

**Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών Υπολογιστική Φυσική**

Διπλωματική Εργασία

**Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού
Συστήματος ως Ελαστικό μέσο**

**ΜΑΑΪΤΑ ΤΖΑΜΑΛ-ΟΔΥΣΣΕΑΣ
Επιβλέπουσα καθηγήτρια: ΜΕΛΕΤΑΙΔΟΥ Ε.**

Θεσσαλονίκη 2006

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Αν υποθέσουμε ότι κάθε προσιτή δομή ενός Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος (ΟΜΣ) περιγράφεται από ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξέλιξη ενός ΟΜΣ περιγράφεται από την εξέλιξη αυτών των σημείων. Η θεωρία των ΟΜΣ μας λέει ότι η εξέλιξη της δομής ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τις διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov, από τις οποίες ισχύει ότι ο ρυθμός μεταβολής (η ταχύτητα) εξαρτάται από την θέση. Έτσι, έχει νόημα να θεωρήσουμε ότι η κίνηση κάθε σημείου εξαρτάται από την αλληλεπίδραση του με τα γειτονικά σημεία, όποτε να θεωρήσουμε ότι το ΟΜΣ συμπεριφέρεται ως ένα συνεχές μέσο.

ABSTRACT

The Markov property states that the future behavior of a process depends entirely on the process' present state, and that knowledge of the process' history cannot provide any additional, new information. A system which obeys the Markov property is called a Markov system. There are many applications of Markov systems reported in the literature, in areas of manpower planning, statistical physics, chemistry, demography, geography as well as in economics and health care planning. In looking for example applications of Homogeneous or non-Homogeneous Markov systems (or semi-Markov systems) reference could be given to student enrolment in universities, occupational mobility and sea pollution, among others, while basic results concerning continuous time Markov models in manpower systems can be found in [1],[2],[7]. Main problems of interest regarding Homogeneous Markov Systems (HMS) are their asymptotic behaviour, stability, asymptotic stability, control, variability, estimation, attainability, maintainability and entropy.

Consider a continuous time Homogeneous Markov System with state space $S = \{1, 2, \dots, n\}$. The members of the system could be particles, biological organisms, parts of human population, etc. Every member of the system may be in one and only one of the states $1, 2, \dots, n$ at some time point t , and it can move from some state i to some other state j in the time interval $[t, t + \Delta t]$ with transition probability $p_{ij}[\Delta t]$, for every $t \in \mathbb{R}^+$. Then, every attainable structure of the continuous time HMS with n states and fixed size is considered as a point-particle of $\mathbb{R}^n$. Thus, the motion of an attainable structure corresponds to the motion of the respective point-particle in $\mathbb{R}^n$. Under the assumption that "the motion of every particle at every time point is due to its interaction with its surroundings", $\mathbb{R}^n$ is further seen as a continuum [4-6] and, hence, the evolution of the set of the HMS attainable structures corresponds to the deformation of the continuum. This turns to be a realistic assumption, since the motion of every point-particle depends entirely on its position in $\mathbb{R}^n$.

Under these considerations, the concepts of the state of stress and the relevant stress tensor can be associated with an n -dimensional HMS and, as far as the present paper is concerned, these are initially detailed in an example application dealing with a three-dimensional HMS. Then, given the rate of transition probabilities matrix of the HMS, a question is raised on whether the set of the attainable structures of the continuous time HMS may be considered as an elastic solid and, in this context, it is further examined whether the deformation of such a model could explain the evolution of the HMS. The study follows the steps of the methodology presented in

[6], where the search for an answer to this question gave rise to the concept of multidimensional, anisotropic linear elasticity. In some detail, the evolution of a 2-dimensional HMS was successfully interpreted in [6] through the deformation of a linearly elastic rod, while it was further shown that the evolution of an n -dimensional HMS may be interpreted through the deformation of an $(n-1)$ -dimensional, anisotropic, linearly elastic solid.

Apart the above concepts, the present paper develops further the aforementioned three-dimensional HMS example application, according which the evolution of the HMS is interpreted through the deformation of some two-dimensional isotropic elastic solid. The increased number of dimensions, as compared with the number of dimensions considered in the previous example application [6], results into an increase of the number of the PDEs describing the motion of the present HMS and, consequently, it complicates the associated calculations. With the use of the field equations of elasticity, an explicit form of the stress tensor involved can however still be evaluated analytically. It is therefore concluded that, when certain assumptions hold, the evolution of a three-dimensional HMS may successfully be interpreted through the deformation of a two-dimensional elastic solid material having variable elastic and material density properties.

The successful interpretation of the evolution of HMSs through the deformation laws of elastic solids gives rise to further fruitful thoughts regarding the manner in which well known concepts and features met in classical and finite elasticity (e.g., anisotropy, strain energy) may be associated to HMSs and be exploited appropriately.

Στον Μαάιτα Τζαμάλ του Φάρες

Περιεχόμενα:

Πρόλογος.....	01
----------------------	-----------

A. Εισαγωγή

A.I Μαρκοβιανά Μοντέλα

A.I.1 Γενικά.....	03
A.I.2 Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες.....	04
A.I.3 Ασυμπτωτική συμπεριφορά Μαρκοβιανών Αλυσίδων.....	05
A.I.4 Μαρκοβιανές Διαδικασίες.....	06
A.I.5 Ομογενή Μαρκοβιανά Συστήματα διακριτού χρόνου.....	10
A.I.6 Ομογενή Μαρκοβιανά Συστήματα σε συνεχή χρόνο.....	12

A.II Γραμικό Ελαστικό Σώμα

A.II.1 Στοιχεία από τον τανυστικό λογισμό.....	15
A.II.2 Κινηματική του παραμορφώσιμου σώματος.....	19
A.II.3 Δυναμική του συνεχούς μέσου.....	23
A.II.4 Γραμικό Ελαστικό σώμα.....	25

A.III Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

A.III.1 Ορισμοί και συνθήκες.....	29
A.III.2 Μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών.....	31

B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο

B.I Το Ομογενές Μαρκοβιανό Σύστημα ως ελαστικό μέσο

B.I.1 Γενικά.....	33
B.I.2 Το τριδιάστατο Ομογενές Μαρκοβιανό Σύστημα ως γραμικό ελαστικό μέσο.....	36
B.I.3 Παράδειγμα.....	38

B.II Επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

B.II.1 Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων.....	43
B.II.2 Αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.....	44

B.II.3 Το πρόγραμμα solver21 για την επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων.....	48
B.III Αποτελέσματα.....	65
Γ. Συμπεράσματα.....	79
Βιβλιογραφία.....	81

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία γίνεται στα πλαίσια του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «Υπολογιστική Φυσική» του τμήματος Φυσικής του Αριστοτέλειου Πανεπιστήμιου Θεσσαλονίκης με επιβλέπουσα καθηγήτρια την κ. Μελετλίδου Έφη και συνεπιβλέπων τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ. κ. Τσακλίδη Γιώργο.

Αν υποθέσουμε ότι κάθε προσιτή δομή ενός Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος (ΟΜΣ) περιγράφεται από ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εξέλιξη ενός ΟΜΣ περιγράφεται από την εξέλιξη αυτών των σημείων. Η θεωρία των ΟΜΣ μας λέει ότι η εξέλιξη της δομής ενός τέτοιου συστήματος δίνεται από τις διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov, από τις οποίες ισχύει ότι ο ρυθμός μεταβολής (η ταχύτητα) εξαρτάται από την θέση. Έτσι, έχει νόημα να θεωρήσουμε ότι η κίνηση κάθε σημείου εξαρτάται από την αλληλεπίδραση του με τα γειτονικά σημεία, οπότε να θεωρήσουμε ότι το ΟΜΣ συμπεριφέρεται ως ένα συνεχές μέσο.

Στην εργασία [6] έγινε μελέτη ενός διδιάστατου ΟΜΣ και αποδείχθηκε ότι η εξέλιξη ενός τέτοιου συστήματος μπορεί να περιγραφεί ως η εξέλιξη ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και συγκεκριμένα μιας ελαστικής ράβδου. Στην παρούσα εργασία γίνεται η μελέτη της περίπτωσης ενός τριδιάστατου ΟΜΣ και δίνεται απάντηση στο ερώτημα αν μπορούμε να περιγράψουμε το παραπάνω τριδιάστατο ΟΜΣ ως γραμμικό ελαστικό μέσο.

Στο πρώτο (Α) μέρος της εργασίας παρατίθεται η εισαγωγή στην θεωρία των Μαρκοβιανών Συστημάτων, στο Γραμμικό Ελαστικό Μέσο και στην επίλυση των διαφορικών εξισώσεων με την Μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών.

Στο δεύτερο (Β) μέρος γίνεται η μοντελοποίηση του ΟΜΣ ως ελαστικό μέσο. Στο πρώτο τμήμα περιγράφονται οι εξισώσεις Kolmogorov του ΟΜΣ και γίνεται μια γενική μελέτη των ΟΜΣ. Μελετάται η περίπτωση του τριδιάστατου ΟΜΣ στο οποίο εξάγουμε τις συνιστώσες του ταυστή ρυθμού παραμόρφωσης και τις συνιστώσες του ταυστή τάσης ενώ από την συμπεριφορά των σταθερών λ και μ του Lamé θα προσπαθήσουμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα μας. Η όλη μελέτη παρουσιάζεται σε ένα παράδειγμα το οποίο μελετάμε αριθμητικά.

Στο δεύτερο τμήμα επιλύονται οι διαφορικές εξισώσεις με την μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών. Για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος έγινε ανάπτυξη ενός προγράμματος σε γλώσσα προγραμματισμού C++. Στο τρίτο τμήμα δίνονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για τις σταθερές λ και μ του Lamé, όπως επίσης και για το μέτρο ελαστικότητας (Young) και τον συντελεστή Poisson.

Στο τρίτο μέρος της εργασίας δίνονται τα συμπεράσματα της παρούσης εργασίας.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω την Επίκουρη Καθηγήτρια του τμήματος Φυσικής κ. Μελετλίδου Έφη για την βοήθεια της στην εκπόνηση της παρούσης εργασίας. Τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Μαθηματικών του Α.Π.Θ. κ. Τσακλίδη Γιώργο για την συνεργασία του στο ερευνητικό θέμα, τις χρήσιμες και διδακτικές

παρατηρήσεις του για την συγγραφή γραπτών κειμένων και τον πολύτιμο χρόνο που διάθεσε. Τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. κ. Κόκκοτα Κώστα για τις χρήσιμες συμβουλές του στην αριθμητική επίλυση των διαφορικών εξισώσεων. Τον Καθηγητή του τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του Α.Π.Θ. κ. Χαραλαμπίκη Νίκο για τις παρατηρήσεις του στα αποτελέσματα της εργασίας. Τέλος να ευχαριστήσω τον υπ. Διδάκτορα του τμήματος Πληροφορικής κ. Βρέττο Νίκο για τις συμβουλές του στην αντιμετώπιση προγραμματιστικών προβλημάτων.

A. Εισαγωγή

I. Μαρκοβιανά Μοντέλα

I.1 Γενικά

Στο παρόν μέρος Α.Ι. της διπλωματικής εργασίας θα παρουσιάσουμε συνοπτικά βασικές έννοιες και συμπεράσματα που απαντώνται στη βιβλιογραφία αναφορικά με τις στοχαστικές διαδικασίες και ειδικότερα τα μαρκοβιανά μοντέλα. Για τους ορισμούς και τα θεωρήματα που θα παραθέσουμε σχετικά με τις μαρκοβιανές διαδικασίες και τις μαρκοβιανές αλυσίδες παραπέμπουμε ενδεικτικά στα συγγράμματα [1] και [3], ενώ για τα μαρκοβιανά συστήματα στα [2] και [3].

Τα Μαρκοβιανά μοντέλα είναι στοχαστικά μοντέλα με χαρακτηριστικό ότι έχουν την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Η εξέλιξη δηλαδή του συστήματος, εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση του συστήματος και όχι από προηγούμενες καταστάσεις. Μια πιο ακριβής διατύπωση της Μαρκοβιανής ιδιότητας είναι ότι όλη η πληροφορία για τον καθορισμό της αμέσως επόμενης (πιθανοκρατικής) κίνησης του μοντέλου, υπάρχει στην τρέχουσα κατάσταση του συστήματος, και δεν απαιτείται η γνώση του παρελθόντος του συστήματος.

Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε ένα χώρο πιθανοτήτων. Αν το πλήθος των τυχαίων μεταβλητών είναι αριθμήσιμο, τότε η στοχαστική διαδικασία ονομάζεται διαδικασία σε διακριτό χρόνο και συμβολίζεται με $X_1, X_2, X_3, \dots$. Ενώ αν το πλήθος των τυχαίων μεταβλητών δεν είναι αριθμήσιμο, τότε ονομάζεται διαδικασία σε συνεχή χρόνο και συμβολίζεται με $\{X(t) : t \geq 0\}$.

Ο χώρος των καταστάσεων S της διαδικασίας είναι ο χώρος που δημιουργείται από τις τιμές της X_t . Έτσι, συμβολίζουμε τον χώρο καταστάσεων μιας στοχαστικής διαδικασίας με διακριτές καταστάσεις, με $S = (0, 1, 2, 3, \dots)$, ενώ αν η διαδικασία παίρνει πραγματικές τιμές έχουμε, εν γένει, $S = (-\infty, \infty)$.

Μια στοχαστική διαδικασία με n καταστάσεις καλείται μια n -διάστατη διαδικασία.

Μια στοχαστική διαδικασία καλείται Μαρκοβιανή αν ισχύει

$$prob\{a < X_t < b \mid X_{t_n} = x_n, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}, \dots, X_{t_1} = x_1\} = prob\{a < X_t < b \mid X_{t_n} = x_n\} \quad (1.1)$$

για κάθε t , όπου $t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t$.

Στην περίπτωση που έχουμε διακριτό χρόνο και διακριτό χώρο καταστάσεων η Μαρκοβιανή διαδικασία ονομάζεται Μαρκοβιανή αλυσίδα και ορίζεται ως μια ακολουθία $X_0, X_1, X_2, \dots$ διακεκριμένων τυχαίων μεταβλητών με την ιδιότητα η υπό συνθήκη κατανομή της X_{t+1} να εξαρτάται μόνο από την τιμή της X_t :

$$prob\{X_{t+1} = k \mid X_t = r, \dots, X_0 = \lambda\} = prob\{X_{t+1} = k \mid X_t = r\}. \quad (1.2)$$

1.2 Ομογενείς Μαρκοβιανές Αλυσίδες

Έστω X_t Μαρκοβιανή αλυσίδα με (τιμές από τον) χώρο καταστάσεων $S = \{0, 1, 2, 3, \dots, k\}$.

Ορισμός 1.2.1 Ως πιθανότητα μετάβασης μίας Μαρκοβιανής αλυσίδας ορίζεται η πιθανότητα η αλυσίδα να μεταβεί τη χρονική στιγμή t στην κατάσταση j , δεδομένου ότι την προηγούμενη χρονική στιγμή $t-1$, βρισκόταν στην κατάσταση i , δηλαδή

$$p_{ij}(t) = \text{prob}\{X_t = j \mid X_{t-1} = i\} \quad (1.3)$$

για $i, j = 1, 2, \dots, k$ και $t = 1, 2, 3, \dots$.

Ορισμός 1.2.2 Ορίζουμε ως πίνακα μετάβασης της Μαρκοβιανής αλυσίδας για το χρονικό διάστημα $[t-1, t)$ τον πίνακα

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & \dots & p_{1k}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & \dots & p_{2k}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(t) & p_{k2}(t) & \dots & p_{kk}(t) \end{pmatrix}.$$

Ιδιότητες του Πίνακα Μετάβασης:

1. Είναι μη αρνητικός. Όλα τα στοιχεία του είναι θετικά ή μηδέν.
2. Το άθροισμα των γραμμών του είναι ίσο με την μονάδα.

Ο πίνακας μετάβασης περιέχει όλη την απαιτούμενη πληροφορία για τον προσδιορισμό της εξέλιξης μιας ομογενούς Μαρκοβιανής αλυσίδας. Ένας πίνακας για τον οποίο ισχύουν οι ιδιότητες 1 και 2 ονομάζεται στοχαστικός πίνακας.

Ορισμός 1.2.3 Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται ομογενής (homogeneous) ή στατική (stationary) αν η πιθανότητα μετάβασης από την μία κατάσταση στην άλλη είναι ανεξάρτητη του χρόνου που γίνεται η μετάβαση, δηλαδή

$$\text{prob}\{X_t = j \mid X_{t-1} = i\} = p_{ij}, \quad (1.4)$$

για $t = 1, 2, 3, \dots$.

Όταν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα δεν είναι ομογενής, τότε ονομάζεται μη ομογενής (οπότε οι πιθανότητες μετάβασης είναι συναρτήσεις του χρόνου). Στην ομογενή αλυσίδα έχουμε ένα μόνο πίνακα μετάβασης, ενώ στην περίπτωση της μη ομογενούς αλυσίδας έχουμε μια ακολουθία πινάκων μετάβασης.

Ορισμός 1.2.4 Ορίζουμε ως διάνυσμα κατάστασης μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας το διάνυσμα

$$\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))^T,$$

όπου $p_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, k$, η πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται στην κατάσταση i την χρονική στιγμή t .

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει τις πιθανότητες η Μαρκοβιανή αλυσίδα $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$ να βρίσκεται στην κατάσταση j τη χρονική στιγμή t .

Θεώρημα I.2.1 Αν $\mathbf{P}$ είναι ο πίνακας μετάβασης μιας πεπερασμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας, τότε ισχύει

$$p_{ij}(s+t) = \sum_{l=0}^k p_{il}(s)p_{lj}(t),$$

$$\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(t-1)\mathbf{P}, \quad t = 1, 2, 3, \dots,$$

οπότε

$$\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(0)\mathbf{P}^t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, \quad (1.5)$$

όπου $\mathbf{p}(0)$ το διάνυσμα των πιθανοτήτων αρχικής κατάστασης.

Στο παραπάνω θεώρημα η πρώτη σχέση είναι γνωστή ως σχέση Chapman-Kolmogorov για τις Μαρκοβιανές αλυσίδες.

I.3 Ασυμπτωτική συμπεριφορά Μαρκοβιανών αλυσίδων

Με τον όρο ασυμπτωτική συμπεριφορά εννοούμε τη μελέτη της ύπαρξης και τον υπολογισμό των

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

ή συνοπτικά του

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{p}(t).$$

Η εύρεση του παραπάνω ορίου γίνεται με δύο τρόπους. Στην πρώτη περίπτωση το βασικό εργαλείο για την εύρεση του ορίου είναι η θεωρία πιθανοτήτων. Στην δεύτερη περίπτωση το όριο υπολογίζεται με βάση τη μορφή του πίνακα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t,$$

σύμφωνα με την σχέση (1.5), και χρησιμοποιούμε την θεωρία πινάκων. Συγκεκριμένα χρησιμοποιούμε την θεωρία μη αρνητικών πινάκων και ειδικότερα το θεώρημα Perron-Frobenius, με την συνθήκη ότι ο πίνακας $\mathbf{P}$ είναι ένας πίνακας στοχαστικός.

Στην παρούσα εργασία θα εργαστούμε κύρια με τον δεύτερο τρόπο.

Ορισμός I.3.1 Μια Μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται αδιαχώριστη αν είναι δυνατόν από οποιαδήποτε κατάσταση να μεταβούμε σε οποιαδήποτε άλλη σε κάποιο αριθμό βημάτων.

Ισχύει ότι:

Θεώρημα I.3.1 Αν μια Μαρκοβιανή αλυσίδα με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων είναι αδιαχώριστη, τότε υπάρχει το

$$\mathbf{\Pi} = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}^t$$

και είναι πίνακας με όλες τις γραμμές του ίδιες. Η κάθε γραμμή του $\mathbf{\Pi}$ είναι ίση με το στοχαστικό διάνυσμα $\boldsymbol{\pi}$ τέτοιο ώστε

$$\boldsymbol{\pi}^T = \boldsymbol{\pi}^T \mathbf{P}.$$

Ορισμός I.3.2 Η κατάσταση j έχει περίοδο d αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

1. $p_{jj}(n) = 0$ για κάθε n εκτός αν $n = md$ για κάποιο θετικό ακέραιο m .
2. d είναι ο μέγιστος ακέραιος με την ιδιότητα (1).

Η κατάσταση i ονομάζεται απεριοδική όταν $d = 1$. Συμβολίζουμε την περίοδο μιας κατάστασης i με $\pi(i) = d$.

I.4 Μαρκοβιανές Διαδικασίες

Μαρκοβιανή διαδικασία ονομάζεται μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο, που έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα. Στην συνέχεια της παρούσας εργασίας ο χώρος των καταστάσεων θεωρείται διακριτός και πεπερασμένος.

Ορισμός I.4.1 Μια στοχαστική διαδικασία σε συνεχή χρόνο λέμε ότι έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν

$$\text{prob}\{X(t_n) = i_n \mid X(t_0) = i_0, X(t_1) = i_1, \dots, X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} = \text{prob}\{X(t_n) = i_n \mid X(t_{n-1}) = i_{n-1}\} \quad (1.6)$$

για κάθε σύνολο χρονικών στιγμών $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ και $i_0, i_1, \dots, i_n \in S$.

Ο πίνακας μετάβασης μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι

$$\mathbf{P}(s, t) = \begin{pmatrix} p_{11}(s, t) & p_{12}(s, t) & \dots & p_{1k}(s, t) \\ p_{21}(s, t) & p_{22}(s, t) & \dots & p_{2k}(s, t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1}(s, t) & p_{k2}(s, t) & \dots & p_{kk}(s, t) \end{pmatrix},$$

όπου τα στοιχεία $p_{ij}(s, t)$ του πίνακα είναι οι πιθανότητες μετάβασης από μια κατάσταση i την χρονική στιγμή s στην κατάσταση j την χρονική στιγμή t , δηλαδή

$$p_{ij}(s, t) = \text{prob}\{X(t) = j \mid X(s) = i\}.$$

Ιδιότητες του Πίνακα Μετάβασης Μαρκοβιανής διαδικασίας:

1. $p_{ij}(s, t) \geq 0$, για κάθε $i, j \in S$ και $t \geq s \geq 0$.
2. $\sum_{j \in S} p_{ij}(s, t) = 1$, για κάθε $i \in S$ και $t \geq s \geq 0$.
3. $\lim_{t \rightarrow s} p_{ij}(s, t) = \delta_{ij}$, για κάθε $s \in [0, \infty]$ και $i, j \in S$.

Ορισμός I.4.2: Μια Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geq 0}$, $t \in [0, \infty)$, ονομάζεται ομογενής, αν για κάθε $i, j \in S$ οι πιθανότητες μετάβασης

$$p_{ij}(t, t+h) = \text{prob}\{X(t+h) = j \mid X(t) = i\}$$

είναι ανεξάρτητες του χρόνου t .

Θεώρημα I.4.1 Έστω $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ μια ομογενής Μαρκοβιανή διαδικασία με πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t)$. Για κάθε $i, j \in S$ οι πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t)$ είναι ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις του t .

Όπως προαναφέραμε, ο πίνακας μετάβασης $\mathbf{P}$ και οι πιθανότητες αρχικής κατάστασης παρέχουν την βασική, επαρκή πληροφορία για τον χαρακτηρισμό μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας. Στις Μαρκοβιανές διαδικασίες σε συνεχή χρόνο η κίνηση από κατάσταση σε κατάσταση μπορεί να γίνει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Έτσι δεν μπορούμε να αναφερόμαστε απλά σε πίνακα μετάβασης, όπως στις Μαρκοβιανές αλυσίδες, αλλά πρέπει να αναφερόμαστε στην τάση να γίνουν μεταβάσεις. Χρειαζόμαστε λοιπόν τις παραγώγους των πιθανοτήτων $p_{ij}(t)$.

Θεώρημα I.4.2 Έστω $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ μια ομογενής Μαρκοβιανή διαδικασία με πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t)$, $i, j \in S$. Τότε υπάρχει η από δεξιά παράγωγος στο 0 της συνάρτησης $p_{ii}(t)$ με τη μορφή

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[p_{ii}(t) - 1]}{t} = q_{ii},$$

όπου $0 \leq q_{ii} \leq \infty$.

Θεώρημα I.4.3 Έστω $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ μια ομογενής Μαρκοβιανή διαδικασία με πιθανότητες μετάβασης $p_{ij}(t)$, $i, j \in S$. Τότε υπάρχει η από δεξιά παράγωγος στο 0 της συνάρτησης $p_{ij}(t)$, δηλαδή υπάρχει το

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{[p_{ij}(t)]}{t} = q_{ij},$$

όπου το q_{ij} είναι πεπερασμένο.

Οι ποσότητες q_{ij} είναι μη αρνητικές και παίρνουν τιμές όχι κατ' ανάγκη μεταξύ 0 και 1. Οι ποσότητες αυτές ονομάζονται τάσεις μετάβασης, αφού η q_{ij} πολλαπλασιασμένη με ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα Δt δίνει προσεγγιστικά την πιθανότητα μετάβασης από την κατάσταση i στην κατάσταση j στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Ισχύει, δηλαδή,

$$\text{prob}\{X(t + \Delta t) = j \mid X(t) = i\} = q_{ij}\Delta t + O(\Delta t). \quad (1.7)$$

Από την σχέση (1.7) και λόγω της Μαρκοβιανής ιδιότητας προκύπτει ότι η μετάβαση από μια κατάσταση i σε μια κατάσταση j ακολουθεί την διαδικασία **Poisson** με παράμετρο q_{ij} .

Η ποσότητα $-q_{ii}$ εκφράζει την τάση εξόδου από την κατάσταση i . Παίρνει τιμές μη αρνητικές, ενώ για ένα μικρό χρονικό διάστημα Δt ακολουθεί και αυτή διαδικασία Poisson με παράμετρο $-q_{ii}$, δηλαδή

$$\text{prob}\{X(t + \Delta t) \neq i \mid X(t) = i\} = -q_{ii}\Delta t + O(\Delta t). \quad (1.8)$$

Ορισμός 1.4.3 Ορίζουμε ως πίνακα των τάσεων μετάβασης της Μαρκοβιανής διαδικασίας τον πίνακα

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1k} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{k1} & q_{k2} & \cdots & q_{kk} \end{pmatrix},$$

με στοιχεία q_{ij} για τα οποία αποδυναμώνεται ότι:

$$q_{ii} \leq 0, \quad q_{ij} \geq 0 \text{ για } i \neq j$$

$$\text{και } \sum_{j \in S} q_{ij} = 0 \text{ για όλα τα } i \in S.$$

Ο πίνακας των τάσεων μετάβασης είναι ανάλογος του πίνακα μετάβασης $\mathbf{P}$ μιας Μαρκοβιανής αλυσίδας με την έννοια ότι δίνει όλη την επαρκή πληροφορία για την επίλυση βασικών προβλημάτων σε μια Μαρκοβιανή διαδικασία.

Ορισμός 1.4.4 Προς τα εμπρός διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov ονομάζουμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(s, t) = \mathbf{P}(s, t) \mathbf{Q} \text{ για κάθε } t > s > 0,$$

ενώ για ομογενή Μαρκοβιανή διαδικασία γίνονται

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t) \mathbf{Q} \text{ για κάθε } t > 0.$$

Ορισμός 1.4.5 Προς τα πίσω διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov ονομάζουμε τις διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{P}(s, t) = -\mathbf{Q}\mathbf{P}(s, t) \text{ για κάθε } t > s > 0,$$

ενώ για ομογενή Μαρκοβιανή διαδικασία γίνεται

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{P}(t) = -\mathbf{Q}\mathbf{P}(t) \text{ για κάθε } t > 0.$$

Αν μια λύση ικανοποιεί την σχέση

$$\sum_j p_{ij}(s, t) = 1,$$

τότε είναι η μοναδική λύση που ικανοποιεί συγχρόνως τις προς τα εμπρός και προς τα πίσω διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov.

Θεώρημα I.4.4 Αν ένας $k \times k$ πίνακας $\mathbf{Q}$ έχει στοιχεία $q_{ij} \geq 0$ για $i \neq j$, και ισχύει

$$\mathbf{Q}\mathbf{1} = \mathbf{0},$$

δηλαδή το άθροισμα των γραμμών του πίνακα $\mathbf{Q}$ είναι ίσο με το μηδέν, τότε οι ιδιοτιμές του πίνακα $\mathbf{Q}$ έχουν μη-θετικό πραγματικό μέρος.

Θεώρημα I.4.5 Ο πίνακας $\mathbf{Q}$ των τάσεων μιας Μαρκοβιανής διαδικασίας είναι ένας ιδιάζων πίνακας, δηλαδή το 0 είναι ιδιοτιμή του $\mathbf{Q}$.

Η ιδιότητα μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα η πιθανότητα η αλυσίδα να βρίσκεται σε μια κατάσταση να είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατάσταση, εκφράζεται με τον όρο εργοδικότητα.

Ορισμός I.4.6 Μια Μαρκοβιανή διαδικασία είναι εργοδική αν υπάρχει ένα σύνολο από πιθανότητες $\{\pi_j\}_{j \in S}$ τέτοιες ώστε $\pi_j \geq 0$, για κάθε $j \in S$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$, και για κάθε

$i \in S$ και $s \geq 0$ ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(s, t) = \pi_j.$$

Ορισμός I.4.7 Ονομάζουμε έναν πίνακα ευσταθή αν έχει όλες τις γραμμές του ίδιες.

Ορισμός I.4.8 Μια Μαρκοβιανή διαδικασία καλείται αδιαχώριστη αν για κάθε $i, j \in S$ και $s \geq 0$ υπάρχουν $t_1 \geq s$ και $t_2 \geq s$ τέτοια ώστε $p_{ij}(s, t_1) > 0$ και $p_{ji}(s, t_2) > 0$.

Θεώρημα I.4.6 Έστω Μαρκοβιανή διαδικασία $\{X_t\}_{t \geq 0}$ με πίνακα τάσεων $\mathbf{Q}$, όπου $\|\mathbf{Q}\| < q < \infty$. Αν η $\{X_t\}_{t \geq 0}$ είναι μια αδιαχώριστη διαδικασία, τότε είναι εργοδική αν και μόνο αν υπάρχει ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\pi} = \{\pi_j\}_{j \in S}$ τέτοιο ώστε $\pi_j \geq 0$, $\sum_{j \in S} \pi_j = 1$, και επιπλέον

$$\boldsymbol{\pi}^T \mathbf{Q} = \mathbf{0}^T.$$

1.5 Ομογενή Μαρκοβιανά Συστήματα (ΟΜΣ) διακριτού χρόνου

Έστω ένα σύστημα του οποίου γνωρίζουμε το συνολικό αριθμό των μελών του σε κάθε χρονική στιγμή $t=0,1,2,\dots$ και επίσης τα μέλη του ταξινομούνται σε k καταστάσεις σύμφωνα με κάποιο χαρακτηριστικό τους. Ο αριθμός των μελών μπορεί να είναι σταθερός, ή να δίνεται σαν μια ακολουθία μέσα στο χρόνο ή να είναι μια πρόβλεψη μιας γνωστής στοχαστικής διαδικασίας. Το χρόνο θα τον θεωρήσουμε προς το παρόν διακριτό, ενώ η θεώρηση μπορεί να επεκταθεί και σε συνεχή χρόνο.

Το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας των ομογενών Μαρκοβιανών συστημάτων (ΟΜΣ) είναι ο προσδιορισμός της πληθυσμιακής δομής του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή.

Έστω ο χώρος των καταστάσεων $S = \{1, 2, \dots, k\}$. Κάθε μέλος του συστήματος μπορεί να ανήκει σε μια μόνο κατάσταση.

Έστω:

$N_i(t)$: ο αναμενόμενος αριθμός των μελών του συστήματος στην κατάσταση i την χρονική στιγμή t .

p_{ij} : η πιθανότητα μετάβασης ενός μέλους από μια κατάσταση i σε μία κατάσταση j σε κάθε χρονικό διάστημα.

p_{oi} : η πιθανότητα ένα νεοεισερχόμενο μέλος να πάει στην κατάσταση i σε κάθε χρονικό διάστημα. Αν δεν υπάρχει είσοδος νέων μελών τότε $p_{oi} = 0$.

$p_{i,k+1}$: η πιθανότητα ένα μέλος που βρίσκεται στην κατάσταση i να εγκαταλείψει το σύστημα σε κάθε χρονικό διάστημα. Αν το σύστημα είναι κλειστό τότε $p_{i,k+1} = 0$.

$\Delta T(t)$: η διαφορά μεγέθους του συστήματος στο διάστημα $[t-1, t)$, $\Delta T(t) = T(t) - T(t-1)$. Τα νέα μέλη εισέρχονται όλα στο τέλος κάθε διαστήματος $[t-1, t)$.

$N_{k+1}(t)$: ο αναμενόμενος αριθμός των μελών που αποχωρούν από το σύστημα στο ίδιο διάστημα.

Ορίζουμε:

- Τον $k \times k$ πίνακα $\mathbf{P}$ με στοιχεία τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij} . Ο πίνακας $\mathbf{P}$ είναι γενικά υποστοχαστικός, αφού είναι $p_{i,k+1} \geq 0$, οπότε

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{ik} \leq 1.$$

- Το διάνυσμα πιθανοτήτων εισόδου

$$\mathbf{p}_0 = [p_{01}, p_{02}, \dots, p_{0k}],$$

το οποίο είναι στοχαστικό.

- Το διάνυσμα πιθανοτήτων απώλειας

$$\mathbf{p}_{k+1} = [p_{1,k+1}, p_{2,k+1}, \dots, p_{k,k+1}].$$

Η πληθυσμιακή δομή του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από το διάνυσμα

$$\mathbf{N}(t) = [N_1(t), N_2(t), \dots, N_k(t)]^T.$$

Η γνώση των $\mathbf{P}$, $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_{k+1}$ και $\{T(t)\}_{t=0}^{\infty}$ παρέχει επαρκή πληροφορία για να μελετήσουμε την εξέλιξη ενός ΟΜΣ.

Ορισμός 1.5.1 Ορίζουμε τον πίνακα των πιθανοτήτων της συνολικής μετάβασης ενός μέλους από την κατάσταση i στην κατάσταση j ως

$$\mathbf{P}' = (p'_{ij}) \quad i, j \in S,$$

όπου

$$p'_{ij} = p_{ij} + p_{ik+1}p_{oj}.$$

Μία χαρακτηριστική περίπτωση για τον πίνακα $\mathbf{P}'$ είναι να ισχύει $p_{ik+1} = 0$ και $p_{oj} = 0$ για κάθε $i, j \in S$. Για την περίπτωση αυτή δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.5.2 Ένα ΟΜΣ σε συνεχή ή διακριτό χρόνο καλείται κλειστό αν δεν έχει είσοδο ή έξοδο.

Ο πίνακας $\mathbf{P}'$ (ορισμός 1.5.1) είναι στοχαστικός και ορίζει μονοσήμαντα μια Μαρκοβιανή αλυσίδα την οποία ονομάζουμε ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα.

Ονομάζουμε ΟΜΣ σε διακριτό χρόνο ένα σύστημα ή ένα φυσικό φαινόμενο που μπορεί να περιγραφεί με τα παραπάνω βασικά χαρακτηριστικά.

Η πληθυσμιακή δομή ενός Μαρκοβιανού συστήματος την χρονική στιγμή t δίνεται από την εξίσωση

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(t-1)\{\mathbf{P} + \mathbf{p}_{k+1}\mathbf{p}_0'\} + \Delta T(t)\mathbf{p}_0 = \mathbf{N}(t-1)\mathbf{P}' + \Delta T(t)\mathbf{p}_0, \quad (1.9)$$

ενώ για την μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς χρησιμοποιούμε την σχέση, που προκύπτει από την (1.8),

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(0)(\mathbf{P}')^t + \mathbf{p}_0 \sum_{\tau=0}^{t-1} \Delta T(t-\tau)(\mathbf{P}')^{\tau-1}. \quad (1.10)$$

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον έχει η μελέτη της συμπεριφοράς της πληθυσμιακής δομής $\mathbf{N}(t)$ για $t \rightarrow \infty$. Αν υπάρχει ασυμπτωτικά μια πληθυσμιακή δομή $\mathbf{N}(\infty)$ στην οποία συγκλίνει το σύστημα, τότε λέμε ότι το σύστημα έχει στατική κατανομή (stationary distribution).

Αν η ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική, με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων, τότε ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mathbf{P}')^t = (\mathbf{P}')^*,$$

όπου ο $(\mathbf{P}')^*$ είναι ένας πίνακας του οποίου όλες οι γραμμές είναι ίδιες και η γραμμή του $(\mathbf{p}')^*$ ικανοποιεί την σχέση

$$(\mathbf{p}')^* (\mathbf{P}')^* = (\mathbf{p}')^* .$$

Θεώρημα I.5.1 Έστω ένα ΟΜΣ και έστω ότι η ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική, με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Αν επιπλέον ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T, \{T(t) \geq T(t-1)\} ,$$

τότε υπάρχει η ασυμπτωτική πληθυσμιακή δομή $\mathbf{N}(\infty)$ και ισχύει

$$\mathbf{N}(\infty) = T(\mathbf{p}')^* .$$

Ορισμός I.5.3 Το στοχαστικό διάνυσμα

$$\mathbf{q}(t) = \frac{\mathbf{N}(t)}{T(t)}$$

ονομάζεται σχετική πληθυσμιακή δομή του συστήματος.

Είναι φανερό ότι η σχετική πληθυσμιακή δομή εκφράζει την πιθανότητα ένα μέλος του συστήματος να βρίσκεται στον χρόνο t σε μια από τις k καταστάσεις του συστήματος.

Θεώρημα I.5.2 Έστω ένα ΟΜΣ και έστω ότι η ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα είναι αδιαχώριστη, απεριοδική, με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Αν επιπλέον ισχύει

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\Delta T(t)}{T(t)} = 0, \{T(t) \geq T(t-1)\} ,$$

τότε υπάρχει η ασυμπτωτική σχετική πληθυσμιακή δομή $\mathbf{q}(\infty)$ και είναι

$$\mathbf{q}(\infty) = (\mathbf{p}')^* .$$

I.6 Ομογενή Μαρκοβιανά Συστήματα σε συνεχή χρόνο

Η επέκταση των ομογενών Μαρκοβιανών συστημάτων σε συνεχή χρόνο γίνεται κατά φυσικό τρόπο με βάση τα ομογενή Μαρκοβιανά συστήματα διακριτού χρόνου, θεωρώντας ότι οι μεταβάσεις μπορούν να γίνουν σε απειροελάχιστα μικρά χρονικά διαστήματα. Τότε βασικός πίνακας πληροφορίας της εξέλιξης του συστήματος καθίσταται ο πίνακας τάσεων $\mathbf{Q}$ των πιθανοτήτων μετάβασης, όπως τον ορίσαμε στις Μαρκοβιανές διαδικασίες (ορισμός I.4.3).

Είναι φανερό ότι η εξέλιξη του ΟΜΣ καθορίζεται από την Μαρκοβιανή αλυσίδα η οποία ορίζεται με βάση τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\mathbf{P}(s, t)$ (βλ. παράγραφο I.4). Η αλυσίδα αυτή καλείται ενσωματωμένη Μαρκοβιανή αλυσίδα του ΟΜΣ συνεχούς χρόνου. Έτσι η εξέλιξη της δομής του συστήματος δίνεται από τις

διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε τις προς τα εμπρός διαφορικές εξισώσεις του Kolmogorov, δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{Q}, \quad (1.11)$$

(ορισμός I.4.4).

Το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t))^T$ της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας ικανοποιεί την εξίσωση

$$\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(0)\mathbf{P}(0,t),$$

όπου ο πίνακας $\mathbf{P}(0,t)$ υπολογίζεται από την επίλυση της (1.11). Έτσι, είναι

$$\mathbf{P}(0,t) = e^{\mathbf{Q}t},$$

οπότε

$$\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(0)e^{\mathbf{Q}t}. \quad (1.12)$$

Στην τελευταία εξίσωση το διάνυσμα $\mathbf{p}(0) = (p_1(0), p_2(0), \dots, p_k(0))^T$ δίνει τις πιθανότητες η αρχική κατάσταση της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας να είναι η i , $i = 1, 2, \dots, k$, και το διάνυσμα $\mathbf{p}(t)$ τις πιθανότητες η αλυσίδα να βρίσκεται στις διάφορες καταστάσεις i την χρονική στιγμή t .

Είναι προφανές ότι κάθε κλειστό ΟΜΣ έχει σταθερό μέγεθος. Στην περίπτωση αυτή αν θεωρήσουμε το διάνυσμα της σχετικής πληθυσμιακής δομής του ΟΜΣ

$$\mathbf{p}(t) = \frac{\mathbf{N}(t)}{T}, \quad t \geq 0,$$

τότε το $\mathbf{p}(0)$ της ενσωματωμένης Μαρκοβιανής αλυσίδας του ΟΜΣ παριστά, συγχρόνως, την αρχική σχετική πληθυσμιακή δομή του συστήματος, και αντίστοιχα το $\mathbf{p}^T(t) = \mathbf{p}^T(0)e^{\mathbf{Q}t}$ παριστά την σχετική πληθυσμιακή δομή του συστήματος την χρονική στιγμή t . Κατά συνέπεια η μελέτη της εξέλιξης της σχετικής πληθυσμιακής δομής ενός κλειστού ΟΜΣ γίνεται μέσω της μελέτης της εξίσωσης (1.12), και εξαρτάται από την μορφή του πίνακα $\mathbf{Q}$.

II. Γραμμικό Ελαστικό Σώμα

II.1 Στοιχεία από τον τανυστικό λογισμό

Ένα σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων u^i στον $\mathbb{R}^3$ ορίζεται ως προς κάποιο ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα x_i , με τρεις σχέσεις της μορφής

$$x_i = x_i(u^1, u^2, u^3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Αν ισχύει ότι

$$\frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} \neq 0,$$

τότε οι σχέσεις (2.1) αντιστρέφονται και δίνουν

$$u^i = u^i(x_1, x_2, x_3). \quad (2.2)$$

Ορισμός II.1.1 Ορίζουμε τα τρία γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^i} = \frac{\partial x_j}{\partial u^i} \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3,^\ddagger \quad (2.3)$$

τα οποία ονομάζονται διανύσματα βάσης στο σύστημα u^i και είναι εφαπτόμενα στις συντεταγμένες γραμμές u^i . Η βάση $\mathbf{E}_i$ ($i = 1, 2, 3$) ονομάζεται βάση του συστήματος συντεταγμένων u^i και είναι διαφορετική σε κάθε σημείο του χώρου.

Ορισμός II.1.2 Ορίζουμε τα γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα

$$\mathbf{E}^i = \text{grad} u^i = \frac{\partial u^i}{\partial x_j} \mathbf{e}_j, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (2.4)$$

τα οποία είναι κάθετα στις συντεταγμένες επιφάνειες στο σημείο $\mathbf{r}$. Η βάση $\mathbf{E}^i$ ($i = 1, 2, 3$) ονομάζεται αντίστροφη φυσική βάση του συστήματος u^i .

Για το ορθογώνιο καμπυλόγραμμο σύστημα συντεταγμένων ισχύει ότι τα διανύσματα της φυσικής βάσης $\mathbf{E}_i$ είναι παράλληλα προς τα διανύσματα της αντίστροφης βάσης $\mathbf{E}^i$ αφού ισχύει

$$\mathbf{E}^n \cdot \mathbf{E}_m = \frac{\partial u^n}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \cdot \frac{\partial x_i}{\partial u^m} \mathbf{e}_i = \frac{\partial u^n}{\partial u^m} = \delta_m^n = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}.$$

[‡] Ο δείκτης που εμφανίζεται δύο φορές ονομάζεται βωβός δείκτης και δηλώνει άθροιση για τις τιμές του $j = 1, 2, 3$.

Γενικά οι δύο αυτές βάσεις δεν ταυτίζονται.

Στην ειδική περίπτωση του ορθογώνιου Καρτεσιανού συστήματος x_i τα διανύσματα της φυσικής βάσης είναι

$$\mathbf{E}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x_i} = \mathbf{e}_i,$$

και τα διανύσματα της αντίστροφης φυσικής βάσης είναι

$$\mathbf{E}^i = \text{grad } x_i = \mathbf{e}_i^*.$$

Ορισμός II.1.3 Ορίζουμε σε ένα τυχόν σημείο, παράλληλα με τις βάσεις $\mathbf{E}_i$ και $\mathbf{E}^i$, ενός ορθογώνιου συστήματος καμπυλόγραμμων συντεταγμένων μια νέα ορθοκανονική βάση με διανύσματα

$$\mathbf{e}_i^* = \frac{\mathbf{E}_i}{|\mathbf{E}_i|} = \frac{\mathbf{E}^i}{|\mathbf{E}^i|}, i = 1, 2, 3.$$

(2.5)

Ένα διάνυσμα $\mathbf{A}$ εκφράζεται συναρτήσει της βάσης $\mathbf{e}_i^*$ με τη μορφή

$$\mathbf{A} = A_i^* \mathbf{e}_i^*.$$

Τα A_i^* έχουν τις ίδιες διαστάσεις με το $\mathbf{A}$ και ονομάζονται φυσικές συνιστώσες του $\mathbf{A}$.

Ένα διάνυσμα $\mathbf{A}$ μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\mathbf{E}_i$ και $\mathbf{E}^i$, δηλαδή

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{E}_1 + A^2 \mathbf{E}_2 + A^3 \mathbf{E}_3,$$

ή

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{E}^1 + A_2 \mathbf{E}^2 + A_3 \mathbf{E}^3.$$

Ορισμός II.1.4 Ανταλλοιώτα ονομάζονται τα μεγέθη τα οποία κατά τη μετάβαση τους από ένα σύστημα σε ένα άλλο μετασχηματίζονται με σχέσεις της μορφής

$$(A^i)' = \frac{(\partial u^i)'}{\partial u^j} A^j \quad (\text{για βαθμωτά μεγέθη}),$$

$$(\mathbf{E}^i)' = \frac{\partial (u^i)'}{\partial u^j} \mathbf{E}^j \quad (\text{για διανυσματικά μεγέθη}).$$

Τον ανταλλοιώτο χαρακτήρα ενός μεγέθους τον δηλώνουμε χρησιμοποιώντας ένα πάνω δείκτη.

Ορισμός II.1.5 Συναλλοιώτα ονομάζονται τα μεγέθη τα οποία κατά τη μετάβαση τους από ένα σύστημα σε ένα άλλο μετασχηματίζονται με σχέσεις της μορφής

$$(A_i)' = \frac{\partial u^j}{(\partial u^i)'} A_j \quad (\text{για βαθμωτά μεγέθη}),$$

$$(\mathbf{E}_i)' = \frac{\partial u^j}{(\partial u^i)'} \mathbf{E}_j \text{ (για διανυσματικά μεγέθη).}$$

Το συναλλοίωτο χαρακτήρα ενός μεγέθους τον δηλώνουμε χρησιμοποιώντας ένα κάτω δείκτη.

Ορισμός II.1.6 Ορίζουμε τον Τανυστή δεύτερης τάξης $\mathbf{T}$ ως το διπλό άθροισμα

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j, \quad (2.6)$$

όπου τα T^{ij} είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων θέσεως

$$T^{ij} = T^{ij}(u^1, u^2, u^3),$$

και ονομάζονται ανταλλοίωτες συνιστώσες του τανυστή.

Οι ανταλλοίωτες συνιστώσες μετασχηματίζονται, κατά την αλλαγή συστήματος συντεταγμένων, σύμφωνα με τη σχέση

$$(T^{ij})' = \frac{\partial(u^i)'}{\partial u^m} \frac{\partial(u^j)'}{\partial u^n} T^{mn}, i, j = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Τα δυαδικά γινόμενα $\mathbf{E}_i \mathbf{E}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) ορίζονται σε κάθε σημείο του χώρου και αποτελούν μια βάση σε ένα διανυσματικό χώρο εννέα διαστάσεων.

Ιδιότητες δυαδικών γινομένων

1. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ισχύει η ιδιότητα

$$\mathbf{E}_i(a\mathbf{E}_j + b\mathbf{E}_k) = a\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j + b\mathbf{E}_i\mathbf{E}_k.$$

2. Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\mathbf{E}_i\mathbf{E}_j \neq \mathbf{E}_j\mathbf{E}_i \text{ (} i \neq j \text{)}.$$

3. Σε ένα τυχόν σημείο του χώρου εξαρτώνται από το σύστημα συντεταγμένων. Ισχύει ο μετασχηματισμός

$$(\mathbf{E}_i)'(\mathbf{E}_j)' = \frac{\partial u^m}{\partial(u^i)'} \frac{\partial u^n}{\partial(u^j)'} \mathbf{E}_m \mathbf{E}_n. \quad (2.8)$$

Μπορούμε με ανάλογο τρόπο να ορίσουμε τα δυαδικά γινόμενα για την ανταλλοίωτη βάση

$$\mathbf{E}^i \mathbf{E}^j \text{ (} i, j = 1, 2, 3 \text{),}$$

και τα μικτά γινόμενα

$$\mathbf{E}^i \mathbf{E}_j \text{ και } \mathbf{E}_i \mathbf{E}^j \text{ (} i, j = 1, 2, 3 \text{)}.$$

Τα παραπάνω δυαδικά γινόμενα μετασχηματίζονται ως συναλλοίωτα και ανταλλοίωτα μεγέθη ως προς κάθε δείκτη χωριστά ανάλογα με τη θέση του δείκτη.

Οι ανταλλοίωτες συνιστώσες ενός τανυστή $\mathbf{T}$ αναφέρονται στην ανάλυσή του ως προς τη βάση των δυαδικών γινομένων των συναλλοίωτων διανυσμάτων βάσης. Μπορούμε στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χρησιμοποιήσουμε ως βάσεις, για την ανάλυση του $\mathbf{T}$ τα ανταλλοίωτα και τα μικτά γινόμενα όποτε έχουμε τις ισοδύναμες εκφράσεις

$$\mathbf{T} = T^{ij} \mathbf{E}_i \mathbf{E}_j = T_{ij} \mathbf{E}^i \mathbf{E}^j = T_j^i \mathbf{E}_i \mathbf{E}^j = T_i^j \mathbf{E}^i \mathbf{E}_j. \quad (2.9)$$

Ανάλογα με τις θέσεις των δεικτών έχουμε τις συναλλοίωτες, ανταλλοίωτες και μικτές συνιστώσες του ταυυστή.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό του ταυυστή δεύτερης τάξης σε ταυυστές ανώτερης τάξης. Έτσι μπορούμε να πούμε πως το βαθμωτό μέγεθος είναι ένας ταυυστής μηδενικής τάξης ενώ το διάνυσμα ένας ταυυστής πρώτης τάξης.

Πράξεις με ταυυστές:

1. Ως άθροισμα των ταυυστών A^{ij} και B^{ij} ορίζουμε τον ταυυστή

$$C^{ij} = A^{ij} + B^{ij}.$$

Δεν νοείται οι πρόσθεση ανταλλοίωτων και συναλλοίωτων συνιστωσών αφού αυτές αναφέρονται σε διαφορετικούς διανυσματικούς χώρους.

2. Ως γινόμενο ενός ταυυστή A^{ij} με ένα βαθμωτό μέγεθος λ ορίζεται ο ταυυστής

$$\lambda A^{ij}.$$

3. Δύο ταυυστές μπορούν να πολλαπλασιαστούν εξωτερικά οπότε και δίνουν ένα ταυυστή τάξης ίσης με το άθροισμα των τάξεων των δύο ταυυστών

$$C_{km}^{ijl} = A_k^{ij} B_m^l.$$

Παρατήρηση: δεν μπορεί κάθε ταυυστής κάποιας υψηλής τάξης να γραφεί ως γινόμενο δύο ταυυστών χαμηλότερης τάξης.

4. Ο πολλαπλασιασμός δύο ταυυστικών μεγεθών με ταυτόχρονη άθροιση ως προς ένα ή περισσότερους δείκτες δημιουργεί ένα νέο ταυυστικό μέγεθος τάξης μικρότερης κατά δύο. Η πράξη αυτή καλείται συστολή και γίνεται πάντα για ένα πάνω και ένα κάτω δείκτη. Έτσι για παράδειγμα αν στο γινόμενο

$$C_{km}^{ijl} = A_k^{ij} B_m^l,$$

θέσουμε $j = m$ θα έχουμε τον ταυυστή 3^{ης} τάξης

$$C_k^{ij} = A_k^{im} B_m^l.$$

Πρόταση II.1.1 Αν για τυχόντα ταυυστή B^{mn} ο πολλαπλασιασμός με συστολή

$$C(i, j, m, n) B^{mn} = A_{ij},$$

είναι ταυυστής, τότε και το $C(i, j, m, n)$ είναι επίσης ταυυστής (Νόμος-Πηλίκου).

Ορισμός II.1.7 Συμμετρικός ταυυστής ονομάζεται ο ταυυστής για τον οποίο ισχύει

$$A^{ij} = A^{ji}.$$

Ορισμός II.1.8 Αντισυμμετρικός τανυστής ονομάζεται ο τανυστής για τον οποίο ισχύει

$$A^{ij} = -A^{ji}$$

Θεώρημα II.1.1 Κάθε τανυστής 2^{ης} τάξης μπορεί να εκφραστεί σαν συνδυασμός ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή 2^{ης} τάξης.

Ορισμός II.1.9 Γραμμικό στοιχείο ds ονομάζουμε την απειροστή απόσταση μεταξύ δύο σημείων $M(u^1, u^2, u^3)$ και $M'(u^1 + du^1, u^2 + du^2, u^3 + du^3)$ και δίνεται από τη σχέση

$$ds^2 = g_{ij} du^i du^j. \quad (2.10)$$

Ορισμός II.1.10 Μετρικός τανυστής ονομάζεται ο τανυστής με στοιχεία

$$g_{ij} = \mathbf{E}_i \cdot \mathbf{E}_j. \quad (2.11)$$

Μπορούμε να συσχετίσουμε ανταλλοίωτα και συναλλοίωτα μεγέθη με τη βοήθεια του μετρικού τανυστή, μέσω των τύπων

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i &= g_{ij} \mathbf{E}^j, \\ \mathbf{E}^i &= g^{ij} \mathbf{E}_j. \end{aligned}$$

Ενώ ισχύει

$$T^{ij} = g^{ik} g^{je} T_{ke}.$$

II.2 Κινηματική του παραμορφώσιμου σώματος.

Ως συνεχές μέσο θεωρούμε ένα σύνολο σωματιδίων συνεχώς κατανεμημένων. Η μελέτη της κίνησης ενός συνεχούς μέσου μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους:

1. Με τη μέθοδο του Lagrange (σωματιδιακή περιγραφή) κατα την οποία ο παρατηρητής παρακολουθεί την κίνηση ενός ορισμένου σωματιδίου και περιγράφει τις μεταβολές των ιδιοτήτων του καθώς αυτό κινείται μέσα στο πεδίο ροής.
2. Με τη μέθοδο του Euler (χωρική περιγραφή) κατά την οποία ο παρατηρητής εστιάζει την προσοχή του σε μία ορισμένη περιοχή του χώρου σταθερού όγκου και εξετάζει τις μεταβολές των ιδιοτήτων του μέσου στην περιοχή αυτή.

Για την περιγραφή της κίνησης ενός συνεχούς μέσου πρέπει να καθορίσουμε την αρχική θέση κάθε σημείου του μέσου. Οι συντεταγμένες ξ^1, ξ^2 και ξ^3 της αρχικής θέσης του σωματιδίου ονομάζονται υλικές συντεταγμένες και το διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{R}_0 = \xi^1 \mathbf{e}_1 + \xi^2 \mathbf{e}_2 + \xi^3 \mathbf{e}_3$$

ονομάζεται υλικό διάνυσμα θέσης του σωματιδίου. Το υλικό διάνυσμα θέσης καθορίζει μονοσήμαντα ένα σωματίδιο του συνεχούς μέσου.

Η θέση ενός σωματιδίου σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή δίνεται από τις χωρικές συντεταγμένες x^1, x^2 και x^3 ενώ το διάνυσμα της θέσης

$$\mathbf{R} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3$$

ονομάζεται χωρικό διάνυσμα θέσης. Το χωρικό διάνυσμα θέσης έχει να κάνει με μία συγκεκριμένη θέση του συνεχούς μέσου.

Η μεταβολή ενός μεγέθους Θ δίνεται με βοήθεια της παραγώγου

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{\partial\Theta}{\partial t} + \mathbf{u} \text{grad}\Theta$$

όπου

$\frac{d\Theta}{dt}$: Ο ολικός ρυθμός μεταβολής του μεγέθους Θ ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος

κινείται με το συνεχές μέσο.

$\frac{\partial\Theta}{\partial t}$: Ο τοπικός ρυθμός μεταβολής του μεγέθους Θ ως προς έναν παρατηρητή ο οποίος

παραμένει ακίνητος στο χώρο.

$\mathbf{u} \text{grad}\Theta$: Ο ρυθμός μεταβολής της μεταβλητής Θ λόγω της κίνησης του συνεχούς μέσου.

Μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση ενός συνεχούς μέσου μαθηματικά με έναν από τους παρακάτω τρόπους:

1. Με τις τρεις σχέσεις

$$x_i = x_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \quad (i=1,2,3),$$

για κάθε σωματίδιο t_0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 του συνεχούς μέσου.

2. Με τις τρεις σχέσεις

$$u_i = u_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3, t) \quad (i=1,2,3),$$

για κάθε σωματίδιο t_0, ξ^1, ξ^2, ξ^3 του συνεχούς μέσου.

3. Με το πεδίο ταχυτήτων

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3).$$

Αν είναι γνωστό το πεδίο ταχυτήτων ενός συνεχούς μέσου, ως προς το σύστημα του παρατηρητή, συναρτήσει των μεταβλητών του Euler

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3,$$

όπου

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t) \quad (i = 1, 2, 3),$$

τότε η επιτάχυνση $\mathbf{a}$ ενός σωματιδίου δίνεται από την ολική παράγωγο του διανύσματος $\mathbf{u}$, δηλαδή

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{u}) \mathbf{u},$$

όπου $\text{grad} \mathbf{u}$ ο Καρτεσιανός τανυστής

$$\text{grad} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}.$$

Ορισμός II.2.1 Συνοδεύον σύστημα ονομάζεται το σύστημα συντεταγμένων ξ^i το οποίο μεταβάλλεται μαζί με το συνεχές μέσο, έτσι ώστε οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου του συνεχούς μέσου να μη μεταβάλλονται.

Ορισμός II.2.2 Ονομάζουμε τανυστή παραμόρφωσης ένα τανυστή με συνιστώσες

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (g'_{ij} - g_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.12)$$

Παρατήρηση: Θεωρούμε τον τανυστή παραμόρφωσης Καρτεσιανό αφού αναφέρεται στο συνοδεύον σύστημα στην αρχική κατάσταση το οποίο είναι ορθογώνιο Καρτεσιανό σύστημα. Οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης θα μπορούσαν να θεωρηθούν και συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης στο σύστημα x_i αφού στην χρονική στιγμή t_0 ταυτίζεται με το συνοδεύον σύστημα.

Ιδιότητες τανυστή παραμόρφωσης:

1. Ο τανυστής παραμόρφωσης είναι συμμετρικός αφού και ο μετρικός τανυστής είναι συμμετρικός.
2. Τα μεγέθη E_{ij} είναι διάφορα του μηδενός μόνο όταν η περιοχή του σημείου M παραμορφώνεται. Αν η περιοχή μετατοπιζόταν σαν στερεό

σώμα τότε θα είχαμε $E_{ij} = 0$ ($i, j = 1, 2, 3$). Συνεπώς δε μπορούμε να περιγράψουμε με τον τανυστή παραμόρφωσης την μετατόπιση της περιοχής ενός σημείου M ως στερεό σώμα.

3. Τα μεγέθη E_{ij} σχετίζονται με την παραμόρφωση μόνο της περιοχής του σημείου M , όπως την αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής που μετέχει στην κίνηση της περιοχής αυτής. Τα E_{ij} είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων ξ^i και συνεπώς, γενικά, είναι διαφορετικά για τα διάφορα σημεία του συνεχούς μέσου.
4. Ο τανυστής παραμόρφωσης αναφέρεται στην παραμόρφωση από μια αρχική σε μια τελική κατάσταση. Ο χρόνος δεν υπεισέρχεται άμεσα στην παραμόρφωση.

Οι συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης δίνονται από την σχέση

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi^j} + \frac{\partial w_j}{\partial \xi^i} + \frac{\partial w_m}{\partial \xi^i} \frac{\partial w_m}{\partial \xi^j} \right) (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.13)$$

ή ισοδύναμα

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \frac{\partial w_m}{\partial x_i} \frac{\partial w_m}{\partial x_j} \right) (i, j = 1, 2, 3), \quad (2.14)$$

όπου

$$w_i = x'_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης.

Από τις παραπάνω σχέσεις μπορούμε να υπολογίσουμε τον τανυστή παραμόρφωσης όταν είναι γνωστό το διάνυσμα της μετατόπισης υπό τη μορφή $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x_1, x_2, x_3)$.

Πρόταση II.2.1 Σε κάθε σημείο του συνεχούς μέσου η παραμόρφωση είναι ισοδύναμη προς συμπίεση ή έκταση κατά μήκος τριών κάθετων μεταξύ τους διευθύνσεων, που συμπίπτουν με τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή παραμόρφωσης στο σημείο αυτό.

Ορισμός II.2.3 Τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης ονομάζεται ο τανυστής με συνιστώσες

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.15)$$

Ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης εκφράζει την ταχύτητα με την οποία γίνεται η παραμόρφωση.

Ιδιότητες τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης:

1. Επειδή ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης είναι συμμετρικός, υπάρχει πάντοτε ένα ορθογώνιο σύστημα τη στιγμή t , τέτοιο ώστε ο τανυστής ρυθμούς παραμόρφωσης να είναι διαγώνιος σε ένα ορισμένο σημείο M . Οι διευθύνσεις των αξόνων συμπίπτουν με τα ιδιοδιανύσματα του τανυστή στο σημείο M και ονομάζονται κύριες διευθύνσεις του τανυστή.
2. Τα διαγώνια στοιχεία δίνουν την ταχύτητα μεταβολής των μηκών των υλικών γραμμών που είναι παράλληλες προς τους άξονες x_i και τα μη διαγώνια στοιχεία την ταχύτητα μεταβολής της γωνίας μεταξύ δύο υλικών γραμμών παράλληλων αρχικά προς δύο άξονες x_i .
3. Ο τανυστής ρυθμού παραμόρφωσης δίνει τον ρυθμό μεταβολής του συνεχούς μέσου ως προς το συνοδεύον σύστημα, δηλαδή ως προς έναν παρατηρητή που μετέχει στην κίνηση του συνεχούς μέσου, και όχι ως προς το σύστημα του παρατηρητή.

Ένας πολύ βασικός τύπος στη θεωρία των συνεχών μέσων είναι ο τύπος των Cauchy-Helmholtz

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m} + \text{grad} \Phi, \quad (2.16)$$

όπου

$\mathbf{m}$: το διάνυσμα της σχετικής θέσης ως προς το γειτονικό σημείο αναφοράς

$$\mathbf{m} = \mathbf{M}_0 \mathbf{M} = \Delta x_1 \mathbf{e}_1 + \Delta x_2 \mathbf{e}_2 + \Delta x_3 \mathbf{e}_3.$$

$\boldsymbol{\omega}$: δίνεται από τον τύπο

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \mathbf{u}.$$

Φ : δίνεται από τον τύπο

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(e_{11} \Delta x_1^2 + e_{22} \Delta x_2^2 + e_{33} \Delta x_3^2 + 2e_{12} \Delta x_1 \Delta x_2 + 2e_{13} \Delta x_1 \Delta x_3 + 2e_{23} \Delta x_2 \Delta x_3 \right).$$

II.3 Δυναμική του συνεχούς μέσου.

Ορισμός II.3.1 Ονομάζουμε δυνάμεις μάζας ή δυνάμεις όγκου τις δυνάμεις που είναι συνεχώς κατανεμημένες σε ολόκληρο το συνεχές μέσο. Τέτοιες δυνάμεις είναι οι δυνάμεις βαρύτητας, οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις και οι δυνάμεις αδράνειας.

Οι δυνάμεις μάζας προέρχονται από την αλληλεπίδραση των σωμάτων μεταξύ τους και συνδέονται πάντα με τη μάζα του συνεχούς μέσου.

Ορισμός II.3.2 Ονομάζουμε δυνάμεις επαφής ή επιφανειακές δυνάμεις τις δυνάμεις που ενεργούν σε κάθε διαχωριστική επιφάνεια που χωρίζει δύο τμήματα του

συνεχούς μέσου. Η επιφάνεια αυτή μπορεί να είναι μια ιδεατή επιφάνεια στο εσωτερικό του μέσου ή μια οριακή επιφάνεια που περιορίζει το μέσο.

Ορισμός II.3.3 Σε δεδομένη χρονική στιγμή t , γύρω από ένα σημείο M του συνεχούς μέσου, θεωρούμε ένα στοιχειώδη όγκο ΔV που περιέχει ύλη με στοιχειώδη μάζα Δm . Ορίζουμε στο σημείο $M(x_1, x_2, x_3)$ τη χρονική στιγμή t , ως πυκνότητα $\rho(x_1, x_2, x_3, t)$ του σημείου M το όριο

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Το βαθμωτό σημειακό μέγεθος της πυκνότητας που ορίσαμε αποτελεί ένα μέτρο της ποσότητας της ύλης που είναι συγκεντρωμένη στην άμεση γειτονιά του σημείου (x_1, x_2, x_3) τη χρονική στιγμή t .

Ορισμός II.3.4 Ονομάζουμε πυκνότητα των δυνάμεων μάζας $\mathbf{f}(x_1, x_2, x_3)$ στο σημείο M , τη χρονική στιγμή t , το όριο

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta \mathbf{F}}}{\Delta m}.$$

Δεχόμαστε την αρχή της διατήρησης της μάζας μίας υλικής περιοχής του συνεχούς μέσου, δηλαδή ότι η μάζα της περιοχής δεν μεταβάλλεται κατά την κίνηση του συνεχούς μέσου. Η μαθηματική έκφραση της αρχής διατήρησης της μάζας δίνεται από την εξίσωση της συνέχειας

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (2.17)$$

Ορισμός II.3.5 Ονομάζουμε διάνυσμα τάσης $\mathbf{p}$ την πυκνότητα των επιφανειακών δυνάμεων στο σημείο M

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta \sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}}{\Delta \sigma}. \quad (2.18)$$

Το διάνυσμα τάσης εξαρτάται από την θέση M και από τον προσανατολισμό της στοιχειώδους επιφάνειας $\Delta \sigma$ η οποία ορίζεται από τη διανυσματική μονάδα $\mathbf{n}$ την κάθετη στη στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta \sigma$ και η φορά της ορίζεται, συμβατικά, προς το εξωτερικό του τμήματος του συνεχούς μέσου που δέχεται την επίδραση.

Το διάνυσμα τάσης δεν είναι, γενικά, παράλληλο προς τη διανυσματική μονάδα $\mathbf{n}$ και συνεπώς αναλύεται σε δύο συνιστώσες: την ορθή τάση $\mathbf{t}_n$ που είναι κάθετη προς την επιφάνεια και την διατμητική τάση $\mathbf{t}_\tau$ που είναι εφαπτόμενη στην επιφάνεια.

Η τάση δεν είναι ένα απλό διανυσματικό μέγεθος. Εξαρτάται από τον προσανατολισμό της επιφάνειας πάνω στην οποία ασκείται η δύναμη και τη

διεύθυνση της δύναμης. Για να μπορέσουμε να περιγράψουμε πλήρως την τάση κάνουμε χρήση του τανυστή της τάσης.

Ορισμός II.3.6 Ονομάζουμε τανυστή τάσης $\mathbf{T}$ τον τανυστή με συνιστώσες T_{ij} η οποίες εκφράζουν τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας η οποία ασκείται πάνω σε μια i -επιφάνεια κατά τη j -διεύθυνση του χώρου και ορίζεται μαθηματικά

$$T_{ij} = \lim_{\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \frac{\Delta F_j}{\Delta\sigma_i}.$$

Στο σύστημα x_i τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή τάσης αντιστοιχούν στην ορθή τάση και τα μη διαγώνια στοιχεία στη διατμητική τάση για τα συντεταγμένα επίπεδα.

Ιδιότητες του τανυστή τάσης:

1. Ο τανυστής τάσης είναι συμμετρικός.
2. Χαρακτηρίζει πλήρως την κατάσταση τάσης σε ένα δεδομένο σημείο του χώρου.
3. Με τη βοήθεια του τανυστή τάσης μπορούμε να προσδιορίσουμε το διάνυσμα τάσης από τη σχέση

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$$

Πρόταση II.3.1 Η κατάσταση τάσης σε τυχόν σωματίδιο M του συνεχούς μέσου μπορεί να θεωρηθεί ως συνδυασμός τριών απλών συμπίεσεων ή εκτάσεων κατά μήκος τριών κάθετων μεταξύ τους διευθύνσεων, που είναι οι κύριες διευθύνσεις του τανυστή τάσης στο σημείο M .

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την κίνηση ενός συνεχούς μέσου δίνεται από τις εξισώσεις Euler

$$\rho(\mathbf{z}, t) \mathbf{a}(\mathbf{z}, t) = \text{div} \mathbf{T}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{z}, t). \quad (2.19)$$

II.4 Γραμμικό Ελαστικό Σώμα.

Υπάρχει σχέση μεταξύ των φορτίων που ενεργούν πάνω σε ένα σώμα και την παραμόρφωση που αυτό υφίσταται. Ένα συγκεκριμένο φορτίο μπορεί να δημιουργήσει διαφορετική παραμόρφωση σε διαφορετικά υλικά σώματα. Η σχέση αυτή αποδίδει μαθηματικά την φυσική ιδιότητα των σωμάτων που είναι γνωστή με τον όρο ελαστικότητα.

Αν η παραπάνω σχέση είναι γραμμική, δηλαδή όλα τα στοιχεία του τανυστή τάσης είναι γραμμικές εκφράσεις των στοιχείων του τανυστή παραμόρφωσης τότε το σώμα χαρακτηρίζεται ως γραμμικό ελαστικό σώμα.

Ορισμός II.4.1 Ονομάζουμε τανυστή ελαστικότητας τον τανυστή τέταρτης τάξης C_{ijmn} που συνδέει τις συνιστώσες του τανυστή τάσης με τις συνιστώσες του τανυστή παραμόρφωσης

$$T_{ij} = C_{ijmn} E_{mn} \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (2.20)$$

Η σχέση (2.20) δίνει τις καταστατικές εξισώσεις για το πρότυπο του γραμμικού ελαστικού μέσου^ξ. Οι παραπάνω καταστατικές εξισώσεις έχουν την ιδιότητα να εξαφανίζεται η παραμόρφωση όταν μηδενίζεται το φορτίο (η τάση) διότι αν $E_{mn} = 0$ τότε $p_{ij} = 0$. Επίσης δεν επηρεάζεται από την ταχύτητα μεταβολής της παραμόρφωσης.

Το παραπάνω πρότυπο του γραμμικού ελαστικού μέσου δεν είναι γενικά ισότροπο, δηλαδή η συμπεριφορά του δεν είναι η ίδια για διαφορετικές διευθύνσεις της παραμόρφωσης. Υπάρχουν όμως πολλά σώματα που εκτός από τις ιδιότητες που καθορίζονται από τις εξισώσεις της σχέσης (2.20) έχουν την ιδιότητα της ισοτροπίας. Τέτοια σώματα ονομάζονται γραμμικά ισότροπα ελαστικά σώματα.

Ορισμός II.4.2 Ονομάζουμε ισότροπο τανυστή ένα τανυστή ο οποίος έχει την ιδιότητα να μην μεταβάλλονται οι αριθμητικές τιμές των συνιστωσών του όταν εκτελούμε στροφή του ορθογωνίου Καρτεσιανού συστήματος x_i , δηλαδή όταν κάνουμε αλλαγή μεταβλητών από ένα ορθογώνιο σύστημα σε ένα άλλο.

Για να είναι, λοιπόν, ένα γραμμικό ελαστικό σώμα ισότροπο πρέπει ο τανυστής ελαστικότητας να είναι ισότροπος. Η γενικότερη μορφή ενός ισότροπου Καρτεσιανού τανυστή τέταρτης τάξης είναι

$$C_{ijmn} = \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + a \delta_{im} \delta_{jn} + b \delta_{in} \delta_{jm}. \quad (2.21)$$

όπου λ, a, b αυθαίρετες σταθερές.

Αν αντικαταστήσουμε τον ισότροπο τανυστή (2.21) στην σχέση (2.20) έχουμε

$$\begin{aligned} T_{ij} &= C_{ijmn} E_{mn} \\ \Rightarrow T_{ij} &= (\lambda \delta_{ij} \delta_{mn} + a \delta_{im} \delta_{jn} + b \delta_{in} \delta_{jm}) E_{mn} \\ \Rightarrow T_{ij} &= \lambda \delta_{ij} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + a E_{ij} + b E_{ji}. \end{aligned}$$

Επειδή ο τανυστής παραμόρφωσης είναι συμμετρικός

$$E_{ij} = E_{ji},$$

άρα

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + (a + b) E_{ij},$$

και αν θέσουμε

^ξ Με την προϋπόθεση ότι η παραμόρφωση είναι μικρή.

$$\mu = \frac{(a+b)}{2},$$

έχουμε

$$T_{ij} = \lambda \delta_{ij} (E_{11} + E_{22} + E_{33}) + 2\mu E_{ij}, \quad (2.22)$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Trace}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}. \quad (2.23)$$

Παρατηρούμε ότι σε περίπτωση ισοτροπίας ο τανυστής ελαστικότητας εξαρτάται μόνο από δύο παραμέτρους τα λ και μ , που ονομάζονται σταθερές του Lamé, και χαρακτηρίζουν πλήρως το γραμμικό ισότροπο ελαστικό σώμα.

Πρόταση II.4.1 Στην περίπτωση γραμμικού ελαστικού σώματος ο τανυστής τάσης και ο τανυστής παραμόρφωσης έχουν τις ίδιες κύριες διευθύνσεις σε κάθε σημείο.

Ορισμός II.4.3 Μέτρο ελαστικότητας ή μέτρο Young ονομάζουμε τον λόγο της τάσης προς την παραμόρφωση κατά τον άξονα x_1

$$E = \frac{T_{11}}{E_{11}},$$

και συνδέεται με τις σταθερές του Lamé με τη σχέση

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}. \quad (2.24)$$

Ορισμός II.4.4 Ονομάζουμε συντελεστή του Poisson το λόγο των σχετικών επιμηκύνσεων κατά τον άξονα x_1 και κάθετα προς αυτόν, δηλαδή

$$\nu = -\frac{E_{22}}{E_{11}} = -\frac{E_{33}}{E_{11}} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.25)$$

Το μέτρο ελαστικότητας και ο συντελεστής Poisson είναι σταθερές που χαρακτηρίζουν το σώμα.

Ορισμός II.4.5 Ελαστικά ομογενές χαρακτηρίζεται ένα σώμα όταν το μέτρο ελαστικότητας και ο συντελεστής Poisson, δηλαδή οι σταθερές του Lamé, είναι ίδια σε όλα τα σημεία του σώματος.

Ορισμός II.4.6 Μέτρο διάτμησης ονομάζεται ο λόγος

$$\frac{T_{12}}{2E_{12}} = \mu \quad (2.26)$$

και ισούται με τη σταθερά μ του Lamé.

Από τη σχέση (2.26) μπορούμε να δούμε τη φυσική σημασία της σταθεράς μ του Lamé και η οποία μας δείχνει την μεταβολή της γωνίας δυο υλικών ευθύγραμμων τμημάτων, ως προς τους άξονες x_1 και x_2 .

III. Αριθμητική επίλυση διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

III.1 Ορισμοί και συνθήκες.

Ορισμός III.1.1 Ονομάζουμε Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους (Δ.Ε.Μ.Π.) τις σχέσεις μεταξύ δύο ή περισσότερων μεταβλητών $x, y, \dots$ μιας άγνωστης συνάρτησης u και διαφόρων μερικών παραγώγων της u ως προς τις μεταβλητές $x, y, \dots$, όπως για παράδειγμα

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots$$

Άγνωστη και ζητούμενη σε αυτήν την εξίσωση είναι η συνάρτηση $u = u(x, y)$. Οποσδήποτε για να είναι μια διαφορική εξίσωση Δ.Ε.Μ.Π. θα πρέπει η ζητούμενη συνάρτηση u να είναι τουλάχιστον δύο ή περισσότερων μεταβλητών χωρίς να είναι απαραίτητο να εμφανίζεται αμέσως αυτή η συνάρτηση ή οι ανεξάρτητες μεταβλητές x, y . Απαραίτητο είναι να εμφανίζεται μια τουλάχιστον μερική παράγωγος της u ως προς κάποια ανεξάρτητη μεταβλητή.

Θεωρούμε ως γενική μορφή συστήματος Δ.Ε.Μ.Π. πρώτης τάξης την

$$\mathbf{A} \frac{\partial u}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial u}{\partial y} = \mathbf{G}. \quad (3.1)$$

Μπορούμε να κατατάξουμε τις Δ.Ε.Μ.Π. σε τρεις κατηγορίες με την βοήθεια της ορίζουσας

$$\det(\mathbf{A}\mu - \mathbf{B}) = 0, \quad (3.2)$$

όπου

$$\mu = \frac{dy}{dx}.$$

Έτσι έχουμε

- Ένα σύστημα για το οποίο οι ρίζες της εξίσωσης (3.2) είναι όλες πραγματικές (όχι αναγκαστικά διάκριτες) τέτοιες ώστε να υπάρχουν n ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $(\mathbf{A}\mu - \mathbf{B})[z_N] = \theta$ λέγεται υπερβολικό. Το σύστημα λέγεται ολικά υπερβολικό όταν οι ρίζες της εξίσωσης (3.2) είναι διακριτές και πραγματικές.
- Ένα σύστημα για το οποίο οι ρίζες της (3.2) είναι όλες πραγματικές, όχι διακριτές και υπάρχουν λιγότερες από n ανεξάρτητες λύσεις της εξίσωσης $(\mathbf{A}\mu - \mathbf{B})[z_N] = \theta$, λέγεται παραβολικό.

- Ένα σύστημα για το οποίο καμία ρίζα της εξίσωσης (3.2) δεν είναι πραγματική λέγεται ελλειπτικό.

Μπορούμε να θεωρήσουμε ως γενική μορφή των Δ.Ε.Μ.Π. δεύτερης τάξης την

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u) = 0. \quad (3.1)$$

Έτσι κατατάσσουμε τις Δ.Ε.Μ.Π. σε τρεις κατηγορίες. Αν ισχύει

- $B^2 - 4AC < 0$, λέμε ότι η Δ.Ε.Μ.Π. είναι Ελλειπτική.
➤ $B^2 - 4AC = 0$, λέμε ότι η Δ.Ε.Μ.Π. είναι Παραβολική.
➤ $B^2 - 4AC > 0$, λέμε ότι η Δ.Ε.Μ.Π. είναι Υπερβολική.

Ορισμός III.1.2 Ονομάζουμε οριακή συνθήκη κατά Dirichlet την συνθήκη η συνάρτηση u να παραμένει σταθερή σε ορισμένα σημεία του ορίου του υπολογισμού.

Ορισμός III.1.3 Ονομάζουμε οριακή συνθήκη κατά Neumann την συνθήκη η παράγωγος της συνάρτησης u να παραμένει σταθερή σε ορισμένα σημεία του ορίου του υπολογισμού.

III.2 Μέθοδος πεπερασμένων διαφορών.

Αν είναι γνωστή η συνάρτηση $u(x, y)$ σε ένα τυχαίο σημείο (x_0, y_0) τότε με τη βοήθεια του αναπτύγματος του Taylor μπορούμε να προσεγγίσουμε τις τιμές των παραγώγων της συνάρτησης $u(x, y)$ στο σημείο αυτό.

Το ανάπτυγμα Taylor της $u(x, y)$ για την επόμενη τιμή $x_0 + \Delta x$ είναι

$$u(x_0 + \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_0, y_0)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4), \quad (3.2)$$

ενώ για την προηγούμενη τιμή $x_0 - \Delta x$ είναι

$$u(x_0 - \Delta x, y_0) = u(x_0, y_0) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_0, y_0)}{\partial x^3} + O(\Delta x^4). \quad (3.3)$$

Από τις (3.2) και (3.3) μπορούμε να πάρουμε προσεγγιστικά την πρώτη, δεύτερη και τις ανώτερες παραγώγους της $f(x, y)$. Πράγματι από την (3.2) έχουμε ότι η πρώτη παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.4)$$

ενώ από την (3.3) δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.5)$$

Με αφαίρεση της (3.3) από την (3.2), η πρώτη παράγωγος δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} + O(\Delta x). \quad (3.6)$$

Με πρόσθεση των (3.2) και (3.3) έχουμε ότι η δεύτερη παράγωγος της $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) δίνεται από την σχέση

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0)}{\partial x^2} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - 2u(x_0, y_0) + u(x_0 - \Delta x, y_0)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.7)$$

Αν συμβολίσουμε τις θέσεις των x, y στο πλέγμα με δύο κάτω δείκτες και την μεταβλητή του χρόνου με ένα πάνω δείκτη στη συνάρτηση u , έχουμε ότι

$$u(x, y, t) = u_{i,j}^n,$$

και οι σχέσεις (3.4) – (3.7) γίνονται

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} = \frac{u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial u(x_0, y_0, t_0)}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_0, y_0, t_0)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.11)$$

Για την επίλυση ενός προβλήματος Δ.Ε.Μ.Π. διακριτοποιούμε τον χώρο με την χρήση ενός πλέγματος και με την χρήση των σχέσεων (3.8) - (3.11) επιλύουμε αριθμητικά το πρόβλημα.

Παράδειγμα III.2.1 Να βρούμε αριθμητικά την λύση της Δ.Ε.Μ.Π.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, x \in (0,1), t > 0, \quad (3.12)$$

με αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), x \in [0,1],$$

και οριακές συνθήκες

$$u(0, t) = a(t), \quad u(1, t) = b(t), t \geq 0.$$

Η παράγωγος ως προς το χρόνο δίνεται με τη βοήθεια της σχέσης (3.8)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t},$$

ενώ η δεύτερη παράγωγος ως προς το x με τη βοήθεια της (3.11)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2}.$$

Έτσι η Δ.Ε.Μ.Π. (3.12) γίνεται

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \nu \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2},$$

ή με πράξεις

$$u_i^{n+1} = u_i^n + \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \quad (3.13)$$

Με τη βοήθεια του σχήματος (3.13) και με τη επιλογή κατάλληλου βήματος Δx και Δt μπορούμε να υπολογίζουμε αριθμητικά την εξέλιξη της συνάρτησης $u(x, t)$ σε κάθε χρονική στιγμή.

●

Ορισμός III.2.1 Ρητό ή explicit σχήμα ονομάζεται το σχήμα στο οποίο οι λύσεις στο χρονικό βήμα $n+1$ βρίσκονται μόνο με την γνώση των τιμών στο προηγούμενο χρονικό βήμα n .

Ορισμός III.2.2 Implicit σχήμα ονομάζεται το σχήμα στο οποίο οι λύσεις στο χρονικό βήμα $n+1$ δίνονται με τη βοήθεια τιμών που τις έχουμε προβλέψει για την χρονική στιγμή $n+1$.

Ορισμός III.2.3 Λέμε ότι το αριθμητικό σχήμα συγκλίνει, όταν η τιμή της αριθμητικής λύσης της Δ.Ε.Μ.Π. προσεγγίζει την τιμή της αναλυτικής λύσης όταν τα Δx και Δt τείνουν στο μηδέν.

Ορισμός III.2.4 Ευσταθές σχήμα ονομάζεται το σχήμα στο οποίο τα αρχικά σφάλματα δεν αυξάνονται με μεγάλο ρυθμό κατά τον υπολογισμό αλλά αντίθετα μπορούμε να έχουμε και μείωση αυτών.

B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως Ελαστικό μέσο.

I. Το Ομογενές Μαρκοβιανό Σύστημα ως ελαστικό μέσο

I.1 Γενικά

Η μορφή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, που περιγράφουν ένα Ομογενές Μαρκοβιανό Σύστημα (ΟΜΣ) με n καταστάσεις και σταθερό μέγεθος, προτείνει ότι η εξέλιξη του συστήματος μπορεί να μελετηθεί κατ' αναλογία με εκείνη ενός συνεχούς μέσου.

Με την υπόθεση ότι κάθε προσιτή (attainable) δομή ενός ΟΜΣ περιγράφεται από ένα σημείο του χώρου $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε ότι η εξέλιξη του ΟΜΣ, περιγράφεται από την εξέλιξη αυτών των σημείων στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο μπορούμε να θεωρήσουμε ως ένα γραμμικό ελαστικό μέσο.

Αν θεωρήσουμε το $n \times 1$ διάνυσμα πιθανοτήτων

$$\mathbf{x}(t) = (x_i(t))_{i \in S}$$

όπου $x_i(t)$ δίνει την πιθανότητα ένα μέλος του ΟΜΣ να βρίσκεται στην κατάσταση i την χρονική στιγμή t , τότε σύμφωνα με τη θεωρία των ΟΜΣ έχουμε ότι η εξέλιξη της δομής του συστήματος δίνεται από τις Δ.Ε του Kolmogorov (σχέση 1.11)

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{x}^T(t) = \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}. \quad (4.1)$$

Το παραπάνω σύστημα των γραμμικών Δ.Ε ορίζει την κίνηση μιας στοχαστικής δομής στο χώρο $\mathbb{R}^n$. Η τροχιά κάθε αρχικής δομής $\mathbf{x}(0)$ δίνεται από τις σχέσεις

$$\mathbf{x}^T(t) = \mathbf{x}^T(0) e^{\mathbf{Q}t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2)$$

Από την (4.1) βλέπουμε ότι η ταχύτητα $\dot{\mathbf{x}}(t)$ εξαρτάται από την θέση. Έτσι, έχει νόημα να θεωρήσουμε ότι η κίνηση κάθε σημείου, κάθε χρονική στιγμή, εξαρτάται από την αλληλεπίδραση με τα γειτονικά σημεία οπότε, το ΟΜΣ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα συνεχές μέσο.

Ορισμός I.1.1 Ονομάζουμε σύνολο των εφικτών δομών του ΟΜΣ το σύνολο A_i των λύσεων των Δ.Ε. (4.1) για το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{x}(0)$ που τρέχει πάνω σε κάθε στοχαστική n -άδα.

Συμβολίζουμε με $A_n(t)$ την περιοχή του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από το A_i . Το ενδιαφέρον στην παρούσα εργασία βρίσκεται στην κίνηση- εξέλιξη του συνεχούς που καταλαμβάνει το χώρο $A_n(0) \subset \mathbb{R}^n$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ με βάση το πεδίο ταχυτήτων που δίνεται από τις Δ.Ε. (4.1).

Κάθε σημείο του «συνεχούς μέσου» $A_n(t)$, $t \geq 0$, θεωρείται ότι δέχεται επιφανειακές δυνάμεις. Έτσι έχουμε το $n \times 1$ διάνυσμα τάσης το οποίο εξαρτάται από την θέση M και από τον προσανατολισμό της στοιχειώδους επιφάνειας $\Delta\sigma$ η οποία ορίζεται από τη διανυσματική μονάδα $\mathbf{n}$ την κάθετη στη στοιχειώδη επιφάνεια $\Delta\sigma$ και η φορά της ορίζεται, συμβατικά, προς το εξωτερικό του τμήματος του συνεχούς μέσου που δέχεται την επίδραση

$$\mathbf{t} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}, \quad (4.3)$$

όπου $\mathbf{T}$ ο $n \times n$ τανυστής τάσης (Ορισμός Α.Π.3.6).

Οι Δ.Ε. (4.1) περιγράφουν ένα σύστημα n γραμμικών διαφορικών εξισώσεων. Λόγω της στοχαστικής συνθήκης

$$x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t) = 1,$$

οι μεταβλητές $x_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ είναι εξαρτημένες και η κίνηση λαμβάνει χώρο στην υπερεπιφάνεια

$$(\Pi): x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1. \quad (4.4)$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι ο πίνακας των τάσεων μετάβασης $\mathbf{Q}$ είναι αδιαχώριστος (irreducible). Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι υπάρχει ένα στοχαστικό σημείο ισορροπίας π .

Στο σημείο π μπορούμε να θεωρήσουμε ένα νέο σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n\}$ για το οποίο ισχύει ότι τα $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_{n-1}$ βρίσκονται πάνω στην υπερεπιφάνεια (Π) ενώ το $\mathbf{f}_n$ είναι κάθετο σε αυτή.

Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_n] = [\mathbf{F}_1 | \mathbf{f}_n], \quad (4.5)$$

όπου $\mathbf{F}_1 = [\mathbf{f}_1 | \mathbf{f}_2 | \dots | \mathbf{f}_{n-1}]$. Μπορούμε να μετασχηματίσουμε τις Δ.Ε. (4.1) που αναφέρονται στο χώρο $\mathbb{R}^n$ με βάση το νέο σύστημα συντεταγμένων στο υπερεπίπεδο (Π)

$$\dot{\mathbf{z}}^T(t) = \mathbf{z}^T(t) \cdot \mathbf{G}, \quad (4.6)$$

όπου $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})^T$ αφού η κίνηση γίνεται πάνω στην υπερεπιφάνεια Π και άρα η συνιστώσα κατά τον άξονα $\mathbf{f}_n$ θα μηδενίζεται,

$$z_n = 0.$$

Ο πίνακας $\mathbf{G}$ δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_1^T \mathbf{Q} \mathbf{F}_1. \quad (4.7)$$

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο Α.1, της παρούσας εργασίας, στα ΟΜΣ ο πίνακας τάσης μετάβασης $\mathbf{Q}$ είναι ανεξάρτητος του χρόνου. Άρα και ο πίνακας $\mathbf{G}$ της σχέσης (4.7) θα είναι ανεξάρτητος του χρόνου.

Με τον παραπάνω μετασχηματισμό παρατηρούμε ότι έχουμε ελλατώσει κατά έναν τους βαθμούς ελευθερίας του συστήματος (4.2) αλλά και τον αριθμό των Δ.Ε. Στο σύστημα (4.6) ο αριθμός των Δ.Ε. είναι $n-1$ ενώ στο αρχικό σύστημα (4.2) έχουμε n εξισώσεις.

Δεδομένου ότι από κατασκευής του πίνακα τάσεων $\mathbf{Q}$ προκύπτει

$$\text{Trace} \mathbf{G} = \text{Trace} \mathbf{Q} < 0,$$

το πεδίο που ορίζεται από τις Δ.Ε. της σχέσης (4.6) είναι συμπιεστό (compressible).

Όπως αναφέραμε και παραπάνω οι Δ.Ε. της σχέσης (4.6) μπορούμε να θεωρήσουμε ότι περιγράφουν την δυναμική εξέλιξη ενός συνεχούς μέσου. Ο τανυστής τάσης του συγκεκριμένου μέσου θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης του Euler

$$\rho(\mathbf{z}, t)\mathbf{a}(\mathbf{z}, t) = \text{div}\mathbf{T}(\mathbf{z}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{z}, t), \quad (4.8)$$

σε κάθε σημείο P του μέσου. Το $\mathbf{z}$ δίνει το διάνυσμα θέσης του σημείου P (στο νέο σύστημα συντεταγμένων). Το $\rho(\mathbf{z}, t)$ δίνει την πυκνότητα του υλικού στην περιοχή του P τη χρονική στιγμή t . Το $\mathbf{a}(\mathbf{z}, t)$ είναι η επιτάχυνση στο σημείο P ενώ το $\mathbf{b}(\mathbf{z}, t)$ είναι ένα διάνυσμα των πιθανών δυνάμεων μάζας. Επίσης

$$\text{div}\mathbf{T}(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial T_{ij}}{\partial z_j}, (i, j = 1, 2, \dots, n-1) .$$

Η επιτάχυνση $\mathbf{a}(\mathbf{z}, t)$ της σχέσης (4.8) όπως είναι γνωστό δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} .$$

Έχοντας ταχύτητα ανεξάρτητη του χρόνου η τελευταία σχέση γίνεται

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, t) = \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} ,$$

οπότε

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{z}, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z_i} \cdot \mathbf{v} \\ \Rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{z}, t) &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t} \\ \Rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{z}, t) &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\frac{\partial z_i}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t} , \end{aligned}$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (4.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{z}, t) &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{z} \right) \cdot \frac{\partial z_i}{\partial t} \\ \Rightarrow \mathbf{a}(\mathbf{z}, t) &= \frac{\partial}{\partial z_i} \left(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{z} \right) \cdot \left(\mathbf{G}^T \cdot \mathbf{z} \right) . \end{aligned}$$

Έτσι, τελικά έχουμε

$$\mathbf{a}(\mathbf{z}, t) = \left(\mathbf{G}^2 \right)^T \mathbf{z} , \text{ για κάθε } t . \quad (4.9)$$

Θεωρούμε τώρα τον (μη γραμμικό) τανυστή παραμόρφωσης

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_j} + \frac{\partial u_j}{\partial z_i} - \frac{\partial u_i}{\partial z_j} \frac{\partial u_j}{\partial z_i} \right), (i, j = 1, 2, 3) , \quad (4.10)$$

όπου $\mathbf{u} = (u_i)$ το διάνυσμα μετατόπισης.

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο (Α.ΙΙ) για την περίπτωση ενός ανισότροπου γραμμικού ελαστικού μέσου, ο τανυστής παραμόρφωσης συνδέεται με τον τανυστή τάσης από τον νόμο του Hooke (σχέση (2.20))

$$T_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.11)$$

όπου C_{ijkl} ένας τανυστής τέταρτης τάξης. Η σχέση 4.11 για ένα ισότροπο τανυστή γίνεται

$$T_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (4.12)$$

όπου λ και μ οι σταθερές Lamé του γραμμικού σώματος. Ενώ σε διανυσματική μορφή, όπως στη σχέση (2.23), έχουμε

$$\mathbf{T} = \lambda \text{Trace}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}.$$

1.2 Το τριδιάστατο ΟΜΣ ως γραμμικό ελαστικό μέσο

Για το τριδιάστατο ΟΜΣ ($n = 3$) έχουμε τον 3×3 πίνακα των τάσεων μετάβασης

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -q_{12} - q_{13} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & -q_{21} - q_{23} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & -q_{31} - q_{32} \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

Το στοχαστικό σημείο ισορροπίας του ΟΜΣ δίνεται από το αριστερό ιδιοδιάνυσμα του πίνακα των τάσεων μετάβασης (4.13) για την ιδιοτιμή 0.

Για τα χαρακτηριστικά μεγέθη $\mathbf{d}_L$ και λ_L του $\mathbf{Q}$ έχουμε

$$\mathbf{d}_L \mathbf{Q} = \lambda_L \mathbf{d}_L,$$

ενώ

$$\det(\mathbf{Q}^T - \lambda_L) = 0.$$

Υπολογίζοντας το ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{d}_L$ με τη χρήση της Mathematica έχουμε ότι

$$\mathbf{d}_L = \left(\frac{q_{23}q_{31} + q_{21}(q_{31} + q_{32})}{q_{12}q_{23} + q_{13}(q_{21} + q_{23})}, \frac{q_{13}q_{32} + q_{12}(q_{31} + q_{32})}{q_{12}q_{23} + q_{13}(q_{21} + q_{23})}, 1 \right).$$

Κανονικοποιούμε το ιδιοδιάνυσμα έτσι ώστε το άθροισμα των τριών συνιστωσών του να είναι ίσο με την μονάδα. Έχουμε, λοιπόν, το κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{q_{23}q_{31} + q_{21}(q_{31} + q_{32})}{(q_{21} + q_{23})(q_{13} + q_{31}) + (q_{13} + q_{21})q_{32} + q_{12}(q_{23} + q_{13} + q_{32})} \\ \frac{q_{13}q_{32} + q_{12}(q_{31} + q_{32})}{(q_{21} + q_{23})(q_{13} + q_{31}) + (q_{13} + q_{21})q_{32} + q_{12}(q_{23} + q_{13} + q_{32})} \\ \frac{q_{12}q_{23} + q_{13}(q_{21} + q_{23})}{(q_{21} + q_{23})(q_{13} + q_{31}) + (q_{13} + q_{21})q_{32} + q_{12}(q_{23} + q_{13} + q_{32})} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Στο σημείο ισορροπίας π ορίζουμε την ορθοκανονική βάση $\{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$, όπως αναφέραμε στην παράγραφο B.I.1. Ως διανύσματα $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3$ μπορούμε να θεωρήσουμε τα

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_1 &= \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \\ \mathbf{f}_2 &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \\ \mathbf{f}_3 &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right).\end{aligned}$$

Ο πίνακας $\mathbf{F}_1$ γίνεται

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

και από τη σχέση (4.7) έχουμε

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-2q_{12} - 2q_{13} - q_{21} - q_{31}) & \frac{1}{2\sqrt{3}}(q_{12} - 2q_{13} + q_{21} + 2q_{23} - q_{31} - 2q_{32}) \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}(q_{21} - q_{31}) & \frac{1}{2}(-q_{21} - 2q_{23} - q_{31} - 2q_{32}) \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Η κίνηση γίνεται πάνω στο διδιάστατο υπερεπίπεδο (Π). Οι εξισώσεις της κίνησης δίνονται από την σχέση (4.6). Έτσι, έχουμε

$$\mathbf{z}^T(t) = (z_1 \quad z_2) = \mathbf{z}^T(0)e^{\mathbf{G}t}. \quad (4.16)$$

Το διάνυσμα των μετατοπίσεων δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}; t, t + \Delta t) = \mathbf{z}(t + \Delta t) - \mathbf{z}(t). \quad (4.17)$$

Έτσι, από την (4.9) έχουμε τις Δ.Ε δεύτερης τάξης

$$\begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{G}^2)' \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

Από τις μετατοπίσεις και με τη χρήση της σχέσης (4.10) βρίσκουμε τις συνιστώσες του ταυυστή ρυθμού παραμόρφωσης από όπου με τη βοήθεια της σχέσης (4.12) υπολογίζουμε τις συνιστώσες του ταυυστή τάσης.

Στη συνέχεια από την εξίσωση του Euler (4.8) με αντικατάσταση των επιταχύνσεων από τις σχέσεις (4.18) και των συνιστωσών του ταυυστή τάσης, θεωρώντας ότι δεν έχουμε

δυνάμεις μάζας, βρίσκουμε δύο Δ.Ε. τις οποίες θα επιλύσουμε ως προς τις σταθερές του Lamé για να μελετήσουμε αν το ΟΜΣ συμπεριφέρεται ως ομογενές ελαστικό μέσο.

Την τιμή της πυκνότητας του υλικού που έχουμε στην εξίσωση του Euler την βρίσκουμε επιλύοντας την εξίσωση της συνέχειας (2.17).

1.3 Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας των τάσεων μετάβασης

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -4.7 & 4 & 0.7 \\ 4.02 & -4.22 & 0.2 \\ 0.2 & 2 & -2.2 \end{pmatrix}.$$

Από την (4.15) έχουμε ότι

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} -6.81 & 1.96876 \\ 3.30822 & -4.31 \end{pmatrix},$$

με ιδιοτιμές

$$\lambda_1 = -8.40716,$$

$$\lambda_2 = -2.71824.$$

Από τη σχέση (4.16) βρίσκουμε ότι οι εξισώσεις της κίνησης στο νέο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων δίνονται με τις παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} \left(0.719934e^{2.71824t} + 0.280066e^{8.40175t} \right) e^{-11.12t} + \\ &\quad z_{20} \left(-0.582072e^{2.71824t} + 0.582072e^{8.40175t} \right) e^{-11.12t} \\ z_2(t) &= z_{10} \left(-0.346399e^{2.71824t} + 0.346399e^{8.40175t} \right) e^{-11.12t} + \\ &\quad z_{20} \left(0.280066e^{2.71824t} + 0.719934e^{8.40175t} \right) e^{-11.12t} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Στη συνέχεια από την σχέση (4.17) βρίσκουμε τις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης αφού:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}^T(z; t, t + \Delta t) &= \mathbf{z}^T(t + \Delta t) - \mathbf{z}^T(t) \\
 &= \mathbf{z}^T(0)e^{\mathbf{G}(t+\Delta t)} - \mathbf{z}^T(0)e^{\mathbf{G}t} \\
 &= \mathbf{z}^T(0)(e^{\mathbf{G}(t+\Delta t)} - e^{\mathbf{G}t}) \\
 &= \mathbf{z}^T(0)(e^{\mathbf{G}t}e^{\mathbf{G}\Delta t} - e^{\mathbf{G}t}) \\
 &= \mathbf{z}^T(0)e^{\mathbf{G}t}(e^{\mathbf{G}\Delta t} - \mathbf{I}) \\
 &= \mathbf{z}^T(t)(e^{\mathbf{G}\Delta t} - \mathbf{I}).
 \end{aligned}$$

Έτσι, οι συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}
 u_1(z; t, t + \Delta t) &= (-1 + e^{-11.12\Delta t} (0.719934e^{2.71824\Delta t} + 0.280066e^{8.40176\Delta t}))z_1 + \\
 &\quad e^{-11.12\Delta t} (-0.582072e^{2.71824\Delta t} + 0.582072e^{8.40176\Delta t})z_2, \\
 u_2(z; t, t + \Delta t) &= e^{-11.12\Delta t} (-0.346399e^{2.71824\Delta t} + 0.346399e^{8.40176\Delta t})z_1 + \\
 &\quad (-1 + e^{-11.12\Delta t} (0.280066e^{2.71824\Delta t} + 0.719934e^{8.40175\Delta t}))z_2.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Από τη σχέση (4.10) βρίσκουμε τις συνιστώσες του τανυστή ρυθμού παραμόρφωσης

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11}(\Delta t) &= -1.5 - 0.319149e^{-16.8035\Delta t} - 0.0816369e^{-11.12\Delta t} + 1.43987e^{-8.40176\Delta t} \\
 &\quad - 0.0992145e^{-5.43648\Delta t} + 0.560132e^{-2.71824\Delta t}, \\
 \varepsilon_{12}(\Delta t) &= 0.258034e^{-16.8035\Delta t} - 0.0518326e^{-11.12\Delta t} - 0.928471e^{-8.40176\Delta t} \\
 &\quad - 0.206201e^{-5.43648\Delta t} + 0.928471e^{-2.71824\Delta t}, \\
 \varepsilon_{21}(\Delta t) &= 0.258034e^{-16.8035\Delta t} - 0.0518326e^{-11.12\Delta t} - 0.928471e^{-8.40176\Delta t} \\
 &\quad - 0.206201e^{-5.43648\Delta t} + 0.928471e^{-2.71824\Delta t}, \\
 \varepsilon_{22}(\Delta t) &= -1.5 - 0.208622e^{-16.8035\Delta t} + 0.137179e^{-11.12\Delta t} + 0.560132e^{-8.40176\Delta t} \\
 &\quad - 0.428556e^{-5.43648\Delta t} + 1.43987e^{-2.71824\Delta t}.
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Από τη σχέση (4.12) υπολογίζουμε τις συνιστώσες του τανυστή τάσης

$$\begin{aligned}
 T_{11}(t) &= \left(-3 - 0.527771e^{-16.8035\Delta t} + 0.0555418e^{-11.12\Delta t} + 2e^{-8.40176\Delta t} - 0.527771e^{-5.43648\Delta t} + 2e^{-2.71824\Delta t} \right) \lambda + \\
 & 2 \left(-1.5 - 0.319149e^{-16.8035\Delta t} - 0.0816369e^{-11.12\Delta t} + 1.43987e^{-8.40176\Delta t} - 0.0992145e^{-5.43648\Delta t} + 0.560132e^{-2.71824\Delta t} \right) \mu, \\
 T_{12}(t) &= 2 \left(0.258034e^{-16.8035\Delta t} - 0.0518326e^{-11.12\Delta t} - 0.928471e^{-8.40176\Delta t} - 0.206201e^{-5.43648\Delta t} + \right. \\
 & \quad \left. 0.928471e^{-2.71824\Delta t} \right) \mu, \\
 T_{21}(t) &= 2 \left(0.258034e^{-16.8035\Delta t} - 0.0518326e^{-11.12\Delta t} - 0.928471e^{-8.40176\Delta t} - 0.206201e^{-5.43648\Delta t} + \right. \\
 & \quad \left. 0.928471e^{-2.71824\Delta t} \right) \mu, \\
 T_{22}(t) &= \left(-3 - 0.527771e^{-16.8035\Delta t} + 0.0555418e^{-11.12\Delta t} + 2e^{-8.40176\Delta t} - 0.527771e^{-5.43648\Delta t} + 2e^{-2.71824\Delta t} \right) \lambda + \\
 & 2 \left(-1.5 - 0.208622e^{-16.8035\Delta t} - 0.137179e^{-11.12\Delta t} - 0.428556e^{-5.43648\Delta t} + 1.43987e^{-2.71824\Delta t} \right) \mu.
 \end{aligned}
 \tag{4.22}$$

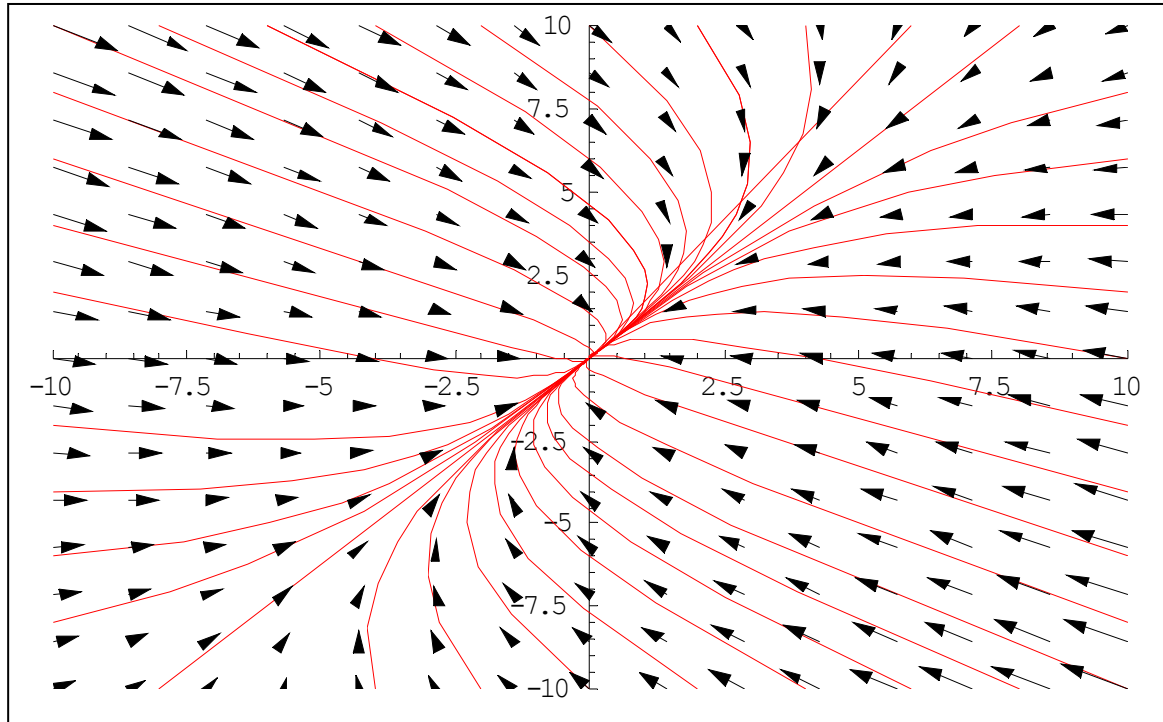
Το πεδίο ταχυτήτων βρίσκεται με τη βοήθεια της σχέσης (4.6). Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= -6.81z_1 + 3.30822z_2, \\
 \dot{z}_2 &= 1.96876z_1 - 4.31z_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.23}$$

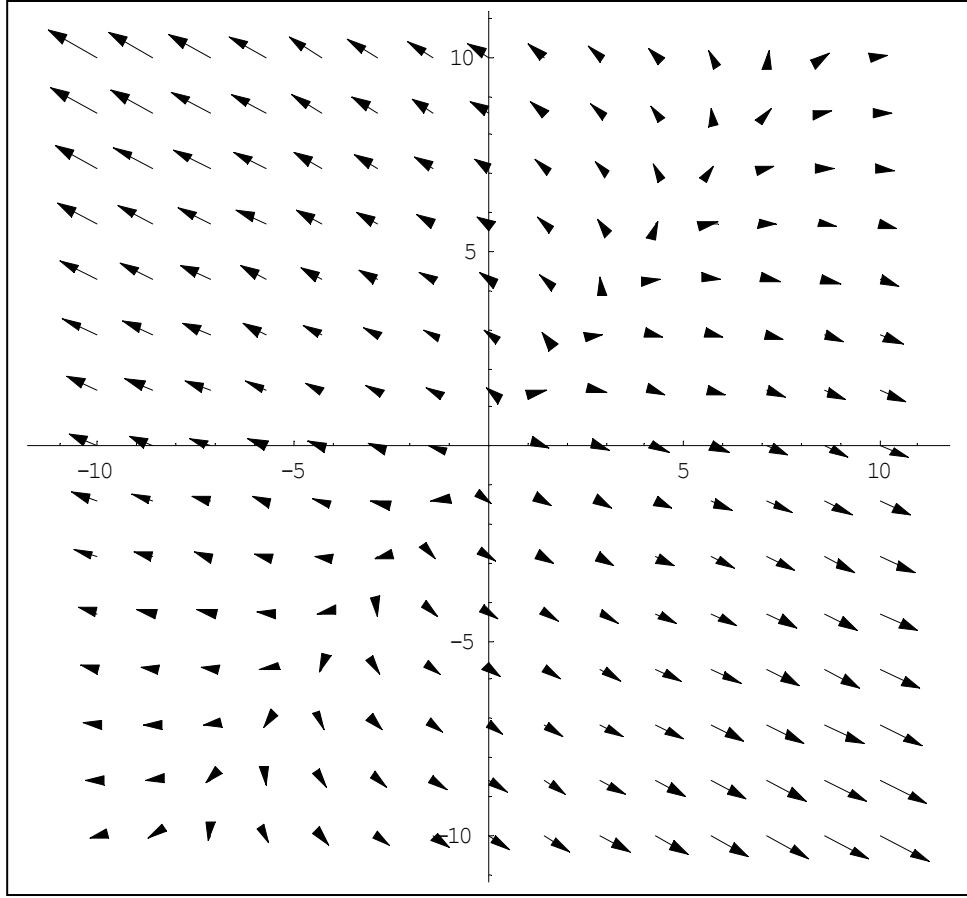
Τέλος το πεδίο των επιταχύνσεων δίνεται με τη βοήθεια της (4.9):

$$\begin{aligned}
 \ddot{z}_1 &= 52.8892z_1 - 36.7874z_2, \\
 \ddot{z}_2 &= 1.96876z_1 - 4.31z_2.
 \end{aligned}
 \tag{4.24}$$

Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις μπορούμε να δούμε το πεδίο ταχυτήτων και το πεδίο επιταχύνσεων



Γραφική Παράσταση 1: Το πεδίο ταχυτήτων του ΟΜΣ



Γραφική Παράσταση 2: Το πεδίο επιταχύνσεων του ΟΜΣ.

Για να βρούμε τις ζητούμενες Δ.Ε. αντικαθιστούμε τα μεγέθη που υπολογίσαμε στην εξίσωση του Euler (4.8) θεωρώντας ότι οι δυνάμεις μάζας είναι μηδέν και έχουμε το σύστημα των 2 Δ.Ε.

$$\begin{aligned}
 (52.8892z_1 - 36.7874z_2)\rho = & \left(-3 - 0.527771e^{-16.8035t} + 0.0555418e^{-11.12t} + 2e^{-8.40176t} - 0.527771e^{-5.43648t} + 2e^{-2.71824t} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z_1} + \\
 & 2 \left(-1.5 - 0.319149e^{-16.8035t} - 0.0816369e^{-11.12t} + 1.43987e^{-8.40176t} - 0.0992145e^{-5.43648t} + 0.560132e^{-2.71824t} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z_1} + \\
 & 2 \left(0.258034e^{-16.8035t} - 0.0518326e^{-11.12t} - 0.928471e^{-8.40176t} - 0.206201e^{-5.43648t} + 0.928471e^{-2.71824t} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z_2}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
 (-21.8927z_1 + 25.0892z_2)\rho = & \left(-3 - 0.527771e^{-16.8035t} + 0.0555418e^{-11.12t} + 2e^{-2.71824t} - 0.527771e^{-5.43648t} + 2e^{-8.40176t} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial z_2} + \\
 & 2 \left(0.258034e^{-16.8035t} - 0.0518326e^{-11.12t} - 0.928471e^{-8.40176t} - 0.206201e^{-5.43648t} + 0.928471e^{-2.71824t} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z_1} + \\
 & 2 \left(-1.5 - 0.208622e^{-16.8035t} + 0.137179e^{-11.12t} + 0.560132e^{-8.40176t} - 0.428556e^{-5.43648t} + 1.43987e^{-2.71824t} \right) \frac{\partial \mu}{\partial z_2}.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Την τιμή της πυκνότητας ρ την βρίσκουμε από την εξίσωση της συνέχειας (2.17) που γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (-6.81z_1 + 3.308z_2) \frac{\partial \rho}{\partial z_1} + (1.968z_1 - 4.31z_2) \frac{\partial \rho}{\partial z_2} - 11.2\rho = 0. \quad (4.27)$$

II. Επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

II.1 Το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

Όπως είδαμε στην παράγραφο B.I.3 έχουμε το σύστημα των Δ.Ε. (σχέσεις 4.25-4.26)

$$\begin{aligned} (52.8892z_1 - 36.7874z_2)\rho = & \left(-1 + 0.627771e^{-16.8035t} - 0.0555418e^{-11.12t} + 0.527771e^{-5.43648t}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial z_1} + \\ & 2\left(-0.5 + 0.319149e^{-16.8035t} + 0.0816369e^{-11.12t} + 0.0992145e^{-5.43648t}\right) \frac{\partial \mu}{\partial z_1} + \\ & 2\left(-0.258034e^{-16.8035t} + 0.0518326e^{-11.12t} + 0.206201e^{-5.43648t}\right) \frac{\partial \mu}{\partial z_2}, \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} (-21.8927z_1 + 25.0892z_2)\rho = & \left(-1 + 0.527771e^{-16.8035t} - 0.0555418e^{-11.12t} + 0.527771e^{-5.43648t}\right) \frac{\partial \lambda}{\partial z_2} + \\ & \left(-1 + 0.527771e^{-16.8035t} - 0.0555418e^{-11.12t} + 0.527771e^{-5.43648t}\right) \frac{\partial \mu}{\partial z_1} + \\ & 2\left(-0.5 + 0.208622e^{-16.8035t} - 0.137179e^{-11.12t} + 0.428556e^{-5.43648t}\right) \frac{\partial \mu}{\partial z_2}. \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς τα z_1 και z_2 .

Η πυκνότητα δίνεται από την (σχέση 4.27)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (-6.81z_1 + 3.308z_2) \frac{\partial \rho}{\partial z_1} + (1.968z_1 - 4.31z_2) \frac{\partial \rho}{\partial z_2} - 11.2\rho = 0,$$

η οποία είναι μια διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και τα z_1, z_2 . Στην παρακάτω ανάλυση για την επίλυση του συστήματος θα θεωρήσουμε ότι η πυκνότητα είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου και όχι των χωρικών συντεταγμένων. Έτσι η σχέση 4.27 γίνεται

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - 11.2\rho = 0. \quad (5.1)$$

Για την επίλυση των Δ.Ε. των σχέσεων 4.25 και 4.26 θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών. Έτσι η παράγωγος ως προς την θέση δίνεται όπως στην σχέση 3.9 και έχουμε

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda(z_{10}, z_{20})}{\partial z_1} &= \frac{\lambda_{i,j} - \lambda_{i-1,j}}{\Delta z_1}, \\
 \frac{\partial \lambda(z_{10}, z_{20})}{\partial z_2} &= \frac{\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j-1}}{\Delta z_2}, \\
 \frac{\partial \mu(z_{10}, z_{20})}{\partial z_1} &= \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta z_1}, \\
 \frac{\partial \mu(z_{10}, z_{20})}{\partial z_2} &= \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1}}{\Delta z_2}.
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Οι Δ.Ε. (σχέσεις 4.25-4.26) γίνονται

$$(52.8892z_1 - 36.7874z_2)\rho = c_1(t) \frac{\lambda_{i,j} - \lambda_{i-1,j}}{\Delta z_1} + c_2(t) \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta z_1} + c_3(t) \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1}}{\Delta z_2}, \tag{5.3}$$

$$(-21.8927z_1 + 25.0892z_2)\rho = c_1(t) \frac{\lambda_{i,j} - \lambda_{i,j-1}}{\Delta z_2} + c_3(t) \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i-1,j}}{\Delta z_1} + c_4(t) \frac{\mu_{i,j} - \mu_{i,j-1}}{\Delta z_2}. \tag{5.4}$$

όπου

$$\begin{aligned}
 c_1(t) &= (-1 + 0.527771e^{-16.8035t} - 0.0555418e^{-11.12t} + 0.527771e^{-5.43648t}), \\
 c_2(t) &= 2(-0.5 + 0.319149e^{-16.8035t} + 0.0816369e^{-11.12t} + 0.0992145e^{-5.43648t}), \\
 c_3(t) &= 2(-0.258034e^{-16.8035t} + 0.0518326e^{-11.12t} + 0.206201e^{-5.43648t}), \\
 c_4(t) &= 2(-0.5 + 0.208622e^{-16.8035t} - 0.137179e^{-11.12t} + 0.428556e^{-5.43648t}).
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

II.2 Αριθμητική επίλυση του συστήματος των Δ.Ε.

Για να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων (5.3-5.4) θεωρούμε ένα αριθμητικό πλέγμα 15×15 . Σε κάθε σημείο του πλέγματος έχουμε τις τιμές των λ και μ . Έτσι, αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 5.3 και 5.4 έχουμε ένα σύστημα 450 εξισώσεων με 450 αγνώστους το οποίο πρέπει να επιλύσουμε.

Η μορφή του συστήματος των εξισώσεων είναι

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{A} \tag{5.6}$$

όπου $\mathbf{C}$ ο πίνακας των συντελεστών, ο πίνακας στήλη $\mathbf{x}$ δίνει τις άγνωστες τιμές των σταθερών λ και μ του Lamé ενώ ο $\mathbf{A}$ είναι ο πίνακας των σταθερών όρων.

Για πλέγμα 4×4 ο πίνακας $\mathbf{C}$ έχει την μορφή

B.II Επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων

$\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	0	...	...	...	...	0	$\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	...	...	0
$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	...	...	0	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	...	...	0
0	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	0	...	...	...	0	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	...	0
$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	0	0	$-\frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	0	0	0	...	...	0
0	0	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	...	...	...	0	0	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	0
0	$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	...	...	...	0	0	$-\frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	0	0	...	...	0
0	0	0	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	...	...	0	0	0	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	0	...	...	0
0	0	$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	...	...	0	0	0	$-\frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	0	...	...	0
$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	0	0	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	...	0	$-\frac{c_2(t)}{\Delta z_1}$	0	0	0	$\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	0	...	0
0	0	0	0	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	...	0	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_1}$	0	0	0	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	0	...	0
0	$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	0	0	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_1}$	0	...	0	$-\frac{c_2(t)}{\Delta z_1}$	0	0	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}$	...	0
0	0	0	0	$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	...	0	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_1}$	0	0	$-\frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	...	0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
0	...	...	...	...	0	$-\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_1(t)}{\Delta z_2}$	0	...	...	$-\frac{c_3(t)}{\Delta z_1}$	0	0	$-\frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$	$\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}$

όπου το σύστημα μας έχει 32 εξισώσεις με 32 αγνώστους.

Το σύστημα των εξισώσεων (5.4-5.5) εξαρτάται από το χρόνο μόνο λόγω της εξάρτησης των σταθερών συντελεστών c_1, c_2, c_3, c_4 και της πυκνότητας ρ από τον χρόνο.

Για να λύσουμε το σύστημα 5.6 χρησιμοποιούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

1. Για κάποια χρονική στιγμή υπολογίζουμε τους σταθερούς συντελεστές c_1, c_2, c_3, c_4 όπως δίνονται από την 5.5 και την πυκνότητα από την λύση της εξίσωσης συνέχειας (σχέση 5.1).
2. Δημιουργούμε τον πίνακα των συντελεστών $\mathbf{C}$ και τον πίνακα των σταθερών όρων $\mathbf{A}$ ο οποίος δίνεται με τη μορφή:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{l}
 (az_1 + bz_2)\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_1}\lambda_{01} + \frac{c_2(t)}{\Delta z_1}\mu_{01} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}\mu_{10} \\
 (cz_1 + dz_2)\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_2}\lambda_{10} + \frac{c_2(t)}{\Delta z_1}\mu_{01} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}\mu_{10} \\
 (a(z_1 - \Delta z_1) + b(z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_1}\lambda_{02} + \frac{c_2(t)}{\Delta z_1}\mu_{02} \\
 (a(z_1 - \Delta z_1) + b(z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_1}\lambda_{02} + \frac{c_2(t)}{\Delta z_1}\mu_{02} \\
 (c(z_1 - \Delta z_1) + d(z_2))\rho + \frac{c_3(t)}{\Delta z_1}\mu_{02} \\
 (a(z_1 - 2\Delta z_1) + b(z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_1}\lambda_{03} + \frac{c_2(t)}{\Delta z_1}\mu_{03} \\
 (c(z_1 - 2\Delta z_1) + d(z_2))\rho + \frac{c_3(t)}{\Delta z_1}\mu_{03} \\
 (a(z_1 - 3\Delta z_1) + b(z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_1}\lambda_{04} + \frac{c_2(t)}{\Delta z_1}\mu_{04} \\
 (c(z_1 - 3\Delta z_1) + d(z_2))\rho + \frac{c_3(t)}{\Delta z_1}\mu_{04} \\
 (az_1 + b(z_2 - \Delta z_2))\rho + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}\mu_{20} \\
 (cz_1 + d(z_2 - \Delta z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_2}\lambda_{20} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}\mu_{20} \\
 (a(z_1 - \Delta z_1) + b(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 (c(z_1 - \Delta z_1) + d(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 (a(z_1 - 2\Delta z_1) + b(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 (c(z_1 - 2\Delta z_1) + d(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 (a(z_1 - 3\Delta z_1) + b(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 (c(z_1 - 3\Delta z_1) + d(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 (az_1 + b(z_2 - 2\Delta z_2))\rho + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}\mu_{30} \\
 (cz_1 + d(z_2 - 2\Delta z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_2}\lambda_{30} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}\mu_{30} \\
 (a(z_1 - \Delta z_1) + b(z_2 - 2\Delta z_2))\rho \\
 (c(z_1 - \Delta z_1) + d(z_2 - \Delta z_2))\rho \\
 \dots \\
 (az_1 + b(z_2 - 3\Delta z_2))\rho + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2}\mu_{40} \\
 (cz_1 + d(z_2 - 3\Delta z_2))\rho + \frac{c_1(t)}{\Delta z_2}\lambda_{40} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2}\mu_{40} \\
 (a(z_1 - \Delta z_1) + b(z_2 - 3\Delta z_2))\rho \\
 \dots
 \end{array} \right) \tag{5.7}$$

3. Λύνουμε το σύστημα με την μέθοδο του Gauss.
4. Προχωράμε σε επόμενη χρονική στιγμή και ξεκινάμε ξανά από το βήμα 1.

Την παραπάνω διαδικασία την συνεχίζουμε μέχρι να συμπληρώσουμε τον ζητούμενο χρόνο.

Ο παραπάνω αλγόριθμος υλοποιήθηκε στα πλαίσια της παρούσας εργασίας στο πρόγραμμα Solver21 το οποίο θα αναλύσουμε παρακάτω.

II.3 Το πρόγραμμα solver21 για την επίλυση του συστήματος των Δ.Ε.

Με το πρόγραμμα solver21, γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού C++, επιλύουμε το σύστημα των Δ.Ε. 5.6 σύμφωνα με τον αλγόριθμο της παραγράφου II.2.

Η κύρια (main) συνάρτηση του προγράμματος δίνεται παρακάτω:

```
int main()
{

    int g, s, tt;
    double **Lamda,**Mi,density,z1,z2,dz1,dz2,**C,c1,c2,c3,c4,*A,*xSolve,time,
           timestep,ca1,ca2,ca3,ca4,ca5,cb1,cb2,cb3,cb4,cb5,cb6,
           cb7,cb8,cb9,cb10,cb11,cb12,cb13,cb14,maxtime,t0;

    g=15;
    s=15;
    A = (double *)malloc(sizeof(double)*g*s*2);
    xSolve = (double *)malloc(sizeof(double)*g*s*2);
    z1=0.05;
    z2=0.2;
    dz1=2*z1/s;
    dz2=2*z2/g;
    density=1;
    timestep=0.05;
    maxtime=1.5;
    time=0.0;
    t0=timestep;
    ca1=-16.8035;
    ca2=-11.12;
    ca3=-5.43648;
    cb1=0.527771;
    cb2=0.0555418;
    cb3=0.319149;
    cb4=0.0816369;
    cb5=0.0992145;
    cb6=0.258034;
    cb7=0.0518326;
    cb8=0.206201;
    cb9=0.208622;
    cb10=0.137179;
    cb11=0.428556;
```

```

cb12=0.928471;
cb13=1.43987;
cb14=0.560132;

Lamda = (double **)malloc(sizeof(double *)*SIZE);
for(unsigned int k=0;k<SIZE;k++){
    Lamda[k] = (double *)malloc(sizeof(double)*SIZE);
}
Mi = (double **)malloc(sizeof(double *)*SIZE);
for(k=0;k<SIZE;k++){
    Mi[k] = (double *)malloc(sizeof(double)*SIZE);
}
C = (double **)malloc(sizeof(double *)*SIZE);
for(k=0;k<SIZE;k++){
    C[k] = (double *)malloc(sizeof(double)*SIZE);
}

tt=1;
do
{
    density=densRKF(density,time,timestep);
    c1=(-3.0-cb1*exp(ca1*time)+cb2*exp(ca2*time)+2.0*exp(ca5*time)-
cb1*exp(ca3*time)+2.0*exp(ca4*time));
    c2=2*(-1.5-cb3*exp(ca1*time)-cb4*exp(ca2*time)+cb13*exp(ca5*time)-
cb5*exp(ca3*time)+cb14*exp(ca4*time));
    c3=2*(cb6*exp(ca1*time)-cb7*exp(ca2*time)-cb12*exp(ca5*time)-
cb8*exp(ca3*time)+cb12*exp(ca4*time));
    c4=2*(-1.5-cb9*exp(ca1*time)+cb10*exp(ca2*time)+cb14*exp(ca5*time)-
cb11*exp(ca3*time)+cb13*exp(ca4*time));

    ComputeMatrice(C,s,g,c1,c2,c3,c4,dz1,dz2);
    ConstantA(A,g,s,z1,z2,density,dz1,dz2,time);
    gaussSolver2(C,A,xSolve,2*s*s);
    takevalues(Lamda,Mi,xSolve,g,s);
    printGridonfile(Lamda,time,g,s,z1,z2,dz1,dz2);
    printGridonfile(Mi,time,g,s,z1,z2,dz1,dz2);
    elasticity(Lamda,Mi,g,s);
    if((time==0.05)||((time>1.4&&time<1.55)||((time>0.45&&time<1.05))
    {
        printusefull(Lamda,time,g,s,density);
        printusefull(Mi,time,g,s,density);
    }
}
while(time<maxtime);

return 0;
}

```

Με την εντολή

```
A = (double *)malloc(sizeof(double)*g*s*2);
```

δεσμεύουμε μνήμη για να δημιουργήσουμε έναν μονοδιάστατο πίνακα μήκους $2 \cdot g \cdot s$ όπου g ο αριθμός των κόμβων που βρίσκονται οριζόντια στο πλέγμα μας και s ο αριθμός των κόμβων που βρίσκονται κάθετα. Αντίστοιχα με την εντολή

```
Lamda = (double **)malloc(sizeof(double *)*SIZE);  
for(unsigned int k=0;k<SIZE;k++){  
    Lamda[k] = (double *)malloc(sizeof(double)*SIZE);  
}
```

δεσμεύουμε μνήμη για την δημιουργία ενός διδιάστατου πίνακα.

Το πρώτο βήμα μέσα στην κύρια (main) συνάρτηση είναι ο ορισμός των σταθερών όρων και η δημιουργία των πινάκων:

A: μονοδιάστατος πίνακας των σταθερών όρων (σχέση 5.7).

xSolve: μονοδιάστατος πίνακας των λύσεων της συνάρτησης gaussSolver2.

Lamda: διδιάστατος πίνακας των τιμών της σταθεράς λ του Lamé σε κάθε κόμβο του πλέγματος.

Mi: διδιάστατος πίνακας των τιμών της σταθεράς μ του Lamé σε κάθε κόμβο του πλέγματος.

C : διδιάστατος πίνακας των σταθερών συντελεστών του συστήματος.

Για κάθε χρονική στιγμή υπολογίζουμε με την βοήθεια της συνάρτησης densRKF την τιμή της πυκνότητας και τους σταθερούς συντελεστές, c_1, c_2, c_3 και c_4 , του συστήματος 5.6. Στην συνέχεια με την βοήθεια της συνάρτησης ComputeMatrice δημιουργούμε τον πίνακα C των σταθερών συντελεστών ενώ με την συνάρτηση ConstantA δημιουργούμε τον πίνακα A των σταθερών όρων. Τέλος με την βοήθεια της συνάρτησης gaussSolver2 επιλύουμε το σύστημα των εξισώσεων και δίνουμε τις τιμές των σταθερών λ και μ του Lamé σε κάθε σημείο του πλέγματος.

Η παραπάνω διαδικασία συνεχίζεται μέχρι να φτάσουμε στον επιθυμητό χρόνο που δίνεται στο πρόγραμμα από την μεταβλητή maxtime.

Έχοντας μελετήσει την εξέλιξη του συστήματος έχουμε βγάλει το συμπέρασμα ότι το σύστημα μας πολύ γρήγορα «συρρικνώνεται» στο σημείο ισορροπίας π . Έτσι η μελέτη του παραπάνω συστήματος θα γίνει στην γειτονιά του σημείου ισορροπίας π που βρίσκεται στο $(0,0)$. Παίρνουμε, λοιπόν, σαν αρχικά σημεία τα $z_1 = 0.05$ και $z_2 = 0.2$.

Τα χωρικά βήματα δίνονται συναρτήσει του αριθμού των κόμβων των πλέγματος στον κατακόρυφο άξονα, g , και στον οριζόντιο s . Έτσι

$$dz_1 = \frac{2z_1}{s},$$
$$dz_2 = \frac{2z_2}{g}.$$

Το χρονικό βήμα το θεωρούμε $\Delta t = 0.05$ μονάδες χρόνου ενώ η αρχική πυκνότητα θεωρείται ίση με την μονάδα.

Ανάλυση των συναρτήσεων:

I. densRKF(double dens, double &time, double timestep)

Η συνάρτηση densRKF επιλύει αριθμητικά με την μέθοδο Runge-Kutta- Fehlberg την εξίσωση συνέχειας (5.1) υπολογίζοντας την τιμή της πυκνότητας για κάθε χρονική στιγμή.

Η μέθοδος Runge- Kutta- Fehlberg είναι μία κλασική μέθοδος ενός βήματος για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων (Ordinary Differential Equations) με πολύ καλή ακρίβεια και χρησιμοποιείται ευρήτατα.

Για να επιλύσουμε μια Δ.Ε. της μορφής

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

με την βοήθεια της παραπάνω μεθόδου χρησιμοποιούμε την σχέση

$$y_{n+1} = y_n + \left(\frac{16}{135} k_1 + \frac{6656}{12825} k_3 + \frac{28561}{56430} k_4 - \frac{9}{50} k_5 + \frac{2}{55} k_6 \right),$$

όπου

$$k_1 = hf(x_n, y_n),$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}k_1\right),$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}k_1 + \frac{9}{32}k_2\right),$$

$$k_4 = hf\left(x_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}k_1 - \frac{7200}{2197}k_2 + \frac{7296}{2197}k_3\right),$$

$$k_5 = hf\left(x_n + h, y_n + \frac{439}{216}k_1 - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 - \frac{856}{4104}k_4\right),$$

$$k_6 = hf\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}k_1 + 2k_2 - \frac{3544}{2565}k_3 + \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5\right).$$

το σφάλμα της παραπάνω μεθόδου είναι της τάξης του h^5 .

Η συνάρτηση densRKF δέχεται σαν είσοδο την αρχική τιμή της πυκνότητας, dens, τον χρόνο, time, και το χρονικό βήμα timestep.

Η συνάρτηση δίνεται παρακάτω

```
double densRKF(double dens, double &time,double timestep)
{
    double k1,k2,k3,k4,k5,k6,a,h;

    a=11.2;
    h=timestep;
    time=time+h;

    k1= h*a*dens;
    k2= h*a*(dens+(1./4.)*k1);
    k3= h*a*(dens+(3./32.)*k1+(9./32.)*k2);
    k4= h*a*(dens+(1932./2197.)*k1-(7200./2197)*k2+(7296./2197.)*k3);
    k5= h*a*(dens+(439./216.)*k1-8.*k2+(3680./513.)*k3-(845./4104.)*k4);
    k6= h*a*(dens-(8./27.)*k1+2.*k2-(3544./2565.)*k3+(1859./4104.)*k4-(11./40.)*k5);

    dens=dens+(16./135.)*k1+(6656./12825.)*k3+(28561./56430.)*k4-
    (9./50.)*k5+(2./55.)*k6;

    return dens;
}
```

Το πρώτο βήμα στην συνάρτηση densRKF είναι ο υπολογισμός της χρονικής στιγμής
 $time=time+h$,

έπειτα υπολογίζουμε τις σταθερές της μεθόδου Runge- Kutta- Fehlberg k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 και k_6 και υπολογίζουμε την τιμή της πυκνότητας dens η οποία επιστρέφεται στο κύριο πρόγραμμα.

Να επισημάνουμε εδώ ότι η παραπάνω συνάρτηση, πέρα από τον υπολογισμό της πυκνότητας, εξελίσσει και τον χρόνο στο κύριο (main) πρόγραμμα μας.

II. ComputeMatrice(double **C,int s,int g,double c1,double c2, double c3, double c4,double dz1,double dz2)

Η συνάρτηση ComputeMatrice δημιουργεί τον πίνακα των σταθερών συντελεστών **C**, ο οποίος έχει μορφή όπως στην σελίδα 43 της παρούσας εργασίας. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας **C** έχει όλα τα στοιχεία του ίσα με το μηδέν εκτός από κάποιες βασικές διαγώνιες στις οποίες επαναλαμβάνονται κάποιες ομάδες (block).

Για τον Πίνακα της σελίδας 43 (πλέγμα 4×4) έχουμε:

Ξεκινώντας από την πρώτη στήλη έχουμε το παρακάτω block τιμών

$$\begin{pmatrix} \frac{c_1(t)}{\Delta z_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_1(t)}{\Delta z_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_1(t)}{\Delta z_1} & 0 & 0 \\ -\frac{c_1(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_1(t)}{\Delta z_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{c_1(t)}{\Delta z_1} & 0 \\ 0 & -\frac{c_1(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_1(t)}{\Delta z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{c_1(t)}{\Delta z_1} \\ 0 & 0 & -\frac{c_1(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_1(t)}{\Delta z_2} \end{pmatrix},$$

το οποίο επαναλαμβάνεται μέχρι την $2 \cdot g \cdot s$ γραμμή και φτάνει μέχρι την $g \cdot s$ στήλη του πίνακα. Αντίστοιχα ξεκινώντας από την $g \cdot s + 1$ στήλη και την πρώτη γραμμή έχουμε την επανάληψη του παρακάτω block

$$\begin{pmatrix} \frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{c_3(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2} & 0 & 0 \\ -\frac{c_4(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{c_3(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2} & 0 \\ 0 & -\frac{c_4(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_3(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_2(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_3(t)}{\Delta z_2} \\ 0 & 0 & -\frac{c_4(t)}{\Delta z_2} & \frac{c_3(t)}{\Delta z_1} + \frac{c_4(t)}{\Delta z_2} \end{pmatrix},$$

το οποίο φτάνει μέχρι την $2 \cdot g \cdot s$ γραμμή και την $2 \cdot g \cdot s$ στήλη του πίνακα μας.

Ξεκινώντας από την $g + s$ γραμμή του πίνακα μας έχουμε το block

$$\begin{pmatrix} -\frac{c_1(t)}{\Delta z_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

το οποίο επαναλαμβάνεται μέχρι την $2 \cdot g \cdot s$ γραμμή και την $g \cdot s$ στήλη του πίνακα μας ενώ αντίστοιχα ξεκινώντας από την $g \cdot s + 1$ στήλη και την $g + s$ γραμμή του πίνακα μας έχουμε το block

$$\begin{pmatrix} -\frac{c_2(t)}{\Delta z_1} & 0 \\ -\frac{c_3(t)}{\Delta z_1} & 0 \end{pmatrix},$$

το οποίο επαναλαμβάνεται με την σειρά του μέχρι την $2 \cdot g \cdot s$ στήλη και την $2 \cdot g \cdot s$ γραμμή του πίνακα μας.

Η συνάρτηση δέχεται σαν είσοδο τον αριθμό των κόμβων που βρίσκονται οριζόντια, g , και τον αριθμό των κόμβων που βρίσκονται κάθετα, s , στο πλέγμα μας. τις σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4 που έχουμε ήδη υπολογίσει για κάθε χρονικό βήμα. Όπως επίσης και τα χωρικά βήματα Δz_1 και Δz_2 . Η συνάρτηση ComputeMatrice δίνεται στο παρακάτω κομμάτι του κώδικα

```
void ComputeMatrice(double **C,int s,int g,double c1,double c2, double c3, double
c4,double dz1,double dz2)
{
int w,q,k,i;

for(w=1;w<2*g*s+1;w++)
{
for(q=1;q<2*g*s+1;q++)
{
C[w][q]=0;
}
}

k=1;
w=1;
i=2; // Auxanei tin timi tis exeidikevmenis grammis!!!
do
{
if(w==1)
{
C[w][k]=c1/dz1;
C[w][k+s*s]=(c2/dz1)+(c3/dz2);
C[w+1][k]=c1/dz2;
C[w+1][k+s*s]=(c3/dz1)+(c4/dz2);
}
}
```



```

        else if(w>2&&w<2*s+1)
        {
C[w][k]=c1/dz1;
        C[w+1][k-1]=-c1/dz2;
        C[w][k+s*s-1]=-c3/dz2;
C[w][k+s*s]=(c2/dz1)+(c3/dz2);
        C[w+1][k]=c1/dz2;
C[w+1][k+s*s-1]=-c4/dz2;
C[w+1][k+s*s]=(c3/dz1)+(c4/dz2);
        }
        else if(w==i*s+1)
        {
        C[w][k-s]=-c1/dz1;
        C[w][k]=c1/dz1;
        C[w][k+s*s-s]=-c2/dz1;
C[w][k+s*s]=(c2/dz1)+(c3/dz2);
        C[w+1][k]=c1/dz2;
C[w+1][k+s*s-s]=-c3/dz1;
C[w+1][k+s*s]=(c3/dz1)+(c4/dz2);
        i=i+2;
        }

        else
        {
C[w][k-s]=-c1/dz1;
        C[w][k]=c1/dz1;
        C[w][k+s*s-s]=-c2/dz1;
C[w][k+s*s-1]=-c3/dz2;
C[w][k+s*s]=(c2/dz1)+(c3/dz2);
        C[w+1][k]=c1/dz2;
C[w+1][k-1]=-c1/dz2;
C[w+1][k+s*s-s]=-c3/dz1;
C[w+1][k+s*s-1]=-c4/dz2;
C[w+1][k+s*s]=(c3/dz1)+(c4/dz2);
        }

        k=k+1;
        w=w+2;
    }
    while(w<2*g*s+1);
}

```

Για να μπορέσουμε να δημιουργήσουμε τον ζητούμενο πίνακα **C** παίρνουμε μια διπλή επανάληψη από 1 μέχρι $2 \cdot g \cdot s$ βάζοντας στο πίνακα όλα τα στοιχεία να είναι μηδέν. Σε δεύτερο βήμα ξεκινάμε να «γεμίζουμε» τις θέσεις του πίνακα με τις διάφορες τιμές δημιουργώντας τα διάφορα Block χρησιμοποιώντας μια εντολή επανάληψης do while, όπως φαίνεται στο παραπάνω τμήμα του προγράμματος.

III. ConstantA(double *A, int g, int s, double z1, double z2, double density, double dz1, double dz2, double t)

Η συνάρτηση ConstantA δημιουργεί τον πίνακα των σταθερών όρων **A** (σχέση 5.7). Για την επίλυση του συστήματος 5.3-5.4 θεωρούμε τις οριακές συνθήκες

$$\lambda = constant,$$

$$\mu = constant,$$

στο πάνω και δεξιό όριο του αριθμητικού μας πλέγματος.

Η συνάρτηση δέχεται σαν είσοδο τον αριθμό των κόμβων που βρίσκονται οριζόντια, g και τον αριθμό των κόμβων που βρίσκονται κάθετα, s , στο πλέγμα μας. Επίσης τις τιμές των θέσεων z_1 και z_2 . Την τιμή της πυκνότητας. Τα χωρικά βήματα Δz_1 και Δz_2 . Όπως επίσης και τον χρόνο.

Η συνάρτηση ConstantA δίνεται από το παρακάτω τμήμα του κώδικα

```
void ConstantA(double *A,int g,int s,double z1,double z2,double density,double
c1,double c2, double c3, double c4,double dz1,double dz2,double t)
{

    int i,j,k;
    double a,b,c,d,a10,b10,a01,b01,z01,z02;

    a=52.8892;
    b=-36.7874;
    c=-21.8927;
    d=25.0892;
    k=1;
    a01=1.;
    b01=-1.; //Statheres times boundaries plegmaton!!!!
    a10=1.;
    b10=-1.;
    z01=z1;
    z02=z2;
```

```

for(i=1;i<g+1;i=i++)
{
    z1=z01;
    for(j=1;j<s+1;j++)
    {
        // cout<<"z1= "<<z1<<"z2= "<<z2<<endl;
        if(i==1)
        {
            if(j==1)
            {

                A[k]=(a*z1+b*z2)*density+(c1/dz1)*a01+(c2/dz1)*b01+(c3/dz2)*b10;

                A[k+1]=(c*z1+d*z2)*density+(c1/dz2)*a10+(c3/dz1)*b01+(c4/dz2)*b10;
            }
            else
            {
                A[k]=(a*z1+b*z2)*density+(c1/dz1)*a01+(c2/dz1)*b01;
                A[k+1]=(c*z1+d*z2)*density+(c3/dz1)*b01;
            }

            k=k+2;
        }
        else
        {
            if(j==1)
            {
                A[k]=(a*z1+b*z2)*density+(c3/dz2)*b10;
                A[k+1]=(c*z1+d*z2)*density+(c1/dz2)*a10+(c4/dz2)*b10;
            }
            else
            {

                A[k]=(a*z1+b*z2)*density;
                A[k+1]=(c*z1+d*z2)*density;
            }
            k=k+2;
        }
        z1=z1-dz1;
    }
    z2=z2-dz2;
}
}

```

IV. gaussSolver2(double **C, double *A, double *xSolve, int g)

Η gaussSolver2 επιλύει ένα σύστημα $n \times n$ εξισώσεων με την μέθοδο του Gauss. Με την μέθοδο αυτή επιλύουμε ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων μετατρέποντας το σε ένα άνω τριγωνικό σύστημα.

Στα γραμμικά συστήματα μπορούμε να κάνουμε τις παρακάτω πράξεις:

1. Αλλαγή της σειράς δύο εξισώσεων.
2. Πολλαπλασιασμό μιας εξίσωσης με μία μη-μηδενική σταθερά.
3. Αντικατάσταση μιας εξίσωσης από το άθροισμα αυτής και ενός πολλαπλάσιου κάποιας από τις υπόλοιπες εξισώσεις.

Έστω ένα σύστημα της μορφής

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\dots \\a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n\end{aligned}$$

ή σε μορφή πινάκων

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{B}.$$

Η μέθοδος του Gauss ακολουθεί τα εξής βήματα:

1. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ και την αφαιρούμε από την δεύτερη.

Αντίστοιχα πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ και την αφαιρούμε από την τρίτη. Συνεχίζουμε την παραπάνω διαδικασία οπότε το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\0 + a_{22}^{(I)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(I)}x_n &= b_2^{(I)} \\&\dots \\0 + a_{n2}^{(I)}x_2 + \dots + a_{nn}^{(I)}x_n &= b_n^{(I)}\end{aligned}$$

όπου τώρα οι σταθεροί όροι έχουν αλλάξει και έχουμε για παράδειγμα τον όρο

$$a_{22}^{(I)} = \frac{a_{12}a_{21}}{a_{11}} - a_{22}.$$

2. Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη εξίσωση με $\frac{a_{32}^{(I)}}{a_{22}^{(I)}}$ και την αφαιρούμε από την τρίτη.

Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο και τελικά το σύστημα μας γίνεται

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\0 + a_{22}^{(I)} + \dots + a_{2n}^{(I)}x_n &= b_2^{(I)} \\&\dots \\0 + 0 + \dots + a_{nn}^{(II)}x_n &= b_n^{(II)}\end{aligned}$$

και οι νέοι σταθεροί όροι δίνονται από σχέσεις όπως για παράδειγμα

$$a_{33}^{(II)} = \frac{a_{32}^{(I)} a_{33}^{(I)}}{a_{22}^{(I)}} - a_{33}^{(I)}.$$

Μετά από $n-1$ βήματα το σύστημα μας γίνεται άνω τριγωνικό

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ 0 + a_{22}^{(I)} + \dots + a_{2n}^{(I)}x_n &= b_2^{(I)} \\ 0 + 0 + a_{33}^{(II)} + \dots + a_{3n}^{(II)} &= b_3^{(II)} \\ &\dots \\ 0 + 0 + \dots + a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)} \end{aligned}$$

και η λύση του μπορεί να δοθεί από τις παρακάτω σχέσεις:

Για τον n -οστό όρο

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}}.$$

Για τους υπόλοιπους όρους

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{k=i-1}^n a_{ik}^{(i-1)}x_k}{a_{ii}^{(i-1)}}.$$

Η συνάρτηση gaussSolver2 ακολουθεί τα παραπάνω βήματα επιλύοντας ένα σύστημα $n \times n$ εξισώσεων. Δέχεται σαν είσοδο τον πίνακα των σταθερών συντελεστών **C**, τον πίνακα των σταθερών όρων **A** και τον αριθμό των εξισώσεων.

Για να απομακρύνουμε τυχόν σφάλματα θεωρούμε ίσο με μηδέν όλους τους όρους που είναι μικρότεροι από 0.0001.

Για να μην αντιμετωπίσουμε πρόβλημα, αν τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου του πίνακα των σταθερών συντελεστών **C** είναι μηδενικά, η συνάρτηση βλέπει τις τιμές των τιμών της κυρίας διαγωνίου και αν είναι μηδενική τότε αλλάζει της γραμμές του συστήματος όπως επίσης της αντίστοιχες γραμμές στον πίνακα των σταθερών όρων **A**. Με την διαδικασία αυτή απομακρύνουμε τον κίνδυνο απειρισμών, κατά την διάρκεια των υπολογισμών, λόγω του πολλαπλασιασμού με όρους της μορφής $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ όπου στον παρανομαστή έχουμε στοιχείο της κυρίας διαγωνίου.

Οι λύσεις του συστήματος δίνονται από τον πίνακα xSolve.

Η συνάρτηση gaussSolver2 δίνεται από το παρακάτω τμήμα του προγράμματος

```
void gaussSolver2(double **C,double *B,double *xSolve,int d)
{
    int i,j,h,k;
    double G,sum,temp;

    for(h=1;h<d;h++)
    {
        for(i=2;i<d+1;i++)
        {
            G=C[i][h]/C[h][h];
            if(h<i)
            {
                for(j=1;j<d+1;j++)
                {
                    C[i][j]=C[i][j]-G*C[h][j];
                    if(fabs(C[i][j])<0.0001)
                    {
                        C[i][j]=0;
                    }
                }
                B[i]=B[i]-G*B[h];
            }
        }
        for(i=2;i<d+1;i++)
        {
            if(C[i][i]==0)
            {
                for(j=i+1;j<d+1;j++)
                {
                    // cout<<"i= "<<i<<endl;
                    if(C[j][i]!=0)
                    {
                        k=j;
                        break;
                    }
                }
                for(j=1;j<d+1;j++)
                {
                    temp=C[i][j];
                    C[i][j]=C[k][j];
                    C[k][j]=temp;
                }
                temp=B[i];
                B[i]=B[k];
                B[k]=temp;
            }
        }
    }
}
```

```

for(k=d;k>0;k--)
{
    sum=0;                                //Ipologismos ton x!!!
    for(i=1;i<d+1;i++)
    {
        if(i>k)
        {
            sum=sum+C[k][i]*xSolve[i];
        }
    }
    xSolve[k]=(B[k]-sum)/C[k][k];
    // cout<<"x["<<k<<"]="<<xSolve[k]<<endl;    // Exagogi x
}
}

```

V. takevalues(double **Lamda, double **Mi, double *xSolve, int g, int s)

Με την συνάρτηση αυτή δίνουμε τις τιμές των σταθερών λ και μ του Lamé από τον πίνακα xSolve. Ο πίνακας xSolve έχει τις λύσεις στην μορφή

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \dots \\ \dots \\ \lambda_{nn} \\ \mu_{11} \\ \mu_{12} \\ \dots \\ \mu_{nn} \end{pmatrix}$$

και η συνάρτηση takevalues σπάει τις λύσεις σε δύο πίνακες: τον πίνακα Lamda που περιέχει τις τιμές της σταθεράς λ του Lamé και τον πίνακα Mi που περιέχει τις τιμές της σταθεράς μ του Lamé σε κάθε σημείο του πλέγματος.

Δέχεται σαν είσοδο τον πίνακα xSolve και τον αριθμό των σημείων του πλέγματος g και s . Η συνάρτηση δίνεται από το παρακάτω τμήμα του προγράμματος

```
void takevalues(double **Lamda,double **Mi,double *xSolve,int g,int s)
{
    int i,j,k;

    k=1;

    for(i=1;i<g+1;i++)
    {
        for(j=1;j<s+1;j++)
        {
            {
                Lamda[i][j]=xSolve[k];
            }
            k=k+1;
        }
    }
    for(i=1;i<g+1;i++)
    {
        for(j=1;j<s+1;j++)
        {
            {
                Mi[i][j]=xSolve[k];
            }
            k=k+1;
        }
    }
}
```

VI. Συναρτήσεις εξόδου των δεδομένων

Με τις παρακάτω συναρτήσεις εξάγουμε τα δεδομένα σε διάφορες μορφές για την καλύτερη επεξεργασία τους.

Με την συνάρτηση PrintGridonfile εξάγουμε τα δεδομένα μας στο αρχείο diplomatikidata1.dat. Εδώ, δίνονται όλα τα δεδομένα των σταθερών του Lamé σε ένα αρχείο έχοντας τις τιμές σε κάθε σημείο του πλέγματος για κάθε χρονική στιγμή. Η συνάρτηση δέχεται σαν είσοδο, τον πίνακα της σταθεράς του Lamé: Lamda ή Mi, την χρονική στιγμή time, τον αριθμό των σημείων του πλέγματος g, s , τις θέσεις z_1, z_2 και τα χρονικά βήματα.

Με την συνάρτηση printusefull εξάγουμε τα δεδομένα των σταθερών του Lamé στο αρχείο diplomatikidata2.dat. Εδώ, μαζί με τις σταθερές του Lamé δίνονται και ο χρόνος και η πυκνότητα στην συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η συνάρτηση δέχεται σαν είσοδο, τον πίνακα της σταθεράς του Lamé: Lamda ή Mi, την χρονική στιγμή time, τον αριθμό των σημείων του πλέγματος g, s και την πυκνότητα density κάθε χρονική στιγμή.

Η συνάρτηση elasticity εξάγει τα δεδομένα στα αρχεία elasticity.dat και ni.dat. Με αυτήν την συνάρτηση υπολογίζουμε και εξάγουμε το μέτρο της ελαστικότητας όπως δίνεται

στον ορισμό A.II.4.3 και την σχέση 2.24, και τον συντελεστή Poisson όπως δίνεται στον ορισμό A.II.4.4 και στην σχέση 2.25.

Οι παραπάνω συναρτήσεις δίνονται από τα παρακάτω τμήματα του κώδικα

```
void printGridonfile(double **Lamda,double time,int g,int s,double z1,double z2,double
dz1,double dz2)
{
    FILE *PTR;
    FILE *PPTR;
    FILE *PPPTR;

    PTR=fopen("d:diplomatikidata1.dat","a");
    //PTR=fopen("/mnt/win_d/diplomatiki1.dat","a");
    PPTR=fopen("d:xdata.dat","a");
    //PPTR=fopen("/mnt/win_d/xdata.dat","a");
    PPPTR=fopen("d:ydata.dat","a");
    //PPPTR=fopen("/mnt/win_d/ydata.dat","a");

    int i,j;
    double z10,z20,t0;
    z10=z1;
    z20=z2;
    t0=time;
    //fprintf(PTR,"%e",time);
    //fprintf(PTR,"\n");
    for(i=1;i<g+1;i++)
    {

        z1=z10;
        for(j=1;j<s+1;j++)
        {

            fprintf(PTR,"\t%f",Lamda[i][j]);
            fprintf(PPTR,"\t%f",z1);
            fprintf(PPPTR,"\t%f",z2);

            z1=z1-dz1;
        }
        fprintf(PTR,"\n");
        fprintf(PPTR,"\n");
        fprintf(PPPTR,"\n");
        z2=z2-dz2;

    }
    fclose(PTR);
    fclose(PPTR);
    fclose(PPPTR);
}
```

```
void printusefull(double **Lamda,double time,int g,int s, double density)
{
    FILE *PTR;

    PTR=fopen("d:diplomatikidata2.dat","a");

    int i,j;

    fprintf(PTR,"%e",time);
    fprintf(PTR,"\t%e",density);
    fprintf(PTR,"\n");
    for(i=1;i<g+1;i++)
    {
        for(j=1;j<s+1;j++)
        {
            fprintf(PTR,"\t %f",Lamda[i][j]);
        }
        fprintf(PTR,"\n");
    }
    fclose(PTR);
}
```

```
void elasticity(double **Lamda,double **Mi,int g, int s)
{
    FILE *PTR;
    PTR=fopen("d:elasticity.dat","a");
    FILE *PPTR;
    PPTR=fopen("d:ni.dat","a");
    int i,j;
    double elast,ni;

    for(i=1;i<g+1;i++)
    {
        for(j=1;j<s+1;j++)
        {
            elast=(Mi[i][j]*(3*Lamda[i][j]+2*Mi[i][j]))/(Lamda[i][j]+Mi[i][j]);
            ni=Lamda[i][j]/(2*(Lamda[i][j]+Mi[i][j]));
            fprintf(PTR,"\t%e",elast);
            fprintf(PPTR,"\t%e",ni);
        }
        fprintf(PTR,"\n");
        fprintf(PPTR,"\n");
    }
    fclose(PTR);
    fclose(PPTR);
}
```

III. Αποτελέσματα

Σύμφωνα με την φυσική ερμηνεία των σταθερών λ και μ του Lamé οι τιμές τους θα πρέπει να είναι θετικές. Ειδικά για την σταθερά μ του Lamé η οποία μας δίνει το μέτρο διάτμησης του ελαστικού μέσου (ορισμός Α.Π.4.6), θα πρέπει, με την εξέλιξη του φαινομένου και λόγω της αύξησης των τάσεων, οι τιμές της να μη μειώνονται.

Η λύση του συστήματος (5.3-5.4) των Διαφορικών Εξισώσεων επηρεάζεται από τις συνοριακές τιμές των λ και μ στο αριθμητικό πλέγμα. Θεωρούμε ότι έχουμε σταθερές τιμές των λ και μ (χρονικά αμετάβλητες) στο δεξιό και στο πάνω όριο του αριθμητικού πλέγματος, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα

×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×	×
×	11	12	13	14	15	16	17	18	19	110	111	112	113	114	115
×	21	22	23	24	25	26	27	28	29	210	211	212	213	214	215
×	31	32	33	34	35	36	37	38	39	310	311	312	313	314	315
×	41	42	43	44	45	46	47	48	49	410	411	412	413	414	415
×	51	52	53	54	55	56	57	58	59	510	511	512	513	514	515
×	61	62	63	64	65	66	67	68	69	610	611	612	613	614	615
×	71	72	73	74	75	76	77	78	79	710	711	712	713	714	715
×	81	82	83	84	85	86	87	88	89	810	811	812	813	814	815
×	91	92	93	94	95	96	97	98	99	910	911	912	913	914	915
×	101	102	103	204	105	106	107	108	109	1010	1011	1012	1013	1014	1015
×	111	112	113	114	115	116	117	118	119	1110	1111	1112	1113	1114	1115
×	121	122	123	124	125	126	127	128	129	1210	1211	1212	1213	1214	1215
×	131	132	133	134	135	136	137	138	139	1310	1311	1312	1313	1314	1315
×	141	142	143	144	145	146	147	148	149	1410	1411	1412	1413	1414	1415
×	151	152	153	154	155	156	157	158	159	1510	1511	1512	1513	1514	1515

Σχήμα 1: Το αριθμητικό πλέγμα

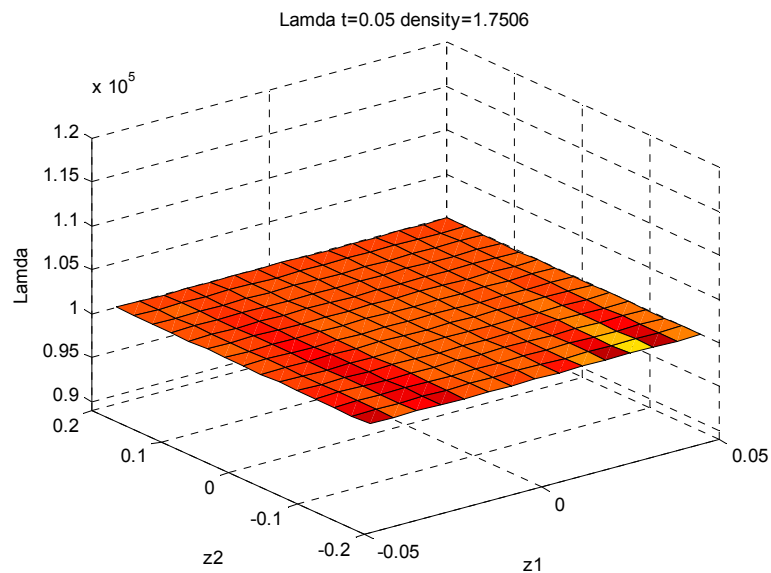
Θεωρούμε, αρχικά, τις τιμές των λ και μ στα όρια του πλέγματος να είναι

$$\lambda = 2000,$$

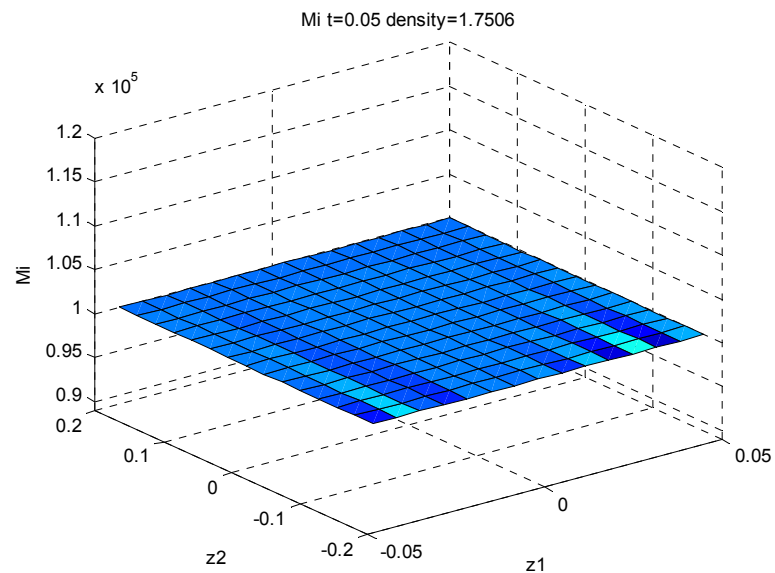
$$\mu = 2000.$$

Από την αριθμητική επίλυση του συστήματος (5.3-5.4) με την βοήθεια του προγράμματος solver21 έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

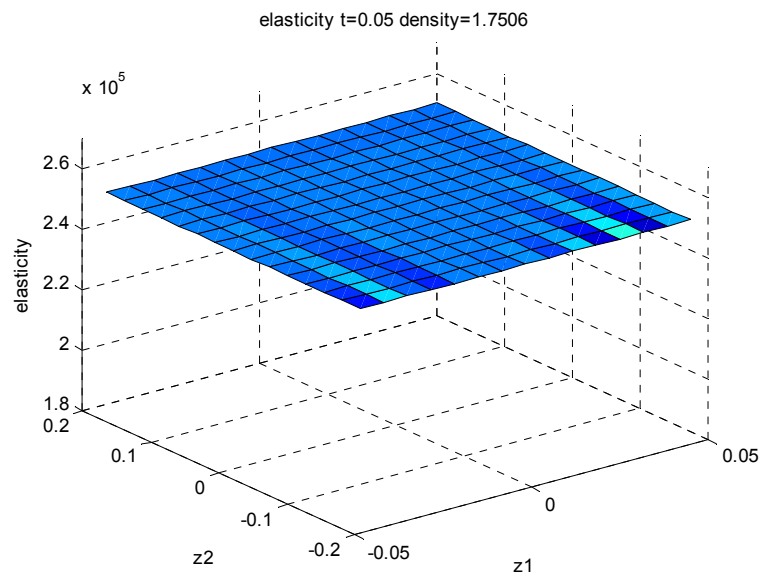
B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο



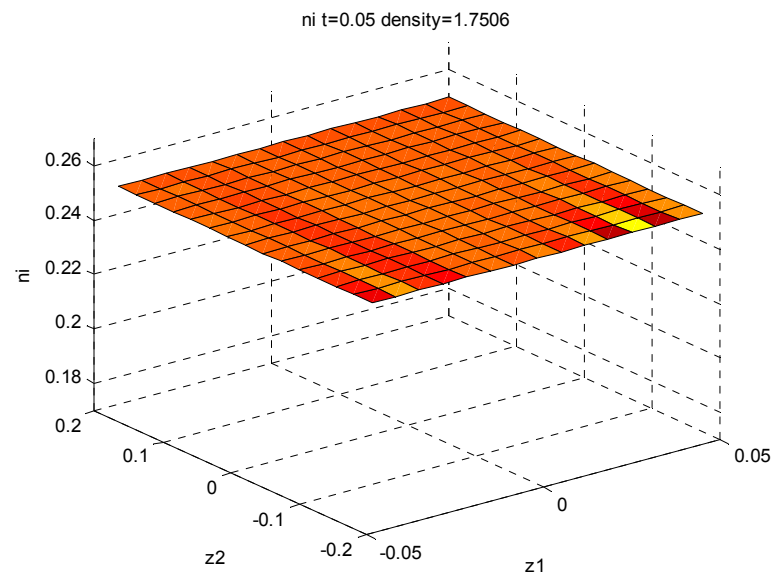
Διάγραμμα 1: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.05$



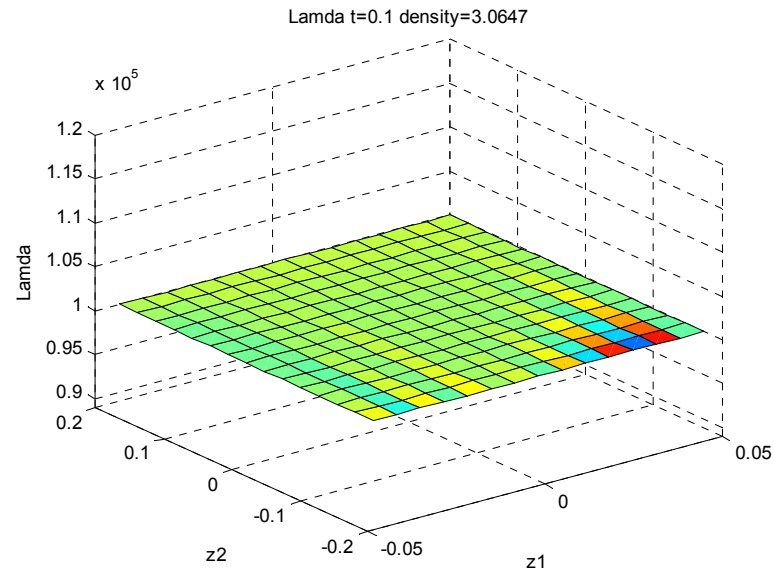
Διάγραμμα 3: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.05$



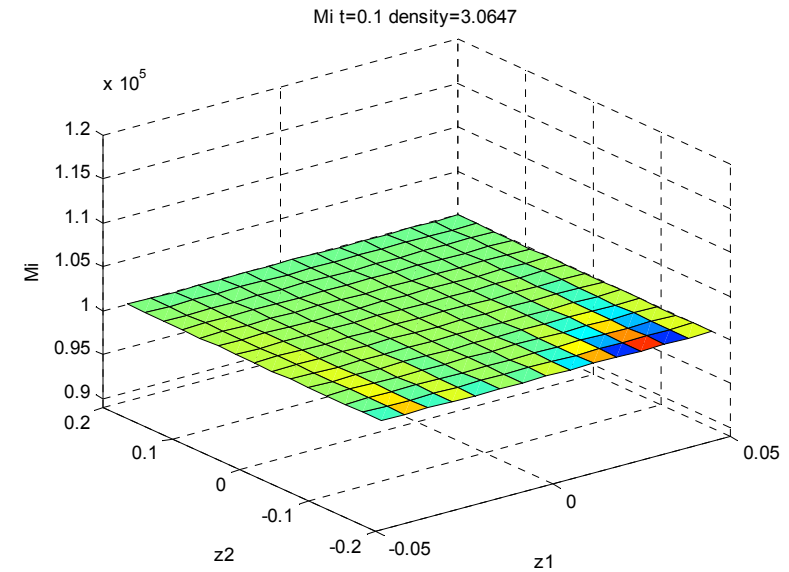
Διάγραμμα 2: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.05$



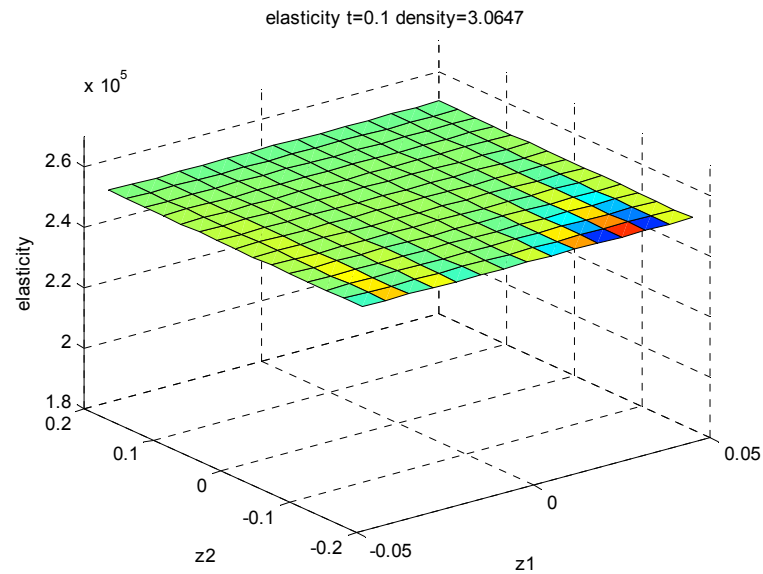
Διάγραμμα 4: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.05$



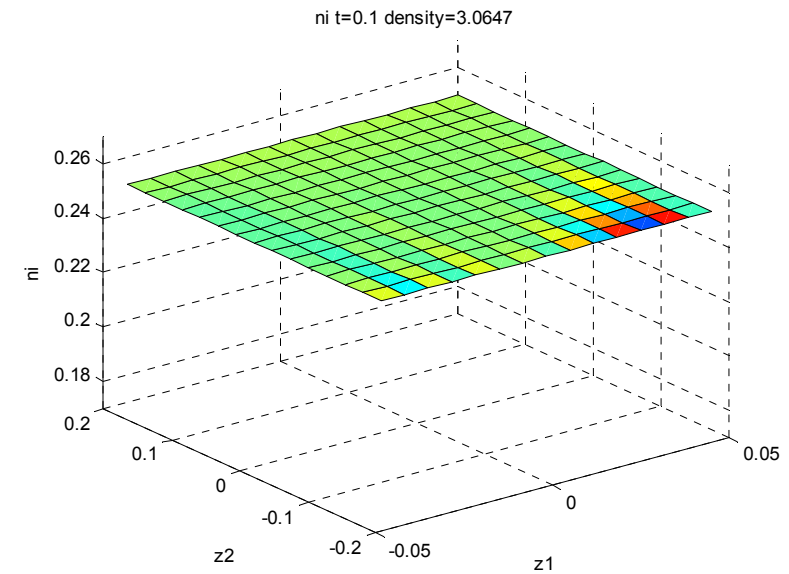
Διάγραμμα 5: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.1$



Διάγραμμα 7: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.1$

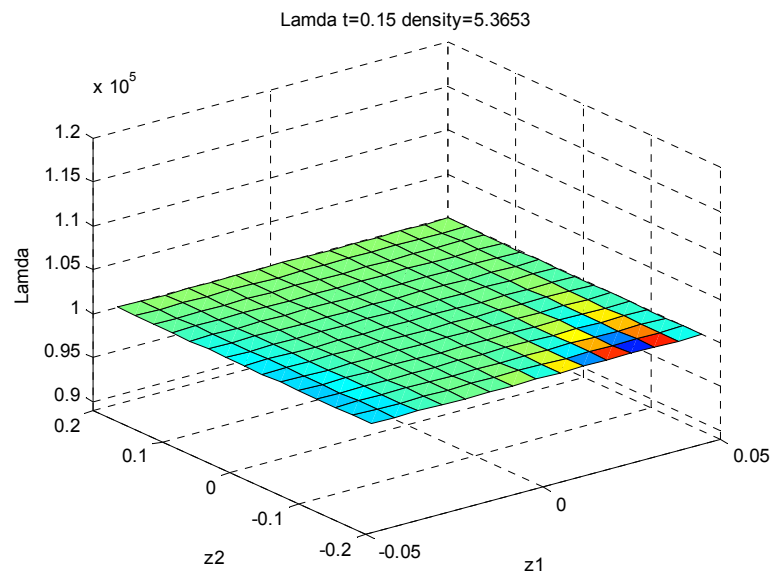


Διάγραμμα 6: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.1$

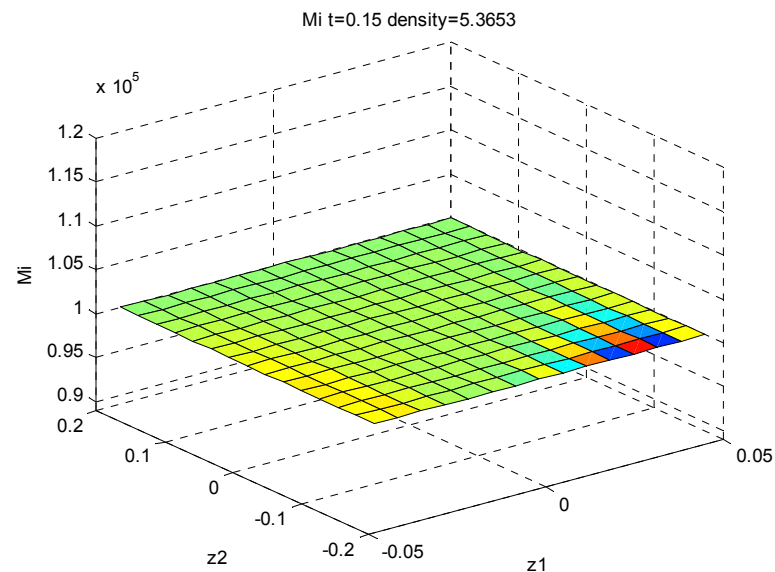


Διάγραμμα 8: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.1$

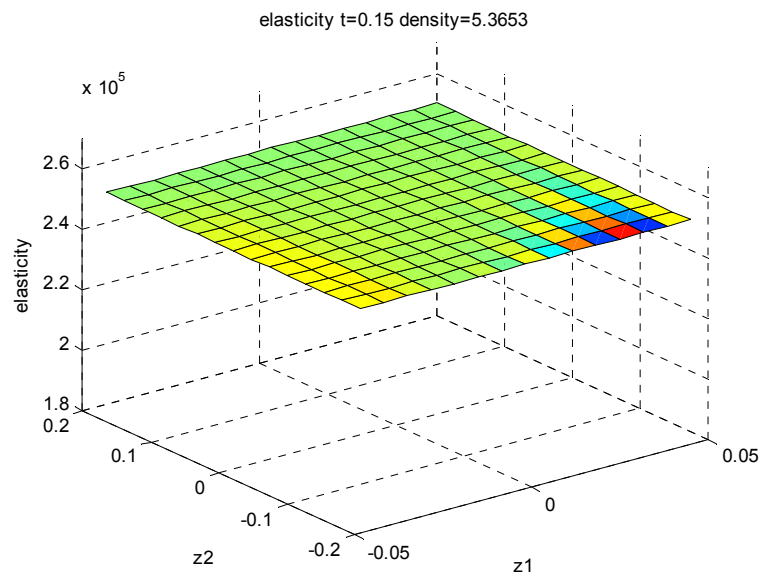
B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο



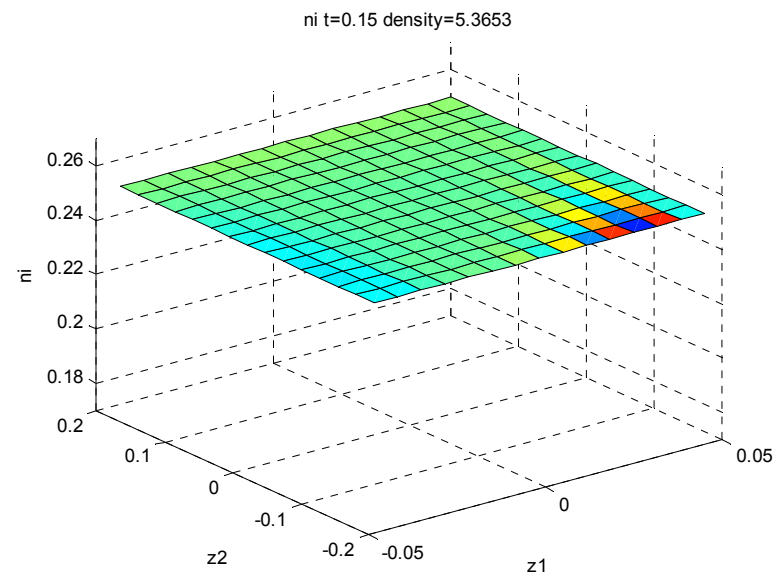
Διάγραμμα 9: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.15$



Διάγραμμα 11: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.15$

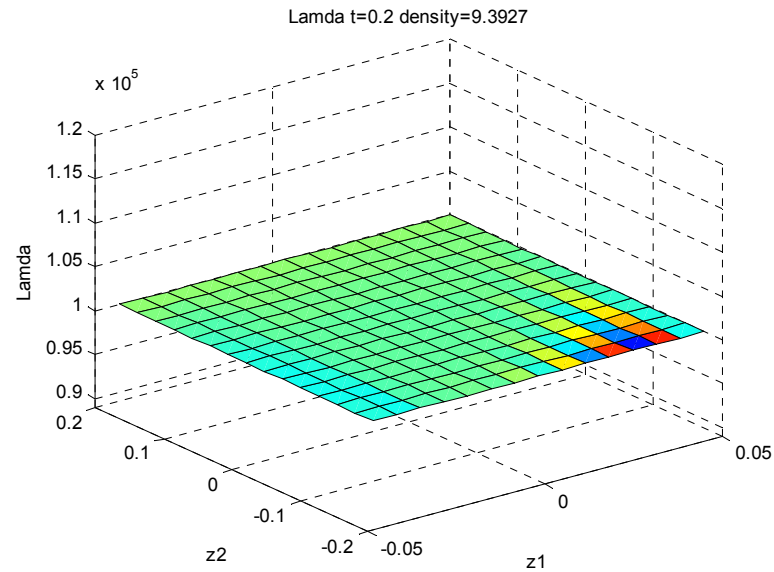


Διάγραμμα 10: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.15$

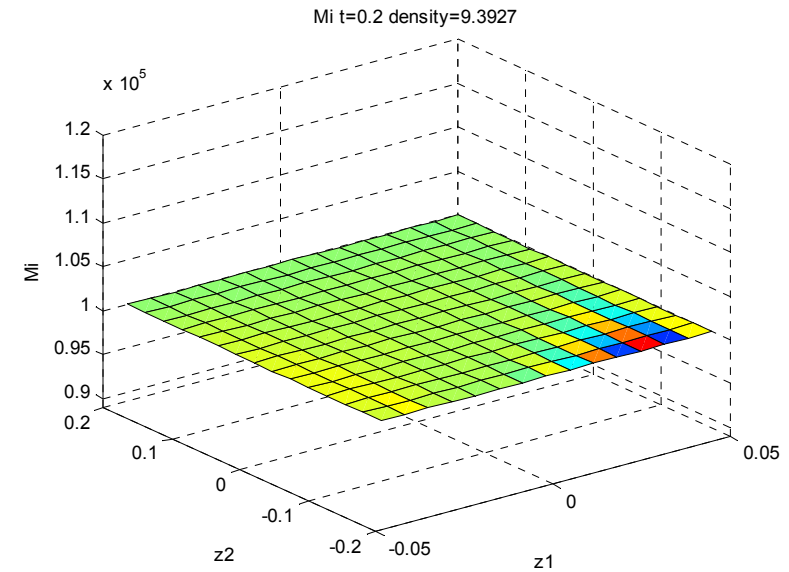


Διάγραμμα 12: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.15$

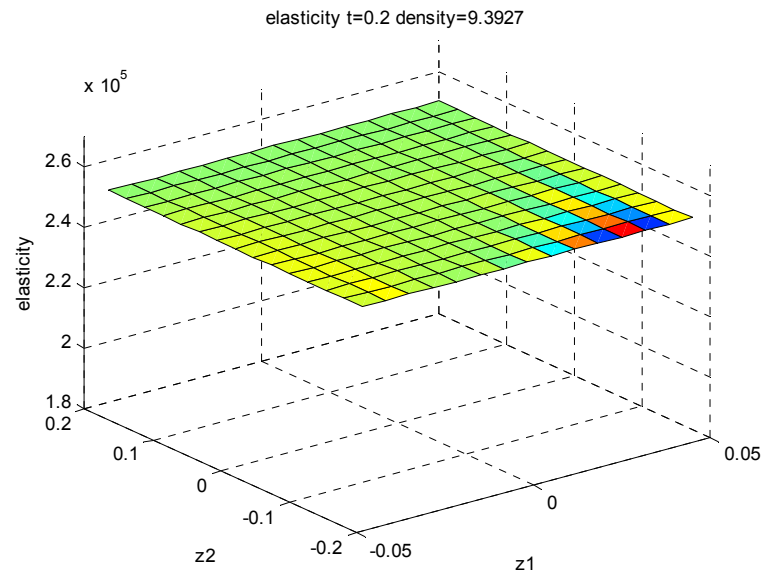
B.III Αποτελέσματα



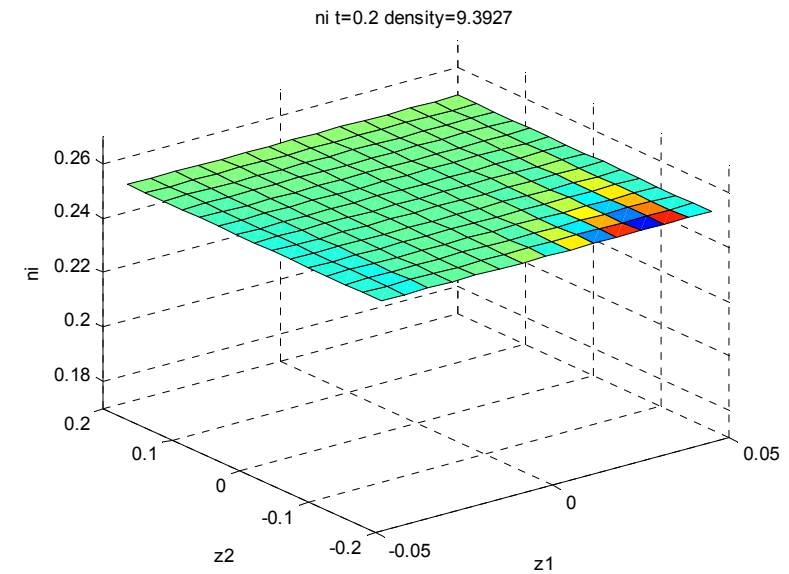
Διάγραμμα 13: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.2$



Διάγραμμα 15: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.2$

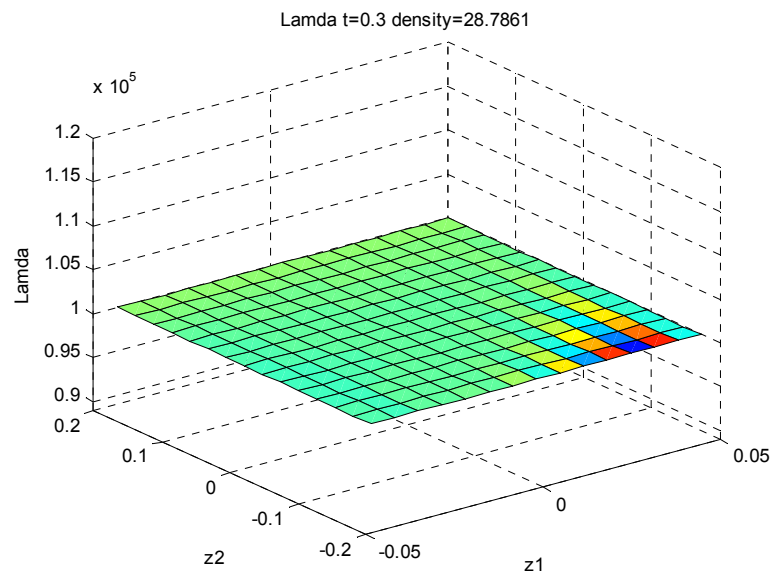


Διάγραμμα 14: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.2$

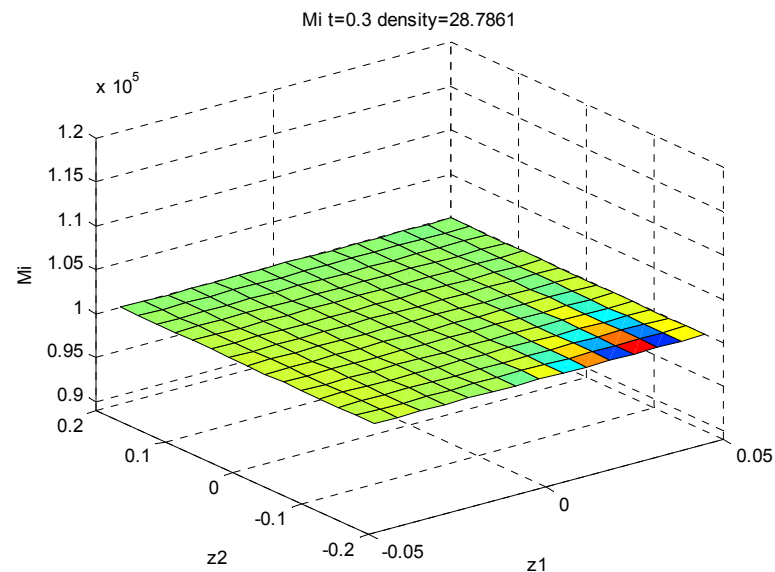


Διάγραμμα 16: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.2$

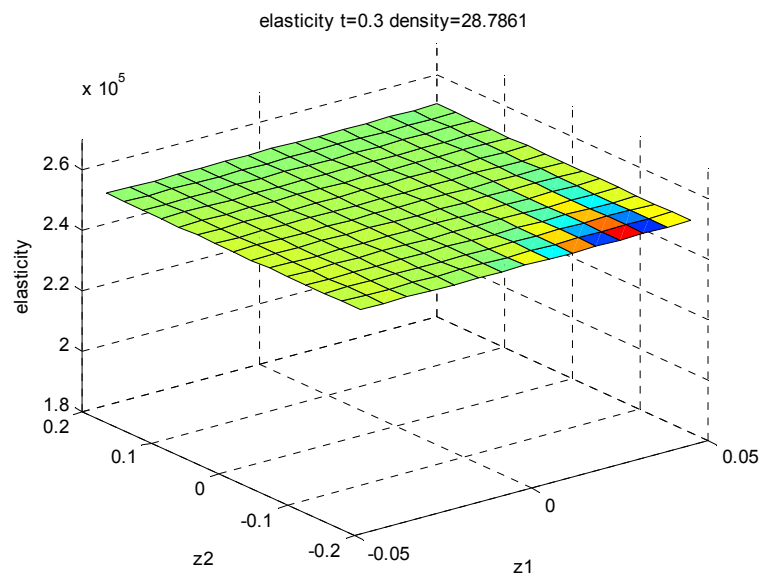
B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο



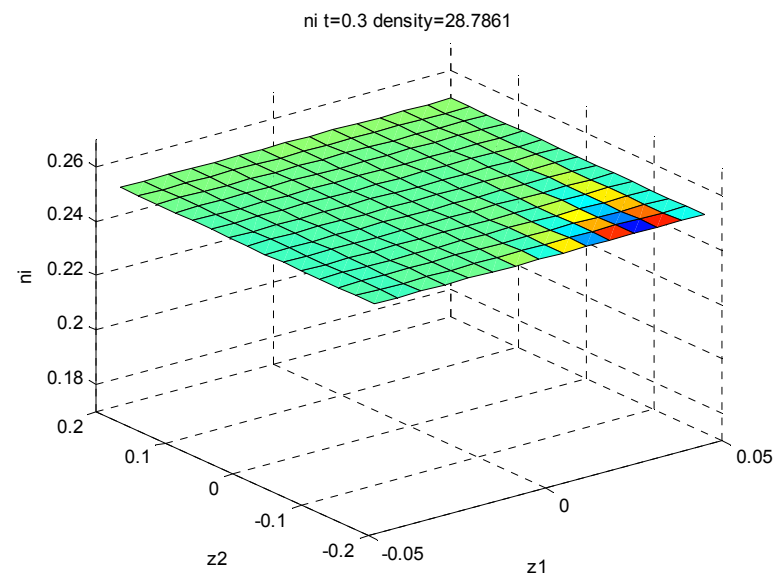
Διάγραμμα 17: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.3$



Διάγραμμα 19: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.3$



Διάγραμμα 18: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.3$



Διάγραμμα 19: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.3$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των σταθερών λ και μ είναι θετικές όπως αναμέναμε. Επίσης η τιμή της σταθεράς μ αυξάνεται αργά με την χρονική εξέλιξη του συστήματος και την αύξηση των τάσεων, όπως θα αναμέναμε και από την θεωρία. Αντίστοιχα, παρατηρούμε ότι οι τιμές των σταθερών λ σταδιακά μειώνονται.

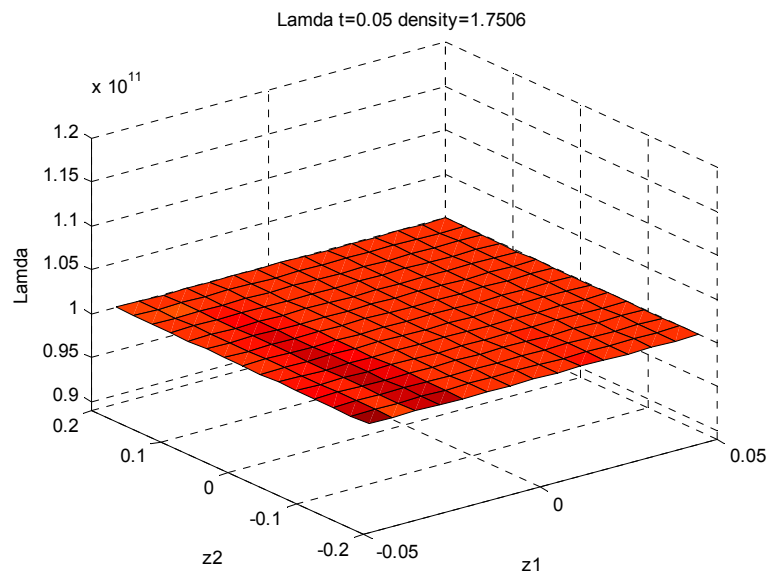
Το πρόγραμμα δίνει «σωστές» λύσεις μέχρι την χρονική στιγμή $t = 0.65$. Σε αυτήν την χρονική στιγμή βλέπουμε οι λύσεις του συστήματος να έχουν παράξενη συμπεριφορά: αρνητικές και θετικές τιμές σε γειτονικά σημεία του αριθμητικού μας πλέγματος. Αυτό οφείλεται σε αδυναμία του προγράμματος και στο ότι οι τιμές των λ και μ (επιλέγουμε να) παραμένουν ίδιες στα όρια του αριθμητικού πλέγματος. Με την εξέλιξη του χρόνου έχουμε εκθετική αύξηση της πυκνότητας και του μέσου μας. Για να μπορέσει το πρόγραμμα να κρατήσει σταθερές τις τιμές των ορίων του πλέγματος, όπως ορίσαμε, δίνει λύσεις αρνητικές και θετικές και δημιουργεί το παραπάνω πρόβλημα.

Παρατηρούμε ότι αυξάνοντας τις τιμές των συννοριακών τιμών, ο χρόνος «ομαλής» συμπεριφοράς των λύσεων του συστήματος αυξάνεται. Έτσι για παράδειγμά αν θέσουμε τις οριακές τιμές $\lambda = 100000$ και $\mu = 100000$ έχουμε «σωστές» λύσεις μέχρι την χρονική στιγμή $t = 0.75$, ενώ αν θέσουμε $\lambda = 100000000$ και $\mu = 100000000$ έχουμε «σωστές» λύσεις μέχρι την χρονική στιγμή $t = 1.2$.

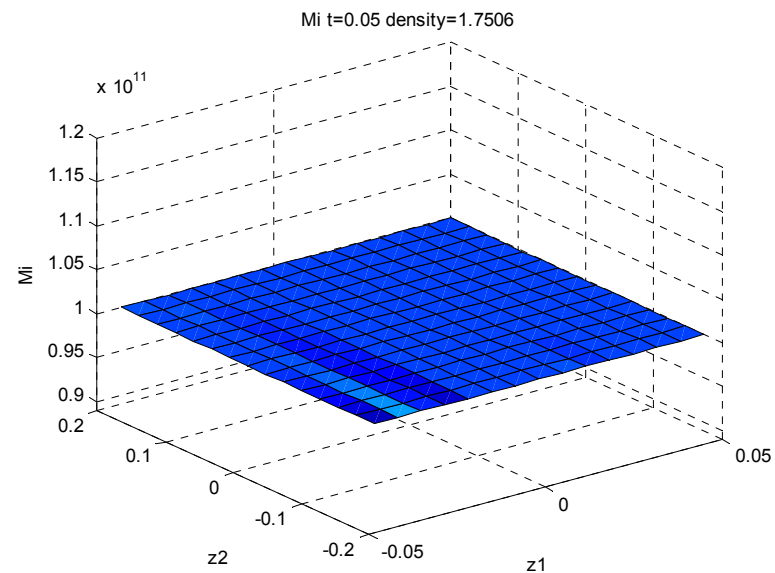
Μπορούμε να πούμε λοιπόν πως αν πάρουμε ασυμπτωτικά κάποιες πολύ μεγάλες τιμές των λ και μ αναμένουμε ο χρόνος να μεγαλώνει, ενώ αν πάρουμε μικρές τιμές των συννοριακών τιμών των σταθερών λ και μ αναμένουμε ο χρόνος να είναι πολύ μικρός. Έτσι, για οριακές τιμές $\lambda = 10^{11}$ και $\mu = 10^{11}$ έχουμε «σωστές» λύσεις για χρόνο μεγαλύτερο του $t = 1.5$, ενώ για οριακές τιμές $\lambda = 5$ και $\mu = 5$ έχουμε «μη ομαλή» συμπεριφορά ακόμα και για $t = 0.05$.

Έτσι για τις παραπάνω οριακές τιμές των σταθερών του Lamé, $\lambda = 10^{11}$ και $\mu = 10^{11}$, έχουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

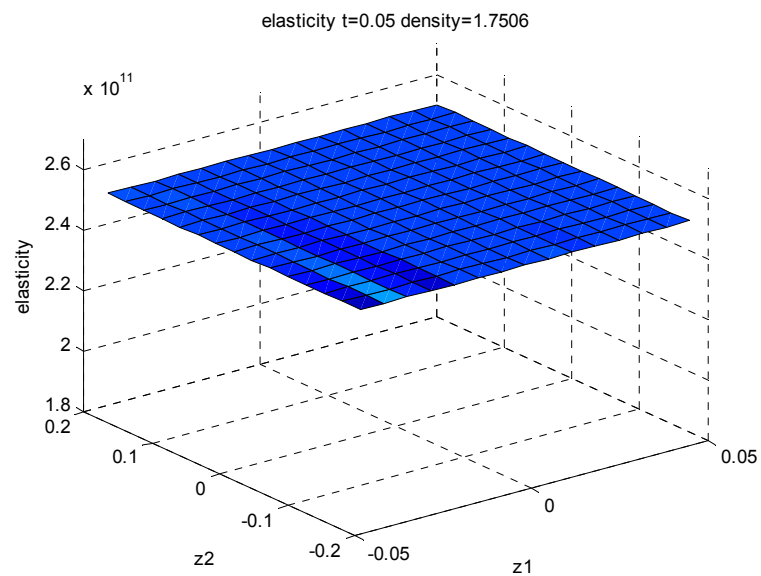
B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο



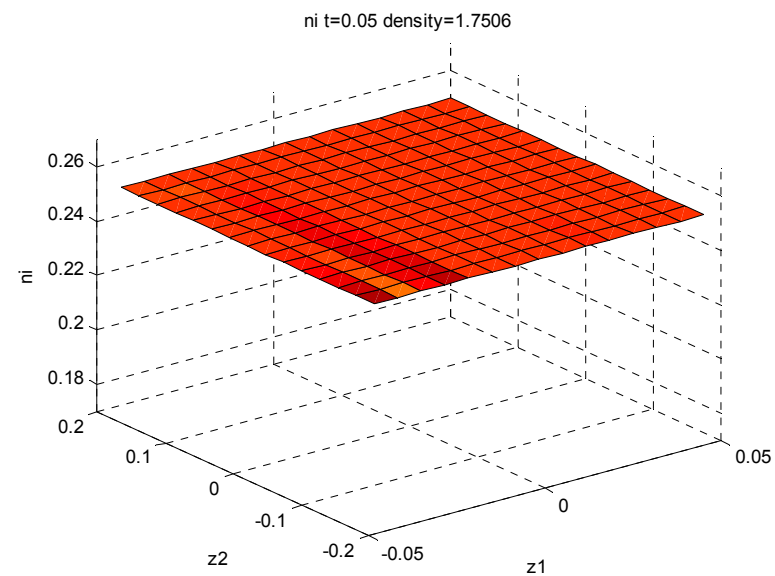
Διάγραμμα 20: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.05$



Διάγραμμα 22: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.05$

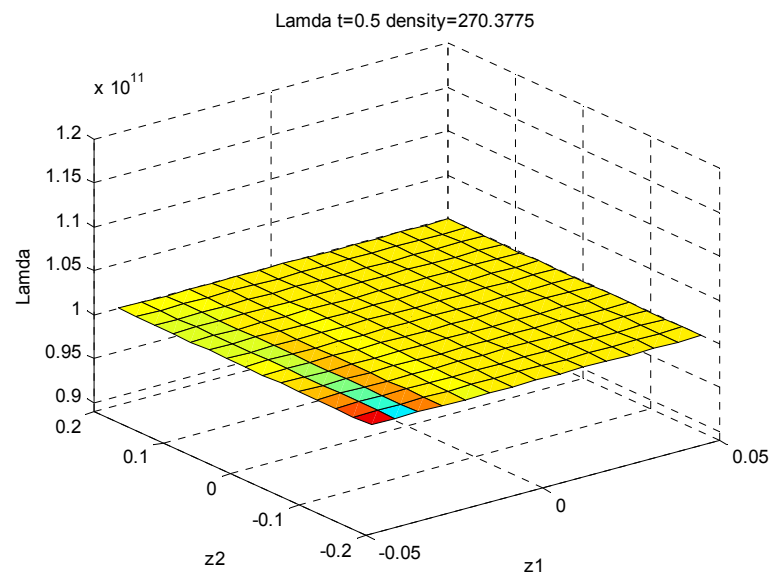


Διάγραμμα 21: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.05$

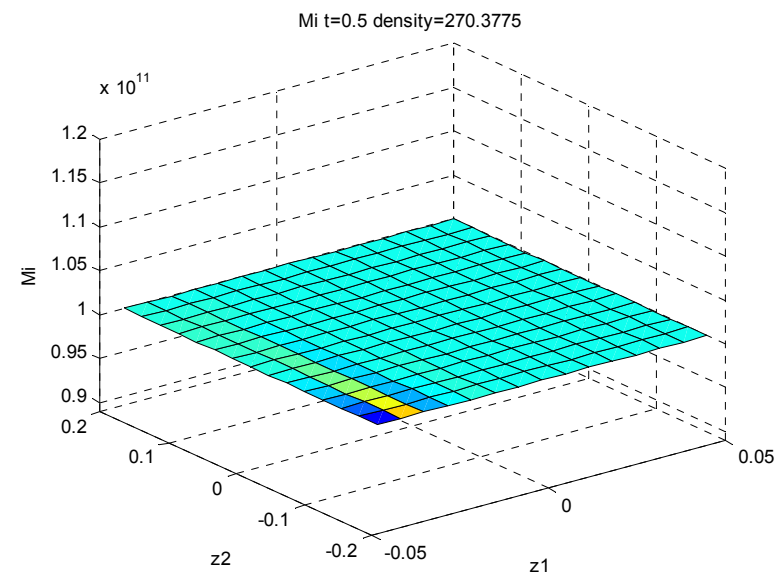


Διάγραμμα 23: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.05$

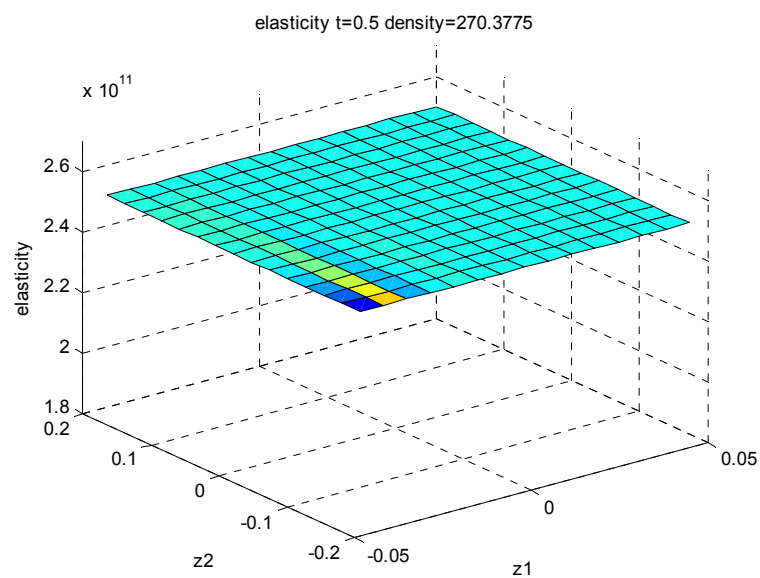
B.III Αποτελέσματα



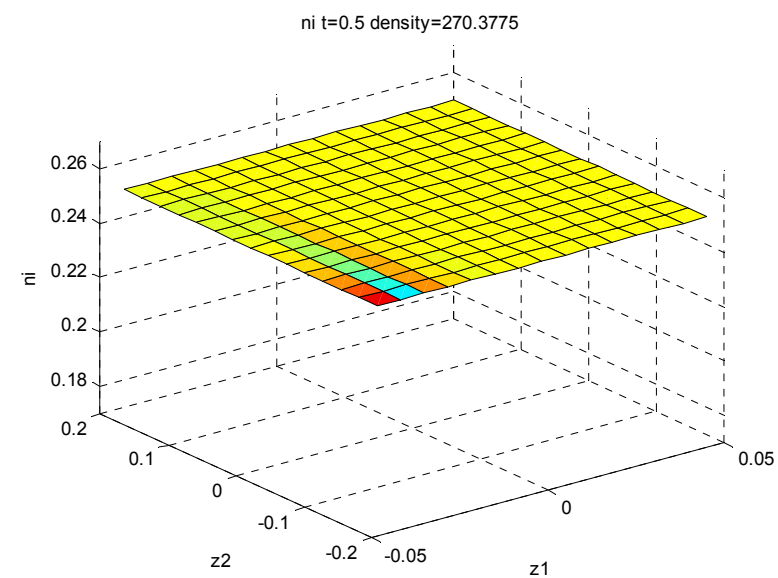
Διάγραμμα 24: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.5$



Διάγραμμα 26: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.5$

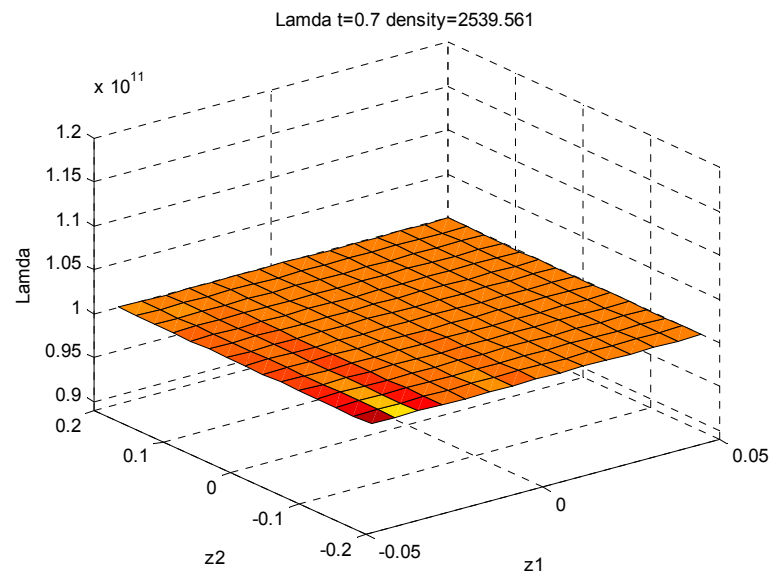


Διάγραμμα 25: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.5$

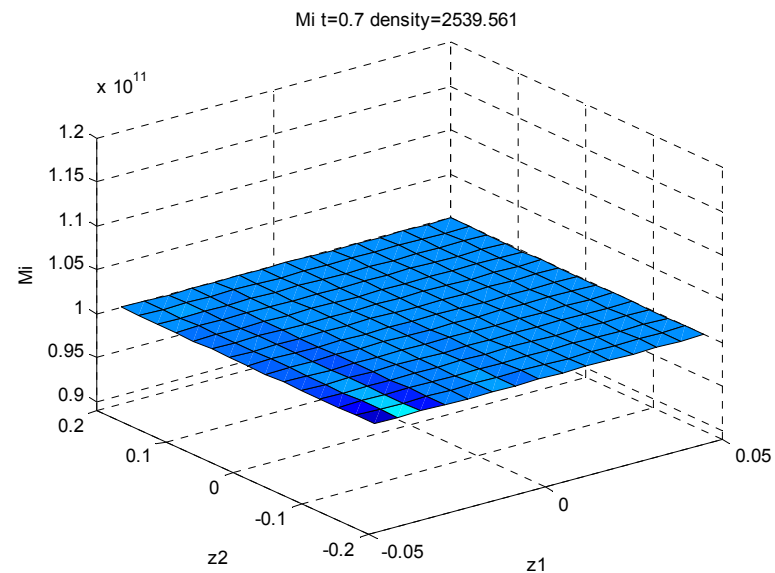


Διάγραμμα 27: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.5$

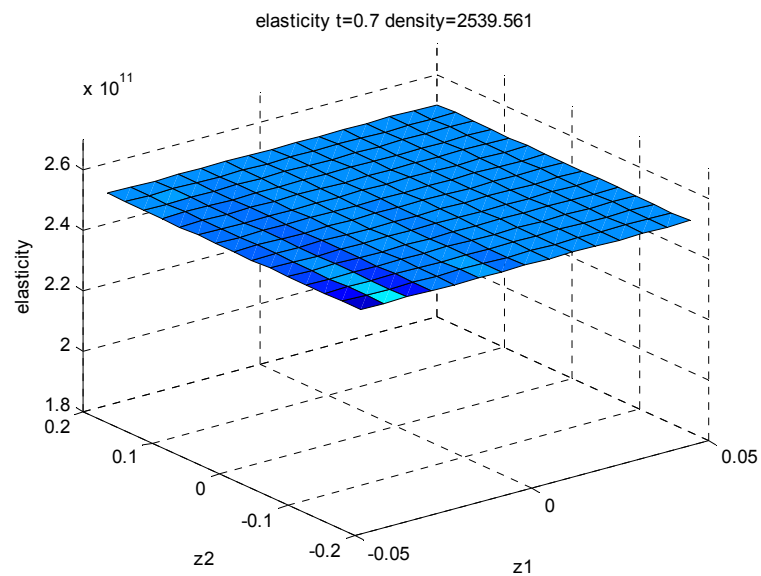
B. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο



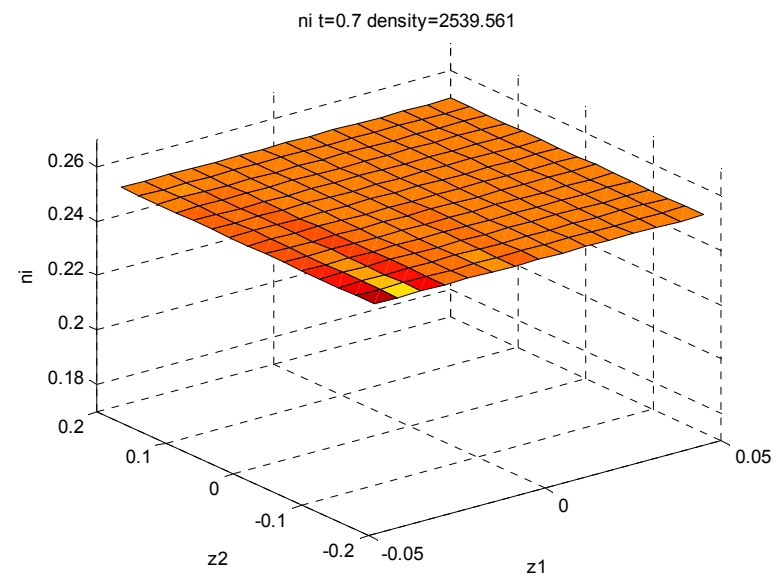
Διάγραμμα 28: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.7$



Διάγραμμα 30: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.7$

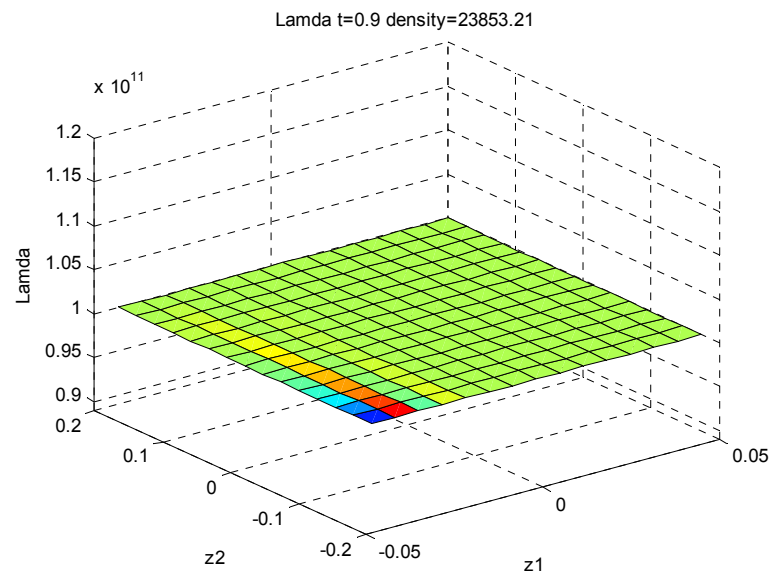


Διάγραμμα 29: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.7$

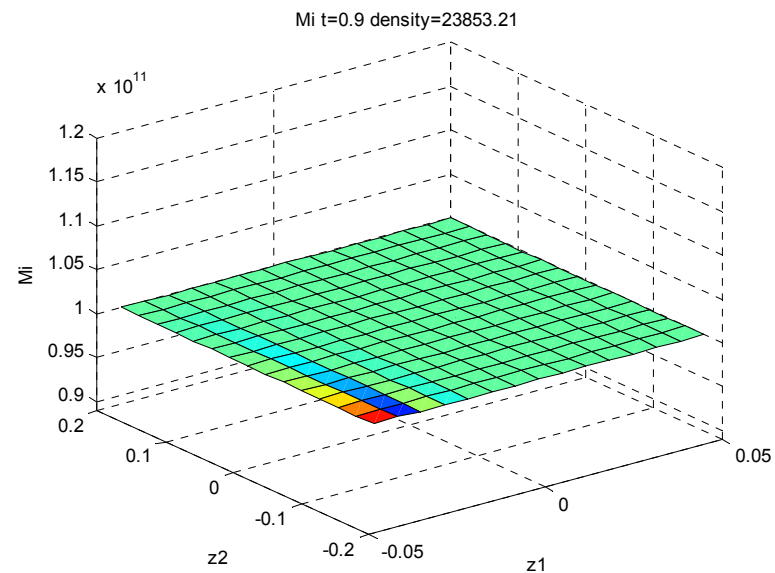


Διάγραμμα 31: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.7$

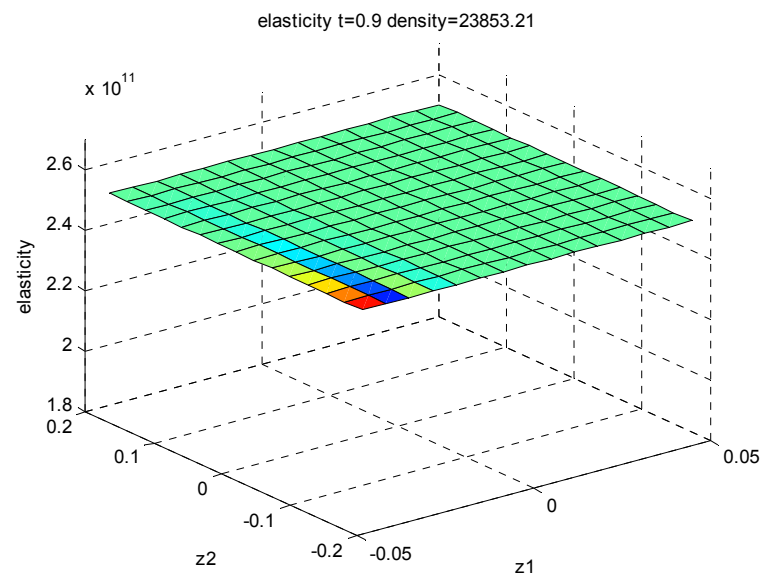
B.III Αποτελέσματα



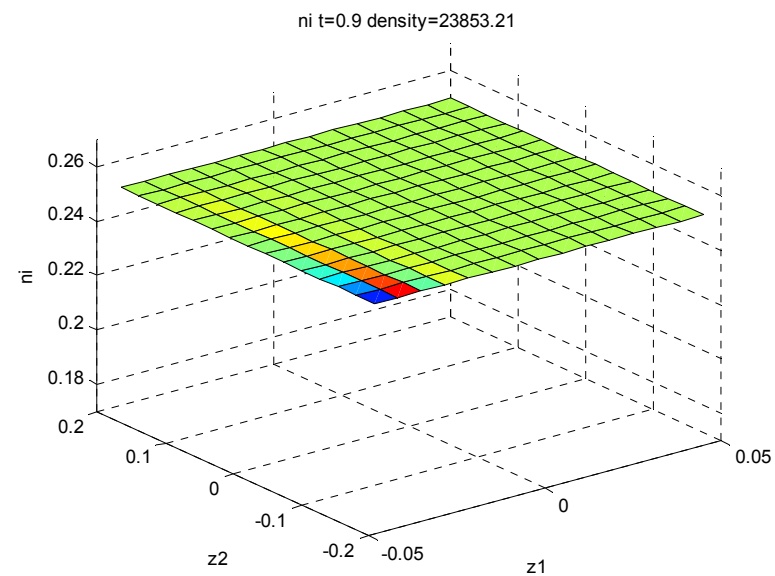
Διάγραμμα 32: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=0.9$



Διάγραμμα 34: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=0.9$

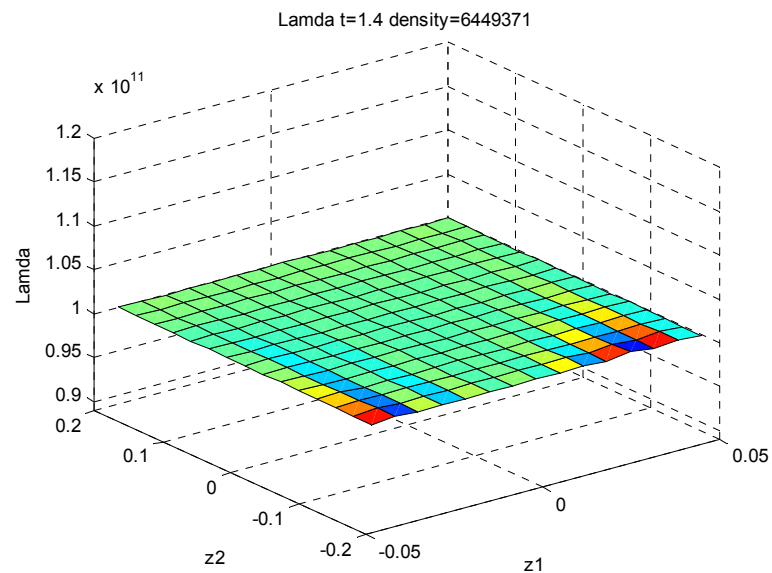


Διάγραμμα 33: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=0.9$

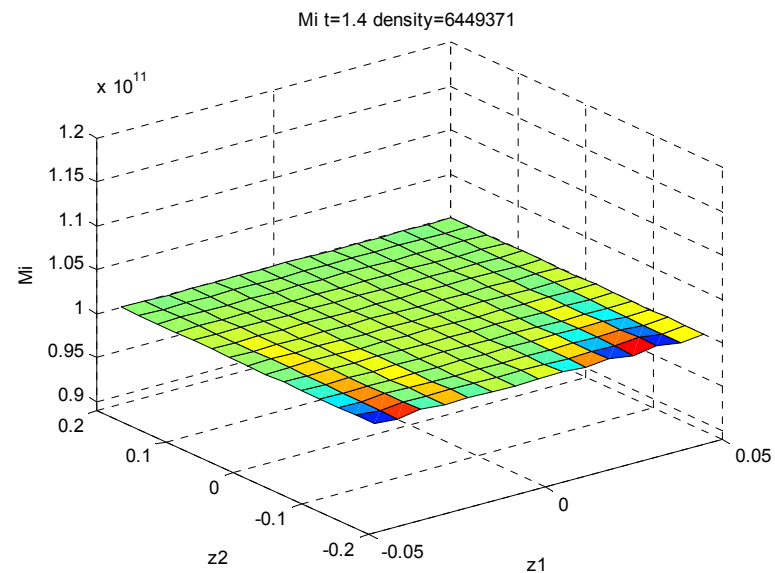


Διάγραμμα 35: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=0.9$

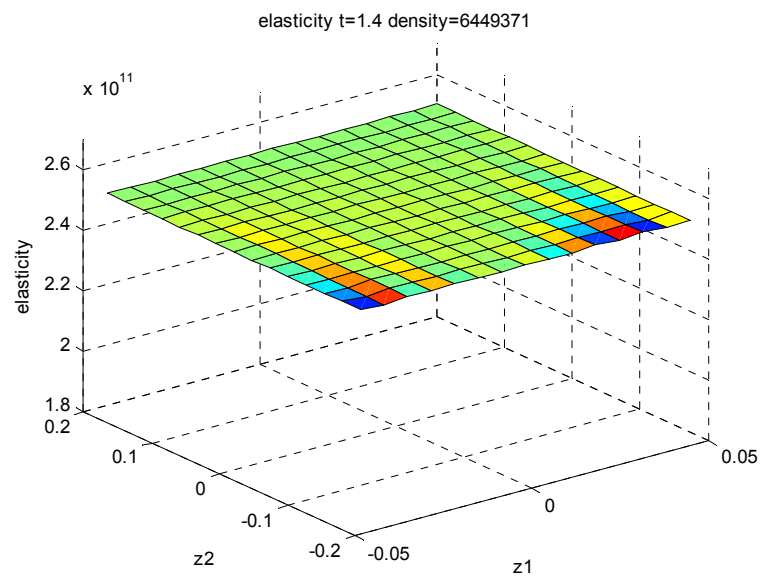
Β. Μοντελοποίηση του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος ως ελαστικό μέσο



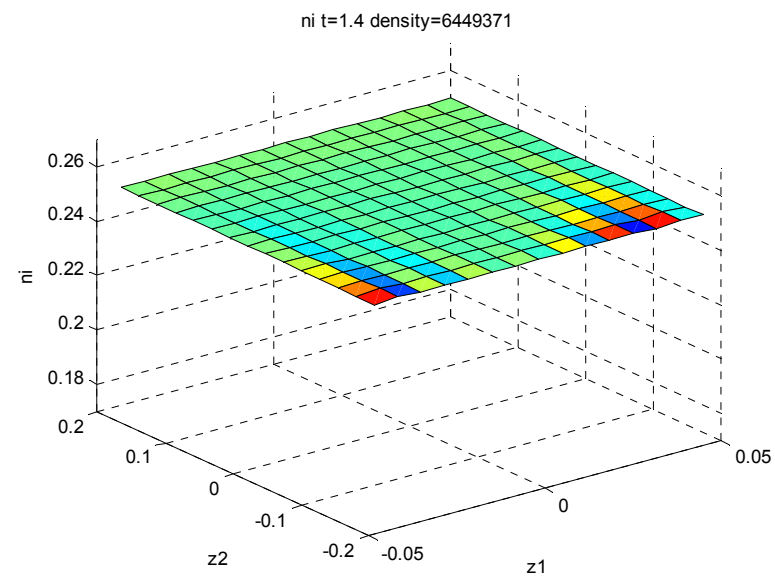
Διάγραμμα 36: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=1.4$



Διάγραμμα 38: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=1.4$

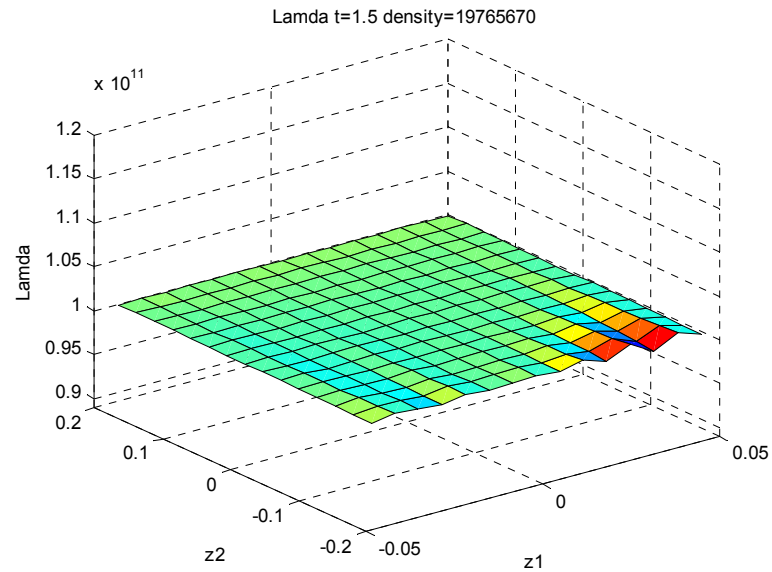


Διάγραμμα 37: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονική στιγμή $t=1.4$

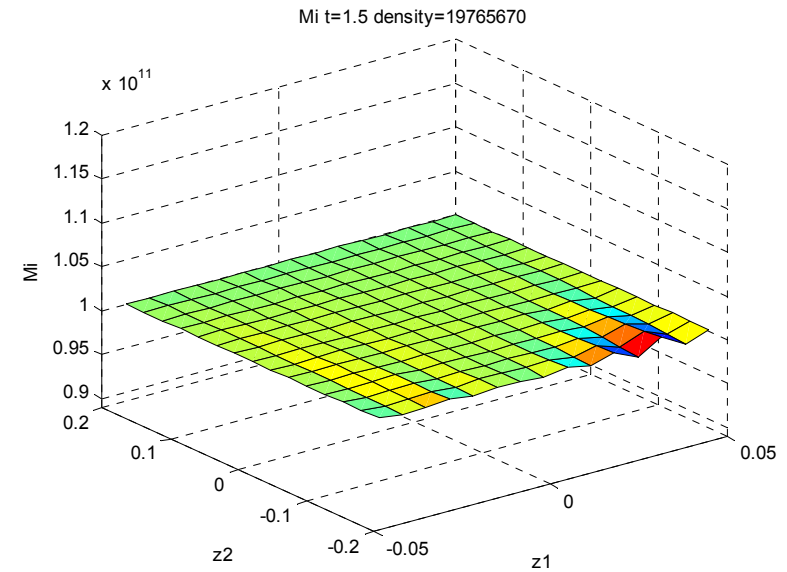


Διάγραμμα 39: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=1.4$

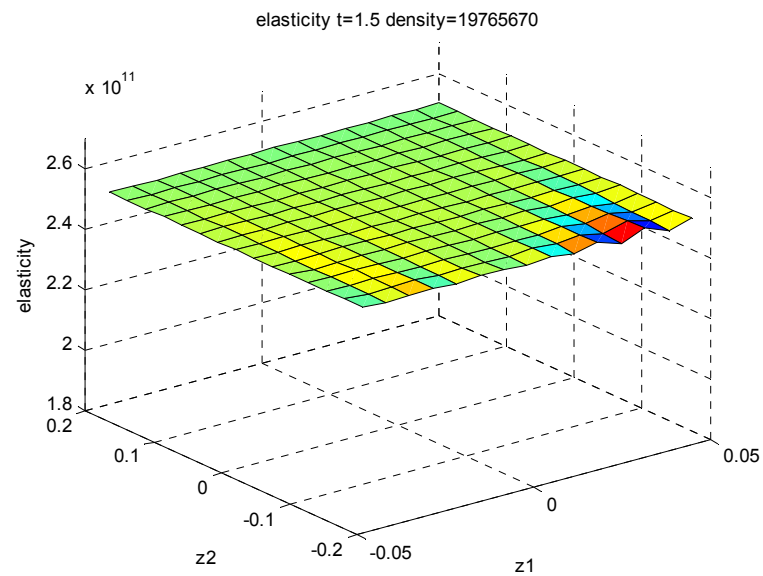
B.III Αποτελέσματα



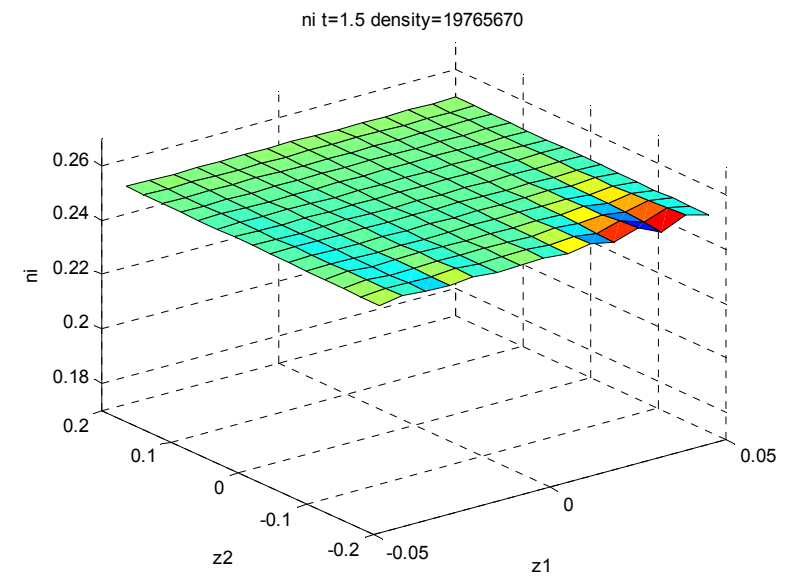
Διάγραμμα 40: Η σταθερά λ την χρονική στιγμή $t=1.5$



Διάγραμμα 42: Η σταθερά μ την χρονική στιγμή $t=1.5$



Διάγραμμα 41: Το μέτρο ελαστικότητας την χρονικής τηγμή $t=1.5$



Διάγραμμα 43: Το μέτρο του Poisson την χρονική στιγμή $t=1.5$

Γ. Συμπεράσματα

Από τα όσα στην παρούσα εργασία παρουσιάσαμε προκύπτει ότι η εξέλιξη του Ομογενούς Μαρκοβιανού Συστήματος (ΟΜΣ) με $n=3$ μπορεί επιτυχώς να ερμηνευθεί ως η παραμόρφωση ενός διδιάστατου ελαστικού μέσου.

Οι σταθερές του Lamé λ και μ χρησιμοποιούνται ως οι σταθερές ενός ισότροπου ελαστικού μέσου. Απόλυτα μεγέθη για τις σταθερές του Lamé δεν μπορούν να βρεθούν επειδή δεν δίνονται για το ΟΜΣ συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες για τις εν λόγω σταθερές. Πλην όμως θεωρώντας κάποιες (αυθαίρετες) συνοριακές συνθήκες στα 2 όρια του αριθμητικού μας πλέγματος (όπως στο σχήμα 1) μπορούμε να μελετήσουμε την εξέλιξη των παραπάνω σταθερών καθώς ο χρόνος αυξάνεται. Η τάση αναφορικά με την εξέλιξη των σταθερών λ και μ του Lamé παραμένει η ίδια ανεξάρτητα από τις συνοριακές συνθήκες (τιμές) που ορίσαμε.

Συγκεκριμένα:

Οι τιμές της σταθεράς μ του Lamé -η οποία παριστά το μέτρο διάτμησης του ελαστικού μέσου (ορισμός Α.Π.4.6)- παρατηρούμε ότι αυξάνονται με αργό ρυθμό ως προς τον χρόνο (οριακά με βάση τις μεγάλες τιμές στα μεγέθη μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένουν σχεδόν σταθερές). Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να θεωρηθεί αναμενόμενο με βάση την φυσική σημασία της σταθεράς μ και την σταθερή (εκθετική) αύξηση της πυκνότητας του μέσου. Η εξέλιξη αυτή, εύλογα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι σε συμφωνία με την αντίστοιχη συμπεριφορά που παρατηρείται στα πραγματικά ελαστικά μέσα.

Οι τιμές της σταθεράς λ του Lamé μειώνεται σταδιακά με αργό ρυθμό ως προς τον χρόνο (και εδώ, οριακά με βάση τις μεγάλες τιμές στα μεγέθη μπορούμε να θεωρήσουμε ότι παραμένουν σχεδόν σταθερές).

Το μέτρο ελαστικότητας το οποίο δίνει τον λόγο της τάσης ως προς την παραμόρφωση (Ορισμός Α.Π.4.3) παραμένει σταθερό ως προς τον χρόνο σε κάθε σημείο του αριθμητικού μας πλέγματος.

Επίσης ο συντελεστής Poisson ο οποίος δίνει τον λόγο των σχετικών επιμηκύνσεων κατά τον άξονα x_1 και κάθετα προς αυτόν (Ορισμός Α.Π.4.4) παραμένει και αυτός σταθερός ως προς τον χρόνο σε κάθε σημείο του αριθμητικού μας πλέγματος.

Από τα παραπάνω και σύμφωνα με τον ορισμό Α.Π.4.5 μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το «μέσο» μας, δηλαδή το ΟΜΣ, συμπεριφέρεται ως ελαστικό ομογενές μέσο.

Βιβλιογραφία

- [1] Isaacson, D.L. and Madsen, R.W. (1976). *Markov chains: Theory and applications*. ed. J. Jansen. Plenum Press, New York.
- [2] Bartholomew, D.G. (1982). *Stochastic models for social sciences*. 3rd edn. Wiley, Chichester.
- [3] Βασιλείου, Π.-Χ. Γ. (2000). *Στοχαστικές μέθοδοι στις επιχειρησιακές έρευνες*. Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- [4] Tsaklidis, G. (1998). The continuous time homogeneous Markov system with fixed size as a Newtonian fluid (?), *Appl. Stoch. Mod.and Data Anal.* Vol. 13; 177-182.
- [5] Tsaklidis, G. (1999). The stress tensor and the energy of a continuous time homogeneous Markov system with fixed size, *J.Appl. Prob.* Vol 36; 21-29.
- [6] Tsaklidis, G. and Soldatos, K. P. (2003): Modeling of continuous time homogeneous Markov system with fixed size as elastic solid: the two dimensional case, *Appl. Math. Modell.* Vol 27, 877-887.
- [7] Iosifescu M. (1980). *Finite Markov processes and their applications*. John Wiley.
- [8] Μπόζης Γ.Δ., Χατζηδημητρίου Ι.Δ (1997). *Μηχανική Συνεχών Μέσων*. Εκδ. Τζιόλα, 2^η έκδοση βελτιωμένη.
- [9] Παπαϊωάννου Α.Θ. (2002). *Μηχανική των ρευστών, τόμος Ι*. Εκδ. Κοράλι 2^η έκδοση.
- [10] Mase G.E (1970). *Continuum Mechanics*. Schaums Outline Series McGraw-Hill Inc.
- [11] Μπόζης Γ.Δ (1996). *Διαφορικές εξισώσεις και εφαρμογές*. Εκδ. Υπηρεσία δημοσιευμάτων, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης.
- [12] Gerald C.F, Wheatley P.O (2004). *Applied numerical Analysis*. Pearson Addison Wesley, 7th edition.
- [13] Thomas J.W (1998). *Numerical partial differential equations: Finite difference methods*. Springer-Verlag.
- [14] Κυβεντίδη Θ. (1996). *Διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους, τόμος ΙΙ*. Εκδ. Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- [15] Hellwig G. (1964). *Partial differential equations, an introduction*. Blaisdell Publishing Company.
- [16] Fritz J. (1982). *Partial Differential equations*. Springer- Verlag 4th edition.
- [17] Renardy M, Rogers R. (1992). *An introduction to partial differential equations*. Springer- Verlag.
- [18] Θεοδώρου Γ. (2003). *Εισαγωγή στη Mathematica*. Εκδ. Τζιόλα.