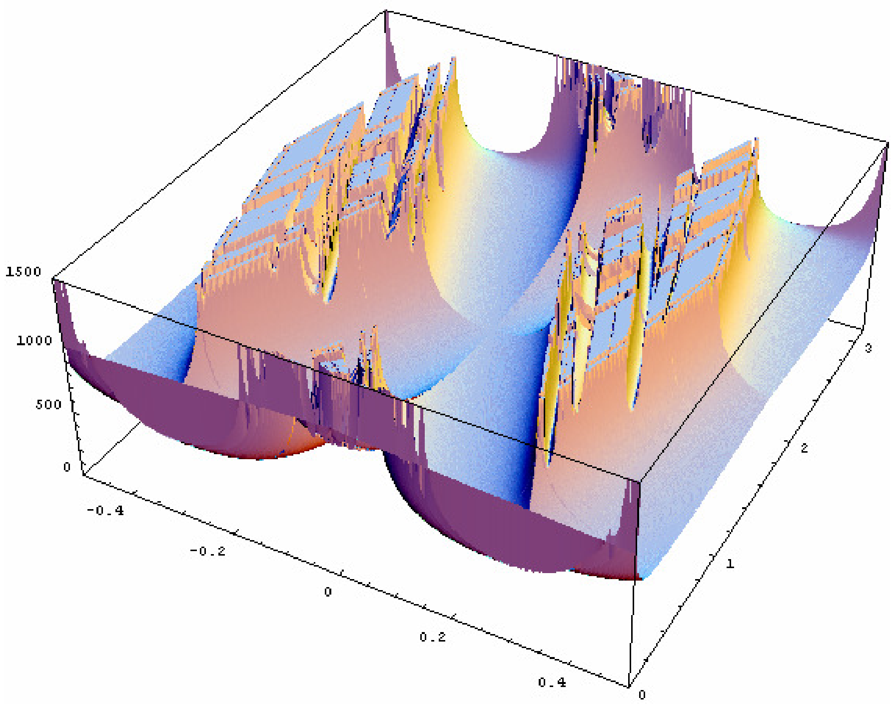
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Υπολογιστικής Φυσικής

Διπλωματική Εργασία

ΧΑΟΤΙΚΗ ΣΚΕΔΑΣΗ

Σκαρπαλέζος Λουκάς

Επιβλέπουσα Καθηγήτρια: Μελετλίδου Εφη



Τμήμα Φυσικής, Α.Π.Θ

Ιούλιος, 2006

Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον συμφοιτητή
μου Μπασκουρέλο Κωνσταντίνο για την
πολύτιμη βοήθεια του.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Κεφάλαιο Ι

Εισαγωγή

Χάος και Μορφοκλασματικά Σύνολα

*« Il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux. Une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les dernières. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit… Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard »**

Henri Poincaré

* *« Μπορεί να τύχει μικρές διαφορές στις αρχικές συνθήκες να προκαλέσουν πολύ μεγαλύτερες στα τελικά φαινόμενα. Από ένα μικρό σφάλμα στις πρώτες προκύπτει ένα τεράστιο στις τελευταίες. Η πρόβλεψη καθίσταται αδύνατη και έχουμε το τυχαίο γεγονός… Μια πολύ μικρή αιτία, που μας ξεφεύγει, καθορίζει ένα σημαντικό αποτέλεσμα, το οποίο δεν μπορούμε να αγνοήσουμε, και τότε λέμε ότι αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στην τύχη »*

1.1 Χάος, ένας νέος κλάδος της επιστήμης

Για πολλούς η θεωρία του χάους ανήκει ήδη σε ένα από τα μεγαλύτερα επιστημονικά επιτεύγματα του $20^{ου}$ αιώνα, και είναι γεγονός ότι λίγες καινούριες θεωρίες στις φυσικές επιστήμες έχουν διεγείρει σε τέτοιο βαθμό το ενδιαφέρον του κοινού. Μερικοί μιλούν ακόμη και για αλλαγή στην αντίληψη της πραγματικότητας ή για επανάσταση στις φυσικές επιστήμες. Τι κάνει όμως αυτήν την θεωρία τόσο συναρπαστική;

Η κύρια αρχή της επιστήμης είναι η ικανότητα της να συνδέει την αιτία με το αποτέλεσμα. Για παράδειγμα, με βάση τους νόμους της βαρύτητας, αστρονομικά φαινόμενα όπως οι εκλείψεις και η εμφάνιση κομητών μπορούν να προβλεφθούν ακόμη και χιλιάδες χρόνια πριν. Άλλα φαινόμενα ωστόσο, είναι πολύ πιο δύσκολο να προβλεφθούν. Παρόλο που οι κινήσεις της ατμόσφαιρας υπακούουν στους ίδιους φυσικούς νόμους με τις κινήσεις των πλανητών, η πρόβλεψη του καιρού εμφανίζεται ακόμη προβληματική. Εφόσον δεν υπάρχει σαφής συσχέτιση μεταξύ αιτίας και αποτελέσματος, λέμε ότι τέτοιου είδους φαινόμενα εμπεριέχουν τυχαία στοιχεία. Παλαιότερα, δεν υπήρχαν λόγοι να αμφισβητήσει κανείς ότι, με την ανάλυση πολύ περισσότερων δεδομένων (π.χ. με πολύ πυκνότερο δίκτυο από μετεωρολογικούς σταθμούς και πιο ισχυρούς υπολογιστές), θα ήταν δυνατόν να γίνει μια μακροπρόθεσμη και ακριβής πρόβλεψη. Τελευταία όμως, μερικά από τα πρώτα συμπεράσματα της θεωρίας του χάους έχουν μεταβάλλει αυτή την άποψη. Απλά αιτιοκρατικά συστήματα με λίγες παραμέτρους μπορούν να παρουσιάσουν τυχαία συμπεριφορά η οποία είναι τελείως δομική. Αυτή την τυχαία συμπεριφορά αποκαλούμε χάος. Ένα φαινομενικά παράδοξο είναι ότι το χάος είναι αιτιοκρατικό, παραγόμενο από σταθερούς κανόνες που δεν εμπεριέχουν τυχαία στοιχεία μεταβολής. Μιλάμε ακόμη και για αιτιοκρατικό χάος (*deterministic chaos*). Θεωρητικώς, το μέλλον προσδιορίζεται απόλυτα από το παρελθόν, στην πράξη όμως, μια απειροελάχιστη διάφορα στις αρχικές συνθήκες μεγεθύνεται, με αποτέλεσμα το υπό μελέτη σύστημα (αν και προβλέψιμο για μικρό χρονικό διάστημα) να γίνεται απρόβλεπτο σε βάθος χρόνου.

Η τεράστια ώθηση που έδωσαν στην εξέλιξη της φυσικής επιστήμης και των μαθηματικών, περίπου τριακόσια χρόνια πριν, οι εργασίες των Newton και Leibniz, και με την οποία μια θεωρία βασιζόμενη σε μαθηματικό φορμαλισμό μπορούσε να εξηγήσει και να προβλέψει πλήθος φαινομένων, σημάδεψε την αρχή μιας εποχής όπου ωρίμασε η κρυφή πεποίθηση ότι αιτιοκρατία και προβλεψιμότητα είναι ταυτόσημες έννοιες. Η αντίληψη αυτή βρίσκει σύμβολο στο 'δαίμονα του Laplace': «Εάν μπορούσαμε να φανταστούμε έναν νου αρκετά μεγάλο ώστε να ξέρει, την παρούσα στιγμή, την ακριβή θέση και ταχύτητα όλων των αντικειμένων του σύμπαντος αλλά και όλες τις δυνάμεις, τότε δεν θα υπήρχε μυστικό για αυτόν τον νου. Θα μπορούσε να υπολογίσει τα πάντα από το παρελθόν και από το μέλλον, χρησιμοποιώντας τους νόμους της αιτίας και του αποτελέσματος.»

Το 1892, ο μαθηματικός Henri Poincaré δημοσίευσε ότι το σύστημα των τριών σωμάτων παρουσιάζει αυτό που ο ίδιος ονόμασε χαοτική συμπεριφορά, αλλά η παρατήρηση αυτή ήταν πολύ ανατρεπτική για την εποχή εκείνη και χρειάστηκε να περάσουν περίπου εβδομήντα χρόνια ώσπου να απασχολήσει ξανά την επιστημονική κοινότητα.

Στο μεταξύ, η κλασική αιτιοκρατική άποψη δέχθηκε ένα ισχυρό πλήγμα το 1927, όταν ο Werner Heisenberg δημοσίευσε την γνωστή του αρχή της αβεβαιότητας, η οποία διατυπώνει ότι είναι αδύνατο να υπολογισθούν ταυτοχρόνως με άπειρη ακρίβεια η θέση και η ταχύτητα ενός αντικειμένου. Ο ίδιος έγραψε: «Στην αυστηρή διατύπωση του νόμου της αιτιότητας -'Όταν γνωρίζουμε το παρόν, μπορούμε να υπολογίσουμε το μέλλον'- δεν είναι το τελευταίο μέλος αλλά το πρώτο που είναι λαθεμένο. Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε το παρόν σε όλες τις καθοριστικές λεπτομέρειες του. Ως εκ τούτου, κάθε αντίληψη αποτελεί μια επιλογή από μια πληθώρα ενδεχομένων και έναν περιορισμό για τα μελλοντικά ενδεχόμενα… Επειδή κάθε πειραματική διαδικασία υπόκειται στους νόμους τις κβαντομηχανικής, και συνάμα στην αρχή της αβεβαιότητας, η ακυρότητα του νόμου της αιτιότητας εδραιώνεται οριστικά μέσω της κβαντομηχανικής.»

Ωστόσο, η αρχή της αβεβαιότητας δεν σήμανε καθόλου το οριστικό τέλος της αιτιοκρατικής άποψης. Η απόλυτη μαθηματική ακρίβεια, την οποία είχε προϋποθέσει ο Laplace, όντως δεν ήταν φυσικός εφικτή, αλλά οι επιστήμονες συνέχιζαν να πιστεύουν ότι από αιτίες προσεγγιστικά ίδιες προκύπτουν αποτελέσματα προσεγγιστικά ίδια. Όμως, αυτή η φαινομενικά ευλογοφανής υπόθεση δεν αποτελεί μια παγκόσμια αλήθεια και, πολύ περισσότερο, δεν ανταποκρίνεται στην εξέλιξη φυσικών διαδικασιών σε μεγάλες χρονικές περιόδους.

Γύρω στο 1960, ο μετεωρολόγος Ed Lorenz διατύπωσε την αδυναμία μακροπρόθεσμης πρόβλεψης του καιρού μέσω αριθμητικών μεθόδων αποδεικνύοντας ότι ακόμη και ένα σύνολο τριών συζευγμένων, πρώτης τάξης, μη γραμμικών εξισώσεων, μπορεί να οδηγήσει το σύστημα σε τελείως χαοτική συμπεριφορά. Έτσι, εισήγαγε τον όρο 'φαινόμενο πεταλούδας' για να περιγράψει την ευαίσθητη εξάρτηση της εξέλιξης των καιρικών φαινομένων από τις αρχικές συνθήκες. Η δική του περιγραφή του αιτιοκρατικού χάους είναι η εξής: «Χάος εμφανίζεται όταν το σφάλμα στην διάδοση, θεωρούμενο ως ένα σήμα σε μια χρονική διαδικασία, μεγεθύνεται σε μέγεθος ίδιας τάξης με το αρχικό σήμα». Όποτε, τελικά, η απάντηση του Heisenberg στην αιτιοκρατική θεώρηση ήταν ημιτελής. Είχε συμπεράνει ότι η αυστηρή αιτιότητα είναι λανθασμένη εξαιτίας των λανθασμένων προϋποθέσεων της. Ο Lorenz απέδειξε ότι και τα συμπεράσματα της είναι λανθασμένα. Με άλλα λόγια, αιτιοκρατία και προβλεψιμότητα δεν αποτελούν ταυτόσημες έννοιες.

Σήμερα έχει βρεθεί ότι το αιτιοκρατικό χάος (το οποίο υποδηλώνει τη χαοτική συμπεριφορά της εξέλιξης στον χρόνο συστημάτων, η κίνηση των οποίων καθορίζεται μοναδικά από τις αρχικές συνθήκες) εμφανίζεται σε πλήθος μη γραμμικών συστημάτων, ακόμη και σε πολύ απλά συστήματα όπως είναι η τετραγωνική απεικόνιση $x \to ax(1-x)$. Σ' αυτό το σημείο, πρέπει να τονιστεί ότι η μη γραμμικότητα αποτελεί αναγκαία, αλλά όχι ικανή συνθήκη για την εμφάνιση του χάους. Η κύρια ιδιότητα η οποία χαρακτηρίζει ένα χαοτικό σύστημα είναι η «ευαίσθητη εξάρτηση από της αρχικές συνθήκες». Σύμφωνα με αυτήν, όταν ένα σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά, πολύ κοντινές τροχιές απομακρύνονται εκθετικά η μια από την άλλη με το πέρασμα του χρόνου, με συνέπεια η σχέση αιτίας και αποτελέσματος να χάνεται ολοκληρωτικά και η μακροπρόθεσμη πρόβλεψη της εξέλιξης του συστήματος να καθίσταται τελείως αδύνατη. Έτσι, μια σημαντική παράμετρος στην μελέτη χαοτικών συστημάτων είναι ο 'ορίζοντας προβλεψιμότητας' του, δηλαδή το μαθηματικό, φυσικό ή χρονικό όριο πέρα από το οποίο καμία πρόβλεψη δεν είναι εφικτή. Όπως ο καιρός, και η κίνηση των πλανητών αποτελεί χαοτικό φαινόμενο αλλά ο χρόνος μετά από τον οποίο εκδηλώνεται το χάος είναι πολύ μεγαλύτερος.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι το χάος και η τάξη είναι δυνατόν (και μάλιστα συμβαίνει σε πλήθος περιπτώσεων) να εμφανισθούν παράλληλα στο ίδιο σύστημα. Έτσι, μια γραμμική διάδοση των σφαλμάτων, χαρακτηριστική ενός αιτιοκρατικού συστήματος το οποίο υπακούει στην αρχή της αιτιότητας, μπορεί να συνυπάρχει στο ίδιο σύστημα με μια εκθετική διάδοση των σφαλμάτων.

1.2 Ακριβής ορισμός χάους

- **Βοηθητικές έννοιες**

Λέμε ότι μια απεικόνιση f είναι *τοπολογικά μεταβατική*, αν για οποιαδήποτε ανοικτά διαστήματα $U, V \subset \Sigma$ υπάρχει $n \in N$, τέτοιο ώστε $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ δηλαδή έχει σημεία μιας ανοικτής περιοχής που σταδιακά επισκέπτονται κάθε άλλη ανοικτή περιοχή.

Λέμε ότι μια απεικόνιση f παρουσιάζει *ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες* εάν υπάρχει κάποιο $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε γειτονιά U κάθε σημείου $x \in \Sigma$, να υπάρχουν $x' \in U$ και $n \in N$, τέτοια ώστε η απόσταση

$$d(f^n(x), f^n(x')) > \delta$$

- **Ορισμός χάους**

Μια απεικόνιση λέγεται χαοτική στο συμπαγές αναλλοίωτο σύνολο Σ όταν πληρεί τις τρεις παρακάτω προϋποθέσεις:

1. Έχει ένα πυκνό σύνολο περιοδικών τροχιών
2. Είναι τοπολογικά μεταβατική
3. Παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες.

- **Ο εκθέτης Liapunov**

Ένας τρόπος να μετρήσουμε το πόσο χαοτικό είναι κάποιο σύστημα είναι ο υπολογισμός του εκθέτη Liapunov, ο οποίος ορίζεται ως η ποσότητα:

$$\sigma = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} \ln \left| f'(x_j) \right|$$

όπου $f'(x_j)$ η Ιακωβιανή ορίζουσα του συστήματος:

$$f'(x_j) = \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|$$

Τα x_j είναι τα διαδοχικά σημεία μιας τροχιάς ενώ το n μπορεί να θεωρηθεί ως ο χρόνος. Ο εκθέτης Liapunov μας δίνει τον μέσο ρυθμό απομάκρυνσης γειτονικών αρχικών συνθηκών καθώς και την μέση απώλεια πληροφοριών για τη θέση ενός σημείου μετά από κάθε βήμα. Όπως προκύπτει από την θεωρία για την ευστάθεια των γειτονικών σημείων, για να παρουσιάζει κάποιο σύστημα χαοτική συμπεριφορά θα πρέπει να είναι $\sigma > 0$.

1.3 Ομοκλινικά σημεία μιας απεικόνισης

Έστω η απεικόνιση:

$$f(x_n) = x_{n+1}$$

όπου $x_n \in R^n$, $f : R^n \to R^n$.

Σταθερά σημεία της απεικόνισης ονομάζονται τα σημεία της που επαληθεύουν τη σχέση:

$$f(x_n) = x_n$$

Το σύνολο Σ ονομάζεται αναλλοίωτο σύνολο της απεικόνισης όταν το σημείο x_n ανήκει στο Σ και όλη η τροχιά του x_n, κάτω από τη δράση της απεικόνισης, ανήκει και αυτή στο Σ, για κάθε *n*.

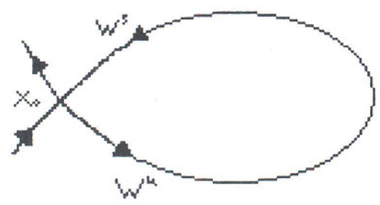
Κάθε απεικόνιση, σε ένα υπερβολικό σημείο, έχει εν γένει μια ευσταθή και μια ασταθή πολλαπλότητα (τοπικές) οι οποίες ορίζονται ως εξής:

$$W^s(x_0) = \{x \in \Sigma / f^n(x) \to x_0,\ n \to \infty \text{ και} f^n(x) \in \Sigma,\ \forall \text{n} \geq 0\}$$
$$W^u(x_0) = \{x \in \Sigma / f^{-n}(x) \to x_0,\ n \to \infty \text{ και} f^{-n}(x) \in \Sigma,\ \forall \text{n} \geq 0\}$$

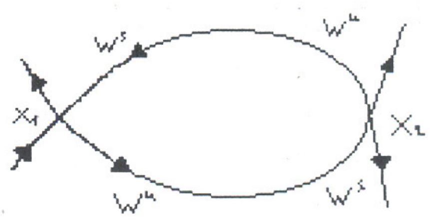
όπου x_0 το σταθερό σημείο της απεικόνισης. Δηλαδή για κάθε x που ανήκει στο Σ, όλη η τροχιά του ανήκει στο Σ και τείνει στο σταθερό σημείο.

Η ολική ασταθής (ευσταθής) πολλαπλότητα ορίζεται ως η ένωση όλων των εικόνων (προεικόνων) της τοπικής απεικόνισης. Οι πολλαπλότητες αυτές μπορούν είτε να διαφεύγουν στο άπειρο, είτε να ενώνονται ομαλά (μια ευσταθής και μια ασταθής) όταν υπάρχει ένα ολοκλήρωμα του συστήματος, είτε να οδηγούνται σε διαφορετικούς τόπους, είτε να τέμνονται. Στην τελευταία περίπτωση, μια πολλαπλότητα δεν μπορεί να τέμνει τον εαυτό της, ούτε και μια πολλαπλότητα ίδιας ευστάθειας, άλλου σταθερού σημείου. Έτσι, μια πολλαπλότητα μπορεί να τέμνει μόνο μια αντίθετης ευστάθειας πολλαπλότητα.

Όταν η ευσταθής πολλαπλότητα τέμνει την ασταθή πολλαπλότητα του ίδιου σταθερού σημείου, τότε το σημείο τομής ρ ονομάζεται ομοκλινικό σημείο. Όταν η ευσταθής πολλαπλότητα τέμνει την ασταθή πολλαπλότητα διαφορετικού σταθερού σημείου, τότε το σημείο τομής ρ ονομάζεται ετεροκλινικό σημείο.



Ομοκλινικό σημείο



Ετεροκλινικό σημείο

Αντίστοιχα η τροχιά του ρ ονομάζεται ομοκλινική στο x_0 εάν

$$\rho \in W^s(x_0) \cap W^u(x_0)$$

και ετεροκλινική στα x_1, x_2 εάν

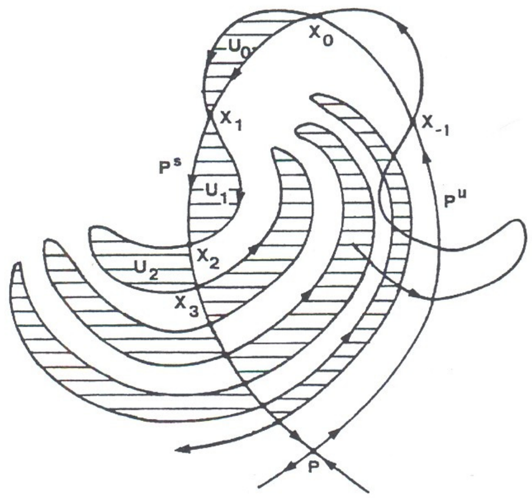
$$\rho \in W^s(x_1) \cap W^u(x_2)$$

Εάν οι τομές τον πολλαπλοτήτων είναι εγκάρσιες τότε το ρ ονομάζεται εγκάρσιο ομοκλινικό σημείο.

Μπορεί να δειχθεί ότι η ύπαρξη ομοκλινικών σημείων συνεπάγεται την εμφάνιση χάους στη γειτονιά του σταθερού σημείου, με την ταυτόχρονη εμφάνιση μορφοκλασματικής δομής στην περιοχή.

Όπως ήδη επισημάναμε υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής των δυο πολλαπλοτήτων. Όμως η εικόνα του σημείου τομής θα πρέπει να ανήκει και στην ευσταθή και στην ασταθή πολλαπλότητα. Επίσης θα πρέπει να διατηρείται ο προσανατολισμός (τα βελάκια πάνω στις πολλαπλότητες). Έτσι η ύπαρξη ενός σημείου τομής συνεπάγεται μια απειρία σημείων τομής.

Ένα ακόμη χαρακτηριστικό του συστήματος είναι ότι επειδή εφαρμόζουμε διατηρητική απεικόνιση (η οποία διατηρεί τα εμβαδά στον χώρο των φάσεων), πρέπει τα εμβαδά μεταξύ των τομών να είναι ίσα. Όμως, όσο αυξάνεται το *n* τόσο τα σημεία πλησιάζουν εκθετικά το σταθερό σημείο της απεικόνισης, με αποτέλεσμα η απόσταση τους πάνω στην ευσταθή πολλαπλότητα να μειώνεται και τα εμβαδά να παίρνουν όλο και περισσότερο μακρόστενη μορφή όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Τα εμβαδά παίρνουν όλο και περισσότερο μακρόστενη μορφή όσο πλησιάζουμε στο υπερβολικό σημείο P

Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε ότι η εικόνα γύρω από το υπερβολικό σημείο P είναι πολύ μπλεγμένη και φαίνεται να αποτελείται από άπειρες παράλληλες ευθείες. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το εμβαδόν πρέπει να διατηρείται και καθώς πλησιάζουν τα σημεία τομής στο υπερβολικό σημείο το όριο αποτελείται από παράλληλες γραμμές μεταξύ τους. Επίσης, εάν κάνουμε μια μεγέθυνση στην περιοχή εκείνη θα πάρουμε το ίδιο σχήμα, πράγμα που υποδηλώνει την ύπαρξη μορφοκλασματικού συνόλου (βλ. παρ. 1.4) στην περιοχή του υπερβολικού σημείου.

Συμπερασματικά είδαμε ότι η ύπαρξη ομοκλινικών σημείων στην περιοχή ενός υπερβολικού σημείου συνεπάγεται την εμφάνιση χάους.

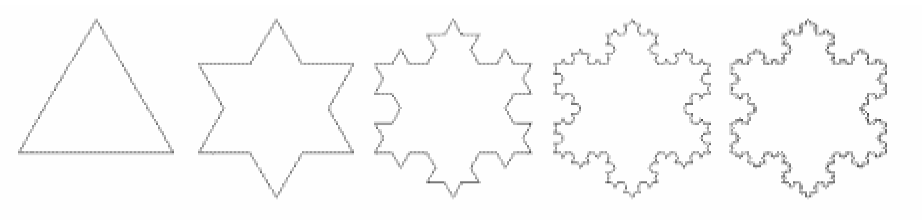
1.4 Μορφοκλασματικά Σύνολα

Τα τελευταία χρόνια, όλοι έχουμε θαυμάσει σε διάφορα έντυπα και αφίσες τις όμορφες εικόνες που προκύπτουν από τα μορφοκλασματικά σύνολα, τα οποία είναι ευρέως γνωστά υπό την αγγλική τους ονομασία, *Fractals*. Χωρίς να μπούμε σε μια λεπτομερή περιγραφή τις πλούσιας θεωρίας γύρω από αυτά τα αντικείμενα, θα προσπαθήσουμε εδώ να δώσουμε έναν γενικό ορισμό και να αναφέρουμε μερικά βασικά χαρακτηριστικά των μορφοκλασματικών συνόλων, ώστε να μπορέσουμε να τα αντιμετωπίσουμε όταν θα τα συναντήσουμε στη συνέχεια τις εργασίας.

Ο όρος *Fractal* επινοήθηκε το 1974 από τον μαθηματικό B. Mandelbrot και έχει ως ρίζα το λατινικό επίθετο *fractus* που σημαίνει «κατακερματισμένο». Ο λόγος για τον οποίο εισήγαγε αυτήν την καινούρια έννοια προέρχεται από την εξής διαπίστωση: οι κλασσικοί κανόνες της γεωμετρίας δεν βοηθάνε στην δημιουργία ικανοποιητικών μοντέλων για την περιγραφή περίπλοκων φυσικών αντικειμένων. Πολύ πριν από αυτόν, διάφοροι επιστήμονες είχαν ήδη αναδείξει γεωμετρικές κατασκευές οι οποίες ήταν αδύνατον να καταταχθούν στις ήδη γνωστές οικογένειες γεωμετρικών αντικειμένων. Από τα πιο γνωστά παραδείγματα αυτών είναι το σύνολο του Cantor (που αποκαλείται επίσης και «σκόνη» του Cantor), η καμπύλη του Peano, το τρίγωνο του Sierpinski και η «χιονονιφάδα» του Koch. Η ευφυής ιδέα του Mandelbrot ήταν να εντοπίσει τα κοινά χαρακτηριστικά όλων αυτών των «περίεργων» αντικειμένων και να τα εντάξει σε μια οικογένεια, την οικογένεια των μορφοκλασματικών αντικειμένων.

Αυτό που παρατήρησε αρχικά ο Mandelbrot είναι ότι σε όλα αυτά τα αντικείμενα εμφανίζονται η υποδιαίρεση και η επανάληψη μοτίβων σε όλο και μικρότερη κλίμακα. Για να προκύψει ένα μορφοκλασματικό αντικείμενο επαναλαμβάνεται επ' άπειρον μια διαδικασία μετασχηματισμού ενός αρχικού αντικειμένου. Σε κάθε βήμα, η διαδικασία αυτή αυξάνει την πολυπλοκότητα του αντικειμένου.

Το παράδειγμα της «χιονονιφάδας» του Koch είναι χαρακτηριστικό. Αυτή η «καμπύλη» προκύπτει ως εξής. Στο πρώτο βήμα, αντικαθιστούμε το κεντρικό τμήμα (το 1/3) κάθε πλευράς ενός ισόπλευρου τρίγωνου με δυο τμήματα ίσου μήκους με αυτό που αφαιρέθηκε (ώστε, εάν δεν το είχαμε αφαιρέσει, να σχημάτιζαν ένα ισόπλευρο τρίγωνο). Δηλαδή, από ένα αρχικό αντικείμενο, που είναι η μια πλευρά την οποία αποκαλούμε *initiator*, προκύπτουν άλλα τέσσερα που έχουν μήκος το 1/3 του αρχικού αντικειμένου. Το σχήμα το οποίο προκύπτει για κάθε πλευρά αποκαλείται *generator* γιατί είναι το μοτίβο που χρησιμοποιείται ως στοιχείο επανάληψης σε όλα τα επόμενα βήματα. Επαναλαμβάνοντας αυτή την διαδικασία για όλα τα καινούρια τμήματα που προκύπτουν σε κάθε βήμα, το σχήμα που διαμορφώνεται μοιάζει όλο και περισσότερο με χιονονιφάδα. Το μορφοκλασματικό αντικείμενο είναι αυτό που προκύπτει μετά από άπειρες επαναλήψεις.

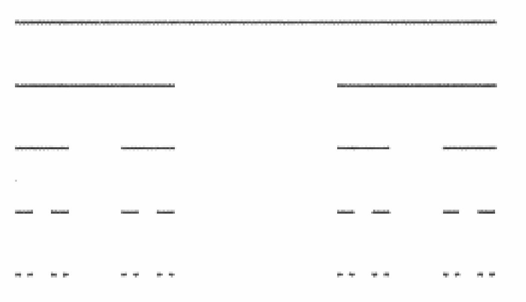


Τα σταδία δημιουργίας της χιονονιφάδας του Koch. Μετά από κάποιες επαναλήψεις η μορφή «από μακριά» δεν φαίνεται να αλλάζει.

Αξιοσημείωτο είναι ότι σε οποία μεγέθυνση και αν κοιτάξουμε μέρος του «τελικού», μορφοκλασματικού αντικειμένου, θα παρατηρήσουμε την ίδια εικόνα, με αποτέλεσμα να μην μπορούμε να πούμε ποια μεγέθυνση κάναμε. Αυτή η καμπύλη είναι δηλαδή αναλλοίωτη υπό κλίμακα. Συνηθίζουμε να αποκαλούμε αυτήν την πολύ σημαντική ιδιότητα των *fractals,* «αυτοομοιότητα». Επίσης, παρατηρούμε ότι σε κάθε βήμα, το μήκος της καμπύλης αυξάνεται κατά 4/3, και συνεπώς, για άπειρες επαναλήψεις, τείνει στο άπειρο, πράγμα αξιοσημείωτο εφόσον σε κανένα στάδιο της δημιουργίας της η καμπύλη αυτή δεν ξεφεύγει από το δακτύλιο που δημιουργούν ο εσωτερικός και ο εξωτερικός κύκλος του αρχικού ισόπλευρου τρίγωνου. Τέλος, παρατηρούμε ότι αυτή η καμπύλη είναι μεν συνεχής αλλά πουθενά παραγωγίσιμη!

Ας θεωρήσουμε τώρα μια καμπύλη που υπό μια επαναληπτική διαδικασία γεμίζει όλο και περισσότερο μια τετράγωνη περιοχή (*space filling curves*). Ο όρος 'γεμίζει' ορίζεται με αυστηρό τρόπο αλλά σημαίνει χονδρικά ότι η καμπύλη ορίζεται έτσι ώστε στο όριο άπειρων επαναλήψεων να διέρχεται μόνο μια φορά από όλα τα σημεία της περιοχής. Τέτοιες είναι η καμπύλη Hilbert και η καμπύλη Peano, χρησιμοποιούνται δε σε συστήματα εκτύπωσης με μεθόδους dithering για δημιουργία πιο ρεαλιστικών φωτοσκιάσεων. Για άπειρες επαναλήψεις, η καμπύλη που προκύπτει δεν έχει τη διάσταση που αναμένουμε από την κλασική γεωμετρία. Γενικά μια γραμμή έχει διάσταση ένα αλλά μιαν επιφάνεια έχει διάσταση δύο και εδώ με μια (αρχικά μονοδιάστατη) καμπύλη επικαλύπτουμε μια (δισδιάστατη) επιφάνεια! Διαισθητικά, μπορούμε να αντιληφθούμε ότι η τελική καμπύλη δεν μπορεί να έχει διάσταση δύο αφού δεν πρόκειται για επιφάνεια. Όμως, στην περίπτωση που εξετάζουμε εδώ δεν μπορεί να έχει ούτε και διάσταση ένα αφού κάθε σημείο της επιφάνειας που σαρώνει έχει ένα μοναδικό αντίστοιχο στην καμπύλη. Αυτή η αδυναμία να δώσουμε μια κλασσική, ακέραια διάσταση στο αντικείμενο που προκύπτει, είναι χαρακτηριστική όλων των *fractals*. Έτσι, για αυτά τα αντικείμενα ορίζεται μια καινούρια διάσταση, η μορφοκλασματική διάσταση, η οποία δεν είναι ακέραιη.

Ένα γνωστό παράδειγμα μορφοκλασματικού συνόλου είναι το σύνολο του Cantor (*Cantor set*). Για την δημιουργία του, η διαδικασία επανάληψης η οποία ακολουθείται είναι η εξής. Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα μήκους ένα. Από το τμήμα αυτό αφαιρείται το 1/3 μεσαίο νήμα και έτσι παραμένουν δυο τμήματα μήκους 1/3 το καθένα. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για τα δυο αυτά τμήματα, κ.ο.κ επ' άπειρον.



Τα στάδια δημιουργίας του συνόλου Cantor

Μετά από ν βήματα, ο αριθμός των τμημάτων που προκύπτουν είναι 2^{ν} και το κάθε ένα τους έχει μήκος $(1/3)^{\nu}$. Συνεπώς το συνολικό μήκος των τμημάτων είναι:

$$\Lambda_{\nu} = \left(2/3\right)^{\nu}$$

και όταν το ν πλησιάζει το άπειρο έχουμε ότι:

$$\Lambda = \lim_{\nu \to \infty} \left(2/3\right)^{\nu} = 0$$

συνεπώς το σύνολο του Cantor έχει μήκος μηδέν και αποτελείται από άπειρο αριθμό σημείων, την λεγόμενη «σκόνη». Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να εντάξουμε τα άπειρα αυτά σημεία στα γνωστά σχήματα της Ευκλείδιας γεωμετρίας. Ποια είναι λοιπόν η διάσταση αυτού του περίεργου αντικειμένου;

Εάν N είναι ο αριθμός των αυτοόμοιων σχημάτων μετά από ν επαναλήψεις και M ο παράγοντας μεγέθυνσης μετά από ν επαναλήψεις, η διάσταση ενός μορφοκλασματικού συνόλου δίνεται από τον εξής τύπο:

$$D = \frac{\log \mathrm{N}}{\log \mathrm{M}} \tag{1.1}$$

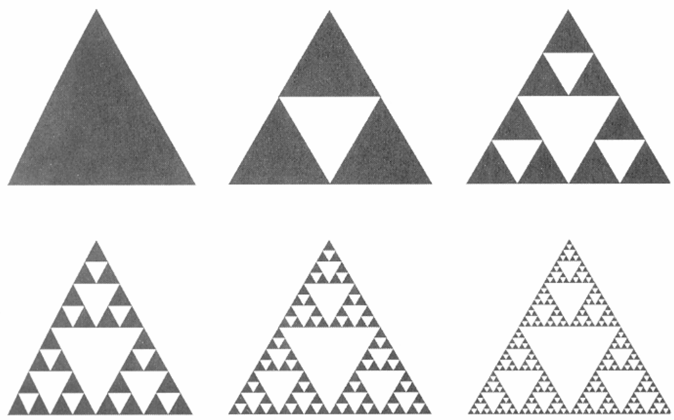
Έτσι η μορφοκλασματική διάσταση του συνόλου του Cantor είναι:

$$D = \frac{\log(2)^{\nu}}{\log(1/3)^{-\nu}} = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.63$$

ενώ αυτή της χιονονιφάδας του Koch είναι:

$$D = \frac{\log(4)^{\nu}}{\log(1/3)^{-\nu}} = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.26$$

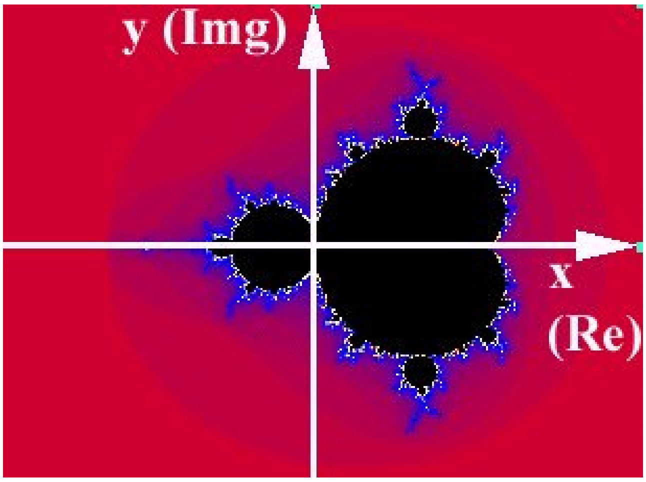
Άλλο γνωστό παράδειγμα μορφοκλασματικού αντικειμένου είναι το τρίγωνο του Sierpinski, το οποίο δημιουργείται με την διαδικασία που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η μορφοκλασματική του διάσταση είναι 1.585.



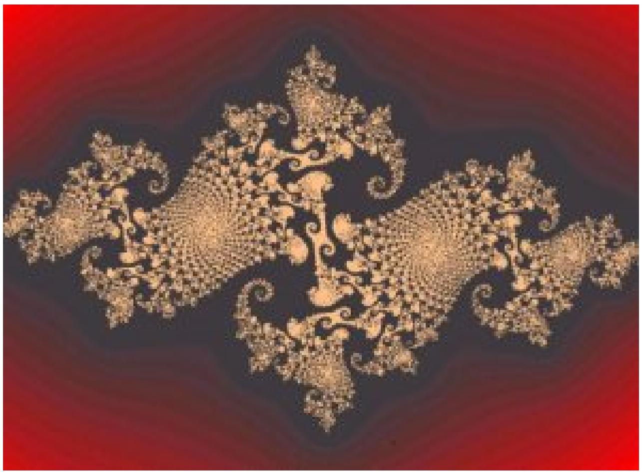
Η διαδικασία επανάληψης για την δημιουργία του τρίγωνου του Sierpinski

Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι τα δύο κύρια χαρακτηριστικά των μορφοκλασματικών αντικειμένων είναι η μη ακέραια διάσταση και η αυτοόμοιοτητα υπό κλίμακα.

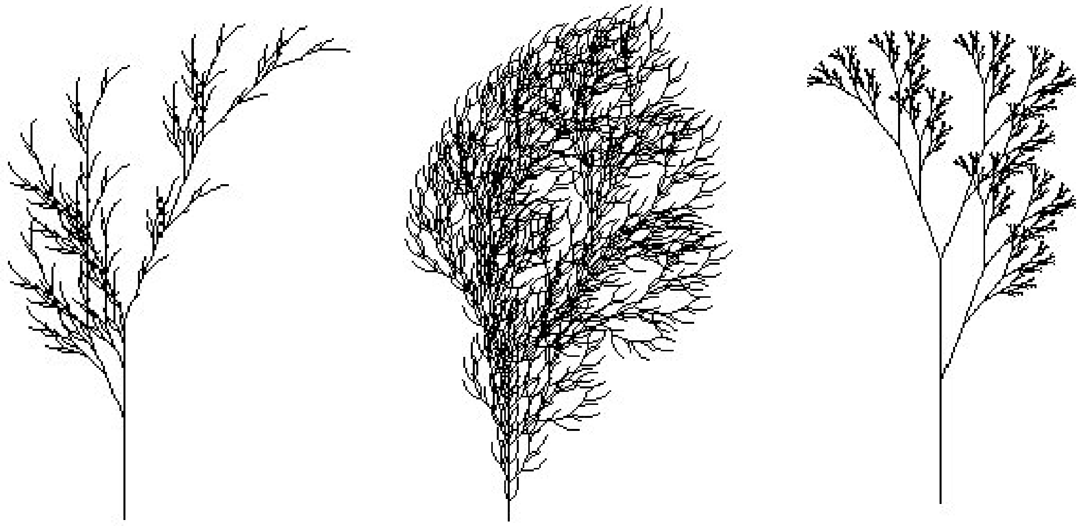
Τα τρία παραπάνω παραδείγματα ανήκουν όλα στην οικογένεια των αποκαλούμενων «γεωμετρικών» μορφοκλασματικών αντικειμένων. Πέρα από αυτά, υπάρχουν και τα «αιτιοκρατικά» μορφοκλασματικά αντικείμενα (τα οποία προκύπτουν από την επαναληπτική απεικόνιση πολυωνυμικών μιγαδικών συναρτήσεων) όπως είναι το σύνολο Mandelbrot και τα σύνολα Julia. Υπάρχουν επίσης τα λεγόμενα L-systems, συντόμευση του Lindenmayer-systems, από το όνομα του βιολόγου Aristid Lindenmayer που τα εφηύρε για να μελετήσει την ανάπτυξη των φυτών.



Το σύνολο του Mandelbrot

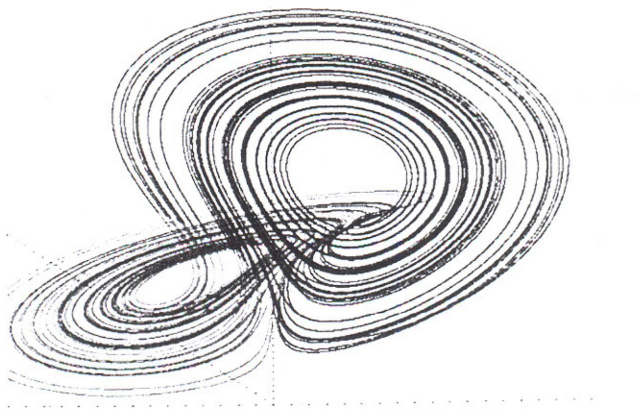


Ένα σύνολο Julia



Παραδείγματα από L-systems

Τέλος, ένας όρος που σχετίζεται με τα μορφοκλασματικά σύνολα είναι αυτός του χαοτικού ελκυστή. Με τον όρο αυτόν, εννοούμε το σύνολο μη ακέραιας διάστασης, στο οποίο έλκονται οι τροχιές ενός χαοτικού συστήματος. Πολύ γνωστό παράδειγμα είναι ο χαοτικός ελκυστής του Lorenz που απεικονίζεται παρακάτω.

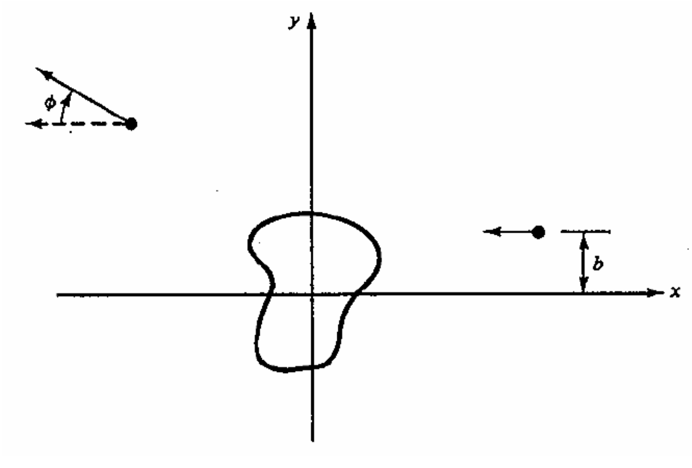


Ο χαοτικός ελκυστής του Lorenz.

1.5 Χαοτική σκέδαση: Μια εισαγωγή

Η σκέδαση μπορεί να οριστεί με τον πιο γενικό τρόπο ως το πρόβλημα της εύρεσης μιας σχέσης μεταξύ μιας ή περισσότερων μεταβλητών «εισόδου», χαρακτηριστικές μιας αρχικής συνθήκης ενός δυναμικού συστήματος και μιας ή περισσότερων μεταβλητών «εξόδου», χαρακτηριστικές μιας τελικής κατάστασης του συστήματος.

Το απλούστερο πρόβλημα σκέδασης είναι η κίνηση ενός σημειακού φορτίου σε ένα δυναμικό που έχει μηδενική ή ελάχιστη ένταση έξω από μια περιοχή σκέδασης πεπερασμένων διαστάσεων. Δηλαδή, έξω από την περιοχή σκέδασης, η τροχιά του σωματιδίου είναι ευθύγραμμη ή σχεδόν ευθύγραμμη. Έτσι, μια ευθύγραμμη τροχιά που κατευθύνεται προς την περιοχή σκέδασης θα αλληλεπιδράσει με τον σκεδαστή και ύστερα θα απομακρυνθεί από αυτόν πάλι ευθύγραμμα, έχοντας όμως αποκτήσει καινούργια κατεύθυνση. Μια σχηματική παράσταση των παραπάνω για την περίπτωση ενός δισδιάστατου προβλήματος σκέδασης φαίνεται στο σχ. [1.1]. Σ΄ αυτή την περίπτωση, η μεταβλητή εισόδου είναι η παράμετρος b που αποκαλείται και «παράμετρος κρούσης», ενώ η μεταβλητή εξόδου είναι η παράμετρος ϕ (γωνία σκέδασης), και το ζητούμενο είναι μια συναρτησιακή σχέση ανάμεσα τους, για συγκεκριμένη κατεύθυνση πρόσπτωσης του σωματιδίου προς την περιοχή σκέδασης.



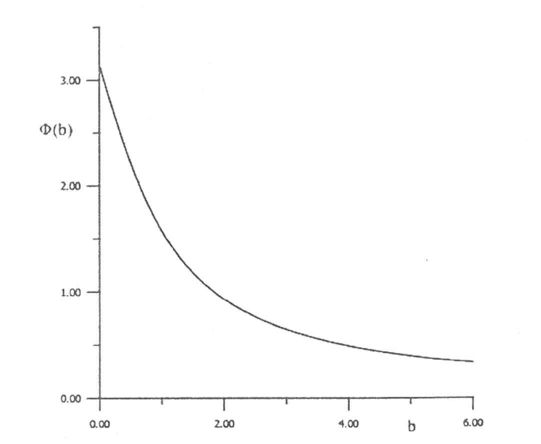
Σχ.[1.1] Σχηματική παράσταση δισδιάστατου προβλήματος σκέδασης

Μια σημαντική παράμετρος στο φαινόμενο της σκέδασης είναι ο «χρόνος καθυστέρησης» (*time delay*) που ορίζεται ως ο χρόνος που παραμένει το σωματίδιο μέσα στη περιοχή σκέδασης. Όπως είναι αναμενόμενο, ο χρόνος αυτός εξαρτάται από τις μεταβλητές εισόδου και μπορεί να θεωρηθεί ως μεταβλητή εξόδου.

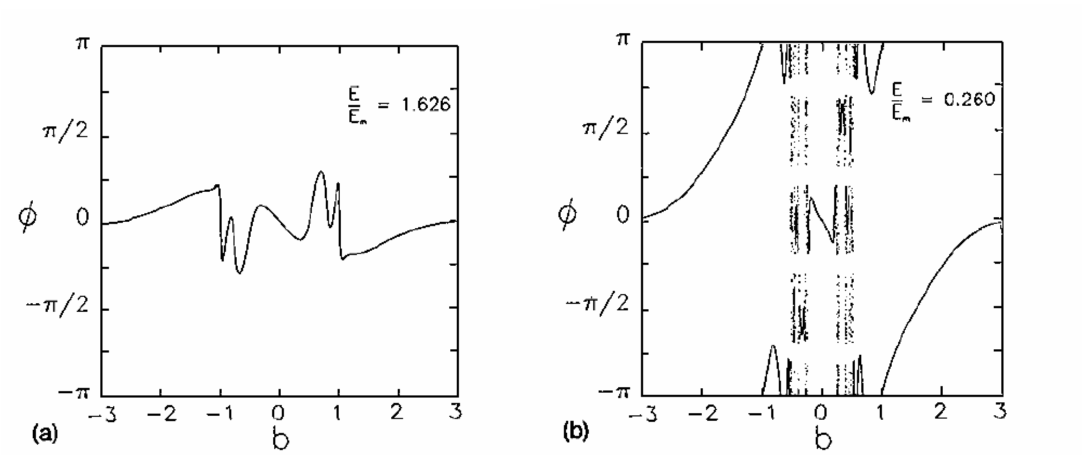
Ένα πολύ γνωστό παράδειγμα ομαλής σκέδασης αποτελεί η αλληλεπίδραση σωματιδίου μάζας m, ερχόμενου από το άπειρο με ταχύτητα υ_0, με απωστικό δυναμικό της μορφής $V = k / r$ όπου k θετική σταθερά. Οι τροχιές του υλικού σημείου είναι υπερβολές με εξωτερική εστία το κέντρο των δυνάμεων. Ως γνωστόν, η γωνία σκέδασης εξαρτάται από την παράμετρο κρούσης μέσω της σχέσης:

$$\phi(b) = 2\arctan(k / mb\upsilon_0^2)$$

και είναι προφανές ότι η σκέδαση είναι ομαλή και το πρόβλημα ολοκληρώσιμο.



Σχ.[1.2]: Η σκέδαση για το δυναμικό $V = k / r$ είναι ομαλή



Σχ.[1.3]: Η σκέδαση για το δυναμικό $V(x, y) = x^2 y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$ γίνεται χαοτική για $E < E_m$

Στο φαινόμενο της χαοτικής σκέδασης, το σύστημα παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από της αρχικές συνθήκες, και η συνάρτηση σκέδασης, δηλαδή η σχέση μεταξύ των μεταβλητών εισόδου και των μεταβλητών εξόδου, παρουσιάζει μεγάλης πολυπλοκότητας συμπεριφορά. Στην περίπτωση του δισδιάστατου προβλήματος στο οποίο αναφερθήκαμε, εάν το σύστημα είναι χαοτικό, μια ελάχιστη μεταβολή της παραμέτρου κρούσης έχει ως αποτέλεσμα μια τελείως διαφορετική συμπεριφορά του σωματιδίου και συνεπώς παρατηρείται μια «αλλόκοτη» εξάρτηση της γωνίας σκέδασης από την παράμετρο κρούσης.

Σε μια μελέτη των Bleher et al.[1988], βρέθηκε ότι εάν μια τροχιά ενός συστήματος χαοτικής σκέδασης μπορεί να εγκαταλείψει την περιοχή σκέδασης με έναν τρόπο ανάμεσα σε διαφορετικούς τρόπους, τότε ένα μορφοκλασματικό σύνορο χωρίζει τον χώρο των αρχικών συνθηκών που αντιστοιχεί στους τρόπους διαφυγής. Αντίθετα με τα μη συντηρητικά δυναμικά συστήματα, όπου σε γενικές γραμμές οι ελκυστές (*attractors*) είναι φραγμένοι, σ' αυτά τα Χαμιλτονιανά συστήματα οι «ελκυστές» βρίσκονται στο άπειρο. Αντί να αντιπροσωπεύουν τον χώρο όπου ενδεχομένως καταλήγουν οι τροχιές, αυτοί οι «ελκυστές» αντιπροσωπεύουν το *πώς* οι τροχιές διαφεύγουν (απώστες). Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι σχεδόν όλες οι τροχιές εγκαταλείπουν το σύστημα, εφόσον υπάρχει μεν σύνολο τροχιών που παραμένουν για άπειρο χρόνο, αλλά έχει μηδενικό μέτρο Lebesgue*. Η ύπαρξη μορφοκλασματικών συνόρων, ανάμεσα στις διάφορες περιοχές του χώρου των αρχικών συνθηκών, έχει μια πολύ σημαντική επίδραση πάνω στο σύστημα, την ευαισθησία της τελικής κατάστασης (*final state sensitivity*). Δηλαδή, όταν υπάρχει έστω και μια πολύ μικρή απροσδιοριστία στην είσοδο, η ποσότητα των μεταβλητών εισόδου για τις οποίες γίνεται αδύνατον να προβλεφθεί ο τρόπος διαφυγής τους, γίνεται πολύ μεγαλύτερη απ' ότι στην περίπτωση στην οποία δεν υπάρχουν μορφοκλασματικά σύνορα.

Για παράδειγμα, στο σχ. [1.3], φαίνεται η εξάρτηση της γωνίας σκέδασης από την παράμετρο κρούσης για το δυναμικό $V(x,y) = x^2 y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$ για δυο διαφορετικές ενέργειες. Αυτό το δυναμικό αποτελείται από τέσσερις «λόφους», οι κορυφές των οποίων βρίσκονται στα σημεία $(x,y) = (\pm 1, \pm 1)$. Όταν η ενέργεια E του

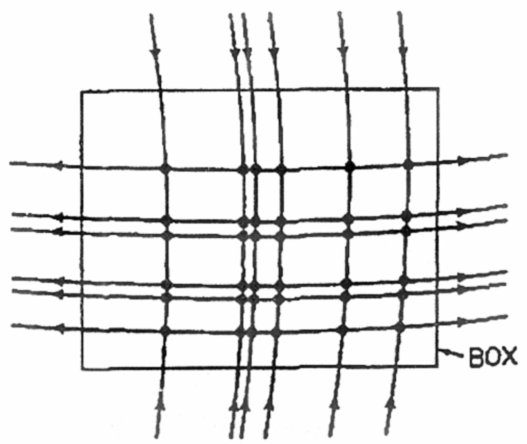
* Ως μέτρο Lebesgue ορίζεται το "μέτρο" με το οποίο μπορούμε να μετράμε "αποστάσεις" μεταξύ των στοιχείων περιέργων συνόλων, όπως είναι για παράδειγμα το σύνολο Cantor. Για περισσότερες πληροφορίες δες " Θεωρία Μέτρου & Ολοκλήρωσης", Πολυχρόνη Ξενικάκη, εκδ. ΑΠΘ.

σωματιδίου είναι μεγαλύτερη από την μέγιστη δυναμική ενέργεια στις κορυφές , την οποία συμβολίζουμε με E_m, η σκέδαση είναι μη χαοτική και η καμπύλη της εξάρτησης της γωνίας σκέδασης από την παράμετρο κρούσης είναι ομαλή. Στην αντίθετη περίπτωση εμφανίζονται περιοχές της αρχικής συνθήκης b για τις οποίες η παράμετρος εξόδου ϕ παρουσιάζει ακανόνιστη συμπεριφορά, και το εκπληκτικό είναι ότι, οποία μεγέθυνση και να πάρουμε αυτών των περιοχών, αυτή η ακανόνιστη συμπεριφορά παραμένει !

Γενικότερα, έχει αποδειχθεί ότι η σκέδαση μπορεί να γίνει χαοτική για μη αυτόνομα συστήματα ενός βαθμού ελευθερίας ενώ για αυτόνομα συστήματα, απαιτούνται τουλάχιστον δυο βαθμοί ελευθερίας. Επιπλέον, τα δυναμικά που παρουσιάζονται, χρειάζεται να έχουν τουλάχιστον τρία πηγάδια στην γενική περίπτωση ή τουλάχιστον δύο εάν είναι ελκτικά.

Πολύ σημαντικό χαρακτηριστικό συστημάτων χαοτικής σκέδασης, είναι η ύπαρξη ενός αναλλοίωτου συνόλου τροχιών που δεν εγκαταλείπουν ποτέ την περιοχή σκέδασης.

Στην περίπτωση που το σύνολο αυτό είναι υπερβολικό και το σύστημα έχει δυο βαθμούς ελευθέριας, θεωρούμε ότι το αναλλοίωτο σύνολο προέρχεται από την τομή της ευσταθούς με τη ασταθή πολλαπλότητα. Στο παρακάτω σχήμα, το παραλληλόγραμμο αποτελεί την περιοχή σκέδασης ενώ οι γραμμές παριστάνουν τις αναλλοίωτες πολλαπλότητες. Το σύνολο όλων των σημείων τομής τους αποτελεί το αναλλοίωτο σύνολο. Αξιοσημείωτο, είναι ότι το αναλλοίωτο σύνολο είναι ένα μορφοκλασματικό σύνολο, εάν πραγματοποιήσουμε μια μεγέθυνση του αρχικού σχήματος, θα προκύψει σχήμα όμοιο με αυτό, ακριβώς όπως και στην περίπτωση των ομοκλινικών σημείων μιας απεικόνισης.



Σχ.[1.4]: Η τομή της ευσταθούς και της ασταθούς πολλαπλότητας αποτελούν το αναλλοίωτο σύνολο

Είναι επίσης δυνατόν, στην περίπτωση αυτή, να υπολογιστεί η διάσταση του μορφοκλασματικού συνόλου που εμφανίζεται. Ο σχετικός τύπος είναι ο παρακάτω:

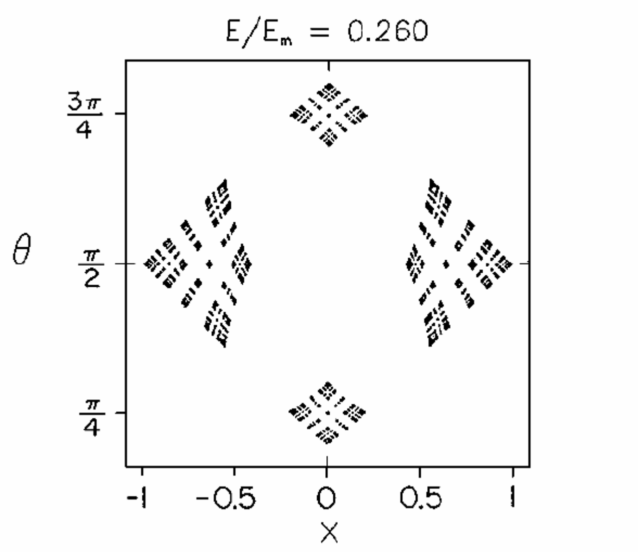
$$d = d_u + d_s - 2 = 2\left(1 - \frac{1}{\tau\lambda_1}\right)$$

όπου d_s είναι η διάσταση της ευσταθούς πολλαπλότητας και d_u της ασταθούς. Ακόμα, $\lambda_1 = -\lambda_2$ είναι οι εκθέτες Liapunov του συστήματος, και τ είναι η παρακάτω ποσότητα, που συνδέεται με τη συνάρτηση του χρόνου καθυστέρησης:

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{t\to\infty} \lim_{N_0\to\infty} \frac{1}{t} \ln\left(\frac{N_0}{N_t}\right)$$

Στη σχέση αυτή N_0 είναι το πλήθος των σημείων που υπάρχουν αρχικά στο τετράγωνο, το οποίο περιέχει όλη την περιοχή σκέδασης, και N_t είναι τα σημεία που έχουν παραμείνει μέσα στο τετράγωνο αυτό μετά από χρόνο t. Τα σημεία που παραμένουν τελικά μέσα στο τετράγωνο είναι αυτά που βρίσκονται πάνω στο αναλλοίωτο σύνολο και στην ευσταθή πολλαπλότητα. Έτσι, όσο πιο μεγάλο είναι το t, τόσο πιο κοντά στην ευσταθή πολλαπλότητα ξεκίνησαν τα N_t σημεία και τόσο πιο κοντά στην ασταθή πολλαπλότητα θα βρίσκονται. Μάλιστα, μετά από πολλές επαναλήψεις τα σημεία που παραμένουν στο τετράγωνο βρίσκονται σε ευθείες γραμμές σχεδόν παράλληλες με την ασταθή πολλαπλότητα. Αντιθέτως, για αρνητικό χρόνο τα σημεία αυτά ξεκίνησαν από ευθείες παράλληλες στην ευσταθή πολλαπλότητα. Το παραπάνω είναι λογικό αν σκεφτεί κανείς ότι η απεικόνιση είναι διατηρητική και συστέλλει τα μήκη κατά την ευσταθή πολλαπλότητα, ενώ τα διαστέλλει κατά την ασταθή.

Στο σχ. [1.5] φαίνεται το αναλλοίωτο σύνολο για το παράδειγμα του σχήματος [1.3] στην επιφάνεια τομής $y = 0$. Είναι προφανής η μορφοκλασματική δομή του αναλλοίωτου συνόλου αυτού.



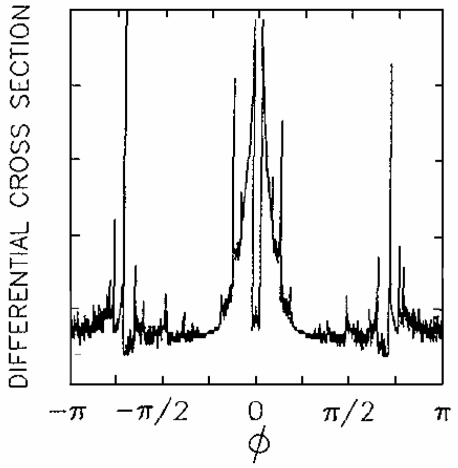
Σχ.[1.5]: Το αναλλοίωτο σύνολο στην περίπτωση του δυναμικού $V(x, y) = x^2 y^2 \exp[-(x^2 + y^2)]$ *στην επιφάνεια τομής* $y = 0$

Ένα φυσικό μέγεθος το οποίο συχνά μας ενδιαφέρει όταν μιλάμε για σκέδαση, είναι η διαφορική ενεργός διατομή. Εάν N_0 είναι το πλήθος των προσπιπτόντων σωματιδίων ανά μονάδα χρόνου και ανά μονάδα επιφάνειας και $Nd\Omega$ το πλήθος των ανά μονάδα χρόνου σκεδαζομένων σωματιδίων στην στέρεα γωνία $d\Omega$ κατά μια συγκείμενη κατεύθυνση τότε διαφορική ενεργός διατομή λέγεται το μέγεθος:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{N}{N_0}$$

Η διαφορική ενεργός διατομή είναι συνάρτηση τόσο της ορμής του βλήματος όσο και της κατεύθυνσης του.

Στο σχ. [1.6], φαίνεται αυτή η ποσότητα για την περίπτωση του δυναμικού του σχ. [1.3] για σωματίδιο με ενέργεια κατώτερη της E_m. Η παρουσία πολλών ανωμαλιών είναι προφανής. Αυτές αποτελούν ένα μορφοκλασματικό σύνολο της ίδιας διάστασης με αυτό των ανωμαλιών της γωνίας σκέδασης ή του χρόνου καθυστέρησης. Σε μη χαοτική σκέδαση, η διαφορική ενεργός διατομή είναι είτε ομαλή, είτε οι ανωμαλίες της περιορίζονται σε σύνολο μηδενικής διάστασης.



Σχ.[1.6]: Η διαφορική ενεργός διατομή για το δυναμικό $V(x,y)=x^2y^2\exp[-(x^2+y^2)]$ *στην περίπτωση* $E<E_m$

Τα τελευταία χρόνια, η μελέτη της χαοτικής συμπεριφοράς σε προβλήματα σκέδασης εμπλούτισε κατά πολύ την κατανόηση της δυναμικής τέτοιων συστημάτων, αποκαλύπτοντας πλήθος δομικών χαρακτηριστικών τους. Υπάρχουν πλέον πολλά μελετημένα παραδείγματα χαοτικής σκέδασης σε διάφορους κλάδους της φυσικής.

Στα επόμενα κεφάλαια, θα μελετήσουμε θεωρητικά και υπολογιστικά τρία παραδείγματα χαοτικής σκέδασης, που είναι πλέον κλασικά, και θα διαπιστώσουμε ότι σε κάθε περίπτωση εμφανίζεται μορφοκλασματική δομή στον χώρο των αρχικών συνθηκών. Το πρώτο παράδειγμα είναι αυτό της σκέδασης σωματιδίου σε δυναμικό με δυο πηγάδια, το δεύτερο είναι το πρόβλημα της σκέδασης σε σύστημα τριών δίσκων και το τρίτο η σκέδαση χορδής από μελανή οπή τύπου Schwarzschild.

Κεφάλαιο II

Χαοτική σκέδαση σε δυναμικό με δύο πηγάδια

Το πρώτο μας παράδειγμα αφορά την σκέδαση σωματιδίου από συμμετρικό δυναμικό με δυο ελάχιστα. Θα δούμε υπό ποιες προϋποθέσεις το φαινόμενο της σκέδασης σ’ αυτό το σύστημα παρουσιάζει χαοτική συμπεριφορά και πως αυτή συνδέεται με την ύπαρξη αναλλοίωτου μορφοκλασματικού συνόλου στον χώρο των αρχικών συνθηκών.

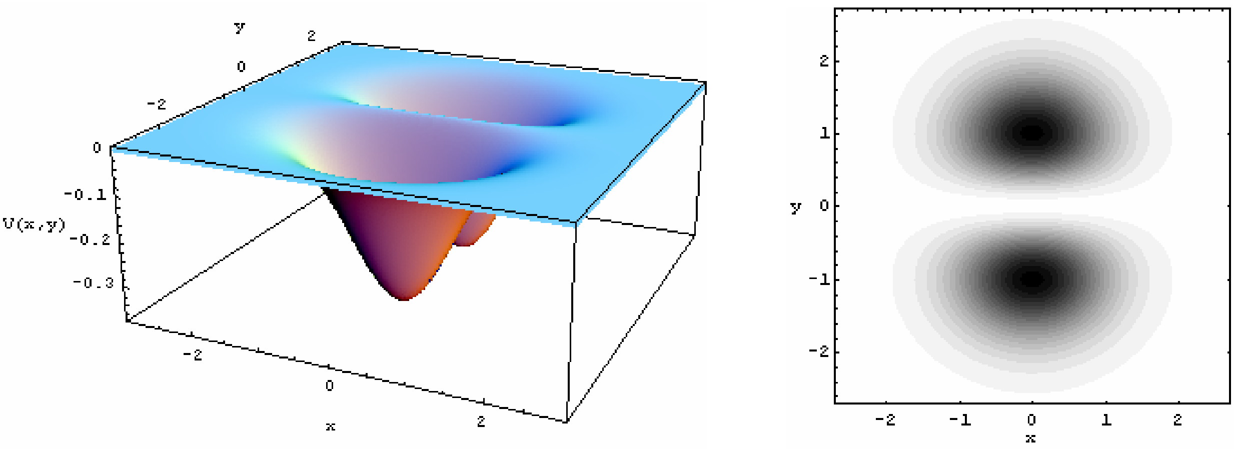
2.1 Μορφή του δυναμικού

Έχει παρατηρηθεί ότι η σκέδαση ηλεκτρόνιου από ιόν H_2^+ περιγράφεται αρκετά ικανοποιητικά από δυναμικό της μορφής:

$$V(x,y) = -ay^2 e^{-\beta(x^2+y^2)} \tag{2.1}$$

όπου οι σταθερές a και β μας δίνουν αντίστοιχα το εύρος και την ισχύ του δυναμικού. Εάν θεωρηθεί ότι $a=\beta=1$ το παραπάνω δυναμικό γίνεται:

$$V(x,y) = -y^2 e^{-(x^2+y^2)} \tag{2.2}$$



Σχ.[2.1]:Τρισδιάστατη και δισδιάστατη σχεδίαση του δυναμικού

Όπως φαίνεται στο σχ. [2.1] το δυναμικό αυτό εμφανίζει δύο ελάχιστα στις θέσεις $(0,\pm1)$ ενώ ο άξονας των x αποτελεί μια απειρία από μέγιστα όπου το δυναμικό είναι ίσο με μηδέν.

2.2 Εύρεση εξισώσεων κίνησης

Για την εύρεση των εξισώσεων κίνησης, εκφράζουμε την συνάρτηση Hamilton του προβλήματος:

$$H = p_i q_i - L = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L \tag{2.3}$$

$$H = p_x^2 + p_y^2 - \frac{p_x^2}{2} - \frac{p_y^2}{2} - y^2 e^{-(x^2+y^2)} = \frac{p_x^2}{2} + \frac{p_y^2}{2} - y^2 e^{-(x^2+y^2)} = E \tag{2.4}$$

Οι εξισώσεις Hamilton παίρνουν τη μορφή:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial p_x} = p_x \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_y \\ \dot{p}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} = -2xy^2 e^{-(x^2+y^2)} \\ \dot{p}_y &= -\frac{\partial H}{\partial y} = 2ye^{-(x^2+y^2)}(1-y^2) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Οι παραπάνω εξισώσεις λύνονται μόνον αριθμητικά. Γι' αυτό το λόγο, θεωρούμε ότι το δυναμικό υπάρχει μόνο στην περιοχή σκέδασης η οποία λαμβάνεται να είναι ίση με έναν κύκλο ακτίνας 5. Δηλαδή έξω από αυτόν τον κύκλο θεωρούμε ότι $V = 0$.

Λαμβάνοντας ως αρχικές συνθήκες τις :

x_0 μια μεγάλη αρνητική τιμή (έστω -5),

$y_0 = b$ η παράμερος κρούσης,

$p_{x_0} = \sqrt{2E}$, όπου E η αρχική ενέργεια του σωματιδίου,

$p_{y_0} = 0$, ώστε το σωματίδιο να κινείται αρχικά μόνο στον οριζόντιο άξονα,

το πρόβλημα περιορίζεται στον προσδιορισμό μόνο δυο αρχικών παραμέτρων, της αρχικής ενέργειας E του σωματιδίου και της παραμέτρου κρούσης b. Επίσης λόγω της συμμετρίας του δυναμικού γύρω από τον άξονα των x, είναι δυνατόν να θεωρηθούν μόνο θετικές τιμές της παραμέτρου κρούσης.

Οι παραπάνω εξισώσεις δε λύνονται αναλυτικά. Είναι όμως δυνατόν να λυθούν αριθμητικά με κάποια κατάλληλη μέθοδο ολοκλήρωσης. Ωστόσο, λόγω της διατήρησης της ενέργειας, η διάσταση του χώρου φάσεων μειώνεται από τέσσερα σε τρία, και έτσι με έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τα p_x και p_y με μια καινούρια μεταβλητή και να πάρουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση:

$$E = \frac{p^2}{2} + V(x,y) \Rightarrow p^2 = p_x^{\ 2} + p_y^{\ 2} = 2(E-V)$$

οι εξισώσεις Hamilton μετατρέπονται στις παρακάτω:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= p_x = \sqrt{2(E-V)}\cos\varphi \\ \dot{y} &= p_y = \sqrt{2(E-V)}\sin\varphi \\ \dot{\varphi} &= \frac{2ye^{-(x^2+y^2)}\left(xy\sin\varphi + (1-y^2)\cos\varphi\right)}{\sqrt{2(E-V)}} \end{aligned} \tag{2.6}$$

Το πλεονέκτημα του συστήματος αυτού σε σχέση με το προηγούμενο είναι προφανές αφού, πέρα από το γεγονός ότι υπολογιστικά κερδίζεται ο χρόνος υπολογισμού μιας επιπλέον μεταβλητής, η γωνία φ αντιπροσωπεύει την γωνία μεταξύ του διανύσματος ταχύτητας του σωματιδίου και του άξονα τον x. Έτσι, εφόσον μια τροχιά εγκαταλείψει την περιοχή σκέδασης και κινηθεί ευθύγραμμα, η γωνία φ μας δίνει απευθείας την γωνία σκέδασης ϕ.

2.3 Συναρτήσεις σκέδασης

Εξετάζονται εδώ δύο συναρτήσεις σκέδασης, την $\phi(b)$, που μας δίνει την εξάρτηση της γωνίας σκέδασης από την παράμετρο κρούσης, και την $\tau(b)$, που μας δίνει την εξάρτηση του χρόνου καθυστέρησης από την παράμετρο κρούσης. Ως χρόνο καθυστέρησης όπως ήδη αναφέραμε θεωρούμε τον χρόνο παραμονής μέσα στην περιοχή σκέδασης. Υπολογιστικά, από την στιγμή που χρησιμοποιούμε σταθερό βήμα ολοκλήρωσης, ο χρόνος καθυστέρησης μπορεί να θεωρηθεί ότι ισούται με το πλήθος των βημάτων ολοκλήρωσης για το οποίο η κάθε τροχιά παραμένει μέσα στην περιοχή σκέδασης (δηλαδή μέσα στον κύκλο $x^2 + y^2 < 5$).

Το πρόβλημα μελετήθηκε με δυο μεθόδους ολοκλήρωσης σταθερού βήματος, την κλασική μέθοδο Runge Kutta 4^{ης} τάξης και την Runge Kutta Fehlberg σταθερού βήματος που είναι 5^{ης} τάξης (βλ. Παράρτημα ΙΙ), και τα αποτελέσματα που ελήφθησαν ήταν πρακτικώς τα ίδια. Έτσι, για το συγκεκριμένο σύστημα εξισώσεων, η Runge Kutta 4^{ης} τάξης μπορεί να θεωρηθεί μια άκρως ικανοποιητική μέθοδος ολοκλήρωσης, διότι με σχετικά λίγες και απλές πράξεις προσφέρει την απαιτούμενη ακρίβεια.

Για να ληφθούν οι συναρτήσεις σκέδασης, πέρα από τον αλγόριθμο Runge Kutta (που παίρνει ως όρισμα τις τιμές των τριών μεταβλητών x, y , και φ σε κάποιο βήμα και επιστρέφει τις τιμές τους στο επόμενο), το μόνο που χρειάζεται είναι ένας εξωτερικός βρόγχος που να σαρώνει μια περιοχή τιμών της παραμέτρου κρούσης και ένας εσωτερικός που να σαρώνει την περιοχή ολοκλήρωσης. Δηλαδή, ουσιαστικά στον εσωτερικό βρόγχο υπολογίζονται τα διαδοχικά σημεία μιας συγκεκριμένης τροχιάς. Στο τέλος κάθε τροχιάς αποθηκεύονται οι τιμές των δυο συναρτήσεων σκέδασης. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι το διάστημα ολοκλήρωσης πρέπει να ληφθεί αρκετά μεγάλο ώστε, αν όχι όλες, σχεδόν όλες οι τροχιές να έχουν βγει από την περιοχή σκέδασης.

Πιο αναλυτικά, έχοντας γράψει μια ρουτίνα ολοκλήρωσης Runge Kutta $4^{ης}$ τάξης για σύστημα τριών πρώτης τάξης δ.ε όπως π.χ. είναι η παρακάτω ρουτίνα (καθόλου κομψή αλλά εύκολα σε γλώσσα C++ :

```
void rungekutta(double h, double t, double x, double y, double phi, double *x_new, double
*y_new, double *phi_new)
{
            double k11,k21,k31,k41,k12,k22,k32,k42,k13,k23,k33,k43;

            k11=h*Dx(t,x,y,phi);
            k12=h*Dy(t,x,y,phi);
            k13=h*Dphi(t,x,y,phi);

            k21=h*Dx(t+h/2,x+k11/2,y+k12/2,phi+k13/2);
            k22=h*Dy(t+h/2,x+k11/2,y+k12/2,phi+k13/2);
            k23=h*Dphi(t+h/2,x+k11/2,y+k12/2,phi+k13/2);

            k31=h*Dx(t+h/2,x+k21/2,y+k22/2,phi+k23/2);
            k32=h*Dy(t+h/2,x+k21/2,y+k22/2,phi+k23/2);
            k33=h*Dphi(t+h/2,x+k21/2,y+k22/2,phi+k23/2);

            k41=h*Dx(t+h,x+k31,y+k32,phi+k33);
            k42=h*Dy(t+h,x+k31,y+k32,phi+k33);
            k43=h*Dphi(t+h,x+k31,y+k32,phi+k33);

            *x_new =x+(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
            *y_new =y+(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
            *phi_new =phi+(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
}
```

το πρόγραμμα μας μπορεί να έχει την εξής μορφή:

```
<set Energy E=E0>
<set step h for RK integrator>
<set the 3 equations (2.6) that we want to integrate (i.e Dx, Dy, Dphi>

for (i=0; i<Number_of_b; i++)
{
     b=b0+i*b0step;                              (change b)

     t=0; x=-5; y=b; phi=0; time_delay =0;       (set initial conditions)

     for (j=0; j<Number_of RK_steps;  j++)
     {
          (call RK integrator that returns the solutions of (2.6) at the next step)
          RungeKutta(h,t,x,y,phi, & x_new,& y_new,& phi_new);

          (update the solutions)
           t=t+h; x=x_new; y=y_new; phi=phi_new;

          (control if the particle is still in the scattering region to update time delay)
           if((x*x+y*y)<25) { time_delay ++;}
     }

     <save phi>

     <save time_delay>
}
```

Ένα σημείο το οποίο ο προγραμματιστής θα πρέπει να προσέξει είναι ότι η γωνία σκέδασης ϕ παίρνει τιμές μεταξύ –π και π, οπότε θα πρέπει να γίνουν οι κατάλληλες αλλαγές. Στην γλώσσα C++, ένας τρόπος είναι ο εξής :

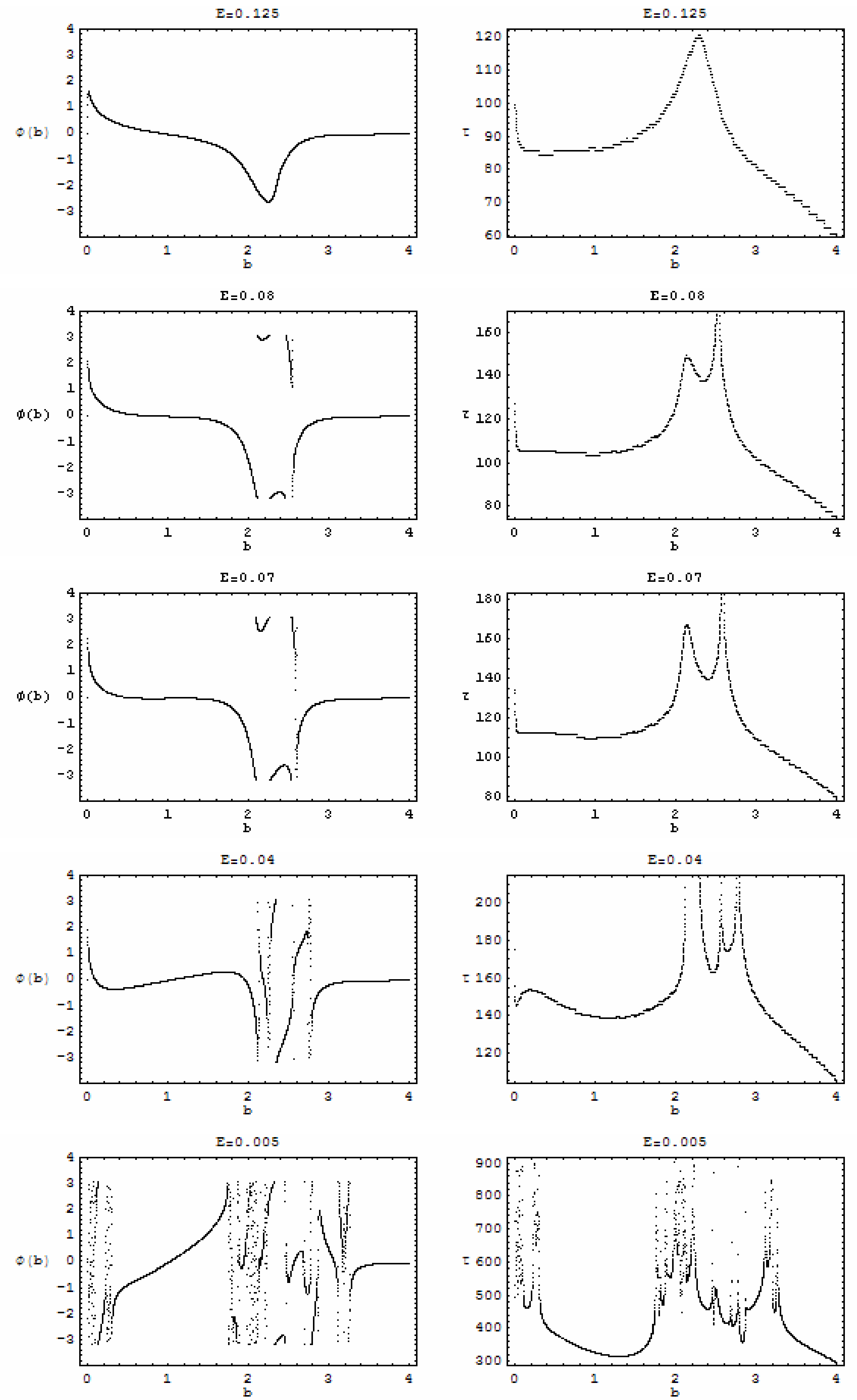
```
long double Pi;
int mm;

Pi=4*atan(1);

mm=int(fabs(phi/(2.*Pi)));

if (phi>0) {phi2=phi-mm*(2.*Pi); if (phi2>Pi) phi2=-(2.*Pi-phi2);}
if (phi<0) {phi2=phi+mm*(2.*Pi); if (phi2<(-Pi)) phi2=2.*Pi+phi2;}
phi=phi2;
```

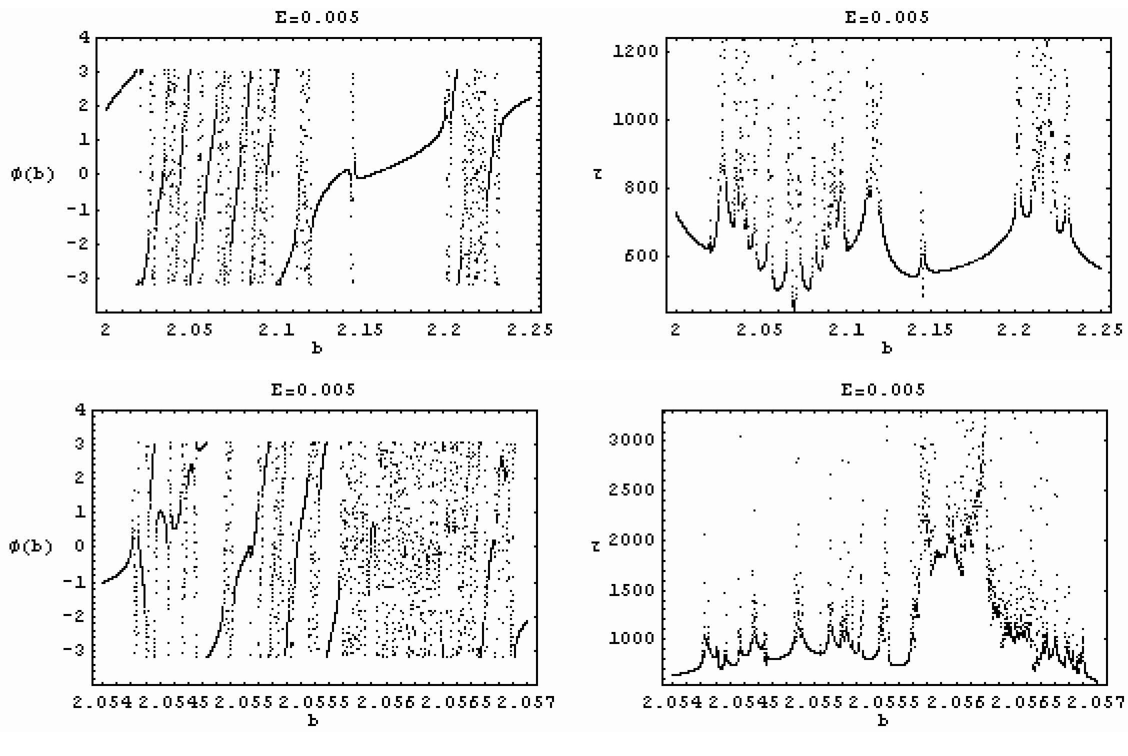
Στο σχ. [2.2] παρατίθενται τα διαγράμματα που ελήφθησαν από την απεικόνιση των αποτελεσμάτων για διαφορετικές ενέργειες. Από τον τρόπο με τον οποίο υπολογίστηκε ο χρόνος καθυστέρησης είναι αναμενόμενο να εμφανίζεται ως ελαφρώς κλιμακωτή συνάρτηση όταν το εύρος των τιμών του δεν είναι πολύ μεγάλο .



Σχ.[2.2]: Εξάρτηση της γωνίας σκέδασης και του χρόνου καθυστέρησης από το b για διάφορες ενέργειες

Από τα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι για ενέργειες μεγαλύτερες μιας συγκεκριμένης τιμής $E_{\max}$, η οποία βρίσκεται κάπου ανάμεσα στο 0.7 και στο 0.8, οι καμπύλες των δυο παραμέτρων είναι ομαλές πράγμα που σημαίνει ότι η σκέδαση γίνεται ομαλά. Αντιθέτως, όταν η ενέργεια του σωματιδίου είναι μικρότερη της $E_{\max}$, τότε εμφανίζονται ανωμαλίες στη συνάρτηση σκέδασης. Γενικώς, οι περιοχές στις οποίες η συνάρτηση σκέδασης δεν είναι ομαλή λέγονται περιοχές χαοτικής σκέδασης ακριβώς επειδή αντιστοιχούν στις τιμές εκείνες της παραμέτρου για τις οποίες το σύστημα συμπεριφέρεται χαοτικά. Στις περιοχές αυτές, ο χρόνος καθυστέρησης αυξάνεται κατακόρυφα, γεγονός που δηλώνει ότι σ' αυτές τις περιπτώσεις η τροχιά παραμένει μέσα στην περιοχή σκέδασης για πολύ μεγάλο χρονικό διάστημα. Επίσης, παρατηρούμε ότι με τη μείωση της ενέργειας, αυτές οι περιοχές χαοτικής σκέδασης εμφανίζονται όλο και για περισσότερες αρχικές συνθήκες διαιρώντας έτσι συνεχώς, τις περιοχές ομαλής σκέδασης σε μικρότερες.

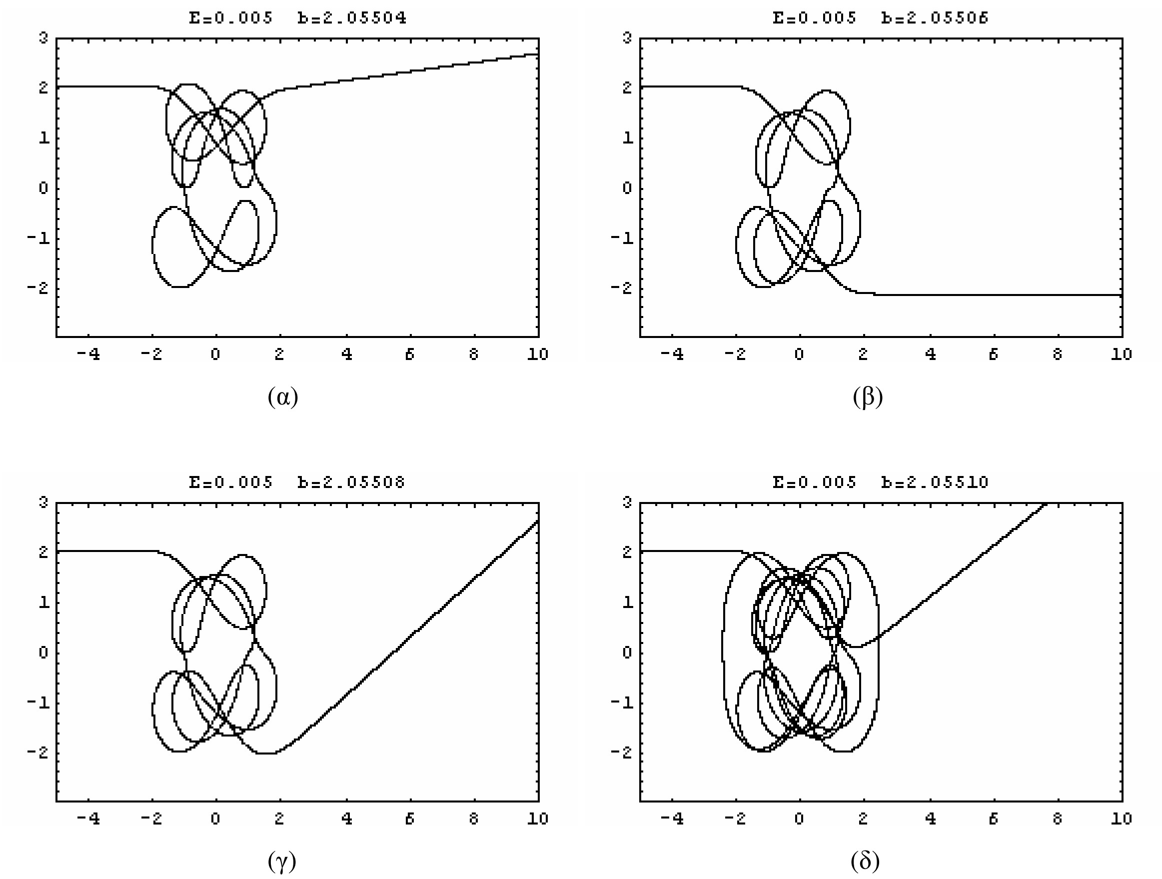
Ελαττώνοντας τώρα στο πρόγραμμα, το υπό μελέτη διάστημα αρχικών συνθηκών, επιτυγχάνεται μια μεγέθυνση των προηγούμενων διαγραμμάτων. Για ενέργεια του σωματιδίου $E = 0.005$, κάνοντας δυο αλλεπάλληλες μεγεθύνσεις, παίρνουμε τα διαγράμματα του σχ. [2.3] .



Σχ.[2.3]: Μεγεθύνσεις των διαγραμμάτων της γωνίας σκέδασης και του χρόνου καθυστέρησης συναρτήσει της παραμέτρου κρούσης για ενέργεια E=0,005

Παρατηρούμε ότι τα παραπάνω διαγράμματα μοιάζουν μεταξύ τους και γίνεται εμφανές ότι, οποία μεγέθυνση και να κάνουμε σε χαοτική περιοχή, θα προκύψει πάλι παρόμοιας μορφής διάγραμμα. Δηλαδή τα διαγράμματα παρουσιάζουν ένα είδος αυτοομοιότητας. Επιπλέον φαίνεται ότι στις μεγεθύνσεις ο χρόνος καθυστέρησης παρουσιάζει όλο και υψηλότερες κορυφές.

Παρακάτω, στο σχ. [2.4], παρουσιάζονται τέσσερις τροχιές που ελήφθησαν για $E = 0.005$ και για τιμές της παραμέτρου κρούσης που διαφέρουν ελάχιστα μεταξύ τους και που κυμαίνονται σε μια περιοχή τιμών όπου εμφανίζεται χάος σύμφωνα με τα προηγούμενα διαγράμματα. Όπως είναι αναμενόμενο, οι τροχιές γενικώς διαφέρουν μεταξύ τους. Ειδικά η τροχιά (δ) μένει για πολύ μεγαλύτερο διάστημα στην περιοχή σκέδασης από τη (γ). Αλλά ακόμα και για τροχιές που φαίνονται να μοιάζουν αρκετά μεταξύ τους, όπως η τροχιά (β) με την τροχιά (γ), είναι αξιοσημείωτο ότι η μεταβολή στην γωνία σκέδασης είναι πολύ σημαντική.



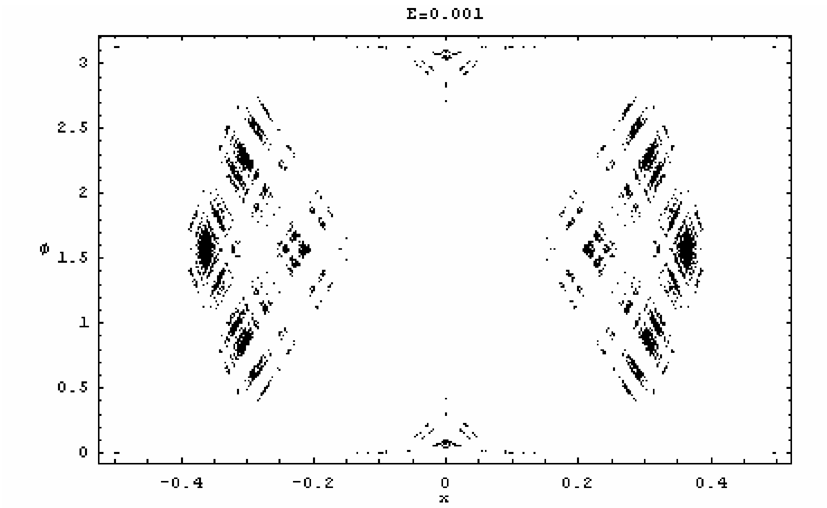
Σχ.[2.4]:Μερικές τροχιές με πολύ κοντινές αρχικές συνθήκες

Το γεγονός ότι στις μεγεθύνσεις του σχ. [2.3], ο χρόνος καθυστέρησης παρουσιάζει όλο και υψηλότερες κορυφές μας προϊδεάζει για την ύπαρξη χρόνων καθυστέρησης που είναι άπειροι, πράγμα που υποδηλώνει την ύπαρξη ενός αναλλοίωτου συνόλου τροχιών μέτρου Lebesgue μηδέν που δεν εγκαταλείπουν ποτέ την περιοχή σκέδασης. Όπως είδαμε και στην εισαγωγή, το σύνολο αυτό προκύπτει από την τομή της ευσταθούς και της ασταθούς πολλαπλότητας του συστήματος. Εάν και είναι πρακτικά αδύνατον να πάρουμε αυτό το σύνολο (ακριβώς επειδή οι τροχιές αυτές έχουν μέτρο Lebesgue μηδέν), είναι δυνατόν να το προσεγγίσουμε υπολογιστικά εξετάζοντας ποιες τροχιές, που ξεκινούν από την περιοχή σκέδασης, εξαντλούν το προκαθορισμένο μέγιστο πλήθος βημάτων ολοκλήρωσης μέσα σε αυτήν, χωρίς να ξεφύγουν, τόσο για θετικά χρονικά βήματα (ευσταθής πολλαπλότητα) όσο και για αρνητικά (ασταθής πολλαπλότητα).

```
FILE *file1=fopen("X0Phi0.txt","wr");
FILE *file2=fopen("TimeDelay.txt","wr");

n=2500; x0i=-0.5; nx0=700; x0step=1/nx0; phi0i=0; nphi0=700; phi0step=Pi/nphi0; y0=0.; E=0.001;
for (k=0;k<nx0;k++);
{
        x0=x0i+k*x0step;
        for (j=0;j<nphi0;j++)
        {
            x1=x0;y1=y0;x2=x0;y2=y0;time_delay=0;t=0;
            phi0=phi0i+j*phi0step;
            phi1=phi0;phi2=phi0;i=0;
            while (++i<n)
            {
                RungeKutta (h,t,x1,y1,phi1,&X1,&Y1,&PHI1);
                x1=X; y1=Y; phi1=PHI;
                RungeKutta (-h,t,x2,y2,phi2,&X2,&Y2,&PHI2);
                x2=X; y2=Y; phi2=PHI;
                if((x1*x1+y1*y1)<25 && (x2*x2+y2*y2)<25) {time_delay++;}
                if((x1*x1+y1*y1)>25 || (x2*x2+y2*y2)>25) {break;}
                if(time_delay>(Number_of RK_steps -2))
                {fprintf(file1,"%f  %f \n",x0,phi0);}
            }
            fprintf(file2,"%f  ", time_delay);
       }
      fprintf(file2,"\n");
}
```

Στο διάγραμμα [2.5α] που ελήφθη μ' αυτόν τον τρόπο, φαίνεται ξεκάθαρα ότι το αναλλοίωτο σύνολο του συστήματος στην επιφάνεια τομής $y=0$ για E=0.001 παρουσιάζει μορφοκλασματική δομή και θυμίζει αρκετά το αναλλοίωτο σύνολο του πέταλου του Smale (βλ. Παράρτημα I).



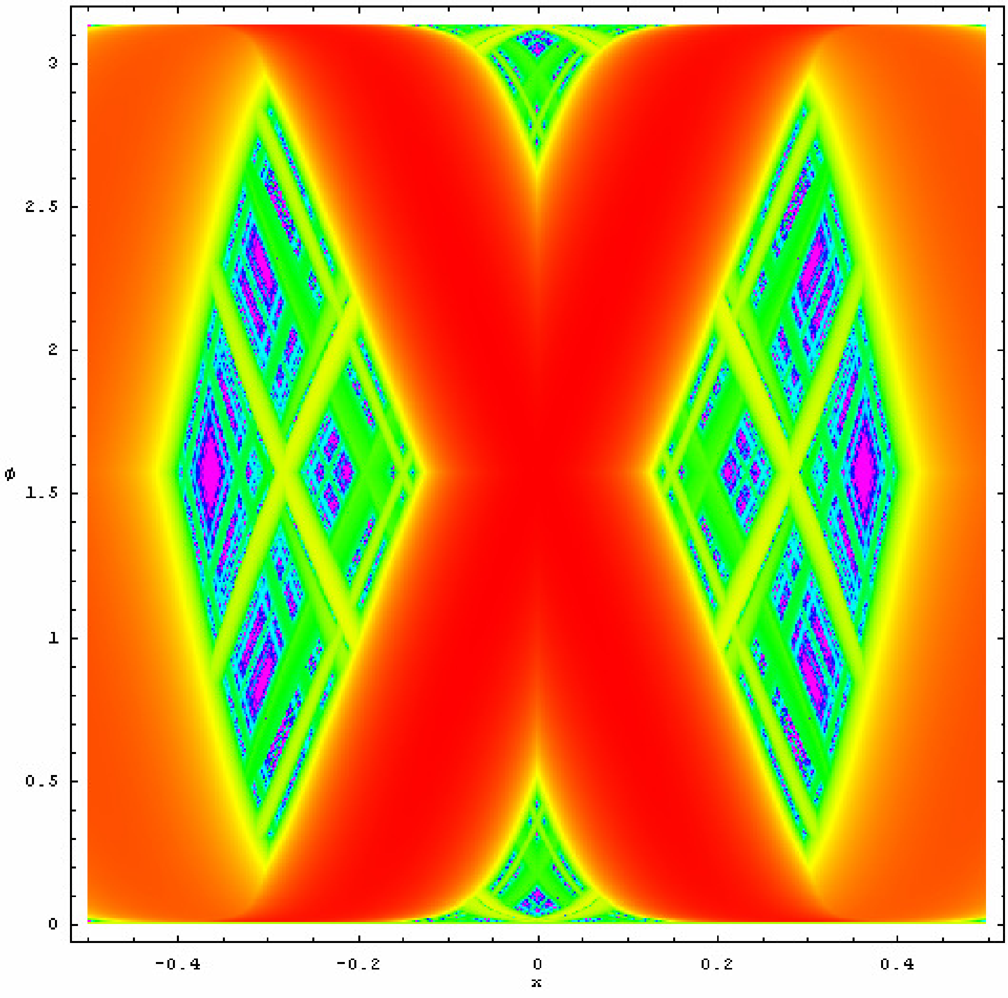
Σχ.[2.5α]: Το αναλλοίωτο σύνολο του συστήματος στην επιφάνεια y=0

Ένας άλλος τρόπος να απεικονίσουμε το αναλλοίωτο σύνολο είναι να αποθηκεύσουμε για κάθε αρχική συνθήκη τον χρόνο για τον οποίο το σωματίδιο δεν ξεφεύγει από την περιοχή σκέδασης είτε με θετικό βήμα ολοκλήρωσης είτε με αρνητικό (δηλαδή, εάν t_+ είναι ο χρόνος καθυστέρησης για θετικό βήμα και t_- ο χρόνος καθυστέρησης για αρνητικό, αυτό που αποθηκεύουμε είναι το $Minimum[t_+, t_-]$) και να το απεικονίσουμε, χρωματίζοντας το, ανάλογα με την ένταση του. Για τον σκοπό αυτό, τα αποτελέσματα αποθηκεύτηκαν στο αρχείο TimeDelay.txt σε μορφή πίνακα, και χρησιμοποιήθηκε η Mathematica που, εκτός των άλλων, αποτελεί και ισχυρό εργαλείο για απεικόνιση γραφικών (εδώ χρησιμοποιήθηκε η εντολή DensityPlot).

-Παράδειγμα χρήσης της Mathematica για απεικόνιση των αποτελεσμάτων:

```
data1=Import["C:\Diplomatiki\Double well\Time\TimeDelay.txt","Table"];
f[x_,y_]: = (i=Floor[(x+0.5)*700]+1;j =Floor[y*700/Pi]+1;Return[data1[[i,j]]];)
DensityPlot[f[x,y],{x,-0.5,0.5-1/700},{y,0,Pi-Pi/700},PlotPoints→700,Mesh→False,
FrameLabel→{x,φ},RotateLabel→False,ColorFunction→(Hue[#/1.2]&)];
```

Το αποτέλεσμα φαίνεται στο σχ. [2.5β] και παρουσιάζει πολύ ενδιαφέρον γιατί φαίνεται καλύτερα πως το ίδιο μοτίβο επαναλαμβάνεται όλο και σε μικρότερη κλίμακα.



Σχ.[2.5β]: Χρωματιστή απεικόνιση του αναλλοίωτου συνόλου του συστήματος

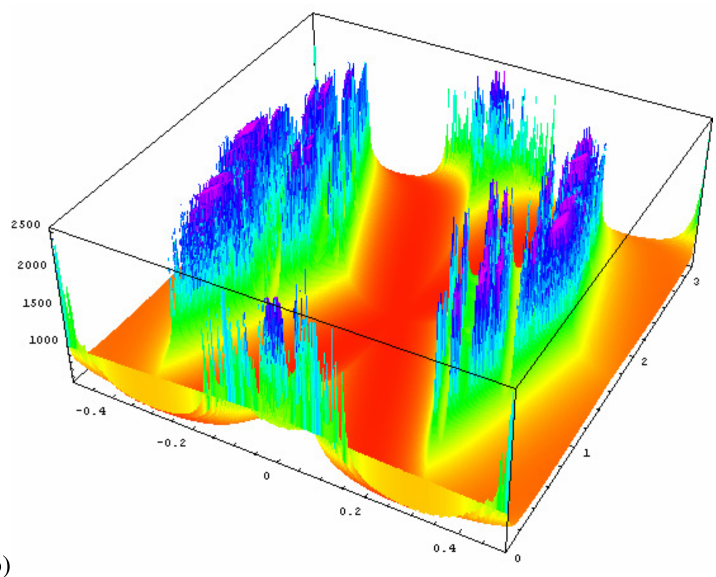
Επίσης πολύ παραστατικές και όμορφες εικόνες του αναλλοίωτου συνόλου μπορούν να ληφθούν με τρισδιάστατες απεικονίσεις όπως είναι τα διαγράμματα του σχ. [2.5γ]. Εδώ χρησιμοποιήθηκε μια άλλη εντολή της Mathematica, η Plot3D.

Αλλάζοντας τα ορίσματα της συνάρτησης αυτής επιτυγχάνονται διαφορετικές απεικόνισης ενός ίδιου φαινομένου. Τα διαγράμματα του σχ. [2.5γ] πάρθηκαν με τις τρεις παρακάτω εντολές:

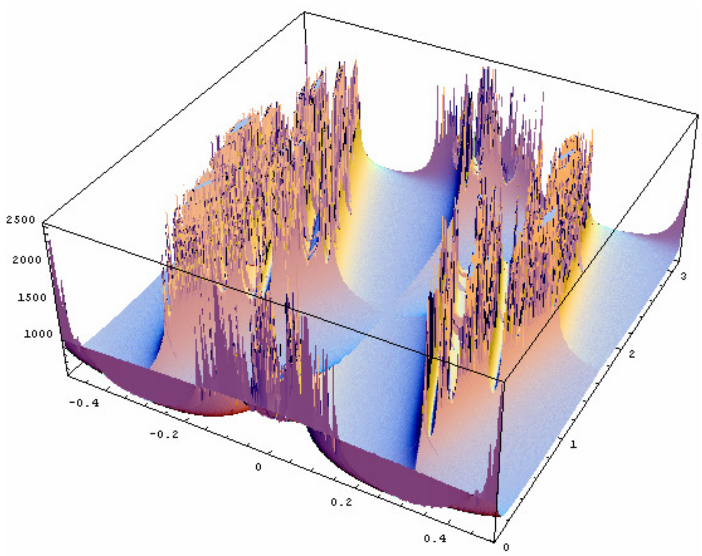
```
Plot3D[f[x,y],{x,-0.5,0.5-1/700},{y,0,Pi-Pi/700},PlotPoints→700,Mesh→False,ColorFunction→(Hue[#/1.2]&)]
Plot3D[f[x,y],{x,-0.5,0.5-01/700},{y,0,Pi-Pi/700},PlotPoints→700,Mesh→False]
Plot3D[f[x,y],{x,-0.5,0.5-01/700},{y,0,Pi-Pi/700},PlotPoints→700,Mesh→False,PlotRange→{0,1500}]
```

Π.χ. αλλάζοντας το πεδίο απεικονίσεως (PlotRange→{0,1500}) επιτεύχθηκε στο τρίτο διάγραμμα μια τομή του δεύτερου διαγράμματος.

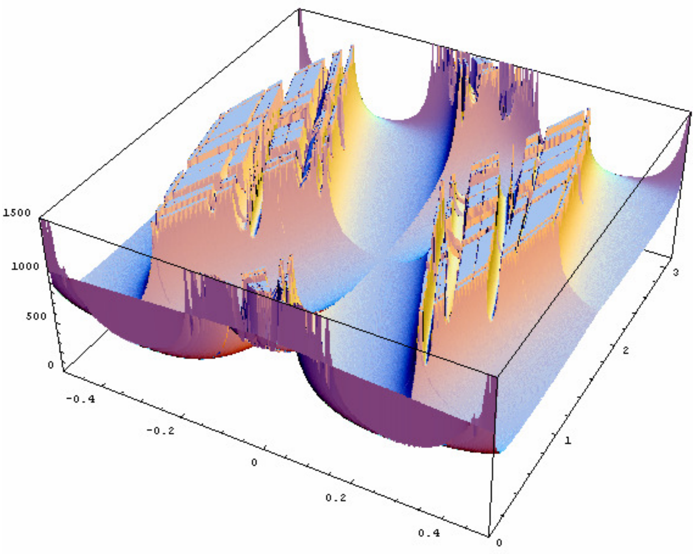
(a)



(b)

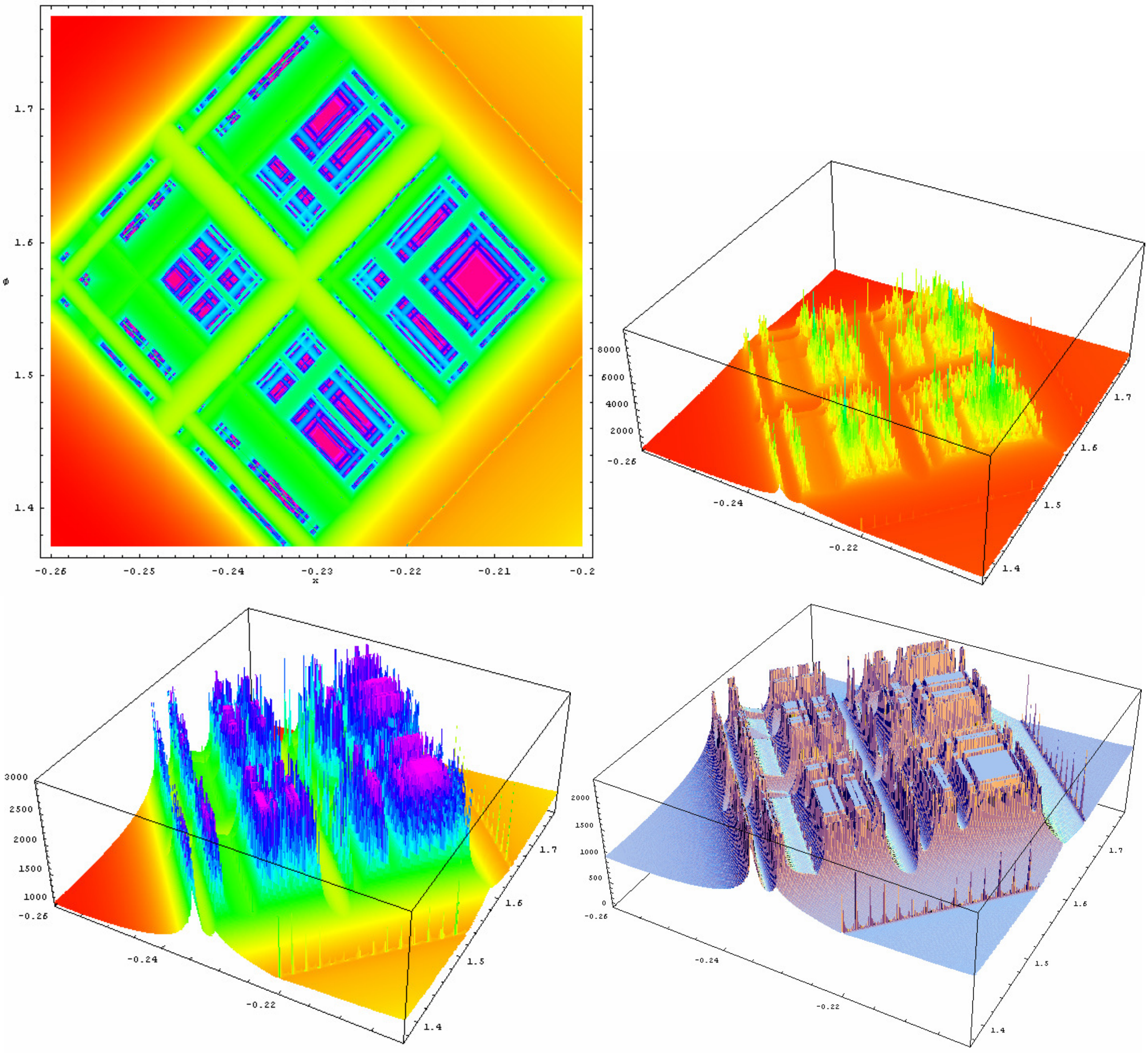


(c)



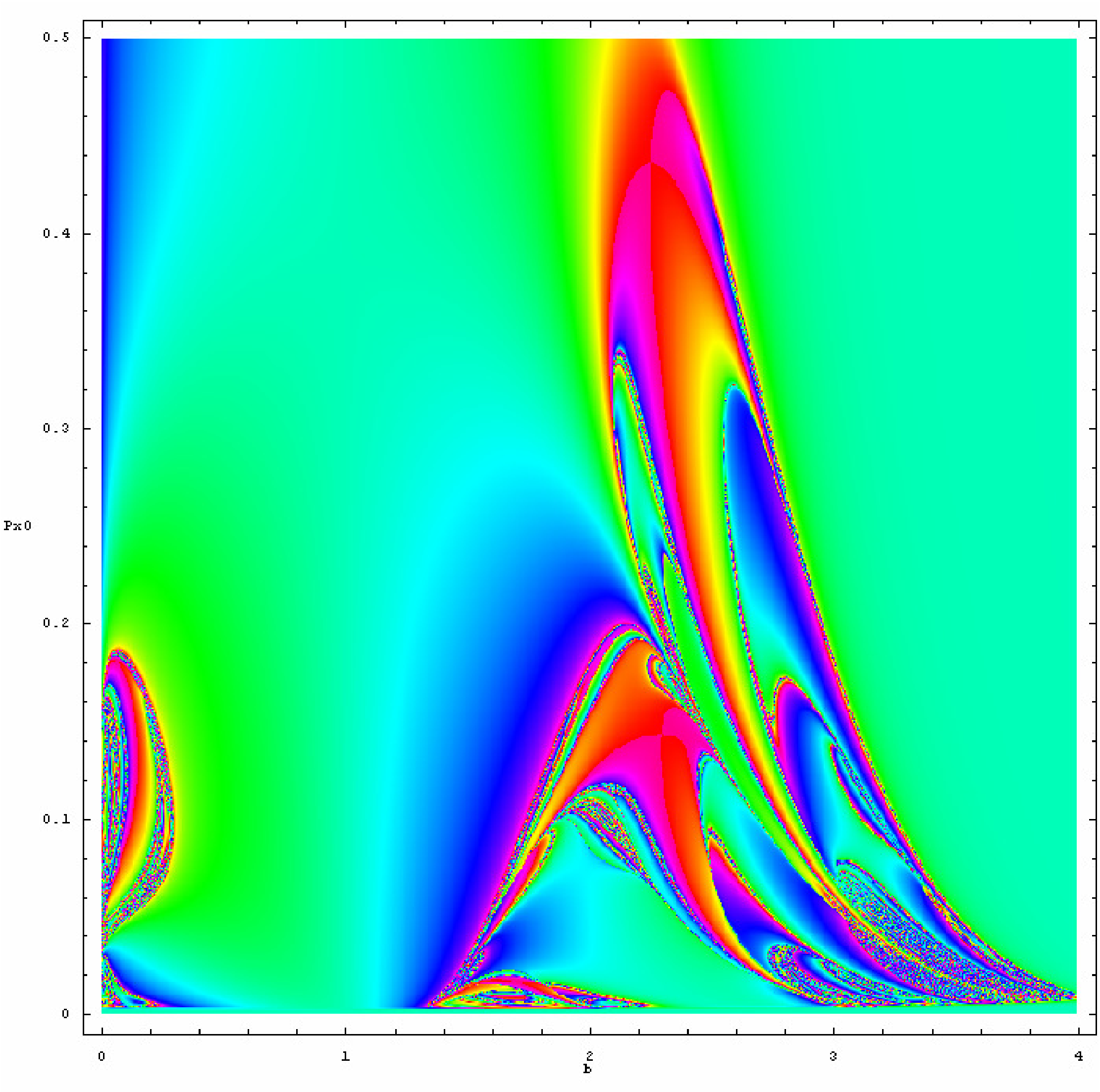
Σχ.[2.5γ]: Τρισδιάστατες απεικονίσεις: Στην κορυφή διαγράφεται μια εικόνα του αναλλοίωτου συνόλου

Στο σχ. [2.5δ] φαίνεται μια μικρότερη περιοχή του αναλλοίωτου συνόλου. Δηλαδή, ουσιαστικά πρόκειται για μια μεγέθυνση των παραπάνω απεικονίσεων. Τα διαγράμματα αυτά πάρθηκαν με εντολές ανάλογες με τις προηγούμενες.

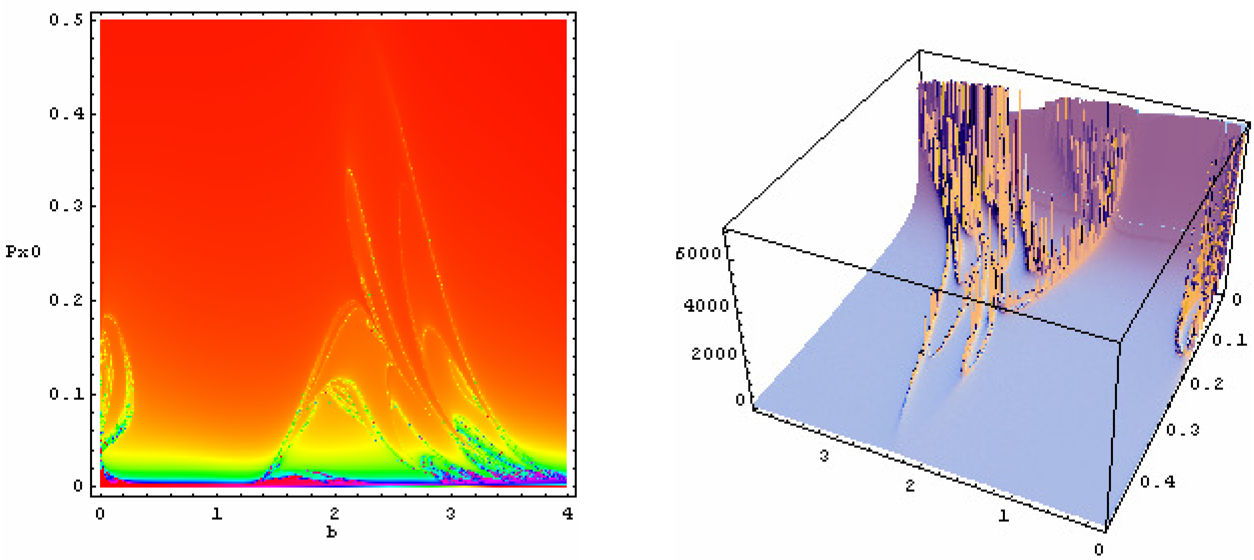


Σχ.[2.5δ]: Μέρος του αναλλοίωτου συνόλου μετά από μεγέθυνση

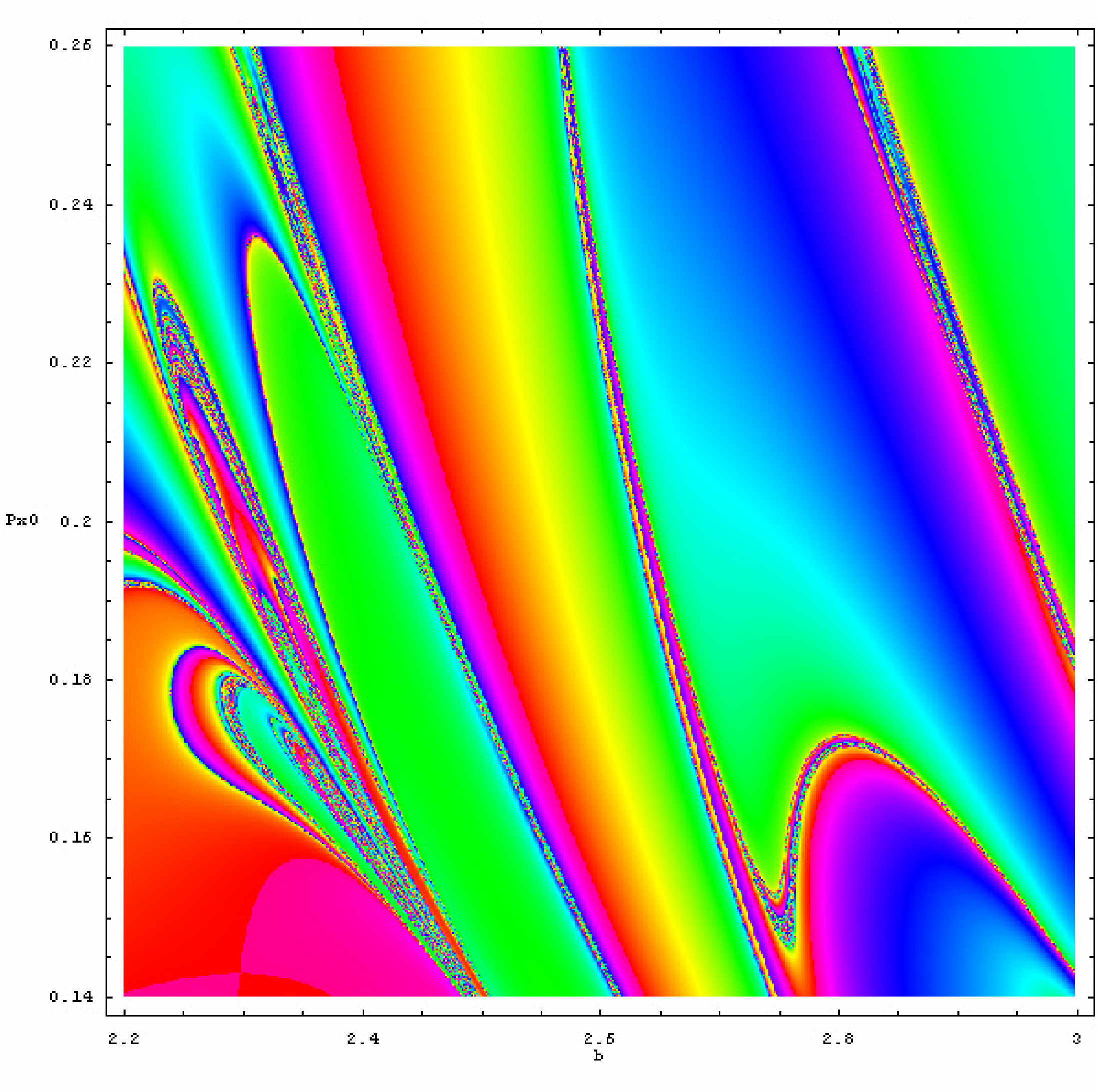
Πέρα από την εξάρτηση της γωνίας σκέδασης από την παράμετρο κρούσης, παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει όταν μεταβάλλεται επίσης και η αρχική ταχύτητα του σωματιδίου (ένας επιπλέον βρόγχος στο πρόγραμμα). Σ' αυτήν την περίπτωση θέλουμε να μελετήσουμε την εξάρτηση της μεταβλητής εξόδου (γωνία σκέδασης) από δυο μεταβλητές εισόδου (παράμετρος κρούσης, αρχική ταχύτητα). Τα διαγράμματα που ελήφθησαν από την γραφική επεξεργασία των αριθμητικών αποτελεσμάτων φαίνονται παρακάτω (σχ.[2.6] και σχ.[2.7]).



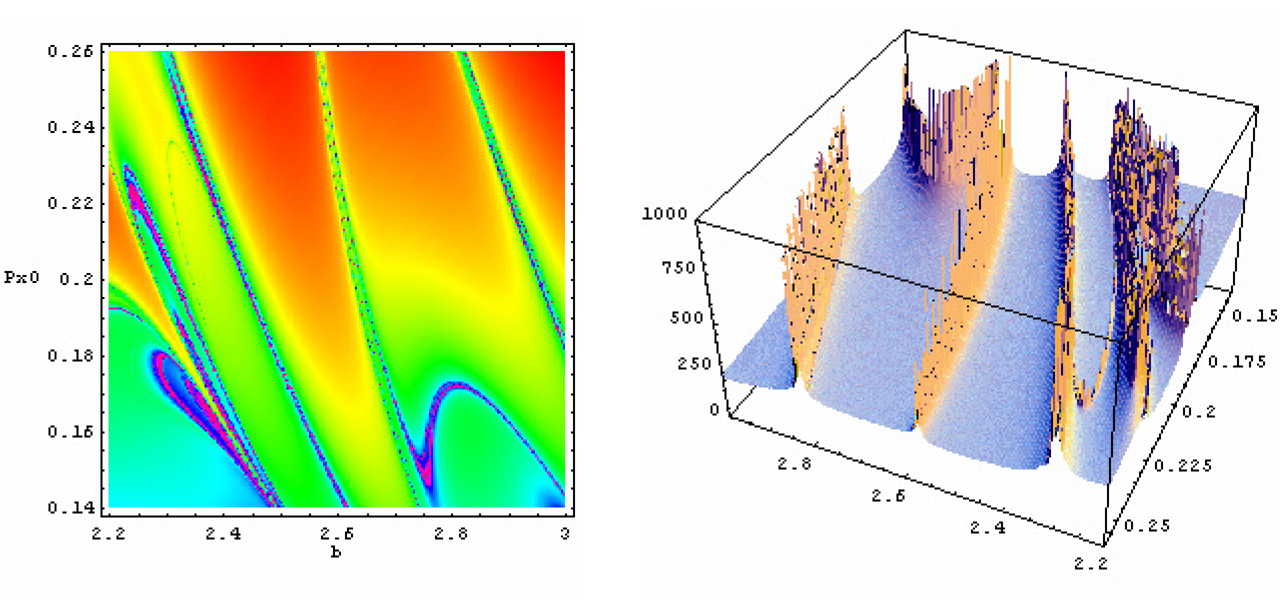
Σχ.[2.6α]:Η εξάρτηση της γωνίας σκέδασης από τις αρχικές συνθήκες



Σχ.[2.6β]:Η εξάρτηση του χρόνου καθυστέρησης από της αρχικές συνθήκες σε δισδιάστατη και τρισδιάστατη απεικόνιση



Σχ.[2.7α]: Η εξάρτηση της γωνίας σκέδασης από τις αρχικές συνθήκες για μικρή περιοχή του διαγράμματος [2.6α].



Σχ.[2.7β]: Η εξάρτηση του χρόνου καθυστέρησης από τις αρχικές συνθήκες για μικρή περιοχή του διαγράμματος [2.7β].

Από την εξέταση των παραπάνω διαγραμμάτων, εκτός από την αντιστοιχία στη μορφολογία των σχημάτων για την γωνία σκέδασης και τον χρόνο καθυστέρησης, διαφαίνεται ότι υπάρχουν δύο τύποι περιοχών αρχικών συνθηκών:

- Περιοχές το χρώμα των οποίων είναι συνεχές. Εντός αυτών των περιοχών οι σκέδαση γίνεται με ομαλό τρόπο και δεν παρουσιάζεται ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες. Αυτές οι περιοχές αντιστοιχούν σε ελάχιστα του χρόνου καθυστέρησης και γι' αυτό το λόγο μπορούμε να τις αποκαλέσουμε ή να τις θεωρήσουμε ως «κοιλάδες».

- Περιοχές με έντονη διακύμανση χρωμάτων. Αυτές οι περιοχές αντιστοιχούν σε αρχικές συνθήκες που παράγουν το φαινόμενο της χαοτικής σκέδασης. Μάλιστα παρατηρούμε ότι αυτές οι περιοχές περικλείουν τις ομαλές περιοχές με τρόπο που είναι αδύνατον να περάσει κανείς από μια «κοιλάδα» σε μια άλλη χωρίς να συναντήσει χαοτική περιοχή.

Επίσης ο μορφοκλασματικός χαρακτήρας του όλου προβλήματος γίνεται φανερός με τη μεγέθυνση του αρχικού διαγράμματος. Όσο μεγάλη μεγέθυνση και να πάρουμε οι καινούργιες «μικροκοιλάδες» που θα εμφανίζονται, πάντα θα περικλείονται από χαοτικές περιοχές.

Αποδεικνύεται ότι για θετικές τιμές της ενέργειας κατώτερες μιας τιμής κατωφλίου υπάρχουν περιοδικές τροχιές, ασταθείς και ευσταθείς που επιτρέπουν την παγίδευση του σωματιδίου για μεγάλους έως και άπειρους χρόνους καθυστέρησης μέσα στην περιοχή σκέδασης.

Όπως είδαμε παραπάνω, το σύστημα δεν είναι χαοτικό για όλες τις τιμές της ενέργειας. Έχει παρατηρηθεί ότι για το συγκεκριμένο σύστημα, στην ενέργεια $E = 0.0736$ περίπου, εμφανίζεται ένα σημείο διακλάδωσης σάγματος-κόμβου από το οποίο προκύπτουν δυο περιοδικές τροχιές, μια ευσταθής και μια ασταθής. Καθώς μειώνεται η ενέργεια οι ευσταθείς τροχιές σπάνε σε περισσότερες ασταθείς και σταδιακά το σύστημα γίνεται χαοτικό. Πρέπει να τονίσουμε ότι για τιμές της ενέργειας μεγαλύτερες της συγκεκριμένης δεν εμφανίζονται περιοδικές τροχιές. Αποδεικνύεται ότι η αρχική ασταθής τροχιά είναι εκείνη που διαδραματίζει τον καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση του χώρου των αρχικών συνθηκών οριοθετώντας τα σύνορα των μορφοκλασματικών περιοχών.

2.4 Συμπεράσματα

Στην ενότητα αυτή είδαμε, ότι για ενέργειες μικρότερες της E_m, στο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης σωματιδίου με το δυναμικό (2.1), εμφανίζεται το φαινόμενο της χαοτικής σκέδασης. Δηλαδή, το σύστημα αυτό παρουσιάζει ευαίσθητη εξάρτηση από τις τιμές της μεταβλητής εισόδου, την παραμέτρου κρούσης. Μικρές αλλαγές στην τιμή της προκαλούν δραματικές αλλαγές στην μεταβλητή εξόδου, την γωνία σκέδασης. Σχεδιάζοντας τον χώρο των αρχικών συνθηκών είδαμε ότι εμφανίζεται ένα μορφοκλασματικό σύνολο μεταξύ των διαφορετικών περιοχών, από το οποίο είναι αδύνατο να απαλλαγούμε. Το μορφοκλασματικό αυτό σύνολο οφείλεται στην ύπαρξη τροχιών οι οποίες δεν φεύγουν ποτέ από την περιοχή σκέδασης.

Κεφάλαιο III

Χαοτική Σκέδαση και Φαινόμενο Wada

3.1 Εισαγωγή

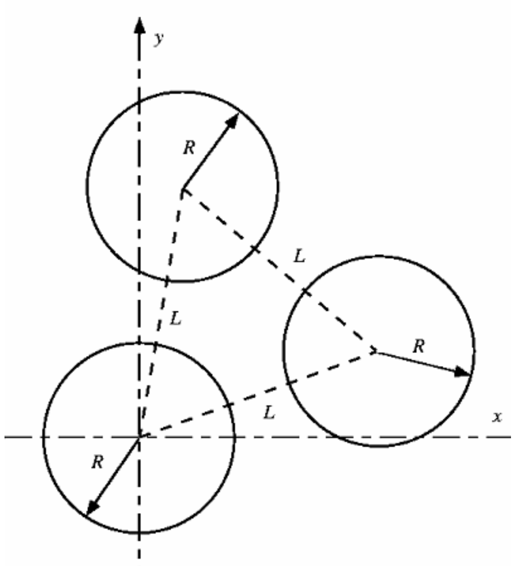
Σ' αυτήν την ενότητα, θα δείξουμε ότι ένα απλό Χαμιλτονιανό σύστημα, που αποτελεί τυπικό παράδειγμα συστήματος σκέδασης με τρεις πιθανές εξόδους διαφυγής, εκτός από την ύπαρξη ενός μορφοκλασματικού συνόλου στις αρχικές συνθήκες, παρουσιάζει επίσης την *ιδιότητα Wada*. Σύμφωνα με αυτή, κάθε αρχική συνθήκη που βρίσκεται στα όρια μιας περιοχής του χώρου των αρχικών συνθηκών η οποία αντιστοιχεί σ' έναν τρόπο διαφυγής (στο παράδειγμα μας, διαφυγή από μια συγκεκριμένη έξοδο), βρίσκεται ταυτόχρονα και στα όρια όλων των άλλων περιοχών που αντιστοιχούν στους άλλους τρόπους διαφυγής. Αυτή η ιδιότητα είναι χαρακτηριστική των χαοτικών συστημάτων σκέδασης με πολλές εξόδους διαφυγής.

3.2 Ορολογία

Γενικώς, αναφερόμαστε στο σύνολο των αρχικών συνθηκών που οδηγούν το σωματίδιο σε διαφυγή από το σύστημα από μια συγκεκριμένη έξοδο ως *exit basin* (περιοχή διαφυγής), και λέμε ότι ένα σημείο P μιας περιοχής διαφυγής B είναι συνοριακό σημείο (*boundary point*) αυτής εάν κάθε ανοικτή γειτονιά του ανήκει όχι μόνο στην B, αλλά και σε τουλάχιστον άλλη μία περιοχή διαφυγής. Σύνορο (*boundary*) μιας περιοχής διαφυγής αποκαλούμε το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων της. Σημείο Wada αποκαλείται ένα συνοριακό σημείο αν κάθε ανοιχτή γειτονιά εμπεριέχει περισσότερες από δύο περιοχές διαφυγής. Αν όλα τα σημεία μιας περιοχής διαφυγής είναι σημεία Wada τότε η περιοχή αυτή ονομάζεται περιοχή Wada (*Wada basin*) και το σύνορο της σύνορο Wada (*Wada boundary*).

3.3 Περιγραφή του μοντέλου των τριών δίσκων

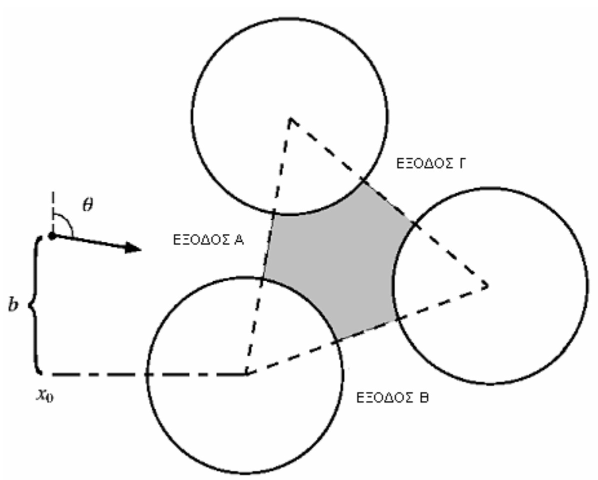
Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε για να δείξουμε την ιδιότητα Wada αποτελεί ένα απλό δισδιάστατο μπιλιάρδο το οποίο έχει μελετηθεί εκτενώς και που χρησιμοποιείται ως τυπικό παράδειγμα όταν μιλάμε για χαοτική σκέδαση. Το σύστημα αποτελείται από τρεις δίσκους ίσης ακτίνας R τα κέντρα των οποίων σχηματίζουν ένα ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρές $L > 2R$ (βλ. σχ. [3.1α]).



Σχ.[3.1α]: Σχετική τοποθέτηση των τριών δίσκων

Για ευκολία στους υπολογισμούς, ως αρχή των αξόνων θεωρήσαμε το κέντρο του αριστερού δίσκου. Θεωρούμε ένα σωματίδιο, κινούμενο ευθύγραμμα, που εισέρχεται στην περιοχή ανάμεσα στους τρεις δίσκους και που πραγματοποιεί ελαστικές κρούσεις με αυτούς. Κατά συνέπεια, η γωνία ανάκλασης ισούται με την γωνία πρόσπτωσης.

Ως περιοχή σκέδασης ορίζουμε την περιοχή ανάμεσα στους τρεις δίσκους (σκιασμένος χώρος στο από σχ. [3.1β]). Το σωματίδιο ξεκινάει από συγκεκριμένη αρνητική τιμή $x = x_0$ και για την μελέτη του προβλήματος μεταβάλλονται η παράμετρος κρούσης b και η γωνία θ.



Σχ.[3.1β]: Η αρχική θέση του σωματιδίου ως προς το σύστημα των τριών δίσκων. Η σκιασμένη περιοχή είναι η περιοχή σκέδασης.

Οι μεταβλητές εισόδου αυτού του προβλήματος σκέδασης είναι η παράμετρος κρούσης b και η γωνία θ με την οποία το σωματίδιο εισέρχεται στην περιοχή σκέδασης ενώ η μεταβλητή εξόδου είναι η έξοδος από την οποία το σωματίδιο εξέρχεται από το σύστημα. Στην περίπτωση που η σχέση μεταξύ αυτών των παραμέτρων παρουσιάζει ανωμαλίες εμφανίζεται το φαινόμενο της χαοτικής σκέδασης, δηλαδή απειροελάχιστες διάφορες στις αρχικές συνθήκες οδηγούν σε τελείως διαφορετική συμπεριφορά του συστήματος. Το γεγονός ότι η χαοτική συμπεριφορά του συστήματος προϋποθέτει την ύπαρξη ενός συνόλου τροχιών, μέτρου Lebesgue μηδέν, που δεν ξεφεύγουν ποτέ από την περιοχή σκέδασης, ενώ εμείς ενδιαφερόμαστε ουσιαστικά για τροχιές που εγκαταλείπουν την περιοχή σκέδασης, δεν αποτελεί πρόβλημα για την μελέτη μας γιατί η πιθανότητα να διαλέξουμε τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες είναι μηδενική.

3.4 Δομή των συνόρων στο μοντέλο των τριών δίσκων

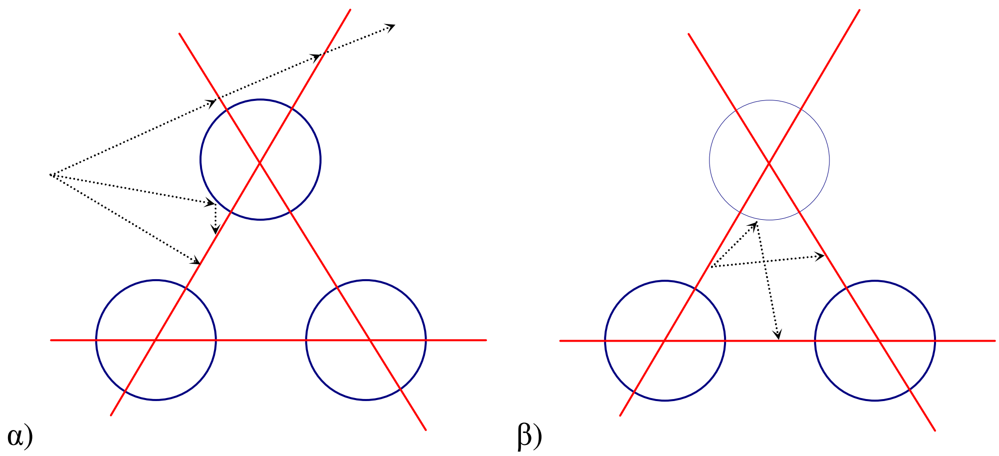
Θέλουμε να μάθουμε από πια έξοδο θα διαφύγει το σωματίδιο συναρτήσει των τιμών της παραμέτρου κρούσης και της γωνίας θ. Το πρόβλημα που μελετάμε, όπως και οποιοδήποτε άλλο μπιλιάρδο, μπορεί να λυθεί υπολογιστικά με την μέθοδο Ray Tracing (βλ. Παράρτημα ΙΙΙ).

Η ροή του προγράμματος υλοποίησης Wada1.cpp (βλ. Παράρτημα ΙΙΙ) έχει ως εξής:

Όπως εξηγείται στο παράρτημα ΙΙΙ, για να μοντελοποιήσουμε την ευθύγραμμη κίνηση του σωματιδίου χρησιμοποιούμε την διανυσματική συνάρτηση του χρόνου $\mathbf{r}(t)=\mathbf{s}+\mathbf{c}t$ (όπου $t \geq 0$, το $\mathbf{s}$ είναι το σημείο αφετηρίας και $\mathbf{c}$ ένα διάνυσμα κατεύθυνσης), την οποία ονομάζουμε ακτίνα.

Αρχικά το σωματίδιο βρίσκεται έξω από την περιοχή σκέδασης. Σε μια πρώτη φάση μας απασχολεί λοιπόν το εάν θα μπει η όχι στην περιοχή σκέδασης. Για τον σκοπό αυτό, με την βοήθεια των υπορουτίνων ray_line_intersection και ray_circle_intersection υπολογίζονται, εάν υπάρχουν, οι τομές της αρχικής ακτίνας με το κάθε αντικείμενο (τρεις κύκλοι και τρεις ευθείες όπως φαίνεται στο σχ. [3.2]). Εάν δεν υπάρχει κανένα σημείο τομής, τότε θεωρείται ότι η ακτίνα δεν εισχωρεί στην περιοχή σκέδασης. Στην περίπτωση όμως που υπάρχουν ένα ή περισσότερα σημεία τομής, θεωρείται ως σωστό το πιο κοντινό σημείο τομής. Εάν αυτό ανήκει σε κύκλο τότε γίνεται ανάκλαση και πλέον εξετάζεται που θα καταλήξει η ανακλώμενη ακτίνα (το πώς υπολογίζεται η ανακλώμενη ακτίνα εξηγείται στο Παράρτημα ΙΙΙ). Εάν ανήκει σε ευθεία, και βρίσκεται ανάμεσα σε δυο κύκλους τότε θεωρείται ότι εισήλθε στην περιοχή σκέδασης, αλλιώς εξετάζουμε που θα καταλήξει η ακτίνα με ίδια κατεύθυνση και με σημείο αφετηρίας το σημείο τομής της προηγούμενης. Τα παραπάνω συνεχίζονται ώσπου να καταλήξουμε στο εάν μπαίνει η όχι το σωματίδιο μέσα στην περιοχή σκέδασης.

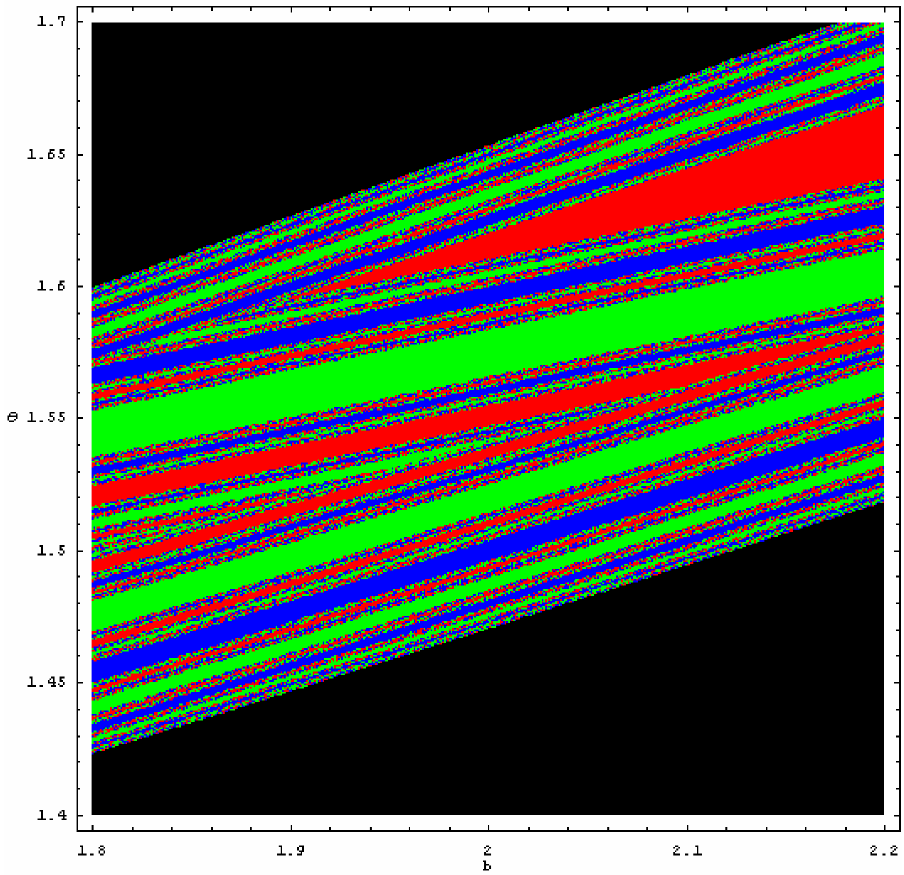
Σε μια δεύτερη φάση, στην περίπτωση που το σωματίδιο μπαίνει στην περιοχή σκέδασης, ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε από ποια έξοδο θα βγει. Αυτό γίνεται απλά εξετάζοντας τι είδους αντικείμενο θα συναντήσει η ακτίνα που έχει ως σημείο αφετηρίας το σημείο τομής της προσπίπτουσας ακτίνας που βρέθηκε από την πρώτη φάση και κατεύθυνση ίδια με αυτήν της προσπίπτουσας ακτίνας. Εάν το αντικείμενο είναι ευθεία τότε σημαίνει ότι το σωματίδιο βγαίνει από την περιοχή σκέδασης, και αποθηκεύεται η έξοδος που αντιστοιχεί στις συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες. Εάν είναι κύκλος τότε γίνεται ανάκλαση και εξετάζεται πιο αντικείμενο θα συναντήσει η ανακλώμενη ακτίνα κ.ο.κ. ώσπου τελικά να συναντήσει ευθεία.



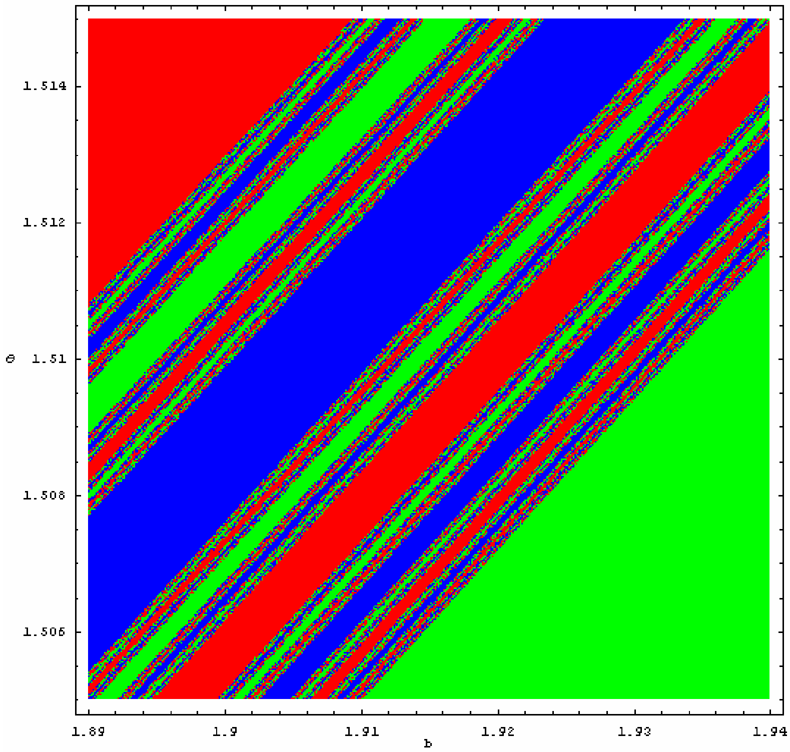
Σχ.[3.2]: α) Πιθανές πορείες του σωματιδίου πριν μπει στην περιοχή σκέδασης
β) Πιθανές πορείες του σωματιδίου αφού μπει στην περιοχή σκέδασης

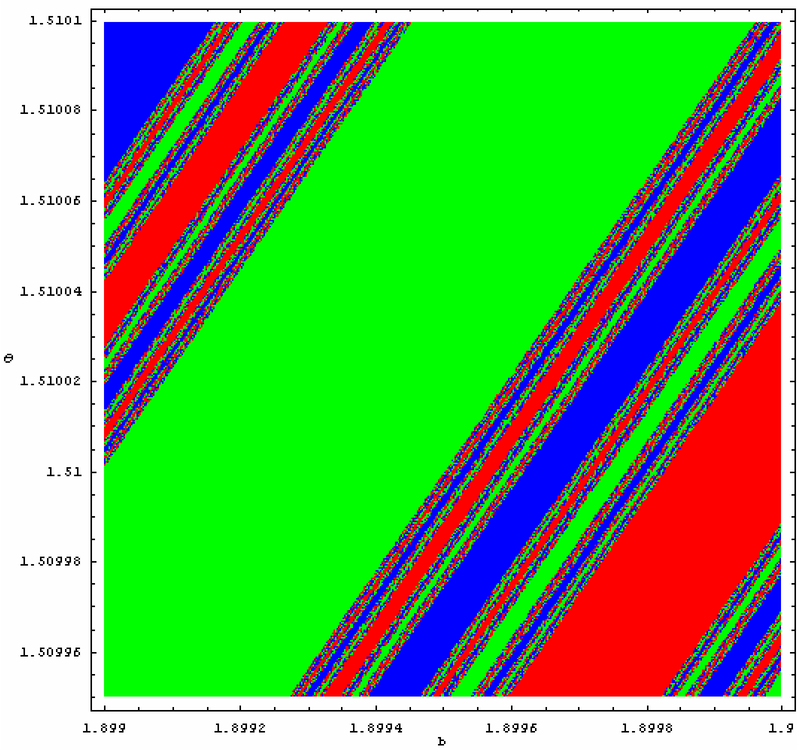
Ένας πολύ παραστατικός τρόπος για να δούμε ποιες αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν σε ποια έξοδο είναι να χρωματίσουμε με διαφορετικά χρώματα τον χώρο των αρχικών συνθηκών ανάλογα με την έξοδο από την οποία θα διαφύγει τελικά το σωματίδιο.

Το αποτέλεσμα φαίνεται παρακάτω στο σχ. [3.3α] και στις μεγεθύνσεις του [3.3β] και [3.3γ].



Σχ.[3.3α]: Οι περιοχές διαφυγής για το σύστημα των τριών δίσκων. Οι αρχικές συνθήκες χρωματίζονται με κόκκινο, πράσινο και μπλε για τροχιές που εγκαταλείπουν την περιοχή σκέδασης από τις εξόδους Α, Β και Γ αντίστοιχα. Με μαύρο χρώμα έχουν χρωματιστεί οι αρχικές συνθήκες για τις οποίες το σωματίδιο δεν εισχωρεί στην περιοχή σκέδασης.





Σχ.[3.3β] και Σχ.[3.3γ]: Διαδοχικές μεγεθύνσεις του Σχ.[3.3α]. Η εμφάνιση της ίδιας μορφής μας προϊδεάζει για την ύπαρξη μορφοκλασματικού συνόλου στα όρια των διαφόρων περιοχών διαφυγής.

Από τα τρία παραπάνω σχήματα φαίνεται, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι τα σύνορα που χωρίζουν τις διάφορες περιοχές διαφυγής παρουσιάζουν όντως μορφοκλασματική δομή. Όποια μεγέθυνση και να πάρουμε, καταλήγουμε σε παρόμοιο με το αρχικό σχήμα. Επίσης, η νεφελώδης εικόνα, όπου μπλέκονται και τα τρία χρώματα, που παρουσιάζουν οι συνοριακές περιοχές, μας προϊδεάζουν ότι δεν υπάρχουν διακεκριμένα σύνορα που να χωρίζουν σαφώς δύο από τις τρεις περιοχές διαφυγής και ότι το σύστημα παρουσιάζει πράγματι την ιδιότητα Wada. Βέβαια, αυτό δεν αποτελεί αυστηρή απόδειξη αλλά μονάχα μια ένδειξη.

Πριν προχωρήσουμε σε πιο αυστηρή απόδειξη, μπορούμε να υπολογίσουμε την διάσταση αβεβαιότητας (*uncertainty dimension*), η οποία μας δίνει ένα μέτρο του πόσο ευαίσθητο είναι το σύστημα σε μια μικρή διαταραχή στις αρχικές συνθήκες. Ακολουθώντας μια μέθοδο που πρότειναν οι Grebogi et al.[1983], από μια συγκεκριμένη περιοχή των αρχικών συνθηκών, διαλέγουμε N αρχικές συνθήκες και προσδιορίζουμε για κάθε μια από αυτές την έξοδο διαφυγής από το σύστημα. Στην συνέχεια, εφαρμόζουμε μια μικρή διαταραχή στην τιμή της παραμέτρου b, έστω $(b+\varepsilon,\theta)$ και $(b-\varepsilon,\theta)$, και προσδιορίζουμε εκ νέου την έξοδο διαφυγής.

Εάν για συγκεκριμένο b από την τριάδα των αρχικών συνθηκών, $(b-\varepsilon,\theta)$, (b,θ) και $(b+\varepsilon,\theta)$, προκύπτει η ίδια έξοδο διαφυγής, τότε η αρχική συνθήκη (b,θ) θεωρείται «βέβαιη» κάτω από ε-διαταραχή. Στην αντίθετη περίπτωση, η αρχική συνθήκη (b,θ) θεωρείται «αβέβαιη» κάτω από ε-διαταραχή. Για συγκεκριμένη διαταραχή ε, μπορούμε να υπολογίσουμε το κλάσμα $f(\varepsilon)$ των «αβέβαιων» αρχικών συνθηκών. Αυτή η συνάρτηση μας δίνει λοιπόν ένα μέτρο για το πόσες τροχιές οδηγούνται τελικά σε διαφορετική έξοδο κάτω από τη δράση της διαταραχής. Προκύπτει ότι είναι:

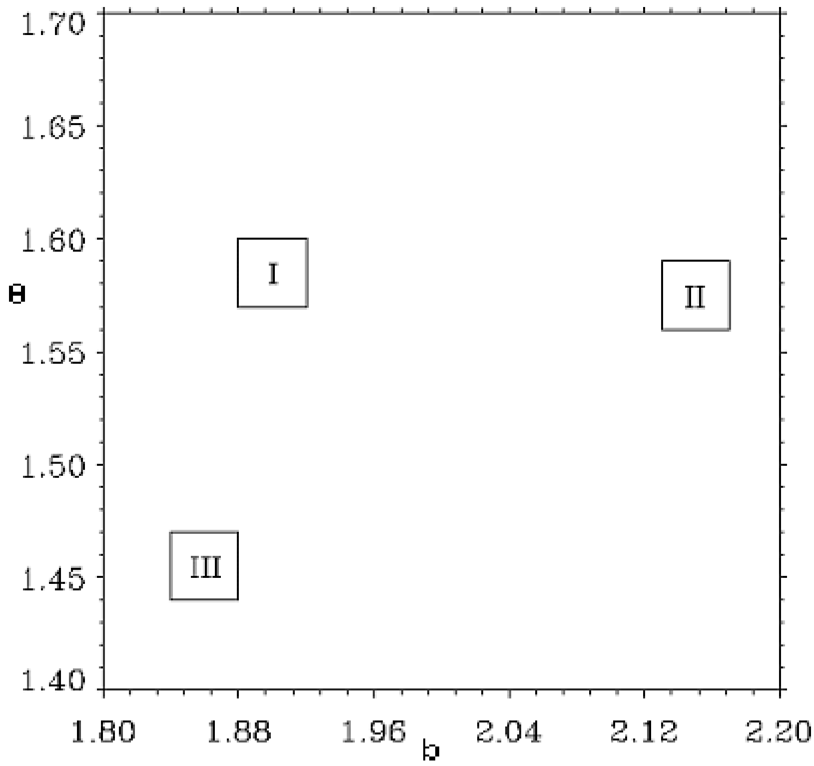
$$f(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\alpha} \tag{3.1}$$

όπου το α ονομάζεται «εκθέτης αβεβαιότητας». Κατόπιν αυτού, μπορεί να υπολογιστεί η διάσταση αβεβαιότητας των συνόρων σύμφωνα με τον τύπο:

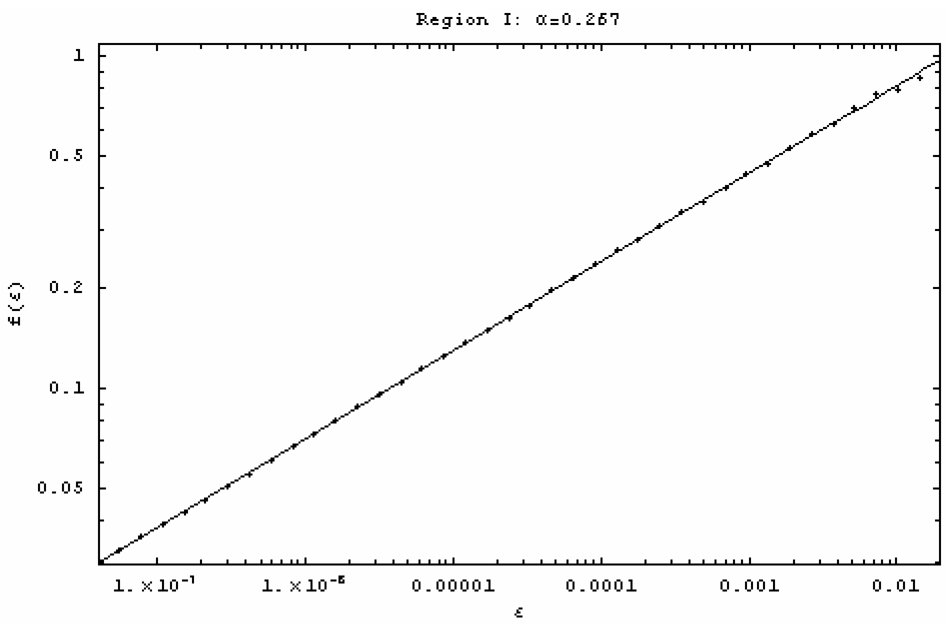
$$d = D - \alpha \tag{3.2}$$

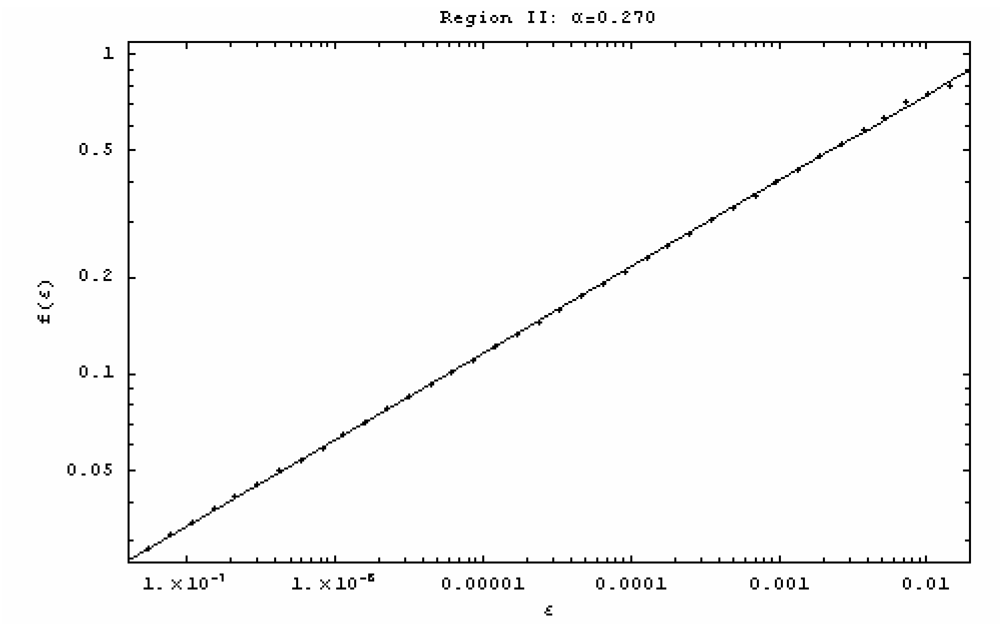
όπου D είναι η διάσταση του χώρου φάσεως των αρχικών συνθηκών. Στην περίπτωση μας $D = 2$.

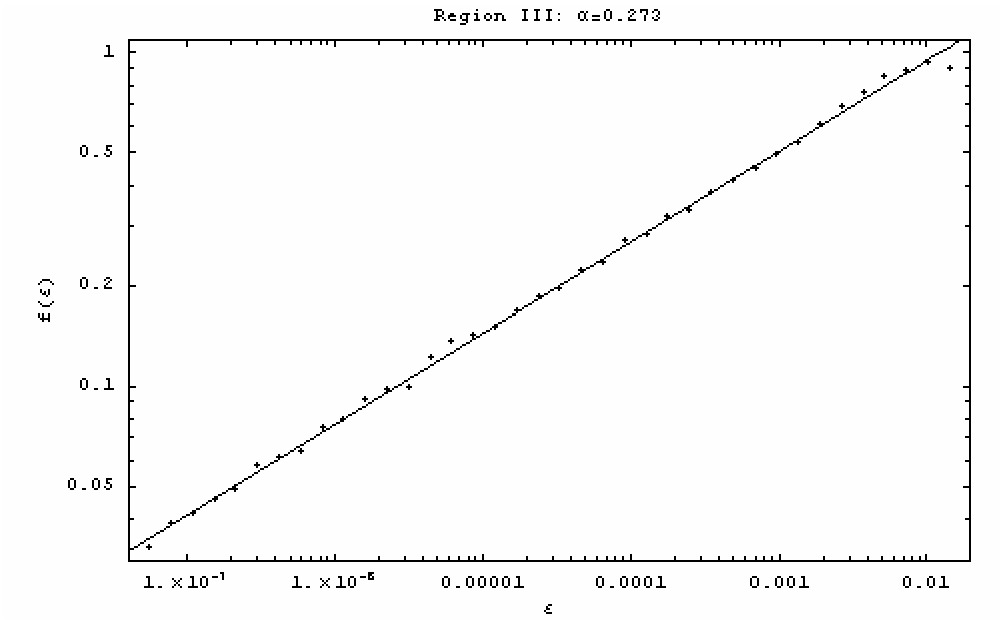
Τα παρακάτω διαγράμματα μας δείχνουν τις log-log απεικονίσεις της $f(\varepsilon)$ για διαφορετικές περιοχές του χώρου φάσεων, αυτές που φαίνονται στο σχ. [3.4].



Σχ.[3.4]:Περιοχές του χώρου αρχικών συνθηκών για τις οποίες υπολογίστηκε ο συντελεστής αβεβαιότητας





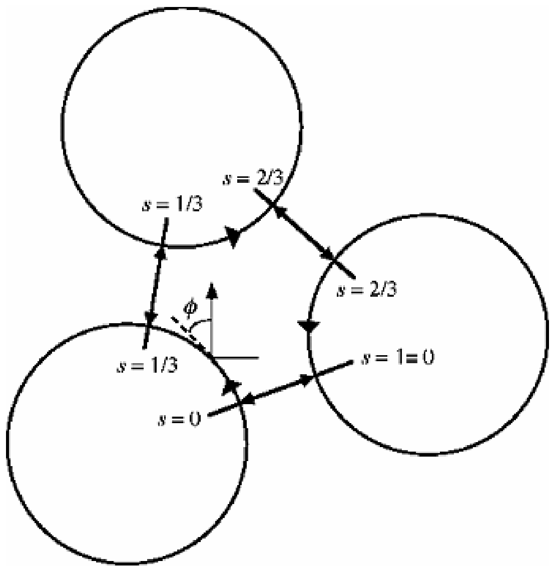


Παρατηρούμε ότι για όλες τις περιοχές οι καμπύλες είναι ευθείες, πράγμα που σημαίνει ότι όντως υπακούουν σε νόμο δύναμης. Επιπλέον, ο εκθέτης αβεβαιότητας που δίνεται από την κλίση των ευθειών είναι περίπου ο ίδιος. Κατά μέσο όρο, η τιμή του εκθέτη αβεβαιότητας που προκύπτει από τις μετρήσεις είναι $a \approx 0.27$, που σημαίνει ότι η διάσταση αβεβαιότητας είναι $d = D - \alpha = 2 - 0.27 = 1.73$.

Το γεγονός ότι η τιμή του εκθέτη αβεβαιότητας είναι σχετικά μικρή υποδηλώνει μεγάλη ευαισθησία του συστήματος από τις αρχικές συνθήκες.

3.5 Επιβεβαίωση της ιδιότητας Wada

Με σκοπό να επιβεβαιώσουμε πιο αυστηρά ότι τα σύνορα των διαφόρων περιοχών διαφυγής παρουσιάζουν την ιδιότητα Wada, εισάγουμε μια επιφάνεια τομής που να αντιστοιχεί στην επιφάνεια των τριών δίσκων. Ενδιαφερόμαστε μόνο για τροχιές που εισέρχονται μέσα στην περιοχή σκέδασης. Έτσι, όταν το σωματίδιο βρίσκεται στη περιοχή σκέδασης, η θέση του στην επιφάνεια τομής, παραμετροποιείται από το μήκος τόξου s το οποίο διαγράφει τα τρία τόξα που οριοθετούν την περιοχή σκέδασης (βλ. σχ. [3.5]). Έχουμε κανονικοποιήσει το s ώστε το συνολικό μήκος τόξου να είναι ίσο με 1, δηλαδή το μήκος τόξου που αντιστοιχεί σε κάθε δίσκο είναι 1/3. Επιπλέον, χρησιμοποιούμε τη μεταβλητή $z = \cos\phi$, όπου ϕ η γωνία που σχηματίζει η πορεία του σωματιδίου μετά από κρούση με την εφαπτομένη στον δίσκο στο σημείο κρούσης.



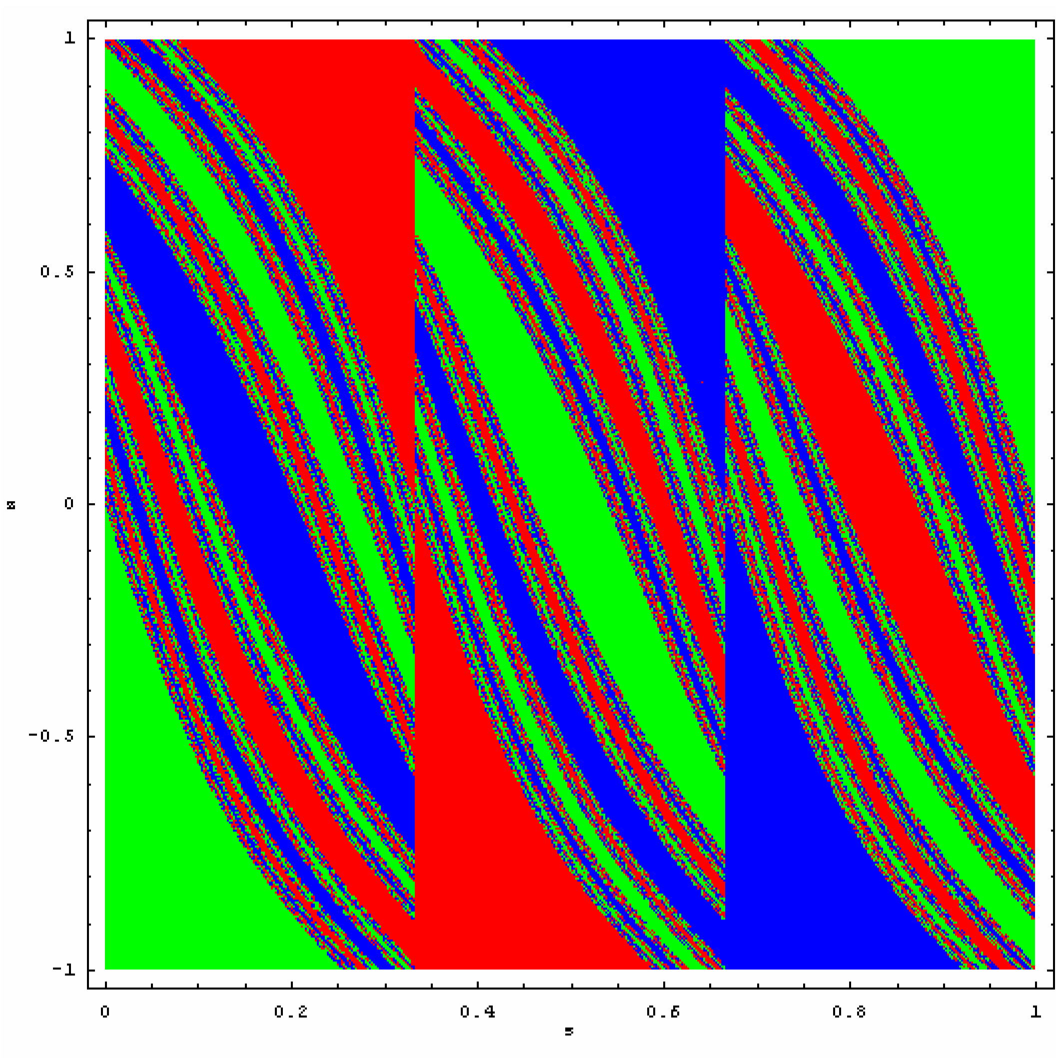
Σχ.[3.5]: Το σύστημά μας με τις καινούριες συντεταγμένες $(s,\ z = \cos\phi)$. *Οι ευθείες γραμμές στα σταθερά σημεία* $s = 0,\ 1/3,\ 2/3$ *είναι τροχιές που ταλαντεύονται εκεί για άπειρο χρόνο.*

Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση f που μας δίνει την τροχιά του σωματιδίου έπειτα από κάθε κρούση με κάποιον από τους τρεις δίσκους:

$$f : (s_n, z_n) \rightarrow (s_{n+1}, z_{n+1}) \tag{1.3}$$

Έχει δειχτεί ότι η f συντηρεί τα εμβαδά [Birkhoff, 1927; Berry, 1981]. Η απεικόνιση αυτή παύει να ισχύει όταν το σωματίδιο εξέρχεται από την περιοχή σκέδασης. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι τα σημεία $(0,0)$, $(1/3,0)$, $(2/3,0)$, που στις αρχικές συντεταγμένες ήταν περιοδικά σημεία, στις μεταβλητές αυτές γίνονται σταθερά σημεία.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις καινούριες μεταβλητές, ο χώρος φάσεως των αρχικών συνθηκών λαμβάνει τη μορφή που φαίνεται στο σχ. [3.6].



Σχ.[3.6]: Μια εικόνα της δομής του συνόρου των διαφορετικών περιοχών διαφυγής όταν οι αρχικές συνθήκες εκφράζονται σε μεταβλητές (s,z)

Για την υπολογιστική υλοποίηση του προβλήματος αυτού, χρειάζεται να γίνουν κάποιες μετατροπές στο πρώτο πρόγραμμα Wada1.cpp. Θεωρούμε πλέον ως αρχική θέση του σωματιδίου κάποιο σημείο πάνω στο ένα από τα τρία τόξα της περιοχής σκέδασης. Παρακάτω, δίνεται μια σύντομη περιγραφή του κύριου αλγόριθμου του προγράμματος Wada2.cpp, το οποίο περιέχει δύο βρόγχους for και έναν βρόγχο while (δεν κρίθηκε σκόπιμο να το επισυνάψουμε στην εργασία αυτή λόγω της ομοιότητας του με το Wada1.cpp).

Ας εξετάσουμε πρώτα τι γίνεται στον πρώτο, εξωτερικό βρόγχο για κάθε δίσκο. Αρχικά, π.χ. για τον πρώτο δίσκο που έχει ως κέντρο το σημείο A (βλ. σχ. [3.7]), βρίσκεται η τομή A_1 του διανύσματος $\overrightarrow{AC}$ (που ενώνει το κέντρο του πρώτου δίσκου με το κέντρο του τρίτου) με την περιφέρεια του δίσκου, με την βοήθεια της ρουτίνας ray_circle_intersection. Στη συνέχεια, αρκεί να περιστρέψουμε, μ' έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA_1}$ κατά μια γωνία ϑ για να βρούμε την επόμενη αρχική θέση του σωματιδίου. Μεταβάλλοντας το ϑ από 0 έως π/3 με σταθερό βήμα, πετυχαίνουμε όλα τα ζητούμενα ισοκατανεμημένα σημεία A_i του σχετικού τόξου. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται ύστερα για τους δύο άλλους δίσκους.

Στον δεύτερο βρόγχο for, μεταβάλλουμε την άλλη μεταβλητή, την γωνία ϕ από 0 έως π, και κατά συνέπεια, το $z = \cos\phi$ από 1 έως -1. Αυτή η γωνία μας λέει κατά πόσο, με τον κατάλληλο μετασχηματισμό, πρέπει να περιστρέψουμε το διάνυσμα κάθετο στο $\overrightarrow{AA_i}$ για να πάρουμε το διάνυσμα που θα παριστάνει την τροχιά του σωματιδίου μας.

Τέλος, όταν έχουμε την αρχική τροχιά του σωματιδίου, στον βρόγχο while που είναι εσωτερικώς στον δεύτερο βρόγχο for , κοιτάμε πως θα εξελιχθεί. Υπολογίζεται κάθε φορά ποιο είναι το αντικείμενο που θα συναντήσει πρώτο το σωματίδιο. Εάν αυτό είναι δίσκος, γίνεται η ανάκλαση με τον τρόπο που αναφέραμε στο πρώτο πρόγραμμα, εάν είναι ευθεία που ενώνει τα κέντρα δυο δίσκων, ο βρόγχος τερματίζεται και έχουμε την έξοδο μας.

Στο σχ. [3.6], φαίνονται καθαρά οι κάθετες ευθείες που χωρίζουν τον χώρο των αρχικών συνθηκών και που αντιστοιχούν στο πέρασμα από τον ένα δίσκο στον άλλο. Αυτές οι ευθείες αποτελούν ανωμαλίες που οφείλονται στις συγκεκριμένες συντεταγμένες που χρησιμοποιήσαμε. Επομένως, όταν θα μιλάμε για συνοριακά σημεία, θα πρέπει να αποκλείουμε τα σημεία που βρίσκονται πάνω σ' αυτές της ευθείες.

Η δυναμική του ασταθούς αναλλοίωτου συνόλου παίζει καθοριστικό ρόλο στον σχηματισμό συνόρων Wada, ιδιαίτερα οι ευσταθείς και οι ασταθείς πολλαπλότητες του αναλλοίωτου συνόλου.

Το αναλλοίωτο σύνολο αποτελείται από τα σημεία εκείνα για τα οποία η τροχιά του σωματιδίου δεν ξεφεύγει ποτέ από την περιοχή σκέδασης, είτε για θετικούς είτε για αρνητικούς χρόνους.

Η ευσταθής πολλαπλότητα ενός σημείου y του αναλλοίωτου συνόλου ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $\{x\}$ για τα οποία ισχύει το εξής:

$$\left|f^{n}(x)-f^{n}(y)\right| \rightarrow 0,\ n \rightarrow \infty$$

δηλαδή η ευσταθής πολλαπλότητα υπάρχει μόνο για τα σημεία y, οι εικόνες των οποίων , μέσω της απεικόνισης, παραμένουν για πάντα στην περιοχή σκέδασης.

Η ασταθής πολλαπλότητα ενός σημείου y του αναλλοίωτου συνόλου ορίζεται ως το σύνολο των σημείων $\{w\}$ για τα οποία ισχύει το εξής:

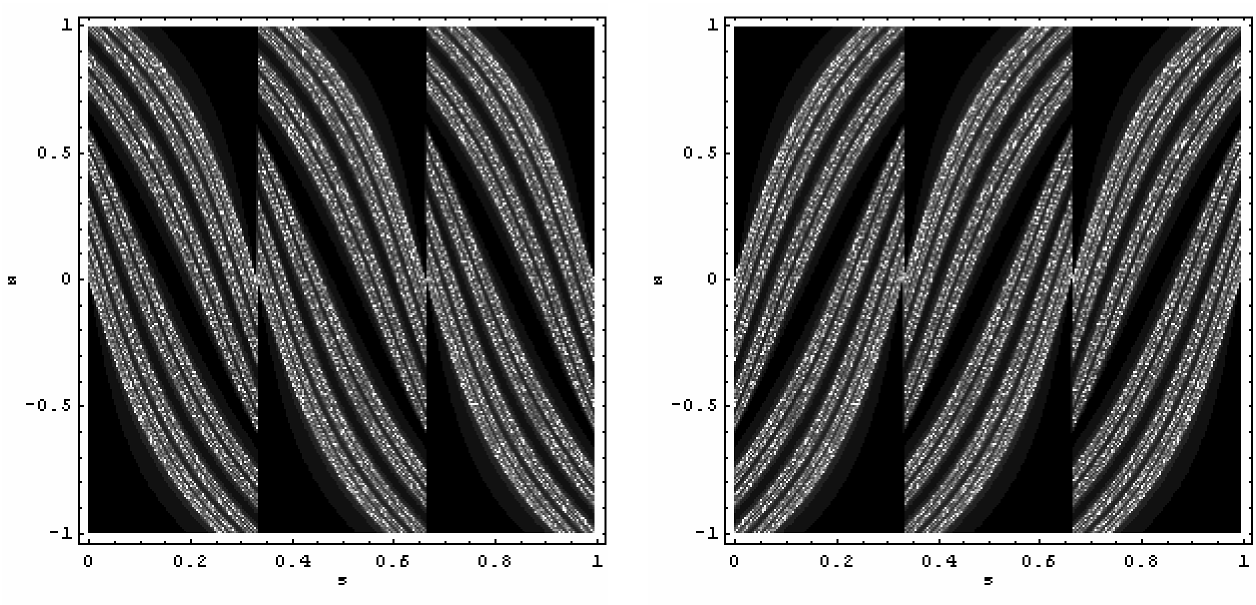
$$\left|f^{-n}(w)-f^{-n}(y)\right| \rightarrow 0,\ n \rightarrow \infty$$

δηλαδή η ασταθής πολλαπλότητα υπάρχει μόνο για τα σημεία w, οι εικόνες των οποίων, μέσω της αντίστροφης απεικόνισης, παραμένουν για πάντα στην περιοχή σκέδασης.

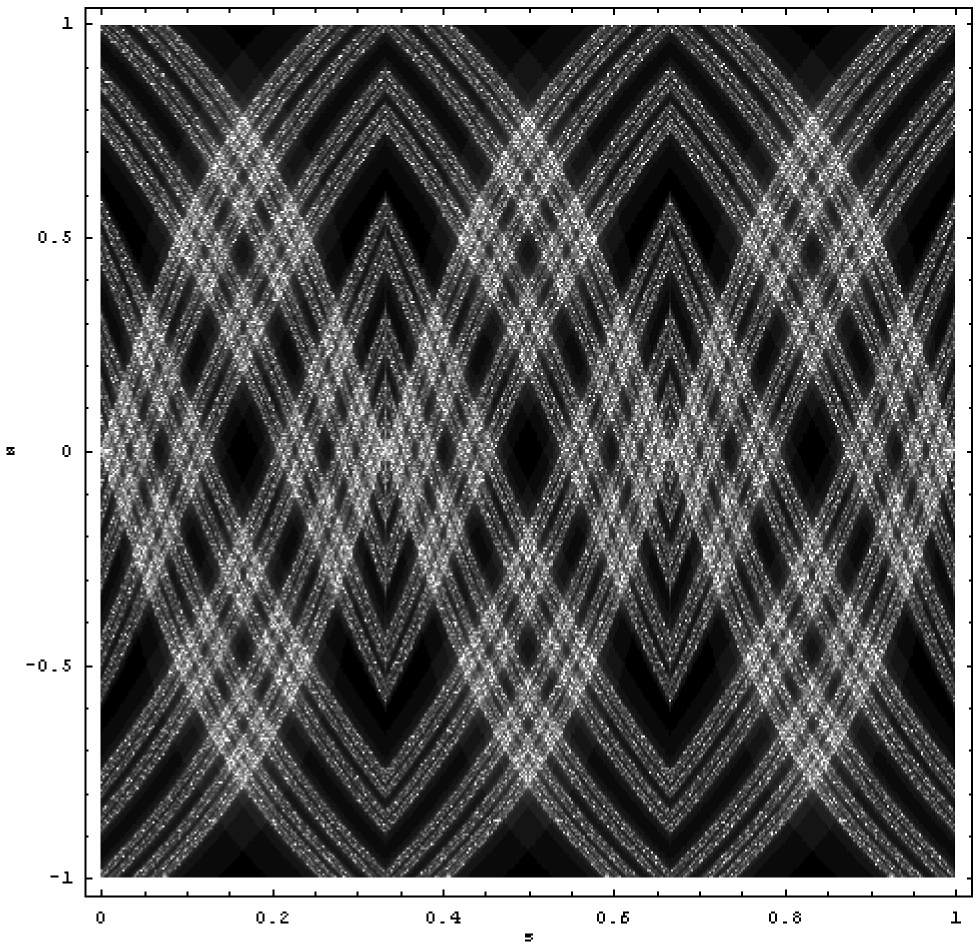
Είναι λοιπόν φανερό ότι το αναλλοίωτο σύνολο ορίζεται ως το σύνολο των σημείων που ανήκουν και στις δύο πολλαπλότητες.

Από τον ορισμό της ευσταθούς πολλαπλότητας, γίνεται προφανές ότι το σύνολο των συνοριακών σημείων συμπίπτει με την ευσταθή πολλαπλότητα διότι για να είναι ένα σημείο συνοριακό θα πρέπει να παραμένει για πάντα στην περιοχή σκέδασης. Εάν για κάποιο λόγο συνέβαινε το αντίθετο, δηλαδή η τροχιά ενός συνοριακού σημείου μετά από κάποιο χρόνο εξερχόταν από μια συγκεκριμένη έξοδο, θα έπρεπε να συμβαίνει το ίδιο και για μια περιοχή γύρω από αυτό το σημείο, πράγμα αντίθετο με τον ορισμό του συνοριακού σημείου. Συνεπώς, η ευσταθής πολλαπλότητα του αναλλοίωτου συνόλου και το σύνολο των συνοριακών σημείων αποτελούν το ίδιο σύνολο. Εάν αποδείξουμε ότι η ιδιότητα Wada ισχύει για την ευσταθή πολλαπλότητα, τότε προφανώς, θα ισχύει και για το σύνολο των συνοριακών σημείων.

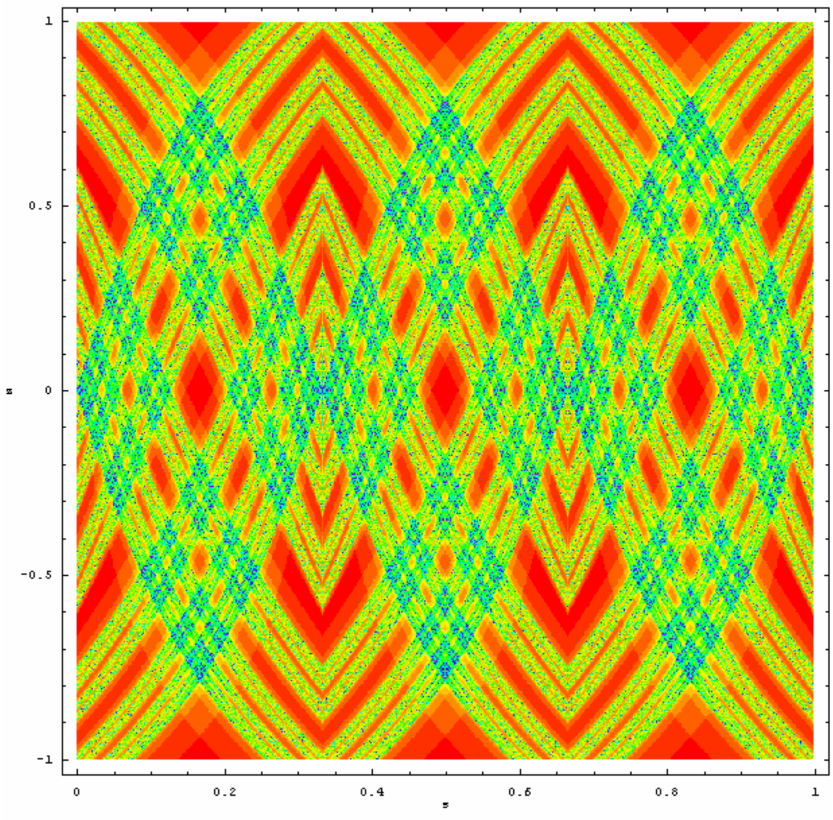
Υπολογιστικά, ένας τρόπος να προσεγγίσουμε την ευσταθή πολλαπλότητα είναι να πάρουμε ένα πολύ πυκνό πλέγμα αρχικών συνθηκών, και να κρατήσουμε μόνο τις τροχιές οι οποίες δε διαφεύγουν από την περιοχή σκέδασης μετά από αρκετά μεγάλο χρόνο τον οποίο ορίζουμε μέσα στο πρόγραμμα. Ένας, άλλος τρόπος, τον οποίο και διαλέξαμε, είναι να κρατήσουμε τους χρόνους για όλες τις τροχιές και μετά να χρωματίσουμε τον χώρο φάσεως των αρχικών συνθηκών ανάλογα με τον χρόνο παραμονής μέσα στην περιοχή σκέδασης. Η ασταθής πολλαπλότητα προκύπτει εάν αντιστρέψουμε την τροχιά του σωματιδίου. Αυτό, μέσα στο πρόγραμμα υλοποιείται παίρνοντας την γωνία $(\pi-\phi)$ αντί για την γωνία ϕ. Το διάγραμμα που προκύπτει είναι συμμετρικό με το διάγραμμα για την ευσταθή πολλαπλότητα, πράγμα φυσιολογικό και αναμενόμενο εφόσον $\cos(\pi-\phi)=-\cos\phi$. Συνεπώς, η μια πολλαπλότητα προκύπτει από την άλλη απλά με τον μετασχηματισμό $(s,z)\rightarrow(s,-z)$. Το παραπάνω φαινόμενο ονομάζεται συμμετρία αντιστροφής χρόνου (*time reversal symmetry*). Το αναλλοίωτο σύνολο προκύπτει εάν πάρουμε τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες η τροχιά παραμένει μέσα στην περιοχή σκέδασης τόσο για θετικούς όσο και για αρνητικούς χρόνους.

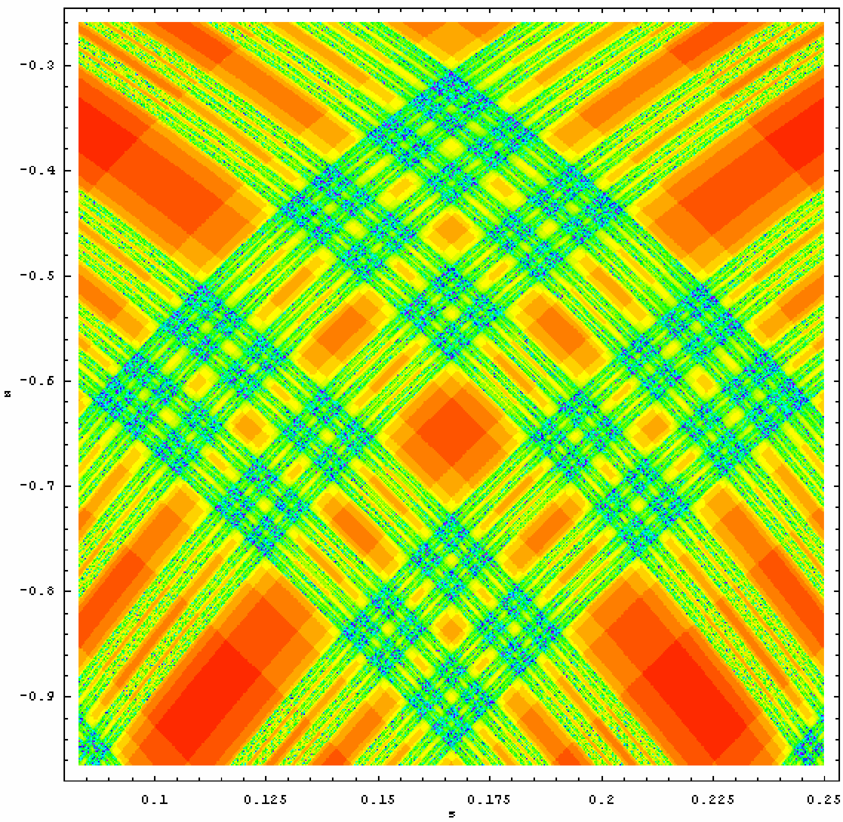


Σχ.[3.7α]-.[3.7β]: Η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα του αναλλοίωτου συνόλου



Σχ.[3.7γ]:Το αναλλοίωτο σύνολο αποτελείται από τα σημεία εκείνα που ανήκουν και στις δυο πολλαπλότητες





Σχ.[3.7δ]- Σχ.[3.7ε]:Το αναλλοίωτο σύνολο χρωματιστά και μια μεγέθυνση αυτού

Από τα παραπάνω σχήματα, φαίνεται ξεκάθαρα η μορφοκλασματική δομή του αναλλοίωτου συνόλου, το οποίο θυμίζει αρκετά το αναλλοίωτο σύνολο του πέταλου του Smale (βλ. Παράρτημα Ι). Ακόμα, παρατηρούμε ότι η ευσταθής και η ασταθής πολλαπλότητα τέμνονται εγκάρσια και κατά συνέπεια το αναλλοίωτο σύνολο μπορεί να χαρακτηριστεί ως υπερβολικό.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι όλα τα συνοριακά σημεία είναι σημεία Wada. Ας θεωρήσουμε ένα συνοριακό σημείο β. Εκτός από συνοριακό σημείο, είναι, όπως είδαμε παραπάνω, και σημείο της ευσταθής πολλαπλότητας, οπότε παραμένει για πάντα στην περιοχή σκέδασης και προσεγγίζει ασυμπτωτικά το αναλλοίωτο σύνολο. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα μικρό δίσκο $D_\varepsilon(\beta)$ ακτίνας ε, με κέντρο το σημείο β, και την οριζόντια διάμετρο του $L_\varepsilon(\beta)$. Εφόσον, όπως φαίνεται από το σχ. [3.6], η ευσταθής πολλαπλότητα έχει αρνητική κλίση, έχουμε ότι η οριζόντια διάμετρος $L_\varepsilon(\beta)$ είναι εγκάρσια σε αυτήν. Κατά συνέπεια, εάν απεικονίσουμε το σημείο β και την διάμετρο $L_\varepsilon(\beta)$ στο μέλλον, η τροχιά της $L_\varepsilon(\beta)$ προσεγγίζει το αναλλοίωτο σύνολο, και λόγο της υπερβολικότητας του αναλλοίωτου συνόλου, η εικόνα της $L_\varepsilon(\beta)$ εξαπλώνεται εκθετικά ευθυγραμμίζοντας τον εαυτό της με την ασταθή πολλαπλότητα η οποία έχει θετική κλίση. Λόγω της εκθετικής εξάπλωσης, από την δομή του χώρου φάσεως γίνεται φανερό ότι μπορούμε να διαλέξουμε ένα m τόσο μεγάλο ώστε η εικόνα της διαμέτρου $f^m(L_\varepsilon(\beta))$ να τέμνει προφανέστατα και τις τρεις περιοχές διαφυγής, δηλαδή κάποιο σημείο της Α ανήκει στην μπλε περιοχή, κάποιο Β στην κόκκινη και κάποιο Γ στην πράσινη. Οι προεικόνες αυτών των σημείων (που παίρνουμε με την αντίστροφη απεικόνιση), όπως είναι λογικό, συνεχίζουν να ανήκουν στις ίδιες περιοχές διαφυγής και κατά συνέπεια συμπεραίνουμε ότι και η διάμετρος $L_\varepsilon(\beta)$ τέμνει τις τρεις περιοχές διαφυγής. Άρα, αποδείξαμε ότι όσο μικρό και αν διαλέξουμε τον δίσκο $D_\varepsilon(\beta)$, αυτός περιέχει κομμάτια και από τις τρεις περιοχές διαφυγής και συνεπώς το σημείο β είναι σημείο Wada. Επειδή το β μπορεί να είναι οποιοδήποτε συνοριακό σημείο, συμπεραίνουμε ότι όλα τα συνοριακά σημεία είναι σημεία Wada.

3.6 Προσβάσιμα και μη προσβάσιμα συνοριακά σημεία

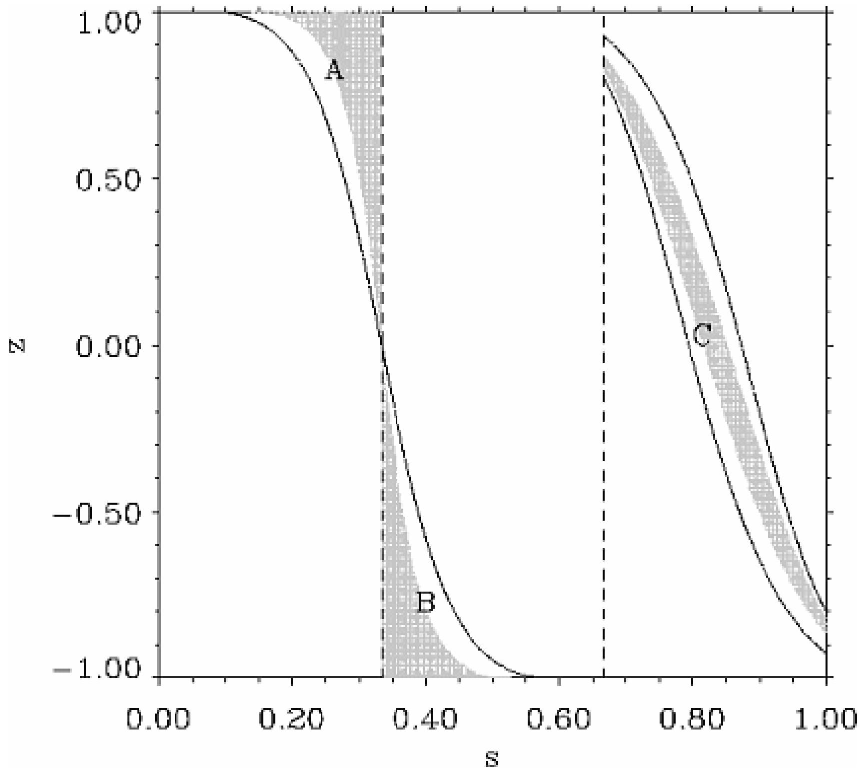
Λέμε ότι ένα συνοριακό σημείο β είναι «προσβάσιμο από μια συγκεκριμένη περιοχή διαφυγής» (*accessible from a particular basin*), εάν υπάρχει σημείο, μέσα σ' αυτήν την περιοχή διαφυγής, που να μπορεί να συνδεθεί με το β με καμπύλη πεπερασμένου μήκους που δεν περιέχει άλλο συνοριακό σημείο εκτός από το β. Λέμε ότι ένα συνοριακό σημείο β είναι «μη προσβάσιμο από μια συγκεκριμένη περιοχή διαφυγής» (*inaccessible from a particular basin*) εάν αυτό δεν είναι δυνατόν, κι εάν δεν υπάρχει περιοχή διαφυγής από την οποία να είναι προσβάσιμο λέμε ότι το β είναι απλά μη προσβάσιμο (*inaccessible*).

Παρακάτω, θα δείξουμε τα εξής:

- Όλα τα συνοριακά σημεία που είναι προσβάσιμα από την κόκκινη περιοχή βρίσκονται στην ευσταθή πολλαπλότητα του σταθερού σημείου (1/3,0) (και ομοίως για την μπλε περιοχή και το σταθερό σημείο (2/3,0), και για την πράσινη και το σταθερό σημείο (0,0)).
- Όλα τα συνοριακά σημεία που δεν βρίσκονται σε κάποια από τις ευσταθείς πολλαπλότητες αυτών των τριών σταθερών σημείων είναι μη προσβάσιμα.
- Οι ευσταθείς πολλαπλότητες αυτών των τριών σταθερών σημείων είναι όλες πυκνές στο σύνορο (δηλαδή, κάθε γειτονιά ενός συνοριακού σημείου, περιέχει μέρος από τις ευσταθείς πολλαπλότητες και των τριών σταθερών σημείων και κατά συνέπεια, το σύνορο αποτελεί το κλείσιμο της ευσταθής πολλαπλότητας κάθε σταθερού σημείου).

Αρχίζοντας, εισάγουμε την έννοια της «περιοχής παγίδευσης» (*trapping region*) για κάθε έξοδο, την οποία δεν πρέπει να συγχέουμε με την περιοχή μιας εξόδου (*exit basin*). Οι περιοχές παγίδευσης είναι περιοχές της επιφάνειας τομής τις οποίες κάποια στιγμή επισκέπτονται όλες οι τροχιές που διαφεύγουν από το σύστημα και παραμένουν εκεί ώσπου να εγκαταλείψουν τελικά την περιοχή σκέδασης. Για να βρούμε τέτοιες περιοχές, θα πρέπει να καταλάβουμε το πώς οι τροχιές διαφεύγουν από κάθε έξοδο. Μπορούμε να επικεντρωθούμε σε μια έξοδο, π.χ. την έξοδο I, και το αποτέλεσμα να εφαρμοστεί και στις άλλες εξόδους για λόγους συμμετρίας.

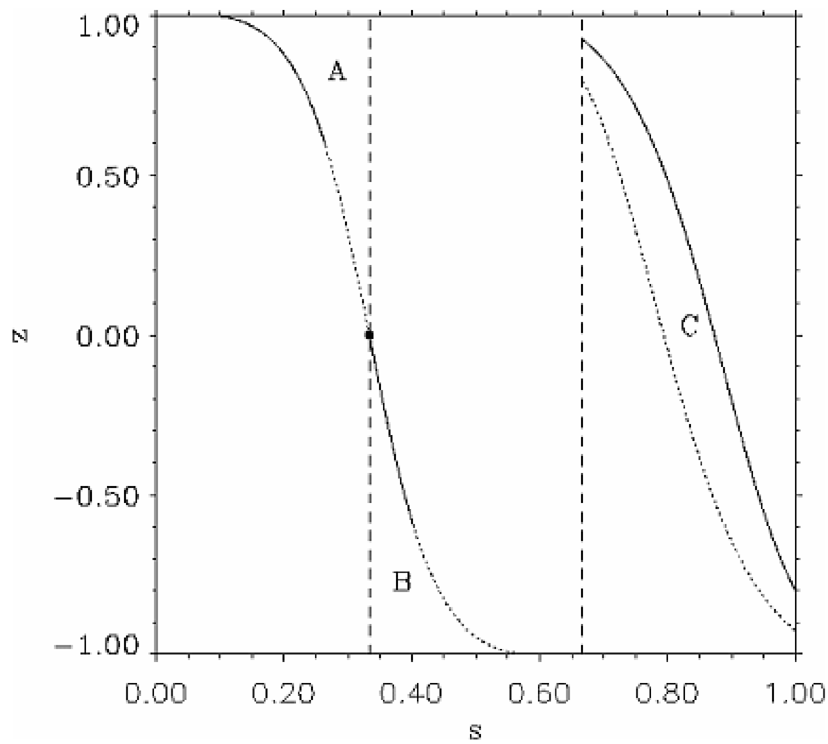
Παρατηρούμε πρώτα, από το σχ. [3.6], τις τρεις μεγαλύτερες συνδεδεμένες υποπεριοχές του *exit basin* I (κόκκινη περιοχή). Αυτές οι τρεις περιοχές φαίνονται στο σχ. 8 και τις ονομάσαμε A, B και C.



Σχ.[3.8]: Η περιοχή παγίδευσης για την έξοδο Ι. Οι σκιασμένες περιοχές των A, B και C αποτελούνται από τις αρχικές συνθήκες για τις οποίες η τροχιά ξεφεύγει κατευθείαν από την περιοχή σκέδασης, χωρίς επιπλέον κρούση, από τους δίσκους I, II, και III αντίστοιχα.

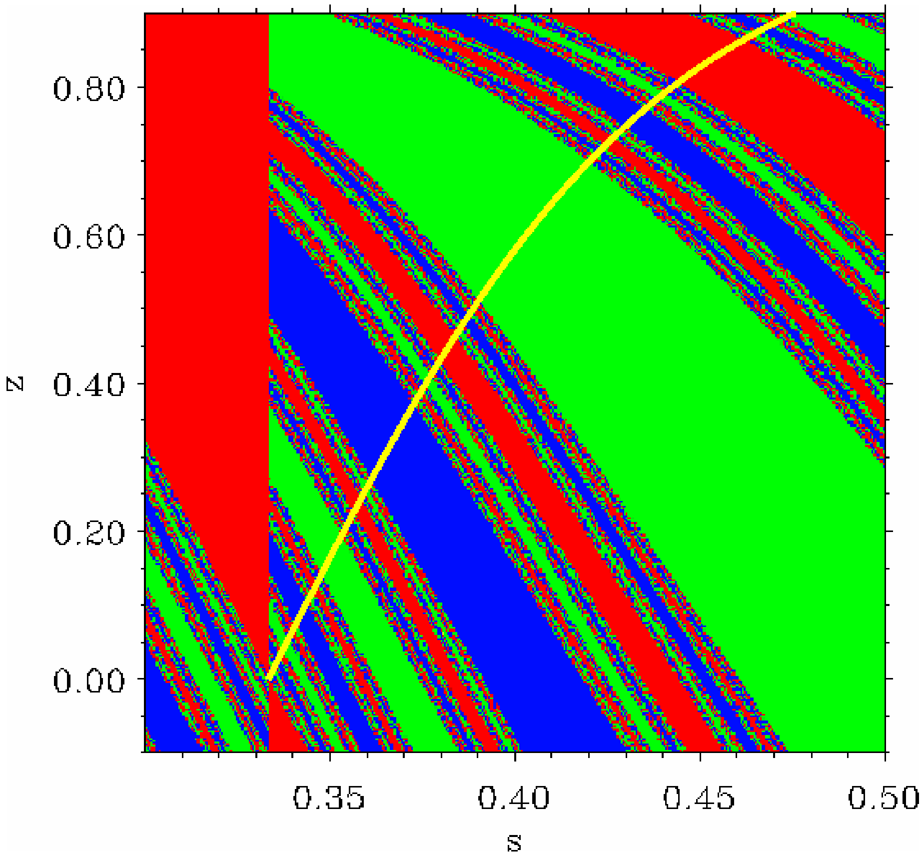
Κάθε τροχιά που θα διαφύγει από την έξοδο Ι μπορεί να έχει «χτυπήσει» οποιοδήποτε από τους τρεις δίσκους πριν ξεφύγει. Ιδιαίτερα, η σκιασμένη έκταση της περιοχής A αποτελεί το σύνολο των αρχικών συνθηκών που ξεκινούν από των δίσκο I και ξεφεύγουν από την έξοδο I χωρίς να πραγματοποιήσουν καμία κρούση, η σκιασμένη έκταση της περιοχής B το σύνολο των αρχικών συνθηκών που ξεκινούν από των δίσκο II και ξεφεύγουν από την έξοδο I χωρίς καμία κρούση και η σκιασμένη έκταση της περιοχής C, το σύνολο των αρχικών συνθηκών που ξεκινούν από των δίσκο III και ξεφεύγουν από την έξοδο I χωρίς καμία κρούση. Η ένωση των τριών περιοχών A, B και C αποτελεί αυτό που αποκαλούμε το «σύνολο παγίδευσης» για την έξοδο I. Όπως είναι προφανές, κάθε σημείο του συνόλου αυτού τελικά φεύγει από την έξοδο I . Σημαντικότερο είναι ότι κάθε σημείο που θα διαφύγει από την έξοδο I πρέπει να περάσει τελικώς πριν διαφύγει, από το σύνολο παγίδευσης. Παρόμοια σύνολα παγιδεύσεως υπάρχουν και για τις δύο άλλες εξόδους.

Στο σχ. [3.9], φαίνεται η ευσταθής πολλαπλότητα του σταθερού σημείου (1/3,0). Παρατηρούμε από την σύγκριση των σχ. [3.8] και [3.9] ότι τα τμήματα πάνω αριστερά και κάτω δεξιά του σταθερού σημείου είναι σύνορα των περιοχών A και B αντίστοιχα. Μέρη αυτών των τμημάτων απεικονίζονται μπροστά στο χρόνο για να πάρουμε τμήματα που αποτελούν το κάτω και το πάνω σύνορο της περιοχής C. Για περισσότερη σαφήνεια έχουν ζωγραφιστεί με ενωμένη γραμμή τα μέρη αυτών των τμημάτων, που απεικονίζονται στο πάνω σύνορο της περιοχής C και με διακεκομμένη γραμμή τα μέρη που απεικονίζονται στο κάτω σύνορο της C. Συμπεραίνουμε ότι το σύνορο του συνόλου παγιδεύσεως I βρίσκεται σε περατωμένα τμήματα της ευσταθούς πολλαπλότητας του σταθερού σημείου (1/3,0). Γενικότερα, λόγω συμμετρίας, τα σύνορα και των άλλων δύο συνόλων παγιδεύσεως βρίσκονται σε περατωμένα τμήματα των ευσταθών πολλαπλοτήτων των αντίστοιχων σταθερών σημείων.



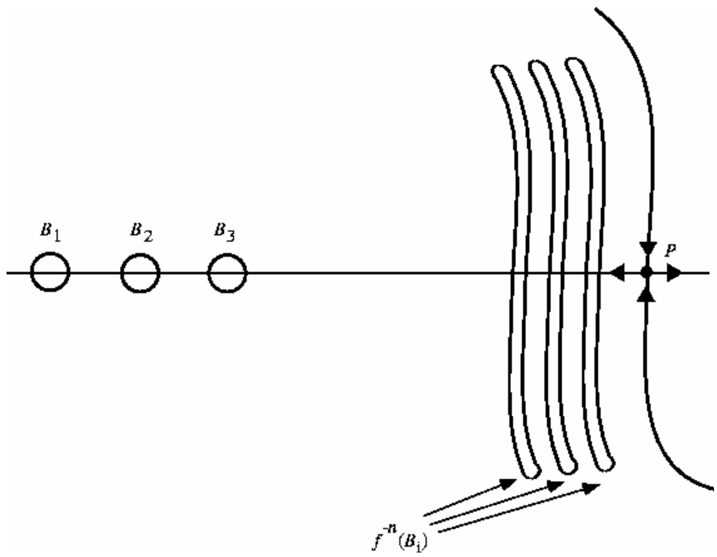
Σχ.[3.9]: Η ευσταθής πολλαπλότητα του σταθερού σημείου (1/3,0). Τα τμήματα με συνεχής γραμμή που συνορεύουν της περιοχές A και B απεικονίζονται στο πάνω σύνορο της περιοχής C ενώ αυτά με διακεκομμένη γραμμή απεικονίζονται στο κάτω σύνορο της περιοχής C.

Στο σχ. [3.10] έγινε υπέρθεση τμήματος της ασταθούς πολλαπλότητας του σταθερού σημείου (1/3,0) σε μέρος του σχ. [3.6]. Είναι προφανές ότι η πολλαπλότητα αυτή διασταυρώνεται και με τις τρεις περιοχές διαφυγής.



Σχ.[3.10]: Η εικόνα αυτή μας δείχνει πως η ασταθής πολλαπλότητα του σταθερού σημείου (1/3,0) τέμνει και τις τρεις περιοχές διαφυγής.

Θεωρούμε ότι B_1, B_2 και B_3 είναι τρία μικρά υποσύνολα αυτών των περιοχών διαφυγής. Έστω p, ένα από τα τρία σαγματικά σταθερά σημεία του συνόρου, η ασταθής πολλαπλότητα του p διασταυρώνει μέρος και των τριών διαφορετικών περιοχών διαφυγής. Εξετάζοντας διαδοχικές προεικόνες των B_1, B_2 και B_3, παρατηρούμε ότι προσεγγίζουν την ευσταθή πολλαπλότητα του p. Αυτό συμβαίνει επειδή η απόσταση μεταξύ σημείων της ασταθούς πολλαπλότητας συρρικνώνεται κατά την αντίστροφη απεικόνιση. Επίσης, οι προεικόνες των B_1, B_2 και B_3 έχουν την τάση να εξαπλώνονται κατά την διεύθυνση της ευσταθούς πολλαπλότητας όπως φαίνεται στο σχ. [3.11]. Κατά συνέπεια, διαδοχικές προεικόνες των B_1, B_2 και B_3 μπορούν να προσεγγίσουν όσο θέλουμε την ευσταθή πολλαπλότητα του p, και κάθε σημείο της ευσταθούς πολλαπλότητας του p βρίσκεται στο σύνορο και των τριών περιοχών B_1, B_2 και B_3 [Kennedy & Yorke, 1991]. Μ' αυτόν τον τρόπο φτάνουμε πάλι στο συμπέρασμα ότι κάθε σημείο της ευσταθούς πολλαπλότητας είναι σημείο Wada. Από την άλλη, δείχνουμε ότι τα σύνορα της περιοχής παγίδευσης για το κόκκινο είναι προσβάσιμα από την κόκκινη περιοχή.



Σχ.[3.11]: Σχηματική αναπαράσταση του τι συμβαίνει όταν η ασταθής πολλαπλότητα ενός σταθερού σημείου p τέμνει υποσύνολα και των τριών περιοχών.

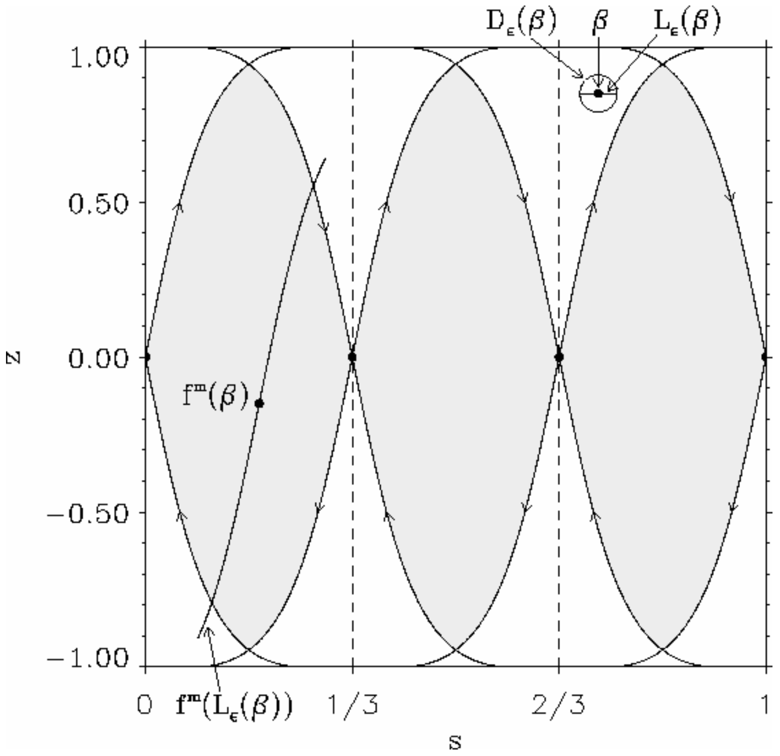
Έστω τώρα ένα συνοριακό σημείο β. Θεωρούμε δυο εκδοχές:

(a) Το συνοριακό σημείο β απεικονίζεται στο σύνορο μιας περιοχής παγίδευσης σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων m δηλαδή το σημείο β βρίσκεται πάνω στην ευσταθή πολλαπλότητα του κατάλληλου σταθερού σημείου.

(b) Το σημείο β δεν βρίσκεται πάνω στην ευσταθή πολλαπλότητα του κατάλληλου σταθερού σημείου .

Στην περίπτωση (a) το σημείο $f^m(\beta)$ είναι ένα προσβάσιμο συνοριακό σημείο. Χωρίς να ξεφύγουμε από τη γενικότητα, εάν υποθέσουμε ότι το σημείο $f^m(\beta)$ είναι προσβάσιμο από την κόκκινη περιοχή τότε υπάρχει μια καμπύλη μέσα στην κόκκινη περιοχή που το ενώνει με αυθαίρετα κοντινό σημείο α της κόκκινης περιοχής. Απεικονίζοντας προς τα πίσω κατά m βήματα τα σημεία $f^m(\beta)$, α και την καμπύλη που τα ενώνει, προκύπτει μια καμπύλη που ενώνει το συνοριακό σημείο β με το εσωτερικό σημείο $f^{-m}(\alpha)$. Δηλαδή το β είναι προσβάσιμο, και κάθε σημείο προσβάσιμο από την κόκκινη περιοχή βρίσκεται στην ευσταθή πολλαπλότητα του σταθερού σημείου (1/3,0). Επίσης, εφόσον το σύνορο είναι σύνορο Wada, κάθε συνοριακό σημείο μη προσβάσιμο από την κόκκινη περιοχή έχει κάποιο αυθαίρετα κοντινό εσωτερικό κόκκινο σημείο. Εάν κινηθούμε πάνω σε μια ευθεία από το εσωτερικό κόκκινο σημείο μέχρι το συνοριακό σημείο που δεν είναι προσβάσιμο από την κόκκινη περιοχή, θα συναντήσουμε πρώτα κάποιο άλλο συνοριακό σημείο, που εξ ορισμού είναι σημείο προσβάσιμο από την κόκκινη περιοχή. Αυτό το προσβάσιμο σημείο από την κόκκινη περιοχή ανήκει στην ευσταθή πολλαπλότητα του σταθερού σημείου (1/3,0). Κατά συνέπεια, η ευσταθής πολλαπλότητα προσεγγίζει αυθαίρετα κοντά οποιοδήποτε μη προσβάσιμο σημείο από την κόκκινη περιοχή. Δηλαδή, αυτή η ευσταθής πολλαπλότητα είναι πυκνή στο σύνορο.

Στην περίπτωση (b), η τροχιά από το συνοριακό σημείο β παραμένει μέσα στην περιοχή σκέδασης για πάντα αλλά δεν ανήκει στην ευσταθή πολλαπλότητα ενός εκ των σταθερών σημείων. Παρατηρούμε ότι, όπως φαίνεται και στο σχ. [3.12], το αναλλοίωτο σύνολο βρίσκεται στην σκιασμένη περιοχή ανάμεσα στις ευσταθείς και στις ασταθείς πολλαπλότητες των σταθερών σημείων. Φαίνεται επίσης ότι για αρκετά μεγάλο αριθμό βημάτων m, το σημείο $f^{m}(\beta)$, θα βρεθεί στο εσωτερικό μιας εκ των σκιασμένων περιοχών. Για να το κατανοήσουμε αυτό, αρκεί να θυμηθούμε ότι οι διαδοχικές εικόνες ενός συνοριακού σημείου πλησιάζουν το αναλλοίωτο σύνολο. Οπότε, μπορούν θεωρητικά είτε (i) να πλησιάσουν την σκιασμένη περιοχή και να μείνουν από έξω, είτε (ii) να μείνουν στα σύνορα της σκιασμένης περιοχής χωρίς να εισχωρήσουν, είτε (iii) να μπούνε μέσα στη σκιασμένη περιοχή. Από την μια, η εξέταση της δυναμικής της απεικόνισης μας δείχνει ότι σημεία που βρίσκονται πάνω η κοντά στην ασταθή πολλαπλότητα που συνορεύει με τη σκιασμένη περιοχή απεικονίζονται μέσα σε αυτή. Έτσι, η περίπτωση (ii) αποκλείεται εφόσον, από την άλλη, οι τροχιές δεν μπορούν να καταλήγουν στις ευσταθείς πολλαπλότητες των σταθερών σημείων που συνορεύουν με τη σκιασμένη περιοχή. Η περίπτωση (i) αποκλείεται επίσης γιατί, εάν οι εικόνες του β βρίσκονταν κοντά στην ευσταθή πολλαπλότητα, τότε θα βρίσκονταν σε μια περιοχή παγίδευσης και όπως είπαμε, το β είναι συνοριακό σημείο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τροχιά του συνοριακού σημείου β εισχωρεί μέσα στην σκιασμένη περιοχή.



Σχ.[3.12]: Η σκιασμένη περιοχή συνορεύει με τμήματα της ευσταθούς και ασταθούς πολλαπλότητας των σταθερών σημείων. Για αρκετά μεγάλο m, το $f^m(L_\varepsilon(\beta))$ θα τέμνει και τα δυο τμήματα της ευσταθούς πολλαπλότητας που συνορεύουν με τη σκιασμένη περιοχή.

Σ' αυτό το σημείο, θυμίζουμε αυτό που είπαμε προηγουμένως, ότι δηλαδή, οι εικόνες της διαμέτρου $L_\varepsilon(\beta)$ ενός μικρού δίσκου $D_\varepsilon(\beta)$ ακτίνας ε μεγαλώνουν εκθετικά ευθυγραμμίζοντας τον εαυτό τους με την ασταθή πολλαπλότητα. Για αρκετά μεγάλο m, η εικόνα $f^m(\beta)$ θα βρίσκεται μέσα στην σκιασμένη περιοχή του σχ. [3.12], και η εικόνα $f^m(L_\varepsilon(\beta))$ θα είναι αρκετά μεγάλη ώστε να τέμνει και τα δυο τμήματα της ευσταθούς πολλαπλότητας που συνορεύουν με τη σκιασμένη περιοχή στην οποία βρίσκεται η $f^m(L_\varepsilon(\beta))$. Αυτά τα τμήματα ευσταθούς πολλαπλότητας είναι Wada και οπότε περιέχουν κόκκινες, πράσινες και μπλε ραβδωτές περιοχές μαζεμένες πάνω τους. Κατά συνέπεια, απεικονίζοντας προς τα πίσω το $f^m(\beta)$ προς το συνοριακό σημείο β βλέπουμε ότι υπάρχουν κόκκινες, πράσινες και μπλε ραβδωτές περιοχές μέσα στο $D_\varepsilon(\beta)$ και από τις δυο πλευρές του β. Εφόσον το ε μπορεί να τεθεί αυθαίρετα μικρό, μικρές κόκκινες, πράσινες και μπλε ραβδωτές περιοχές βρίσκονται αυθαίρετα κοντά στο β και από τις δυο πλευρές του. Συμπεραίνουμε ότι το β δεν είναι προσβάσιμο αφού οποιαδήποτε καμπύλη που να συνδέει εσωτερικό σημείο με αυτό θα πρέπει οπωσδήποτε να τέμνει τέτοιου είδους ραβδωτές περιοχές (και μάλιστα μια απειρία αυτών).

3.7 Συμπεράσματα

Στην ενότητα αυτή, μελετήσαμε το φαινόμενο της σκέδασης σωματιδίου από σύστημα τριών δίσκων. Είδαμε ότι υπάρχουν τρεις πιθανές έξοδοι διαφυγής του σωματιδίου από την περιοχή σκέδασης και ότι υπάρχει ευαίσθητη εξάρτηση της τελικής διεξόδου του σωματιδίου από τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος. Επιπλέον δείξαμε ότι το σύστημα αυτό παρουσιάζει την πολύ σημαντική ιδιότητα Wada η οποία μας λέει ότι κάθε αρχική συνθήκη που βρίσκεται στα όρια μιας από τις τρεις εξόδους βρίσκεται ταυτόχρονα και στα όρια των άλλων δύο εξόδων.

Ένα παράδειγμα φυσικού συστήματος που παρουσιάζει την ιδιότητα Wada βρίσκεται στην Αστρονομία. Θεωρώντας ένα σύστημα τριών ουρανίων σωμάτων, που αποτελείται από ένα περιστρεφόμενο διπλό σύστημα αστέρων και ένα «δοκιμαστικό» σώμα, το οποίο αλληλεπιδρά με το διπλό σύστημα, έχουμε το φαινόμενο της βαρυτικής σκέδασης. Ωστόσο, ποιο από τα τρία σώματα θα διαφύγει από το σύστημα, μετά την αλληλεπίδραση, εξαρτάται με μεγάλη ευαισθησία από τις αρχικές συνθήκες του συστήματος, εμφανίζεται και εδώ το φαινόμενο Wada , αφού έχουνε τρία πιθανά, τελικά αποτελέσματα.

Άλλα παραδείγματα τέτοιων συστημάτων αναφέρονται από τους Grebogi et.al., Kennedy & Yorke και Nusse et.al. Βλέπουμε λοιπόν, πόσο κοινή είναι η ιδιότητα Wada στη Φύση. Συστήματα με περισσότερες των δύο εξόδων διαφυγής είναι πολύ πιθανό να την κατέχουν.

Κεφάλαιο IV

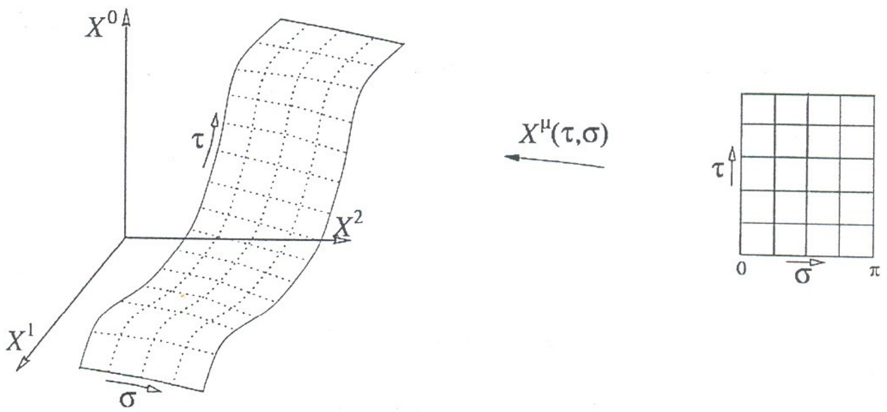
Χαοτική σκέδαση χορδής από μελανή οπή

4.1 Εισαγωγή

Σ΄ αυτήν την ενότητα, μελετάται η σκέδαση και η απαγωγή κυκλικής κοσμικής χορδής από μελανή οπή Schwarzschild. Παρόλο που αποτελεί απλό αξονικά συμμετρικό πρόβλημα δύο σωμάτων, παρουσιάζει όλα τα στοιχεία της χαοτικής σκέδασης. Ειδικά περιέχει ένα μορφοκλασματικό σύνολο από ασταθείς περιοδικές λύσεις, που ονομάζεται παράξενος απώστης (*strange repellor*). Θα εξετάσουμε λοιπόν τα διαφορετικά είδη τροχιών και θα επιχειρήσουμε να βρούμε τη μορφοκλασματική διάσταση της συνοριακής περιοχής που διαχωρίζει τον χώρο αρχικών συνθηκών σχετικά με τις διάφορες ασυμπτωτικές λύσεις. Επίσης θα μελετήσουμε την μορφοκλασματική διάσταση της συνοριακής περιοχής σαν συνάρτηση της ενέργειας.

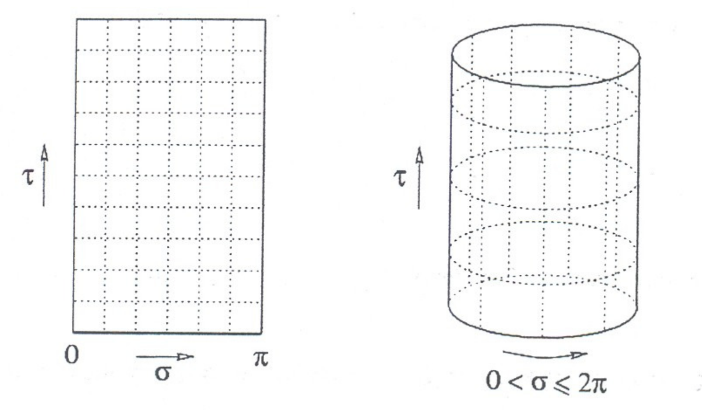
4.2 Εύρεση των εξισώσεων κίνησης

Ως χορδή θεωρείται ένα αντικείμενο μονοδιάστατο το οποίο καθώς κινείται στο χρόνο διαγράφει ένα δισδιάστατο «σεντόνι» (worldsheet), με συντεταγμένες $(\xi^0,\xi^1)=(\tau,\sigma)$ όπου το σ είναι η χωρική συντεταγμένη ενώ το τ η χρονική (ο ιδιοχρόνος).



Σχ.[4.1α]: Η χορδή παραμετροποιείται από 2 παραμέτρους, μια χωρική την σ και μια χρονική το τ

Υπάρχουν δυο δυνατές τοπολογίες για την χορδή, ανοιχτή όπου θεωρούμε ότι $0 \le \sigma \le \pi$ και κλειστή όπου $0 \le \sigma \le 2\pi$. Η εξέλιξη της χορδής περιγράφεται από τα $x^{\mu}(\tau,\sigma)$, με μ=0,1,2,…,D-1 στον D-διάστατο χωροχρόνο.



Σχ.[4.1β]: Η χορδή μπορεί να είναι είτε ανοιχτή είτε κλειστή

Σε καμπυλωμένο χώρο, η δράση δίνεται από την σχέση:

$$S = -T \int d\tau d\sigma \sqrt{-g}$$

όπου g η ορίζουσα του μετρικού τανυστή $g_{ab} = \partial_a x^{\mu} \partial_b x^{\nu} G_{\mu\nu}$ που επάγεται στην κοσμική επιφάνεια.

Προκύπτει ότι:

$$S = \frac{T}{2} \int d\tau d\sigma \left[\dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} G_{\mu\nu} - x'^{\mu} x'^{\nu} G_{\mu\nu} \right]$$

άρα η Λαγκραζιανή είναι:

$$L = -T\sqrt{-g} = \frac{T}{2}\left[\dot{x}^{\mu} \dot{x}^{\nu} G_{\mu\nu} - x'^{\mu} x'^{\nu} G_{\mu\nu} \right]$$

Οι εξισώσεις κίνησης προκύπτουν από τις εξισώσεις Euler-Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^{\rho}} \right) + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial L}{\partial x'^{\rho}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^{\rho}} = 0$$

Τελικά, οι εξισώσεις κίνησης κλασικής χορδής σε καμπυλωμένο χώρο, N διαστάσεων, μετρικής $ds^2 = G_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ δίνονται από την παρακάτω σχέση:

$$\ddot{x}^m - x''^m = \Gamma^m_{\mu\nu}[x'^\mu x'^\nu - \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu]$$

όπου $\Gamma^m_{\mu\nu} = \frac{1}{2} G^{m\rho}(G_{\rho\nu,\mu} + G_{\rho\mu,\nu} + G_{\mu\nu,\rho})$ τα σύμβολα Christoffel, με $m, \mu, \nu, \rho = 0,1,\ldots,N-1$.

Η μετρική του χώρου γύρω από μελανή οπή τύπου Schwarzschild είναι:

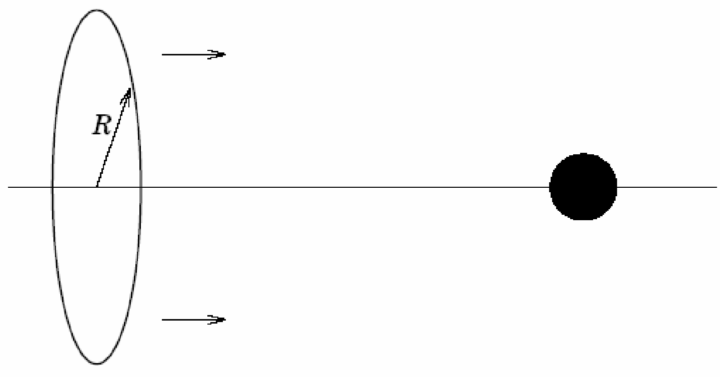
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \qquad (4.1)$$

όπου $M = \frac{r_s}{2}$, και r_s η ακτίνα Schwarzschild.

Επιτρέπουμε στην χορδή να ταλαντώνεται στο επίπεδο της και να κινείται σε επίπεδο κάθετο με το δικό της, όποτε το κατάλληλο ansatz για παραμετροποίηση της κυκλικής χορδής είναι:

$x^0 = t(\tau),\ x^1 = r(\tau),\ x^2 = \theta(\tau),\ x^3 = \phi = \sigma$

όπου τ η χρονική παράμετρος της χορδής ενώ η γωνία ϕ ορίζει μονοσήμαντα σημείο της χορδής.



Σχ.[4.1γ]: Η κυκλική χορδή όπως πλησιάζει την μελανή οπή

Η εύρεση των εξισώσεων κίνησης προϋποθέτει τον υπολογισμό των συμβολών Christoffel. Από την (4.1) έχουμε ότι:

$$G_{00} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right),\ G^{00} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},\ G_{11} = \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1},\ G^{11} = 1-\frac{2M}{r}$$

$$G_{22} = r^2,\ G^{22} = \frac{1}{r^2},\ G_{33} = r^2 \sin^2\theta,\ G^{33} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$$

οπότε εφόσον $G_{ii,j} = \dfrac{\partial G_{ii}}{\partial x^j}$

$$\begin{aligned} G_{00,1} &= -\frac{2M}{r} \\ G_{11,1} &= -\frac{2M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-2} \\ G_{22,1} &= 2r \\ G_{33,1} &= 2r\sin^2\theta \\ G_{33,2} &= r^2 \sin 2\theta \end{aligned} \tag{4.2}$$

Έπειτα από πράξεις προκύπτει ότι τα μη μηδενικά σύμβολα Christoffel είναι τα παρακάτω:

$$\Gamma^1_{01} = \Gamma^0_{10} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$
$$\Gamma^1_{00} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$
$$\Gamma^1_{11} = -\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$$
$$\Gamma^1_{22} = -r\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$
$$\Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$
$$\Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^2_{33} = -\frac{\sin 2\theta}{2} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^3_{13} = \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^3_{32} = \tan\theta$$

Συνεπώς για την συνιστώσα $x^0 = t$ η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\ddot{t} + 2\frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{t}\dot{r} = 0 \Rightarrow d\left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}\right] = 0$$
$$\Rightarrow \dot{t} = E\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \tag{4.3}$$

Η κίνηση της χορδής περιορίζεται από συγκεκριμένους δεσμούς:

$$P_\mu x'^\mu = 0 \xrightarrow{P_\mu = T\dot{x}_\mu} T\dot{x}_\mu x'^\mu = 0 \Rightarrow \dot{x}_\mu x'^\mu = 0$$
$$\Rightarrow \dot{x}^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} = 0 \tag{4.4}$$

$$P^\mu P_\mu + T^2 x'^2 = 0 \Rightarrow T\dot{x}^\mu T\dot{x}_\mu + T^2 x'^2 = 0$$
$$\Rightarrow G_{\mu\nu}(\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + x'^\mu x'^\nu) = 0 \tag{4.5}$$

Ο δεσμός (4.5) γράφεται:

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^2 \dot{t}^2 + \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\left(1-\frac{2M}{r}\right) + r^2\sin^2\theta\left(1-\frac{2M}{r}\right) = 0$$

Λόγω της (4.3) ισχύει τελικά ότι:

$$\dot{r}^2 + (r^2 - 2Mr)(\dot{\theta} + \sin^2\theta) = E^2 \tag{4.6}$$

Για την συνιστώσα $x^1 = r$ η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\ddot{r} + \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 - \frac{M}{r^2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{\theta}^2 + r\sin^2\theta\left(1-\frac{2M}{r}\right) = 0$$

Λόγω της (4.3) και της (4.6) ισχύει τελικά ότι:

$$\ddot{r} = (r-3M)\dot{\theta}^2 - (r-M)\sin^2\theta \tag{4.7}$$

Για την συνιστώσα $x^2 = \theta$ η εξίσωση κίνησης γράφεται:

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} + \sin\theta\cos\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta \tag{4.8}$$

Για την συνιστώσα $x^3 = \phi$ προκύπτει ότι η εξίσωση κίνησης ικανοποιείται ταυτοτικά. Επομένως οι εξισώσεις κίνησης είναι οι (4.3), (4.7), (4.8) ενώ ο δεσμός εκφράζεται από τη (4.6). Η σταθερά Ε αντιπροσωπεύει την συνολική ενέργεια του συστήματος και διατηρείται. Αποτελεί εξωτερική ρυθμιζόμενη παράμετρο.

4.3 Η αντίστοιχη Χαμιλτονιανή

Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να προκύψουν και από την Χαμιλτονιανή του προβλήματος:

$$H = P_t \dot{t} + P_r \dot{r} + P_\theta \dot{\theta} - L = 0 \tag{4.9}$$

Θεωρώντας ότι η τάση της χορδής είναι $T = 1$, η Λαγκραζιανή γράφεται:

$$L = \frac{T}{2}\left[\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu G_{\mu\nu} - x'^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} \right] = \frac{1}{2}\left[\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu G_{\mu\nu} - x'^\mu x'^\nu G_{\mu\nu} \right]$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}\left[-\dot{t}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) + \dot{r}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} + r^2 \dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2\theta \right]$$

Άρα,

$$P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = \frac{1}{2}\left[-2\dot{t}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right] \Rightarrow \dot{t} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} P_t \tag{4.10}$$

$$P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{1}{2}\left[2\dot{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \right] \Rightarrow \dot{r} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) P_r \tag{4.11}$$

$$P_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \dot{\theta} r^2 \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{P_\theta}{r^2} \tag{4.12}$$

Μετά από λίγες εύκολες πράξεις καταλήγουμε στην εξής έκφραση για την Χαμιλτονιανή:

$$H = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right) P_r^2 + \frac{1}{2r^2} P_\theta^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} P_t^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin^2\theta$$

η οποία λόγω των (4.7) και (4.10) γίνεται:

$$H = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)P_r^2 + \frac{1}{2r^2}P_\theta^2 - \frac{1}{2}\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}E^2 + \frac{1}{2}r^2\sin^2\theta \tag{4.13}$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί την Χαμιλτονιανή που περιγράφει το σύστημα μας. Παρατηρούμε ότι στην έκφραση της δεν εμφανίζεται το τ, γεγονός που σημαίνει ότι αυτή αποτελεί ισοσταθμική επιφάνεια. Είναι δηλαδή ολοκλήρωμα της κίνησης και αντί για τετρα-παραμετρική οικογένεια καμπυλών προκύπτει μια τρι-παραμετρική.

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η επιφάνεια που αντιστοιχεί στις εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε αρχικά είναι η:

$$H = 0 \tag{4.14}$$

Παρακάτω χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Hamilton και την (4.14) επαληθεύεται η αντιστοιχία με τις (4.3), (4.7), (4.8) .

-Επαλήθευση της (4.3)

$$\dot{t} = \frac{\partial H}{\partial P_t} = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1} P_t \tag{4.15}$$

$$\dot{P}_t = -\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \Rightarrow P_t = const = -E \tag{4.16}$$

δηλαδή

$$\dot{t} = E\left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}$$

-Επαλήθευση της (4.8)

$$\dot{\theta} = \frac{\partial H}{\partial P_\theta} = \frac{P_\theta}{r^2} \tag{4.17}$$

$$\dot{P}_\theta = -\frac{\partial H}{\partial \theta} = -r^2 \sin\theta\cos\theta \tag{4.18}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{r^2}\dot{P}_\theta - \frac{2}{r^3}\dot{r}P_\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = -\sin\theta\cos\theta - \frac{2}{r}\dot{\theta}\dot{r}$$

-Επαλήθευση της (4.7)

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial P_r} = P_r\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{4.19}$$

$$\dot{P}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = -E^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}\frac{M}{r^2} - P_r^{\,2}\frac{M}{r^2} + \frac{1}{r^3}P_\theta^{\,2} - r\sin^2\theta \tag{4.20}$$

Όμως

$$H = 0 \Rightarrow P_r^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E^2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \frac{1}{r^2}P_\theta^{\,2} - r^2\sin\theta \tag{4.21}$$

$$\ddot{r} = \dot{P}_r\frac{2M}{r^2} + P_r\frac{2M}{r^2}\dot{r} = \dot{P}_r\left(1 - \frac{2M}{r}\right) + P_r^{\,2}\frac{2M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$$

Μετά από μερικές πράξεις καταλήγουμε στην ζητούμενη εξίσωση:

$$\ddot{r} = (r - 3M)\dot{\theta}^2 - (r - M)\sin^2\theta$$

Ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με την χορδή θα έβλεπε ότι αυτή πέφτει προς τον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής, και πέφτει προς το εξωτερικό της, σε πεπερασμένο χρόνο. Αντίθετα ένας εξωτερικός παρατηρητής θα έβλεπε τη χορδή να πλησιάζει στον ορίζοντα γεγονότων και να φτάνει σε άπειρο χρόνο όπως φαίνεται και από τη σχέση (4.3). Τα ίδια θα συνέβαιναν για ένα σημειακό σωματίδιο, η χορδή αποτελεί ουσιαστικά μια λογική γενίκευση του σωματιδίου.

Η μορφή της Χαμιλτονιανής που περιγράφει το σύστημα μας μοιάζει πολύ με την Χαμιλτονιανή ενός φωτονίου μηδενικής γωνιακής ορμής σε χώρο Schwarzschild , εκτός από τον τελευταίο όρο που οφείλεται στην τάση της χορδής. Αυτός ο όρος είναι ακριβώς που οδηγεί στην μη ολοκληρωσιμότητα και, όπως θα δούμε, στο χάος.

4.5 Το μορφοκλασματικό συνολο

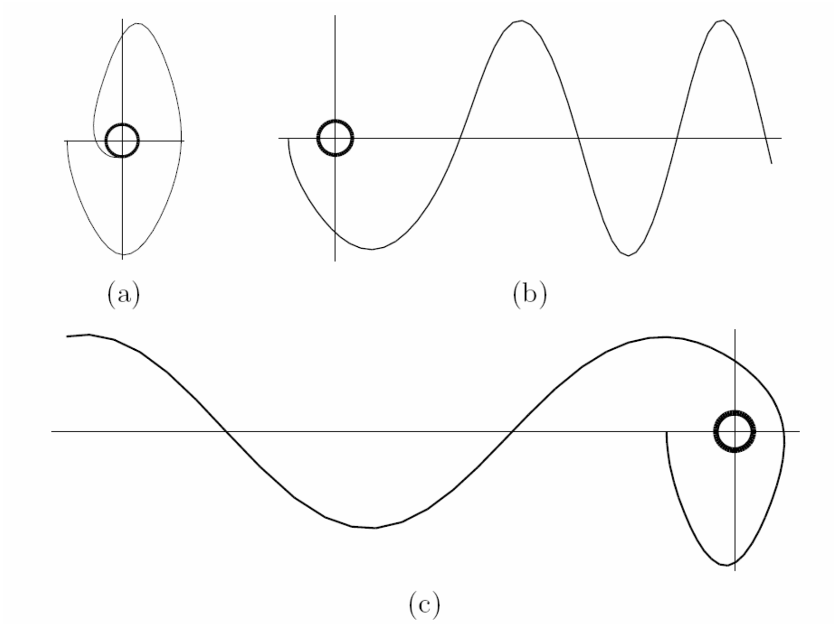
Οι διαφορικές εξισώσεις στις οποίες καταλήξαμε δεν ολοκληρώνονται αναλυτικά. Κατά συνέπεια ολοκληρώνουμε αριθμητικά τις παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιώντας τον δεσμό για έλεγχο. Για το πρόβλημα αυτό, η κλασική μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης σταθερού βήματος δεν αρκεί. Για πολλές τροχιές ο δεσμός δεν επαληθεύεται μετά από κάποιο αριθμό βημάτων. Πολύ καλύτερα αποτελέσματα επιτυγχάνονται με την χρήση της μεθόδου Runge-Kutta 5ης τάξης, μεταβλητού βήματος, που προτείνει το *Numerical Recipes* (βλ. Παράρτημα II). Δεν κρίθηκε σκόπιμο να παρατεθεί το πρόγραμμα υλοποίησης σε C++ διότι οι αλλαγές που έγιναν στον κώδικα που προτείνει το γνωστό αυτό εγχειρίδιο ήταν ελάχιστες και αφορούν κυρίως την εισαγωγή των εξισώσεων, τη ρύθμιση και τον έλεγχο των διαφόρων παραμέτρων.

Οι τροχιές τις οποίες μπορεί να διαγράψει η χορδή χωρίζονται σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες (σχ.[4.2]):

1. Η χορδή ξεκινώντας από κάποια απόσταση από τη μελανή οπή έλκεται από αυτή και καθώς την πλησιάζει ταλαντώνεται, φαίνεται να την προσπερνάει και να συνεχίζει να κατεβαίνει τον άξονα της, αλλά τελικά γυρνάει πίσω και εγκλωβίζεται από αυτήν. Πλέον δεν φεύγει ποτέ από το εσωτερικό της (εγκλωβισμός, για $r \leq 2M$).

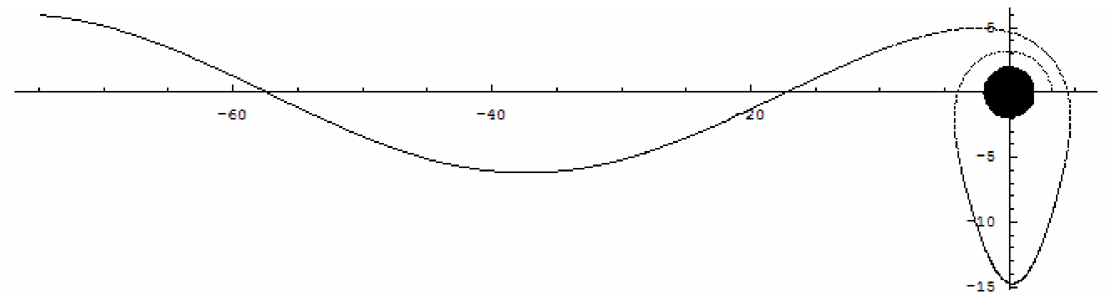
2. Η χορδή πλησιάζει την μελανή οπή, καταφέρνει να ξεφύγει από την έλξη της, συνεχίζει την πορεία της κατά τον άξονα της απομακρυνόμενη στο άπειρο από τα δεξιά (σκέδαση στο $(r,\theta) = (\infty,\pi)$), αυξομειώνοντας την ακτίνα της.

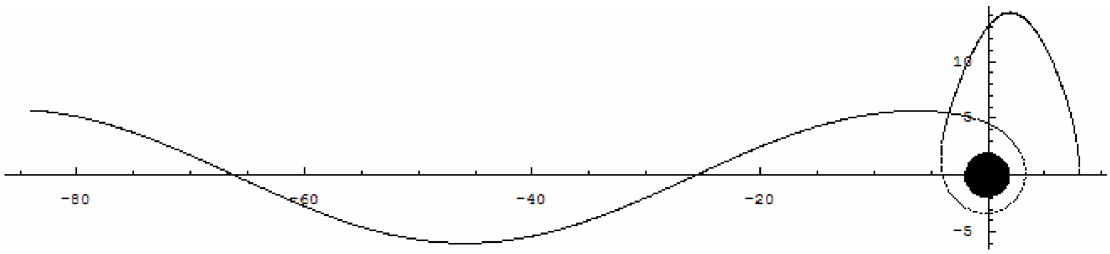
3. Η χορδή καθώς πλησιάζει τον ορίζοντα γεγονότων της μελανής οπής φαίνεται να ελκύεται από αυτήν, αλλά τελικά καταφέρνει να απομακρυνθεί από αυτήν, απομακρυνόμενη στο άπειρο, από τα αριστερά (οπισθοσκέδαση στο $(r,\theta) = (\infty,0)$), αυξομειώνοντας την ακτίνα της.

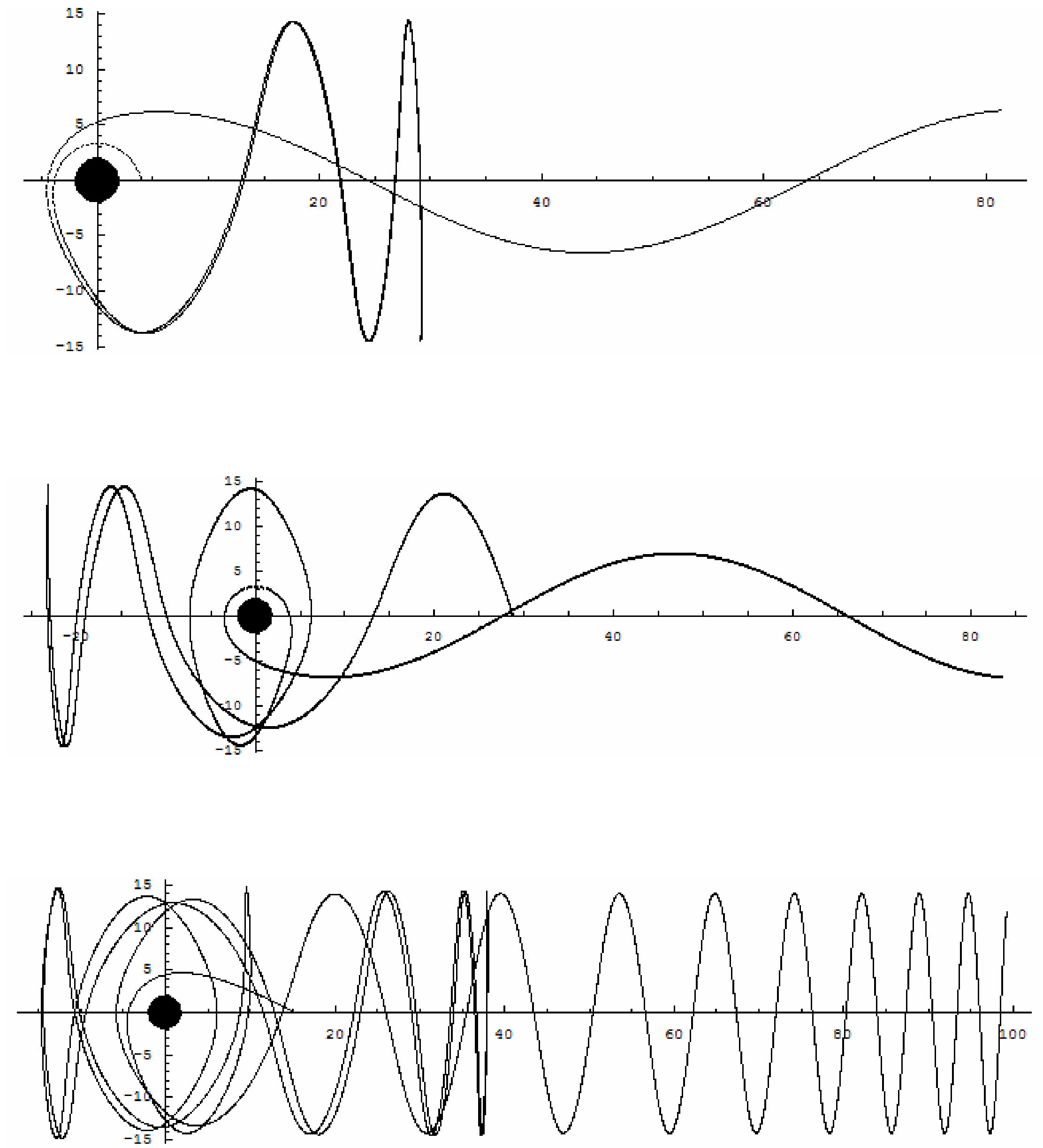


Σχ.[4.2]: Τα τρία είδη τροχιών που συναντάμε στο πρόβλημα: α) Εγκλωβισμός, β) σκέδαση στο (r,θ) = (∞,π), γ) οπισθοσκέδαση στο (r,θ) = (∞,0)

Παρακάτω φαίνονται κάποιες τέτοιες τροχιές που προέκυψαν υπολογιστικά:

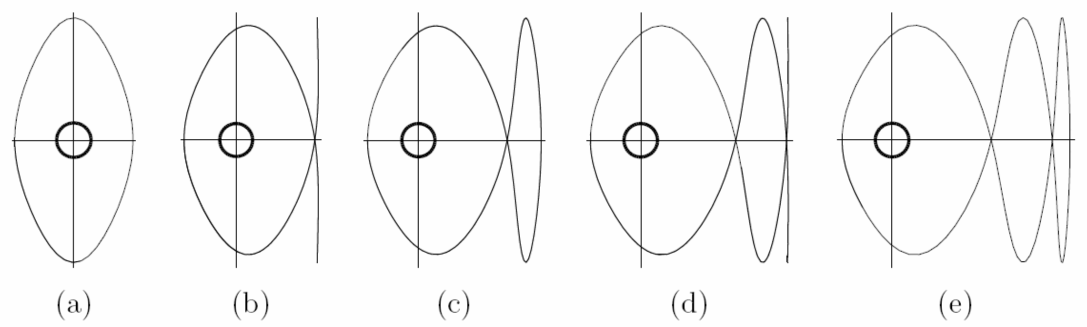






Σχ.[4.3]: Παραδείγματα τροχιών που προέκυψαν υπολογιστικά

Φυσικά, εκτός από τις παραπάνω τρεις, γενικές περιπτώσεις κίνησης της χορδής, υπάρχουν και άλλες, πιο ειδικές τροχιές. Για παράδειγμα, υπάρχει ένα άπειρο σύνολο ασταθών περιοδικών τροχιών (το σχήμα των οποίων εξαρτάται από την αρχική θέση της χορδής σε σχέση με τη μελανή οπή), οι οποίες χωρίζουν το χώρο φάσεων σε περιοχές με διαφορετική ασυμπτωτική συμπεριφορά της χορδής. Πιθανότατα δεν υπάρχουν ευσταθείς περιοδικές τροχιές στο συγκεκριμένο σύστημα, μιας και δεν βρέθηκε καμία κατά τη μελέτη του.

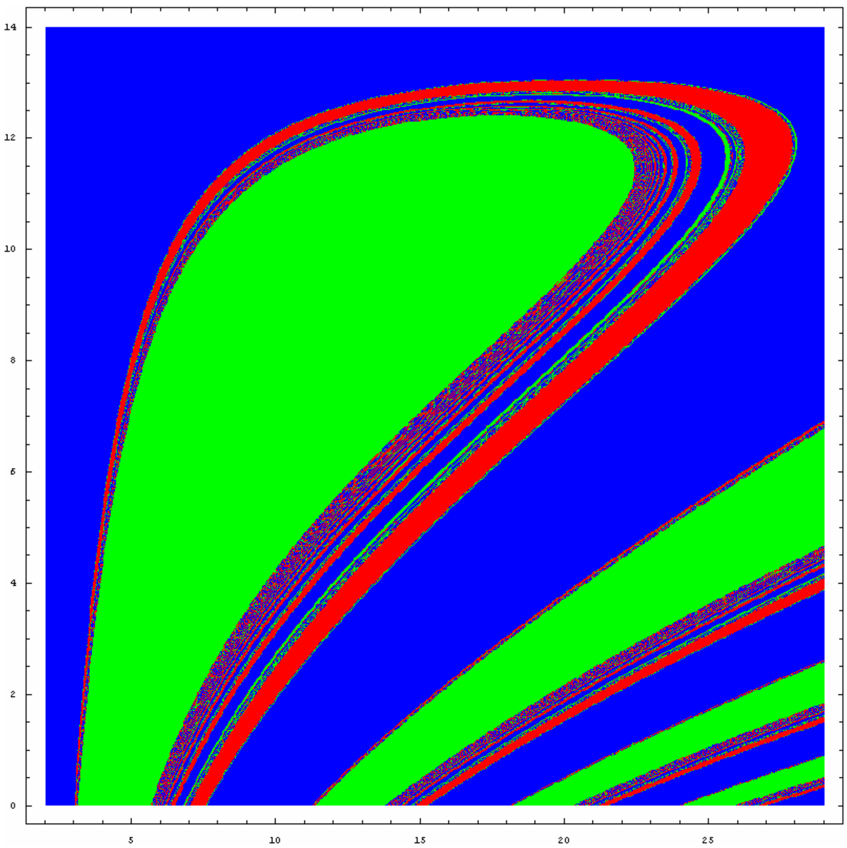


Σχ.[4.4]: Ορισμένες ασταθείς περιοδικές τροχιές

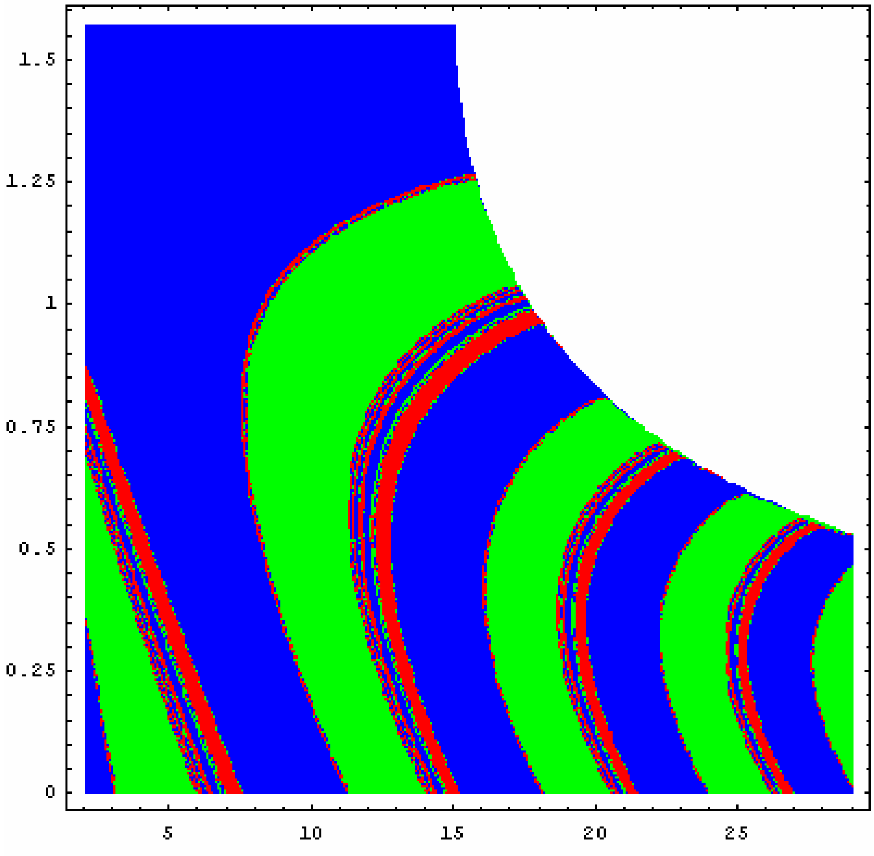
Οι άξονες στα παραπάνω διαγράμματα είναι στον κατακόρυφο άξονα $R = r\sin\theta$, και στον οριζόντιο $Z = r\cos\theta$, όπου R η ακτίνα της χορδής. Τέλος, ως περίοδος στο αυτόνομο σύστημα που μελετάμε ορίζεται ο μισός αριθμός των φορών που η τροχιά τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ο χώρος φάσεων είναι τεσσάρων διαστάσεων (εφόσον δεν εμφανίζεται ο χρόνος στη Χαμιλτονιανή συμπεραίνουμε ότι το σύστημα είναι αυτόνομο). Επειδή όμως υπάρχει ένας δεσμός, όπως τον υπολογίσαμε, έχουμε να αντιμετωπίσουμε έναν τρισδιάστατο χώρο φάσεων, με την προϋπόθεση ότι συγκεκριμενοποιούμε την ενέργεια της χορδής. Για ευκολία, θα θέσουμε έναν επιπλέον περιορισμό ανάμεσα στις αρχικές τιμές των παραμέτρων r και θ (αφού τελικά αυτές οι παράμετροι αποτελούν τις απαραίτητες συντεταγμένες για τη περιγραφή του συστήματος, δεδομένου ότι το σ δεν εμφανίζεται στις εξισώσεις και επιπλέον υπάρχει κυκλική συμμετρία) και των παραγώγων τους, για $\tau = 0$. Παίρνουμε έτσι, μια δισδιάστατη τομή του χώρου φάσεων.

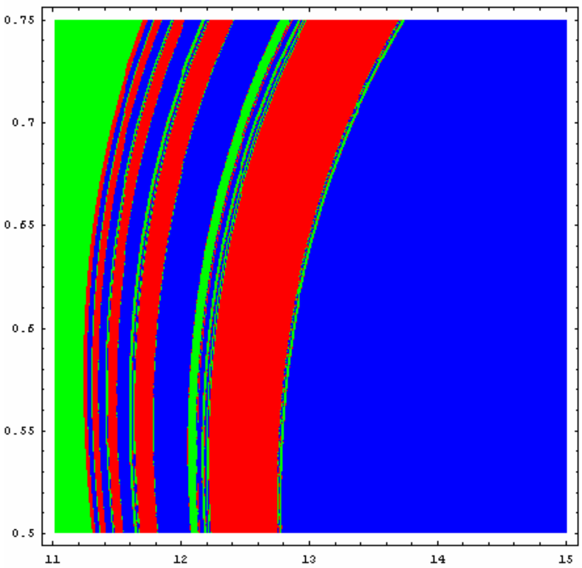
Ακολουθώντας την ίδια μεθοδολογία με αυτήν που περιγράψαμε στα προηγούμενα παραδείγματα χρωματίζουμε τώρα την τομή αυτή με διαφορετικά χρώματα ανάλογα με τον τύπο τροχιάς που ακολουθεί η χορδή. Λόγω τις αδυναμίας να οριστεί αριθμητικά το άπειρο, θεωρήθηκε ότι η τροχιά πέρα από μια αρκετά μεγάλη απόσταση δεν αλλάζει συμπεριφορά. Αυτό δεν αποτελεί ουσιαστικό πρόβλημα αφού από την ασυμπτοτική συμπεριφορά του δυναμικού προκύπτει ότι με αυτόν τον τρόπο οι λανθάνουσες προβλέψεις είναι ελάχιστες μέσα στο σύνολο. Τελικά προκύπτουν τα παρακάτω σχήματα ανάλογα με την τομή που παίρνουμε. Το σχ.[4.5α] μας δείχνει το επίπεδο $\theta = 0$, με $r \in [2M, 29.2M]$ στον οριζόντιο άξονα και $-\dot{r} \in [0, E]$ στον κατακόρυφο. Το σχ.[4.5β] μας δίνει το επίπεδο $d(r\cos\theta)/dt = 0$ για $r \in [2M, 27.5M]$ στον οριζόντιο άξονα και $\theta \in [0, \pi/2]$ στον κατακόρυφο. Τα σχ.[4.5γ] και σχ.[4.5δ] αποτελούν διαδοχικές μεγεθύνσεις του σχ.[4.5β].



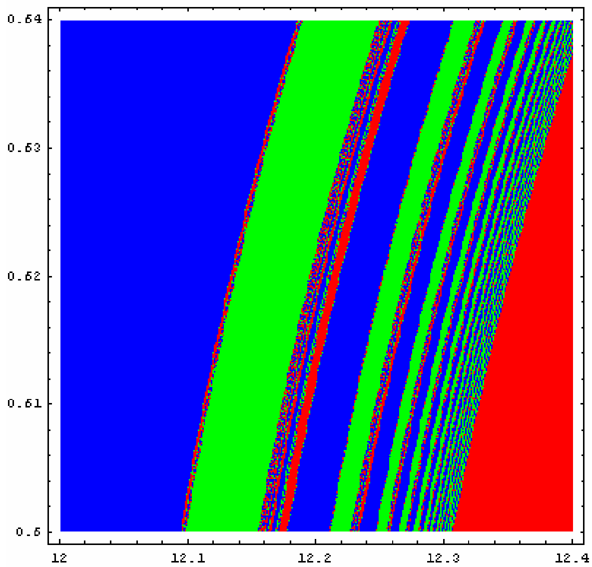
(α)



(β)



(γ)



(δ)

Σχ.[4.5]:Το (α) μας δείχνει το επίπεδο $\theta = 0$, με $r \in [2M, 29.2M]$ στον οριζόντιο άξονα και $-\dot{r} \in [0, E]$ στον κατακόρυφο. Το (β) μας δίνει το επίπεδο $d(r\cos\theta)/dt = 0$ για $r \in [2M, 27.5M]$ στον οριζόντιο άξονα και $\theta \in [0, \pi/2]$ στον κατακόρυφο. Τα (γ) και (δ) είναι διαδοχικές μεγεθύνσεις του (β).

Από τα παραπάνω σχήματα, και κυρίως από τις μεγεθύνσεις, παρατηρούμε ότι εμφανίζεται ένα μορφοκλασματικό σύνολο στις οριακές περιοχές αρχικών συνθηκών. Δηλαδή, μια μικρή αβεβαιότητα στις αρχικές συνθήκες οδηγεί το σύστημα μας σε τελείως διαφορετική συμπεριφορά. Στην περίπτωση μας οι αρχικές συνθήκες είναι η αρχική θέση της χορδής (r,θ), καθώς και η αρχική ενέργεια της *E*. Έτσι, η χορδή έστω ότι με κάποιες συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες καταλήγει να εγκλωβιστεί από τη μελανή οπή. Εάν δώσουμε πολύ κοντινές στις προηγούμενες αρχικές συνθήκες, η χορδή μπορεί να καταλήξει να διαφύγει στο άπειρο. Υπάρχει λοιπόν το φαινόμενο της ευαίσθητης εξάρτησης από τις αρχικές συνθήκες.

Επιπλέον, παρατηρώντας τα σχήματα βλέπουμε ότι το μορφοκλασματικό σύνολο εμφανίζεται στα όρια του χώρου φάσεων που χωρίζουν τις διαφορετικές περιοχές μεταξύ τους. Το παραπάνω μας λέει ότι σε αυτές τις περιοχές δεν μπορούμε σε καμία περίπτωση να γνωρίζουμε ποια θα είναι η τελική κατάσταση της χορδής. Είναι σαν η χορδή να βρίσκεται «ταυτόχρονα» και στις τρεις πιθανές τελικές καταστάσεις 1,2,3. Έτσι αυτό το πρόβλημα θυμίζει κατά πολύ την κατάσταση που συναντήσαμε στο πρόβλημα της σκέδασης από τους τρεις δίσκους και πιθανότατα και αυτό το σύστημα να παρουσιάζει την ιδιότητα Wada.

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε[1] τη διάσταση του μορφοκλασματικού συνόλου που αντιστοιχεί στη δισδιάστατη τομή

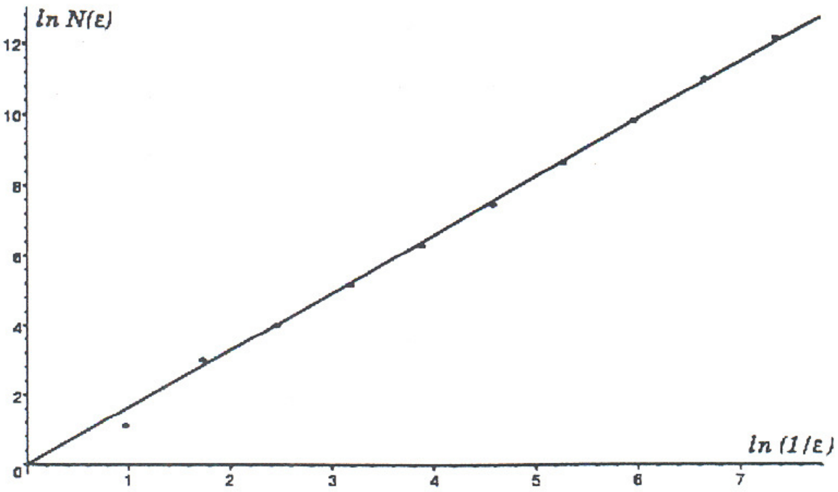
$$E = 14.0M \ , \ \frac{d}{d\tau}(r\cos\theta) = 0 \text{, για } \tau = 0 .$$

Ως γνωστόν, η διάσταση ενός μορφοκλασματικού συνόλου δίνεται από τον τύπο:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(\varepsilon^{-1})}$$

όπου N(*ε*) είναι ο αριθμός των τετραγώνων πλευράς *ε* που χρειάζονται να καλύψουν όλο το όριο που χωρίζει τις διαφορετικές περιοχές στο προηγούμενο σχήμα. Τα παραπάνω τετράγωνα λαμβάνονται υπόψη στην καταμέτρηση μόνο εάν περιέχουν περισσότερα από ένα χρώματα. Το αποτέλεσμα της σχέσης υπολογίζεται αριθμητικά από την κλίση της ευθείας που προκύπτει σε ένα διάγραμμα $\ln N(\varepsilon) = f(\ln \varepsilon^{-1})$.

[1] Οι παρακάτω αριθμητικοί υπολογισμοί δίνονται όπως δημοσιεύτηκαν από τους Andrei V.Frolov και Arne L.Larsen



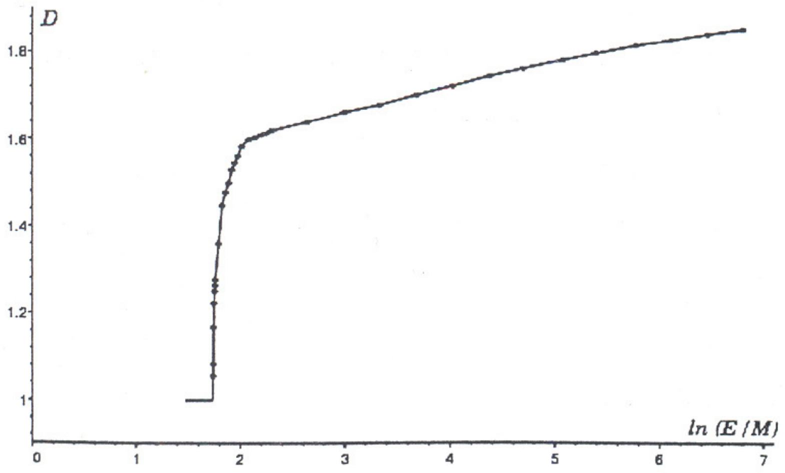
Σχ.[4.6]:Η κλίση της ευθείας μας δίνει την διάσταση D

Χρησιμοποιώντας ανάλυση 4000×3200 σημεία βρίσκεται ότι για την συγκεκριμένη ενέργεια ($E = 14.0M$) έχουμε ότι:

$$D = 1.65 \pm 0.03$$

όπου το σφάλμα προέκυψε λόγω του πεπερασμένου αριθμού σημείων που χρησιμοποιήθηκαν. Όσο περισσότερα σημεία λαμβάνονται υπ όψιν, τόσο μικρότερο θα είναι και το σφάλμα στη διάσταση. Φυσικά, το γεγονός ότι η διάσταση του περίεργου αυτού συνόλου προέκυψε να είναι ημιακέραια επιβεβαιώνει ότι το σύνολο που μελετήθηκε είναι όντως μορφοκλασματικό.

Τέλος, μελετάται η εξάρτηση της διάστασης D με την ενέργεια της χορδής E. Εφόσον διαφορετικές τιμές της ενέργειας επηρεάζουν σημαντικά το αποτέλεσμα της κίνησης της χορδής αναμένουμε ότι οι δύο αυτές παράμετροι θα συνδέονται με κάποια σχέση. Δουλεύοντας στην ίδια δισδιάστατη τομή, όπως και προηγουμένως, και για ενέργειες στο διάστημα $E \in [0, 10^3 M]$ προκύπτει το παρακάτω σχήμα:



Σχ.[4.7]:Η διάσταση του συνόλου συναρτήσει της ενέργειας της χορδής

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτουν τα εξής:

- Για τιμές της ενέργειας μικρότερες του 4.37M η δυναμική του προβλήματος είναι τελείως ομαλή. Η μοναδική πιθανή κατάληξη της χορδής είναι ο εγκλωβισμός και δεν υπάρχουν γραμμές που να χωρίζουν τον χώρο των αρχικών συνθηκών.
- Για μεγαλύτερες τιμές της ενέργειας μεταξύ 4.37M και 5.67M αρχίζει να εμφανίζεται περίπλοκη συμπεριφορά εφόσον υπάρχει πιθανή κατάληξη της χορδής σε περισσότερες από μια καταστάσεις. Ωστόσο, κάτι τέτοιο γίνεται με ομαλό ακόμα τρόπο. Στο χώρο των αρχικών συνθηκών παρατηρούνται γραμμές διάστασης 1 και επομένως $D=1$.
- Για ενέργειες μεγαλύτερες από 5.67M εμφανίζεται χαοτική συμπεριφορά, που εκδηλώνεται με μια δραματική εξάρτηση της διάστασης D με την ενέργεια. Για μικρές αλλαγές στην ενέργεια πέρα από την τιμή 5.67M η διάσταση D μεταβάλλεται από την τιμή 1 στην τιμή 1.6 ! Η αύξηση της διάστασης D σε μεγαλύτερες ενέργειες είναι λιγότερο απότομη.

4.5 Συμπεράσματα

Στην παραπάνω ανάλυση θεωρήσαμε το αξονικά συμμετρικό πρόβλημα της κίνησης μιας κυκλικής χορδής σε καμπυλωμένο χωροχρόνο Schwarzschild. Μελετώντας αριθμητικά τις εξισώσεις κίνησης είδαμε ανάλογα με τις αρχικές συνθήκες που δίνονται στη χορδή υπάρχουν τρεις διαφορετικές περιπτώσεις για την τελική κατάσταση της. Έτσι, είναι δυνατόν η χορδή να εγκλωβιστεί για πάντα μέσα στη μελανή οπή, ή να την προσπεράσει χωρίς να αλλάξει κατεύθυνση, ή να την προσπεράσει με οπισθοσκέδαση. Είδαμε επίσης ότι για ενέργειες αρκετά μεγάλες εμφανίζεται ένα μορφοκλασματικό σύνολο στα όρια του χώρου των αρχικών συνθηκών που αντιστοιχεί σε χαοτική δυναμική του συστήματος. Μάλιστα η εμφάνιση του χάους γίνεται πολύ απότομα πέρα από μια συγκεκριμένη κριτική τιμή.

Επιπλέον, εφόσον το σύστημα παρουσιάζει περισσότερες από δύο τελικές καταστάσεις και κρίνοντας από την μορφή του χώρου των αρχικών συνθηκών, είναι πολύ πιθανό τα σύνορα των διαφόρων περιοχών να παρουσιάζουν την ιδιότητα Wada όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράρτημα I: Το πέταλο του Smale

Η χαοτική συμπεριφορά ενός παράξενου ελκυστή χαρακτηρίζεται από την «ευαίσθητη εξάρτηση στις αρχικές συνθήκες γειτονικών τροχιών» (εκθετική απομάκρυνση) και την «συστολή του χώρου φάσεως», ιδιότητες που εκ πρώτης όψεως φαίνονται μη συμβατές μεταξύ τους.

Είναι λοιπόν χρήσιμο να κατανοήσει κανείς της έννοιες του stretching (τέντωμα) και του folding (αναδίπλωση), διαδικασίες που φαίνεται να συνδέονται με τις παραπάνω χαοτικές ιδιότητες. Αυτές οι διαδικασίες γίνονται εύκολα κατανοητές με την πρότυπη απεικόνιση του πέταλου του Smale. Έτσι, το πέταλο του Smale το οποίο αποτελεί μια απεικόνιση από το τετράγωνο με μοναδιαία πλευρά στον εαυτό του, μοντελοποιεί με απλό τρόπο τις τροχιές μιας απεικόνισης στη γειτονιά ενός υπερβολικού σημείου, όταν υπάρχουν εγκάρσια ομοκλινικά σημεία.

Θεωρούμε την απεικόνιση

$$f: D \to \mathbb{R}^2, \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

Η f δρα γραμμικά στα οριζόντια ορθογώνια H_0 , H_1

$$H_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \tfrac{1}{\mu}\}$$

$$H_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 1-\tfrac{1}{\mu} \le y \le 1\}$$

και τα απεικονίζει στα κατακόρυφα ορθογώνια V_0 και V_1

$$f(H_0) = V_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x \le \lambda,\ 0 \le y \le 1\}$$

$$f(H_1) = V_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1-\lambda \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}$$

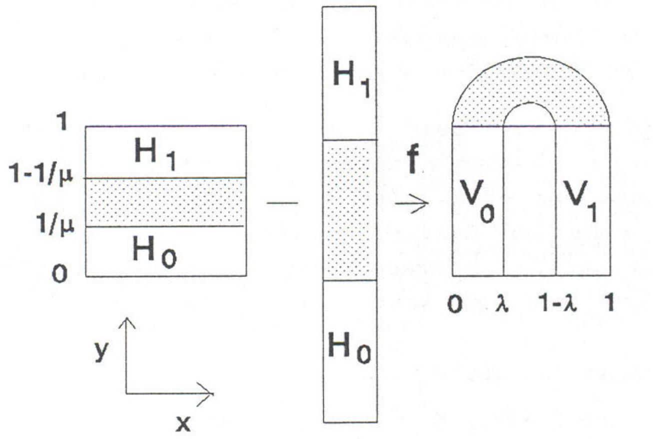
σύμφωνα με τις σχέσεις

$$H_0 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

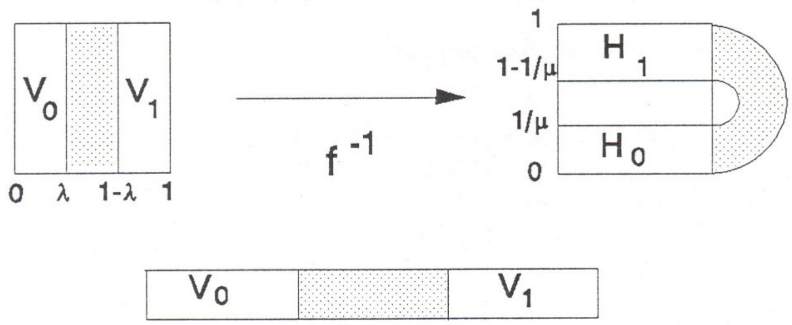
$$H_1 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

όπου $0<\lambda<1/2$ και $\mu>2$.

Η f συστέλλει το x , διαστέλλει το y (stretching) και διπλώνει το D πίσω στον εαυτό του (folding) .

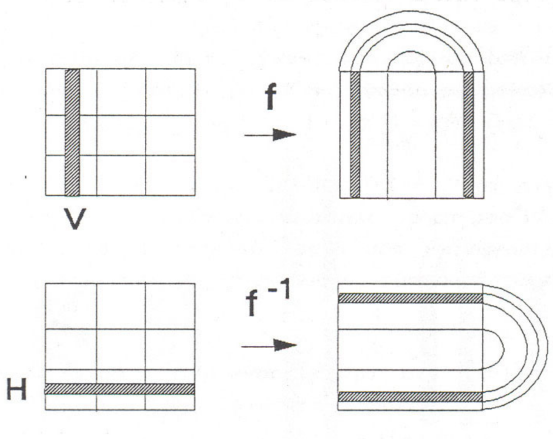


Η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} δρα στο D όπως φαίνεται παρακάτω.



Έστω V κατακόρυφο ορθογώνιο και H οριζόντιο ορθογώνιο.

Η $f(V)\cap D$ αποτελείται από δυο κατακόρυφα ορθογώνια, το ένα στο V_0 και το άλλο στο V_1, που έχουν πλάτος λ φορές το πλάτος του V . Η $f^{-1}(H)\ )\cap D$ αποτελείται από δύο οριζόντια ορθογώνια, το ένα στο H_0 και το άλλο στο H_1, με πλάτος 1/μ φορές το πλάτος του H.



Θέλουμε να κατασκευάσουμε το σύνολο Λ των σημείων του D που παραμένουν στο D κάτω από όλες τις εφαρμογές των f, f^{-1}.

Το σύνολο Λ συνεπώς ορίζεται ως

$$\ldots \cap f^{-n}(D) \cap \ldots \cap f^{-1}(D) \cap D \cap f(D) \cap \ldots \cap f^{n}(D) \cap \ldots$$

Εάν ορίσουμε

$$\Lambda_+ = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D), \qquad \Lambda_- = \bigcap_{-\infty}^{n=0} f^n(D)$$

τότε

$$\Lambda = \Lambda_+ \cap \Lambda_-$$

Είδαμε ότι το

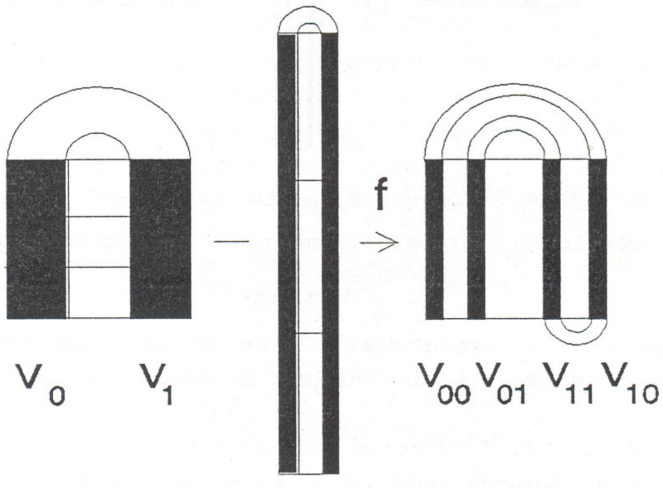
$$\Lambda_1 = D \cap f(D)$$

αποτελείται από την ένωση δυο κατακόρυφων ορθογώνιων που έχουν δείκτες 0 και 1 δηλαδή όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των μονοψήφιων ακολουθιών 0 και 1.

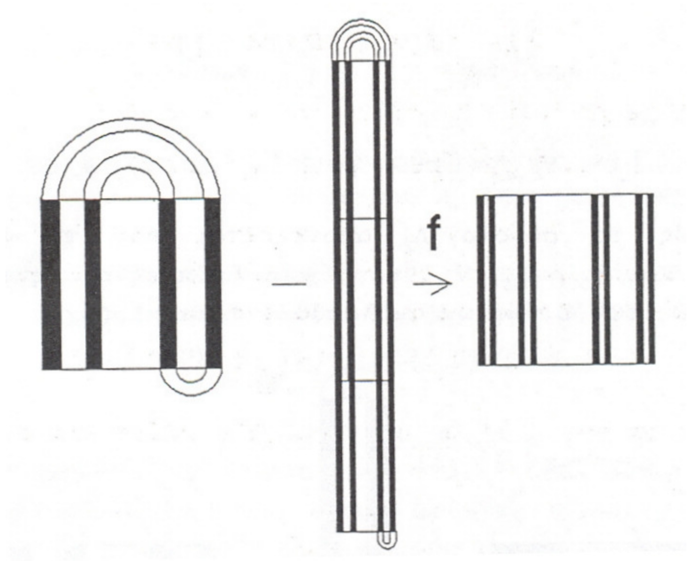
Παρομοίως το σύνολο

$$\Lambda_2 = D \cap f(D) \cap f^2(D)$$

όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, αποτελείται από την ένωση τεσσάρων κατακόρυφων ορθογώνιων (V_{00}, V_{01}, V_{10} και V_{11}) που έχουν δείκτες όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των διψήφιων ακολουθιών 0 και 1.



Ανάλογα ισχύουν για το Λ_3 δηλαδή αποτελείται από την ένωση 8 κατακόρυφων ορθογώνιων που έχουν δείκτες όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των τριψήφιων ακολουθιών 0 και 1.



Έτσι το σύνολο Λ_k αποτελείται από τα 2^k κατακόρυφα ορθογώνια κάθε ένα από τα οποία έχει πλάτος λ^k και συμβολίζεται κατά μοναδικό τρόπο από την ακολουθία k ψηφίων 0 και 1. Όλες οι δυνατές ακολουθίες αυτής της μορφής είναι 2^k και λόγω της παραπάνω κατασκευής, κάθε μια τους συμβολίζει κατά μοναδικό τρόπο ένα κατακόρυφο ορθογώνιο. Όταν $k\to\infty$, έχουμε μια απειρία κατακόρυφων ορθογωνίων με μηδενικό πλάτος αφού $\lim \lambda^k =0$ ($0<\lambda<1/2$).

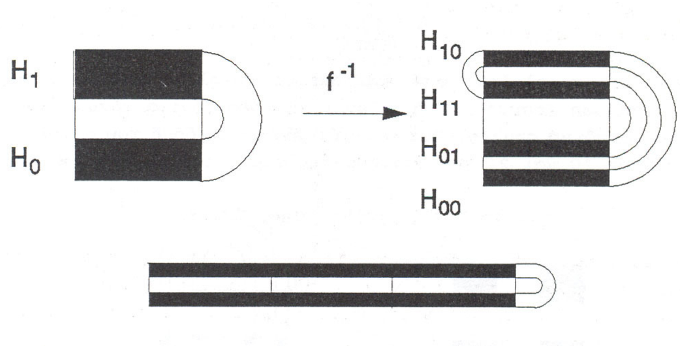
Συνεπώς το σύνολο Λ_+ αποτελείται από μια απειρία κατακόρυφων γραμμών, κάθε μια από τις οποίες συμβολίζεται από μια μοναδική άπειρη ακολουθία 0 και 1, και κάθε τέτοια ακολουθία συμβολίζει μια κατακόρυφη γραμμή που ανήκει στο Λ_+ .

Παρόμοια κατασκευάζουμε το σύνολο Λ_-.

Έτσι π.χ. το σύνολο

$\Lambda_{-2}=D\cap f^{-1}(D)\cap f^{-2}(D)$

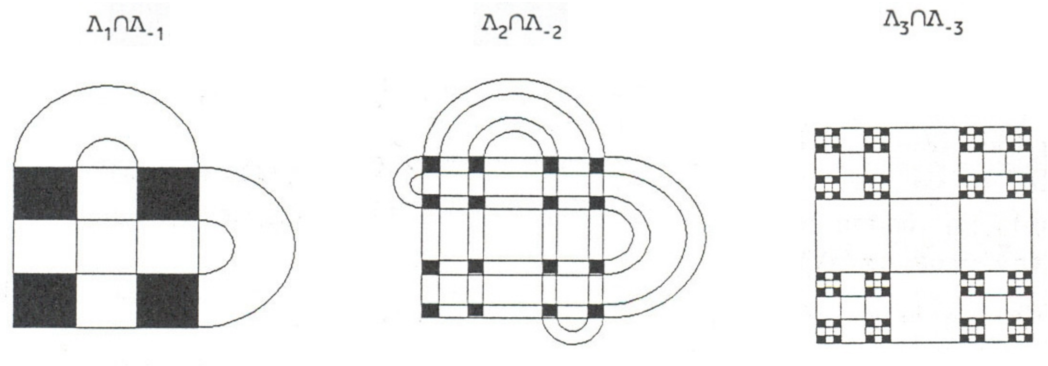
αποτελείται από 4 οριζόντια ορθογώνια πλάτους $1/\mu^2$



Το σύνολο Λ θα είναι λοιπόν

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{n}(D) = \Lambda_{+} \cap \Lambda_{-}$$

και θα αποτελείται από ένα άπειρο σύνολο σημείων αφού κάθε κατακόρυφη γραμμή του Λ_+ τέμνει οριζόντια γραμμή του Λ_- σε ένα μοναδικό σημείο όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.



Έχουμε λοιπόν για κάθε σημείο p

$$p = V_{s_{-1}s_{-2}\ldots s_{-k}\ldots} \cap H_{s_0 s_1 \ldots s_k \ldots}$$

όπου τα s_k μπορούν να πάρουν τιμή 0 ή 1. Έτσι ορίζουμε μια απεικόνιση από τα σημεία p∈Λ στις δίπλα άπειρες ακολουθίες 0 και 1 που ονομάζουμε φ

$$p \xrightarrow{\phi} \ldots s_{-k} \ldots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 \ldots s_k \ldots$$

Παρατηρούμε ότι κάθε κατακόρυφη γραμμή αποτελείται από τα σημεία

$$V_{s_{-1}\ldots s_{-k}\ldots} = \{\, p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, i=1,2,\ldots \}$$

αλλά εφόσον ισχύει ότι

$$V_{s_i} = f(H_{s_i})$$

έχουμε ότι

$$V_{s_{-1}\ldots s_{-k}\ldots} = \{\, p \in D \mid f^{-i}(p) \in H_{s_{-i}}, i=1,2,\ldots$$

Επίσης ισχύει ότι

$$H_{s_0\ldots s_k\ldots} = \{\, p \in D \mid f^{i}(p) \in H_{s_i}, i=0,1,\ldots \}$$

δηλαδή

$$p = \{\, p \in D \mid f^{i}(p) \in H_{s_i}, i=0,\pm 1,\pm 2,\ldots \}$$

Συνεπώς, σε κάθε σημείο p αντιστοιχίσαμε μια διπλά άπειρη ακολουθία από 0 και 1 , που περιέχει πληροφορία για κάθε βήμα της f στο p.

Στην απεικόνιση φ,

$$p \xrightarrow{\phi} \ldots s_{-k} \ldots s_{-2} s_{-1} . s_0 s_1 \ldots s_k \ldots$$

η υποδιαστολή χωρίζει τα μελλοντικά βήματα της δράσης της f στο σημείο p από τα παρελθόντα βήματα, συνεπώς κάθε βήμα της δράσης της f στο p παριστάνεται από μετακίνηση της υποδιαστολής στη διπλά άπειρη ακολουθία που αντιστοιχεί στο μέσω της φ κατά μία θέση προς τα δεξιά, ενώ κάθε βήμα της δράσης της αντίστροφης απεικόνισης παριστάνεται από μετακίνηση της υποδιαστολής κατά μία θέση αριστερά. Μπορούμε να βρούμε την ακολουθία που συνδέεται με το σημείο $f^k(p)$ μέσω της φ, από την ακολουθία που αντιστοιχεί στο p, μετακινώντας την υποδιαστολή |k| θέσεις, προς τα δεξιά αν k>0 ή προς τα αριστερά αν k<0.
Ορίζουμε τώρα μία απεικόνιση σ ανάμεσα στις διπλά άπειρες ακολουθίες με στοιχεία 0 και 1, που ονομάζεται απεικόνιση μετατόπισης, η δράση της οποίας σε μία τέτοια ακολουθία μετατοπίζει την υποδιαστολή μια θέση προς τα δεξιά,

$$\sigma(\ldots s_{-k} \ldots s_{-1} . s_0 s_1 \ldots s_k \ldots) \equiv \ldots s_{-k} \ldots s_{-1} s_0 . s_1 \ldots s_k \ldots$$

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ένα σημείο p∈Λ και την αντίστοιχη διπλά άπειρη ακολουθία φ(p) κι αν $f^k(p)$ είναι οποιοδήποτε βήμα του p κάτω από την f, μπορούμε να βρούμε την ακολουθία που αντιστοιχεί σ' αυτό το βήμα, που θα είναι η $\sigma^k(\varphi(p))$. Υπάρχει λοιπόν μια αντιστοιχία ανάμεσα στη δράση της f στο p και στη δράση της σ στην αντίστοιχη ακολουθία φ (p). Η φ(p) περιέχει πληροφορία για ολόκληρη την τροχιά του p κάτω από την f, και σύμφωνα με όσα αναφέραμε παραπάνω, φανερώνει το αν σε κάθε βήμα η αντίστοιχη εικόνα του p βρίσκεται στο ορθογώνιο H_0 ή H_1.

Παράρτημα ΙΙ: Μέθοδοι Runge Kutta

- **Απλές Μέθοδοι Runge Kutta**

Το ζητούμενο είναι να λυθεί αριθμητικά το ακόλουθο πρόβλημα αρχικής τιμής:

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \ , \ \ x(t_0) = x_0 \quad (1)$$

δηλαδή να προσδιοριστούν οι τιμές x_n της άγνωστης συνάρτησης για μια ακολουθία τιμών t_n. Αυτό γίνεται με τους τύπους Runge Kutta, οι όποιοι είναι ισοδύναμοι, ανάλογα με την παραλλαγή τους, με τα αναπτύγματα Taylor τεσσάρων, πέντε ή (σπάνια) περισσότερων όρων.

Με τον τρόπο αυτό μπορούν να λυθούν δ.ε. οποιασδήποτε τάξης αρκεί να μετατραπούν πρώτα σε ένα σύστημα δ.ε. πρώτης τάξης. Αυτό είναι εύκολο, π.χ. το πρόβλημα αρχικών τιμών της εξίσωσης δεύτερης τάξης:

$$\ddot{x}(t) = f(t, x, \dot{x}) \ , \ x(t_0) = b_1 \ , \ \dot{x}(t_0) = b_2$$

γράφεται ως:

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(t, x, y) \ , \ \ x(t_0) = b_1 \\ \dot{y} = f_2(t, x, y) \ , \ \ y(t_0) = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

Τα παραπάνω ισχύουν για μεμονωμένες πρώτης τάξης εξισώσεις όμως μπορούν εύκολα να γενικευθούν και για συστήματα τέτοιων εξισώσεων.

- **Μέθοδοι Runge Kutta με μεταβλητό βήμα**

Η αποδοτικότητα μιας μεθόδου ολοκλήρωσης μπορεί να αυξηθεί σημαντικά αν ελέγχεται το μέγεθος του βήματος κατά την αναβάθμιση της λύσης. Το βήμα μπορεί να μεταβάλλεται κατάλληλα ώστε η λύση να λαμβάνεται με την επιθυμητή ακρίβεια με τις λιγότερες πράξεις. Ο έλεγχος του βήματος αποσκοπεί στο να επιτευχθεί αρκετά μικρό βήμα στις περιοχές όπου η ολοκληρωτέα συνάρτηση εμφανίζει μεγάλες μεταβολές, ώστε αυτή να μπορεί να προσεγγιστεί στα πλαίσια της απαιτούμενης ακρίβειας. Ταυτόχρονα, στα διαστήματα όπου η μορφή της συνάρτησης δεν αλλάζει σημαντικά το βήμα μπορεί να αυξάνεται ώστε η λύση να βρίσκεται πιο γρήγορα. Το κέρδος στο υπολογιστικό φορτίο (και κατά συνέπεια στον χρόνο υπολογισμού) είναι μεγάλο σε σχέση με την περίπτωση όπου το βήμα είναι πάγιο. Τα μειονεκτήματα είναι πρώτον ότι η λύση δεν λαμβάνεται σε ίσα διαστήματα για τις μεταβλητές ολοκλήρωσης και δεύτερον η αυξημένη πολυπλοκότητα. Μερικές φορές η ακρίβεια δεν τίθεται άμεσα αλλά καθορίζεται μέσω κάποιας άλλης διατηρήσιμης ποσότητας του προβλήματος.

Για την υλοποίηση μιας τέτοιας τεχνικής, το τμήμα του αλγορίθμου που αναβαθμίζει τη λύση πρέπει να επιστρέφει και πληροφορία για την ακρίβεια που επιτεύχθηκε στο τρέχον βήμα, συνήθως μια εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής. Προφανώς η λήψη αυτής της επιπλέον πληροφορίας απαιτεί επιπλέον πράξεις, όμως το τελικό κέρδος αντισταθμίζει με το παραπάνω την ελαφρά αύξηση του υπολογιστικού φορτίου.

Ένας απλός τρόπος για τον έλεγχο του μεγέθους του βήματος είναι η λεγόμενη τεχνική του «διπλασιασμού του βήματος» και μπορεί να εφαρμοστεί με όλες τις μεθόδους ολοκλήρωσης. Η βασική ιδέα είναι να προωθείται η λύση στο επόμενο σημείο δυο φορές, δοκιμαστικά. Την πρώτη φορά η αναβάθμιση γίνεται κανονικά με το πλήρες τρέχον βήμα. Τη δεύτερη φορά η λύση προωθείται στο επόμενο σημείο με δυο βήματα μισού μεγέθους σε σχέση με το προηγούμενο. Οι λύσεις που λαμβάνονται στο σημείο αυτό με τους δύο τρόπους, δίνουν με κατάλληλο μαθηματικό χειρισμό μια εκτίμηση του σφάλματος αποκοπής, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί περαιτέρω για τον έλεγχο του βήματος. Μάλιστα, εύκολα δείχνεται ότι για την μέθοδο Runge Kutta $4^{ης}$ τάξης η τεχνική αυτή αυξάνει το πλήθος των πράξεων κατά ένα παράγοντα περίπου 1.375.

Ένας εναλλακτικός τρόπος για την εκτίμηση του σφάλματος μπορεί να γίνει με τις λεγόμενες «embedded» Runge Kutta μεθόδους όπως αυτή του Fehlberg. Ένα αξιοπρόσεκτο χαρακτηριστικό των μεθόδων Runge Kutta είναι ότι για τάξη $M > 4$ απαιτούνται περισσότερες από M αποτιμήσεις της συνάρτησης πράγμα που εξηγεί την προτίμηση στους τύπους $4^{ης}$ τάξης: λαμβάνεται η βέλτιστη ακρίβεια με τις λιγότερες πράξεις. Ακόμη πιο αξιοσημείωτο όμως, είναι ότι *με τις ίδιες αποτιμήσεις της συνάρτησης για τις οποίες λαμβάνονται σχέσεις αναβάθμισης τάξης Μ, μπορούν χρησιμοποιώντας κατάλληλους συντελεστές να ληφθούν επιπλέον και σχέσεις που επίσης δίνουν τη λύση, με ακρίβεια όμως μικρότερης τάξης*. Χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η μέθοδος Runge Kutta Fehlberg. Αυτή προσεγγίζει τη λύση με ακρίβεια 5^{ης} τάξης απαιτώντας έξι αποτιμήσεις της συνάρτησης. Επιπλέον ένας δεύτερος συνδυασμός των τιμών αυτών δίνει μιαν άλλη προσέγγιση της λύσης με ακρίβεια 4^{ης} τάξης. Αυτή η δεύτερη προσεγγιστική λύση μπορεί να χρησιμοποιηθεί μαζί με την πρώτη για να εκτιμηθεί το σφάλμα αποκοπής δίχως επιπλέον αποτιμήσεις της συνάρτησης δηλαδή δίχως επιπλέον πράξεις.

Κάποτε, πολλοί χειριστές ανησυχούσαν για την ορθότητα των «*embedded*» Runge Kutta μεθόδων. Η αίσθηση ήταν ότι η χρήση των ίδιων σημείων για την αποτίμηση της λύσης και για την εκτίμηση του σφάλματος, είναι λιγότερο ασφαλής από τον διπλασιασμό βήματος όπου η εκτίμηση του σφάλματος βασίζεται σε ανεξάρτητες αποτιμήσεις της συνάρτησης. Όμως η πρακτική εμπειρία έδειξε ότι αυτό δε συνιστά πρόβλημα στη πράξη. Επομένως, οι «*embedded*» Runge Kutta μέθοδοι, οι οποίες είναι περίπου διπλάσια αποδοτικές έχουν υποσκελίσει τους αλγόριθμους που βασίζονται στο διπλασιασμό βήματος.

Η γενική μορφή μιας πέμπτης τάξης Runge Kutta μεθόδου είναι:

$$\begin{aligned}
&k_1 = hf(x_n, y_n)\\
&k_2 = hf(x_n + a_2 h, y_n + b_{21}k_1)\\
&\ldots\\
&k_6 = hf(x_n + a_6 h, y_n + b_{61}k_1 + \ldots + b_{65}k_5)\\
&y_{n+1} = y_n + c_1k_1 + c_2k_2 + c_3k_3 + c_4k_4 + c_5k_5 + c_6k_6 + O(h^6)
\end{aligned} \tag{3}$$

Η «*embedded*» λύση 4^{ης} τάξης είναι:

$$y^*_{n+1} = y_n + c^*_1k_1 + c^*_2k_2 + c^*_3k_3 + c^*_4k_4 + c^*_5k_5 + c^*_6k_6 + O(h^5) \tag{4}$$

και επομένως η εκτίμηση του σφάλματος είναι:

$$\Delta \equiv y_{n+1} - y^*_{n+1} = \sum_{i=1}^{6}(c_i - c^*_i)k_i \tag{5}$$

Π.χ. οι σχέσεις με τις οποίες εφαρμόζεται η μέθοδος Runge Kutta Fehlderg είναι οι ακόλουθες:

$$\begin{aligned}
&k_1 = h\ f(t_n, x_n)\\
&k_2 = h\ f(t_n + h/4, x_n + k_1/4)\\
&k_3 = h\ f(t_n + 3h/8, x_n + 3k_1/32 + 9k_2/32)\\
&k_4 = h\ f(t_n + 12h/13, x_n + 1932k_1/2197 - 7200k_2/2197 + 7296k_3/2197)\\
&k_5 = h\ f(t_n + 12h/13, x_n + 439k_1/216 - 8k_2 + 3680k_3/513 - 845k_4/4104)\\
&k_6 = h\ f(t_n + h/2, x_n - 8k_1/27 - 2k_2 - 3544k_3/2565 + 1859k_4/4104 - 11k_5/40)\\
&x_{n+1} = x_n + (\ 16k_1/135 + 6556k_3/12825 + 28561k_4/56430 - 9k_5/50 + 2k_6/55\ )\\
&x^*_{n+1} = x_n + (\ 25k_1/216 + 1408k_3/2565 + 2197k_4/4104 - k_5/5)
\end{aligned} \tag{6}$$

όπου $t_n = t_0 + n\,h$, $n = 0,1,2...$

Οι τιμές των διαφόρων σταθερών που χρησιμοποιούνται στην ρουτίνα του *Numerical Recipes* είναι αυτές των Cash και Karp, και δίνονται στον συνοδευτικό πίνακα. Αυτές δίνουν μια καλύτερη μέθοδο από του Fehlberg με κάπως καλύτερες ιδιότητες του σφάλματος.

Cash-Karp Parameters for Embedded Runga-Kutta Method

i	a_i	b_{ij}					c_i	c_i^*
1							$\frac{37}{378}$	$\frac{2825}{27648}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$					0	0
3	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{40}$	$\frac{9}{40}$				$\frac{250}{621}$	$\frac{18575}{48384}$
4	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{9}{10}$	$\frac{6}{5}$			$\frac{125}{594}$	$\frac{13525}{55296}$
5	1	$-\frac{11}{54}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{70}{27}$	$\frac{35}{27}$		0	$\frac{277}{14336}$
6	$\frac{7}{8}$	$\frac{1631}{55296}$	$\frac{175}{512}$	$\frac{575}{13824}$	$\frac{44275}{110592}$	$\frac{253}{4096}$	$\frac{512}{1771}$	$\frac{1}{4}$
$j =$		1	2	3	4	5		

Τονίζεται ότι η ποσότητα Δ που υπολογίστηκε παραπάνω αποτελεί μια εκτίμηση του σφάλματος και όχι το πραγματικό σφάλμα. Το τελευταίο δεν μπορεί να υπολογιστεί αφού δεν είναι γνωστή η πραγματική, αναλυτική λύση της εξίσωσης. Έτσι, παρακάτω, όταν αναφερόμαστε στο σφάλμα θα εννοούμε αυτή την εκτίμησή του.

Από τα παραπάνω γνωρίζουμε, τουλάχιστον κατά προσέγγιση, πόσο είναι το σφάλμα που δίνουν οι εξεταζόμενες σχέσεις αναβάθμισης της λύσης. Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να περιορίσουμε το σφάλμα αυτό εντός ενός προδιαγεγραμμένου διαστήματος τιμών.

Καταρχήν, από τις σχέσεις (3), (4) και (5) βλέπουμε ότι το σφάλμα Δ είναι ανάλογο του βήματος h^5. Έστω ότι χρησιμοποιώντας βήμα h_1 εμφανίζεται σφάλμα Δ_1. Έστω επίσης ότι το επιθυμητό σφάλμα είναι Δ_0 και παράγεται με βήμα h_0. Τότε θα είναι:

$$\frac{\Delta_0}{\Delta_1} = \frac{h_0^5}{h_1^5} \quad \text{ή} \quad h_0 = h_1 \left| \frac{\Delta_0}{\Delta_1} \right|^{0.2} \tag{7}$$

Το επιθυμητό σφάλμα Δ_0 λαμβάνεται ως η *επιθυμητή ακρίβεια*. Από αυτή την άποψη, η (7) μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους. Έστω ότι σε κάποιο σημείο οι σχέσεις αναβάθμισης χρησιμοποιούν βήμα h_1 και παράγεται σφάλμα Δ_1. Αν το Δ_1 είναι απολύτως μεγαλύτερο[2] από το Δ_0, δηλ. την επιθυμητή ακρίβεια, η (7) δείχνει πόσο πρέπει να μειωθεί το τρέχον βήμα h_1 ώστε το παραγόμενο σφάλμα να είναι το πολύ ίσο με το Δ_0. Αντίστοιχα, αν το Δ_1 είναι απολύτως μεγαλύτερο από το Δ_0, οι απαιτήσεις ακρίβειας υπερκαλύπτονται και η (7) δείχνει πόσο μπορεί να αυξηθεί το τρέχον βήμα h_1 δίχως το διάστημα Δ_0 ακρίβειας να ξεπεραστεί. Εδώ υπενθυμίζεται ότι η (7) χρησιμοποιείται ως κριτήριο για την αποδοχή ή όχι της τιμής y_{n+1} που λαμβάνεται με σχέσεις ακρίβειας 5^{ης} τάξης ενώ η εκτίμηση του σφάλματος γίνεται για την τιμή y_{n+1}^* που λαμβάνεται με σχέσεις ακρίβειας 4^{ης} τάξης.

Ας σημειωθεί επίσης ότι στην πραγματικότητα το Δ_0 είναι ένα διάνυσμα που περιέχει την επιθυμητή ακρίβεια για κάθε εξίσωση του συστήματος των δ.ε. που επιχειρούμε να λύσουμε. Έτσι για να έχει η λύση καθεμιάς εξίσωσης την προκαθορισμένη αυτή ακρίβεια, η (7) πρέπει να εφαρμόζεται για όλες τις εξισώσεις και να λαμβάνεται τελικά το βήμα που αντιστοιχεί στην εξίσωση με τη λύση που έχει το μεγαλύτερο σφάλμα.

Στην πράξη, η απαίτηση για την ακρίβεια της λύσης συνήθως τίθεται με τρόπο που επιδέχεται διάφορες ερμηνείες ανάλογα με το πρόβλημα. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητείται "η λύση να έχει ακρίβεια ένα μέρος στο 10^6 ". Αν οι ανεξάρτητες μεταβλητές του προς επίλυση συστήματος εξισώσεων διαφέρουν σημαντικά σε μέγεθος, μιαν εύλογη επιλογή για την ακρίβεια είναι να τεθεί $\Delta_0 = \varepsilon\, y$ όπου $\varepsilon = 10^{-6}$. Αν οι συναρτήσεις εμφανίζουν ταλαντωτική συμπεριφορά με κέντρο το μηδέν και είναι φραγμένες από κάποιες μέγιστες τιμές, η καταλληλότερη επιλογή είναι τεθεί το Δ_0 ίσο με ε επί τις μέγιστες αυτές τιμές.

[2] Διευκρινίζεται εδώ η σύμβαση που χρησιμοποιείται στο κείμενο: όταν λέμε ότι το Δ_1 είναι μεγαλύτερο από την ακρίβεια Δ_0 εννοούμε ότι έχει *μεγαλύτερο* εύρος και συνεπώς η ακρίβεια που επιτυγχάνεται με αυτό είναι *μικρότερη* απ' ότι με το Δ_0 δηλ. το αποτέλεσμα είναι λιγότερο ακριβές. Όμοια, λέγοντας ότι το Δ_1 είναι μικρότερο από την ακρίβεια Δ_0 εννοούμε ότι έχει *μικρότερο* εύρος και συνεπώς με αυτό επιτυγχάνεται *μεγαλύτερη* ακρίβεια, δηλ. πιο ακριβές αποτέλεσμα απ' ότι με το Δ_0.

Όλες αυτές οι περιπτώσεις μπορούν να ενσωματωθούν σε μια γενική ρουτίνα επίλυσης με κατάλληλο χειρισμό των μεταβλητών ώστε να αντιμετωπίζονται συνολικά και με την ελάχιστη δυνατή παρέμβαση του χρήστη. Ένας βολικός τρόπος είναι ο ακόλουθος. Ένα από τα ορίσματα της ρουτίνας είναι το διάνυσμα των εξαρτημένων μεταβλητών y[0,..,n-1] πριν γίνει η επόμενη αναβάθμιση της λύσης. Ο χρήστης μπορεί να καθορίζει μιαν ολική παράμετρο ακρίβειας eps καθώς και ένα διάνυσμα "κλίμακας" yscal[0,..,n-1] της ακρίβειας αυτής για κάθε μεταβλητή. Τότε η επιθυμητή ακρίβεια κατά την i αναβάθμιση της λύσης μπορεί να ληφθεί ως[3]:

$$\Delta_0^i = eps \cdot yscal^i \tag{8}$$

όπου βέβαια τα Δ_0 και *yscal* είναι διανύσματα των *n* εξαρτημένων μεταβλητών των εξισώσεων. Αν θέλουμε σταθερά *απόλυτα* σφάλματα (absolute errors) σε σχέση με κάποιες μέγιστες τιμές, το *yscal* εξισώνεται με αυτές τις μέγιστες τιμές και θα είναι σε κάθε βήμα το ίδιο. Ο χρήστης με την παράμετρο *eps* ρυθμίζει την απόλυτη ακρίβεια. Αν επιθυμούμε η επίλυση σε κάθε αναβάθμιση να γίνεται με σταθερά *σχετικά* σφάλματα (fractional errors) απλά το διάνυσμα *y* της λύσης από την προηγούμενη αναβάθμιση θα αντικαθιστά το *yscal* σε κάθε βήμα. Ο χρήστης με την παράμετρο *eps* ρυθμίζει τώρα την σχετική ακρίβεια Στην περίπτωση αυτή ένα χρήσιμο τέχνασμα είναι να τεθεί:

$$yscal^i = \left| y^i \right| + \left| h \frac{dy^i}{dx} \right| \tag{9}$$

Σημειώνεται πάντως ότι η σχέση αυτή δεν είναι αξιόπιστη όταν οι μεταβλητές ταλαντώνονται πολύ κοντά στο μηδέν.

Εδώ πρέπει να εξεταστεί μια σημαντική τεχνική λεπτομέρεια. Τα κριτήρια που εξετάστηκαν μέχρι τώρα για τα σφάλματα περιορίζουν το σφάλμα ξεχωριστά σε κάθε βήμα και από αυτή την άποψη είναι τοπικά. Όμως κάποια συστήματα εξισώσεων μπορεί να εμφανίζουν ασυνήθιστη ευαισθησία σε μια ολική συσσώρευση σφαλμάτων, δηλαδή αθροιστικά, για ολόκληρο το διάστημα της ολοκλήρωσης. Το χειρότερο ενδεχόμενο είναι τα σφάλματα που αθροίζονται να έχουν το ίδιο πρόσημο. Γενικά όσο πιο πολλά βήματα γίνονται μεταξύ του αρχικού και του τελικού σημείου

[3] Ας αντιπαραβληθεί η (8) με την $\Delta_0 = \varepsilon\, y$.

τόσο το συνολικό σφάλμα αυξάνεται. Το πλήθος των βημάτων για τη σάρωση του διαστήματος ολοκλήρωσης προφανώς εξαρτάται από το μέγεθος του βήματος. Έτσι όσο πιο μικρό είναι το βήμα h τόσο το Δ_0 πρέπει να λαμβάνεται μικρότερο ώστε να αντισταθμίζεται η αύξηση του συνολικού σφάλματος. Στις περιπτώσεις αυτές το διάνυσμα κλιμάκωσης της ακρίβειας, *yscal*, πρέπει να τίθεται ανάλογο του τρέχοντος βήματος h οπότε η επιθυμητή ακρίβεια κατά την i αναβάθμιση της λύσης θα είναι τώρα:

$$\Delta_0^i = eps \cdot h \cdot \frac{dy^i}{dx} = eps \cdot yscal^i \tag{10}$$

Η παραπάνω σχέση, αφού το *yscal* αλλάζει σε κάθε βήμα, αφορά προφανώς τα σχετικά σφάλματα (fractional errors) και ρυθμίζει τη σχετική ακρίβεια χρησιμοποιώντας όχι τις τιμές της τρέχουσας λύσης y αλλά τις *αυξήσεις των τιμών αυτών* από βήμα σε βήμα. Όμως η χρήση αυτής της σχέσης προξενεί ένα άλλο πρόβλημα. Η (10) εμμέσως κλιμακώνει το Δ_0 ανάλογα με το βήμα h που τελικά εφαρμόζεται για την αναβάθμιση. Έστω ότι σε κάποια δοκιμή η (7) δίνει ότι για την επόμενη αναβάθμιση πρέπει να εφαρμοστεί βήμα h_0 το οποίο είναι σημαντικά μικρότερο από το τρέχον h_1. Το βήμα h_0 θα είναι αυτό που δίνει λύση y με την ακρίβεια Δ_0 η οποία εφαρμόστηκε στην (7). Όμως όταν πραγματικά γίνει η αναβάθμιση με το h_0 το Δ_0 επίσης θα μειωθεί λόγω της κλιμάκωσης που σύμφωνα με τη (10) του προξενείται από το h_0. Έτσι δεν θα είναι το ίδιο που εφαρμόστηκε στην (7) αλλά μικρότερο. Αυτό σημαίνει ότι το διάστημα ακρίβειας είναι τελικά μικρότερο από αυτό που υποτέθηκε αρχικά και χρησιμοποιήθηκε για την εξαγωγή του h_0 δηλαδή η απαιτούμενη ακρίβεια είναι τελικά μεγαλύτερη. Τότε όμως το βήμα h_0 που έχει υπολογιστεί για μεγαλύτερο εύρος του Δ_0 είναι πολύ πιθανό να μην ικανοποιεί την ακρίβεια Δ_0 όπως διαμορφώνεται μετά από την αναβάθμιση με το h_0. Η λύση είναι να αυξηθεί ο εκθέτης στην (7) και να γίνει 0.25 = 1/4 αντί 0.2 = 1/5 ώστε σε περίπτωση μείωσης του τρέχοντος βήματος αυτό να υπολογίζεται επιπλέον ελαφρά μειωμένο ώστε μετά από την εφαρμογή του να αντισταθμίζεται η μείωση του Δ_0.

Η κατάσταση όπου αντίθετα το h_0 αυξάνεται σημαντικά σε σχέση με το h_1, με όμοιο σκεπτικό προκύπτει ότι χαλαρώνει τώρα τις απαιτήσεις ακρίβειας οπότε και δεν δημιουργεί προβλήματα. Τελικά μπορούμε να οργανώσουμε τη ρουτίνα υπολογισμού της λύσης κατά τέτοιο τρόπο ώστε να λειτουργεί ανεξάρτητα από το αν ο χρήστης κλιμακώνει το *yscal* με το βήμα ή όχι (δηλαδή αν χρησιμοποιεί κλασματικά ή απόλυτα σφάλματα). Αυτό που κάνουμε είναι να χρησιμοποιούμε τον μεγαλύτερο εκθέτη, 0.25, *οποτεδήποτε το βήμα μειώνεται* (ανεξάρτητα αν χρειάζεται ή όχι) και οποτεδήποτε το βήμα αυξάνεται να χρησιμοποιούμε τον μικρότερο εκθέτη, 0.2. Ακόμη δε, επειδή όπως αναφέρθηκε πιο πάνω το Δ_0 δεν είναι το πραγματικό σφάλμα αλλά μιαν εκτίμησή του, αυξάνουμε επιπλέον ελαφρά τις απαιτήσεις ακρίβειας πολλαπλασιάζοντας με ένα συντελεστή ασφαλείας *S* λίγο μικρότερο από τη μονάδα το δεξί μέλος της (7). Έτσι τελικά για το βήμα h_0 η (7) γίνεται:

$$h_0 = \begin{cases} S\,h_1 \left|\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}\right|^{0.2}, & \Delta_0 \geq \Delta_1 \\ S\,h_1 \left|\dfrac{\Delta_0}{\Delta_1}\right|^{0.25}, & \Delta_0 < \Delta_1 \end{cases} \tag{11}$$

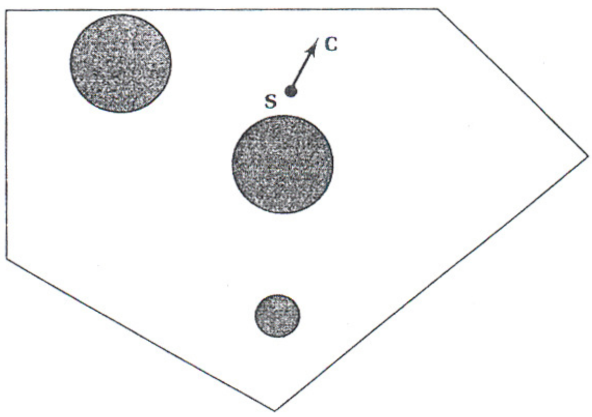
Όλα τα παραπάνω εφαρμόστηκαν στην ρουτίνα επίλυσης και αποδείχθηκαν επιτυχή στην πράξη. Η ρουτίνα τουλάχιστον για τα συνήθη προβλήματα είναι γενικά πολύ ακριβής. Εδώ ο χρήστης πρέπει να προειδοποιηθεί ότι *υπερβολικές απαιτήσεις ακρίβειας, δηλαδή πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου eps, δεν οδηγούν στη λύση*. Σε αυτή την περίπτωση η ρουτίνα θα επιτυγχάνει ένα μηδενικό σφάλμα κάνοντας το βήμα τόσο μικρό ώστε στο y να προστίθενται οι ποσότητες $h\,y'$ σα να είναι μηδενικές. Έτσι η ρουτίνα θα εκτελεί άπειρα βήματα χωρίς να μπορεί να προωθήσει πραγματικά τη λύση.

Παράρτημα III: Δισδιάστατο Ray Tracing

Α) Το πρόβλημα των αντανακλάσεων σε ένα χωρίο

Σ' αυτήν την ενότητα, θα μελετήσουμε ένα απλό παράδειγμα δισδιάστατου ray tracing, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως μοντέλο για την αριθμητική επίλυση ποικιλόμορφων μπιλιάρδων, το πρόβλημα των αντανακλάσεων σε ένα χωρίο.

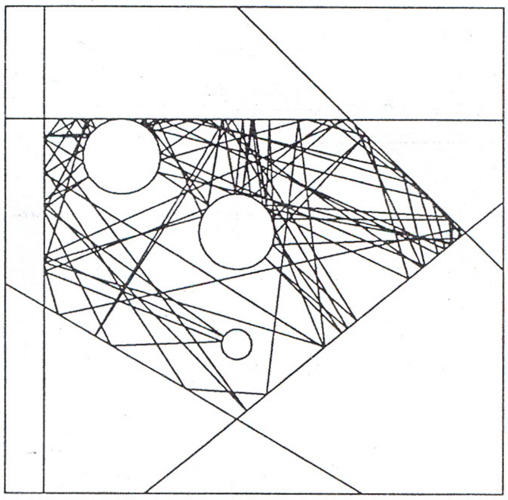
Στο σχήμα 1, φαίνεται η τομή μιας πολυγωνικής «αίθουσας» με πέντε τοίχους και τρία κυκλικά αντικείμενα, ας πούμε «κολώνες». Αυτό που θέλουμε να κατασκευάσουμε είναι ένα μοντέλο που να μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την τροχιά μιας μπίλιας που θα κυλάει στο πάτωμα χωρίς τριβές και που συγκρούεται ελαστικά με τα διάφορα αντικείμενα (τοίχους και κολώνες). Το παράδειγμα αυτό αποτελεί δηλαδή ένα είδος μπιλιάρδου. Δεν αλλάζει τίποτα εάν θεωρήσουμε ότι αντί για μπίλια έχουμε μια οπτική ακτίνα και ότι τα διάφορα αντικείμενα αποτελούν καθρέφτες.



Σχ.1:Ένα πείραμα Ray Tracing

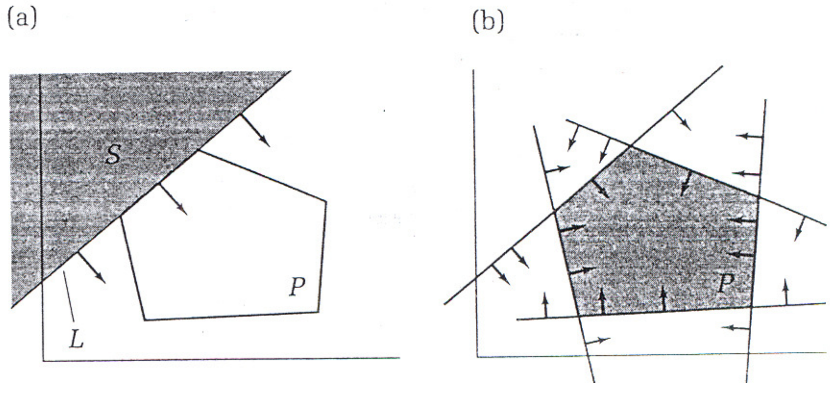
Θεωρείται ότι η άλγεβρα των διανυσμάτων είναι γνωστή στον αναγνώστη. Εκείνο που ίσως πρέπει να διευκρινιστεί είναι ο ορισμός της «ακτίνας». Ως ακτίνα ορίζεται η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{c}t$ όπου $t \geq 0$, το $\mathbf{s}$ είναι το διάνυσμα από την αρχή των αξόνων στο σημείο αφετηρίας και $\mathbf{c}$ ένα διάνυσμα κατεύθυνσης. Από φυσική άποψη, μπορεί να θεωρηθεί ότι η παράμετρος t αναπαριστά χρόνο.

Το πρώτο μας μέλημα είναι να καθορίσουμε λοιπόν, έναν αλγόριθμο που να βρίσκει ποιο αντικείμενο συναντά πρώτο η ακτίνα και σε ποιο σημείο του. Αυτό το σημείο, θα είναι το σημείο αφετηρίας της ανακλώμενης ακτίνας κ.ο.κ. Σε αυτό το παράδειγμα, υπάρχουν δυο ειδών αντικείμενα, οι τοίχοι τους οποίους μοντελοποιούμε με ευθείες και οι κολώνες τις οποίες μοντελοποιούμε με κύκλους.



Σχ.2 Ένα παράδειγμα τροχιάς της ακτίνας

Κάθε μια από τις ευθείες χωρίζει το επίπεδο στα δύο. Έτσι, η αίθουσα μοντελοποιείται από μια συλλογή ευθειών στην μορφή $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} = D_i$, όπου $\mathbf{p} = (x, y)$ και τα $\mathbf{n}_i$ λαμβάνονται έτσι ώστε να είναι τα κάθετα διανύσματα «προς τα μέσα», όπως φαίνεται και στο σχ. 3. Τα D_i καθορίζουν που βρίσκονται οι γραμμές.



Σχ.3: Οι γραμμές χωρίζουν το επίπεδο στα δύο

- **Τομή ακτίνας με ευθεία**

Το ζητούμενο είναι να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου t_h και το σημείο $\mathbf{p}_h$ για τα οποία η ακτίνα $\mathbf{r}$ τέμνει την ευθεία L που δίνεται από τη σχέση $\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} = D_i$.
Εξ ορισμού το $\mathbf{p}_h$ είναι το σημείο στο οποίο η ακτίνα και η ευθεία έχουν τις ίδιες συντεταγμένες (τέμνονται). Έτσι για την εύρεση των t_h και $\mathbf{p}_h$ αρκεί να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{p} = D_i \\ \mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{c}t \end{cases}$$

ως προς t και $\mathbf{p}$. Εύκολα προκύπτει ότι εάν $\mathbf{n} \cdot \mathbf{c} \neq 0$:

$$t_h = \frac{D - \mathbf{n} \cdot \mathbf{s}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{c}}$$

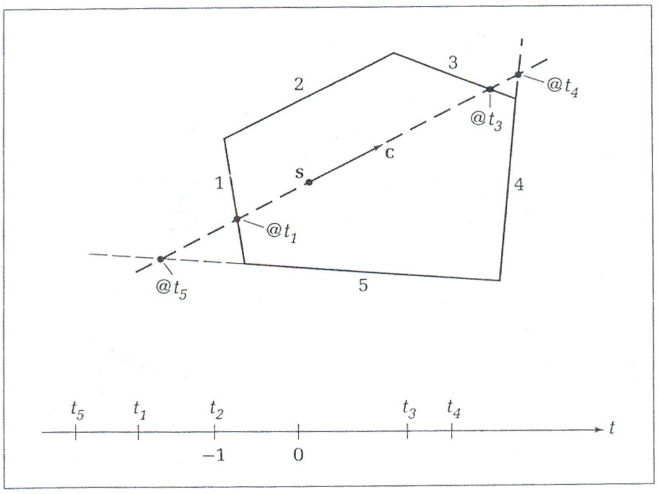
$$\mathbf{p}_h = \mathbf{r}(t_h) = \mathbf{s} + \mathbf{c}t_h$$

Έτσι, στη γλώσσα C, έχοντας ορίσει μια κλάση vector, η οποία υλοποιεί την απαραίτητη για την επίλυση του προβλήματος άλγεβρα των διανυσμάτων, μια ρουτίνα η οποία θα μπορούσε να υλοποιεί τα προηγούμενα είναι η εξής:

```
void ray_line_intersection(vector S,vector C,vector N,double d,double &time)
{
  double denom;
  denom=dot(N,C);
  if (denom==0) time=-1.0;
  else time=(d-dot(N,S))/denom;
}
```

Όπως φαίνεται έχει ληφθεί μέριμνα για την περίπτωση κατά την οποία η ακτίνα είναι παράλληλη στην ευθεία (denom==0), οπότε δεν υπάρχει λύση. Τότε, η ρουτίνα επιστρέφει αρνητική τιμή για το t ως ένδειξη λάθους. Κάθε αρνητική τιμή του t είναι μη αποδεκτή επειδή η ακτίνα ξεκινά κάθε κομμάτι της πορείας της στο $t = 0$.

Για να κατανοήσουμε πως θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αυτή η ρουτίνα για την επίλυση του προβλήματος, ας εξετάσουμε πρώτα την περίπτωση κατά την οποία η αίθουσα είναι «άδεια» δηλαδή υπάρχουν μόνον οι τοίχοι. Στο σχ. 4, φαίνεται τι συμβαίνει στην περίπτωση αυτή. Για να δούμε ποιον τοίχο θα χτυπήσει η ακτίνα, καλείται η ρουτίνα ray_line_intersection για κάθε ευθεία και αποθηκεύονται οι τιμές των χρόνων κρούσης. Οι ευθείες που τέμνονται «μπροστά» επιστρέφουν θετικούς χρόνους κρούσης, ενώ αυτές που τέμνονται «πίσω», αρνητικούς. Η «μη αποδεκτή» τιμή -1 επιστρέφεται στην περίπτωση που η ακτίνα είναι παράλληλη με κάποιον τοίχο. Ο χρόνος κρούσης που μας ενδιαφέρει είναι ο μικρότερος εκ των θετικών χρόνων κρούσης. Είναι μετά εύκολο να υπολογιστεί το σημείο κρούσης από τη σχέση $\mathbf{p}_h = \mathbf{s} + \mathbf{c}t_h$.



Σχ.4:Τομή μιας ακτίνας με τους τοίχους μόνο

Μετά η διαδικασία επαναλαμβάνεται με μια καινούρια ακτίνα που φεύγει από το σημείο που βρέθηκε. Η κατεύθυνση $\mathbf{r}$ της ανακλώμενης ακτίνας δίνεται από τον τύπο:

$$\mathbf{r} = \mathbf{c} - 2(\mathbf{c} \cdot \mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$$

όπου $\mathbf{u}_n$ είναι το κανονικοποιημένο κάθετο διάνυσμα στον τοίχο που χτύπησε η ακτίνα..

Έτσι ο σκελετός του προγράμματος για την περίπτωση της «άδειας αίθουσας» είναι ο εξής:

```
<set up datas for walls>
<give initial ray position s and direction c>
for (i=0;i<bored;i++)
{
    <scan walls and find smallest positive hit time t_h>
    <get hit point as p=s+c*t_h>
    <draw ray>
    s=p;                              (update start point for next ray)
    <get normal for the hit wall>
    <compute reflected direction as r>
    c= r;                             (update direction for next ray)
}
```

- **Τομή ακτίνας με κύκλο**

Τώρα, μπορούμε να κάνουμε το πρόβλημα πιο ενδιαφέρον προσθέτοντας κολώνες στην αίθουσα. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο ακτίνας R με κέντρο $\mathbf{h}$. Το ερώτημα είναι, η ακτίνα $\mathbf{r}(t) = \mathbf{s} + \mathbf{c}t$ θα τέμνει τον κύκλο; Εάν ναι, σε ποιο σημείο;

Ως γνωστόν ο κύκλος είναι το σύνολο όλων των σημείων $\mathbf{p} = (x, y)$ που βρίσκονται σε απόσταση R από το $\mathbf{h}$. Αυτό, σε διανυσματική μορφή, γράφεται ως εξής:

$$|\mathbf{p} - \mathbf{h}| = R$$

Εφόσον ψάχνουμε το σημείο τομής αντικαθιστούμε το $\mathbf{p}$ με την ακτίνα για να προκύψει σχέση για το χρόνο κρούσης. Υψώνοντας στο τετράγωνο, έχουμε:

$$|\mathbf{s} + \mathbf{c}t - \mathbf{h}|^2 = R^2$$

Χρησιμοποιώντας τις ισότητες του εσωτερικού γινόμενου, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$|\mathbf{s} - \mathbf{h}|^2 + 2(\mathbf{s} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{c}t + |\mathbf{c}|^2 t^2 = R^2$$

Είναι δηλαδή της μορφής της τετραγωνικής εξίσωσης στο t:

$$At^2 + 2Bt + C = 0$$

με

$$A = |\mathbf{c}|^2$$
$$B = (\mathbf{s} - \mathbf{h}) \cdot \mathbf{c}$$
$$C = |\mathbf{s} - \mathbf{h}|^2 - R^2$$

Η λύση είναι η γνωστή:

$$t_h = -\frac{B}{A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Εάν το $B^2 - AC$ είναι αρνητικό, δεν υπάρχει πραγματική λύση, οπότε η ακτίνα δεν τέμνει τον κύκλο, εάν είναι ίσο με μηδέν, υπάρχει μια μόνο λύση, ενώ εάν είναι θετικό υπάρχουν δυο. Για την τελευταία περίπτωση, ο σωστός χρόνος είναι προφανώς ο μικρότερος εκ των δυο που είναι ο εξής.

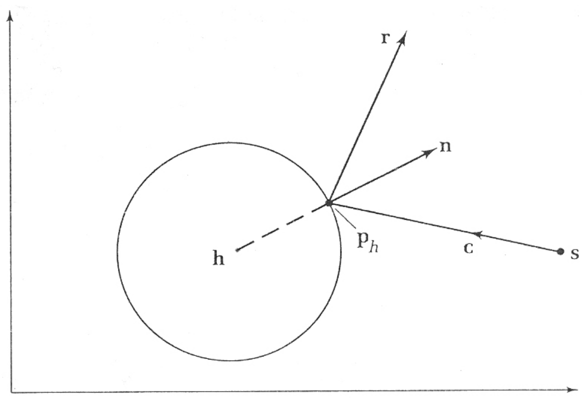
$$t_h = -\frac{B}{A} - \frac{\sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

Έτσι στη γλώσσα C++, μια ρουτίνα η οποία θα μπορούσε να υλοποιεί την τομή ακτίνας και κύκλου είναι η παρακάτω:

```
void ray_circle_intersection(vector P,vector C,vector H,double r,double &time)
{
  double aa,bb,cc,discrim;
  vector W;
  aa=dot(C,C);
  W=P-H;
  bb=dot(W,K);
  cc=dot(W,W)-r*r;
  discrim=bb*bb-aa*cc;
  if(discrim<0.0) time=-1.0;
  else time=(-bb-sqrt(discrim))/aa;
}
```

Εφόσον γίνεται κρούση και επιστρέφεται από την ρουτίνα αυτή μια θετική τιμή του t, το σημείο κρούσης υπολογίζεται, όπως και προηγουμένως, από τη σχέση $\mathbf{p}_h = \mathbf{s} + \mathbf{c}t_h$.

Η κατεύθυνση $\mathbf{r}$ της ανακλώμενης ακτίνας δίνεται και πάλι από τον τύπο $\mathbf{r} = \mathbf{c} - 2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{u}_n)\mathbf{u}_n$, αλλά εδώ ως $\mathbf{u}_n$ θεωρούμε το διάνυσμα που ενώνει το κέντρο του κύκλου με το σημείο κρούσης με φορά προς το σημείο κρούσης (βλ. σχ. 5), δηλαδή το διάνυσμα $\mathbf{u}_n = \mathbf{p}_h - \mathbf{h}$.



Σχ.5: Ανάκλαση ακτίνας σε κύκλο

Έτσι, τελικά ο σκελετός του προγράμματος για την περίπτωση της «μη άδειας αίθουσας» είναι μια μικρή παραλλαγή του προηγούμενου και μπορεί να γράφει ως εξής:

```
<set up datas for walls>
<set up datas for pillars>
<give initial ray position s and direction c>
for (i=0;i<bored;i++)
{
        <scan walls and pillars and find smallest positive hit time t_h>
        <store what  object has been hit>
        <get hit point as p=s+c*t_h>
        <draw ray>
        s=p;                                    (update start point for next ray)
        <if object is a wall get normal for the hit wall>
        <if object is a pillar get normal for the hit pillar>
        <compute reflected direction as r>
        c= r;                                   (update direction for next ray)
}
```

Β) Το πρόγραμμα Wada1.cpp

Το παρακάτω πρόγραμμα βασίστηκε στις μεθόδους που περιγράφτηκαν παραπάνω για την μελέτη τις σκέδασης από σύστημα τριών δίσκων.

```
#include<stdio.h>
#include<iostream.h>
#include<conio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define Pi 3.141592

class vector
{
  public:

    double x,y;
    vector (double _x=0., double _y=0.)                { x=_x ;y=_y; }
    vector operator + (vector&P)                       { return vector(x+P.x, y+P.y); }
    vector operator - (vector&P)                       { return vector(x-P.x, y-P.y); }
    friend vector operator * (double&s, vector&P)      { return vector(s*P.x, s*P.y); }
    friend vector n(vector&P)                          { return vector(-P.y,P.x); }
    friend double dot(vector&A,vector&B)               { return A.x*B.x+A.y*B.y; }
};

void ray_line_intersection(vector P,vector K,vector nV,double d,double &time)
{
  double denom;
  denom=dot(nV,K);
  if (denom==0) time=-1.0;
  else time=(d-dot(nV,P))/denom;
}


void ray_circle_intersection(vector P,vector K,vector h,double r,double &time)
{
  double aa,bb,cc,discrim;
  vector w;
  aa=dot(K,K);
  w=P-h;
  bb=dot(w,K);
  cc=dot(w,w)-r*r;
  discrim=bb*bb-aa*cc;
  if(discrim<0.0) time=-1.0;
  else time=(-bb-sqrt(discrim))/aa;
}



void main()
{

 //create files

 FILE *file0=fopen("Results.txt","wr");
 FILE *file1=fopen("One.txt","wr");
 FILE *file2=fopen("Two.txt","wr");
 FILE *file3=fopen("Three.txt","wr");
 FILE *file4=fopen("Check.txt","wr");



 int i,j,object,exodus,where,begin;
 double l=4.0,d1=0.0,d2=0.0,r=1.8,d3,phi=Pi/18;
 double x0,t,tnew,b,b0,bf,bstep,nbstep,theta,theta0,thetaf,thetastep,nthetastep,coeff,c,c0,z,tol,counter;
```

```
vector A(0,0),B(l*sin(phi),l*cos(phi)),C(l*cos(Pi/2-Pi/3-phi),l*sin(Pi/2-Pi/3-phi));
vector A1,A2,B1,B2,C1,C2,AB,AC,BC,BA,CB,CA,CENT,UN,UT,BEG;


//find vectors

AB=B-A;BA=A-B;
AC=C-A;CA=A-C;
BC=C-B;CB=C-B;
vector nAB=n(AB),nAC=n(AC),nBC=n(BC);

d3=dot(nBC,C);

ray_circle_intersection(B,BA,A,r,t);
A1=B+t*BA;
ray_circle_intersection(C,CA,A,r,t);
A2=C+t*CA;
ray_circle_intersection(A,AB,B,r,t);
B1=A+t*AB;
ray_circle_intersection(C,CB,B,r,t);
B2=C+t*CB;
ray_circle_intersection(A,AC,C,r,t);
C1=A+t*AC;
ray_circle_intersection(B,BC,C,r,t);
C2=B+t*BC;

//initial conditions

tol=1.E-9;
x0=-4.0;

nthetastep=700;
theta0=1.50995;
thetaf=1.51010;

nbstep=700;
b0=1.899;
bf=1.90;

thetastep=(thetaf-theta0)/(nthetastep);
bstep=(bf-b0)/(nbstep);


//main algorithm

for (i=0;i<nbstep;i++)
{

   b=b0+i*bstep;

      for (j=0;j<nthetastep;j++)
      {
        theta=theta0 + j*thetastep;

        vector P(x0,b),K(sin(theta),cos(theta));


        //outside the scattering region
        where=0;
        counter=0;
        while (where==0)
        {
                exodus=0;
                object=0;
                tnew=1.E100;

                ray_circle_intersection(P,K,A,r,t);  if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=1;CENT=A;}
                ray_circle_intersection(P,K,B,r,t);  if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=1;CENT=B;}
                ray_circle_intersection(P,K,C,r,t);  if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=1;CENT=C;}
                ray_line_intersection(P,K,nAB,d1,t); if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=2;exodus=1;}
                ray_line_intersection(P,K,nAC,d2,t); if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=2;exodus=2;}
```

```
            ray_line_intersection(P,K,nBC,d3,t); if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=2;exodus=3;}

            if (object!=0)  {P=P+tnew*K;}

            if (object==1)  {UN=P-CENT;coeff=2*dot(K,UN)/dot(UN,UN);K=K-coeff*UN;}

            if (object==2)
             {
              if((exodus==1&&P.x<B1.x&&P.x>A1.x)||(exodus==2&&P.x<C1.x&&P.x>A2.x)||(exodus==3&&P.x<C2.x&&P.x>B2.x))
              {where=1;}
             }

             if (object==0) {fprintf(file0,"%f  ",0.);break;}

        }//end of while outside


        //inside the scattering region
        begin=0;
        while (where==1)
        {
            tnew=1.E100;
            object=0;

            ray_circle_intersection(P,K,A,r,t);if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=1;CENT=A;BEG=AC;c0=0;}
            ray_circle_intersection(P,K,B,r,t);if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=1;CENT=B;BEG=BA;c0=Pi/3;}
            ray_circle_intersection(P,K,C,r,t);if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=1;CENT=C;BEG=CB;c0=2*Pi/3;}
            ray_line_intersection(P,K,nAB,d1,t);if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=2;exodus=1;}
            ray_line_intersection(P,K,nAC,d2,t);if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=2;exodus=2;}
            ray_line_intersection(P,K,nBC,d3,t);if (t>tol && t<tnew) {tnew=t;object=2;exodus=3;}

            if (object==1)
             {
                    P=P+tnew*K;
                    UN=P-CENT;
                    UT=n(UN);
                    coeff=2*dot(K,UN)/dot(UN,UN);
                    K=K-coeff*UN;
                    begin=0;
                    if (counter==0)
                    {
                      c=c0+acos(dot(BEG,UN)/(sqrt(dot(BEG,BEG)*dot(BEG,BEG))*sqrt(dot(UN,UN)*dot(UN,UN))));
                      z=dot(UT,K)/(sqrt(dot(UT,UT)*dot(UT,UT))*sqrt(dot(K,K)*dot(K,K)));
                      begin=1;
                    }
             }

             if (object==2)
             {
                    where=0;
                    if (exodus==1) {fprintf(file1,"%f  %f \n",b,theta);fprintf(file0,"%f  ",1.);}
                    if (exodus==2) {fprintf(file2,"%f  %f \n",b,theta);fprintf(file0,"%f  ",2.);}
                    if (exodus==3) {fprintf(file3,"%f  %f \n",b,theta);fprintf(file0,"%f  ",3.);}
             }
             counter++;
             if(counter>1000) {break;}
        }//end of while inside
       if(counter>100) {fprintf(file4,"%f  %f  \n",b,theta);}
       }//end of for 2 (change theta)
    fprintf(file0,"\n");
  }//end of for 1 (change b)


}//end of main
```

<u>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</u>

[1] Edward Ott , Tamás Tél , "*Chaotic scattering: An introduction*" , [1993], Chaos **3** (4).

[2] Vincent Daniels , Michael Vallieres , and Jian-Min Yuan , "*Chaotic scattering on a double well: Periodic orbits , symbolic dynamics, and scaling*" , [1993], Chaos **3** (4).

[3] Andrei V. Frolov and Arne L. Larsen "*Chaotic Scattering and Capture of Strings by Black Hole*", [1999], gr-qc/9908039.

[4] Leon Poon, Jose Campos, Edward Ott, and Celso Grebogi, "*Wada Basin Boundaries in Chaotic scattering*", [1996], Int. J.Bifurcation and Chaos **6**,251-266.

[5] Heint-Otto Peitgen, Harmut Jurgens, Dietmar Saupe, "*Chaos and Fractals, New Frontiers of Sience*", second edition, Springer.

[6] Edward Ott, "*Chaos in Dynamical Systems*", [1993], Cambridge University Press.

[7] Heinz G. Schuster, "*Deterministic Chaos: an Introduction*", third edition.

[8] Bruno Eckhardt, "*Fractal properties scattering singularities*", [1987], J. Phys. A:Math. Gen **20,** 5971-5979.

[9] Bruno Eckhardt, "*Irregular scattering*", [1988], Physica D 33, 89 – 98.

[10] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vettering, B.P. Flannery, "*Numerical Recipes in C++*", Cambridge University Press.

[11] Curtis F.Gerald, Patrick O.Wheathley, "*Applied Numerical Analysis*", fourth edition, Addison Wesley

[13] H.J. Korsh, H.J. Jodl, "*Chaos, A Program Collection for the PC* ", Springer.

[14] Francis S.Hill Jr., "*Computer Graphics* ", Macmillan Publishing Company.

[15] I. Χατζηδημητρίου , «*Θεωρητική Μηχανική*» , [2000].

[16] Σ. Ιχτιάρογλου, «*Εισαγωγή στη μηχανική Hamilton*» , [2003].

[17] Σ. Ιχτιάρογλου και I. Χατζηδημητρίου, «*Δυναμικά Συστήματα και Χάος*», [2000].

[18] Α. Χ. Μπούντης , «*Δυναμικά Συστήματα και Χάος*», Πάτρα [1998].

[19] Α. Νικολαΐδης, «*Χορδές*» [2002], Πρόχειρες σημειώσεις διαλέξεων κατά το χειμερινό εξάμηνο του έτους 2002-2003 , Τμήμα φυσικής , ΑΠΘ.

[20] Σ. Ραφαηλίδου, «*Χαοτική σκέδαση και εφαρμογές*», [2002], Πτυχιακή Εργασία, Τμήμα Φυσικής , ΑΠΘ.

[21] Γ. Ανδρουλάκης, «Κλασική και κβαντική περιγραφή της ελεύθερης μποζονικής χορδής», [2002], Πτυχιακή Εργασία, Τμήμα Φυσικής , ΑΠΘ.