκευής, ο αριθμός των thread ανά block, ο αριθμός των registers ανά thread και η απαιτούμενη κοινή μνήμη ανά block, και υπολογίζεται ο βαθμός κατάληψης, ενώ παράλληλα δίνονται οι αριθμοί των ενεργών threads, blocks και warps ανά MS. Ένα τμήμα του υπολογιστικού φύλλου φαίνεται στο σχήμα 3.5.

3.4.2 Μεταφορές Μνήμης

Ένας παράγοντας που λειτουργεί ανασταλτικά στην απόδοση ενός προγράμματος που έχει κατασκευαστεί για να εκτελεί τμήματά του στην GPU, είναι η ταχύτητα μεταφοράς δεδομένων από την μνήμη του συστήματος στην μνήμη της συσκευής. Αυτή είναι πολύ χαμηλή σε σχέση με τις ταχύτητες επεξεργασίας των δεδομένων στην GPU με αποτέλεσμα να είναι κάτι που θα πρέπει κατά το δυνατόν να αποφεύγει ο προγραμματιστής. Είναι τέτοια η επίπτωση στην συνολική ταχύτητα του προγράμματος που ακόμα και τμήματα κώδικα που δεν ενδείκνυνται για παραλληλοποίηση και πιθανότατα θα εκτελούντο γρηγορότερα στην CPU, συνιστάται να εκτελούνται στην συσκευή εαν με αυτό τον τρόπο αποφεύγεται μεταφορά δεδομένων μεταξύ συστήματος και συσκευής. Στο σχήμα 3.6 συγκρίνεται ο χρόνος που απαιτείται για την μεταφορά δεδομένων από το σύστημα στην συσκευή (με μπλε χρώμα), από την συσκευή στο σύστημα (με κόκκινο χρώμα).



Σχήμα 3.6: Ο χρόνος που απαιτείται για την μεταφορά δεδομένων σαν συνάρτηση της ποσότητας των δεδομένων. Οι τρεις περιπτώσεις που απειχονίζονται είναι α)από το σύστημα στην συσχευή (με μπλε χρώμα) β) από την συσχευή στο σύστημα (με χόχχινο χρώμα) χαι γ) μεταφορά εσωτεριχά στην συσχευή (πράσινο χρώμα)

3.4.3 Συγχρονισμός

Κάτι που μπορεί να προβληματίσει κατά την παραλληλοποίηση ενός αλγορίθμου για εκτέλεση στην GPU, είναι ο συγχρονισμός. Το πως αντιμετωπίζονται, δηλαδή, τα σημεία του κώδικα στα οποία πρέπει να εξασφαλιστεί οτι όλα τα threads του grid έχουν ολοκληρώσει ένα τμήμα του κώδικα, πριν προχωρήσουν στο υπόλοιπο της εκτέλεσής του. Τρόπος για να συγχρονιστούν όλα τα threads δεν υπάρχει, και αυτό έχει να κάνει με τον τρόπο εκτέλεσης των warps. Για να αναλάβει ένας SM τα blocks που έχουν μπει σε αναμονή για εκτέλεση, σημαίνει οτι έχει ολοχληρώσει όλα τα προηγούμενα ενεργά blocks, που αυτό σημαίνει οτι τα threads στα blocks αυτά έχουν ολοχληρώσει την εκτέλεση του kernel. Εάν με οποιοδήποτε τρόπο σταματούσε η εκτέλεση του kernel στα threads στο εσωτερικό ενός block, αυτό θα σήμαινε 'πάγωμα' της εκτέλεσης, και αδυναμία επεξεργασίας από μεριάς του SM, του υπόλοιπου grid. Ο τρόπος με τον οποίο μπορεί χανείς να πετύχει συγχρονισμό όλων των threads σε ένα σημείο του χώδιχα, είναι να χωρίσει σε εχείνο το σημείο τον kernel σε δύο μικρότερους. Έτσι, όλο το grid θα έχει ολοκληρώσει την εκτέλεση του πρώτου πριν συνεγίσει σε περαιτέρω διεργασίες. Το γεγονός οτι με αυτό τον τρόπο θα χαλούνται δύο kernels από την πλευρά της CPU αντί για ένας, δεν θα πρέπει να ανησυχεί καθότι ο χρόνος κλήσης ενός kernel είναι πολύ μικρός, έχει να κάνει μόνο με το μέγεθος του grid, και κυμαίνεται μεταξύ των 10 και 24μs.

Συγχρονισμός των threads που ανήκουν στο ίδιο block μπορεί να γίνει με κλήση της εντολής __cyncthreads(). Ένας συγχρονισμός στο εσωτερικό ενός block μπορεί να απαιτείται προκειμένου να γίνουν αλλαγές σε τιμές της κοινής μνήμης του block.

3.5 Υλοποίηση της IDO σε κώδικα CUDA C

Στα πλαίσια μελέτης της μεθόδου IDO, ο συμβατικός κώδικας που κατασκευάστηκε για να βγούν κάποια συμπεράσματα στο προηγούμενο κεφάλαιο, μετατράπηκε σε παράλληλο κώδικα CUDA C. Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται τα αποτελέσματα συγκρίσεων μεταξύ του συμβατικού και του παράλληλου κώδικα, και αναλύονται τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της κάθε περίπτωσης. Επίσης, συγκρίνονται οι παράλληλοι κώδικες της IDO στις δύο περιπτώσεις που υλοποιείται με χρονική εξέλιξη Taylor και Runge Kutta. Πρώτα όμως παρατίθενται και σχολιάζονται διαγράμματα που δείχνουν το πως διαφορετικές παράμετροι εκτέλεσης του συγκεκριμένου κώδικα επηρεάζουν τον βαθμό κατάληψης της συσκευής και την συνολική απόδοση σε δύο GPU, υπολογιστικής ικανότητας 1.1 και 1.3.

3.5.1 Οι παράμετροι εκτέλεσης ενός παράλληλου κώδικα

Για την παραγωγή, τις δοχιμές χαι τα αποτελέσματα του παράλληλου IDO χώδιχα, χρησιμοποιήθηκαν οι χάρτες γραφιχών της NVIDIA GeForce 9300M GS και Tesla C1060, με 1 SM, υπολογιστική ικανότητα 1.1 και με 30 SMs και υπολογιστική ικανότητα 1.3 αντίστοιχα. Στόχος των παραχάτω δεν είναι σε καμία περίπτωση να γίνει σύγχριση των δύο GPU, καθότι η πρώτη προορίζεται για απλή χρήση σε φορητούς υπολογιστές, ενώ η δεύτερη είναι από τις ταχύτερες που έχει να επιδείξει η αγορά σήμερα, ενώ προορίζεται για επαγγελματική χρήση. Στόχος είναι να δειχθεί οτι οι παράμετροι εκτέλεσης (threads/block, registers/thread, ο βαθμός κατάληψης), έχουν διαφορετικές επιπτώσεις στην απόδοση για έναν συγκεκριμένο κώδικα, ανάλογα με τους διαθέσιμους πόρους στην GPU.

GeForce 9300M GS

Για τις συγκρίσεις σε αυτή την κάρτα γραφικών χρησιμοποιήθηκε ο παράλληλος κώδικας της μεθόδου IDO και χρονική εξέλιξη με Runge Kutta, για το πρόβλημα των Two Interacting Blast Waves. Οι δοκιμές έγιναν για ένα υπολογιστικό πλέγμα 20000 σημείων και για 3000 χρονικά βήματα. Ο κώδικας αυτός κατά την εκτέλεσή του καλεί έναν kernel ο οποίος χρησιμοποιεί 60 registers/thread. Όπως αναφέρθηκε στην προηγούμενη παράγραφο, ο παράγοντας αυτός είναι καθοριστικός για την ταχύτητα και τον βαθμό κατάληψης της συσκευής κατά την εκτέλεση. Για τις δοκιμές αυτές, κατά την στιγμή του compile επιλεγόταν να διατίθενται από τον SM 8, 16, 20,32 και 60 registers/thread, ενώ για καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις καταγραφόταν ο χρόνος εκτέλεσης του προγράμματος όταν ο kernel χρησιμοποιούσε 64, 128, 160, 192, 224 και 256 threads/block. Στο σχήμα 3.7 φαίνονται συγκεντρωμένα τα αποτελέσματα για τις εκτελέσεις⁻ για να διευκολύνεται η παρακολούθηση του σχολιασμού που ακολουθεί, δίπλα στο κάθε σημείο του γραφήματος δίνεται και ο βαθμός κατάληψης του SM για την κάθε περίπτωση.

Σε περίπτωση που δεν οριστεί κάποιος περιορισμός για τον αριθμό των registers που θα διατεθούν σε κάθε thread, τότε το πρόγραμμα θα εκτελείται αφιερώνοντας όσα χρειάζεται ο kernel για να λειτουργήσει, δηλαδή, στην συγκεκριμένη περίπτωση 60. Κρατώντας αυτό το δεδομένο και έχοντας υπόψη οτι για τις GPU υπολογιστικής ικανότητας 1.1, ο SM διαθέτει 8k registers (βλ. σχήμα 3.3), ο αριθμός των threads ανά block δεν μπορεί να ξεπερνάει τα 128 –προϋποθέτωντας βέβαια οτι ακολουθούνται οι οδηγίες της NVIDIA για καλύτερη απόδοση και ο αριθμός αυτός επιλέγεται να είναι πολλαπλάσιο του 32. Επομένως ο SM μπορεί να έχει ενεργά είτε 2 blocks των 64 threads, είτε ένα των 128, λειτουργώντας με βαθμό κατάληψης 17% όπως φαίνεται και στο διάγραμμα. Το ποσοστό αυτό είναι πολύ χαμηλό, και όπως φαίνεται από τους χρόνους εκτέλεσης, η απόδοση της GPU για αυτή τη ρύθμιση δεν είναι καλή.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, περιορίζοντας τον αριθμό των registers που θα χρησιμοποιήσει το κάθε thread αυξάνεται ο βαθμός κατάληψης, μειώνεται όμως η ταχύτητα μεταφοράς των δεδομένων λόγω του οτι η μνήμη που δεν αφιερώνεται από τους απαραίτητους registers, διατήθεται τώρα από την κεντρική μνήμη. Η ανταγωνιστική λειτουργία αυτών των δύο παραγόντων φαίνεται πολύ καθαρά για την περίπτωση των εκτελέσεων που έγιναν με ρύθμιση 32registers/thread. Στις περιπτώσεις που ο βαθμός κατάληψης ανεβαίνει από 17% σε 21% ή 25%, η αύξηση δεν αρκεί για να καλύψει την μείωση της ταχύτητας. Αντίθετα, για τις περιπτώσεις που ο βαθμός κατάληψης ανεβαίνει στο 33% (για 64, 128 και 256 threads/block), επιτυγχάνεται ένα καλό ποσοστό βελτίωσης του χρόνου



Σχήμα 3.7: Οι χρόνοι εκτέλεσης του προγράμματος στην GeForce 9300M GS για μεταβαλλόμενες παραμέτρους εκτέλεσης. Με ποσοστό υποδεικνύεται ο βαθμός κατάληψης για την κάθε περίπτωση.

εκτέλεσης του προγράμματος. Την ισορροπία της ανταγωνιστικής σχέσης που περιγράφεται, μπορεί να δει κανείς παρατηρώντας τα αποτελέσματα των εκτελέσεων για 128 threads/block και 8, 16 ή 20 regs/thread. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις είναι εκτελέσεις που χρησιμοποιούν διαφορετικές ρυθμίσεις και παρ΄ όλα αυτά πετυχαίνουν τον ίδιο χρόνο εκτέλεσης, ακριβώς λόγω αυτής της σχέσης.

Ο αριθμός των treads/block είναι μία επίσης σημαντική παράμετρος εκτέλεσης με την οποία μπορεί να ελέγξει κανείς τον βαθμό κατάληψης. Για παράδειγμα, στην περίπτωση που χρησιμοποιούνται 8 registers/thread, με 160 threads/block πετυχαίνει κανείς 83% βαθμό κατάληψης, ενώ με 128 ανεβαίνει στο 100%, έχοντας και την αντίστοιχη αύξηση σε απόδοση.

Ο μεγαλύτερος βαθμός κατάληψης, όμως, δεν σημαίνει και καλύτερη απόδοση, όπως είναι η περίπτωση για τις εκτελέσεις με 256 threads/block που χρησιμοποιούν 8 και 16 registers/thread. Στην δεύτερη περίπτωση που ο βαθμός κατάληψης φτάνει το 67% επιτυγχάνεται χρόνος εκτέλεσης λίγο καλύτερος από την πρώτη περίπτωση που είναι 100%.

Από όλες τις ρυθμίσεις για τις οποίες δοχιμάστηχε η απόδοση του χώδιχα, ταχύτερη εκτέλεση στην GPU επιτεύχθηχε με 64threads/block και αφιερώνοντας 16registers/thread, που στην περίπτωση αυτή ο βαθμός κατάληψης είναι 67%.

Tesla C1060

Οι μετρήσεις των επιδόσεων για διάφορες παραμέτρους εκτέλεσης σε αυτή την περίπτωση έγιναν για τον ίδιο κώδικα, μόνο που αυτή την φορά χρησιμοποιήθηκε πλέγμα 40000 σημείων και η εκτέλεση διαρκούσε 20000 χρονικά βήματα.

Οι SM στις GPU αυτής της υπολογιστικής ικανότητας (1.3) διαθέτουν 16k registers συνολικά –διπλάσιο αριθμό από οτι πριν–, όπως φαίνεται και από το σχήμα 3.3. Αυτό σημαίνει οτι βαθμός κατάληψης 100% για τον συγκεκριμένο κώδικα επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας 16 registers/thread και επομένως οι δοκιμές με 8 registers/thread δεν είχαν να προσφέρουν κάτι επιπλέον, για αυτό το λόγο και παραλήφθηκαν. Μία ακόμα μεγάλη διαφορά ανάμεσα στις δύο τεχνολογίες είναι οτι σε αυτή την περίπτωση κάθε SM μπορεί να έχει ενεργά έως και 1024 threads. Αυτό σημαίνει οτι ο βαθμός κατάληψης 100% που αναφέρθηκε για την περίπτωση που χρησιμοποιούνται 16 registers/thread, μπορεί και επιτυγχάνεται έχοντας ενεργά 8 blocks των 128threads, ή 4 blocks των 256threads! Όπως φαίνεται από το σχήμα 3.8, η επίδραση των παραμέτρων



Σχήμα 3.8: Η επίδραση των παραμέτρων εκτέλεσης στον χρόνο ολοκλήρωσης του run για την περίπτωση που χρησιμοποιείται η Tesla C1060

στον χρόνο ολοκλήρωσης της εκτέλεσης είναι τελείως διαφορετική από πριν. Εδώ η καθυστέρηση που προκαλείται στην μεταφορά των δεδομένων όταν οι registers αντικαθιστώνται από τμήματα της κεντρικής μνήμης, δεν αναπληρώνε-

92

ται σε καμία περίπτωση με την αύξηση του βαθμού κατάληψης. Είναι τέτοια η ταχύτητα με την οποία λειτουργούν οι SMs όταν αξιοποιούν τους registers, που οποιαδήποτε μείωσή τους, το μόνον που επιφέρει είναι μείωση της απόδοσης. Η ταχύτερη εκτέλεση του κώδικα σε αυτή την κάρτα γραφικών επιτεύχθηκε για 64threads/block και 60registers/thread. Με αυτές τις ρυθμίσεις οι SMs της συσκευής λειτουργούν με βαθμό κατάληψης μόλις 25%(!)

Αυτό που φαίνεται από τις παραπάνω δοχιμές είναι οτι η απόδοση ενός kernel κατά την εχτέλεσή του σε μία συσχευή επηρεάζεται από πολλές παραμέτρους. Ο τρόπος με τον οποίο θα επιδρούν ο αριθμός των threads/block, οι registers/thread χαι ο βαθμός χατάληψης μεταβάλλεται ανάλογα με τις απαιτήσεις του kernel σε πόρους, χαι τους πόρους που έχει να προσφέρει η συσχευή. Για να έχει, επομένως, χανείς τα χαλύτερα δυνατά αποτελέσματα από άποψη απόδοσης για έναν συγχεχριμένο αλγόριθμο, θα πρέπει να εντοπίζει πρώτα τον τρόπο με τον οποίο συνεισφέρει η χάθε παράμετρος εχτέλεσης στην απόδοση. Για το συγχεχριμένο πρόγραμμα που δοχιμάστηχε εδώ, ο αλγόριθμος δεν επιδέχεται μετατροπή ώστε να αξιοποιεί περισσότερη κοινή μνήμη για να ελαττωθεί ο αριθμός των απαιτούμενων registers. Σε χάποια άλλη περίπτωση που αυτό θα ήταν δυνατό, μία τέτοια έρευνα για αναζήτηση της βέλτιστης απόδοσης θα είχε επιπλέον χαι αυτή την παράμετρο, χαθότι όπως προαναφέρθηχε η χοινή μνήμη είναι ιδιαίτερα περιορισμένη χαι αυτή. Οπότε, όπως γίνεται εύχολα αντιληπτό, η διαδιχασία γίνεται αυτόματα πολύ πιο πολύπλοχη χαι επίπονη.

3.5.2 Σύγκριση Taylor με Runge Kutta

Στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχθηκε οτι η υλοποίηση της IDO με Runge Kutta χρονική εξέλιξη προσφέρει λιγότερη σταθερότητα και αριθμητική ακρίβεια από την περίπτωση που η χρονική εξέλιξη γίνεται με Taylor. Αυτό αντισταθμίζει το όφελος που έχει κανείς από τον λιγότερο χρόνο που απαιτείται με την Runge Kutta για την ολοκλήρωση ενός χρονικού βήματος. Για να γίνει περισσότερο δίκαιη η σύγκριση των δύο περιπτώσεων, πρέπει να υπάρχει και μία εκτίμηση του πόσο γρηγορότερος είναι ο αλγόριθμος αυτός από τον αντίστοιχο με Taylor χρονική εξέλιξη, όταν και στις δύο περιπτώσεις χρησιμοποιούνται τα ίδια dt, dx, μέγεθος πλέγματος και ο ίδιος αριθμός χρονικών βημάτων.

Οι παράλληλοι χώδιχες των δύο περιπτώσεων για το πρόβλημα των Two Interacting Blast Waves δοχιμάστηχαν για υπολογιστιχό πλέγμα 40000 σημείων και για 20000 βήματα. Οι παράμετροι της εχτέλεσης επιλέχθηχαν να είναι 128threads/block και 60registers/thread. Ο χρόνος εχτέλεσης του χώδιχα με Taylor χρονιχή εξέλιξη ήταν 61,596s, ενώ για Runge Kutta χρονιχή εξέλιξη ήταν 12,498s. Επομένως, για την περίπτωση που τα dx και dt είναι τέτοια που η IDO συγχλίνει και στις δύο περιπτώσεις, η Runge Kutta εφαρμογή της μεθόδου προσφέρει 4,9 φορές γρηγορότερη επίλυση.

3.5.3 Σύγκριση του παράλληλου με τον συμβατικό κώδικα

Έχοντας ολοκληρώσει τις δοκιμές που αναδεικνύουν ποιες ρυθμίσεις στις παραμέτρους εκτέλεσης αποδίδουν καλύτερα για τον παράλληλο κώδικα της IDO, το ερώτημα που παραμένει είναι το πόσο πιο γρήγορα από τον συμβατικό κώδικα εκτελούμενο στην CPU, εκτελείται ο παράλληλος στην GPU.



PHENOM CPU VS TESLA GPU

 $\Sigma \chi ήμα$ 3.9: Η επιτάχυνση του κώδικα της IDO κατά την επίλυσή της στην GPU σε σχέση με την CPU, σαν συνάρτηση του μεγέθους του υπολογιστικού πλέγματος.

Είναι γεγονός οτι με την σημερινή τεχνολογία που διατίθεται για την κατασκευή GPU, οι εκπληκτικές ταχύτητες που προσφέρουν και για τις οποίες τυχαίνουν αξιοσημείωτης αναγνώρισης, συνοδεύονται από ένα κρίσιμης σημασίας χαρακτηριστικό· οτι ισχύουν για αλγορίθμους που επιλύονται με πράξεις μεταξύ δεκαδικών αριθμών απλής ακρίβειας. Μέχρι στιγμής οι κάρτες γραφικών που έχουν την δυνατότητα να εκτελούν πράξεις με αριθμούς διπλής ακρίβειας, είναι αυτές υπολογιστικής ικανότητας 1.3 και 2.0, αλλά ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις υπάρχει σημαντική αρνητική επίπτωση (κατά έναν παράγοντα το ελάχιστο 4) στις επιδόσεις της GPU. Στην εργασία αυτή οι κώδικες κατασκευάστηκαν έτσι ώστε να περιέχουν μόνον απλής ακρίβειας δεκαδικούς ώστε να επιλύονται κατά το δυνατόν ταχύτερα. Δεδομένης αυτής της παραχώρησης που γίνεται κατά την μετατροπή του συμβατικού κώδικα σε παράλληλο, μπορεί κανείς να κρίνει κατά πόσο η μετάβαση αυτή είναι κάτι που εξυπηρετεί και επομένως προσφέρεται για αξιοποίηση ή όχι.

Για το διάγραμμα που φαίνεται στο σχήμα 3.9 χρησιμοποιήθηκε ο κώδικας επίλυσης της μεθόδου IDO και χρονική εξέλιξη Taylor για το Two Interacting Blast Waves πρόβλημα. Οι παράμετροι εκτέλεσης του παράλληλου κώδικα επιλέχθηκε να είναι 64threads/block και 60registers/thread. Το διάγραμμα δείχνει πόσες φορές ταχύτερα επιλύεται ο χώδιχας IDO με χρονιχή εξέλιξη Taylor στην GPU από οτι στην CPU, σαν συνάρτηση του μεγέθους του υπολογιστιχού πλέγματος. Είναι εμφανές οτι αυξάνοντας το μέγεθος του πλέγματος, μεταβάλλεται –προς το δυσκολότερο– η παράμετρος του προβλήματος που είναι κατασκευασμένη για να αντιμετωπίζει η τεχνολογία CUDA. Επομένως, όσο μεγαλύτερο είναι το πλέγμα, τόσο περισσότερο αποτελεσματική φαίνεται η επιλογή του παράλληλου κώδικα έναντι του συμβατικού. Ένα σημείο που αξίζει να σχολιαστεί από το διάγραμμα είναι οτι ενώ εχεί που το μέγεθος του πλέγματος παίρνει τιμές περίπου 80000 και φαίνεται οτι η σχέση που απεικονίζεται φτάνει σε ένα πλατώ, για πλέγμα μεγέθους 100000 φαίνεται οτι η επίλυση στην GPU έχει αχόμα μεγαλύτερο πλεονέχτημα, χωρίς όμως να είναι έτσι στην πραγματικότητα· αυτό που συμβαίνει είναι οτι για εκείνα τα μεγέθη πλέγματος, δεν αρκεί η stack μνήμη του συστήματος για την υλοποίηση του συμβατιχού χώδιχα, με αποτέλεσμα να χρησιμοποιείται μέρος της RAM. Αυτό λειτουργεί ανασταλτικά στην ταχύτητα εκτέλεσης του συμβατικού κώδικα στην CPU, δυσχεραίνοντας αχόμα περισσότερο την θέση του σε αυτό το διάγραμμα.

3.6 Συμπεράσματα

Είναι εμφανές οτι η νέα αυτή τεχνολογία που προσφέρει εκατοντάδες cores σε μία και μόνο κάρτα γραφικών, έχει να αποφέρει πολύ σημαντικά οφέλη στην επιστημονική κοινότητα. Συνοδευόμενη από ένα απλό και εύχρηστο προγραμματιστικό μοντέλο υπόσχεται να αυξάνει την παραγωγικότητα αυτών που ενδιαφέρονται να την εκμεταλλευτούν κατά ένα πολύ μεγάλο ποσοστό. Η ανάλυση που προηγήθηκε δείχνει οτι ακόμα και η μετατροπή ενός συμβατού κώδικα σε παράλληλο, χωρίς ιδιαίτερες βελτιώσεις και απλά με προσεγμένες επιλογές των παραμέτρων εκτέλεσης οδηγεί σε εκπληκτική βελτίωση των χρόνων εκτέλεσης του προγράμματος.

Δίνοντας τόσο καλά αποτελέσματα και ώντας μία τεχνολογία η οποία είναι ακόμα νέα και εξελίσσεται ραγδαία, καθιστά την μετάβαση στην παράλληλη προγραμματιστική λογική μονόδρομο.

Ο κώδικας που υλοποιεί την μέθοδο IDO σε CUDA C παρατήθεται στο Παράρτημα Ε'

96

Αποδείξεις σχέσεων χεφαλαίου θεωρίας

Α΄.1 Απόδειξη 1

 $\alpha \pi \acute{o}$ wiki: Relations between heat capacities :

$$dv = \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p dT$$

για dv = 0 :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_{v} = -\frac{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_{p}}{\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_{T}} = \frac{a}{\beta}$$
(A'.1)

Α΄.2 Απόδειξη 2

 Δ είχνεται οτι ισχύει η σχέση

$$e = \frac{p \cdot v}{\gamma - 1}$$

Το $\gamma-1$ ισούται με

$$\gamma - 1 = \frac{c_p}{c_v} - \frac{c_v}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \frac{R}{c_v}$$

και επομένως :

$$e = \frac{p \cdot v}{\gamma - 1} = \frac{p \cdot v}{R} c_v \xrightarrow{p \cdot v = R \cdot T} \frac{p \cdot v \cdot C_v \cdot T}{p \cdot v} \Rightarrow e = C_v \cdot T$$
(A'.2)

που είναι σχέση χαρακτηριστική για calorically ideal gases

Α΄.3 Απόδειξη 3

Θεωρείτα η caloric EOS $h=h(p,\rho)$ επομένως

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} dp + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p} d\rho$$

αλλά επίσης

$$dh = T \, ds + v \, dp = T \, ds + v \left(\left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_\rho ds \right)$$

Στην περίπτωση που μελετάται τώρα θεωρείται s=ct καθότι στον ορισμό είναι $a=\sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}$ επομένως

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} dp + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p} d\rho = T ds + v \left[\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s} d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho} ds\right]$$
(A'.3)

αχολουθεί διαίρεση με το $d\rho$ του $2^{\rm ou}$ μέλους:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho}\frac{dp}{d\rho} + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p}\frac{d\rho}{d\rho} = v\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s}$$

To $\frac{dp}{d\rho}$ του 1^{ου} μέλους για την περίπτωση s = ct που εξετάζεται μπορεί να γίνει $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s$ (το αντίστροφο δεν γίνεται)

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s} \left[\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} - v \right] = -\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p} \Rightarrow a^{2} = \frac{-\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_{p}}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_{\rho} - \frac{1}{\rho}}$$
(A'.4)

Α΄.4 Απόδειξη 4

Στον πίνακ
αA(u)αντικαθήστανται τα $u_{1,2,3}$ ώστε ο πίνακας να περι
έχει μόνον u, γ, a

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_1} = -\frac{1}{2}(\gamma - 3)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = -\frac{1}{2}(\gamma - 3)u^2 \tag{A'.5}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u_2} = (3 - \gamma) \left(\frac{u_2}{u_1}\right) = (3 - \gamma)u \tag{A'.6}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_1} = -\frac{\gamma u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 = -\gamma \frac{u}{\rho} E + (\gamma - 1) u^3 \tag{A'.7}$$

Α΄.5. ΑΠΌΔΕΙΞΗ 5

Αλλά αυτό ισούται (λόγω της (1.85))με

$$\begin{split} \frac{E}{\rho} &= \frac{1}{2}u^2 + e^{(1.86)} \frac{1}{2}u^2 + \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \stackrel{(1.80)}{=} \frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)} \\ \stackrel{(A'.7)}{\Rightarrow} \frac{\partial f_3}{\partial u_1} &= -\gamma u \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)}\right) + (\gamma - 1)u^3 = \\ &= -\frac{1}{2}\gamma u^3 - \frac{ua^2}{\gamma - 1} + (\gamma - 1)u^3 = \\ &= u^3((\gamma - 1) + \frac{1}{2}\gamma) - \frac{a^2u}{\gamma - 1} \\ \stackrel{(A'.8)}{\frac{\partial f_3}{\partial u_2}} &= \frac{\gamma u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \gamma \frac{E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 = \\ &= \gamma \left(\frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)}\right) - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 \\ &= \frac{a^2}{\gamma - 1} + (\frac{1}{2}\gamma - \frac{3}{2}\gamma + \frac{3}{2})u^2 = \frac{a^2}{\gamma - 1} + (\frac{3}{2} - \gamma)u^2 \end{split}$$
(A'.9)

Α΄.5 Απόδειξη 5

Τα $\frac{\partial f_2}{\partial u_i}$ αποδεικνύονται όπως και στην προηγούμενη απόδειξη.

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_1} = -\frac{\gamma u_2 u_3}{u_1^2} + (\gamma - 1) \left(\frac{u_2}{u_1}\right)^3 = -\gamma u \frac{E}{\rho} + (\gamma - 1) u^3$$
(A'.10)

Το $\frac{E}{\rho}$ από την (1.89)

$$H = \frac{(E+p)}{\rho} \Rightarrow \frac{E}{\rho} = H - \frac{p}{\rho} \tag{A'.11}$$

και επίσης

$$\frac{p}{\rho} = h - e = H - \frac{1}{2}u^2 - e = H - \frac{1}{2}u^2 - \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} \Rightarrow$$
$$\frac{p}{\rho} \left(1 + \frac{1}{(\gamma - 1)}\right) = H - \frac{1}{2}u^2 \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{H - \frac{1}{2}u^2}{1 + \frac{1}{\gamma - 1}}$$
(A'.12)

Επομένως θα είναι

$$\frac{E}{\rho} = H - \frac{H - \frac{1}{2}u^2}{1 + \frac{1}{\gamma - 1}} = H - \frac{H - \frac{1}{2}u^2}{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} =$$

$$= \frac{\gamma H - (\gamma - 1)(H - \frac{1}{2}u^2)}{\gamma} = \frac{\gamma H - \gamma H + \frac{1}{2}\gamma u^2 + H - \frac{1}{2}u^2}{\gamma}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}u^2(\gamma - 1) + H}{\gamma} = \frac{E}{\rho}$$
(A'.13)

και τότε

$$(\mathbf{A}'.\mathbf{10}) = -u \left[\frac{1}{2}u^2(\gamma - 1) + H\right] + (\gamma - 1)u^3 =$$
$$= u[u^2(\gamma - 1) - \frac{1}{2}u^2(\gamma - 1) - H] = u[\frac{1}{2}u^2(\gamma - 1) - H] \quad (\mathbf{A}'.\mathbf{14})$$

Για το $\frac{\partial f_3}{\partial u_2}$ θα είναι:

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_2} = \frac{\gamma u_3}{u_1} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{u_2}{u_1}\right)^2 = \gamma \frac{E}{\rho} - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2$$
(A'.15)

Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται και πάλι η σχέση

$$\frac{E}{\rho} = \frac{\frac{1}{2}u^{2}(\gamma - 1) + H}{\gamma}$$
(A'.16)

και επομένως η (A'.15) γίνεται:

$$(\mathbf{A}'.\mathbf{15}) = \frac{1}{2}u^2(\gamma - 1) + H - \frac{3}{2}(\gamma - 1)u^2 = \frac{1}{2}u^2(\gamma - 1)(1 - 3) + H = H - u^2(\gamma - 1)$$
(A'.17)

και τέλος

$$\frac{\partial f_3}{\partial u_3} = \gamma \cdot u \tag{A'.18}$$

Α΄.6 Απόδειξη 6

$$(1.127) \stackrel{e=p/(\gamma-1)\rho}{\Longrightarrow} \frac{p_*}{(\gamma-1)\rho_*} - \frac{p_R}{(\gamma-1)\rho_R} = \frac{1}{2}(p_*+p_R) \left[\frac{\rho_*-\rho_R}{\rho_*\rho_R}\right] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{p_*}{\rho_*} - \frac{p_R}{\rho_R} = \frac{1}{2}(p_*+p_R)(\gamma-1) \left[\frac{\rho_*-\rho_R}{\rho_*\rho_R}\right]$$
$$\Rightarrow \rho_R p_* - p_R \rho_* = \frac{1}{2}(\gamma-1)(p_*+p_R)(\rho_*-\rho_R)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{r}p_{*} - p_{R}\rho_{*}}{(\rho_{*} - \rho_{R})(p_{*} + p_{R})} = \frac{p_{R'}}{\rho_{R}} \frac{\left(\frac{\rho_{R}p_{*}}{p_{R}} - \rho_{*}\right)}{(\rho_{*} - \rho_{R})\left(\frac{p_{*}}{p_{R}} + 1\right)}$$

$$= \frac{\rho_{R'}}{\rho_{R}} \frac{\left(\frac{p_{*}}{p_{R}} - \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}}\right)}{\left(\frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} - 1\right)\left(\frac{p_{*}}{p_{R}} + 1\right)} = \frac{1}{2}(\gamma - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_{*}}{\rho_{R}} - \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} = \frac{1}{2}(\gamma - 1)\left(\frac{\rho_{*}}{\rho_{R}}\frac{p_{*}}{p_{R}} + \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} - \frac{p_{*}}{p_{R}} - 1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p_{*}}{p_{R}} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{p_{*}}{p_{R}} + \frac{1}{2}(\gamma - 1) - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{\rho_{*}}{\rho_{R}}\frac{p_{*}}{p_{R}} =$$

$$= \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} \left(\frac{1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}}{\frac{\gamma + 1}{p_{R}}}\right) = \frac{p_{*}}{p_{R}} \left(\frac{1 + \frac{(\gamma - 1)}{2}}{\frac{\gamma + 1}{p_{R}}}\right) + \frac{1}{2}(\gamma - 1)\left(1 - \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}}\frac{p_{*}}{p_{R}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} = \frac{p_{*}}{p_{R}} \cdot \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + 1 - \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}}\frac{p_{*}}{p_{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} \left(\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} + \frac{p_{*}}{p_{R}}\right) = \frac{p_{*}(\gamma + 1) + p_{R}(\gamma - 1)}{\frac{p_{R}(\gamma - 1)}{p_{R}(\gamma - 1)}} \times \frac{1}{(\gamma + 1)p_{R}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} = \frac{\frac{p_{*}}{p_{R}} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{\gamma + 1}{p_{R}}} = \frac{\frac{p_{*}(\gamma + 1) + p_{R}(\gamma - 1)}{\frac{p_{R}(\gamma - 1)}{p_{R}(\gamma - 1)}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_{*}}{\rho_{R}} = \frac{\frac{p_{*}}{p_{R}} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}}{\frac{\gamma + 1}{p_{R}}} = \frac{p_{*}(\gamma + 1) + p_{R}(\gamma - 1)}{\frac{p_{R}(\gamma - 1)}{p_{R}(\gamma - 1)}} \times (A'.19)$$

Α΄.7 Απόδειξη 7

Η λύση $W_{Lfan} = (\rho, u, p)^T$ μέσα στο αριστερό Rarefaction fan. Οι σχέσεις που αξιοποιούνται:

η κλίση της χαρακτηριστικής
$$\frac{x}{t} = u - a$$
 (A'.20)

Generalized Riemann Invariants
$$u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = u + \frac{2a}{\gamma - 1}$$
 (A'.21)

Η ταχύτητα του ήχου
$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$
 (A'.22)

Ο ισεντροπικός νόμος
$$p = c \rho^{\gamma} \rightarrow \frac{p}{p_L} = \frac{\rho^{\gamma}}{\rho_L^{\gamma}}$$
 (A'.23)

Απόδειξη σχέσης για το u

$$\begin{array}{l} (\mathbf{A}'.20) \Rightarrow u = \frac{x}{t} + a \\ (\mathbf{A}'.21) \Rightarrow u_L(\gamma - 1) + 2a_L = u(\gamma - 1) + 2a \Rightarrow \\ \Rightarrow a = \frac{(\gamma - 1)}{2} u_L - \frac{(\gamma - 1)}{2} u + a_L \end{array} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow u = \frac{x}{t} + \frac{(\gamma - 1)}{2} u_L - \frac{(\gamma - 1)}{2} u + a_L \\ \Rightarrow u \underbrace{\left(1 + \frac{\gamma - 1}{2}\right)}_{\frac{\gamma + 1}{2}} = \frac{x}{t} + \frac{(\gamma - 1)}{2} u_L + a_L \\ \Rightarrow u = \frac{2}{\gamma + 1} (a_L + \frac{\gamma - 1}{2} u_L + \frac{x}{t}) \end{array}$$
 (A'.24)

Απόδειξη σχέσης για το ρ:

$$(\mathbf{A}'.22) \Rightarrow \frac{a}{a_L} = \sqrt{\frac{\gamma_{\rho}^p}{\gamma_{\rho_L}^{p_L}}} \stackrel{(\mathbf{A}'.23)}{=} \sqrt{\frac{c \cdot \frac{\rho^{\gamma}}{\rho}}{c \cdot \frac{\rho_L^{\gamma}}{\rho_L}}}$$
(A'.25)

Σε αυτό το σημείο πρέπει να τονιστεί οτι τα δύο cείναι ίδια επειδή πρόκειται για ισεντροπική ροή. Γενικά το c διαφέρει από διαδρομή σε διαδρομή, αλλά είναι ίδιο κατά μήκος του domain της ροής για ισεντροπικές ροές.

$$(\mathbf{A}'.\mathbf{25}) \Rightarrow \frac{a}{a_L} = \sqrt{\frac{\rho^{\gamma-1}}{\rho_L^{\gamma-1}}} = \left(\frac{\rho}{\rho_L}\right)^{\frac{\gamma-1}{2}} \tag{A'.26}$$

Επίσης

$$(\mathbf{A}'.21) \stackrel{(\mathbf{A}'.20)}{\Rightarrow} u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = \frac{x}{t} + a + \frac{2a}{\gamma - 1}$$
$$\Rightarrow u_L + \frac{2a_L}{\gamma - 1} = \frac{x}{t} + a\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}$$
$$\Rightarrow u_L \frac{\gamma - 1}{2a_L} + 1 = \frac{x}{t}\frac{\gamma - 1}{2a_L} + a\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\frac{\gamma - 1}{2a_L}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{a_L} = \left[1 + \frac{\gamma - 1}{2a_L}\left(u_L - \frac{x}{t}\right)\right] \cdot \frac{2}{\gamma + 1}$$
$$\stackrel{(\mathbf{A}'.26)}{\Rightarrow} \left(\frac{\rho}{\rho_L}\right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} = \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}\frac{1}{a_L}(u_L - \frac{x}{t})$$
$$\Rightarrow \rho = \rho_L \cdot \left[\frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\gamma - 1}{(\gamma + 1)a_L}\left(u_L - \frac{x}{t}\right)\right]^{\frac{2}{\gamma - 1}}$$
(A'.27)

Απόδειξη σχέσης για το p:

Χρησιμοποιώντας την σχέση (Α΄.23), εύχολα φαίνεται οτι η σχέση για το pείναι

Α΄.7. ΑΠΌΔΕΙΞΗ 7

ίδια με την αντίστοιχη για το $\rho,$ το μόνο που αλλάζει είναι ο εκθέτης που από $\frac{2}{\gamma-1}$ γίνεται $\frac{2\gamma}{\gamma-1}$

104ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α΄. ΑΠΟΔΕΊΞΕΙΣ ΣΧΈΣΕΩΝ ΚΕΦΑΛΑΊΟΥ ΘΕΩΡΊΑΣ

Παράρτημα Β΄

Σχέσεις απαραίτητες για την υπολογιστική υλοποίηση των εξισώσεων του Euler με IDO

Ανάπτυξη των σχέσεων (2.13) ώστε να υλοποιούνται με την μέθοδο IDO, όταν για την χρονική εξέλιξη χρησιμοποιούνται αναπτύγματα Taylor

$$\rho_t = -\rho_x u - \rho u_x \tag{B'.1}$$

$$\rho_{tx} = -\rho_{xx}u - 2\rho_x u_x - \rho \tilde{u}_{xx} \tag{B'.2}$$

$$\rho_{txx} = -u_{xx}\rho_x - 2u_x\rho_{xx} - u\rho_{3x} - \tilde{u}_{3x}\rho - 2\tilde{u}_{xx}\rho_x - u_x\tilde{\rho}_{xx}$$
(B'.3)

$$u_t = -uu_x - (p_x + q_x)/\rho \tag{B'.4}$$

$$u_{tx} = -u_x^2 - uu_{xx} - (p_{xx} + q_{xx})/\rho + (p_x + q_x)\rho_x/\rho^2$$
(B'.5)

$$u_{txx} = -3u_x u_{xx} - u u_{3x} - (p_{3x} + q_{3x})/\rho + 2(p_{xx} + q_{xx})\rho_x/\rho^2 + (p_x + q_x)\tilde{\rho}_{xx}/\rho^2 - 2(p_x + q_x)\rho_x^2/\rho^3$$
(B'.6)

$$u_{t3x} = -3u_{xx}^2 - 4u_x u_{3x} - (p_{4x} + q_{4x})/\rho + 3(p_{3x} + q_{3x})\rho_x/\rho^2 + 3(p_{xx} + q_{xx})\tilde{\rho}_{xx}/\rho^2 - 6(p_{xx} + q_{xx})\rho_x^2/\rho^3 + (p_x + q_x)\tilde{\rho}_{3x}/\rho^2 - 6(p_x + q_x)\rho_x\tilde{\rho}_{xx}/\rho^3 + 6(p_x + q_x)\rho_x^3/\rho^4$$
(B'.7)

$$e_t = -ue_x - (p+q)u_x/\rho \tag{B'.8}$$

$$e_{tx} = -u_x e_x - u e_{xx} - (p_x + q_x) u_x / \rho - (p+q) \tilde{u}_{xx} / \rho + (p+q) u_x \rho_x / \rho^2$$
(B'.9)

$$e_{txx} = -u_{xx}e_x - 2u_xe_{xx} - ue_{3x} - (p_{xx} + q_{xx})u_x/\rho$$

- 2(p_x + q_x)\tilde{u}_{xx}/\rho + 2(p_x + q_x)u_x\rho_x/\rho^2 - (p+q)\tilde{u}_{3x}/\rho
+ 2(p+q) $\tilde{u}_{xx}\rho_x/\rho^2 + (p+q)u_x\tilde{\rho}_{xx}/\rho^2 - 2(p+q)u_x\rho_x^2/\rho^3$ (B'.10)

$$\rho_{tt} = -u_t \rho_x - u \rho_{tx} - u_{tx} \rho - u_x \rho_t$$

$$\rho_{ttx} = -2u_{tx} \rho_x - u_t \rho_{xx} - u_x \rho_{tx} - u \rho_{txx} - u_{txx} \rho - \tilde{u}_{xx} \rho_t - u_x \tilde{\rho}_{tx}$$
(B'.11)
(B'.12)

$$u_{tt} = -u_t u_x - u u_{tx} - (p_{tx} + q_{tx})/\rho + (p_x + q_x)\rho_t/\rho^2$$
(B'.13)

$$u_{ttx} = -2u_{tx} u_x - u_t u_{xx} - u u_{txx} - (p_{txx} + q_{txx})/\rho + (p_{xx} + q_{xx})\rho_t/\rho^2 + (p_{tx} + q_x)\rho_t/\rho^2 + (p_x + q_x)\tilde{\rho}_{tx}/\rho^2 - 2(p_x + q_x)\rho_x\rho_t/\rho^3$$
(B'.14)

$$e_{tt} = -u_t e_x - u e_{tx} - (p_t + q_t) u_x / \rho - (p + q) \tilde{u}_{tx} / \rho$$

$$+ (p + q) u_x \rho_t / \rho^2$$

$$e_{ttx} = -u_{tx} e_x - u_x e_{tx} - u_t e_{xx} - u e_{txx} - (p_{tx} + q_{tx}) u_x / \rho$$

$$- (p_x + q_x) \tilde{u}_{tx} / \rho + (p_x + q_x) u_x \rho_t / \rho^2 - (p_t + q_t) \tilde{u}_{xx} / \rho$$

$$- (p + q) \tilde{u}_{txx} / \rho + (p + q) \tilde{u}_{xx} \rho_t / \rho^2 + (p_t + q_t) u_x \rho_x / \rho^2$$

$$+ (p + q) \tilde{u}_{tx} \rho_x / \rho^2 + (p + q) u_x \tilde{\rho}_{tx} / \rho^2 - 2(p + q) u_x \rho_x \rho_t / \rho^3$$
(B'.15)
(B'.15)

Η πίεση δίνεται από την καταστατική εξίσωση $p = (\gamma - 1)\rho e$ και οι παράγωγοί της που χρησιμοποιούνται στις παραπάνω σχέσεις έχουν ως εξής:

$$p_x = p_\rho \rho_x + p_e e_x = (\gamma - 1)(\rho_x e + \rho e_x)$$
 (B'.17)

$$p_{xx} = (\gamma - 1)(\tilde{\rho}_{xx}e + 2\rho_x e_x + \rho \tilde{e}_{xx}) \tag{B.18}$$

$$p_{3x} = (\gamma - 1)(\tilde{\rho}_{3x}e + 3\tilde{\rho}_{xx}e_x + 3\rho_x\tilde{e}_{xx} + \rho\tilde{e}_{3x})$$
(B'.19)

$$p_{4x} = (\gamma - 1)(\tilde{\rho}_{4x}e + 4\tilde{\rho}_{3x}e_x + 6\tilde{\rho}_{xx}\tilde{e}_{xx} + 4\rho_x\tilde{e}_{3x} + \rho\tilde{e}_{4x})$$
(B'.20)

$$p_t = (\gamma - 1)(\rho_t e + e_t \rho) \tag{B'.21}$$

$$p_{tx} = (\gamma - 1)(\rho_{tx}e + \rho_x e_t + \rho_t e_x + \rho e_{tx})$$
(B'.22)

$$p_{txx} = (\gamma - 1)(\rho_{txx}e + \tilde{\rho}_{xx}e_t + 2\rho_{tx}e_x + 2\rho_xe_{tx} + \rho_t\tilde{e}_{xx} + \rho_{etxx}) \quad (B'.23)$$

Οι ίδιες παράγωγοι πρέπει να υπολογιστούν και για το τεχνητό ιξώδες. Όπως αναλύεται στις εξισώσεις $2.15\alpha'$ και $2.15\beta'$, το τεχνητό ιξώδες αποτελείται από δύο όρους $q = q_A + q_b$, και για καλύτερη παρουσίαση οι παράγωγοί τους αναλύονται ξεχωριστά.

Για τον πρώτο όρο $q_A=-a\rho C_s u_x \Delta x$ οι χωρικές παράγωγοι θα είναι:

$$q_{A,x} = -aC_s\Delta x(\rho_x u_x + \rho \tilde{u}_{xx}) \tag{B'.24}$$

$$q_{A,xx} = -aC_s\Delta x(\tilde{\rho}_{xx}u_x + 2\rho_x\tilde{u}_{xx} + \rho\tilde{u}_{3x}) \tag{B'.25}$$

$$q_{A,3x} = -aC_s\Delta x(\tilde{\rho}_{3x}u_x + 3\tilde{\rho}_{xx}\tilde{u}_{xx} + 3\rho_x\tilde{u}_{3x} + \rho\tilde{u}_{4x}) \tag{B'.26}$$

$$q_{A,4x} = -aC_s\Delta x(\tilde{\rho}_{4x}u_x + 4\tilde{\rho}_{3x}\tilde{u}_{xx} + 6\tilde{\rho}_{xx}\tilde{u}_{3x} + 4\rho_x\tilde{u}_{4x} + \rho\tilde{u}_{5x}) \quad (B'.27)$$

και επίσης θα είναι:

$$q_{A,t} = -aC_s\Delta x(\rho_t u_x + \rho u_{tx}) \tag{B'.28}$$

$$q_{A,tx} = -aC_s\Delta x(\rho_{tx}u_x + \rho_x u_{tx} + \rho_t \tilde{u}_{xx} + \rho u_{txx})$$

$$(B'.29)$$

$$q_{A,txx} = -aC_s\Delta x(\rho_{txx}u_x + \tilde{\rho}_{xx}u_{tx} + 2\rho_{tx}\tilde{u}_{xx} + 2\rho_x u_{txx} + \rho_t\tilde{u}_{3x} + \rho_t u_{t3x})$$
(B'.30)

Ενώ για το δεύτερο όρο $q_B=b\rho u_x^2\Delta x^2$ οι χωρικές παράγωγοι έχουν ως εξής:

$$q_{B,x} = b\Delta x^2 (\rho_x u_x^2 + 2\rho u_x \tilde{u}_{xx})$$
(B'.31)

$$q_{B,xx} = b\Delta x^{2}(\tilde{\rho}_{xx}u_{x}^{2} + 2\rho_{x}u_{x}\tilde{u}_{xx} + 2\rho_{x}u_{x}\tilde{u}_{xx} + 2\rho\tilde{u}_{xx}^{2} + 2\rho u_{x}\tilde{u}_{3x}) \quad (B'.32)$$

$$q_{B,xx} = b\Delta x^{2}(\tilde{\rho}_{xx}u_{x}^{2} + 6\tilde{\rho}_{xx}u_{x}\tilde{u}_{xx} + 2\rho\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{xx} + 2\rho\tilde{u}_{xx}\tilde{u}_{3x}) \quad (B'.32)$$

$$q_{B,3x} = b\Delta x^{2} (\tilde{\rho}_{3x} u_{x}^{2} + 6\tilde{\rho}_{xx} u_{x} \tilde{u}_{xx} + 6\rho_{x} \tilde{u}_{xx}^{2} + 6\rho_{x} u_{x} \tilde{u}_{3x} + 6\rho \tilde{u}_{xx} \tilde{u}_{3x} + 2\rho u_{x} \tilde{u}_{4x})$$
(B'.33)

$$q_{B,4x} = b\Delta x^2 (\tilde{\rho}_{4x} u_x^2 + 8\tilde{\rho}_{3x} u_x \tilde{u}_{xx} + 12\tilde{\rho}_{xx} \tilde{u}_{xx}^2 + 12\tilde{\rho}_{xx} u_x \tilde{u}_{3x} + 24\rho_x \tilde{u}_{xx} \tilde{u}_{3x} + 8\rho_x u_x \tilde{u}_{4x} + 6\rho \tilde{u}_{3x}^2 + 8\rho \tilde{u}_{xx} \tilde{u}_{4x} + 2\rho u_x \tilde{u}_{5x})$$
(B'.34)

και επίσης είναι:

$$q_{B,t} = b\Delta x^{2}(\rho_{t}u_{x}^{2} + 2\rho u_{x}u_{tx})$$
(B'.35)

$$q_{B,tx} = b\Delta x^{2}(\rho_{tx}u_{x}^{2} + 2\rho_{t}u_{x}\tilde{u}_{xx} + 2\rho_{x}u_{x}u_{tx} + 2\rho\tilde{u}_{xx}u_{tx} + 2\rho u_{x}u_{txx})$$
(B'.36)

$$q_{B,txx} = b\Delta x^{2}(\rho_{txx}u_{x}^{2} + 4\rho_{tx}u_{x}\tilde{u}_{xx} + 2\rho_{t}\tilde{u}_{xx}^{2} + 2\rho_{t}u_{x}\tilde{u}_{3x} + 2\tilde{\rho}_{xx}u_{x}u_{tx}$$
(B'.37)

$$q_{B,txx} = b\Delta x^{2}(\rho_{txx}u_{x}^{2} + 4\rho_{tx}u_{x}\tilde{u}_{xx} + 2\rho_{t}\tilde{u}_{3x}^{2} + 2\rho_{t}u_{x}\tilde{u}_{3x} + 2\tilde{\rho}_{xx}u_{x}u_{tx}$$
(B'.37)

Όπου σε όλες αυτές τις εξισώσεις, για τους όρους με το σύμβολο ~λαμβάνεται υπόψη κεντρική παρεμβολή (από το σημείο (i-1) έως το (i+1)) για τον υπολογισμό χωρικών παραγώγων 2^{ης} τάξης και άνω.

108ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β΄. ΣΧΈΣΕΙΣ ΑΠΑΡΑΊΤΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΉ ΥΛΟΠΟΊΗΣΗ
Παράρτημα Γ΄

Κώδικας υλοποίησης της ακριβούς λύσης

Ακολουθεί ο κώδικας σε C++ που υλοποιεί την ακριβή λύση των μονοδιάστατων εξισώσεων του Euler στο πρόβλημα του Riemann.

\#include <iostream>
\#include <fstream>
\#include <fstream>
\#include <math.h>
\#include <string.h>
using namespace std;
const double g=1.4;
const double TOL=10e-6;
double p;
double alpha (double ro);
double betta (double pe);
double ssp (double ro, double pe);
double fshock (double ro, double pe);
double frare (double ro, double pe);
double ffunc (char type, double ro, double pe);
double f_shock (double ro, double pe);

```
double f_rare (double ro, double pe);
double f_func (char type, double ro, double pe);
double initp (int type, double rol, double ror, double pel, double per, double u
, double ur);
double ptr (double rol, double ror, double pel, double per, double ul, double u
double ppv (double rol, double ror, double pel, double per, double ul, double u
double pts (double rol, double ror, double pel, double per,
double ul, double ur);
double half (double pel, double per);
double rostar (char type, double ro, double pe);
double int_e (double ro, double pe);
double mabs (double a);
double test (double meta, double prin);
int main () {
//arxikes synthikes gia ola ta test
double tarol[] = {1., 1., 1., 1., 5.99924};
double taul[] = {.0, -2., .0, .0, 19.5975};
double tapel[] = {1., .4, 1000., .01, 460.894};
double taror[] = {.125, 1., 1., 1., 5.99242};
double taur[] = {.0, 2., .0, .0, -6.19633};
double taper[] = {.1, .4, .01, 100., 46.0950};
char tatypes[5][2] = {{'r', 's'}, {'r', 'r'}, {'r', 's'}, {'s', 'r'}, {'s', 's'};
//o arithmos tou problhmatos
int pr;
//h methodos tou 1ou guess
int guess1;
cout << "eisagete ton arithmo tou problhmatos" << endl;</pre>
cin >> pr ;
//arxikopoihsh tou run
```

```
double rol= tarol[pr-1];
double ul= taul[pr-1];
double pel= tapel[pr-1];
double ror= taror[pr-1];
double ur= taur[pr-1];
double per= taper[pr-1];
char typel= tatypes[pr-1][0];
char typer= tatypes[pr-1][1];
cout << "\naristero kyma " << typel << " de3i kyma " << typer <<endl;</pre>
cout << "rol="<<rol<<" ul="<<ul<" pel="<<pel<<" ror="<<
ror<<" ur="<<ur<" per="<<per <<endl;</pre>
cout << "\neisagete thn methodo tou 1ou guess" << endl;</pre>
cout << "1:Ptr 2:Ppv 3:Pts 4:mean " <<endl;</pre>
cin >> guess1;
double newp = initp(guess1,rol,ror,pel,per,ul,ur);
switch (guess1) {
case 1:
cout << "Ptr = " << newp << endl;</pre>
break;
case 2:
cout << "Ppv = " << newp << endl;</pre>
break;
case 3:
cout << "Pts = " << newp << endl;</pre>
break;
case 4:
cout << "mean = " << newp << endl;</pre>
break;
default :
cout << "lathos epilogh arxikou guess " ;</pre>
}
double calc;
double check;
```

```
int count=0;
do {
p = newp;
calc = p - (ffunc(typel,rol,pel)+ffunc(typer,ror,per)+ur-ul)/
(f_func(typel,rol,pel)+f_func(typer,ror,per));
newp = (calc<0)? TOL : calc;</pre>
count++;
check = test (newp,p);
cout << "sthn " << count << "h epanalhpsh to apotelesma einai " << newp</pre>
<< " me relative change " << check << endl ;
} while (check> TOL);
cout << "\nmeta apo " << count << " epanalhpseis, to apotelesma einai: "</pre>
<< endl << newp << endl << endl ;
p = newp;
double Ustar = 1./2.*(ul + ur) + 1./2.*(ffunc(typer,ror,per)-ffunc(typel,rol,pe
cout << "To plhres ths lyshs exei ws e3hs :" << endl;</pre>
cout << "Pstar=" << p << " Ustar=" << Ustar</pre>
<<" ROstarl=" << rostar(typel,rol,pel) << " ROstarr="
 << rostar(typer, ror, per) << endl;
// ekkinhsh diadikasia sampling kai kataxwrhshs sto data.txt
11
ofstream record_p ("data_p.txt");
ofstream record_r ("data_r.txt");
ofstream record_u ("data_u.txt");
ofstream record_e ("data_e.txt");
double t ;
double x, xmin=-1, xmax=1, xstep=.01;
cout << " \n eisagete to xroniko diasthma gia probolh ";</pre>
cin >> t;
```

```
cout << "\n";</pre>
double rec_p, rec_r, rec_u ;
//ypologizontai ta endexomena shock speeds aristera kai de3ia
//gia na mhn ypologizontai se kathe epanalhpsh meta
double shock_sl = ul - ssp(rol,pel)*sqrt((g+1)/2./g*p/pel + (g-1)/2./g);
double shock_sr = ur + ssp(ror, per)*sqrt((g+1)/2./g*p/per + (g-1)/2./g);
//to idio kai gia ta head/tail twn endexomenwn rarefaction waves
double a_st_l = ssp(rol,pel) * pow(p/pel,(g-1)/2./g);
double a_st_r = ssp(ror,per) * pow(p/per,(g-1)/2./g);
double S_hl = ul - ssp(rol,pel);
double S_tl = Ustar - a_st_l;
double S_hr = ur + ssp(ror,per);
double S_tr = Ustar + a_st_r;
for (x = xmin+xstep ; x < xmax ; x += xstep ) {</pre>
if (x/t < Ustar) {
if (p > pel){
if (x/t < shock_sl) {</pre>
rec_p = pel;
rec_r = rol;
rec_u = ul;
} // endif aristera tou shock (L)
else if (x/t > shock_sl) {
rec_p = p;
rec_r = rostar('s',rol,pel);
rec_u = Ustar;
}
else cout << "warning";</pre>
```

```
} // end if gia shock aristera
else if (p < pel) { // ean einai rarefaction aristera</pre>
if (x/t < S_hl) { // eimaste sthn perioxh L
rec_p = pel;
rec_r = rol;
rec_u = ul;
} //endif eimaste aristera
else if ( x/t > S_hl && x/t < S_tl ) { // entos tou aristerou rarefaction
rec_p = pel * pow(2./(g+1) + (g-1)/(g+1)/ssp(rol,pel)*(ul - x/t) ,2.*g/(g-1));
rec_r = rol * pow(2./(g+1) + (g-1)/(g+1)/ssp(rol,pel)*(ul - x/t) ,2./(g-1));
rec_u = 2./(g+1)*(ssp(rol,pel) + (g-1)/2.*ul + x/t);
} //endif mesa sto rarefaction (1)
else if (x/t > S_tl) { //eimaste star region
rec_p = p;
rec_r = rostar('r',rol,pel);
rec_u = Ustar;
} // end if star region
else cout << "warning";</pre>
} // end if rarefaction aristera
else cout << "error" ;</pre>
} // endif aristera
else if ( x/t > Ustar) { // ean eimaste de3ia tou contact wave
if (p > per) { // de3i shock
if (shock_sr < x/t) {
rec_p = per;
rec_r = ror;
```

```
rec_u = ur;
}
else if (shock_sr > x/t) {
rec_p = p;
rec_r = rostar('s', ror, per);
rec_u = Ustar;
}
else cout << " warning ";</pre>
} // end if de3i shock
else if (p < per) { //de3i rarefaction</pre>
if ( x/t > S_hr) {
rec_p = per;
rec_r = ror;
rec_u = ur;
}
else if ( x/t < S_hr && x/t > S_tr) { // eimaste entos tou de3iou rarefaction
rec_p = per * pow(2./(g+1) - (g-1)/(g+1)/ssp(ror,per) * (ur - x/t),2.*g/(g-1));
rec_r = ror * pow(2./(g+1) - (g-1)/(g+1)/ssp(ror,per) * (ur - x/t),2./(g-1));
rec_u = 2./(g+1) * (-ssp (ror,per) + (g-1)/2.*ur + x/t);
}
else if (x/t < S_tr) {
rec_p = p;
rec_r = rostar( 'r', ror, per );
rec_u = Ustar;
}
else cout << "warning" ;</pre>
} // end if de3i rarefaction
```

```
else cout << "error";</pre>
} // endif de3ia
else cout << "warning";</pre>
record_p << x+1 << "\t" << rec_p << "\n" ;</pre>
record_r << x+1 << "\t" << rec_r << "\n" ;
record_u << x+1 << "\t" << rec_u << "\n" ;</pre>
record_e << x+1 << "\t" << int_e (rec_r,rec_p) << "\n" ;</pre>
} //end for gia thn prospelash tou x (sampling)
record_p.close();
record_r.close();
record_u.close();
record_e.close();
return 0;
}
//-----
// boh8htikes synarthseis - periexomeno
//-----
double alpha (double ro) {
return 2./(g+1)/ro;
}
double betta (double pe){
return (g-1)*pe/(g+1);
}
double ssp (double ro, double pe){
return sqrt(g*pe/ro);
}
//-----
```

```
// Oi f synarthseis - ylopoihsh
//-----
double fshock (double ro, double pe){
double a = alpha (ro);
double b = betta (pe);
return (p-pe)*sqrt(a/(p+b));
}
double frare (double ro, double pe) {
double a = ssp (ro,pe);
return 2.*a*(pow(p/pe,(g-1)/(2.*g))-1)/(g-1);
}
double ffunc (char type, double ro, double pe) {
if (type=='s') {return fshock(ro,pe);}
else if (type=='r') {return frare(ro,pe);}
else{
cout << "h ffunc exei lathos orisma type " << endl ;</pre>
return 0.0;
}
}
//-----
// oi f' synarthseis - ylopoihsh
//-----
double f_shock (double ro, double pe) {
double a=alpha(ro);
double b= betta(pe);
return sqrt(a/(b+p))*(1-(p-pe)/2./(b+p));
}
double f_rare (double ro, double pe) {
double a = ssp(ro,pe);
return 1./ro/a*pow(p/pe,-(g+1)/2./g);
}
double f_func (char type, double ro, double pe) {
if (type=='s') { return f_shock (ro,pe);}
else if (type=='r') {return f_rare (ro,pe);}
else {
cout << "h f_func exei lathos orisma type " <<endl;</pre>
return 0.0;
}
```

```
}
//-----
// oi synarthseis kathorismou tou arxikou p
//-----
double initp (int type, double rol, double ror,
double pel, double per, double ul, double ur) {
switch (type) {
case 1:
return ptr(rol,ror,pel,per,ul,ur);
break;
case 2:
return ppv(rol,ror,pel,per,ul,ur);
break;
case 3:
return pts(rol,ror,pel,per,ul,ur);
break;
case 4:
return half(pel,per);
break;
default :
cout << "sfalma ston kathorismo tou p0" ;</pre>
return 0;
}
}
double ptr (double rol, double ror, double pel, double per, double ul, double u
double al=ssp(rol,pel);
double ar=ssp(ror,per);
double par= (g-1)/2./g;
return pow((al+ar-1./2.*(g-1)*(ur-ul))/(al/pow(pel,par)+ar/pow(per,par)),1./par
}
double ppv (double rol, double ror, double pel, double per, double ul, double u
double par = 1./2.*(pel+per)-1./8.*(ur-ul)*(rol+ror)*(ssp(rol,pel)+ssp(ror,per)
return ((TOL>=par) ? TOL : par);
}
```

double pts (double rol, double ror, double pel, double per, double ul, double ur){

```
double par = ppv(rol,ror,pel,per,ul,ur);
double geel = sqrt(alpha(rol)/(par+betta(pel)));
double geer = sqrt(alpha(ror)/(par+betta(per)));
double sxesh = (geel*pel + geer*per -ur +ul)/(geel + geer);
return ((TOL>=sxesh) ? TOL : sxesh);
}
double half (double pel, double per){
return 1./2.*(pel+per);
}
//-----
//boh8htikes synarthseis
//-----
double mabs (double a) {
return ((a<0) ? (-a) : a);
}
double test (double meta, double prin) {
return mabs(meta - prin)/(1./2.*(meta + prin));
}
//-----
//to r-star gia thn plhrh lysh
//-----
double rostar (char type, double ro, double pe) {
switch (type) {
case 's':
return ro*(p/pe + (g-1)/(g+1))/((g-1)/(g+1)*p/pe +1);
break;
case 'r':
return ro*pow(p/pe,1./g);
break;
default :
cout << "\n\nfunction rostar: sfalma sthn metablhth type\n\n";</pre>
return .0;
break;
}
}
```

120ПАРАРТНМА Г'. К'Ω
ΔІКАΣ ΥΛΟΠΟΊΗΣΗΣ ΤΗΣ ΑΚΡΙΒΟΎΣ ΛΎΣΗΣ

double int_e (double ro, double pe) { // ypologismos eswterikhs energeias
return pe / (g-1) / ro;
}

Παράρτημα Δ'

Κώδικας που υλοποιεί την μέθοδο IDO

Ακολουθεί ο κώδικας σε C++ που επιλύει το πρόβλημα των δύο αλληλεπιδρώντων εκρηκτικών κυμάτων, με την μέθοδο IDO και χρονική εξέλιξη Taylor

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <string.h>
#include <time.h>
using namespace std;
const double dx = 1./800.;
const double dt = .0000001;
const int mesh = 800; // actual cells
const int r = 5; // ta3h akribeias
const int tfilter = 100;
const double a = 0.; //alpha sthn viscosity
const double b = 1.5;
const double b = 1.4; // gamma
```

```
double utp(int par, double val[], double der[], int ind);
double up(int par, double val[], double der[], double vel[], int ind);
int main () {
int length = mesh + 2*r;
double ro[length], rod[length], yu[length], yud[length],
en[length], end[length];
double ronew[length], rodnew[length], yunew[length], yudnew[length],
ennew[length], endnew[length];
// pros antikatastash stis taylor sxeseis
double rot, rott, rotx, rottx;
double yut, yutt, yutx, yuttx;
double ent, entt, entx, enttx;
//boh8htika - amesa
double rotxx, yutxx, entxx, yut3x;
//boh8htika - emmesa
double pe, qu, cs;
double pex, pexx, pe3x, pe4x, pet, petx, petx;
double qux, quxx, qu3x, qu4x, qut, qutx, qutx;
double qu1, qu2;
double qux1, quxx1, qu3x1, qu4x1, qut1, qutx1, qutx1;
double qux2, quxx2, qu3x2, qu4x2, qut2, qutx2, qutx2;
int i;
//ARXIKES SYN8HKES
```

```
for (i=0; i<length; i++) {</pre>
ro[i] = 1.;
if (i < r + .1*mesh) {
en[i] = 1000. / (g - 1.)/ro[i]; //idaniko aerio
}
else if(( i >= r + .1*mesh ) && ( i < r + mesh*.9 ) ){
en[i] = .01 / (g - 1.)/ro[i];
}
else {
en[i] = 100. / (g - 1.)/ro[i];
}
yu[i] = 0.;
rod[i]=0.;
yud[i]=0.;
end[i]=0.;
}
//rod[97] = -.5;
//rod[98] = -.5;
//end[97] = -.5;
//end[98] = -.5;
ofstream output1v;
ofstream output1r;
ofstream output2v;
ofstream output2r;
output1v.open ("data_1v.dat");
output1r.open ("data_1r.dat");
output2v.open ("data_2v.dat");
```

```
124ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ΄. ΚΏΔΙΚΑΣ ΠΟΥ ΥΛΟΠΟΙΕΊ ΤΗΝ ΜΈΘΟΔΟ IDO
```

```
output2r.open ("data_2r.dat");
```

```
int dummy; // deikths gia thn ylopoihsh tou de3iou toixous
```

```
clock_t start = clock();
```

```
for (int t=1; t<=160000 ; t++) {</pre>
```

```
for ( i=r ; i< r + mesh ;i ++) {</pre>
```

```
rot = -rod[i]*yu[i] - ro[i]* yud[i];
```

```
rotx = - up(2,ro,rod,yu,i) * yu[i] - 2.*rod[i]*yud[i]
- ro[i] * utp(2,yu,yud,i);
rotxx = - up(2,yu,yud,yu,i) * rod[i] - 2.* yud[i] *
up(2,ro,rod,yu,i) - yu[i] * up(3,ro,rod,yu,i) - utp(3,yu,yud,i) *ro[i]
-2.* utp(2,yu,yud,i)*rod[i] - yud[i] *utp(2,ro,rod,i);
```

```
pe = (g - 1.)*ro[i]*en[i];
pex = (g - 1.)*(rod[i]*en[i] + ro[i]*end[i]);
pexx = (g - 1.)*(utp(2,ro,rod,i)*en[i] + 2.*rod[i]*end[i] + ro[i]
*utp(2,en,end,i));
pe3x = (g - 1.)*(utp(3,ro,rod,i)*en[i] + 3.*utp(2,ro,rod,i)*end[i] +
3.*rod[i]*utp(2,en,end,i) + ro[i]*utp(3,en,end,i));
pe4x = (g - 1.)*(utp(4,ro,rod,i)*en[i] + 4.*utp(3,ro,rod,i)*end[i] +
6.*utp(2,ro,rod,i)*utp(2,en,end,i) +4.*rod[i]*utp(3,en,end,i)
+ ro[i]*utp(4,en,end,i));
```

if (yud[i]<0)

```
cs = sqrt(g*(g - 1.)*en[i]);
qu1 = -a *dx* ro[i] * cs * yud[i] ;
qux1 = -a*dx*cs*(rod[i]*yud[i] + ro[i]*utp(2,yu,yud,i)) ;
quxx1 = -a*dx*cs* (utp(2,ro,rod,i)*yud[i] + 2.*rod[i]*utp(2,yu,yud,i)
+ ro[i]*utp(3,yu,yud,i)) ;
qu3x1 = -a*dx*cs* (utp(3,ro,rod,i)*yud[i] + 3.*utp(2,ro,rod,i)*utp(2,yu,yud,i)
+ 3.*rod[i]*utp(3,yu,yud,i)
+ ro[i]*utp(4,yu,yud,i)) ;
qu4x1 = -a*dx*cs* (utp(4,ro,rod,i)*yud[i] + 4.*utp(3,ro,rod,i)*utp(2,yu,yud,i)
+ 6.*utp(2,ro,rod,i)*utp(3,yu,yud,i)
+ 4.*rod[i]*utp(4,yu,yud,i)+ro[i]*utp(5,yu,yud,i)) ;
qu2 = b * pow(dx,2) * ro[i]*pow(yud[i],2);
qux2 = b * pow(dx,2)*( rod[i]*pow(yud[i],2) + 2.* ro[i]*yud[i]*utp(2,yu,yud,i) );
quxx2 = b * pow(dx,2)*( utp(2,ro,rod,i)*pow(yud[i],2) + 4.* rod[i] * yud[i]
*utp(2,yu,yud,i) + 2.* ro[i] *pow(utp(2,yu,yud,i),2)
+ 2.*ro[i]*yud[i]*utp(3,yu,yud,i) );
qu3x2 = b * pow(dx,2)*( utp(3,ro,rod,i)*pow(yud[i],2)
+ 6.*utp(2,ro,rod,i)*yud[i]*utp(2,yu,yud,i)
+ 6.*rod[i]*pow(utp(2,yu,yud,i),2) + 6.*rod[i]*yud[i]*utp(3,yu,yud,i)
+ 6.*ro[i]*utp(2,yu,yud,i)*utp(3,yu,yud,i) + 2.*ro[i]*yud[i]*utp(4,yu,yud,i));
qu4x2 = b * pow(dx,2)*( utp(4,ro,rod,i)*pow(yud[i],2)
+ 8.*utp(3,ro,rod,i)*yud[i]*utp(2,yu,yud,i)
+ 12.*utp(2,ro,rod,i)*pow(utp(2,yu,yud,i),2)
+ 12.*utp(2,ro,rod,i)*yud[i]*utp(3,yu,yud,i)
+ 24.*rod[i]*utp(2,yu,yud,i)*utp(3,yu,yud,i)
+ 8.*rod[i]*yud[i]*utp(4,yu,yud,i)
+ 6.*ro[i]*pow(utp(3,yu,yud,i),2)
+ 8.*ro[i]*utp(2,yu,yud,i)*utp(4,yu,yud,i)
+ 2.*ro[i]*yud[i]*utp(5,yu,yud,i) );
qu = qu1 + qu2;
qux = qux1 + qux2;
quxx = quxx1 + quxx2;
```

{

```
qu3x = qu3x1 + qu3x2;
qu4x = qu4x1 + qu4x2;
yut = -yu[i]*yud[i] - (pex + qux)/ro[i];
yutx = -pow(yud[i],2) - yu[i] * up(2,yu,yud,yu,i) - (pexx + quxx)/ro[i]
+ (pex + qux)*rod[i]/pow(ro[i],2);
ent = - yu[i]*end[i] - (pe + qu)*yud[i]/ro[i];
entx = -yud[i]*end[i] - yu[i]*up(2,en,end,yu,i) - (pex + qux)*yud[i]/ro[i]
- (pe + qu)*utp(2,yu,yud,i)/ro[i]
         +(pe + qu)* yud[i]* rod[i]/pow(ro[i],2);
yutxx = -3.*yud[i]*up(2,yu,yud,yu,i) - yu[i]*up(3,yu,yud,yu,i)
- (pe3x + qu3x)/ro[i] + 2.*(pexx + quxx)*rod[i]/pow(ro[i],2)
+(pex + qux)*utp(2,ro,rod,i)/pow(ro[i],2)
- 2.*(pex + qux)*pow(rod[i],2)/pow(ro[i],3);
entxx = -up(2,yu,yud,yu,i)*end[i] - 2.*yud[i]*up(2,en,end,yu,i)
- yu[i]*up(3,en,end,yu,i) - (pexx + quxx)*yud[i]/ro[i]
          - 2.*(pex + qux)*utp(2,yu,yud,i)/ro[i]
+ 2.*(pex+qux)*yud[i]*rod[i]/pow(ro[i],2) - (pe+qu)*utp(3,yu,yud,i)/ro[i]
          +2. *(pe + qu)*utp(2,yu,yud,i)*rod[i]/pow(ro[i],2)
+ (pe +qu)*yud[i]*utp(2,ro,rod,i)/pow(ro[i],2)
          +(pe + qu)*yud[i] * pow(rod[i],2)/pow(ro[i],3)*(-2.);
yut3x = -3.*pow(up(2,yu,yud,yu,i),2) - 4.*yud[i]*up(3,yu,yud,yu,i)
- (pe4x + qu4x)/ro[i] + 3.*(pe3x+qu3x)*rod[i]/pow(ro[i],2)
+3.*(pexx + quxx)*utp(2,ro,rod,i)/pow(ro[i],2)
- 6.*(pexx+quxx)*pow(rod[i],2)/pow(ro[i],3)
+ (pex + qux)*utp(3,ro,rod,i)/pow(ro[i],2)
- 6.*(pex+qux)*rod[i]*utp(2,ro,rod,i)/pow(ro[i],3)
+6.* (pex + qux)*pow(rod[i],3)/pow(ro[i],4);
rott = - rotx * yu[i] - rod[i] * yut - rot *yud[i] - ro[i]* yutx;
rottx = -rotxx * yu[i] - up(2,ro,rod,yu,i) *yut - 2.*rotx * yud[i]
- 2.*rod[i]*yutx
- rot * utp(2,yu,yud,i) - ro[i]*yutxx;
pet = (g - 1.)*(rot*en[i] + ent*ro[i]);
```

```
petx = (g - 1.)*(rotx *en[i] + rod[i]*ent + rot*end[i] + ro[i]*entx);
petxx = (g - 1.)*(rotxx * en[i] + utp(2,ro,rod,i)*ent + 2.*rotx*end[i]
+ 2.*rod[i]*entx + rot *utp(2,en,end,i) + ro[i]*entxx);
qut1 = -a*dx*cs* (rot *yud[i] + ro[i]*yutx) ;
qutx1 = -a*dx*cs* (rotx *yud[i] +rod[i]*yutx + rot*utp(2,yu,yud,i) + ro[i]*yutxx);
qutxx1 = -a*dx*cs* (rotxx* yud[i] + utp(2,ro,rod,i)*yutx + 2.*rotx*utp(2,yu,yud,i)
+ 2.*rod[i]*yutxx + rot*utp(3,yu,yud,i) + ro[i]*yut3x );
qut2 = b *pow(dx,2) *( rot *pow(yud[i],2) +2.*ro[i]*yud[i]*yutx);
qutx2 = b *pow(dx,2) *( rotx * pow(yud[i],2) + 2.* rot *yud[i]*utp(2,yu,yud,i)
+ 2.*rod[i]*yud[i]*yutx
+2.*ro[i]*utp(2,yu,yud,i)*yutx + 2.*ro[i]*yud[i]*yutxx );
qutxx2 = b *pow(dx,2) *( rotxx * pow(yud[i],2) + 4.*rotx*yud[i]*utp(2,yu,yud,i)
+ 2.*rot*pow(utp(2,yu,yud,i),2)
+ 2.*rot*yud[i]*utp(3,yu,yud,i) + 2.*utp(2,ro,rod,i)*yud[i]*yutx
+ 4.*rod[i]*utp(2,yu,yud,i)*yutx
+4.*rod[i]*yud[i]*yutxx + 2.*ro[i]*utp(3,yu,yud,i)*yutx
+ 4.* ro[i]*utp(2,yu,yud,i)*yutxx
+2.*ro[i]*yud[i] *yut3x);
qut = qut1 + qut2;
qutx = qutx1 + qutx2;
qutxx = qutxx1 + qutxx2;
yutt = - yut*yud[i] - yu[i]*yutx - (petx + qutx)/ro[i]
+ (pex+ qux)*rot / pow(ro[i],2);
yuttx = - 2.*yutx*yud[i] - yut*up(2,yu,yud,yu,i)
- yu[i]*yutxx - (petxx + qutxx)/ro[i]
+ (pexx + quxx)*rot/pow(ro[i],2)
+(petx + qutx)*rod[i]/pow(ro[i],2) + (pex+qux)*rotx/pow(ro[i],2)
+ (pex+qux)*rod[i]*rot/pow(ro[i],3)*(-2.);
entt = -yut*end[i] - yu[i]*entx - (pet+qut)*yud[i]/ro[i]
- (pe+qu)*yutx/ro[i] + (pe+qu)* yud[i]*rot/pow(ro[i],2);
enttx = - yutx*end[i] - yud[i]*entx - yut*up(2,en,end,yu,i)
- yu[i]*entxx - (petx + qutx)*yud[i]/ro[i]
```

```
- (pex + qux)*yutx/ro[i] + (pex + qux)*yud[i]*rot/pow(ro[i],2)
- (pet + qut)*utp(2,yu,yud,i)/ro[i]
  - (pe+qu)*yutxx/ro[i] + (pe+qu)*utp(2,yu,yud,i)*rot/pow(ro[i],2)
+ (pet+qut)*yud[i]*rod[i]/pow(ro[i],2)
         +(pe+qu)*yutx*rod[i]/pow(ro[i],2) +(pe+qu)*yud[i]*rotx/pow(ro[i],2)
- 2.*(pe+qu)*yud[i]*rod[i]*rot/pow(ro[i],3);
}
else {
yut = - yu[i]*yud[i] - pex/ro[i];
yutx = -pow(yud[i],2) - yu[i] * up(2,yu,yud,yu,i) - pexx/ro[i]
+ pex*rod[i]/pow(ro[i],2);
ent = - yu[i]*end[i] - pe*yud[i]/ro[i];
entx = -yud[i]*end[i] - yu[i]*up(2,en,end,yu,i) - pex*yud[i]/ro[i]
- pe*utp(2,yu,yud,i)/ro[i]
         +pe* yud[i]* rod[i]/pow(ro[i],2);
yutxx = -3.*yud[i]*up(2,yu,yud,yu,i) - yu[i]*up(3,yu,yud,yu,i)
- pe3x/ro[i] + 2.*pexx*rod[i]/pow(ro[i],2)
+pex*utp(2,ro,rod,i)/pow(ro[i],2) - 2.*pex*pow(rod[i],2)/pow(ro[i],3);
entxx = -up(2,yu,yud,yu,i)*end[i] - 2.*yud[i]*up(2,en,end,yu,i)
- yu[i]*up(3,en,end,yu,i) - pexx*yud[i]/ro[i]
          - 2.*pex*utp(2,yu,yud,i)/ro[i] + 2.*pex*yud[i]*rod[i]/pow(ro[i],2)
- pe*utp(3,yu,yud,i)/ro[i]
          +2. *pe*utp(2,yu,yud,i)*rod[i]/pow(ro[i],2)
+ pe*yud[i]*utp(2,ro,rod,i)/pow(ro[i],2)
          + pe*yud[i] * pow(rod[i],2)/pow(ro[i],3)*(-2.);
rott = - rotx * yu[i] - rod[i] * yut - rot *yud[i] - ro[i]* yutx;
rottx = -rotxx * yu[i] - up(2,ro,rod,yu,i) *yut - 2.*rotx * yud[i]
- 2.*rod[i]*yutx - rot * utp(2,yu,yud,i) - ro[i]*yutxx;
pet = (g - 1.)*(rot*en[i] + ent*ro[i]);
petx = (g - 1.)*(rotx *en[i] + rod[i]*ent + rot*end[i] + ro[i]*entx);
petxx = (g - 1.)*(rotxx * en[i] + utp(2,ro,rod,i)*ent + 2.*rotx*end[i]
+ 2.*rod[i]*entx + rot *utp(2,en,end,i) + ro[i]*entxx);
```

```
yutt = - yut*yud[i] - yu[i]*yutx - petx/ro[i]
+ pex*rot / pow(ro[i],2);
yuttx = - 2.*yutx*yud[i] - yut*up(2,yu,yud,yu,i)
- yu[i]*yutxx - petxx/ro[i] + pexx*rot/pow(ro[i],2)
+petx*rod[i]/pow(ro[i],2) + pex*rotx/pow(ro[i],2)
+ pex*rod[i]*rot/pow(ro[i],3)*(-2.);
entt = -yut*end[i] - yu[i]*entx - pet*yud[i]/ro[i]
- pe*yutx/ro[i] + pe* yud[i]*rot/pow(ro[i],2);
enttx = - yutx*end[i] - yud[i]*entx - yut*up(2,en,end,yu,i)
- yu[i]*entxx - petx*yud[i]/ro[i]
        - pex*yutx/ro[i] + pex*yud[i]*rot/pow(ro[i],2)
- pet*utp(2,yu,yud,i)/ro[i]
                    - pe*yutxx/ro[i] + pe*utp(2,yu,yud,i)*rot/pow(ro[i],2)
+ pet*yud[i]*rod[i]/pow(ro[i],2)
                    +pe*yutx*rod[i]/pow(ro[i],2) +pe*yud[i]*rotx/pow(ro[i],2)
- 2.*pe*yud[i]*rod[i]*rot/pow(ro[i],3);
} //end else - mh compression region
//e3eli3h ston xrono me taylor
//valnew[i] = val[i] + ut *dt + utt * pow(dt,2)/2.;
//dernew[i] = der[i] + utx * dt + uttx * pow(dt,2)/2.;
ronew[i] = ro[i] + rot *dt + rott *pow(dt,2)/2.;
if(isnan(ronew[i])){
cout << "abort : ronew[i] = NaN t:" << t;</pre>
return 0;
}
rodnew[i] = rod[i] + rotx *dt +rottx *pow(dt,2)/2.;
yunew[i] = yu[i] + yut *dt + yutt *pow(dt,2)/2.;
```

```
yudnew[i] = yud[i] + yutx *dt + yuttx *pow(dt,2)/2.;
```

```
ennew[i] = en[i] + ent *dt + entt *pow(dt,2)/2.;
endnew[i] = end[i] + entx *dt + enttx *pow(dt,2)/2.;
```

```
} // end for prospelash mhkous stous pinakes
```

```
for ( i=r ; i< r + mesh ;i ++) {</pre>
ro[i] = ronew[i];
rod[i] = rodnew[i];
yu[i] = yunew[i];
yud[i] = yudnew[i];
en[i] = ennew[i];
end[i] = endnew[i];
}
// synoriaka reflecting walls
// aristero orio
for (i=0 ; i < r ; i++) {</pre>
ro[i] = ro[2*r-1-i];
rod[i] = rod[2*r-1-i];
yu[i] = - yu[2*r-1-i];
yud[i] = - yud[2*r-1-i];
en[i] = en[2*r-1-i];
end[i] = end[2*r-1-i];
}
// de3i orio
dummy =1;
for (i= r + mesh ; i < length ; i++) {</pre>
ro[i] = ro[i - 2*dummy +1];
rod[i] = rod[i - 2*dummy +1];
yu[i] = - yu[i - 2*dummy +1];
yud[i] = - yud[i - 2*dummy +1];
```

```
en[i] = en[i - 2*dummy +1];
end[i] = end[i - 2*dummy +1];
dummy++;
} // telos de3is toixos
} // end for e3eli3h xronou
cout << "elapsed time : " << ( (double)clock() - start) / CLOCKS_PER_SEC</pre>
<< endl << endl;
//OUTPUT
for (i=r ; i < r + mesh; i++) {
output1r << i << "\t" << ro[i] << "\n" ;
output1v << i << "\t" << yu[i] << "\n" ;
}
output1v.close();
output1r.close();
output2v.close();
output2r.close();
return 0;
} // end function main
```

```
double utp(int par, double val[], double der[], int ind) {
double fi = val[ind];
double fim1 = val[ind - 1];
double fip1 = val[ind + 1];
double fxi = der[ind];
double fxim1 = der[ind - 1];
double fxip1 = der[ind + 1];
switch (par) {
case 2:
double dc;
dc = 1./pow(dx,2) *(fip1 - 2.*fi + fim1) - 1./4./dx *(fxip1 - fxim1);
return 2.*dc;
break;
case 3:
double cc;
cc = 5./4./pow(dx,3) * (fip1 - fim1)
- 1./4./pow(dx,2) *(fxip1 + 8.*fxi + fxim1);
return 6.*cc;
break;
case 4:
double bc;
bc = -1./2./pow(dx,4) *(fip1 - 2.*fi + fim1)
+ 1./4./pow(dx,3)*(fxip1 - fxim1);
return 24.*bc;
break;
case 5:
double ac;
ac = - 3./4./pow(dx,5) *(fip1 - fim1)
+ 1./4./pow(dx,4) *(fxip1 + 4.*fxi + fxim1);
```

```
return 120.*ac;
break;
default:
cout << "error " << par << ": invalid derivative no.";</pre>
}
cout << "utp func" ;</pre>
return 0;
} //end function utp
double up (int par, double val[], double der[], double vel[], int ind) {
double fi = val[ind];
double fim1 = val[ind - 1];
double fip1 = val[ind + 1];
double fxi = der[ind];
double fxim1 = der[ind - 1];
double fxip1 = der[ind + 1];
switch (par) {
case 2:
double bu;
if (vel[ind] < 0)
bu = - (2.*fxi + fxip1)/dx - 3./pow(dx,2)*(fi - fip1);
else
bu = (2.*fxi + fxim1)/dx - 3./pow(dx,2)*(fi - fim1);
return 2.*bu;
break;
case 3:
double au;
if (vel[ind]<0)</pre>
au = (fxi + fxip1)/pow(dx,2) + 2./pow(dx,3)*(fi - fip1);
else
au = (fxi + fxim1)/pow(dx,2) - 2./pow(dx,3)*(fi - fim1);
return 6.*au;
```

134ПАРАРТНМА Д'. К' Ω ДІКА
 ПОТ ТАОПОІЕТ ТН
N М'Е Θ ОДО IDO

break; default: cout << "error " << par << ": invalid derivative no. at function up \n"; }

cout << "up func " ;</pre>

return 0;
} // end function up

Παράρτημα Ε΄

Κώδικας που υλοποιεί την IDO σε CUDA C

Αχολουθεί ο χώδιχας σε CUDA C που επιλύει το πρόβλημα των δύο αλληλεπιδρώντων εχρηχτιχών χυμάτων, με την μέθοδο IDO χαι χρονιχή εξέλιξη Runge Kutta. Ο χώδιχας είναι χωρισμένος στα αρχεία adv.h, cu_consts.h, cu_funcs.h, cu_funcs.cu, adv.cu, main.cu :

E'.1 To apyrio adv.h:

#ifndef ADV_H_
#define ADV_H_
#include "cu_consts.h"
__global__ void advance(float* ro, float* rod, float* yu, float* yud,
 float* en, float* end,
 float* ronew, float* rodnew, float* yunew, float* yudnew, float* ennew,
 float* endnew,
 int mesh, int r);
__device__ float utp(int par, float* val, float* der, int ind,
 float k, float l);
__device__ float up (int par, float* val, float* der, float* vel,
 int ind, float k, float l, float m);
__device__ float funcrot (float rod, float yu, float yud, float rod,
 __device__ float funcrotx (float roxx, float yu, float yud, float rod,

136ПАРАРТНМА Е'. К' $\Omega \Delta$ ІКА Σ ПО Υ Υ ЛОПОІЕ́Т ТНN ІDO Σ Е CUDA C

float yuxx, float ro);

__device__ float funcyut (float yu, float yud, float pex, float qux, float ro);

__device__ float funcyutx (float yud, float yu, float yuxx, float pexx, float quxx, float ro, float pex, float qux, float rod);

__device__ float funcent (float yu, float end, float pe, float qu, float yud, float ro);

__device__ float funcentx (float yud, float end, float yu, float enxx, float pex, float qux, float ro, float pe, float qu, float yuxx, float rod);

__device__ float funcpe(float ro, float en);

__device__ float funcpex(float rod, float en, float ro, float end) ;

__device__ float funcpexx(float roxx, float en, float rod, float end, float ro, float enxx);

__device__ float funccs (float en) ;

__device__ float funcqu (float ro, float cs, float yud);

__device__ float funcqux (float cs, float rod, float yud, float ro, float yuxx);

__device__ float funcquxx (float cs, float roxx, float yud, float rod, float yuxx, float ro, float yu3x);

#endif /* ADV_H_ */

E'.2 To apyrio cu_consts.h

#ifndef GLOBAL_H_
#define GLOBAL_H_

:

```
__constant__ float dx = 1.0f/800.0f;
__constant__ float dt = 0.0000001f;
__constant__ float a = 0.0f;
__constant__ float b = 1.5f;
__constant__ float g = 1.4f;
```

#endif /* GLOBAL_H_ */

E'.3 To apreio cu_funcs.h

#ifndef CU_FUNCS_H_
#define CU_FUNCS_H_

:

#include "cu_consts.h"

__global__ void init_cond(float* ro, float* rod, float* yu, float* yud, float* en, float* end, int length, int mesh, int r);

```
__global__ void refresh(float* ro, float* rod, float* yu, float* yud,
float* en, float* end,
float* ronew, float* rodnew, float* yunew, float* yudnew,
float* ennew, float* endnew,
int length, int mesh, int r) ;
```

#endif /* CU_FUNCS_H_ */

E'.4 То архею́ cu_funcs.cu

```
:
#include "./headers/cu_funcs.h"
__global__ void init_cond(float* ro, float* rod, float* yu, float* yud,
float* en, float* end, int length, int mesh, int r) {
int idx = blockIdx.x*blockDim.x + threadIdx.x ;
if (idx < r + 0.1f*mesh)
ro[idx] = 1.0f;
yu[idx] = 0.0f;
en[idx] = 1000.0f / (g - 1) / ro[idx] ;
rod[idx] = 0.0f;
yud[idx] = 0.0f;
end[idx] = 0.0f;
}
else if ( (idx >= r + 0.1f*mesh) && (idx < r + 0.9f*mesh ) ) {
ro[idx] = 1.0f;
yu[idx] = 0.0f;
en[idx] = 0.01f / (g - 1) / ro[idx] ;
rod[idx] = 0.0f;
yud[idx] = 0.0f;
end[idx] = 0.0f;
}
else if ( (idx >= r + 0.9f*mesh) && (idx < length) ) {</pre>
```

```
ro[idx] = 1.0f;
yu[idx] = 0.0f ;
en[idx] = 100.0f / (g - 1) / ro[idx] ;
rod[idx] = 0.0f;
yud[idx] = 0.0f;
end[idx] = 0.0f;
```

```
}
```

```
__global__ void refresh(float* ro, float* rod, float* yu, float* yud, float* en,
float* end,
float* ronew, float* rodnew, float* yunew, float* yudnew,
float* ennew, float* endnew,
int length, int mesh, int r) {
int i = blockIdx.x*blockDim.x + threadIdx.x ;
int dummy = i - r - mesh + 1;
if (i < r) { //aristero toixos
ro[i]= ronew[2*r-1-i];
rod[i] = rodnew[2*r-1-i];
yu[i] = - yunew[2*r-1-i];
en[i] = ennew[2*r-1-i];
en[i] = ennew[2*r-1-i];
en[i] = ennew[2*r-1-i];
```

```
ro[i] = ronew[i];
rod[i] = rodnew[i];
yu[i] = yunew[i];
yud[i] = yudnew[i];
en[i] = ennew[i];
end[i] = endnew[i];
}
else if ( i >= r+ mesh && i < length) { //de3ios toixos</pre>
ro[i] = ronew[i - 2*dummy +1];
rod[i] = rodnew[i - 2*dummy +1];
yu[i] = - yunew[i - 2*dummy +1];
yud[i] = - yudnew[i - 2*dummy +1];
en[i] = ennew[i - 2*dummy +1];
end[i] = endnew[i - 2*dummy +1];
dummy++;
}
}
```

E'.5 Το αρχείο adv.cu

#include "./headers/adv.h"

:

```
__global__ void advance(float* ro, float* rod, float* yu,
  float* yud, float* en, float* end,
  float* ronew,
  float* rodnew, float* yunew, float* yudnew, float* ennew, float* endnew,
  int mesh, int r){
```

```
int i = blockIdx.x*blockDim.x + threadIdx.x ;
if ( i >=r && i < r + mesh ) {
//boh8htika - emmesa
float pe, qu, cs;
float pex, pexx;
float qux, quxx;
//runge kutta "k"
float k1, kx1, l1, lx1, m1, mx1;
float k2, kx2, 12, 1x2, m2, mx2;
k1 = dt *funcrot(rod[i],yu[i],yud[i],ro[i]);
kx1 = dt * funcrotx(up(2,ro,rod,yu,i, 0.0f,
0.0f ,0.0f), yu[i], yud[i], rod[i], utp(2,yu,yud,i,0.0f,0.0f),ro[i]);
pe = funcpe(ro[i],en[i]);
pex = funcpex(rod[i],en[i],ro[i],end[i]);
pexx = funcpexx(utp(2,ro,rod,i,0.0f,0.0f),en[i],
rod[i], end[i], ro[i], utp(2,en,end,i,0.0f,0.0f));
if ( yud[i]<0 )
ſ
cs = funccs(en[i]);
qu = funcqu(ro[i],cs,yud[i]);
qux = funcqux(cs, rod[i], yud[i], ro[i],
utp(2,yu,yud,i,0.0f,0.0f));
```

```
142ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε΄. ΚΏΔΙΚΑΣ ΠΟΥ ΥΛΟΠΟΙΕΊ ΤΗΝ ΙDO ΣΕ CUDA C
quxx = funcquxx(cs, utp(2,ro,rod,i,0.0f,0.0f),
yud[i], rod[i], utp(2,yu,yud,i,0.0f,0.0f),ro[i]
, utp(3,yu,yud,i,0.0f,0.0f));
l1 = dt * funcyut (yu[i], yud[i], pex, qux, ro[i]);
lx1 = dt * funcyutx(yud[i], yu[i],
up(2,yu,yud,yu,i,0.0f,0.0f,0.0f), pexx, quxx, ro[i], pex, qux, rod[i]);
m1 = dt * funcent (yu[i], end[i], pe, qu,
yud[i], ro[i]);
mx1 = dt * funcentx (yud[i], end[i], yu[i],
up(2,en,end,yu,i,0.0f,0.0f,0.0f), pex, qux, ro[i], pe, qu,
utp(2,yu,yud,i,0.0f,0.0f), rod[i]);
pe = funcpe(ro[i] + k1, en[i]+m1);
pex = funcpex(rod[i]+kx1, en[i]+m1, ro[i]+k1,
end[i]+mx1);
pexx = funcpexx(utp(2,ro,rod,i,k1,kx1),en[i]+m1,
 rod[i]+kx1, end[i]+mx1, ro[i]+k1, utp(2,en,end,i,m1,mx1));
cs = funccs(en[i]+m1);
qu = funcqu(ro[i]+k1,cs,yud[i]+lx1);
qux = funcqux(cs, rod[i]+kx1, yud[i]+ lx1, ro[i] +k1,
 utp(2,yu,yud,i,l1,lx1));
quxx = funcquxx(cs, utp(2,ro,rod,i,k1,kx1), yud[i]+lx1,
 rod[i]+kx1, utp(2,yu,yud,i,l1,lx1), ro[i]+k1, utp(3,yu,yud,i,l1,lx1));
k2 = dt * funcrot( rod[i]+kx1 , yu[i]+l1 , yud[i]+lx1 ,
ro[i]+k1 );
kx2 = dt* funcrotx( up(2,ro,rod,yu,i,k1,kx1,l1) , yu[i]+l1 ,
yud[i]+lx1 , rod[i]+kx1 , utp(2,yu,yud,i,l1,lx1) , ro[i]+k1);
12 = dt * funcyut ( yu[i]+l1 , yud[i]+lx1 , pex, qux, ro[i]);
lx2 = dt * funcyutx(yud[i]+lx1, yu[i]+l1,
up(2,yu,yud,yu,i,l1,lx1,l1),pexx,quxx,ro[i]+k1,pex,qux,rod[i]+kx1);
```

```
m2 = dt *funcent(yu[i] +11, end[i] + mx1, pe, qu,
yud[i]+lx1, ro[i]+k1);
mx2 = dt * funcentx(yud[i]+lx1, end[i]+mx1, yu[i]+l1,
up(2,en,end,yu,i,m1,mx1,l1), pex, qux, ro[i]+k1, pe, qu,
 utp(2,yu,yud,i,l1,lx1), rod[i]+kx1);
}
else {
11 = dt * funcyut (yu[i], yud[i], pex, 0.0f, ro[i]);
lx1 = dt * funcyutx(yud[i], yu[i], up(2,yu,yud,yu,i,0.0f,0.0f,0.0f),
pexx, 0.0f, ro[i], pex, 0.0f, rod[i]);
m1 = dt * funcent (yu[i], end[i], pe, 0.0f, yud[i], ro[i]);
mx1 = dt * funcentx (yud[i], end[i], yu[i],
up(2,en,end,yu,i,0.0f,0.0f,0.0f), pex, 0.0f, ro[i], pe, 0.0f,
utp(2,yu,yud,i,0.0f,0.0f), rod[i]);
pe = funcpe(ro[i] + k1, en[i]+m1);
pex = funcpex(rod[i]+kx1, en[i]+m1, ro[i]+k1, end[i]+mx1);
pexx = funcpexx(utp(2,ro,rod,i,k1,kx1),en[i]+m1, rod[i]+kx1,
end[i]+mx1, ro[i]+k1, utp(2,en,end,i,m1,mx1));
k2 = dt * funcrot( rod[i]+kx1 , yu[i]+l1 , yud[i]+lx1 , ro[i]+k1 );
kx2 = dt* funcrotx( up(2,ro,rod,yu,i,k1,kx1,l1) , yu[i]+l1 ,
yud[i]+lx1 , rod[i]+kx1 , utp(2,yu,yud,i,l1,lx1) , ro[i]+k1);
12 = dt * funcyut ( yu[i]+l1 , yud[i]+lx1 , pex, 0.0f, ro[i]);
lx2 = dt * funcyutx(yud[i]+lx1, yu[i]+l1,
up(2,yu,yud,yu,i,l1,lx1,l1),pexx,0.0f,ro[i]+k1,pex,0.0f,rod[i]+kx1);
m2 = dt *funcent(yu[i] +11, end[i] + mx1, pe, 0.0f,
yud[i]+lx1, ro[i]+k1);
mx2 = dt * funcentx(yud[i]+lx1, end[i]+mx1, yu[i]+l1,
up(2,en,end,yu,i,m1,mx1,l1), pex, 0.0f, ro[i]+k1, pe, 0.0f,
```

```
utp(2,yu,yud,i,l1,lx1), rod[i]+kx1);
} //end else - mh compression region
//e3eli3h ston xrono me Runge Kutta
ronew[i] = ro[i] + 1.0f/2.0f*(k1 + k2);
/*if(isnan(ronew[i])){
cout << "abort : ronew[i] = NaN x:" << i/100. << "\t t:" << t;
return 0;
}*/
rodnew[i] = rod[i] + 1.0f/2.0f*(kx1 + kx2);
yunew[i] = yu[i] + 1.0f/2.0f*(l1 + l2);
yunew[i] = yud[i] + 1.0f/2.0f*(lx1 + lx2);
ennew[i] = en[i] + 1.0f/2.0f*(m1 + m2);
endnew[i] = end[i] + 1.0f/2.0f*(mx1 + mx2);</pre>
```

} //end if oti eimaste entos plegmatos (afhnei ape3w ta dyo akriana shmeia)

```
}
```

```
__device__ float utp(int par, float* val, float* der, int ind,
float k, float l) {
float fi = val[ind] + k;
float fim1 = val[ind - 1] + k;
```
```
float fip1 = val[ind + 1] + k;
float fxi = der[ind] + 1;
float fxim1 = der[ind - 1] + 1;
float fxip1 = der[ind + 1] + 1;
switch (par) {
case 2:
float dc;
dc = 1.0f/powf(dx,2.0f) *(fip1 - 2.0f*fi + fim1)
- 1.0f/4.0f/dx *(fxip1 - fxim1);
return 2.0f*dc;
break;
case 3:
float cc;
cc = 5.0f/4.0f/powf(dx,3.0f) *(fip1 - fim1)
- 1.0f/4.0f/powf(dx,2.0f) *(fxip1 + 8.0f*fxi + fxim1);
return 6.0f*cc;
break;
case 4:
float bc;
bc = -1.0f/2.0f/powf(dx,4.0f) *(fip1 - 2.0f*fi + fim1)
+ 1.0f/4.0f/powf(dx,3.0f)*(fxip1 - fxim1);
return 24.0f*bc;
break;
case 5:
float ac;
ac = - 3.0f/4.0f/powf(dx,5.0f) *(fip1 - fim1)
+ 1.0f/4.0f/powf(dx,4.0f) *(fxip1 + 4.0f*fxi + fxim1);
return 120.0f*ac;
break;
default:
return 0.0f;
}
return 0;
} //end function utp
```

```
__device__ float up (int par, float* val, float* der, float* vel
, int ind, float k, float l, float m) {
// oi sxoliasmenes synarthseis einai gia thn periptwsh pou u<0</pre>
float fi = val[ind] + k;
float fim1 = val[ind - 1] + k;
float fip1 = val[ind + 1] + k;
float fxi = der[ind] + 1;
float fxim1 = der[ind - 1] + 1;
float fxip1 = der[ind + 1] + 1;
switch (par) {
case 2:
float bu;
if (vel[ind] + m < 0)
bu = - (2.0f*fxi + fxip1)/dx - 3.0f/powf(dx,2.0f)*(fi - fip1);
else
bu = (2.0f*fxi + fxim1)/dx - 3.0f/powf(dx,2.0f)*(fi - fim1);
return 2.0f*bu;
break;
case 3:
float au;
if (vel[ind] + m < 0)
au = (fxi + fxip1)/powf(dx,2.0f) + 2.0f/powf(dx,3.0f)*(fi - fip1);
else
au = (fxi + fxim1)/powf(dx,2.0f) - 2.0f/powf(dx,3.0f)*(fi - fim1);
return 6.0f*au;
break;
default:
return 0.0f;
}
return 0;
```

} // end function up

```
//rot
__device__ float funcrot (float rod, float yu, float yud, float ro) {
return -rod*yu - yud*ro;
}
//rotx
__device__ float funcrotx (float roxx, float yu, float yud, float rod,
float yuxx, float ro) {
return -roxx*yu - 2.0f*yud*rod - yuxx*ro;
}
//yut
__device__ float funcyut (float yu, float yud, float pex, float qux,
float ro) {
return -yu*yud - (pex+qux)/ro ;
}
```

```
//yutx
__device__ float funcyutx (float yud, float yu, float yuxx, float pexx,
float quxx, float ro,
float pex, float qux, float rod) {
return - powf(yud,2.0f) - yu*yuxx - (pexx+quxx)/ro +
  (pex + qux)*rod/powf(ro,2.0f) ;
}
```

```
//ent
__device__ float funcent (float yu, float end, float pe, float qu,
float yud, float ro) {
return - yu* end - (pe + qu)*yud / ro;
}
//entx
device__ float funcenty (float und float end float un float envy
```

```
__device__ float funcentx (float yud, float end, float yu, float enxx,
float pex, float qux,
```

```
148ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε΄. ΚΏΔΙΚΑΣ ΠΟΥ ΥΛΟΠΟΙΕΊ ΤΗΝ ΙDO ΣΕ CUDA C
float ro, float pe, float qu, float yuxx,
float rod) {
return -yud*end - yu*enxx - (pex + qux)*yud/ro - (pe + qu)*yuxx/ro
+ (pe + qu)*yud*rod/powf(ro,2.0f) ;
}
//pe
__device__ float funcpe(float ro, float en) {
return (g - 1.0f)*ro*en;
}
//pex
__device__ float funcpex(float rod, float en, float ro, float end) {
return (g - 1.0f)*(rod*en + ro*end);
}
//pexx
__device__ float funcpexx(float roxx, float en, float rod, float end,
float ro, float enxx) {
return (g - 1.0f)*(roxx*en + 2.0f*rod*end + ro*enxx);
}
//cs
__device__ float funccs (float en) {
return sqrtf(g*(g - 1.0f)*en);
}
//qu
__device__ float funcqu (float ro, float cs, float yud) {
float qu1 = -a *dx * ro * cs * yud ;
float qu2 = b * powf(dx,2.0f) * ro*powf(yud,2.0f);
return qu1 + qu2 ;
}
//qux
__device__ float funcqux (float cs, float rod, float yud, float ro,
float yuxx) {
float qu1 = -a*dx*cs*(rod*yud + ro*yuxx) ;
```

```
float qu2 = b * powf(dx,2.0f)*( rod*powf(yud,2.0f)
+ 2.0f* ro*yud*yuxx );
return qu1 + qu2;
}
//quxx
___device__ float funcquxx (float cs, float roxx, float yud, float rod,
float yuxx, float ro, float yu3x) {
float qu1 = -a*dx*cs* (roxx*yud + 2.0f*rod*yuxx + ro*yu3x) ;
float qu2 = b * powf(dx,2.0f)*( roxx*powf(yud,2.0f) + 4.0f* rod * yud *yuxx
+ 2.0f* ro *powf(yuxx,2.0f) + 2.0f*ro*yud*yu3x );
return qu1 + qu2;
}
```

Ε'.6 Το αρχείο main.cu

```
:
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <time.h>
#include "./headers/cu_funcs.h"
#include "./headers/adv.h"
const int mesh = 800; // actual computational grid
const int r = 5; // ta3h akribeias ston a3ona x
const int threadsperblock = 224;
const int length = mesh + 2*r ;
```

149

```
150ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε΄. ΚΏΔΙΚΑΣ ΠΟΥ ΥΛΟΠΟΙΕΊ ΤΗΝ ΙDO ΣΕ CUDA C
const int tsteps = 380000;
using namespace std;
int main (void) {
float * ro, * rod, * yu, * yud, * en, *end; // device
float * ronew, * rodnew, * yunew, * yudnew, * ennew, * endnew; //device
float h_ro[length], h_yu[length]; //host
cudaMalloc((void**)&ro, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&rod, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&yu, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&yud, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&en, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&end, length*sizeof(float));
//new-mems
cudaMalloc((void**)&ronew, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&rodnew, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&yunew, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&yudnew, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&ennew, length*sizeof(float));
cudaMalloc((void**)&endnew, length*sizeof(float));
dim3 dimGrid(int(ceil(float(length)/float(threadsperblock))));
dim3 dimBlock(threadsperblock);
cout << "cuda_blast_RK runs with:" << endl;</pre>
cout << "blocks in grid (x-dimension):" << dimGrid.x << endl;</pre>
cout << "threads per block (x-dimension):" << dimBlock.x << endl << endl;</pre>
init_cond <<<dimGrid, dimBlock>>> (ro, rod, yu, yud,
en, end, length,mesh,r);
int t;
```

```
clock_t start = clock();
```

```
for (t=1; t<=tsteps; t++){</pre>
```

```
advance <<<dimGrid, dimBlock>>> (ro,rod,yu,yud,en,end,ronew,rodnew,
yunew,yudnew,ennew,endnew,mesh,r);
```

```
refresh <<<dimGrid, dimBlock>>> (ro,rod,yu,yud,en,end,ronew,rodnew,
yunew,yudnew,ennew,endnew,length,mesh,r);
```

```
}
```

```
cudaMemcpy (h_ro,ro, length*sizeof(float), cudaMemcpyDeviceToHost);
cudaMemcpy (h_yu,yu, length*sizeof(float), cudaMemcpyDeviceToHost);
```

```
cout << "elapsed time : " << ( (double)clock() - start) / CLOCKS_PER_SEC
<< "secs" << endl << endl;</pre>
```

```
ofstream outputr;
outputr.open("data_r.dat");
```

int i;

```
for (i=0; i< length ;i++) outputr << i << "\t" << h_ro[i] << endl ;</pre>
```

```
outputr.close();
```

cudaFree(ro); cudaFree(rod); cudaFree(yu); cudaFree(yud); cudaFree(en); cudaFree(end); cudaFree(ronew); cudaFree(rodnew); cudaFree(yunew); cudaFree(yudnew);

152ПАРАРТНМА Е'. К' $\Omega \Delta$ ІКА Σ ПО Υ $\Upsilon \Lambda$ ОПОІЕ́І ТНN ІDO ΣE CUDA C

cudaFree(ennew); cudaFree(endnew);

return 0;

}

Bibliography

- Eleuterio F. Toro. <u>Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid</u> Dynamics. Springer, 2nd Edition, 1999
- [2] Yohsuke Imai and Takayuki Aoki. <u>Stable coupling between vector and scalar variables for the IDO scheme on collocated grids</u>. Journal of Computational Physics, 215:81–97, 2006
- F.Xiao, T. Yabe and T. Ito. <u>Constructing oscillation preventing scheme</u> for advection equation by rational function. Computer Physics Communications, 93: 1–12, 1996
- [4] Hiroshi Yoshida, Takayuki Aoki and Takayuki Utsumi. <u>Improvement of Accuracy and Stability in Numerically Solving Hyperbolic Equations by IDO (Interpolated Differential Operator) Scheme with Runge-Kutta Time Integration</u>. Electronics and Communications in Japan, 87: 33–42, 2004
- [5] A. Nishiguchi and T. Yabe. Second Order Fluid Particle Scheme. Journal of Computational Physics, 52:390–413, 1983
- [6] J. VonNeumann and R. D. Richtmyer. <u>A Method for the Numerical</u> <u>Calculation of Hydrodynamic Shocks</u>. Journal of Applied Physics, 21, 1949
- [7] Paul Woodward and Phillip Colella. <u>The Numerical Simulation of</u> <u>Two-Dimensional Fluid Flow with Strong Shocks</u>. Journal of Computational Physics, 54: 115–173, 1984
- [8] Ami Harten, Bjorn Engquist, Stanley Osher and Sukumar R. Chakravarthy. <u>Uniformly High Order Accurate Essentially</u> <u>Non-oscillatory Schemes, III</u>. Journal of Computational Physics, 71: 231–303, 1987
- [9] NVIDIA CUDA Programming Guide. version 3.0, 2010
- [10] NVIDIA CUDA Best Practices Guide. version 3.0, 2010