

Τρισδιάστατες Προσομοιώσεις
Περιστροφικών Ταλαντώσεων
Σχετικιστικών Αστέρων

Τζιαμπαζλής Βασίλειος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΟΥ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ 2006

Τρισδιάστατες Προσομοιώσεις Περιστροφικών Ταλαντώσεων σε Σχετικιστικούς Αστέρες

Τζιαμπαζλής Βασίλειος

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΣΤΑ ΠΛΑΙΣΙΑ ΤΟΥ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΤΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΟΝΤΕΣ

Στεργιούλας Νικόλαος
Επίκουρος Καθηγητής
Α.Π.Θ.

José A. Font
Associate Professor
Universidad de Valencia

Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
Τμήμα Φυσικής
Τομέας Αστροφυσικής Αστρονομίας και Μηχανικής

Οκτώβριος 2006

© Copyright 2006 Τζιαμπαζλής Βασίλειος

Εμείς οι νέοι, που δεν έχουμε όνομα, οι δυσνόητοι, εμείς που γεννηθήκαμε νωρίς καθώς ακόμη θαμποχάραζε το Αύριο, χρειαζόμαστε για το νέο σκοπό που' χουμε τάξει, ένα το ίδιο νέο τρόπο, μια νέα υγεία, πιο δυνατή, πιο συνετή, πιο σφιχτοδεμένη, πιο θαρραλέα, πιο χαρούμενη απ' όσο την ξέραμε μέχρι τώρα. Γιατί η καρδιά μας λαχταρά να ζήσει όλο τον κύκλο των μέχρι τώρα ιδεών και των υπέρτατων πόθων, και να περάσει από όλα τα λιμάνια αυτής της ιδανικής Μεσογείου. Γιατί θέλουμε να μάθουμε μέσ' απ' τις δικές μας εμπειρίες, σαν κουρσάροι και παν εξερευνητές του ιδανικού, όμοια με τους τεχνήτες, τους αγίους, τους νομοθέτες, τους σοφούς, τους παντογνώστες, αυτούς που θεϊκά ζούσαν παράμερα.

Φρίντριχ Νίτσε

Πρόλογος από το *Tάφε έφη Ζαρατούστρα*

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες	v
Abstract	vii
Περίληψη	ix
Πρόλογος	xi
1 Εισαγωγή	1
1.1 Υπολογιστική Σχετικότητα	1
1.2 Διάφοροι Φορμαλισμοί της Υπολογιστικής Σχετικότητας	3
1.2.1 Ο φορμαλισμός ADM	4
1.2.2 Ο φορμαλισμός BSSN	5
2 Περιστρεφόμενοι Σχετικιστικοί Αστέρες	9
2.1 Ο Χωροχρόνος ενός Περιστρεφόμενου Ρευστού	9
2.2 Ο Νόμος Περιστροφής	11
2.3 Καταστατικές Εξισώσεις (EOS)	12
2.3.1 Σχετικιστικές Πολυτροπικές Εξισώσεις	12
2.3.2 Οι εξισώσεις Δομής	13
2.4 Ιδιότητες των μοντέλων ισορροπίας	13
2.4.1 Ιδιότητες λόγω συμπίεσης του ρευστού	13
2.4.2 Mass-shedding limit	14
2.4.3 Άνω όρια στην μάζα και περιστροφή. Θεωρία-Παρατήρηση	15
2.5 Διπλά Συστήματα	17
2.5.1 Ταξινόμηση Διπλών Αστέρων	17
2.5.2 LMXBs	19
2.6 Αστέρες με δίσκο προσαύξησης	22
2.6.1 Πάλσαρς Ταχύτατης Αξονικής Περιστροφής	22

3 Η θεωρία των περιστροφικών ταλαντώσεων (r-mode)	27
3.1 Μη-ακτινικές ταλαντώσεις και Μη-ακτινικές διαταραχές	28
3.1.1 Βασικές Ιδιότητες	29
3.1.2 Κατηγοριοποίηση των τρόπων ταλάντωσης	32
3.1.3 Η επίδραση της περιστροφής	33
3.2 Μη-αξονικά συμμετρικές Αστάθειες	38
3.2.1 Ο Μηχανισμός CFS	38
3.2.2 Η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας	43
3.2.3 Επίδραση του Ιξώδους	45
3.3 Το παράθυρο αστάθειας των r-mode	47
3.3.1 Η εξέλιξη του ρυθμού περιστροφής ενός Αστέρα Νετρονίων	49
4 Τπολογιστικοί Κώδικες	51
4.1 Ο Κώδικας Κατασκευής Μοντέλων Ισορροπίας	54
4.1.1 Το Αριθμητικό σχήμα RNS	55
4.2 Ο κώδικας Cactus	58
4.3 Ο κώδικας Whisky	61
4.3.1 Εξέλιξη των Σχετικιστικών Υδροδυναμικών Εξισώσεων	62
4.3.2 Χαρακτηριστικά Ιδιοδιανύσματα και Ιδιοτιμές	65
4.3.3 Τα Αριθμητικά Σχήματα HRSC	68
4.3.4 Η Μέθοδος Αναδόμησης PPM	72
4.3.5 Marquina Solver	76
4.3.6 Η μέθοδος των Γραμμών (MoL)	78
4.3.7 Άλλαγή Μεταβλητών	79
4.3.8 Η Ατμόσφαιρα	80
4.4 MareNostrum Supercomputer	82
5 Ανάλυση Αποτελεσμάτων	85
5.1 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 1$	85
5.1.1 Κατασκευή Ακολουθίας Μη-Περιστρεφόμενου Μοντέλου	86
5.1.2 Κατασκευή Ακολουθίας Περιστρεφόμενου Μοντέλου στο 'Οριο Kepler	88
5.1.3 Κατασκευή Ακολουθίας Σταθερής Βαρυονικής Μάζας	90
5.1.4 Εξαγωγή Συχνοτήτων των Περιστροφικών Ταλαντώσεων	92
5.1.5 Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων	97
5.2 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 0.75$	106
5.3 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 0.50$	112
5.4 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 0.25$	117
5.5 Διακύμανση των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων	123
5.6 Συμπεράσματα-Συζήτηση	125
Α' ΠΙΝΑΚΕΣ	129

B' ΣΧΗΜΑΤΑ	153
Γ' ΚΩΔΙΚΕΣ	177
Γ'.1 Χρησιμοποιώντας έναν Υπερυπολογιστή	178
Γ'.2 Οι παράμετροι του Cactus	186
Γ'.3 MPI	196
Βιβλιογραφία	201

Ευχαριστίες

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος Φυσικής του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης και επιβλέπων της παρούσας εργασίας κ. Νικόλαο Στεργιούλα, που μου εμπιστεύθηκε το παρών θέμα. Οι πολύωρες συζητήσεις που είχα μαζί του, μου είναι ανεκτίμητες και δε όχι τις ξεχάσω, καθώς συνέβαλε τα βέλτιστα στο να ολοκληρωθώ όχι μόνο ως προπτυχιακός αλλά και ως μεταπτυχιακός φοιτητής του Τμήματος Φυσικής του Α.Π.Θ. Τον ευχαριστώ θερμά που με αμείωτο ενδιαφέρον καθοδηγούσε την πορεία της εργασίας αυτής και με χρήσιμες συμβουλές, υποδείξεις και παρατηρήσεις κατά το στάδιο τόσο της μελέτης όσο και της συγγραφής, βοήθησε στην εκπλήρωσή της.

Θεωρώ καυθήκον μου να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Αστρονομίας και Αστροφυσικής του Πανεπιστημίου της Βαλένθια, και συνεπιβλέπων της παρούσας εργασίας κ. José Antonio Font. Τόσο κατά τη παραμονή μου στη Βαλένθια, αλλά όσο και αργότερα, είχε πάντα το χρόνο και τη διάθεση για ενδιαφέρουσες συζητήσεις και χρήσιμες συμβουλές, πολύτιμες για την εκπλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Θεωρώ επίσης καυθήκον μου, να ευχαριστήσω την ομάδα υποστήριξης του Υπερυπολογιστικού Κέντρου της Βαρκελώνης, για τις συμβουλές τους στην εγκατάσταση του υπολογιστικού κώδικα CACTUS στον Υπερυπολογιστή Mare Nostrum.

Ένα ευχαριστώ είναι το λιγότερο που μπορώ να πω στο Νίκο και τον Πασχάλη για τις ατέλειωτες ώρες γρόνιμης συζήτησης και έντονου προβληματισμού περί Αστροφυσικής αλλά και για την ημική τους συμπαράσταση τα τελευταία τρία χρόνια.

Tζιαμπαζλής Βασίλειος

26 Οκτωβρίου 2006, Θεσσαλονίκη.

Abstract

Using a parallel numerical code on a large supercomputer we performed an extensive study of r-modes in a large number of neutron star models. Different equations of state and mass values were used, while highly accurate fitting formulae for the frequency are presented, for each sequence of models. Furthermore, we studied the effect of rotation on the eigenfunction of the oscillations. The results of this work are expected to be useful in the data analysis of observations with the new-generation gravitational-wave observatories.

Περίληψη

Με τη χρήση ενός κώδικα παράλληλης επεξεργασίας σε μεγάλο υπερ-υπολογιστή έγινε εκτενής μελέτη των περιστροφικών ταλαντώσεων σε μεγάλο αριθμό μοντέλων αστέρων νετρονίων. Χρησιμοποιήθηκαν διάφορες τιμές μάζας και διάφορες καταστατικές εξισώσεις, ενώ για κάθε ακολουθία μοντέλων τα αποτελέσματα παρουσιάζονται υπό μορφή μεγάλης ακρίβειας αναλυτικών εκφράσεων. Ταυτοχρόνως, μελετήθηκε και η επίδραση της περιστροφής στη μορφή της ιδιοσυνάρτησης της ταλάντωσης. Τα αποτελέσματα της εργασίας αναμένεται να φανούν χρήσιμα στην ανάλυση δεδομένων από τους ανιχνευτές βαρυτικής ακτινοβολίας νέας γενιάς.

Πρόλογος

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Ειδίκευσης Υπολογιστικής Φυσικής του Αριστοτέλειου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης. Η εργασία περιλαμβάνει προσομοιώσεις ταλαντώσεων περιστρεφόμενων Αστέρων Νετρονίων με τη χρήση Υπερυπολογιστών (*Supercomputer Simulations*), χρησιμοποιώντας έναν είδη έτοιμο και δοκιμασμένο παράλληλο κώδικα (*parallel code*), με την ονομασία *CACTUS*. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω κώδικα κάνουμε μια εκτεταμένη παραμετρική έρευνα των συχνοτήτων ταλάντωσης ταχέως περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων, επικεντρώνοντας κυρίως το ενδιαφέρον, στις συχνότητες των ασταθών περιστροφικών ταλαντώσεων (*r-modes*).

Οι αξονικές κινήσεις ρευστού σε περιστρεφόμενους αστέρες έχουν τραβήξει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών, από τότε που ανακαλύφθηκε ότι είναι γενικά ασταθείς στην εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Η αστάθειά τους μπορεί να οδηγήσει στη μείωση της ταχύτητας περιστροφής Αστέρων Νετρονίων που μόλις έχουν δημιουργηθεί, ή ακόμα και να θέσει ένα όριο στην ταχύτητα περιστροφής των τελευταίων σε διπλά συστήματα προσαύξησης, η οποία και θα δικαιολογούσε την απουσία αστέρων νετρονίων με περιόδους περιστροφής $< 1.0 \text{ ms}$.

Πειραματικές έρευνες έχουν ήδη ξεκινήσει από ερευνητικές ομάδες * για την ανίχνευση Βαρυτικών Κυμάτων που πηγάζουν από τέτοιες ταλαντώσεις. Η έρευνα επικεντρώνεται κυρίως σε σχετικιστικούς αστέρες διπλών συστημάτων, οι οποίοι τελούν υπό το καθεστώς προσαύξησης μάζας. Κύματα βαρύτητας λόγω της αστάθειας των περιστροφικών ταλαντώσεων μπορούν να εντοπιστούν αν το πλάτος ταλάντωσης των τελευταίων είναι μεγάλο. Τα αριθμητικά αποτελέσματα της εργασίας αυτής χρειάζονται επειγόντως σε αυτή την πειραματική προσπάθεια, μιας και θα περιορίσουν σε μικρή περιοχή το πιθανό εύρος των συχνοτήτων, λόγω της μεγάλης αβεβαιότητας που υπάρχει στις υψηλής πυκνότητας καταστατικές εξισώσεις (*EOS*) των σχετικιστικών αστέρων, απλοποιώντας με αυτόν τον τρόπο την ανάλυση των δεδομένων. Η μεγάλη αυτή αβεβαιότητα οδηγεί και σε ένα απόλυτο ώριο στην περιστροφή των σχετικιστικών αστέρων, εάν επιβάλουμε την αιτιότητα (*causality*) ως μοναδική απαίτηση των καταστατικών εξισώσεων. Έτσι καταλήγουμε ότι ένας βαρυτικά δέσμιος αστέρας δεν μπορεί να να περιστρέψεται ταχύτερα από 0.28 ms.

Άκρως σημαντική είναι η ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων από ασταθείς περιστροφικούς τρόπους ταλάντωσης σχετικιστικών αστέρων με προσαύξηση μάζας, σενάριο που ειπώθηκε πρώτα στην εργασία [8], διότι μέχρι στιγμής η ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων έχει διαπιστωθεί

*GEO600 data analysis group [53].

εμμέσως μόνο, μέσω των παρατηρήσεων του ρυθμού μείωσης της τροχιάς, ενός διπλού συστήματος Αστέρων Νετρονίων. Συγχρόνως, γίνεται μια παγκόσμια προσπάθεια άμεσης ανίχνευσης, για πρώτη φορά, βαρυτικών κυμάτων και οι περιστροφικές ταλαντώσεις σχετικιστικών αστέρων με προσαύξηση μάζας, αποτελούν μια από τις πιο ελπιδοφόρες πηγές. Αρκετοί νέας γενιάς ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων συγκεντρώνουν δεδομένα και η Ευρώπη συμμετέχει ενεργά σε αυτή την προσπάθεια με τους ανιχνευτές *GEO600* και *VIRGO*.

Δυστυχώς, οι παραπάνω προσομοιώσεις απαιτούν τεράστια υπολογιστική ισχύ και αρκετά μεγάλη μνήμη, απαιτούν δηλαδή ισχυρούς υπολογιστές. Αν και αρκετά δεδομένα υπάρχουν σε χαμηλή ανάλυση από τη χρήση κανονικών υπολογιστών, για τις πραγματικές ανάγκες των προγραμμάτων αλλά και των δεδομένων αυτής της εργασίας, απαιτείται η χρήση υπερυπολογιστών. Η υψηλή ανάλυση είναι αναγκαία αν θέλουμε να βγάλουμε σωστά και ακριβή αποτελέσματα. Οι τρισδιάστατες προσομοιώσεις στη Σχετικότητα γίνονται απαιτητικές σε υπολογιστικό χρόνο και σε υπολογιστική μνήμη. Αυξάνοντας την ανάλυση μόνο στο διπλάσιο, οι ανάγκες για αύξηση της μνήμης του κώδικα που χρησιμοποιούμε πολλαπλασιάζονται με ένα παράγοντα του 8 και του υπολογιστικού χρόνου με ένα παράγοντα του 16. Γι'αυτό λοιπόν κανένας τοπικός υπολογιστής δεν ικανοποιεί τις ανάγκες της εργασίας αυτής.

Για τους παραπάνω λόγους η εξασφάλιση κάποιου ισχυρού υπολογιστή είναι υποχρεωτική. Στην Ευρώπη υπάρχουν αρκετοί υπερυπολογιστές μέρος του υπερευθυνικού προγράμματος *HPC - Europa* (*Pan-European Research Infrastructure on High Performance Computing*) και πολλών άλλων ακόμα. Εμείς χρησιμοποιήσαμε τον "*Mare-Nostrum*", οι εγκαταστάσεις του οποίου βρίσκονται στην Βαρκελώνη.

Μέρος της εργασίας έχει αφιερωθεί στην κατασκευή μοντέλων ταχέως περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων, διαφορετικών καταστατικών εξισώσεων. Τα μοντέλα ισορροπίας τα διαταράσσουμε με κατάλληλες δοκιμαστικές ιδιοσυναρτήσεις ώστε να ξεκινήσουν τις ταλαντώσεις. Για την εξαγωγή της συχνότητας των κανονικών τρόπων ταλάντωσης, (*normal-modes*), χρησιμοποιούμε μετασχηματισμούς Fourier σε συγκεκριμένα σημεία μέσα στον αστέρα, ενώ οι ιδιοσυναρτήσεις των συγκεκριμένων τρόπων, εξάγονται χρησιμοποιώντας το πλάτος της ισχύος πυκνότητας φάσματος (Power Spectral Density) των μετασχηματισμών Fourier, συγκεκριμένων μεταβλητών σε κάθε σημείο του αστέρα.

Έχουμε κατασκευάσει ένα πίνακα των συχνοτήτων από τους κυριότερους τρόπους ταλάντωσης, αλλά το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται μόνο στην περίπτωση $l = m = 2$ περιστροφικών τρόπων, γνωστοί και ως *r-modes*. Για διαφορετικές ακολουθίες ισορροπίας, έχουμε βγάλει χρήσιμες εμπειρικές σχέσεις που περιγράφουν την εξάρτηση της συχνότητας περιστροφής με τη συχνότητα των περιστροφικών ταλαντώσεων. Τέλος, χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις διαφορετικών καταστατικών εξισώσεων, φτάνουμε στη διακύμανση των συχνοτήτων τους για διαφορετικούς ρυθμούς περιστροφής. Η διακύμανση αυτή θα χρησιμοποιηθεί στην ανάλυση των δεδομένων βαρυτικών κυμάτων, που δέχεται π.χ. ο ανιχνευτής *GEO600*, από διαφορετικά διπλά συστήματα αστέρων νετρονίων με προσαύξηση μάζας.

Στα παρακάτω κεφάλαια γίνεται εκτενή αναφορά σε όλα τα παραπάνω θέματα που προλογίστηκαν. Στο πρώτο κεφάλαιο κάνουμε μια εισαγωγή στη χρήση και ανάγκη της Υπολογιστικής Σχετικότητας σήμερα. Στο ίδιο κεφάλαιο γίνεται μια απλή αναφορά μερικών φορμαλ-

ισμών διαχωρισμού του χωροχρόνου για τις ανάγκες της υπολογιστικής ανάλυσης, οι οποίοι χρησιμοποιούνται και από το CACTUS. Στο δεύτερο κεφάλαιο, εισάγουμε τα βασικά της θεωρίας των περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων. Αναφερόμαστε στα άνω όρια που παίρνει η μάζα και η ακτίνα ενός τέτοιου αστέρα και δίνουμε κάποιες χρήσιμες εμπειρικές σχέσεις, που έχουν χρησιμοποιηθεί από πολλούς ερευνητές. Τέλος γίνεται εισαγωγή στα χαμηλής μάζας διπλά συστήματα με ταυτόχρονη εκπομπή ακτίνων X, συστήματα ικανά για τη δημιουργία αστέρων νετρονίων ταχύτατης αξονικής περιστροφής, αλλά και σε κάποιες πολύ πρόσφατες ανακαλύψεις, όπως αυτή του πιο γρήγορα περιστρεφόμενου πάλσαρ.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρουμε τη θεωρία των περιστροφικών τρόπων ταλαντωσης, ξεκινώντας από βασικές σχέσεις των μη-ακτινικών ταλαντώσεων αλλά και των μη-ακτινικών διαταραχών. Παραλείπουμε ωστόσο να δώσουμε την απόδειξη των σχέσεων, αφού η μαθηματική ανάλυση αυτών ξεφεύγει από τα πλαίσια της εργασίας. Στο ίδιο κεφάλαιο, περιγράφουμε τον κύριο μηχανισμό που οδηγεί τις περιστροφικές ταλαντώσεις στην εκπομπή βαρυτικών χυμάτων. Γίνεται αναφορά στους κύριους μηχανισμούς διάχυσης της ενέργειας λόγω παρουσίας ιξώδους και τέλος αναφερόμαστε στο παράθυρο αστάθειας των περιστροφικών ταλαντώσεων, εξηγώντας αναλυτικά, με ποιο τρόπο μπορεί ένας αστέρας νετρονίων να φτάσει στο μέγιστο όριο περιστροφής του, ένα σενάριο που θα δικαιολογούσε την απουσία των sub-millisecond πάλσαρς.

Στο τέταρτο κεφάλαιο αναφερόμαστε στους υπολογιστικούς κώδικες που χρησιμοποιήθηκαν στην παρούσα εργασία. Έτσι ξεκινάμε πρώτα την αναφορά μας στον κώδικα για την κατασκευή μοντέλων ισορροπίας, *RNS*, έπειτα γίνεται αναφορά στον κώδικα CACTUS, ο οποίος είναι ο υπεύθυνος για την εξέλιξη των εξισώσεων πεδίου. Τέλος γίνεται αναφορά και στο υδροδυναμικό κομμάτι του κώδικα CACTUS, που είναι το υπεύθυνο κομμάτι για την εξέλιξη των σχετικιστικών υδροδυναμικών εξισώσεων. Ο κώδικας αυτός, *Whisky*, χρησιμοποιεί υψηλής ανάλυσης *HRSC* μεθόδους. Τα αριθμητικά αυτά σχήματα βασίζονται πάνω στις πιο σύγχρονες μεθόδους αναδόμησης και εξέλιξης των υδροδυναμικών εξισώσεων. Σύμφωνα με τις τελευταίες, οι άγνωστες μεταβλητές αναπαρίστανται στο υπολογιστικό πλέγμα από το μέσο όρο ολοκληρωμάτων των μεταβλητών μέσα στο κάθε υπολογιστικό κελί. Η συνάρτηση αναδομείται (όπου γίνεται χρήση της μεθόδου *PPM*) μέσα στο κάθε κελί με τρόπο τέτοιο, ώστε να εξακολουθεί να υπάρχει η όποια διατήρηση των μεταβλητών. Η μέθοδος αυτή δίνει δύο τιμές στο σύνορο κάθε κελιού, δεξιά και αριστερά, με την βοήθεια των οποίων λύνεται το τοπικό πρόβλημα του Riemann (χρησιμοποιώντας τη φόρμουλα του *Marquina*), παρέχοντάς μας τη ροή μέσα στο υπολογιστικό κελί. Κατόπιν, η μέθοδος των γραμμών (*MoL*) χρησιμοποιείται για τη χρονική εξέλιξη. Τέλος γίνεται επίσης μια αναφορά στην ύπαρξη αλλά και χρήση του "Mare-Nostrum", του υπερυπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση του κώδικα και την εξαγωγή των αποτελεσμάτων.

Στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής. Αρχικά εξηγούμε με κάθε λεπτομέρεια την ακριβή διαδικασία προσομοίωσης των μοντέλων, κατόπιν παρουσιάζουμε ξεχωριστά τα αποτελέσματα που πήραμε από κάθε πολυτροπικό μοντέλο διαφορετικής καταστατικής εξισώσης καθώς και την ανάλυσή τους και τέλος παραθέτουμε το βασικό διάγραμμα της παρούσας εργασίας, που αναφέρεται στο παράθυρο ανίχνευσης της

συχνότητας των περιστροφικών τρόπων ταλάντωσης.

Οι πίνακες των δεδομένων καθώς και όλες οι συχνότητες που καταγράψαμε από τα μοντέλα βρίσκονται στο Παράρτημα Α', ενώ βασικά σχήματα των ιδιοσυναρτήσεων παραθέτονται στο Παράρτημα Β'. Τέλος στο Παράρτημα Γ' βρίσκονται μερικά αρχεία παραμέτρων και υποβολής που χρησιμοποιήθηκαν κατά τα διάφορα στάδια της εργασίας. Πρώτα αναφερόμαστε στα αρχεία που χρησιμοποιήσαμε στο υπερυπολογιστικό κέντρο της Βαρκελώνης για να προσομοιώσουμε τα πολυτροπικά μοντέλα, μέσου του υπερυπολογιστή *Mare Nostrum*, κατόπιν δίνουμε ένα απλό παράδειγμα του τρόπου παραλληλισμού ενός προγράμματος με χρήση του MPI για τις ανάγκες και πάλι των προσομοιώσεων των μοντέλων σε υπερυπολογιστή και τέλος παρουσιάζουμε ένα βασικό αρχείο παραμέτρων των μοντέλων για τις ανάγκες του υπολογιστικού κώδικα CACTUS.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Ο κλάδος της Υπολογιστικής Φυσικής αποτελεί έναν από τους καινούργιους κλάδους της Φυσικής και ίσως τον πιο επιδιοφόρο για την περαιτέρω ανάπτυξη και κατανόηση της τελευταίας. Παρότι ξεκίνησε δειλά να κάνει τα πρώτα βήματα στις αρχές της δεκαετίας του '70', απέκτησε πολύ γρήγορα την τεχνογνωσία για να κάνει το μεγάλο άλμα την τελευταία 15ετία. Η ταχύτατη ανάπτυξη των υπολογιστών με την ταυτόχρονη αναζήτηση για οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων έφεραν την Υπολογιστική Φυσική να αποτελεί ένα από τα βασικότερα εργαλεία ενός επιστήμονα για την κατανόηση του φυσικού κόσμου.

Στις επόμενες σελίδες γίνεται μια εκτενή αναφορά στην ανάγκη της Υπολογιστικής Σχετικότητας σήμερα. Ο τελευταίος κλάδος είναι ίσως από τους πιο νέους τομείς της Φυσικής, και αποτελεί το κύριο πεδίο αυτής της εργασίας.

1.1 Υπολογιστική Σχετικότητα

Η Υπολογιστική Σχετικότητα (Numerical Relativity) αποτελεί κλάδο της Υπολογιστικής Φυσικής με μοναδικό στόχο την εύρεση αριθμητικών λύσεων των εξισώσεων του Einstein. Η Υπολογιστική Σχετικότητα τα τελευταία χρόνια έχει εφαρμογές σε πολλούς κλάδους της Αστροφυσικής, Μελανές Οπές - Αστέρες Νετρονίων - Αστροφυσικοί πίδακες αερίων - Δίσκοι Προσαύξησης, αλλά και της Κοσμολογίας, Μοντέλα Πρώιμου Σύμπαντος - Σκοτεινή Ύλη κ.α. πολλά.

Η ανάπτυξη της Υπολογιστικής Σχετικότητας υποκινήθηκε από την κατασκευή μιας νέας γενιάς ανιχνευτών βαρυτικών κυμάτων αλλά και από το γεγονός της αλματώδης ανάπτυξης των υπολογιστών, που πλέον είναι αρκετά δυνατοί ώστε να μπορούν να εκτελέσουν υπολογισμούς μεγάλης υπολογιστικής ακρίβειας σε λογικά πάντα πλαίσια υπολογιστικού χρόνου. Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein είναι αρκετά πολύπλοκες. Γίνεται σαφές λοιπόν, ότι ο αριθμητικός υπολογισμός τους απαιτεί τεράστια ποσά υπολογιστικής ισχύς και μνήμης. Για το λόγω αυτό η Υπολογιστική Σχετικότητα προχώρησε σταδιακά επιλύοντας πρώτα προβλήματα μιας διάστασης κατόπιν δύο διαστάσεων και μόνο πρόσφατα κατόρθωσε να ανταπεξέλθει σε προβλήματα τριών διαστάσεων.

Γιατί λοιπόν η Υπολογιστική Σχετικότητα είναι τόσο δαπανηρή υπολογιστικά; Ο χρόνος και ο χώρος είναι μεγέθη συνεχή, αλλά ένας υπολογιστής δουλεύει με αριθμούς, γι' αυτό λοιπόν θα πρέπει να απεικονίσουμε το χωροχρόνο με μια ομάδα αριθμών. Αυτό γίνεται συνήθως με τη δειγματοληψία του μέσου, από ένα **πλέγμα σημείων**. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να περιγράψουμε τις εξισώσεις πεδίου του Einstein σε ένα χώρο τριών διαστάσεων όπου κάθε διάσταση θα αποτελείται από 100 σημεία, φτιάχνοντας έτσι έναν κύβο 1.000.000 σημείων. Ο χώρος αυτός απαιτεί περίπου 2 GB υπολογιστικής μνήμης για την αποθήκευση των δεδομένων. Επιπλέων, οι εξισώσεις πεδίου είναι ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες είναι περισσότερο πολύπλοκες από ότι οι κυματικές εξισώσεις. Οι παράγωγοι που εμφανίζονται στις εξισώσεις μπορούν να προσεγγιστούν από μεθόδους κεντρικών, ή άλλων, διαφορών μεταξύ των γειτονικών σημείων του πλέγματος. Όσο πιο πυκνό είναι το πλέγμα τόσο καλύτερη είναι και η προσέγγιση που κάνουμε, από την σκοπιά αυτή η ανάλυση των 100 σημείων δεν είναι και η καλύτερη αλλά απαιτείται τουλάχιστον διπλάσια ή ακόμα και τριπλάσια σε μερικές περιπτώσεις. Με λίγα λόγια η Υπολογιστική Σχετικότητα απαιτεί ισχυρούς υπολογιστές.

1.2 Διάφοροι Φορμαλισμοί της Υπολογιστικής Σχετικότητας

Η Γενική Θεωρία Σχετικότητας (ΓΘΣ) του Einstein αποτελεί μια τετρα-διάστατη γεωμετρική θεωρία του χωροχρόνου. Οι εξισώσεις της θεωρίας του, γνωστές ως εξισώσεις πεδίου, περιγράφουν την βαρύτητα βάση της καμπυλότητας του χώρου. Οι εξισώσεις του Einstein προβλέπουν απροσδόκητα φαινόμενα, όπως η βαρυτική κατάρρευση, τα κύματα βαρύτητας, το διαστελόμενο Σύμπαν και άλλα πολλά. Στη γενική περίπτωση, οι εξισώσεις πεδίου*

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

αποτελούν μια ομάδα 10 πεπλεγμένων μη-γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων (ελλειπτικών και υπερβολικών) για τις 10 συνιστώσες της 4-μετρικής $g_{\mu\nu}$. $R_{\mu\nu}$ είναι τανυστής του Ricci, ενώ R η βαθμωτή καμπυλότητα, επίσης $T_{\mu\nu}$ ο τανυστής ενέργειας ορμής και τέλος Λ η κοσμολογική σταθερά, που αργότερα ο Einstein πρόσθεσε στις εξισώσεις για την παραγωγή κοσμολογικών λύσεων στατικού χαρακτήρα. Αν και αρκετές αναλυτικές λύσεις αυτών υπάρχουν εδώ και πολλά χρόνια, ελάχιστες από αυτές περιγράφουν πραγματικές φυσικές καταστάσεις. Αν θέλουμε για παράδειγμα να λύσουμε τις εξισώσεις με ένα σενάριο αστροφυσικού ενδιαφέροντος, όπως τη γέννηση ενός αστέρα νετρονίων σε υπερκαινοφανή (supernova) ή την σύγκρουση δύο μελανών οπών σε ένα διπλό σύστημα, θα πρέπει να εκτελέσουμε μεγάλης κλίμακας αριθμητικές προσομοιώσεις.

Η κύρια προσπάθεια που γίνεται αυτήν τη στιγμή, είναι η ανάλυση της τελευταίας φάσης ενός διπλού ζεύγους (Μελανών Οπών/ Αστέρων Νετρονίων ή Μελανής Οπής και Αστέρα Νετρονίων) με την εξαγωγή βαρυτικών κυμάτων [60]. Μέχρι τώρα έχει επιτευχθεί με αρκετή ακρίβεια η προσομοίωση σύγκρουσης ενός διπλού συστήματος αστέρων νετρονίων [68] καθώς και ενός διπλού συστήματος μελανών οπών [4]. Ωστόσο αντιμετωπίζονται ακόμη προβλήματα κατάρρευσης του κώδικα από συσσώρευση αριθμητικών σφαλμάτων μετά από πολύ μεγάλο αριθμό βημάτων.

Οι δυσκολίες αυτές μπορούν να ξεπεραστούν με την κατάλληλη εκλογή συνθηκών βαθμίδος και ορίων (gauge and boundary conditions). Πρόσφατα υπολογιστικά πειράματα έδειξαν ότι η προσέγγιση των Arnowitt-Deser-Misner (ADM) δεν είναι η καλύτερη για αριθμητικούς υπολογισμούς, και η εύρεση μιας καλύτερης προσέγγισης έχει γίνει ένα από τα κύρια ενδιαφέροντα στο πεδίο της υπολογιστικής σχετικότητας. Παρακάτω γίνεται μια απλή αναφορά σε μερικές μόνο προσεγγιστικές μεθόδους και κυρίως σε αυτές που χρησιμοποιούνται από το CACTUS, το πρόγραμμα που χρησιμοποιήθηκε κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής. Περαιτέρω ανάλυση αυτών ξεφεύγει από τους στόχους της εργασίας και ο ενδιαφερόμενος μπορεί να στραφεί στη βιβλιογραφία για περαιτέρω μελέτη (βλ. [81, 10, 71]).

*Χρησιμοποιούμε γεωμετρικές μονάδες, $c = G = 1$.

1.2.1 Ο φορμαλισμός ADM

Τυάρχουν αρκετές διαφορετικές προσεγγίσεις που μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει στη λύση των εξισώσεων του Einstein. Μεταξύ αυτών η πιο γνωστή είναι ο διαχωρισμός $3+1$ (χώρος + χρόνος) ή ADM όπως διατυπώθηκε από τους Arnowitt - Deser - Misner [10].

Στο φορμαλισμό ADM, ο χωροχρόνος περιγράφεται από μια ομάδα μηδιασταυρωμένων χωροειδών υπερ-επιφανειών Σ . Δύο κινηματικές μεταβλητές συσχετίζει τις επιφάνεις αυτές: η **συνάρτηση χρονικού άλματος** (lapse function) α , η οποία περιγράφει το ρυθμό μεταβολής του χρόνου κατά μήκος ενός χρονοειδούς μοναδιάλου διανύσματος n^μ κάθετου στις χωροειδείς υπερ-επιφάνειες, κι ενός διανύσματος **χωρικής μετατόπισης συντεταγμένων** (shift vector) β^i , το οποίο συσχετίζει τις χωρικές συντεταγμένες μεταξύ δυο υπερ-επιφανειών. Σύμφωνα με το παραπάνω διαχωρισμό, το γραμμικό στοιχείο του χώρου δίνεται υπό τη μορφή

$$ds^2 = -(\alpha^2 - \beta_i \beta^i) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j. \quad (1.2)$$

όπου γ_{ij} η χωρική μετρική.[†]

Αν χωρίσουμε το χωρόχρονο σε $3+1$ διαστάσεις, τότε οι εξισώσεις του Einstein σχηματίζουν ένα δέσμιο σύστημα (constrained system) από 4 δέσμιες (constraint) και 6 δυναμικές (evolution) εξισώσεις. Το κέρδος από την ανάλυση αυτή είναι ότι ενώ οι αρχικές εξισώσεις του Einstein είναι 2ας τάξεως ως προς το χρόνο και χώρο, ο φορμαλισμός $3+1$ μειώνει τις 2ας τάξεως ως προς το χρόνο εξισώσεις σε εξισώσεις 1ης τάξης, οι οποίες είναι πιο κατάλληλες για αριθμητική ανάλυση. Ωστόσο, η λύση τους είναι αρκετά επίπονη καθώς παρουσιάζονται μη-γραμμικά φαινόμενα. Οι εξισώσεις αυτές είναι:

Δέσμια Χαμιλτονιανή Εξισωση (1 εξισωση):

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E, \quad (1.3)$$

Δέσμια Εξισωση Ορμής (3 εξισώσεις):

$$\nabla_j K_i^j - \nabla_i K = 8\pi J_i, \quad (1.4)$$

Δυναμικές Εξισώσεις I (3 εξισωσεις):

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{ij} = \mathcal{L}_\beta K_{ij} - \nabla_i \nabla_j \alpha + \alpha \left[R_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + K_{ij} K + 4\pi (\gamma_{ij} (S - E) - 2S_{ij}) \right], \quad (1.5)$$

Δυναμικές Εξισώσεις II (3 εξισωσεις):

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma_{ij} = \mathcal{L}_\beta \gamma_{ij} - 2\alpha K_{ij}, \quad (1.6)$$

[†]Το ίχνος της μετρικής που ακολουθούμε στην εργασία είναι $(-, +, +, +)$, δηλαδή τα χρονοειδή τετραδιανύσματα έχουν αρνητική ορίζουσα. Οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τιμές από 0 έως 3, ενώ οι λατινικοί από 1 έως 3.

όπου με ∇_i δηλώνουμε την συναλλοίωτη παράγωγο που σχετίζεται με την 3-μετρική g_{ij} και $\mathcal{L}_\beta K_{ij}$ είναι η παράγωγος Lie της εξωτερικής καμπυλότητας K_{-ij} ως προς την διεύθυνση β^i , με την ιδιότητα:

$$\mathcal{L}_\beta K_{ij} = \beta^m \nabla_m K_{ij} + K_{im} \nabla_j \beta^m + K_{mj} \nabla_i \beta^m. \quad (1.7)$$

Στις εξισώσεις αυτές το K δηλώνει το ίχνος της εξωτερικής (extrinsic) καμπυλότητας $K := K^i_{ij}$, το S το ίχνος της χωρικής προβολής του τανυστή ενέργειας ορμής, $S := S^i_{ij}$. Με E και J ορίζουμε την πυκνότητα ενέργειας και την πυκνότητα ορμής αντίστοιχα, όπως τις αντιλαμβάνεται παρατηρητής με μοναδιαίο διάνυσμα τετρα-ταχύτητας n και οι οποίες δίνονται από τις σχέσεις $E := T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$, $J_\alpha := -\gamma_\alpha{}^\mu T_{\mu\nu} n^\nu$, R_{ij} είναι η χωρική προβολή του τανυστή του Ricci και $R := R^i_{ij}$ η βαθμωτή καμπυλότητα.

Από τις παραπάνω εξισώσεις γνωρίζουμε ότι :

Αν οι δέσμες εξισώσεις ικανοποιούνται στην αρχική υπέρ-επιφάνεια Σ , τότε θα ικανοποιούνται σε όλη την εξέλιξη.

Το αριθμητικό σχήμα θα λύσει τις ελλειπτικές δέσμεις εξισώσεις για την εξαγωγή των αρχικών δεδομένων και θα εκτελέσει την ελεύθερη εξέλιξη, λύνοντας μόνο τις δυναμικές εξισώσεις. Τις δέσμεις εξισώσεις τις χρησιμοποιούμε για να ελέγχουμε την ακρίβεια της προσομοίωσης.

Παρατηρήσεις

Ο παραπάνω φορμαλισμός χρησιμοποιήθηκε μέχρι και τα μέσα της δεκαετίας του '90. Ωστόσο, προβλήματα αστάθειας εμφανίστηκαν σε προσομοιώσεις βαρυτικής ακτινοβολίας από συγκρούσεις διπλών συστημάτων, διότι τα μοντέλα αυτά απαιτούν μεγάλης διάρκειας εξέλιξη. Η πηγή του προβλήματος είναι η παραπάνω σημειωμένη με μαύρα γράμματα δήλωση, η οποία ναι μεν ισχύει θεωρητικώς αλλά δεν ισχύει επακριώς σε αριθμητικές εφαρμογές. Έτσι, δημιουργήθηκαν διάφορες παραλλαγές ή νέοι φορμαλισμοί, όπως ο φορμαλισμός BSSN, στον οποίο θα γίνει και αναφορά καθώς αυτός είναι που χρησιμοποιείται στο CACTUS, φορμαλισμοί που οδηγούν τις εξισώσεις Einstein σε 1ης τάξεως υπερβολική μορφή (Hyperbolic Reformulations), Choquet-Bruhat-York (1980) [19], Geroch (1996) [37], Reula (1998) [61] και Friedrich-Rendall (2000) [36] και τέλος φορμαλισμοί που οδηγούν σε ασυμπτωτικό δέσμιο σύστημα, Brodbeck *et al.* [14], Yoneda, Shinkai [80].

1.2.2 Ο φορμαλισμός BSSN

Ο φορμαλισμός αυτός πρώτα εισήχθη από τους Nakamura *et al.* [56, 55, 67], η χρησιμότητά του όμως επαναπροσδιορίστηκε από τους Baumgarthe και Shapiro [12], κατόπιν επιβεβαιώθηκε από πολλές ομάδες ερευνητών ως μια ευσταθής μέθοδος για αρκετά μεγάλο αριθμό χρονικών βημάτων [2, 3]. Ο φορμαλισμός βασίζεται στην εφαρμογή ενός σύμμορφου διαχωρισμού (conformal decomposition) των μεταβλητών ADM και τη συμπλήρωση των δυναμικών εξισώσεων, (1.5)-(1.6), με επιπλέον βοηθητικές εξισώσεις.

Βασικές Μεταβλητές και Εξισώσεις

Σύμφωνα με την εργασία των Baumgarde και Shapiro, γίνεται εισαγωγή νέων μεταβλητών $(\varphi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$ στη θέση των (γ_{ij}, K_{ij}) , όπου

$$\varphi = (1/12) \log (\det \gamma_{ij}), \quad (1.8)$$

$$\tilde{\gamma}_{ij} = e^{-4\varphi} \gamma_{ij}, \quad (1.9)$$

$$K = \gamma^{ij} K_{ij}, \quad (1.10)$$

$$\tilde{A}_{ij} = e^{-4\varphi} \left(K_{ij} - \frac{1}{3} \gamma_{ij} K \right), \quad (1.11)$$

$$\tilde{\Gamma}^i = \tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{\gamma}^{jk}. \quad (1.12)$$

Η καινούργια μεταβλητή $\tilde{\Gamma}^i$ εισήχθη για τον καλύτερο υπολογισμό της βαθμωτής καμπυλότητας του Ricci. Στο φορμαλισμό BSSN, η καμπυλότητα του Ricci δεν υπολογίζεται από την κανονική της μορφή που χρησιμοποιήθηκε και στον ADM

$$R_{ij}^{\text{ADM}} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_i \Gamma_{kj}^k + \Gamma_{ij}^l \Gamma_{lk}^k - \Gamma_{kj}^l \Gamma_{li}^k, \quad (1.13)$$

αλλά από την

$$R_{ij}^{\text{BSSN}} = R_{ij}^\varphi + \tilde{R}_{ij}, \quad (1.14)$$

$$R_{ij}^\varphi = -2\tilde{\nabla}_i \tilde{\nabla}_{j\varphi} - 2\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\nabla}^k \tilde{\nabla}_{k\varphi} + 4\tilde{\nabla}_{i\varphi} \tilde{\nabla}_{j\varphi} - 4\tilde{\gamma}_{ij} \tilde{\nabla}_\varphi^k \tilde{\nabla}_{k\varphi}, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{ij} &= -\frac{1}{2} \tilde{\gamma}^{lk} \partial_l \partial_k \tilde{\gamma}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i} \partial_{j)} \tilde{\Gamma}^k + \tilde{\Gamma}^k \tilde{\Gamma}_{(ij)k} \\ &\quad + 2\tilde{\gamma}^{lm} \tilde{\Gamma}_{l(i}^k \tilde{\Gamma}_{j)km} + \tilde{\gamma}^{lm} \tilde{\Gamma}_{im}^k \tilde{\Gamma}_{klj}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

όπου $\tilde{\nabla}_i$ είναι η συναλλοίωτη παράγωγος που σχετίζεται με την $\tilde{\gamma}_{ij}$. Οι δύο παραπάνω εκφράσεις της καμπυλότητας του Ricci είναι περίπου ίδιες, αλλά η R_{ij}^{BSSN} έχει κυματικούς τελεστές (προφανώς στο επίπεδο όριο του υποβάθρου), ώστε να μπορούμε να παίρνουμε πιο φυσικές συμπεριφορές διάδοσης του κύματος. Επιπρόσθετα, ο φορμαλισμός BSSN απαιτεί και την επιβολή ενός σύμμορφου παράγοντα όπως

$$\tilde{\gamma}(:= \det \tilde{\gamma}_{ij}) = 1, \quad (1.17)$$

κατά την διάρκεια της εξέλιξης. Η επιλογή του παραπάνω παράγοντα μπορεί να χρησιμοποιηθεί είτε ως ορισμός είτε ως μια δέσμια κατάσταση. Οι υπερ-επιφάνεις Σ διαχωρίζονται με τις συναρτήσεις βαθμίδος (α, β^i) . Οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι οι ακόλουθες

$$\partial_t^B \varphi = -(1/6) \alpha K + (1/6) \beta^i (\partial_i \varphi) + \partial_i \beta^i, \quad (1.18)$$

$$\partial_t^B \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{A}_{ij} + \tilde{\gamma}_{ik} (\partial_j \beta^k) + \tilde{\gamma}_{jk} (\partial_i \beta^k) - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} (\partial_k \beta^k) + \beta^k (\partial_k \tilde{\gamma}_{ij}) \quad (1.19)$$

$$\partial_t^B K = -\nabla^i \nabla_i \alpha + \alpha \tilde{A}_{ij} \tilde{A}^{ij} + (1/3) \alpha K^2 + \beta^i (\partial_i K), \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^B \tilde{A}_{ij} &= -e^{-4\varphi} (\nabla_i \nabla_j \alpha)^{\text{T}\Phi} + e^{-4\varphi} \alpha (R_{ij}^{\text{BSSN}})^{\text{T}\Phi} + \alpha K \tilde{A}_{ij} - 2\alpha \tilde{A}_{ik} \tilde{A}_j^k \\ &\quad + (\partial_i \beta^k) \tilde{A}_{kj} + (\partial_j \beta^k) \tilde{A}_{ki} - (2/3) (\partial_k \beta^k) \tilde{A}_{ij} + \beta^k (\partial_k \tilde{A}_{ij}), \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_t^B \tilde{\Gamma}^i &= -2(\partial_j \alpha) \tilde{A}^{ij} + 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{A}^{kj} - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} (\partial_j K) + 6 \tilde{A}^{ij} (\partial_j \varphi) \right) \\ &\quad - \partial_j \left(\beta^k (\partial_k \tilde{\gamma}^{ij}) - \tilde{\gamma}^{jk} (\partial_k \beta^i) - \tilde{\gamma}^{ki} (\partial_k \beta^j) + \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ij} (\partial_k \beta^k) \right). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Για τις δέσμιες εξισώσεις ορίζονται οι μεταβλητές

$$\mathcal{H}^{\text{BSSN}} = R^{\text{BSSN}} + K^2 - K_{ij} K^{ij}, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{M}_i^{\text{BSSN}} = \mathcal{M}_i^{\text{ADM}}, \quad (1.24)$$

$$\mathcal{G}^i = \tilde{\Gamma}^i - \tilde{\gamma}^{jk} \tilde{\Gamma}_{jk}^i, \quad (1.25)$$

$$\mathcal{A} = \tilde{A}_{ij} \tilde{\gamma}^{ij}, \quad (1.26)$$

$$\mathcal{S} = \tilde{\gamma} - 1, \quad (1.27)$$

Ανακεφαλαιώνοντας, οι κύριες δυναμικές μεταβλητές στο BSSN φορμαλισμό είναι 17, $(\varphi, \tilde{\gamma}_{ij}, K, \tilde{A}_{ij}, \tilde{\Gamma}^i)$, υπάρχουν 4 μεταβλητές από τις δύο ποσότητες βαθμίδος (α, β^i) και τέλος 9 δέσμιες μεταβλητές $(\mathcal{H}, \mathcal{M}_i, \mathcal{G}^i, \mathcal{A}, \mathcal{S})$.

Παρατηρήσεις

Γιατί ο BSSN φορμαλισμός είναι καλύτερος από τον ADM; Πολλές ερευνητικές ομάδες ασχολήθηκαν με το παραπάνω ερώτημα εκτελώντας διάφορα αριθμητικά τεστ. Μια ερευνητική ομάδα (Alcubierre *et al.*) [2] διαπίστωσε πως αισθητή διαφορά βρίσκεται στη διαδικασία της αντικατάστασης όρων από τις δέσμιες εξισώσεις οριμής. Μια άλλη ερευνητική ομάδα (βλ. M. Miller [54]) εφαρμόζοντας την ανάλυση ευστάθειας του von Neumann, για κυματικής διάδοσης στον επίπεδο χωροχρόνου ως υπόβαθρο, διαπίστωσε ότι ο φορμαλισμός BSSN διαθέτει ευρύτερη ποικιλία παραμέτρων, οι οποίες παράγουν ευσταθή εξέλιξη. Σημαντικό ενδιαφέρον δόθηκε και στην κατανόηση των πλεονεκτημάτων του φορμαλισμού BSSN από τη σκοπιά της μορφής των υπερβολικών εξισώσεων στο γραμμικό τους όριο [2, 64], από τη μελέτη των οποίων προέκυψαν και πάλι πλεονεκτήματα έναντι του φορμαλισμού ADM.

Κεφάλαιο 2

Περιστρεφόμενοι Σχετικιστικοί Αστέρες

2.1 Ο Χωροχρόνος ενός Περιστρεφόμενου Ρευστού

Στη ΓΘΣ η γεωμετρία του χωροχρόνου γύρω από ένα περιστρεφόμενο αστέρα σε ισορροπία, μπορεί να προσδιοριστεί από μια στάσιμη και αξονικά συμμετρική μετρική $g_{\alpha,\beta}$ της μορφής

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\psi}(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\mu}(dr^2 + r^2d\theta^2), \quad (2.1)$$

όπου ν, ψ, ω και μ είναι τέσσερις συναρτήσεις της μετρικής που εξαρτώνται μόνο από τις μεταβλητές r και θ . Από τις συντεταγμένες αυτές τα θ, ϕ , είναι γωνίες πάνω στη σφαίρα, το r μετράει την επιφάνεια αυτής. Οι υποθέσεις που κάνουμε για να προκύψει η παραπάνω μετρική είναι

1. Ο χωροχρόνος έχει δύο διανύσματα Killing, τα t^α και ϕ^α , από τα οποία το πρώτο αντιστοιχεί σε χρονική συμμετρία ενώ το δεύτερο αντιστοιχεί σε αξονική συμμετρία.
2. Ο χωροχρόνος είναι ασυμπτωτικά επίπεδος, έτσι ώστε $t_\alpha t^\alpha = -1$, $\phi_\alpha \phi^\alpha = +\infty$ και $t_\alpha \phi^\alpha = 0$ σε άπειρη απόσταση.

Το ω στην (2.1) συνδέεται με το διάνυσμα χωρικής μετατόπισης μέσω της σχέσης $\beta^\phi = -\omega$ και η μετρική ικανοποιεί τη συνθήκη μέγιστου διαχωρισμού (maximal slicing), ενώ η συνάρτηση χρονικού άλματος α , συνδέεται με τη συνάρτηση ν της μετρικής μέσω της σχέσης $\alpha = e^\nu$.

Οι τρεις μετρικές συναρτήσεις ν, ψ και ω μπορούν να γραφούν ως συνδυασμοί των t^α και ϕ^α , μέσω των σχέσεων

$$t_\alpha t^\alpha = g_{tt}, \quad (2.2)$$

$$\phi_\alpha \phi^\alpha = g_{\phi\phi}, \quad (2.3)$$

$$t_\alpha \phi^\alpha = g_{t\phi}, \quad (2.4)$$

ενώ η μ καθορίζει τον σύμμορφο παράγοντα $e^{2\mu}$ που χαρακτηρίζει τη γεωμετρία της 2-επιφάνειας.

Της πάρονταν δυο κύρια φαινόμενα που διακρίνονται έναν περιστρεφόμενο σχετικιστικό αστέρα από έναν μη περιστρεφόμενο. Το πρώτο έχει να κάνει με την πλάτυνση του αστέρα. Η ακτίνα στον ισημερινό είναι μεγαλύτερης αυτής στο πόλο, λόγω παρουσίας φυγόκεντρων δυνάμεων. Το φαινόμενο είναι καθαρά Νευτωνιού και παρατηρείται και σε πολλά άλλα αστροφυσικά αντικείμενα. Το δεύτερο είναι καθαρά σχετικιστικό, και έχει να κάνει με τον συρμό των τοπικών αδρανειακών συστημάτων (*dragging of inertial frames*) λόγω της περιστροφής του αστέρα, ο οποίος περιστρέφει και τον ίδιο το χώρο.

Η μελέτη ενός τέτοιου φαινόμενου γίνεται με την εισαγωγή ενός τοπικού παρατηρητή με μηδενική γωνιακή στροφορμή (Zero-Angular-Momentum-Observer ZAMO). Οι παρατηρητές αυτοί, που ονομάζονται επίσης και *Eulerian* κινούνται στο χωροχρόνο σε διεύθυνση κάθετη στις χωροειδείς υπερ-επιφάνειες. Τέτοια συστήματα είναι χρήσιμα για την μέτρηση φυσικών ποσοτήτων όπως της ταχύτητας ρευστού, ενέργειας νετρονίων κ.α. Οι εξισώσεις του Einstein επιλύονται σε αυτό το σύστημα προβάλλοντάς τες με το μοναδιαίο κανονικό διάνυσμα n .

Η μετρική συνάρτηση ω γίνεται πλέον η γωνιακή ταχύτητα του *Eulerian* παρατηρητή σε σχέση με αυτή ενός αδρανειακού παρατηρητή στο άπειρο. Στη μετρική τη συναντούμε στον όρο $g_{t\phi}$. Επίσης, το $e^{-\nu}$ είναι ο παράγοντας διαστολής μεταξύ του ίδιοχρόνου t ενός *Eulerian* παρατηρητή και του συντεταγμένου χρόνου t ενός συντεταγμένου παρατηρητή (coordinate observer). Ο τελευταίος είναι ο παρατηρητής που κινείται στο χωρόχρονο σε διεύθυνση τέτοια του οποίου οι χωρικές συντεταγμένες x^i στην υπερ-επιφάνεια t είναι ίδιες με τις χωρικές συντεταγμένες που θα βρεθεί στην υπερ-επιφάνεια $t + dt$.

Η μετρική συνάρτηση ψ πάλι έχει την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία, ότι το e^ψ είναι η ίδια ακτίνα περιφέρειας (*proper circumferential radius*), ενός κύκλου γύρω από τον άξονα συμμετρίας. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά των μετρικών συναρτήσεων ν και ω είναι

$$\begin{aligned} \nu &\sim -\frac{M}{r} + \frac{Q}{r^3} P_2(\cos \theta), \\ \omega &\sim \frac{2J}{r^3}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

όπου M, J και Q είναι η βαρυτική μάζα, η στροφορμή και η τετραπολική ροπή της πηγής του βαρυτικού πεδίου αντιστοίχως. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του ω δείχνει να μειώνεται γρήγορα με αυξανόμενη απόσταση από την πηγή κι έτσι το φαινόμενο του συρμού των αδρανειακών συστημάτων γίνεται αισθητό μόνο κοντά στον αστέρα. Για την απόδειξη των παραπάνω σχέσεων αλλά και για πολλά περισσότερα βλ. [38, 41].

Οι εξισώσεις του Einstein δίνονται υπό τη μορφή τανυστικών σχέσεων και η πιο απλή μορφή τους είναι

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

όπου το αριστερό μέλος είναι ο τανυστής του Einstein και δίνεται από την (1.1) χωρίς τον παράγοντα Λ , ενώ το δεξί μέλος περιέχει τον τανυστή ενέργειας - ορμής, στην ουσία την πηγή του βαρυτικού πεδίου. Αν υποθέσουμε ότι η πηγή δεν παρουσιάζει μη-ισεντροπική ροή, ή παρουσία μαγνητικών πεδίων, τάσεις λόγου ιξώδους και μεταφορά θερμότητας, τότε κατά την κατασκευή του μοντέλου ισορροπίας μπορούμε να θεωρήσουμε το ρευστό ως ιδανικό, περιγραφόμενο από τον τανυστή ενέργειας - ορμής

$$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)u^\alpha u^\beta + Pg^{\alpha\beta}, \quad (2.7)$$

όπου ε είναι η πυκνότητα μάζας - ενέργειας, P η ισοτροπική πίεση και τέλος u^α η 4-ταχύτητα του ρευστού. Η τελευταία με όρους των διανυσμάτων Killing μπορεί να γραφεί ως

$$u^\alpha = \frac{e^{-\mu}}{\sqrt{1-v^2}}(t^\alpha + \Omega\phi^\alpha), \quad (2.8)$$

όπου με v συμβολίζουμε την 3-ταχύτητα του ρευστού ως προς έναν *Eulerian* παρατηρητή

$$v = (\Omega - \omega)e^{\psi-\nu}, \quad (2.9)$$

και $\Omega \equiv u^\phi/u^t = d\phi/dt$ είναι η γωνιακή ταχύτητα του ρευστού στο συντεταγμένο σύστημα (coordinate frame), και η οποία είναι ισοδύναμη με τη γωνιακή ταχύτητα του ρευστού όπως τη βλέπει ένας ακίνητος παρατηρητής στο άπειρο.

2.2 Ο Νόμος Περιστροφής

Μπορούμε να ορίσουμε έναν συγκεκριμένο νόμο περιστροφής, καθορίζοντας τη συνάρτηση $j(\Omega)$. Παρόλο που μια τέτοια επιλογή είναι τελείως τυχαία, κριτήρια ευστάθειας περιορίζουν την επιλογή αυτή. Ωστόσο, η πλήρης ανάλυση της ευστάθειας σε ταχέως περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες δεν έχει μελετηθεί ακόμη. Μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει συναρτησιακές σχέσεις, βασισμένοι στην ήδη υπάρχουσα θεωρία των αστέρων στο Νευτώνειο όριο. Η πιο απλή επιλογή της συνάρτησης $j(\Omega)$ είναι:

$$j(\Omega) = \Omega_c - \Omega, \quad (2.10)$$

όπου Ω_c η γωνιακή ταχύτητα στο κέντρο του συστήματος συντεταγμένων. Το γινόμενο $u^t u_\phi$ αποτελεί και αυτό συνάρτηση του Ω :

$$u^t u_\phi = \frac{v^2}{(1-v^2)(\Omega - \omega)} = j(\Omega). \quad (2.11)$$

Σχόλιο

Όλα τα μοντέλα ισορροπίας που κατασκευάσαμε στην παρούσα εργασία ικανοποιούν την ομοιόμορφη περιστροφή, υπακούν δηλαδή στην σχέση $d\Omega = 0$.

2.3 Καταστατικές Εξισώσεις (EOS)

2.3.1 Σχετικιστικές Πολυτροπικές Εξισώσεις

Μια αναλυτική καταστατική εξίσωση που χρησιμοποιείται κατά χόρον στη προσομοίωση σχετικιστικών αστέρων είναι η ισεντροπική, σχετικιστική πολυτροπική καταστατική εξίσωση

$$P = K\rho^\Gamma, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon = \rho + \frac{P}{\Gamma - 1} \quad (2.13)$$

όπου K και Γ είναι η πολυτροπική σταθερά και ο πολυτροπικός εκθέτης, αντιστοίχως. Αντί του Γ πολές φορές χρησιμοποιούμε και τον πολυτροπικό δείκτη N , ο οποίος ορίζεται από την σχέση

$$N = \frac{1}{\Gamma - 1}. \quad (2.14)$$

Αξιοσημείωτο είναι ότι για τις παραπάνω εξισώσεις η ποσότητα

$$c^{\frac{\Gamma-2}{\Gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{K^{\frac{1}{\Gamma-1}}}{G}}, \quad (2.15)$$

έχει μονάδες μήκους. Σε βαρυτικές μονάδες ($c = G = 1$), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα $K^{N/2}$ ως βασική χλίμακα μήκους, προσδιορίζοντας έτσι αδιάστατες ποσότητες. Έτσι, τα μοντέλα ισορροπίας χαρακτηρίζονται πλέον από τον πολυτροπικό δείκτη N και την αδιάστατη κεντρική πυκνότητα ενέργειας. Οι ιδιότητές τους μπορούν να αναχθούν σε άλλα μοντέλα χρησιμοποιώντας διαφορετικές τιμές του K . Για $N < 1.0$ παίρνουμε μοντέλα με καταστατικές που περιγράφουν ρευστό μεγάλης συμπιεστότητας (stiff EOS), ενώ για $N > 1.0$ παίρνουμε μοντέλα με καταστατικές που περιγράφουν ρευστό μικρής συμπιεστότητας (soft EOS). Όταν ο πολυτροπικός δείκτης κυμαίνεται μεταξύ $N = 0.5 - 1.0$, τότε παίρνουμε μοντέλα με μακροσκοπικές ιδιότητες, συγχρίσιμες με εκείνες που προέρχονται από παρατηρούμενους Αστέρες Νετρονίων. Τα μοντέλα που προσομοιώνουμε στην εργασία αυτή, βασίζονται σε πολυτροπικούς δείκτες $N < 1.0$, εξετάζουμε δηλαδή μόνο την πρώτη κατηγορία από τα παραπάνω μοντέλα.

Η πραγματική καταστατική εξίσωση, που περιγράφει την εσωτερική δομή των συμπαγών αστέρων, είναι ακόμη άγνωστη. Το γεγονός αυτό πηγάζει από την αδυναμία να επαληθεύσουμε

πειραματικά τις διάφορες θεωρίες περιγραφής των αλληλεπιδράσεων μεταξύ των βαρυονίων αλλά και των πολλών θεωριών που υπάρχουν για πυκνότητες που ξεπερνούν τουλάχιστον στο διπλάσιο την πυρηνική πυκνότητα ($5 \times 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$). Οι διάφορες ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις ικανοποιούν δύο ιδιότητες, οι οποίες προέρχονται από παρατηρήσεις, (1) για μη περιστρεφόμενους αστέρες η βαρυτική μάζα πρέπει να παιρνει μια ελάχιστη τιμή περίπου $1.44 M_{\odot}$ και (2) οι καταστατικές θα πρέπει να επιτρέπουν περιόδους περιστροφής της τάξης του 1.396 ms^* . Πρόσφατα υπήρξαν οι πρώτες παρατηρήσεις της βαρυτικής μετάθεσης φασματικών γραμμών από αστέρα νετρονίων [23]. Στην περίπτωση του, EXO 0748-676, βρέθηκε μια βαρυτική μετάθεση $z = 0.35$ στην επιφάνεια του αστέρα νετρονίων, οδηγώντας σε μια αναλογία βαρυτικής μαζας προς ακτίνα ίση με $M/R = 0.23$ (σε βαρυτικές μονάδες), η οποία είναι συμβατή με τις περισσότερες καταστατικές εξισώσεις και ασύμβατη με ορισμένες απλές μορφές της θεωρίας περί παράξενης ύλης (strange quark matter).

2.3.2 Οι εξισώσεις Δομής

Η δομή ενός σχετικιστικού αστέρα καθορίζεται από πέντε εξισώσεις, από τις οποίες τέσσερις προέρχονται από τις εξισώσεις πεδίου και μια από τη συνθήκη υδροστατικής ισορροπίας. Επιπλέον, για να καθορίσουμε πλήρως την δομή χρειαζόμαστε και τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες.

Η εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας προκύπτει από την προβολή της σχέσης διατήρησης του τανυστή ενέργειας - ορμής στην υπερ-επιφάνεια Σ μέσω της $(\delta^c_b + u^c u_b) \nabla_a T^{ab} = 0$, που γράφεται ως

$$P_{,i} + (\varepsilon + P) \left[\nu_{,i} + \frac{1}{1-v^2} \left(-v v_{,i} + v^2 \frac{\Omega_{,i}}{\Omega - \omega} \right) \right] = 0, \quad (2.16)$$

όπου το κόμμα δηλώνει μερική παραγώγιση.

2.4 Ιδιότητες των μοντέλων ισορροπίας

2.4.1 Ιδιότητες λόγω συμπίεσης του ρευστού

Μοντέλα αστέρων νετρονίων με μεγάλη συμπίεστότητα, (soft EOS), έχουν μικρές τιμές μέγιστης μάζας, μικρές ακτίνες και μεγάλες περιόδους περιστροφής. Απ' την άλλη μοντέλα με μικρή συμπίεστότητα (stiff EOS), έχουν μεγάλες τιμές μέγιστης μάζας, μεγάλες ακτίνες και μικρές περιόδους περιστροφής. Οι χαρακτηριστικές τιμές μεταξύ των διαφόρων καταστατικών, διαφέρουν κατά ένα παράγοντα 2 για τιμές μέγιστης μάζας, ακτίνας και περιόδους περιστροφής, ενώ για τιμές κεντρικής πυκνότητας υπάρχει μια διαφορά κατά ένα παράγοντα της τάξεως του 5 και για τιμές ροπής αδράνειας κατά ένα παράγοντα του 8.

Το φαινόμενο της περιστροφής όμως οδηγεί και σε κάποιες άλλες ιδιότητες. Η περιστροφή αυξάνει την ισημερινή ακτίνα (equatorial radius), καθώς και την μάζα του αστέρα, ενός

*Η παραπάνω τιμή αποτελεί την περίοδο περιστροφής του πιο γρήγορου γνωστού περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων. (βλ. §2.6.1)

μοντέλου με καθορισμένη κεντρική πυκνότητα ενέργειας. Για παράδειγμα, η τιμή της μάζας ενός περιστρεφόμενου μοντέλου μέγιστης μάζας είναι 15–20% μεγαλύτερη από την αντίστοιχη τιμή μάζας του μη-περιστρεφόμενου μοντέλου, για τυπικές ρεαλιστικές καταστατικές, ενώ η διαφορά στην τιμή της ακτίνας του αστέρα μπορεί να φτάσει μέχρι και το 30-40%. Ο ρόλος της περιστροφής στην αύξηση της μάζας και της ακτίνας σε ένα αστέρα, γίνεται μεγαλύτερος σε καταστατικές που εμπεριέχουν ιδιότητες παράξενης ύλης (*strange quark EOSs*).

Παραπάνω αναφερθήκαμε στην αύξηση της ισημερινής ακτίνας ενός αστέρα, εννοώντας βέβαια πως καθώς ο αστέρας περιστρέφεται ολοένα και ταχύτερα ξεφεύγει από το σφαιρικό του σχήμα, έτσι ώστε η πολική ακτίνα του να γίνεται μικρότερη από την ισημερινή, να μοιάζει δηλαδή με μπαλόνι, πιεσμένο στους πόλους του. Η παραμόρφωση αυτή στο σχήμα του αστέρα προκαλεί μια παραμόρφωση και στο βαρυτικό πεδίο. Μακριά από τον αστέρα, η επικρατούσα τετραπολική συνιστώσα της παραμόρφωσης μετράτε από τον τανυστή τετραπολικής ροπής Q_{ab} . Για αξονικά συμμετρικούς αστέρες με ομοιόμορφη περιστροφή, μπορούμε να ορίσουμε μια βαθμωτή τετραπολική ροπή Q , η οποία και εξάγεται από την αυμπτωτική ανάλυση της μετρικής συνάρτησης ν για μεγάλες αποστάσεις r , όπως ακριβώς στην εξίσωση (2.5). Για αστέρες με σταθερή βαρυτική μάζα M , η τετραπολική ροπή δίνεται από την,

$$Q = -a \frac{J^2}{M}, \quad (2.17)$$

όπου a αδιάστατη σταθερά εξαρτώμενη από την καταστατική. Η παραπάνω ποσότητα, για έναν αστέρα βαρυτικής μάζας $1.4M_\odot$, ποικίλει μεταξύ $a \sim 2$ για soft EOSs, και $a \sim 8$ για stiff EOSs.

2.4.2 Mass-shedding limit

Η περιοχή ύπαρξης μοντέλων ισορροπίας περιορίζεται μεταξύ μη-περιστρεφόμενων μοντέλων ($J = 0$) και από μοντέλα που περιστρέφονται στο μέγιστο δυνατό τους όριο, ***mass-shedding (Kepler) limit***, το μέγιστο δηλαδή όριο γωνιακής ταχύτητας, πάνω από το οποίο ο αστέρας αποβάλλει ύλη από τον ισημερινό του. Η αποβολή μάζας συμβαίνει όταν η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα φτάσει τη γωνιακή ταχύτητα σωματιδίου που χινείται σε κυκλική τροχιά Kepler στον ισημερινό, δηλ. όταν

$$\Omega = \Omega_K, \quad (2.18)$$

όπου

$$\Omega_K = \frac{\omega'}{2\psi'} + e^{\nu-\psi} \left[c^2 \frac{\nu'}{\psi'} + \left(\frac{\omega'}{2\psi'} e^{\psi-\nu} \right)^2 \right]^{1/2} + \omega. \quad (2.19)$$

όπου ο τόνος δηλώνει μερική παραγώγιση ως προς το r .

Στο Νευτώνειο όριο η μέγιστη γωνιακή ταχύτητα ομοιόμορφων περιστρεφόμενων πολυτροπικών αστέρων προσεγγίζεται από μια σχέση, σύμφωνα με το μοντέλο του Roche, της

μορφής $\Omega_K \equiv (2/3)^{3/2}(GM/R^3)^{1/2}$. Για σχετικιστικούς αστέρες, η προσεγγιστική σχέση δίνεται από την

$$\Omega_{\max} = 0.67 \sqrt{\frac{M_{\max}}{R_{\max}^3}}, \quad (2.20)$$

η οποία δίνει την μέγιστη γωνιακή ταχύτητα, συναρτήσει της μέγιστης μάζας και ακτίνας του μη περιστρεφόμενου μοντέλου, με ακρίβεια 5-7%.

Σχόλιο

Τα μοντέλα που κατασκευάσαμε κατά την διάρκεια αυτής της εργασίας, δεν έχουν προκύψει από κάποια εμπειρική σχέση αλλά από την χρήση κώδικα, και συγκεκριμένα του *rns*, ο οποίος βασίζεται στην (2.19).

2.4.3 Άνω όρια στην μάζα και περιστροφή. Θεωρία-Παρατήρηση

Η μέγιστη μάζα και η ελάχιστη περίοδος περιστροφής σχετικιστικών αστέρων όπως έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας ρεαλιστικές αδρονικές καταστατικές από την συλλογή των Arnett και Bowers [9] είναι περίπου $3.3M_{\odot}$ και 0.4ms, ενώ αστέρες νετρονίων με βαρυτική μάζα $1.4M_{\odot}$, που περιστρέφονται στο όριο αποβολής μάζας, παρουσιάζουν περιόδους μεταξύ 0.5 – 1.7ms [21]. Η μέγιστη πάντως μάζα αστέρα νετρονίων που έχει παρατηρηθεί μέχρι τώρα είναι $1.44M_{\odot}$ [78], ωστόσο υπάρχουν και ενδείξεις για μεγαλύτερη τιμή μάζας που φτάνει τα $2.0M_{\odot}$.

Αν παραλείψουμε την παρουσία μαγνητικού πεδίου, τότε η διατήρηση της στροφορμής μπορεί να δημιουργήσει ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων τη στιγμή της δημιουργίας τους. Προσομοιώσεις που έγιναν πάνω στη βαρυτική κατάρρευση του πυρήνα ενός άστρου, οδήγησαν στη δημιουργία αστέρα νετρονίων περιόδου μόλις του 1ms. Παρόμοια αποτελέσματα έχουν εξαχθεί ύστερα από προσομοιώσεις προσαύξησης μάζας σε λευκούς νάνους και στην δημιουργία αστέρων νετρονίων.

Η ελάχιστη παρατηρούμενη περίοδος σε πάλσαρς είναι τα 1.396ms (Hessels *et al.* 2005)[42], τιμή η οποία είναι αρκετά κοντά στην ευαισθησία των οργάνων μέτρησης. Νέες εξερευνήσεις για ανεύρεση της τάξης του 10^{-1} ms, έχουν ήδη ξεκινήσει χωρίς όμως να έχει βρεθεί τέτοιος πάλσαρ.[†] Το γεγονός αυτό δεν μας εκπλήσσει καθώς υπάρχουν αρκετοί λόγοι απουσίας των τελευταίων. Κατά ένα μοντέλο, η ελάχιστη περίοδος περιστροφής μπορεί να εδραιωθεί από την εμφάνιση της αστάθειας των περιστροφικών ταλαντώσεων (*r*-modes), σε συστήματα με προσαύξηση μάζας (LMXBs) [7]. Άλλα μοντέλα βασίζονται στο καθιερωμένο μαγνητοσφαιρικό μοντέλο, δηλαδή αύξησης της ταχύτητας περιστροφής από την προσαύξηση μάζας, (accretion-induced spin-up), μέχρι το μαγνητικό πεδίο του αστέρα να βάλει ένα τέλος σε αυτήν, ή του μοντέλου που στηρίζει τον κορεσμό στην ταχύτητα περιστροφής στην εμφάνιση βαρυτικής ακτινοβολίας, λόγω παραμόρφωσης του σχήματος του αστέρα.

[†]Το όνομα αυτών έχει καθιερωθεί στην βιβλιογραφία ως sub-millisecond pulsars.

Έχουν προταθεί και σενάρια που υποστηρίζουν ένα μείγμα όλων των παραπάνω: Οι sub-millisecond πάλσαρς όπως μπορούσαν να βρεθούν μόνο σε κλειστά διπλά συστήματα αστέρων, τροχιακής περιόδου $P_{\text{orb}} \sim 1\text{hr}$. Εναλλακτικά, η απουσία τους όπως μπορούσε να οφείλεται στην παρουσία κάποιου αστρικού ανέμου, ο οποίος εμποδίζει την αύξηση της ταχύτητας περιστροφής.

Η αρχή της αιτιότητας, θέτει από μόνη της ένα ακόμη όριο στην ελάχιστη περίοδο περιστροφής του αστέρα, συναρτήσει της μέγιστης παρατηρούμενης μη-περιστρεφόμενης μάζας του μοντέλου, η οποία δίνεται από μια εμπειρική σχέση της μορφής,

$$P_{\min} = 0.28 + 0.2 \left(\frac{M_{\max}^{\text{nonrot}}}{M_{\odot}} - 1.44 \right) \text{ ms.} \quad (2.21)$$

Σχόλια

Η επιλογή των μοντέλων ισορροπίας που χρησιμοποιήθηκαν και αναπαρήχθησαν από τον rns κώδικα, βασίστηκε στα παραπάνω αποτελέσματα.

Παρατηρήσεις

Για κάθε μια καταστατική εξίσωση, υπάρχει μια οικογένεια καταστάσεων ισορροπίας που διακρίνει τη σταθερότητα ενός συστήματος από την ολοκληρωτική του κατάρρευση. Η οικογένεια αυτή αποτελεί μια 2-διάστατη επιφάνεια. Τα σύνορά της διακρίνονται από άνω και κάτω όρια στην περιστροφή και μάζα του συστήματος, έτσι η περιοχή οριοθετείται από τέσσερις καμπύλες, $\Omega = 0$, $\Omega = \Omega_K$, $M = M_{\min}$ και $M = M_{\max}$.

Η M_{\max} είναι ανάλογη του ορίου Chandrasekhar για τη μάζα ενός Λευκού Νάνου. Ο αστέρας αυτός, όταν έχει τη μέγιστη δυνατή μάζα αποτελεί μια ιδιάζουσα κατάσταση, η οποία βρίσκεται στην απαρχή της αστάθειας ακτινικών ταλαντώσεων. Τα παραπάνω βέβαια ισχύουν και στους αστέρες νετρονίων που βρίσκονται στο όριο της μέγιστης μάζας τους. Γενικά, το κρίσιμο σημείο απαρχής της αστάθειας συμπίπτει με το μέγιστο της μάζας M , σταθερής στροφορμής J , για μια μονοπαραμετρική καταστατική εξίσωση. Οι αστέρες νετρονίων πάνω από αυτό το όριο είναι ασταθείς σε βαρυτική κατάρρευση, οδηγώντας στη δημιουργία μιας μελανής οπής, ενώ για τιμές μικρότερες της $\leq M_{\min}$, ο αστέρας είναι ασταθής σε έκρηξή του. Γενικά:

- αν $M \simeq M_{\max}$ το σύστημα βρίσκεται στο κρίσιμο σημείο απαρχής της αστάθειας ακτινικών ταλαντώσεων.
- αν $M \leq M_{\min}$ το σύστημα είναι ασταθές και οδηγεί στην έκρηξή του.
- αν $M > M_{\max}$ το σύστημα είναι ασταθές σε βαρυτική κατάρρευση.

Για περισσότερες πληροφορίες, σχετικά με τις ανώτερες τιμές στην μάζα και περιστροφή ενός αστέρα, όπως αυτές βγαίνουν από τη θεωρία αλλά και από παρατηρήσεις, μπορεί να βρει ο ενδιαφερόμενος στην ανασκόπηση του J.L. Friedman [32].

2.5 Διπλά Συστήματα

Ως διπλό σύστημα (*binary system*) χαρακτηρίζεται το αστρικό σύστημα δύο αστέρων που περιφέρονται γύρω από το κέντρο μάζας τους. Για κάθε αστέρα ο 'σύντροφός' του λέγεται συνοδός αστέρας. Πρόσφατες έρευνες οδηγούν στο συμπέρασμα ότι τα διπλά συστήματα αποτελούν την πλειοψηφεία στο Σύμπαν, δεν είναι ελάχιστες φορές που συναντούμε και περισσότερους από δύο αστέρες σε κάθε σύστημα. Τα συστήματα αυτά διαδραματίζουν σπουδαίο αστροφυσικό ρόλο χαρίζοντάς μας εξαιρετικής φύσεως σχετικιστικά φαινόμενα, ο λόγος αυτός καθώς και άλλοι πολλοί, οδήγησαν σε έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Τα διπλά συστήματα δεν πρέπει να τα συγχέουμε με τους οπτικά διπλούς αστέρες, οι οποίοι ναι μεν εμφανίζονται με το μάτι από την Γη ως διπλοί, αλλά δεν συνδέονται βαρυτικά. Παρακάτω γίνεται μια αναφορά στα διπλά συστήματα και στις ομάδες που τα κατηγοριοποιούμε. Συγκεκριμένη μνεία γίνεται στα διπλά συστήματα χαμηλής μάζας με ταυτόχρονη εκπομπή ακτίνων X, γνωστά στη βιβλιογραφία και ως Low Mass X-ray Binaries (**LMXBs**), καθώς και στους αστέρες με προσάρξηση μάζας (*accreting stars*) και στους αστέρες ταχύτατης αξονικής περιστροφής (*millisecond pulsars*). Παρακάτω γίνεται η ταξινόμηση των διπλών συστημάτων όπως υπάρχει στο [1].

2.5.1 Ταξινόμηση Διπλών Αστέρων

Ο όρος *binary star* επινοήθηκε από τον Sir William Herschel το 1802 στην προσπάθεια της ερμηνείας του για ένα πρωτόγνωρο μέχρι τότε σύστημα: "ένα πραγματικά διπλό αστέρι - ή ένωση δύο αστέρων τα οποία σχηματίστηκαν ταυτόχρονα σε ένα σύστημα που κυβερνάται από τους νόμους της έλξης". Οι πρώτες επιστημονικές παρατηρήσεις οφείλονται στον Herschel ο οποίος ταξινόμησε τουλάχιστον 700 διπλά συστήματα και βρήκε σε πολλά από αυτά αλλαγή στον προσανατολισμό τους. Τα διπλά συστήματα ταξινομούνται ως εξής:

Βάση της Μέθοδου Παρατήρησης

Οπτικά ζεύγη: Σύστημα στο οποίο η γωνιακή απόσταση[‡] των αστέρων είναι αρκετή ώστε να παρατηρηθεί ως διπλός αστέρας από ένα τηλεσκόπιο.

Φασματοσκοπικά ζεύγη: Σύστημα στο οποίο η γωνιακή απόσταση των αστέρων είναι πάρα πολύ μικρή και η τροχιακή τους ταχύτητα πολύ μεγάλη. Η ακτινική τους ταχύτητα μετράτε με την βοήθεια του φαινομένου Doppler, δίνοντας έτσι εκτίμηση της μάζας των συνοδών αστέρων.

Εκλειπτικά ζεύγη: Σύστημα στο οποίο το επίπεδο της τροχιάς των αστέρων συμπίπτει με την διεύθυνση παρατήρησης. Έτσι παρατηρούμε μια έκλειψη κάθε φορά που ένας συνοδός διέρχεται από την διεύθυνση παρατήρησής μας. Μελετώντας τη λαμπρότητα του ζεύγους, βγάζουμε τη λεγόμενη καμπύλη φωτός και από αυτή με ειδική ανάλυση τις τροχιές και μάζες τους.

[‡]Η ελάχιστη αυτή απόσταση ονομάζεται διακριτική ικανότητα και εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας και τη διάμετρο του τηλεσκοπίου.

Αστρομετρικά ζεύγη: Σύστημα στο οποίο μόνο το ένα μέλος παρατηρείται οπτικά. Η κίνηση σε αυτά τα συστήματα φαίνεται να παρουσιάζει μια ιδιαίτερη μορφή, χυρίως για τον οπτικά αστέρα ο οποίος επηρεάζεται αρκετά από το βαρυτικό πεδίο του μη οπτικού αστέρα. Η θέση του αστέρα μετράτε επανειλημμένος και συγχρίνεται με τη θέση του στις διάφορες φωτογραφίες ως προς τους απλανής αστέρες, τους πολύ απομακρυσμένους δηλαδή αστέρες του πεδίου του, οι οποίοι θεωρούνται ακίνητοι. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται και για την εύρεση εξωγήινων πλανητών αλλά δε μπορεί να εφαρμοστεί σε απόσταση μεγαλύτερη των 100 παρσέκ.

Βάση της Διαμόρφωσης

Αποχωρισμένα ζεύγη: Σύστημα στο οποίο κάθε μέλος του βρίσκεται μέσα στο λοβό του Roche χωρίς να τον γεμίζει. Τα άστρα δεν έχουν καμία αλληλεπίδραση μεταξύ τους, πλην βεβαίως της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης, και εξελίσσονται ξεχωριστά. Τα περισσότερα διπλά συστήματα ανήκουν σε αυτή την κατηγορία. Τα συστήματα αυτά δε θα μας απασχολήσουν εδώ.

Ημιαποχωρισμένα ζεύγη: Σύστημα στο οποίο το ένα μέλος γεμίζει το λοβό του Roche, ενώ το άλλο όχι. Τα δύο μέλη ονομάζονται μέλος επαφής και αποχωρησμένο μέλος, αντιστοίχως. Το κύριο δυναμικό χαρακτηριστικό που διακρίνει τα ημιαποχωρισμένα από τα αποχωρισμένα ζεύγη είναι η μεταφορά μάζας από το μέλος που έχει γεμίσει το λοβό του Roche (βλ. σελ. 19) προς το συνοδό του. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα Low Mass X-Ray Binaries (LMXBs) καθώς και τα HMXBs (High Mass X-ray Binaries).

Ζεύγη σε επαφή: Σύστημα στο οποίο η ατμόσφαιρα κάθε μέλους είναι ίση ή μεγαλύτερη από το λοβό του Roche. Στην περίπτωση αυτή, που φαίνεται να είναι και η πιο συνηθισμένη, ένα κοινό κέλυφος περιβάλλει τα δύο μέλη και εμποδίζει την ανεξάρτητη παρατήρηση κάθε μέλους. Καθώς δυνάμεις τριβής του κελύφους αυτού αναπτύσσονται σταδιακά, επιβραδύνουν την τροχιακή κίνηση με αποτέλεσμα την σύγκρουση-ένωση των δύο αστέρων.

Από τις παραπάνω κατηγορίες θα ασχοληθούμε μόνο με αυτή των ημιαποχωρισμένων διπλών συστημάτων (semidetached binary), και από αυτή θα αναπτύξουμε μόνο τα LMXBs.

2.5.2 LMXBs

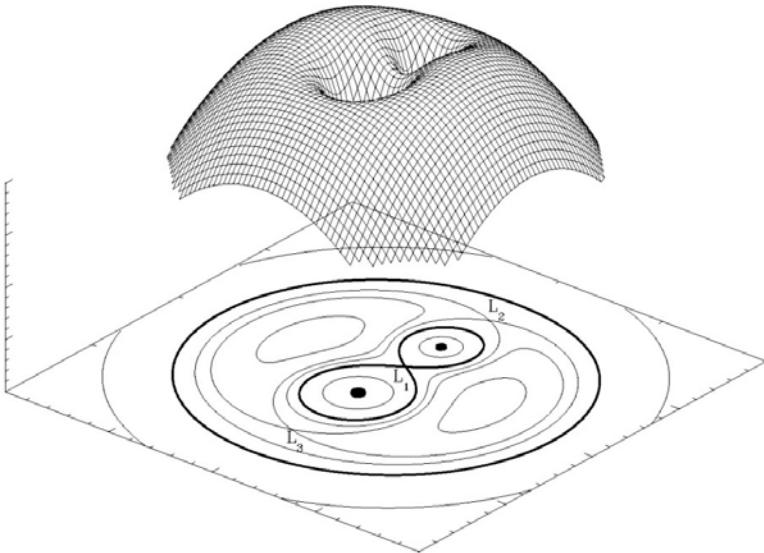
Τα χαμηλής μάζας διπλά συστήματα με ταυτόχρονη εκπομπή ακτινοβολίας X, αποτελούν διπλά συστήματα, το ένα μέλος των οποίων είναι ένα συμπαγές αντικείμενο, μελανή οπή ή αστέρας νετρονίων. Πάνω από 100 πηγές LMXBs έχουν ανακαλυφθεί μόνο στο δικό μας γαλαξία, και από αυτές οι μισές περίπου ανακαλύφθηκαν σε σφαιρωτά σμήνη αστέρων. Επίσης νέα στοιχεία από το διαστημικό Παρατηρητήριο Ακτίνων X *Chandra* δείχνουν ανίχνευση και εξωγαλαξιακών τέτοιων πηγών. Ένα τυπικό LMXB εκπέμπει όλη του την ακτινοβολία σε μήκη κύματος που ανήκουν στην περιοχή των ακτίνων X και μόνο ένα ελάχιστο μέρος αφήνεται να περάσει από το οπτικό παράθυρο, κατατάσσοντάς τα έτσι στα πιο λαμπρά αντικείμενα στις ακτίνες X και τελείως αμυδρά στα μήκη κύματος της οπτικής ακτινοβολίας. Το λαμπρότερο μέρος ενός τέτοιου συστήματος είναι σίγουρα ο δίσκος προσαύξησης που σχηματίζεται γύρω από το συμπαγές αντικείμενο. Οι τροχιακές περίοδοι των LMXBs κυμαίνονται από μερικά λεπτά μέχρι εκατοντάδες μέρες.

Ο σχηματισμός

Το σκηνικό για την εξέλιξη ενός διπλού συστήματος αρχίζει όταν δύο αστέρες έρχονται αρκετά κοντά ώστε να είναι βαρυτικά δέσμιοι. Ο ένας αστέρας πρέπει να έχει σημαντικά μεγαλύτερη μάζα από τον άλλο, ώστε να συντήξει το υδρογόνο του με ταχύτερους ρυθμούς. Μετά από μερικά εκατομμύρια χρόνια, ο μεγαλύτερος αστέρας αρχίζει να εξαντλεί το απόθεμα του υδρογόνου του και μπαίνει στην φάση της αστρικής εξέλιξης, γνωστή ως φάση του ερυθρού γίγαντα, διαστελλόμενος με τέτοιο ρυθμό που το αέριο του εξωτερικού του κελύφους, αφού γεμίσει το λοβό Roche, πέφτει επάνω στο μικρότερο, με συνέπεια να αυξάνει το μέγεθος και τη μάζα του τελευταίου. Αφού καταναλώσει όλο του τα καύσιμα, το ετοιμούθαντο άστρο εκρήγνυται ξαφνικά ως σουπερνόβα, αφήνοντας πίσω του μια μελανή οπή ή έναν αστέρα νετρονίων.

Ο λοβός του Roche

Το συμπαγές αντικείμενο εξακολουθεί να βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τον συνοδό του αστέρα, χωρίς όμως να φαίνεται οπτικά. Λόγω της μεγάλης πυκνότητας του συμπαγούς αντικειμένου το βαρυτικό πεδίο της περιοχής γίνεται αρκετά ισχυρό, ενώ το δυναμικό της περιοχής έχει αλλάξει δραματικά. Το σχήμα των λοβών Roche, σε ένα σύστημα συντεταγμένων περιστρεφόμενο με τη γωνιακή ταχύτητα της σχετικής τροχιάς των δύο μελών, φαίνεται στο Σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1: 3-διάστατη αναπαράσταση του δυναμικού Roche σε ένα διπλό σύστημα αστέρων με λόγο μαζών 1:2. Οι κύκλοι σε μορφή σταγόνας στο διάγραμμα ισοδυναμικών επιφανειών, που φαίνονται στο κάτω μέρος της εικόνας, λέγονται λοβοί Roche του κάθε αστέρα. L_1 , L_2 και L_3 είναι τα γνωστά σημεία Lagrange στα οποία οι βαρυτικές δυνάμεις των αστέρων εξουδετερώνονται. Εάν ο αστέρας γεμίσει το λοβό του, τότε η μάζα από την επιφάνεια του μπορεί να προσαυξηθεί στον άλλο αστέρα. Σχήμα από το διαδίκτυο http://en.wikipedia.org/wiki/Roche_lobe.

Ο λοβός του Roche είναι η περιοχή του χώρου μέσα στην οποία η ύλη που κινείται τροχιακά γύρω από τον αστέρα είναι δέσμια αυτού. Στην περίπτωση που ο αστέρας γεμίσει το λοβό του, τότε η ύλη που βρίσκεται έξω του λοβού θα προσαυξηθεί στον άλλο αστέρα. Είναι περίπου ένα σχήμα που μοιάζει σα δάκρυ δέσμιο ενός κρίσιμου βαρυτικού ισοδυναμικού, με την κορυφή του να δείχνει τον άλλο αστέρα, και στην κορυφή αυτή ανήκει το σημείο L_1 του Lagrange.

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να ξεχωρίσουμε τις έννοιες του λοβού Roche από το *Roche limit* καθώς και από τη *Roche sphere*. Η πρώτη αναφέρεται στην κρίσιμη απόσταση κάτω από την οποία ένα αντικείμενο, που κρατείται δέσμιο μόνο από τη βαρύτητα, αρχίζει να διαλύεται λόγω φυγόκεντρων δυνάμεων. Η δεύτερη αναφέρεται στη σφαίρα με τη βοήθεια της οποίας προσεγγίζουμε τη βαρυτική νοητική σφαίρα επιρροής ενός αστρικού σώματος από τις διαταραχές ενός άλλου βαρύτερου αντικειμένου που βρίσκεται σε τροχιά γύρω από το πρώτο. Οι τρεις παραπάνω έννοιες πήραν το όνομά τους από τον διάσημο Γάλλο Αστρονόμο **Edouard Roche**.

Κοντά σε κάθε αστέρα οι ισοδυναμικές επιφάνειες[§] του ζεύγους, προσεγγίζονται από ομόκεντρες σφαίρες, ενώ μακριά από το σύστημα προσεγγίζονται από ένα ελλειψοειδές σχήμα

[§]Οι επιφάνεις πάνω στις οποίες το συνολικό δυναμικό, το οφειλόμενο στις βαρυτικές και τις φυγόκεντρες δυνάμεις είναι σταθερό.

επιμηκυμένο κατά τον άξονα που ενώνει τα κέντρα των δυο αστέρων. Έτσι το σχήμα των ισοδυναμικών επιφανειών σε ένα διπλό σύστημα αστέρων μοιάζει με αυτό του αριθμού οκτώ, ενώ το κρίσιμο σημείο ένωσης των δυο λοβών που στο κέντρο του καθενός βρίσκεται ο αστέρας, αποτελεί το πρώτο σημείο Lagrange. Αυτό το κρίσιμο ισοδυναμικό σημείο καθορίζει και τους λοβούς Roche.

Όταν ύλη από τον αστέρα γεμίσει το λοβό του και βγει έξω από αυτόν, μπαίνει σε μια περιοχή όπου η βαρυτική έλξη του συνοδού αστέρα είναι μεγαλύτερη από τον δικό του, η ύλη τότε που βρίσκεται έξω από το λοβό, ρέει μέσο του σημείου L_1 και πέφτει στον άλλο λοβό, μια διαδικασία που οδηγεί σε σταδιακή αποσύνθεση του αστέρα, μιας και η απώλεια μάζας συρρικνώνει το λοβό Roche. Βέβαια αν η ύλη του αστέρα επεκτείνεται έξω από το λοβό με γοργούς ρυθμούς π.χ. μέσω αστρικού ανέμου, μπορεί να έχουμε απώλεια μάζας και από άλλα σημεία Lagrange, όπως το L_2 ή L_3 . Αφού η εξέλιξη ενός αστέρα καθορίζεται από την μάζα του, η διαδικασία αυτή επηρεάζει την εξέλιξη και των δυο συστημάτων και δημιουργεί διάφορα στάδια εξέλιξης που δεν μπορούμε να πάρουμε από απομονωμένους αστέρες.

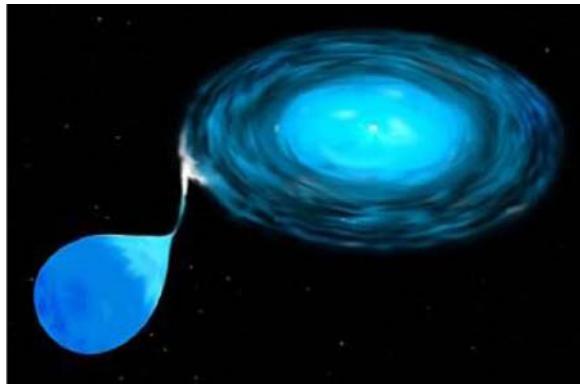
Ο Δίσκος Προσαύξησης

Παραπάνω περιγράψαμε μια διαδικασία που είναι γνωστή ως Roche lobe overflow (RLOF) και συμβαίνει όταν ένας αστέρας γεμίσει το λοβό του. Η ίδια διαδικασία όμως μπορεί να λάβει χώρα και με ένα άλλο σενάριο. Από τη στιγμή που έχουμε δημιουργία ενός συμπαγούς αντικειμένου, μελανή οπή/αστέρα νετρονίων, το σύστημα μπορεί να χάνει τροχιακή ενέργεια - μέσω βαρυτικής ακτινοβολίας - μειώνοντας έτσι την τροχιά τους. Η τροχιά καταλήγει να γίνεται αρκετά μικρή, έτσι ώστε η επιφάνεια του αστέρα να δέχεται μεγαλύτερη βαρυτική έλξη από το συμπαγές αντικείμενο. Και σε αυτό το σενάριο ο αστέρας θα χάσει μέρος της μάζας του η οποία θα προσαυξηθεί στο συμπαγές αντικείμενο.

Η κεντρομόλος δύναμη, δεν αφήνει την ύλη να πέσει απευθείας πάνω στο συμπαγές αντικείμενο, αλλά της επιβάλλει να δημιουργήσει ένα δίσκο προσαύξησης (*accretion disk*) γύρω του, ίδιας περιστροφής με αυτή της βαρυτικής πηγής που υπάρχει στο κέντρο. Διάφοροι μηχανισμοί που σχετίζονται με τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων του δίσκου, όπως για παράδειγμα το ιξώδες (*viscosity*), προκαλούν αύξηση της θερμότητας του δίσκου ενώ η διατήρηση της στροφορμής επιβάλλει στο εσωτερικό τμήμα του δίσκου να επιταχύνεται ως προς το εξωτερικό και υπό την επιδραση του ισχυρού βαρυτικού πεδίου του συνοδού να κινείται σε σπειροειδή τροχιά γύρω από αυτόν.

Έτσι, η ύλη κινείται σπειροειδώς και σε κυκλικές περίπου τροχιές μέχρι να φτάσει τις εσώτατες ευσταθείς κυκλικές τροχιές, *Innermost Stable Circular Orbit (ISCO)*[¶], μετά τις οποίες πέφτει προς το κέντρο του συμπαγούς αντικειμένου, λόγω σχετικιστικών φαινομένων. Μια εικονική αναπαράσταση του δίσκου προσαύξησης μπορούμε να δούμε στο Σχήμα 2.2. Στη δεξιά εικόνα φαίνεται το σενάριο της πτώσης ύλης γύρω από μια Μελανή Οπή.

[¶]Επιτρεπόμενες τροχιές σημειωκών σωματιδίων οι οποίες ακολουθούν τις χρονοειδής γαιωδαισιακές της γεωμετρίας του αντίστοιχου κάθε φορά χωροχρόνου.



Σχήμα 2.2: Καλλιτεχνική σύλληψη ενός διπλού συστήματος αποτελούμενο από ένα συμπαγές αντικείμενο με δίσκο προσαύξησης γύρω του και ενός αστέρα της κύριας ακολουθίας

2.6 Αστέρες με δίσκο προσαύξησης

Τα τελευταία χρόνια, οι παρατηρήσεις πηγών ακτίνων X στα LMXBs αποκάλυψαν μια πλούσια φαινομενολογία που δεν έχει ακόμη εξηγηθεί πλήρως, αλλά αναμένεται να δώσει σημαντικές πληροφορίες και να βοηθήσει στην κατανόηση των συμπαγών αντικειμένων. Τρία διαφορετικά φαινόμενα ως τώρα έχουν παρατηρηθεί στα παραπάνω συστήματα. Ιστορικά το πρώτο που ανακαλύφθηκε ήταν οι διπλές ημιπεριοδικές ταλαντώσεις της τάξης των kHz (QPOs). Η υψηλή συχνότητα της μεταβλητότητας αυτής καθώς και η ημιπεριοδική συμπεριφορά τους, αποτελούν στοιχεία ότι παράγονται από υψηλές ταχύτητες ρευστού κοντά στην επιφάνεια του συμπαγούς αντικειμένου. Το δεύτερο φαινόμενο που ανακαλύφθηκε ήταν οι εκρηκτικές ταλαντώσεις (burst oscillations), πιθανότατα εξαιτίας της περιστροφής ενός στρώματος ύλης κοντά στην ατμόσφαιρα ενός αστέρα νετρονίων. Τρίτο και τελευταίο είναι οι πάλσαρς ταχύτατης περιστροφής (millisecond pulsars). Οι αστέρες αυτοί αποτελούν το βασικό θέμα της εργασίας αυτής καθώς η γρήγορη περιστροφή τους αποτελεί σενάριο εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας.

2.6.1 Πάλσαρς Ταχύτατης Αξονικής Περιστροφής

Ένας *millisecond pulsar* (MPS), λέγεται και πολλές φορές *ανακυκλωμένος* (*recycled*), είναι ένας πάλσαρ με περίοδο περιστροφής $P \lesssim 5$ ms. Αν και τα διάφορα θεωρητικά μοντέλα σχηματισμού των MPS διαφέρουν στις λεπτομέρειες, φαίνεται να συμφωνούν στη γενική ιδέα, ότι ο τωρινός χαμηλός ρυθμός επιβράδυνσης ($P = dP/dt \sim 10^{-19} - 10^{-21}$) της περιστροφής αυτών των μεγάλης ηλικίας αστέρων νετρονίων, οφείλεται στο ανώμαλα ασθενές μαγνητικό πεδίο τους. Ο συνδυασμός μεγάλης ηλικίας και ταχύτατης αξονικής περιστροφής μπορεί να εξηγηθεί με ένα μοντέλο εξέλιξης ενός στενού αστρικού ζεύγους, με ένα αρχικώς βραδέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων με ασθενές μαγνητικό πεδίο ($B \propto (P\dot{P})^{1/2} \sim 10^8 - 10^9 G$) και ένα συνοδό (λευκό νάνο) μικρής μάζας ($\sim 0.1 - 1 M_{\odot}$). Υλη του συνοδού προσαυξάνεται με ρυθμό $\sim 10^{-9} M_{\odot}/yr$, σχεδόν σταθερό, στον αστέρα νετρονίων με σχηματισμό ενός δίσκου

προσαύξησης σε σύζευξη με τη μαγνητόσφαιρά του. 'Οσο ασθενέστερο είναι το μαγνητικό πεδίο, τόσο μικρότερη είναι η εσωτερική ακτίνα του δίσκου προσαύξησης. Εξάλλου, σύμφωνα με το τρίτο νόμο του Kepler, τα εσωτερικά τμήματα του δίσκου προσαύξησης περιφέρονται ταχύτερα από τα εξωτερικά. Αν, λοιπόν, η γωνιακή ταχύτητα των εσώτατων τμημάτων του δίσκου είναι μεγαλύτερη από αυτή της μαγνητόσφαιρας, τα εσώτατα αυτά τμήματα επιταχύνουν την περιστροφή του αστέρα νετρονίων. Συνεπώς, όσο ασθενέστερο είναι το μαγνητικό πεδίο, τόσο περισσότερη μάζα και στροφορμή ύστερα προσαύξανεται από το συνοδό στον αστέρα νετρονίων και ύστερα επιταχύνει την περιστροφή του. Μετά το τέλος της φάσης προσαύξησης, προχύπτει ένας πάλσαρ ταχύτατης περιστροφής, είτε απλός είτε διπλός, ανάλογα με το αν διατηρήθηκε ή όχι το αρχικό ζεύγος.

Σύμφωνα με το παραπάνω μοντέλο, οι MPS πρέπει να σχηματίζονται μόνο ως αποτέλεσμα της εξέλιξης των μικρής μάζας διπλών αστέρων, πηγών έντονης ακτινοβολίας X, που βρίσκονται σε γαλαξίες και σε σφαιρωτά σμήνη. Η πρόβλεψη αυτή στηρίζεται στο γεγονός ότι ένας συνοδός μεγάλης μάζας ύστερα προσαύξανε, με μεταφορά ύλης, ένα MPS σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα, σε αντίθεση με την παρατήρηση ότι οι MPS ανήκουν σε αντικείμενα του πληθυσμού II, αστρικά δηλαδή αντικείμενα πολύ μεγάλης ηλικίας. Οι πολύ πρόσφατες παρατηρήσεις των Hessels *et al.* (2006) [42] επαληθεύουν την πρόβλεψη αυτή. Οι MPS είναι ορατοί στη μικροκυματική ακτινοβολία αλλά κυρίως στην ακτινοβολία X του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

Αρκετοί πάλσαρς έχουν ανακαλυφθεί σε σφαιρωτά σμήνη λόγω της μεγάλης πυκνότητας που παρουσιάζουν σε αστρική ύλη. Στα σφαιρωτά σμήνη ευνοείται η δημιουργία διπλών συστημάτων, κι επειδή τα σφαιρωτά σμήνη ανήκουν στο πληθυσμό II, η ύπαρξη LMXBs είναι σίγουρη. Μέχρι στιγμής πάνω από 150 MPS έχουν ανακαλυφθεί, ενώ τουλάχιστον 130 από αυτούς ανήκουν σε σφαιρωτά σμήνη. Το σφαιρωτό σμήνος *Terzan 5* περιέχει 33 από αυτά ενώ το *47 Tucanae 22* (βλ. Σχήμα ;).

Το αντικείμενο *Terzan 5ad*

Πρόσφατες έρευνες πάνω στα MPS έφεραν στο φως της δημοσιότητας το πιο γρήγορο περιστρεφόμενο πάλσαρ μέχρι τώρα. Η ερευνητική ομάδα των Hessels *et al.* [42], ανακάλυψε έναν πάλσαρ ταχύτατης αξονικής περιστροφής με περίοδο περιστροφής $P = 0.00139595482(6)$ s, που αντιστοιχεί σε συχνότητα 716Hz, καθιστώντας τον ως τον πιο γρήγορο MPS που γνωρίζουμε μέχρι τώρα. Το προηγούμενο ρεκόρ ανήκε στον πάλσαρ *B1937+21* (642 Hz) το πρώτο MPS που ανακαλύφθηκε το 1982.

Ο *Terzan 5ad* γνωστός και ως PSR J1748-2446ad, ανήκει στο σφαιρωτό σμήνος *Terzan 5*, σε απόσταση 28,000 έτη φωτός από το Ήλιακό σύστημα, στον αστερισμό του Τοξότη. Ανά μονάδα μάζας τα σφαιρωτά σμήνη έχουν τους περισσότερους MPS απ' ότι ο γαλαξιακός δίσκος. Το γεγονός αυτό οφείλεται στην μεγάλη αστρική πυκνότητα που παρουσιάζει ο πυρήνας τους ($10^4 - 10^6 M_\odot/\text{pc}^{-3}$), διευκολύνοντας έτσι τη δημιουργία LMXBs όπου ένας αστέρας νετρονίων μπορεί να επιταχύνει την περιστροφή του αρκετές εκατοντάδες φορές το δευτερόλεπτο. Στοχεύοντας με το ραδιοτηλεσκόπιο των 100 μέτρων Green Bank Telescope η ομάδα τους ανακάλυψε μέχρι τώρα 33 MPS. Το σφαιρωτό σμήνος *Terzan 5* έχει τον μεγαλύτερο πληθυσμό σε MPS από κάθε άλλο σφαιρωτό σμήνος και σχεδόν το ένα τέταρτο

Pulsar	Spin Frequency (Hz)	P_b days	$M_{2,\min}$ (M_\odot)	Eclipse Fraction	Location
J1748-2446ad	716.358	1.0944	0.14	0.4	Terzan 5
B1937+21	641.931		isolated		Milky Way
B1957+20	622.123	0.3819	0.021	0.1	Milky Way
J1748-2426O	596.435	0.2595	0.035	0.05	Terzan 5
J1748-2446P	578.496	0.3626	0.37	0.4	Terzan 5

Πίνακας 2.1: Οι πέντε πιο γρήγοροι γνωστοί millisecond pulsars. Τα στοιχεία αυτά έχουν αναχθεί από την βάση δεδομένων για τους πάλσαρ ATNF. Διατίθεται στη διεύθυνση <http://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>.

όλων των MPS που υπάρχουν σε άλλα σφαιρωτά σμήνη. Οι τέσσερις από τους πέντε πιο γρήγορους MPS, που γνωρίζουμε μέχρι τώρα ανήκουν στο σμήνος αυτό. (βλ. Πίνακα 2.1). Στον Terzan 5ad η ταχύτητα στον ισημερινό του αστέρα φτάνει τα 75,000 km/s, φτάνοντας έτσι στο 24% της ταχύτητας του φωτός. Ο πάλσαρ έχει μια σχεδόν κυκλική τροχιά 26 ωρών περίπου, με συνοδό αστέρα μάζας $\gtrsim 0.14M_\odot$.

Μια πρώτη εκτίμηση για την ακτίνα του πάλσαρ έχει ήδη γίνει, ~ 16 km, αλλά αυτή προέρχεται χρησιμοποιώντας μια εμπειρική σχέση των Latimer και Prakash [49], η οποία δίνει την μέγιστη συχνότητα περιστροφής συναρτήσει της μάζας και ακτίνας του αστέρα στη μη-περιστρεφόμενη κατάσταση ισορροπίας του,

$$f_{\max} = 1045 \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{10 \text{km}}{R} \right)^{3/2} \text{Hz}. \quad (2.22)$$

Χρησιμοποιώντας μια μάζα της τάξης των $2M_\odot$ προκύπτει ένα άνω όριο στην ακτίνα του πάλσαρ ~ 16 km, ενώ χρησιμοποιώντας την τυπική γνωστή μάζα των $1.44M_\odot$, παίρνουμε ένα άνω όριο της ακτίνας ~ 14.5 km. Αν και ο υπολογισμός της ακτίνας του αστέρα θα βοηθήσει στην εξαγωγή της καταστατικής του εξίσωσης, ο PSR J1748-2446ad δεν μπορεί να αποκλείσει αυτή τη στιγμή κανένα άλλο προτεινόμενο μοντέλο μιας και η μάζα του είναι ακόμα άγνωστη. Ενδέχεται στα επόμενα χρόνια να υπάρχει μια πρώτη εκτίμηση για την μάζα του μέσα από παρατηρήσεις της μετάθεσης του περιάστρου.

Συζήτηση

Υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις για τη σύνδεση των LMXBs με την δημιουργία MPS, καθώς δεν υπάρχουν άλλα ισχυρά σενάρια για την δημιουργία των τελευταίων. Επιπλέον, ή έρευνα-ανίχνευση των sub-millisecond πάλσαρς γίνεται επιτακτική, καθώς θα βοηθήσει να απαντηθούν πολλά ερωτήματα για το άνω όριο περιστροφής τους. Ωστόσο η τελευταία μπορεί να μην καρποφορήσει καθώς υπάρχουν σενάρια που θέτουν ένα άνω όριο σε αυτήν.

Ο ενδιαφερόμενος για τις παραπάνω πολύ πρόσφατες ανακαλύψεις μπορεί να ανατρέξει

στις εξής εργασίες, Edmonds P.D. *et al.*(2003)[27] και Edmonds P.D. *et al.*(2002)[26], για ανίχνευση πηγών ακτίνων X σε σφαιρωτά σμήνη καθώς και τεχνικές ανακάλυψης, Hessels J.W. *et al.* [42] για την ανίχνευση του *Terzan 5ad*.

Κεφάλαιο 3

Η θεωρία των περιστροφικών ταλαντώσεων (r-mode)

Τπάρχουν δυο είδη αστρικών ταλαντώσεων, οι ακτινικές (radial) και οι μη-ακτινικές (non-radial). Οι ακτινικές ταλαντώσεις (ή radial pulsations) αποτελούν ένα απλό είδος ταλάντωσης, στην οποία ένας αστέρας ταλαντώνεται γύρω από την θέση ισορροπίας του, διαστελλόμενος και συστελλόμενος, χρατώντας πάντα όμως το σφαιρικό του σχήμα. Οι μη-ακτινικές ταλαντώσεις, αποτελούν μια γενικότερη ομάδα ταλαντώσεων στην οποία ο αστέρας ταλαντώνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να αποκλίνει από το σφαιρικό του σχήμα. Οι ακτινικές ταλαντώσεις μπορούν να θεωρηθούν ως ειδική περίπτωση των μη-ακτινικών, με σφαιρικό αρμονικό δείκτη $l = 0$. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με τις μη-ακτινικές ταλαντώσεις, μέλος των οποίων είναι οι περιστροφικοί τρόποι ταλάντωσης (r-modes).

Στη θεωρία των αστρικών ταλαντώσεων, υπάρχει μια πλούσια γκάμα φαινομένων, που σε συνδυασμό με τις σημερινές παρατηρήσεις μας οδηγούν στο συμπέρασμα ότι οι περισσότεροι αστέρες παρουσιάζουν διαφορετικούς τρόπους* ταλάντωσης. Συνεπώς είναι πολύ λογικό να συγκρίνουμε κάθισε θεωρητικό μοντέλο με τις αντίστοιχες παρατηρήσεις, έχοντας ως μοναδικό σκοπό την εξαγωγή χρήσιμων πληροφοριών της δυναμικής των απόμακρων αστέρων. Με τη βοήθεια των ταλαντώσεων μπορούμε να ερευνήσουμε, εμμέσως, την εσωτερική δομή κάποιου αστέρα, όπως ακριβώς εξερευνούμε την εσωτερική δομή της Γης, χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες των σεισμικών κυμάτων. Έτσι, αν μελετάμε τον Ήλιο, τότε η μελέτη των παραπάνω ταλαντώσεων οδηγεί στον χλάδιο έρευνας της *Ηλιοσεισμολογίας* (Helioseismology), ενώ αν πρόκεται για οποιονδήποτε άλλο αστέρα, τότε αυτή ονομάζεται *Αστεροσεισμολογία* (Astero-seismology). Μας είναι ιδιαίτερα βολικό να εικάζουμε κάτι ανάλογο και για τις πληροφορίες που μπορούν να αποκτηθούν, από τα κύματα βαρύτητας των αστέρων νετρονίων, μιας και αυτοί, παρουσιάζουν διαφορετικού είδους ταλαντώσεις, σε διάφορα χρονικά στάδια που θα μπορούσαν να μας δώσουν πολύτιμες γνώσεις για την δομή τους και ιδιαίτερα για την κατασ-

*Οι διαφορετικοί τρόποι ταλάντωσης, φαίρονται στην βιβλιογραφία με το όνομα modes. Από εδώ και πέρα, όποτε αναφερόμαστε σε τρόπο θα εννοούμε τη λέξη mode, ενώ όποτε αναφερόμαστε σε περιστροφικό τρόπο ταλάντωσης ή περιστροφική ταλάντωση, θα εννοούμε τους r-modes.

τατική τους εξίσωση.

Είναι επίσης γνωστό ότι αν εφαρμόσουμε συγκεκριμένες διαταραχές σε κάποιο σύστημα, τότε το σύστημα θα ταλαντωθεί με συγκεκριμένο τρόπο (που εξαρτάται άμεσα από το είδος της διαταραχής που επιβάλλαμε) και μπορεί να οδηγήσει, είτε σε ευσταθή ταλάντωση, είτε σε κάποιου είδους αστάθειας. Οι βασικές αστάθειες των ταλαντώσεων των αστέρων είναι δυο, η δυναμική, η οποία αναπτύσσεται σε σύντομα χρονικά διαστήματα και η αστάθεια αργής εξέλιξης (secular).

Οι κανονικοί (normal modes) τρόποι ταλάντωσης ενός σφαιρικά συμμετρικού αστέρα χαρακτηρίζονται από ιδιοσυναρτήσεις ανάλογες των σφαιρικών αρμονικών

$$Y_l^m(\theta, \phi) \quad \text{με} \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad \text{και} \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm l.$$

Συγκεκριμένα, οι ακτινικοί τρόποι αντιστοιχούν στην περίπτωση $l = 0$. Οι αρμονικές $l = 1$ και $l = 2$ ονομάζονται διπολικές και τετραπολικές ταλαντώσεις αντίστοιχα. Οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης που ανήκουν στον δείκτη l , διαχρίνονται επιπλέον από τον αριθμό των κόμβων n . Οι τιμές τους ξεκινούν από το 0 για τον θεμελιώδη, 1 για τη πρώτη αρμονική, 2 για τη δεύτερη κ.ο.κ. Όταν εισάγεται η περιστροφή ή κάποιο μαγνητικό πεδίο τότε προστίθεται και ο αζιμουθιακός χβαντικός αριθμός m .

3.1 Μη-ακτινικές ταλαντώσεις και Μη-ακτινικές διαταραχές

Η μελέτη των ταλαντώσεων των σχετικιστικών αστέρων ξεκίνησε πριν από μερικές δεκαετίες για δυο κυρίως λόγους. Πρώτον από την αισιοδοξία ότι τέτοιες ταλαντώσεις κάποια στιγμή θα ανιχνευτούν ως σήματα είται στην ηλεκτρομαγνητική είτε στη βαρυτική ακτινοβολία, και δεύτερον στην ανάγκη της ταυτοποίησης των συχνοτήτων τους, όπως αυτές προκύπτουν από τη θεωρία, με τις παρατηρούμενες, γεγονός που θα θέσει νέα όρια, ή θα θεσπίσει νέους νόμους στη μελέτη των καταστατικών εξισώσεων των σχετικιστικών αστέρων.

Όταν οι ταλαντώσεις ενός αστέρα που βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας είναι μικρές σε μέγεθος συγκρινόμενες πάντα με τη ακτίνα του αστέρα, τότε τις χαρακτηρίζουμε ως γραμμικές διαταραχές. Τέτοιες διαταραχές μπορούν να περιγραφούν με δυο τρόπους:

- Προσέγγιση του Euler:** Όλες οι ποσότητες που σχετίζονται με το ρευστό, μετρούνται σε ένα σταθερό σύστημα συντεταγμένων. Οι χρονικές μεταβολές περιγράφονται από τοπικές παραγώγους στην καθορισμένη συντεταγμένη περιοχή, π.χ.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

- Προσέγγιση του Lagrange:** Όλες οι ποσότητες που σχετίζονται με το ρευστό, μετρούνται ως προς ένα κινούμενο στοιχείο όγκου, που πολλές φορές αναφέρεται ως moving control mass. Η μελέτη των ταλαντώσεων σε αυτή την περίπτωση, γίνεται πάνω στις μεταβολές του στοιχείο όγκου, καθώς το σωματίδιο ταλαντώνεται γύρω από

την θέση ισορροπίας του. Οι οποιεσδήποτε χρονικές μεταβολές περιγράφονται από την ολική παράγωγο

$$\frac{D\rho}{Dt},$$

ενώ η σχέση που συνδέει τις παραπάνω παραγώγους δίνεται από την

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}.$$

3.1.1 Βασικές Ιδιότητες

Αρχικά θεωρούμε έναν μη περιστρεφόμενο σφαιρικά συμμετρικό αστέρα, δίχως μαγνητικό πεδίο, ως μια κατάσταση του μη διαταραγμένου προβλήματος. Στην ενότητα αυτή θα εξηγήσουμε τις βασικές ιδιότητες των μη ακτινικών ταλαντώσεων και θα εισάγουμε τους συμβολισμούς αλλά και τις βασικές σχέσεις που τις διέπουν. Στη συνέχεια θα προσθέσουμε ως διαταραχή και την περιστροφή του αστέρα για να πάρουμε τις τελικές σχέσεις. Σκοπός της ενότητας αυτής δεν είναι η πλήρης θεωρία των μη-ακτινικών ταλαντώσεων, αλλά οι βασικές σχέσεις που διέπουν χυρίως τους περιστροφικούς τρόπους. Επειδή η γνώση των μη-ακτινικών ταλαντώσεων είναι θεμελιώδης για την εξαγωγή των διαφόρων τρόπων ταλάντωσης ενός ρευστού, συνίσταται στον αναγνώστη η περαιτέρω μελέτη της θεωρίας τους. Ένα πολύ καλό βιβλίο που περιέχει όλη την θεωρία των μη-ακτινικών ταλαντώσεων είναι των Unno *et al.* [77]. Εφαρμογή της θεωρίας των μη-ακτινικών ταλαντώσεων σε Νευτρώνειους και σχετικιστικούς αστέρες γίνεται επίσης στη διδακτορική διατριβή του Lockitch K.H. [50].

Τυποθέτοντας ότι η μη διαταραγμένη κατάσταση ανήκει σε χρονικά ανεξάρτητη ισορροπία, παίρνουμε τις διαταραχές των φυσικών μεταβλητών να είναι ανάλογες του $Y_l^m(\theta, \phi)e^{i\omega t}$, όπου ο όρος $Y_l^m(\theta, \phi)$ δηλώνει τις σφαιρικές αρμονικές, θ, ϕ οι πολικές συντεταγμένες, ω η γωνιακή συχνότητα και t ο χρόνος. Η συνάρτηση $Y_l^m(\theta, \phi)$ εκφράζεται αναλυτικά από την σχέση

$$Y_l^m(\theta, \phi) = N_l^m P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad (3.1)$$

όπου $P_l^m(\cos \theta)$ δηλώνει τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre βαθμού l και τάξης m , ενώ N_l^m είναι οι συντελεστές κανονικοποίησης. 'Όλοι οι συντελεστές στις γραμμικοποιημένες εξισώσεις, είναι συναρτήσεις της ακτινικής απόστασης r από το κέντρο του αστέρα. Με άλλα λόγια, η ακτινική συνιστώσα ξ_r μιας μικρής μετατόπισης μπορεί να γραφεί ως

$$\xi_r = \sum_{n,l,m} \xi_{rnl}(r) Y_l^m(\theta, \phi) \exp(i\omega_n l t). \quad (3.2)$$

Ο αρμονικός δείκτης l , αντιπροσωπεύει τον αριθμό των συνοριακών γραμμών, στις οποίες διαχωρίζεται η επιφάνεια του αστέρα που ταλαντώνεται με αντίθετη φάση, ενώ η αζιμουθιακή τάξη m , είναι ο αριθμός των ριζών της εξίσωσης $\cos(m\phi) = 0$ στην περιοχή $0 \leq \phi < \pi$. Όπως αναφέραμε, οι ακτινικοί τρόποι ανήκουν στην περίπτωση $l = 0$. Οι κανονικοί τρόποι για δεδομένο l για έναν σφαιρικό αστέρα δίχως περιστροφή, μπορούν να δοθούν είτε από την εξίσωση (3.1), είτε να γραφούν στη μορφή

$$Y_l^m(\theta, \phi) \propto P_l^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos(m\phi) \\ \sin(m\phi) \end{cases}. \quad (3.3)$$

Μια σημαντική ιδιότητα της θεωρίας των ταλαντώσεων των περιστρεφόμενων αστέρων, είναι η ταχύτητα της μορφής της ταλάντωσης (*pattern speed*). Σύμφωνα και με την παραπάνω εικόνα, ένας τρόπος ταλάντωσης με συμπεριφορά ανάλογη της ποσότητας $\exp i(m\phi + \omega t)$, δηλαδή ανάλογη της $\cos(m\phi + \omega t)$, εκφράζει ένα κύμα που ταξιδεύει γύρω από τον ισημερινό του συμμετρικού άξονα της ταλάντωσης. Κρατώντας σταθερό το θ , επιφάνειες με σταθερή φάση, περιγράφονται από την εξίσωση

$$m\phi + \omega t = \text{constant}, \quad (3.4)$$

όπου με μια απλή διαφόριση φτάνουμε στην

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\omega}{m} = \sigma, \quad (3.5)$$

η οποία περιγράφει την ταχύτητα της μορφής της ταλάντωσης.

Ένας τρόπος ταλάντωσης με $m > 0$ και ένας με $m < 0$ ταξιδεύουν σε αντίθετες διευθύνσεις. Στο Σχήμα 3.1 φαίνονται διαφορετικές μορφές της ταχύτητας, για διάφορες περιπτώσεις μη-ακτινικών ταλαντώσεων, πάνω στην επιφάνεια του αστέρα, σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές και για διαφορετικούς κβαντικούς αριθμούς m, l . Παρατηρούμε ότι η μορφή της ταχύτητας αλλάζει συνεχώς πρόσημο με συγκεκριμένο τόπο στην επιφάνεια του αστέρα. Οι τρόποι με $m = 0$, όπως αυτός με $m = 0, l = 1$, ονομάζονται **zonal modes**, επειδή εμφανίζουν ζώνες διαφορετικού γεωγραφικού πλάτους, ενώ οι τρόποι με $m = l$, ονομάζονται **sector modes**, διότι εμφανίζουν κυκλικούς τομείς σε διαφορετικά γεωγραφικά μήκη.

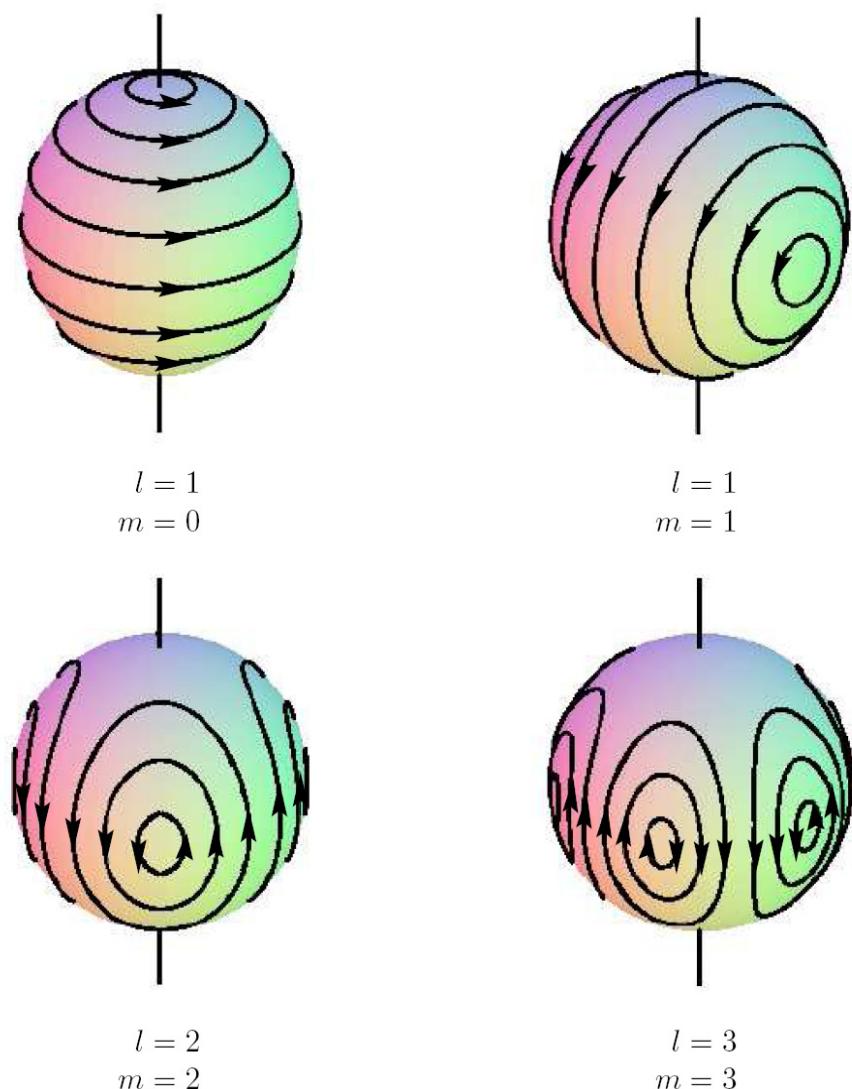
Ο εκφυλισμός του m πηγάζει από την συμμετρική περιστροφή γύρω από τυχαίο άξονα στην κατάσταση ισορροπίας. Έτσι, αν εισάγουμε μια μικρή περιστροφή, ο εκφυλισμός αναδύεται όπως και στο φαινόμενο Zeeman των φασματικών γραμμών. Η θεωρία των διαταραχών δίνει τη συχνότητα του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης, για έναν ομοιόμορφα περιστρεφόμενο αστέρα γωνιακής ταχύτητας Ω , να είναι της μορφής

$$\sigma_r = -\frac{2\Omega}{l(l+1)}, \quad (3.6)$$

όπως το βλέπει παρατηρητής που περιστρέφεται μαζί με τον αστέρα. Ενώ από την άλλη για έναν αδρανειακό παρατηρητή στο άπειρο η συχνότητα της ταλάντωσης γίνεται

$$\sigma_i = \Omega \frac{(l-1)(l+2)}{l(l+1)}. \quad (3.7)$$

Επισημαίνουμε ότι οι παραπάνω σχέσεις έχουν εξαχθεί με τις απλουστευτικές υποθέσεις της Νευτώνειας βαρύτητας και της αργής περιστροφής. Στη θεωρία σχετικότητας και/ή για γρήγορη περιστροφή δεν υπάρχουν αναλυτικές σχέσεις και σκοπός της παρούσης εργασίας είναι να υπολογισθούν αριθμητικά.



Σχήμα 3.1: Εικόνες διαφορετικών ταλαντώσεων ταχύτητας σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Το προφίλ της ταχύτητας δείχνει το ρευστό να κινείται σε μικρούς κύκλους στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς του αστέρα, καθώς η ταχύτητά τους αλλάζει προφίλ για διαφορετικές τιμές των κβαντικών αριθμών l, m . Εικόνα από την διδακτορική διατριβή του K.H. Lockitch [50].

3.1.2 Κατηγοριοποίηση των τρόπων ταλάντωσης

Το επόμενο ερώτημα που πρέπει να απαντήσουμε είναι, πόσοι τελικά τρόποι ταλάντωσης έχουν διαπιστωθεί για σφαιρικά συμμετρικούς αστέρες. Προτού δώσουμε τις αντίστοιχες κατηγορίες, πρέπει να αναφέρουμε που ακριβώς στηρίζεται ο διαχωρισμός αυτός. Στους σφαιρικά συμμετρικούς αστέρες μπορούμε να χωρίσουμε τις διαταραχές σε δυο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι σφαιροειδείς διαταραχές (spheroidal) ενώ στην δεύτερη ανήκουν οι τοροειδής (toroidal). Γενικότερα οι δυο παραπάνω κατηγορίες είναι γνωστές ως πολικές και ακτινικές διαταραχές αντίστοιχα ή ως διαταραχές με άρτια και περιττή πάριτυ αντίστοιχα.

Οι σφαιροειδείς διαταραχές, μπορούν να γραφούν με τη μορφή της (3.2), όπου οι σφαιρικές αρμονικές γράφονται με τη μορφή της σχέσεως (3.3). Συγκεκριμένα η διαταραχή ως προς την 4-ταχύτητα δv^α , βάση της προσέγγισης του Euler, μπορεί να γραφεί με όρους αρμονικών διανυσμάτων (*vector harmonics*), ενώ η διαταραχή της 4-μετρικής $\delta g_{\alpha,\beta}$, μπορεί να εκφραστεί με όρους διανυσματικών αρμονικών και τανυστικών αρμονικών. Οι όροι αυτοί έχουν είτε πολική (polar) είτε ακτινική (axial) πάριτυ, όπου σαν πάριτυ ορίζουμε την αλλαγή του προσήμου κάτω από το συνδυασμό της ανάκλασης στο ισημερινό επίπεδο και μιας στροφής κατά γωνία π . Μια πολική διαταραχή έχει πάριτυ $(-1)^l$, ενώ μια ακτινική διαταραχή έχει πάριτυ $(-1)^{l+1}$. Σε κάθε ζεύγος τιμών (l, m) αντίστοιχει λύση για κάθε τιμή της συχνότητας ω_i , αποτελούμενη από εισερχόμενα και εξερχόμενα κύματα. Οι εξερχόμενοι τρόποι, ορίζονται από τις ιδιοσυναρτήσεις, για τις οποίες δεν υπάρχει κανένα εισερχόμενο βαρυτικό κύμα.

Η κατηγοριοποίηση των τρόπων ταλάντωσης ξεκίνησε πολλά χρόνια πριν, από την εργασία του Cowling [24], η οποία βασίστηκε κυρίως στην αναγνώριση της δύναμης επαναφοράς που επηρεάζει την κίνηση του ρευστού. Μαθαίνοντας με τα χρόνια περισσότερα για τα αστρικά μοντέλα, την εσωτερική δομή τους καθώς και πολλά φυσικά φαινόμενα, νέες δυνάμεις επαναφοράς διαπιστώθηκαν και άρα νέες ομάδες ταλάντωσης προστέθηκαν στην αρχική λίστα του Cowling.

Κάθε αστέρας νετρονίων έχει μια μεγάλη πικοιλία τρόπων ταλάντωσης, καθεμιά τους με ξεχωριστό χαρακτήρα. Η κατηγοριοποίηση αυτών, όπως την γνωρίζουμε μέχρι σήμερα έχει ως εξής:

- Polar fluid modes. Τρόποι που μοιάζουν με τις Νευτώνεις διακυμάνσεις του ρευστού. Οι τρόποι αυτοί αποσβένουν αργά (slowly damped) και διακρίνονται στους εξής επιπλέον
 - p-modes: Περίπου ακτινικοί τρόποι μεγάλης συχνότητας $> 4 \text{ kHz}$, γνωστοί και ως pressure modes. Αποτελούν βασικούς τρόπους κάθε απλού αστρικού μοντέλου. Για έναν τυπικό μη-περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων ο θεμελιώδης p-mode, του οποίου η ιδιοσυνάρτηση δεν έχει κανέναν κόμβο (σημείο στο οποίο το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται) στον αστέρα, συνήθως αναφέρεται ως f-mode.
 - f-modes: Αποτελούν τους θεμελιώδεις p-modes. Έχουν συχνότητα μεταξύ $2 - 4 \text{ kHz}$, ενώ η πρώτη αρμονική παίρνει τιμές πάνω από τα 4 kHz .

– g-modes: Οι τρόποι αυτοί εμφανίζονται μόνο σε μη-ισεντροπικούς αστέρες, είναι μικρής συχνότητας $< 0.5 \text{ kHz}$, και εξαρτώνται άμεσα από την εσωτερική σύνθεση του αστρικού μοντέλου αλλά και την κατανομή της ψερμοκρασίας. Είναι γνωστοί και ως gravity modes.

- *Axial and hybrid fluid modes:*

- inertial modes: Σε έναν αστέρα μη-περιστρεφόμενο, οι τρόποι αυτοί εκφυλίζονται στην μηδενική συχνότητα. Σε έναν όμως περιστρεφόμενο αστέρα μερικοί από αυτούς είναι ασταθείς στην CFS αστάθεια (βλ. §3.2.1). Οι συχνότητές τους κυμαίνονται από μηδέν έως μερικά kHz και έχουν χρόνους ανάπτυξης αντιστρόφως ανάλογους της γωνιακής ταχύτητας του αστέρα. Οι υβριδικοί αδρανειακοί τρόποι ενός μη-περιστρεφόμενου ή περιστρεφόμενου μοντέλου, αποτελούνται από ακτινικά και πολικά μέρη.
- r-modes: Μια ειδική περίπτωση αδρανειακών τρόπων, που ανάγονται στους κλασσικούς περιστροφικούς τρόπους στο Νευτώνειο όριο. Γενικά ασταθής στη CFS αστάθεια, με χρόνους ανάπτυξης μερικών δευτερολέπτων όταν οι ρυθμοί περιστροφής παίρνουν μεγάλες τιμές. Είναι γνωστοί και ως κύματα Rossby ή rotation modes.

- *Polar and axial spacetime modes:*

- w-modes: Ανάλογοι των ημι-κανονικών τρόπων ταλάντωσης μιας μελανής οπής. Χαρακτηριστικό τους είναι η πολύ ασθενής αλληλεπίδραση με το ρευστό. Χαρακτηρίζονται από υψηλές συχνότητες $> 6 \text{ kHz}$ και αποβένονται πολύ γρήγορα σε χρόνο $\sim 0.1 \text{ ms}$. Η εμφάνιση αυτών οφείλεται στην ιδιότητα της καμπυλότητας του χώρου που παριδεύει προσωρινά προσκρουόμενα κύματα βαρύτητας. Είναι γνωστοί και ως wave-modes ή spacetime modes.

3.1.3 Η επίδραση της περιστροφής

Ένας περιστρεφόμενος αστέρας έχει δύο τρόπους ταλάντωσης με μικρές συχνότητες. Τους σφαιροειδής g-modes και τους τοροειδής - δακτυλιοειδής r-modes. Για να καταλάβουμε την προέλευση αλλά και τη φύση των παραπάνω τρόπων θα ήταν χρήσιμο να παρέμβουμε στις διαταραχές του μη-περιστρεφόμενου σφαιρικού αστέρα. Ένα τέτοιο μοντέλο έχει ένα εκφυλισμένο φάσμα στους τρόπους ταλάντωσης μηδενικών συχνοτήτων. Οι τελευταίοι ανήκουν σε ουδέτερα ρεύματα μεταγωγής ψερμότητας και η φύση των διαταραχών του ρευστού μπορεί να εξηγηθεί με τον ακόλουθο τρόπο.

Οι ισεντροπικές στάσιμες διαταραχές ενός σφαιρικού αστέρα αποτελούν λύσεις των εξισώσεων

$$\vec{\nabla}(\rho \delta \vec{u}) = 0, \quad (3.8)$$

και

$$\frac{\delta\rho}{\rho^2}\vec{\nabla}p - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta p - \vec{\nabla}\delta\Phi = 0. \quad (3.9)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις προέρχονται από την διαταραχή της εξισώσεως της διατήρησης της μάζας, στο στάσιμο όριο $\partial_t \rightarrow 0$,

$$\partial_t\delta\rho + \vec{\nabla}(\rho\delta\vec{u}) = 0$$

και από τις εξισώσεις του Euler στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς

$$\partial_t\vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}\vec{u} + 2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p - \vec{\nabla}\Phi$$

αφού τις διαταράξουμε γραμμικά

$$\partial_t\delta\vec{u} + 2\vec{\Omega} \times \delta\vec{u} = -\omega_r^2\vec{\xi} + 2i\omega_r\vec{\Omega} \times \vec{\xi} = \frac{\delta\rho}{\rho^2}\vec{\nabla}p - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}\delta p - \vec{\nabla}\delta\Phi, \quad (3.10)$$

και πάρουμε το στάσιμο και μη περιστρεφόμενο όριο $\vec{\Omega} \rightarrow 0$. Στις παραπάνω εξισώσεις, \vec{u} είναι η ταχύτητα του ρευστού, $\delta\rho$, δp και $\delta\Phi$ είναι οι διαταραχές της πυκνότητας της πίεσης και του βαρυτικού δυναμικού αντίστοιχα, $\vec{\xi} \propto \exp(i(m\phi + \omega_r t))$ είναι ένα διάνυσμα μετατόπισης χαρακτηριστικό της διαταραχής, που συνδέεται με την διαταραχή της ταχύτητας του ρευστού με την σχέση

$$\delta\vec{u} = \partial_t\vec{\xi},$$

και τέλος ω_r είναι η συχνότητα της ταλάντωσης όπως τη μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα περιστροφής του αστέρα. Η παραπάνω συχνότητα συνδέεται με τη συχνότητα της ταλάντωσης από έναν αδρανειακό παρατηρητή με τη σχέση

$$\omega_i = \omega_r - m\Omega.$$

Από την στιγμή που οι (3.8)-(3.9) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, μπορούμε να γράψουμε κάθε λύση αυτών ως υπέρθεση δύο λύσεων:

$$\begin{aligned} \delta\vec{u} &\neq 0 & , \quad \delta p &= \delta\rho = \delta\Phi = 0, \\ \delta\vec{u} &= 0 & , \quad \delta p, \delta\rho, \delta\Phi &\neq 0. \end{aligned}$$

Όλες οι στάσιμες μη-ακτινικές διαταραχές ενός σφαιρικού αστέρα αντιστοιχούν σε λύσεις της πρώτης κατηγορίας.

Για την εξαγωγή των $l = m = 2$ περιστροφικών ταλαντώσεων στην εργασία αυτή, χρησιμοποιήσαμε την πρώτη κατηγορία των λύσεων, δηλαδή μια διαταραχή της θ συνιστώσας της 4-ταχύτητας

Στους περιστρεφόμενους αστέρες ο εκφυλισμός των τρόπων ταλάντωσης μηδενικών συγχονοτήτων αναφέρεται και η δύναμη Coriolis παίζει τον ρόλο της δύναμης επαναφοράς. Η παραπάνω διαδικασία οδηγεί στις περιστροφικές ταλαντώσεις. Οι βασικές τους ιδιότητες μπορούν να κατανοηθούν από το παρακάτω απλό παράδειγμα. Θεωρούμε ότι ο τρόπος ταλάντωσης είναι καθαρά τοροειδής. Τότε η κίνηση είναι καθαρά γωνιακή και τα ξ_r , δr και $\delta \theta$ είναι όλα ανώτερης τάξης ως προς την γωνιακή ταχύτητα του αστέρα Ω . Θεωρείστε τώρα την ακτινική συνιστώσα της εξίσωσης που παίρνουμε από την στροφή της (3.10)

$$\partial_t(\vec{\nabla} \times \delta \vec{u})_r + 2\vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \delta \vec{u}) = \partial_t(\vec{\nabla} \times \delta \vec{u})_r + \delta u_h \cdot \vec{\nabla}_h(2\Omega_r) = 0. \quad (3.11)$$

Στην παραπάνω εξίσωση οι δείκτες r και h αντιπροσωπεύουν την ακτινική και γωνιακή συνιστώσα αντίστοιχα, όπου έχουμε παραμελήσει όρους δεύτερης τάξης $O(\Omega^2)$. Μεταφράζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} \left[(\vec{\nabla} \times \delta \vec{u}) + 2\vec{\Omega} \right]_r = 0.$$

Μπορούμε τώρα να αναγνωρίσουμε την ποσότητα μέσα στις αγκύλες ως την ακτινική συνιστώσα της ολικής ταχύτητας, η οποία όπως φαίνεται διατηρείται σταθερή ως προς το χρόνο από την κίνηση του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης. Επιπλέον, εισάγοντας τα τοροειδή ιδιοδιανύσματα στην (3.11), παίρνουμε την πρώτη προσέγγιση της συγχόνητητας των περιστροφικών ταλαντώσεων

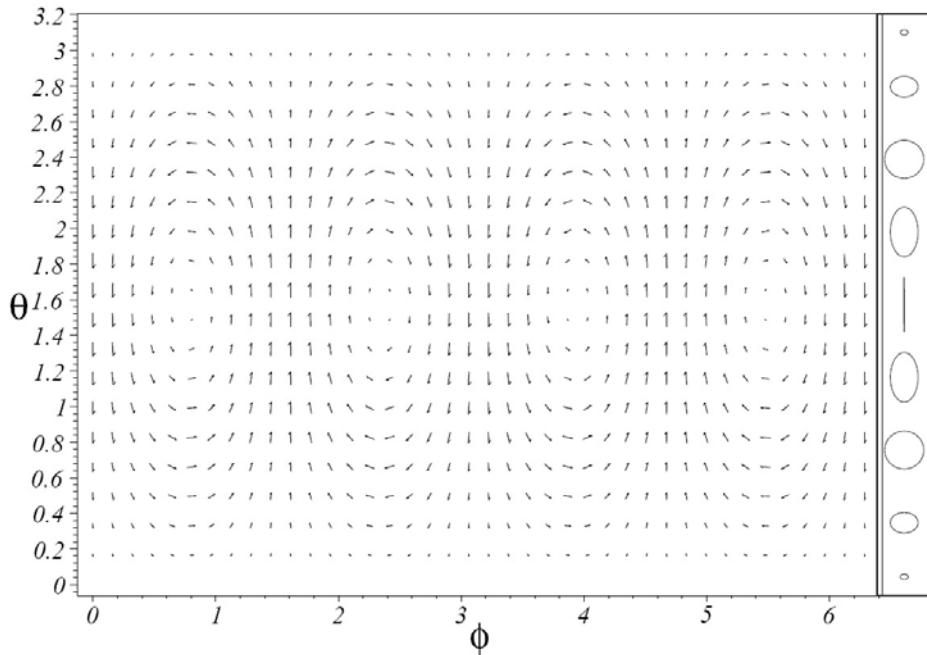
$$\omega_r \approx \frac{2m\Omega}{l(l+1)}. \quad (3.12)$$

Εισάγοντας ένα αδιάστατο πλάτος a , μπορούμε να γράψουμε το πεδίο ταχύτητας της περιστροφικής ταλάντωσης στο σύστημα αναφοράς που περιστρέφεται μαζί με το ρευστό ως

$$\vec{u} \approx a \Omega R \left(\frac{\alpha}{R} \right)^l \vec{Y}_{ll}^B e^{i\omega_r t}, \quad (3.13)$$

όπου \vec{Y}_{ll}^B τα λεγόμενα μαγνητικά πολύπολα και α μια ποσότητα που κυμαίνεται μεταξύ του 0 και R . Στο Σχήμα 3.2 μπορούμε να δούμε το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας, σε μια επιφάνεια (θ, ϕ) . Στο σχήμα μπορούμε να δούμε πως κάθε μισό της περιόδου ταλάντωσης η κίνηση αλλάζει διεύθυνση, όπως έχουμε άλλωστε είδη αναφέρει.

Το πεδίο ταχύτητας ωστόσο του Σχήματος 3.2 δε μας δίνει μια καθαρή εικόνα της κίνησης κάθε στοιχείου του ρευστού. Για να καταλάβουμε καλύτερα τη φύση του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης, θεωρούμε ότι κάθε στοιχείο του ρευστού στην επιφάνεια του αστέρα κινείται σύμφωνα με τις παρακάτω εξισώσεις



Σχήμα 3.2: Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται το πεδίο της ταχύτητας ενός $l = m = 2$ περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Το πλαίσιο στα δεξιά της εικόνας δείχνει την ποιοτική συμπεριφορά της πραγματικής κίνησης των στοιχείων του ρευστού στην προσέγγιση της μικρής περιστροφής (*slow rotation*). Η παραπάνω εικόνα βρίσκεται στην εργασία του Saio[63].

$$\delta r \approx 0, \quad (3.14)$$

$$\delta\theta = \frac{\xi_\theta}{R} \propto a \sin\theta \cos[m\phi + \omega_r t], \quad (3.15)$$

$$\delta\phi = \frac{\xi_\phi}{R} \propto a \sin\theta \cos\theta \sin[m\phi + \omega_r t]. \quad (3.16)$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις παρατηρούμε ότι

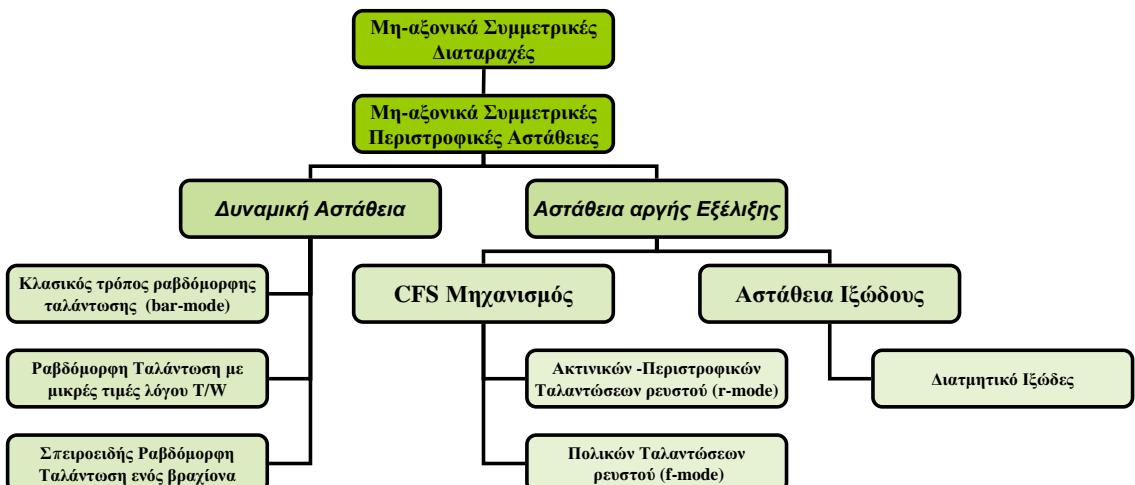
$$\frac{\delta\theta^2}{\sin^2\theta} + \frac{\delta\phi^2}{\sin^2\theta \cos^2\theta} \propto a^2,$$

που σημαίνει ότι οι κινήσεις κάθε στοιχείου του ρευστού γίνονται πάνω σε ελλείψεις, το μέγεθος των οποίων εξαρτάται από το πλάτος της ταλάντωσης a . Καθώς $\theta \rightarrow 0$ ή $\theta \rightarrow \pi$ οι ελλείψεις

μετατρέπονται σε κύκλους, ενώ η ακτίνα τους τείνει στο 0. Μπορούμε επίσης να πούμε ότι κάθε στοιχείο του ρευστού στον ισημερινό κινείται μόνο πάνω και κάτω στη θ διεύθυνση.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε ότι παρότι οι περιστροφικές ταλαντώσεις αποτελούν εξωτικό φαινόμενο των σχετικιστικών αστέρων για τους Αστροφυσικούς, στους Ωκεανογράφους και στους Μετεωρολόγους, είναι γνωστοί ως κύματα Rossby, τα οποία εμφανίζονται στην ατμόσφαιρα της Γης και στους ωκεανούς. Τα κύματα αυτά πρώτα μελετήθηκαν από τον Σουηδό μετεωρολόγο Carl-Gustaf Rossby. Το όνομα των r-modes οφείλεται σε αυτά τα κύματα και οι πρώτοι που έδειξαν τον παραπάνω συσχετισμό ήταν οι Papaloizou και Pringle [59].

Αφού λοιπόν κάναμε μια σύντομη εισαγωγή στη θεωρία των μη-ακτινικών ταλαντώσεων και είδαμε ποιες μη-ακτινικές (και μη-αξονικά συμμετρικές) διαταραχές πρέπει να εφαρμόσουμε για την εξαγωγή των περιστροφικών ταλαντώσεων, σειρά έχει τώρα να αναφέρουμε τις αστάθειες που προκαλούν οι τελευταίες. Στο Σχήμα 3.3 φαίνονται οι μη-αξονικά συμμετρικές περιστροφικές αστάθειες που προκαλούνται από τις μη-αξονικά συμμετρικές διαταραχές. Από τις αστάθειες αυτές θα αναφέρουμε μόνο τον μηχανισμό CFS και ιδιαίτερα την αστάθεια που προκαλεί στην περιστροφική ταλάντωση. Αναφορά επίσης θα γίνει και στην αστάθεια λόγω παρουσίας Ιξώδους.



Σχήμα 3.3: Στο παραπάνω δένδρο-διάγραμμα φαίνονται οι αστάθειες που προκαλούνται από την εισαγωγή μη-αξονικά συμμετρικών διαταραχών. Από αυτές ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η αστάθεια αργής εξέλιξης (secular). Η αστάθεια των περιστροφικών ταλαντώσεων οφείλεται στον μηχανισμό Chandrasekhar-Friedman-Schutz. Η παρουσία αξονικά συμμετρικών διαταραχών οδηγεί και πάλι σε δυναμική και αστάθεια αργής εξέλιξης, αλλά η συμπεριφορά τους δε θα μας απασχολήσει καθόλου στην εργασία αυτή.

3.2 Μη-αξονικά συμμετρικές Αστάθειες

Είναι γνωστό ότι οι πάλσαρς έχουν εκπληκτικά σταθερή περίοδο περιστροφής, η οποία όμως δεν προϋπήρχε αλλά δημιουργήθηκε στην πορεία της εξέλιξής τους. Τη στιγμή της δημιουργίας τους οι αστέρες αυτοί έχουν μεγάλη ταχύτητα περιστροφής, γεγονός που μπορεί να τους οδηγήσει σε διαφόρων είδών μη-αξονικά συμμετρικών ασταθειών, οι οποίες επηρεάζουν την εξέλιξη του ρυθμού περιστροφής τους. Ανάλογα γεγονότα περιμένουμε και σε αστέρες νετρονίων, μέλη διπλών συστημάτων με προσαύξηση μάζας.

Ένας πρωτο-δημιουργημένος αστέρας νετρονίων (*proto-neutron star*), έχοντας μεγάλη ταχύτητα περιστροφής, μπορεί να οδηγηθεί από την ίδια του τη βαρύτητα και από την υδροδυναμική σε δυναμική αστάθεια. Μέσο του $l = 2$ τρόπου ταλάντωσης, η αστάθεια θα παραμορφώσει τον αστέρα σε ένα ραβδόμορφο σχήμα. Το σχήμα αυτό, το οποίο είναι μη-αξονικά συμμετρικό, θα εκπέμπει βαρυτικά κύματα με συχνότητες στην περιοχή των kHz. Τρεις είναι οι γνωστές αστάθειες αυτού του είδους, και αναφέρονται στο Σχήμα 3.3. Η κλασική *bar-mode* αστάθεια, η πρόσφατη ανακαλυφθείσα *low T/|W| bar-mode* αστάθεια, η οποία εμφανίζει μικρές τιμές λόγου περιστροφικής προς βαρυτικής ενέργειας και τέλος η σπειροειδής αστάθεια με έναν μόνο βραχίονα (*one-armed spiral instability*).

Σε μικρότερες ταχύτητες περιστροφής, ο αστέρας μπορεί να γίνει ασταθής σε ένα άλλου είδους αστάθειας γνωστής ως αστάθεια αργής εξέλιξης (*secular instability*). Την τελευταία μπορούν να την οδηγήσουν είτε η βαρυτική ακτινοβολία, είτε το Ιξώδες. Ο τρόπος με τον οποίο τα βαρυτικά κύματα οδηγούν την παραπάνω αστάθεια, είναι γνωστός ως μηχανισμός CFS και θα αναπτυχθεί αμέσως παρακάτω.

Η παραπάνω αστάθεια εξελίσσεται σε μια χαρακτηριστική κλίμακα χρόνου, κατά τη διάρκεια της οποίας έχουμε απώλεια στροφορμής του αστέρα, μέσω εκπομπής βαρυτικών κυμάτων και πτώση σε χαμηλότερους ρυθμούς περιστροφής. Εάν δεν υπάρχει κάποιος μηχανισμός που να αντισταθμίσει το ρυθμό απώλειας ενέργειας (π.χ. προσαύξηση μάζας), τότε ο αστέρας περιστρέφεται με ταχύτητα μικρότερης μιας κρίσιμης τιμής, η ταλάντωση γίνεται ευσταθής και η αστάθεια οδηγείται σε μεγαλύτερη κλίμακα χρόνου και άρα στον επόμενο ασταθή τρόπο ταλάντωσης, εκτός και αν το Ιξώδες την καταστείλει τελείως.

3.2.1 Ο Μηχανισμός CFS

Οι αστάθειες που ενεργούν σε έναν σχετικιστικό αστέρα είναι αρκετοί. Η πιο γνωστή αστάθεια έχει να κάνει με την μέγιστη μάζα του αστέρα, πάνω από την οποία ο αστέρας μπορεί να καταρρεύσει βαρυτικά και να οδηγηθεί στο σχηματισμό μιας Μελανής Οπής. Μια άλλη γνωστή αστάθεια αναφέρεται στην μέγιστη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα Ω_K , πάνω από την οποία δεν υπάρχουν αστέρες σε κατάσταση ισορροπίας, εκτός και αν ακολουθούν διαφορική περιστροφή. Αν ο αστέρας φτάσει το παραπάνω όριο και το ξεπεράσει, τότε χάνει μάζα αλλά και μέρος της στροφορμής του, μέχρι να οδηγηθεί σε νέα κατάσταση ισορροπίας.

Είναι πλέον γνωστό ότι πρόσθετοι μηχανισμοί απώλειας, μπορούν να οδηγήσουν σε μια άλλη μορφή αστάθειας, την αστάθεια αργής εξέλιξης. Η κλίμακα χρόνου της τελευταίας εξαρτάται από το μέγεθος των μηχανισμών απώλειας, ενώ το αρχέτυπό της βασίζεται πάνω

στο ιξώδες (viscosity), έναν από τους βασικούς μηχανισμούς απώλειας των περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων. Σύμφωνα με το τελευταίο, γίνεται μετάβαση σε χαμηλότερη κατάσταση ενέργειας του αστέρα με ταυτόχρονη παραβίαση της διατήρησης της κυκλοφορίας του, η οποία ισχύει στα τέλεια ρευστά. Κατά παρόμοιο τρόπο, κάθε περιστρεφόμενος αστέρας νετρονίων είναι γενικά ασταθής λόγω εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας, πράγμα που οδηγεί στην μη-διατήρηση της στροφορμής του. Πρώτα ο Chandrasekhar [17], μελετώντας τα σφαιροειδή Maclaurin, διατύπωσε ότι

Chandrasekhar, 1970 : *Ta βαρυτικά κύματα οδηγούν σε αστάθεια αργής εξέλιξης.*

αργότερα οι Friedman και Schutz [34, 35] απέδειξαν ότι

Friedman & Schutz, 1978 : *H αστάθεια είναι γενική. Καταλήγοντας στο συμπέρασμα, ότι όλοι οι περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων, που θεωρούνται ως τέλεια ρευστά, είναι ασταθείς.*

Ο μηχανισμός της αστάθειας λόγω βαρυτικής ακτινοβολίας μπορεί αναλυθεί και να κατανοθεί με τον παρακάτω τρόπο. Καθώς ασχολούμαστε μόνο με περιστρεφόμενους αστέρες και παραλείπουμε άλλα φαινόμενα, όπως το μαγνητικό πεδίο, είναι χρήσιμο να χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές αρμονικές για την ανάλυση των συναρτήσεων που περιγράφουν τους διάφορους τρόπους ταλάντωσης. Έτσι, ένας τρόπος ταλάντωσης χαρακτηρίζεται από δύο χβαντικούς αριθμούς (l, m) με $m \in [-l, l]$ και η συχνότητά του είναι ω_{lm} . Σε ένα μη περιστρεφόμενο σφαιρικά συμμετρικό αστέρα, είναι γνωστό από την θεωρία ότι όλοι οι τρόποι με τον ίδιο αζιμουθιακό αριθμό m έχουν την ίδια συχνότητα $\omega_{lm} \equiv \omega_l$. Μια σημαντική φυσική ποσότητα, όπως αναφέραμε παραπάνω, που πηγάζει από την τελευταία είναι η "ταχύτητα της μορφής της ταλάντωσης" (pattern speed), η οποία περιγράφει την φαινόμενη κίνηση του κύματος του αντίστοιχου τρόπου ταλάντωσης, σχετικά με την κίνηση του αστέρα. Για θετικές τιμές του m , η ταχύτητα μορφής είναι

$$\sigma_- = -\frac{\omega}{m} = \frac{d\phi}{dt} < 0,$$

που σημαίνει ότι ο τρόπος ταλάντωσης είναι ανάδρομος "retrograde"[†], δηλαδή έχει την αντίθετη φορά περιστροφής από αυτή του αστέρα και το κύμα κατευθύνεται προς την διεύθυνση όπου μειώνεται η γωνία ϕ . Για τις αρνητικές τιμές του m , η ταχύτητα μορφής της ταλάντωσης είναι

$$\sigma_+ = -\frac{\omega}{m} = \frac{d\phi}{dt} > 0,$$

που σημαίνει ότι ο αντίστοιχος τρόπος ταλάντωσης είναι "prograde", δηλαδή έχει τη φορά

[†]Έναν τέτοιο τρόπο ταλάντωσης μπορούμε να τον πούμε και αριστερόστροφο αν η φορά περιστροφής του αστέρα είναι δεξιόστροφη και το αντίθετο.

της περιστροφής του αστέρα και το κύμα κατευθύνεται προς την διεύθυνση όπου αυξάνεται η γωνία ϕ .

Η παρουσία της περιστροφής έχει αντίκτυπο στη διαίρεση και τροποποίηση των συγχονοτήτων κατά ένα ποσό δω $\sim m\Omega$. Στους μη-περιστρεφόμενους αστέρες οι ακτινικοί τρόποι ταλάντωσης του ρευστού, εκφυλίζονται στη μηδενική συχνότητα, ενώ στους περιστρεφόμενους αστέρες έχουν μη-μηδενική συχνότητα και λέγονται **r-modes**. Η συχνότητα (ω_i) στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, σχετίζεται με την συχνότητα (ω_r) στο τοπικό σύστημα του αστέρα [‡], γωνιακής ταχύτητας Ω , με την παρακάτω σχέση,

$$\omega_i = \omega_r - m\Omega(1 + C_{lm}). \quad (3.17)$$

Στην παραπάνω σχέση, ο όρος C_{lm} είναι μια συνάρτηση που εξαρτάται από την ιδιοσυνάρτηση της ταλάντωσης, η (3.17) για περιστροφή μέχρι $O(\Omega)$ γίνεται

$$\omega_i = -m\Omega \left(1 - \frac{2}{l(l+1)} \right), \quad (3.18)$$

Όπως αντιλαμβάνετε κανείς, λόγω του όρου $m\Omega$, οι δεξιόστροφοι και αριστερόστροφοι τρόποι ταλάντωσης επηρεάζονται διαφορετικά, με αποτέλεσμα το πρόσημο των συγχονοτήτων τους πιθανότατα να αλλάζει, δηλωνοντας μια εμφανή αλλαγή στην διάδοσή τους. Έτσι, οι περιστροφικές ταλαντώσεις με $m > 0$ είναι της ίδιας φοράς με τη φορά περιστροφής του αστέρα (*prograde*) με $\omega_i < 0$ στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς, ενώ είναι ανάδρομοι (*retrograde*) ($\omega_i + m\Omega > 0$) στο περιστρεφόμενο σύστημα. Όπως θα δούμε τώρα, το φαινόμενο αυτό αποτελεί τη βασική αιτία της αστάθειας.

Ένας περιστρεφόμενος αστέρας σύρει προς την διεύθυνση περιστροφής του την ταλάντωση, έτσι ώστε αυτός που κατευθύνεται ανάδρομα της φοράς περιστροφής του αστέρα, θα συρθεί τελικά προς την φορά περιστροφής, ως προς ένα αδρανειακό παρατηρητή στο άπειρο. Εν τω μεταξύ, η ταλάντωση εξακολουθεί να κινείται ανάδρομα στο περιστρεφόμενο τοπικό σύστημα του αστέρα. Τα βαρυτικά κύματα από ένα τέτοιο τρόπο ταλάντωσης μεταφέρουν θετική στροφορμή μακριά από τον αστέρα, αλλά από τη στιγμή που το διαταραχόμενο ρευστό περιστρέφεται με μικρότερη ταχύτητα από ότι το αδιατάραχτο, η στροφορμή του ανάδρομου τρόπου είναι αρνητική. Η εκπομπή των βαρυτικών κυμάτων αυξάνει την αρνητική στροφορμή του ανάδρομου τρόπου ταλάντωσης, πράγμα που οδηγεί στην αστάθεια του. Συνεπώς

Ο τρόπος ταλάντωσης γίνεται ασταθής όταν $\omega(\omega - m\Omega) < 0$.

Η κατηγορία αυτή των ασταθειών συνήθως αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως αστάθεια Chandrasekhar-Friedman-Schutz ή πολύ απλά CFS. Στο Σχήμα 3.4 φαίνεται η αναπαράσταση της παραπάνω αστάθειας με τη βοήθεια ενός παραδείγματος βγαλμένο από την καθημερινότητα.

Το γεγονός ότι η εκπομπή βαρυτικών κυμάτων οδηγεί στην αύξηση της ενέργειας του τρόπου ταλάντωσης στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, σε αντίθεση με τη μείωση της

[‡]Το σύστημα αυτό περιστρέφεται μαζί με τον αστέρα.

ενέργειας αυτού στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο άπειρο, ακούγεται ολίγον τι περίεργο. Ωστόσο, μπορούμε να το κατανοήσουμε από την σχέση που συνδέει τις δύο παραπάνω ενέργειες:

$$E_r = E_i - \Omega J. \quad (3.19)$$

Από την παραπάνω σχέση, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι μπορούμε να έχουμε αύξηση της E_r αν έχουμε μια ταυτόχρονη μείωση του E_i και του J (βλ. [34, 35]). Με άλλα λόγια, όταν η ταλάντωση ακτινοβολεί στροφορμή, ο αστέρας βρίσκει μια κατάσταση μικρότερης ενέργειας αλλά και στροφορμής, και κάτω υπό αυτές τις συνθήκες το πλάτος της μπορεί να αυξηθεί.

Σύνοψη

Εξερχόμενοι μη-αξονικά συμμετρικοί τρόποι ταλάντωσης ακτινοβολούν στροφορμή στο άπειρο.

Αν η ταχύτητα της μορφής της ταλάντωσης είναι δεξιόστροφη ως προ το άπειρο, τότε ακτινοβολεί θετική στροφορμή J .

Αν η ταχύτητα της μορφής της ταλάντωσης είναι αριστερόστροφη ως προς το άπειρο, τότε ακτινοβολεί αρνητική στροφορμή J .

Έτσι ούτε:

- Ένας αριστερόστροφος (*retrograde*) τρόπος ταλάντωσης, με $\mathbf{J} > \mathbf{0}$, ακτινοβολεί θετική στροφορμή J στο άπειρο.
- Ένας δεξιόστροφος (*prograde*) τρόπος ταλάντωσης, με $\mathbf{J} < \mathbf{0}$, ακτινοβολεί αρνητική στροφορμή J στο άπειρο.

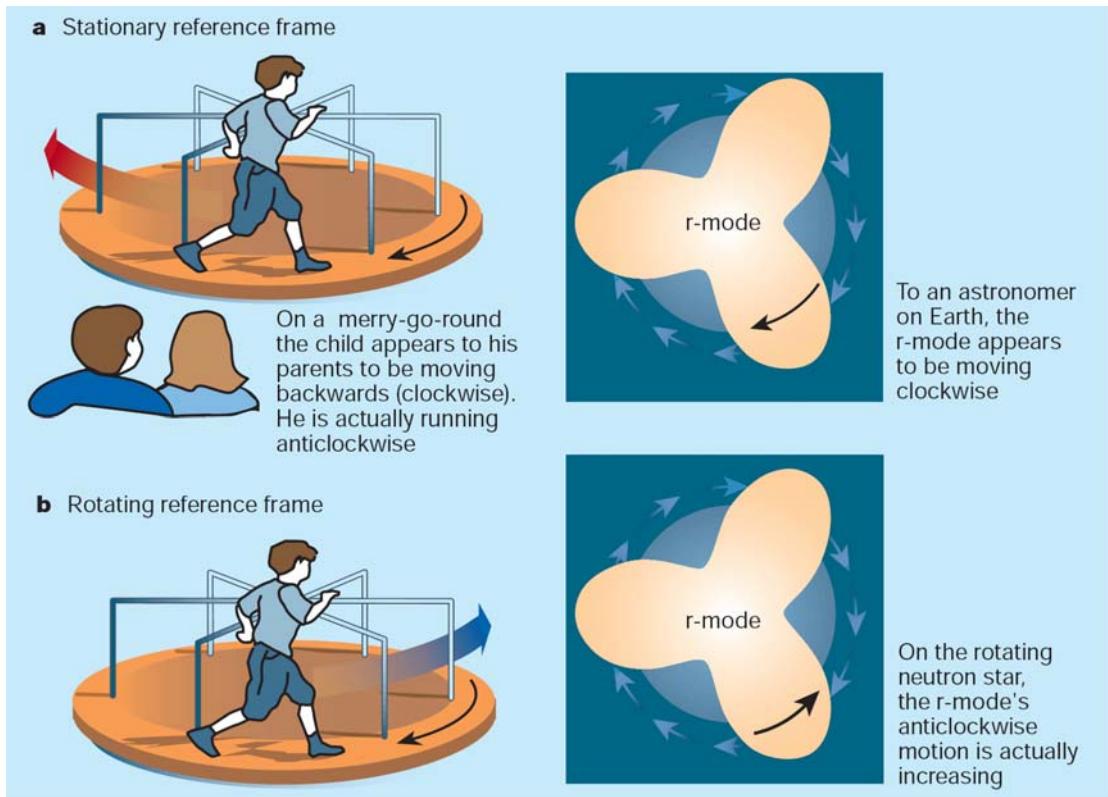
Η ακτινοβολία εξασθενεί όλους τους τρόπους ταλάντωσης στους σφαιρικούς αστέρες. Όμως ένας περιστρεφόμενος αστέρας σύρει την ταλάντωση προς τη φορά περιστροφής του. Τότε ένας αριστερόστροφος τρόπος με συμπεριφορά $e^{i(m\phi - \omega_i t)}$ γίνεται δεξιόστροφος ως προς ένα αδρανειακό παρατηρητή στο άπειρο όταν

$$m\Omega > \omega$$

Η ταλάντωση εξακολουθεί να έχει $J < 0$ διότι

$$J_{\text{star}} + J_{\text{mode}} < J_{\text{star}}$$

Ο αριστερόστροφος αυτός τρόπος, με $J < 0$, ακτινοβολεί θετική στροφορμή J , στο άπειρο. Η J αυτή γίνεται σταδιακά όλο και περισσότερο αρνητική, με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσης να αυξάνει δραματικά.



Σχήμα 3.4: Η αστάθεια ενός r-mode μπορεί να κατανοηθεί μέσω του απλού παραδείγματος ενός παιδιού που τρέχει αριστερόστροφα πάνω σε έρα "γύρω-γύρω όλοι" που περιστρέφεται δεξιόστροφα. **a)** Αν το παιδί κινείται με μικρότερη ταχύτητα από αυτή των δίσκου, τότε οι γονείς του, που αποτελούν τους αδρανειακούς παρατηρητές στο άπειρο, αντιλαμβάνονται ότι το παιδί τους κινείται δεξιόστροφα, αν και με μικρότερη ταχύτητα από το δίσκο. Στην περίπτωση ενός περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, ένας r-mode που κινείται ανάδρομα και με μικρότερη ταχύτητα από αυτή του αστέρα, φαίνεται σε έναν αδρανειακό παρατηρητή στη Γη, ότι κινείται με τη φορά του αστέρα. Τα βαρυτικά κύματα που δημιουργούνται από τις μεταβολές των ρευμάτων του ρευστού επάνω στην επιφάνεια του αστέρα, ακτινοβολούν θετική στροφορμή, με αποτέλεσμα ο αστέρας νετρονίων να χάνει την στροφορμή του καθώς αυτή μεταφέρεται μακριά από αυτόν. Η απώλεια της στροφορμής του αστέρα μεταφράζεται στον Γήινο παρατηρητή ως επιβράδυνση του r-mode. **b)** Στο σύστημα αναφοράς όμως των δίσκου, το οποίο περιστρέφεται μαζί με το δίσκο, το παιδί περιστρέφεται αριστερόστροφα. Όταν το παιδί, στο σύστημα αυτό, αυξάνει την ταχύτητά του τότε, στα μάτια των γονιών του φαίνεται να επιβραδύνεται. Αντιστοίχως, όταν ο r-mode εκπέμπει βαρυτικά κύματα και φαίνεται πως χάνει στροφορμή στο Γήινο αδρανειακό σύστημα, στην πραγματικότητα στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς αποκτά μεγαλύτερη στροφορμή (αντιθέτων προσήμου), με αποτέλεσμα το πλάτος του r-mode να αυξάνεται. Καθώς το πλάτος αυξάνεται, ολοένα και περισσότερα κύματα βαρύτητας εκπέμπονται, οδηγώντας σε μια διαδικασία που πιθανότατα να οδηγεί στην επιβράδυνση των αστέρων νετρονίων και σε ένα άνω ορίου στην ταχύτητα περιστροφής αυτών. Η εικόνα ανήκει στο περιοδικό NATURE|VOL411|3MAY2001|p.31 – 34, διαθέσιμο και στο διαδίκτυο στη σελίδα www.nature.com.

3.2.2 Η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας

Η ευστάθεια των περιστροφικών ταλαντώσεων εξαρτάται κυρίως από την ισορροπία μεταξύ της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας, η οποία οδηγεί τον τρόπο της ταλάντωσης στην αστάθεια, και της απόσβεσης λόγω ιξώδους (viscous damping). Για να εδραιώσουμε την αστροφυσική συμπεριφορά της συγκεκριμένης αστάθειας, όταν πρέπει να επιβεβαιώσουμε δύο πράγματα. Πρώτον, ο ασταθής τρόπος όταν πρέπει να "αναπτυχθεί" σε χρονικές κλίμακες πολύ μικρές, π.χ. πολλές τάξεις μικρότερες από την ηλικία του σύμπαντος, και δεύτερον, η αστάθεια για να επιβιώσει, όταν πρέπει να μπορεί να καταπνίξει διάφορους μηχανισμούς απόσβεσης, π.χ. ιξώδες. Η χρονική κλίμακα του κάθε μηχανισμού απόσβεσης t_d υπολογίζεται υποθέτοντας ότι οι ιδιο-συναρτήσεις είναι ανάλογες του $\exp t/t_d$, έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2E}{t_d},$$

όπου

$$E \approx \frac{1}{2} \int \rho |\delta \vec{u}|^2 dV \approx \frac{l(l+1)}{2} \omega_r^2 \int_0^R \rho a^4 |T_{ll}|^2 da,$$

είναι η ενέργεια μιας περιστροφικής ταλάντωσης, όπως την μετράει παρατηρητής πάνω στο σύστημα αναφοράς του αστέρα. Η μεγαλύτερη αστάθεια παρατηρείται στην περίπτωση του $l = m = 2$ τρόπου, και το ενδιαφέρον μας όταν επικεντρωθεί μόνο σε αυτόν.

Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι η χρονική κλίμακα ανάπτυξης αυτού είναι αρκούντως μικρή, έτσι ώστε να μπορούν να εντοπίστούν. Για να υπολογίσουμε τη χρονική αυτή κλίμακα και άρα τη χρονική κλίμακα εξαγωγής των κυμάτων βαρύτητας, αφού τα τελευταία είναι που οδηγούν την αστάθεια του, όταν χρησιμοποιήσουμε τύπους πολυπόλων της πρώτης μετα-Νευτώνιας προσέγγισης. Η λαμπρότητα των βαρυτικών κυμάτων που σχετίζονται με τις διακυμάνσεις του κάθε τρόπου, στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\left. \frac{dE}{dt} \right|_{gw} = -\omega_r \sum_{l=2}^{\infty} N_l \omega_i^{2l+1} (|\delta D_{lm}|^2 + |\delta J_{lm}|^2), \quad (3.20)$$

όπου

$$N_l = \frac{4\pi G}{c^{2l+1}} \frac{(l+1)(l+2)}{l(l-1)[(2l+1)!!]^2}.$$

Ο πρώτος όρος στην παρένθεση της (3.20) αντιπροσωπεύει την ακτινοβολία εξαιτίας των πολυπόλων μάζας (mass multipoles). Τα πολύπολα αυτά δίνονται από τη σχέση

$$\delta D_{lm} = \int \delta \rho a^l Y_{lm}^* dV. \quad (3.21)$$

Ο δεύτερος όρος στην παρένθεση της (3.20), αντιπροσωπεύει τα πολύπολα ρεύματα (current multipoles), τα οποία ικανοποιούν τη σχέση

$$\delta J_{lm} = \frac{2}{c} \sqrt{\frac{l}{l+1}} \int a^l (\rho \delta \vec{u} + \delta \rho \vec{\Omega}) \vec{Y}_{lm}^{B*} dV, \quad (3.22)$$

l	current multipole t_{cm} in s	mass multipole t_{mm} in s
2	47	$3.6 \cdot 10^5$
3	$1.3 \cdot 10^3$	$4.3 \cdot 10^6$
4	$3.2 \cdot 10^4$	$8.5 \cdot 10^7$

Πίνακας 3.1: Εκτιμώμενοι χρόνοι της βαρυτικής ακτινοβολίας από τα πολύπολα μάζας και ρεύματος. Οι χρόνοι αντιστοιχούν στην περίπτωση των $l = m$ *r-mode* πολυτροπικών ($N = 1$) ισεντροπικών αστέρων.

Οι παραπάνω σχέσεις δίνουν ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα: για την περίπτωση των $l = m$ περιστροφικών τρόπων ταλάντωσης η κύρια συνεισφορά της βαρυτικής ακτινοβολίας σε μεγάλους ρυθμούς περιστροφής, προέρχεται από τον πρώτο όρο της (3.22) αφού είναι κυρίως διαταραχές του πεδίου ταχύτητας του ρευστού και η βαρυτική ακτινοβολία που εκπέμπεται προέρχεται κυρίως από τα χρονο-εξαρτημένα πολύπολα ρεύματος. Αυτό είναι και το βαρυτικό ανάλογο της ακτινοβολίας από τα μαγνητικά πολύπολα.

Εισάγοντας την κύρια ιδιοσυνάρτηση στον όρο του σχετικού πολύπολου ρεύματος, παίρνουμε

$$\frac{dE}{dt} \Big|_{\text{gw}}^{\text{curr}} \approx -4l^2 N_l \omega r^3 \omega_i^{2l+1} \left| \int_0^R \rho a^{l+3} T_{ll} da \right|^2, \quad (3.23)$$

ο οποίος είναι ο ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω βαρυτικών κυμάτων. Η παραπάνω σχέση οδηγεί σε χρόνο ανάπτυξης της αστάθειας

$$t_{\text{gw}}^{\text{curr}} \approx -t_{\text{cm}} M_{1.4}^{-1} R_{10}^{-2l} P_{-3}^{2l+2} (s), \quad (3.24)$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την αστάθεια του τρόπου ταλάντωσης.

Αντίθετα για την περίπτωση των πολυπόλων μάζας, χρησιμοποιώντας την (3.21) βρίσκουμε ότι η κύρια συνεισφορά της ακτινοβολίας των πολυπόλων μάζας είναι

$$\frac{dE}{dt} \Big|_{\text{gw}}^{\text{mass}} \approx -4l^2 N_l \omega r^3 \omega_i^{2l+1} \left| \int_0^R \frac{\rho^2 g a^{l+3}}{\Gamma p} \zeta_{(l+1)l} da \right|^2, \quad (3.25)$$

όπου έχουμε εισάγει τον όρο

$$\delta p_{lm} = \rho g a \zeta_{lm}.$$

Οι παραπάνω σχέσεις οδηγούν σε χλίμακα χρόνου

$$t_{\text{gw}}^{\text{mass}} \approx -t_{\text{mm}} M_{1.4}^{-1} R_{10}^{-2l-6} P_{-3}^{2l+6} (s) \quad (3.26)$$

όπου

$$M_{1.4} = \frac{M}{1.4 M_{\odot}}, \quad R_{10} = \frac{R}{10 \text{ km}}, \quad P_{-3} = \frac{P}{1 \text{ ms}}.$$

Οι συντελεστές $t_{\text{cm}}, t_{\text{mm}}$ βρίσκονται στον Πίνακα 3.1. Από τα αποτελέσματα του πίνακα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σε κάθε αύξηση της τιμής του l κατά μια μονάδα, ακολουθεί αύξηση στους αντίστοιχους χρόνους κατά μια τάξη μεγέθους. Έτσι, πολύπολα με μεγάλο αριθμό l οδηγούν σε ασθενέστερες αστάθειες, και η $l = m = 2$ αστάθεια γίνεται η ισχυρότερη.

3.2.3 Επίδραση του Ιξώδους

Για τις περιστροφικές ταλαντώσεις γνωρίζουμε ότι το ιξώδες μπορεί να τις αποσβέσει, εκτός και αν αυξηθούν σε πολύ γρήγορες χρονικές κλίμακες. Για τα πιο απλά μοντέλα αστέρων νετρονίων υπάρχουν δυο ειδών μηχανισμοί απόσβεσης λόγω ιξώδους. Απόσβεση λόγω του διατμητικού ιξώδους (*shear viscosity*) και απόσβεση λόγω του ιξώδου όγκου (*bulk viscosity*). Οι παραπάνω αποτελούν δυο διαφορετικούς μηχανισμούς απόσβεσης, ικανοί να καταπνίξουν κάθε περιστροφική ταλάντωση, αφήνοντάς της μόνο ένα μικρό παράλυρο (βλ. Σχήμα 3.5) αστάθειας. Για το λόγω αυτό θα αναφερθούμε ξεχωριστά στον κάθε ένα μηχανισμό.

Shear viscosity

Σε θερμοκρασίες $< 10^9 K$ ο κύριος μηχανισμός διάχυσης λόγω ιξώδους οφείλεται στη μεταφορά ορμής εξαιτίας της σκέδασης των διαφόρων σωματιδίων του ρευστού. Η μακροσκοπική συμπειφορά της σκέδασης φαίνεται ως παρουσία διατμητικού ιξώδους. Σε ένα τυπικό αστέρα η κυρίαρχη σκέδαση είναι μεταξύ νετρονίων-νετρονίων. Σε ένα υπερ-ρευστό (superfluid) όμως, τα πράγματα φαίνονται να είναι πιο περίπλοκα. Στα ρευστά αυτά κυρίαρχο ρόλο στο διατμητικό ιξώδες παίζει η σκέδαση ηλεκτρονίων-ηλεκτρονίων, αλλά επιπλέον θα πρέπει να υπολογίσουμε και άλλα εξωτικά φαινόμενα όπως τη σκέδαση από δίνες που δημιουργούνται μέσα στο υπερ-ρευστό.

Χωρίς να μπούμε στις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν την απόσβεση λόγω παρουσίας διατμητικού ιξώδους, θα αναφέρουμε μόνο μερικούς τυπικούς χρόνους ανάπτυξης του φαινομένου όπως αναγράφονται στην [6]. Στους πρωτο-αστέρες, όταν η σκέδαση νετρονίων-νετρονίων κυριαρχεί, η κλίμακα χρόνου απόσβεσης λόγω του διατμητικού ιξώδους είναι

$$t_{\text{sv}} \approx M_{1.4}^{-5/4} R_{10}^{23/4} T_9^2 \cdot 6.7 \times 10^7 \text{ s}, \quad (3.27)$$

ενώ, καθώς ο αστέρας ψύχεται, και η σκέδαση ηλεκτρονίων-ηλεκτρονίων αποκτάει τον κυρίαρχο ρόλο, η κλίμακα χρόνου δίνεται από την σχέση

$$t_{\text{sv}} \approx M_{1.4}^{-1} R_{10}^5 T_9^2 \cdot 2.2 \times 10^7 \text{ s}, \quad (3.28)$$

όπου

$$T_9 = \frac{T}{10^9 K}.$$

Οι παραπάνω χρόνοι είναι βασισμένοι στη θεωρία των Navier-Stokes για πραγματικά ρευστά. Αν και η παραπάνω θεωρία δεν είναι ικανή να εξηγήσει με την απαραίτητη ακρίβεια

τέτοια φαινόμενα, οι παραπάνω χρόνοι αποτελούν μια καλή πρώτη αίσθηση της κλίμακας του χρόνου στις οποίες παρουσιάζονται οι προαναφερθέντες μηχανισμοί διάχυσης ενέργειας και απόσβεσης των περιστροφικών ταλαντώσεων.

Bulk viscosity

Σε υψηλές όγκους $> 10^9 K$ το ιξώδες όγκου, λόγω συμπίεσης ρευστού, είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός απόσβεσης. Το ιξώδες αυτό αναδύεται επειδή μεταβόλει στην πίεση και στην πυκνότητα του ρευστού, οι οποίες σχετίζονται άμεσα με τον τρόπο ταλάντωσης, οδηγούν το ρευστό μακριά από τη βήτα ισορροπία. Η τελευταία αντιστοιχεί κατά κάποιο τρόπο στο ποσό της ενέργειας που χάνεται κατά την κίνηση του ρευστού, από την προσπάθεια της ασθενής αλληλεπίδρασης να το επαναφέρει στην κατάσταση ισορροπίας του. Η απολεσθείσα ενέργεια της ταλάντωσης μέσω του ιξώδες όγκου μεταφέρεται μακριά με την βοήθεια των νετρίνο.

Η χρονική κλίμακα του παραπάνω ιξώδους για πολυτροπικούς αστέρες ($N = 1$) δίνεται από την σχέση

$$t_{bv} \approx 2.7 \times 10^{11} M_{1.4} R_{10}^{-1} P_{-3}^2 T_9^{-6} \text{ s.} \quad (3.29)$$

όπως αυτή αναγράφεται στην εργασία των Andersson και Kokkota [6].

3.3 Το παράθυρο αστάθειας των r-mode

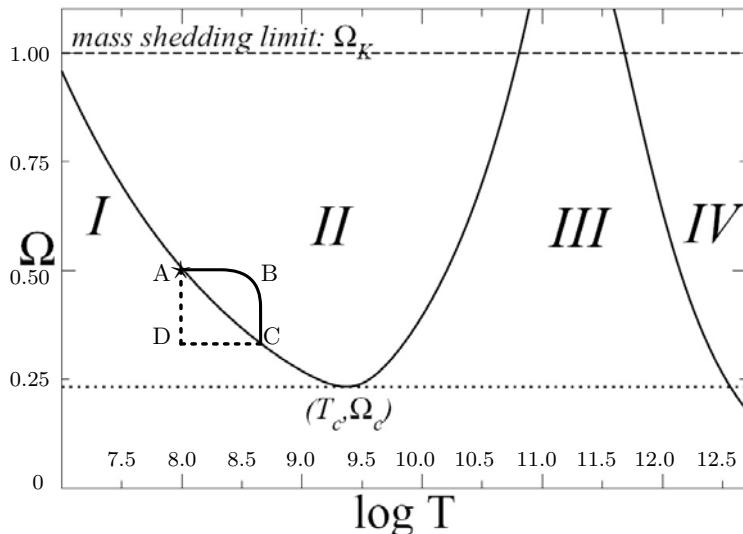
Πρωτού ξεκινήσουμε την αναφορά μας στο παράθυρο αστάθειας των περιστροφικών ταλαντώσεων, όπου θα ήταν χρήσιμο να κάναμε μια μικρή ανακεφαλαίωση των όσων είπαμε μέχρι τώρα. Ας ξεκινήσουμε πρώτα από το ότι η περιστροφή ενός αστέρα αίρει τον εκφυλισμό των αξονικών τρόπων ταλάντωσης, και δίνει το έναυσμα δημιουργίας μιας νέας ομάδας αδρανειακών τρόπων (οι οποίοι αποτελούν κυρίως διαταραχές της ταχύτητας), των οποίων ο $l = m = 2$ τρόπος αποτελεί ιδιαίτερο μέλος. Η δύναμη επαναφοράς για το νέο είδος αυτών των ταλαντώσεων, είναι η δύναμη Coriolis, ενώ η συχνότητά τους στο περιστρεφόμενο με τον αστέρα σύστημα αναφοράς, είναι

$$\omega_r = \frac{2\Omega}{3}. \quad (3.30)$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει εύκολα από τον συνδυασμό των (3.18) και (3.17), για $m = l = 2$. Σύμφωνα με το χριτήριο έναρξης της CFS αστάθειας, η περιστροφική ταλάντωση γίνεται ασταθής σε κάθε ρυθμό περιστροφής του αστέρα. Για θερμοκρασίες μεταξύ των $10^7 - 10^9$ K και ρυθμούς περιστροφής μεγαλύτερους από το 5% του ορίου Kepler, ο χρόνος ανάπτυξης της παραπάνω ταλάντωσης είναι μικρότερος των αντίστοιχων χρόνων απόσβεσης παρουσίας διατμητικού ιξώδους αλλά και απόσβεσης λόγω ιξώδες όγκου (αγνοώντας προς το παρόν την επίδραση του στερεού φλοιού).

Για να έχουμε λοιπόν αστάθεια θα πρέπει ο χρόνος t_{gw} να είναι μικρότερος των t_{sv} και t_{bv} , που αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα. Από τις αντίστοιχες σχέσεις (3.28) και (3.24) βρίσκουμε πως η απόσβεση λόγω διατμητικού ιξώδους καταστέλλει τον τρόπο ταλάντωσης σε χαμηλές θερμοκρασίες του πυρήνα, περίπου μικρότερες από 10^6 K, ενώ το ιξώδες όγκου κυριαρχεί σε υψηλές θερμοκρασίες, αποτρέποντας την ανάπτυξη της ταλάντωσης σε θερμοκρασίες μεγαλύτερες από 10^{10} K. Στις ενδιάμεσες θερμοκρασίες υπάρχει ένα παράθυρο, όπου η ανάπτυξη της αστάθειας ευνοείται, διότι στην περιοχή αυτή ο χρόνος ανάπτυξης των βαρυτικών κυμάτων είναι πολύ μικρότερος από τους αντίστοιχους χρόνους απόσβεσης λόγω ιξώδους ($t_{gw} \ll t_{viscous}$). Το παράθυρο αυτό της αστάθειας παρουσιάζεται στο Σχήμα 3.5. Ωστόσο, αν ο πυρήνας αποκτήσει πολύ υψηλή θερμοκρασία, (περιοχή IV), τότε ο αστέρας γίνεται διαφανής στην παρουσία του νετρίνου και το ιξώδες όγκου μειώνεται δραστικά οδηγώντας σε μια νέα περιοχή αστάθειας των περιστροφικών ταλαντώσεων. Η περιοχή αυτή όμως δεν κερδίζει το αστροφυσικό ενδιαφέρον, καθώς ο αστέρας νετρονίων δεν πρόκειται να μείνει αρκετό χρονικό διάστημα σε αυτήν έχοντας τόσο μεγάλες θερμοκρασίες, ώστε να οδηγήσει σε αύξηση του πλάτους της περιστροφικής ταλάντωσης. Ο χρίσιμος ρυθμός περιστροφής του αστέρα, πάνω από τον οποίο μια περιστροφική ταλάντωση οδηγείται σε αστάθεια και άρα σε εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας, βρίσκεται για την περιοχή II από την λύση της εξίσωσης

$$\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{t_{gw}} + \frac{1}{t_{bv}} + \frac{1}{t_{sv}} = 0. \quad (3.31)$$



Σχήμα 3.5: Αναπαράσταση του παραθύρου αστάθειας του μηχανισμού *CFS*. Παρατηρούμε ότι σε χαμηλές θερμοκρασίες (περιοχή *I*), ο μηχανισμός απόσβεσης του διατμητικού ιξώδους, οδηγεί σε καταστολή της αστάθειας. Το ίδιο συμβαίνει και σε υψηλότερες θερμοκρασίες $\sim 10^{10} K$, (περιοχή *III*) αυτή τη φορά όμως από έναν άλλο μηχανισμό απόσβεσης, το ιξώδες όγκου. Στις πολύ υψηλές θερμοκρασίες (περιοχή *IV*), οι πυρηνικές αντιδράσεις οδηγούν κάθε μηχανισμό απόσβεσης σε καταστολή, έτσι ώστε κάθε ασταθής τρόπος ταλάντωσης να μπορεί να αναπτυχθεί. Η περιοχή όμως αυτή ισχύει μόνο για τα πρώτα δευτερόεπτα από τη γέννηση ενός αστέρα νετρονίων. Η περιοχή της κύριας αστάθειας εμφανίζεται στην περιοχή *II* κοντά σε θερμοκρασίες $T \approx 10^8 - 10^9 K$. Η περίπτωση $l = m = 2$ του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης οδηγεί σε μια κρίσιμη τιμή γωνιακής ταχύτητας $\Omega_c \approx 0.04\Omega_K$ όταν θεωρήσουμε τον αστέρα χωρίς στερεό φλοιό, ενώ στην αντίθετη περίπτωση η παραπάνω τιμή γίνεται $\Omega_c \approx 0.25\Omega_K$. Η τελευταία περίπτωση είναι και αυτή που φαίνεται στο σχήμα. Στο σχήμα φαίνεται επίσης και η εξέλιξη της περιστροφικής ταλάντωσης του αστέρα. Όταν η προσαύξηση μάζας οδηγήσει τον αστέρα σε περιστροφή ικανή να θέσει την περιστροφική ταλάντωσή του σε αστάθεια (σημείο *A*) τότε ο αστέρας εξελίσσεται κατά μήκος της διαδρομής $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Η πορεία $A \rightarrow B \rightarrow C$ μπορεί να διαρκέσει από $10^6 - 10^7$ χρόνια, ενώ η πορεία $C \rightarrow D \rightarrow A$ (διακεκομμένη γραμμή) είναι της ίδιας περίπου τάξης. Παραστατικό σχήμα από την εργασία του Andersson [5], στο οποίο έχουμε προσθέσει τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$.

3.3.1 Η εξέλιξη του ρυθμού περιστροφής ενός Αστέρα Νετρονίων

Στη συνέχεια ωμα δούμε πως μπορεί η αστάθεια των περιστροφικών ταλαντώσεων να επηρεάσει τους αστέρες νετρονίων με προσαύξηση μάζας στα συστήματα LMXB. Όπως αναφέραμε στις §2.5 και 2.6, ένα από τα σενάρια που εξηγούν την απουσία αστέρων νετρονίων με περίοδο < 1 ms είναι η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας από ασταθείς περιστροφικές ταλαντώσεις, η οποία μπορεί να θέσει ένα άνω όριο στην περιστροφή του αστέρα. Το παραπάνω σενάριο ειπώθηκε πρώτα στην εργασία [8] και εξηγείται αναλυτικά στις επόμενες παραγράφους.

Για να μπορέσουμε να εξηγήσουμε το σενάριο αυτό έχουμε εισάγει στο Σχήμα 3.5 τη διαδρομή $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$. Ας υποθέσουμε ότι ένας αστέρας νετρονίων βρίσκεται σε ένα διπλό σύστημα και προσαυξάνει μάζα από το συνοδό του αστέρα (θέση D). Η προσαύξηση μάζας γίνεται με ρυθμό περίπου $\dot{M} \sim 10^{-9} M_{\odot}/\text{yr}$. Η πρόσθετη ύλη που δέχεται ο αστέρας μέσα σε ένα χρόνο χρυώνει και ωμα ενσωματώνεται στην εξωτερική κρούστα του αστέρα. Η προσαύξηση αυτή επιταχύνει την περιστροφή του αστέρα, χωρίς να θερμαίνει ιδιαίτερα τον πυρήνα του αστέρα. Έτσι, ο αστέρας ακολουθεί την πορεία $D \rightarrow A$. Το σημείο A όμως αποτελεί την έναρξη της αστάθειας των περιστροφικών ταλαντώσεων (*r-mode*). Στο σημείο αυτό ο αστέρας έχει περίοδο > 1 ms, πράγμα που επιβεβαιώνεται και από την πρόσφατη ανακάλυψη του πιο γρήγορου αστέρα νετρονίων με περίοδο περιστροφής 1.396 ms (βλ. §2.6.1), ενώ η θερμοκρασία του πυρήνα του αστέρα νετρονίων είναι περίπου 10^8 K.

Μετά την έναρξη της αστάθειας, το ιξώδες αρχίζει σταδιακά και με αργό ρυθμό να αυξάνει τη θερμοκρασία στον πυρήνα του αστέρα. Στη διάρκεια της διαδρομής αυτής το πλάτος της περιστροφικής ταλάντωσης αυξάνει, μέχρι να οδηγηθεί στον κορεσμό του, (a_{\max}). Ο μη-γραμμικός κορεσμός καθορίζει το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ωμα μείνει ο αστέρας μέσα στο παράθυρο αστάθειας (διαδρομή $A \rightarrow B$). Σύμφωνα με τις τελευταίες εκτιμήσεις [65, 62], μη-γραμμικά φαινόμενα οδηγούν σε τιμές κορεσμού $a_{\max} \sim 10^{-3} - 10^{-4}$ το οποίο αντιστοιχεί σε μια χρονική διάρκεια της ασταθής περιοχής, περίπου 1 Myear. Μέσα σ' αυτό το χρονικό διάστημα η περιστροφή του αστέρα διατηρείται σχεδόν σταθερή, διότι όση στροφορμή χάνει ο αστέρας από εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας (μέσω του μηχανισμού CFS), την κερδίζει από την προσαύξηση μάζας. Όταν ο αστέρας φτάσει στο σημείο B το πλάτος της περιστροφικής ταλάντωσης έχει πλέον φτάσει στην μέγιστη τιμή του. Στο σημείο αυτό ο ρυθμός απώλειας ενέργειας από εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας, είναι πλέον μεγαλύτερος από το ρυθμό κέρδους λόγω προσαύξησης, με αποτέλεσμα ο αστέρας να χάνει στροφορμή και να μειώνεται κατά συνέπεια η ταχύτητα περιστροφής του, ακολουθώντας τη διαδρομή $B \rightarrow C$, μέχρι η περιστροφική ταλάντωση να ξαναγίνει ευσταθής. Η χρονική διάρκεια της διαδρομής αυτής είναι της ίδιας περίπου τάξης με την διαδρομή $A \rightarrow B$, ~ 1 Myear.

Όταν ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης γίνει ευσταθής, τότε το πλάτος δεν παίζει κανένα ρόλο στην εξέλιξη της περιστροφής του αστέρα, αφού σταδιακά έχει μηδενιστεί. Ο αστέρας αρχίζει να ψύχεται προς την αρχική του θερμοκρασία κρατώντας παράλληλα τον ίδιο σχεδόν ρυθμό περιστροφής, μέχρι να φτάσει και πάλι κοντά στο αρχικό σημείο D από όπου ξεκίνησε (βλ. πορεία $C \rightarrow D \rightarrow A$). Η χρονική διάρκεια της πορείας αυτής είναι και πάλι της τάξης του ~ 1 Myear. Ο κύκλος επαναλαμβάνεται μέχρις ότου ο συνοδός του εξαντλήσει τα αποθέματά του ή διαλυθεί από μια έκρηξη σουπερνόβα. Μέχρι να γίνει όμως κάτι τέτοιο

ο αστέρας νετρονίων πιθανόν να εκτελέσει αρχετούς κύκλους, αφού οι τυπικές μάζες από συνοδούς αστέρες κυμαίνονται μεταξύ $0.1 - 0.5 M_{\odot}$, ενώ η μάζα που προσαυξάνεται σε κάθε κύκλο είναι πολύ μικρότερη.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε πως τη μισή ζωή του σε κάθε κύκλο ο αστέρας την περνάει εκπέμποντας βαρυτικά κύματα. Το πλάτος των τελευταίων από μια τέτοια διαδικασία, είναι πολύ μικρό, ακόμα και για υψηλούς ρυθμούς προσαύξησης μάζας. Το θετικό όμως είναι ότι η εκπομπή εξακολουθεί να γίνεται για μεγάλα χρονικά διαστήματα, επιτρέποντάς μας να ελπίζουμε σε πιθανή μελλοντική ανίχνευση. Αν η πηγή βρίσκεται στο γαλαξία μας τα βαρυτικά κύματα θα έχουν πλάτος

$$h \approx 10^{-27} \left(\frac{1.6 \text{ ms}}{P} \right)^5 \frac{1.5 \text{ kpc}}{D}. \quad (3.32)$$

Το σήμα αυτό βρίσκεται μέσα στα όρια ανίχνευσης των LIGO και GEO600, ολοκληρωμένο στην κατάλληλη συχνότητα εκπομπής επί ένα μήνα.

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι οι αστάθειες των περιστροφικών ταλαντώσεων και ειδικότερα ο τρόπος $l = m = 2$, αποτελούν μια πολλά υποσχόμενη πηγή ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων. Αποτελούν επίσης έναν μηχανισμό που θέτει ένα μέγιστο όριο στην περιστροφή των πάλσαρ ταχείας περιστροφής με περιόδους $\sim 1 \text{ ms}$, συμφωνώντας με τις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις τέτοιων αστέρων σε LMXB συστήματα (βλ. §2.6.1 σελ. 23).

Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα παραπάνω θέματα υπάρχουν στην ανασκόπηση των Andersson και Kokkotas [6] και Andersson [5], ενώ για πηγές βαρυτικών κυμάτων, μια εκτενής εισαγωγή γίνεται στην [44].

Κεφάλαιο 4

Υπολογιστικοί Κώδικες

Η φυσική κατάσταση της ύλης των αστέρων νετρονίων δεν έχει κατανοηθεί ακόμη πλήρως, διότι είναι εξαιρετικά δύσκολο να ερευνήσεις τις αλληλεπιδράσεις των σωματιδίων σε πυκνότητες μεγαλύτερες και από αυτές της πυρηνικής ($\sim 2 \times 10^{14} \text{ gm} \cdot \text{cm}^{-3}$), είτε μέσο πυρηνικών πειραμάτων, είτε μέσο των θεωριών της πυρηνικής φυσικής. Ωστόσο η συμπεριφορά της ύλης σε τόσο υψηλές τιμές πυκνότητας, μπορεί να γίνει με μια ελπιδοφόρα προσέγγιση των μακροσκοπικών ποσοτήτων των αστέρων νετρονίων. Συγκεκριμένα τόσο η μάζα, όσο και η περίοδος περιστροφής του αστέρα νετρονίων, εξαρτώνται από την συμπιεστότητα της καταστατικής εξίσωσης στις πολύ υψηλές πυκνότητες, έτσι ο συνδυασμός των παρατηρήσεων με γνωστά θεωρητικά μοντέλα, μπορούν να βοηθήσουν στην δόμηση καταστατικών, υψηλής πυκνότητας ύλης.

Δοσμένης μιας ιδιαίτερης καταστατικής εξίσωσης, η μάζα του αστέρα νετρονίων μεταβάλλεται με την κεντρική πυκνότητα ενέργειας φτάνοντας πάντα σε μια μέγιστη τιμή. Το γεγονός αυτό υπονοεί ότι αν η μέγιστη μάζα των μοντέλων μας, είναι μικρότερη της παρατηρούμενης μάζας, τότε η καταστατική αυτή πρέπει να απορριφθεί ή να τροποποιηθεί. Παρατηρώντας το διπλό σύστημα αστέρων νετρονίων PSR1913+16 οι Taylor και Weisberg (1989) κατάφεραν να μετρήσουν την μάζα του ενός συνοδού με αρκετή ακρίβεια, στις $1.44 M_{\odot}$. Έτσι, καταστατικές εξίσωσεις που δίνουν μάζα μεγαλύτερη από την παραπάνω τιμή σε αργά περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, μπορούν έγκυρα να χαρακτηριστούν, ως υποψήφιες ρεαλιστικές καταστατικές που περιγράφουν την ύλη του αστέρα στις υψηλές πυκνότητες. Από την στιγμή που η μέγιστη μάζα των αστέρων νετρονίων είναι μικρότερη από αυτές που δίνουν οι καταστατικές με μικρή συμπιεστότητα του ρευστού, η πραγματική καταστατική εξίσωση θα πρέπει να προέρχεται από την εξίσωση της καταστατικής ασυμπίεστου ρευστού.

Από την άλλη πάλι, μπορούμε να οριοθετήσουμε τις παραπάνω εξίσωσεις, υπολογίζοντας ταχέως περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες νετρονίων. Για κάθε καταστατική εξίσωση υπάρχει και ένα κάτω όριο στην περίοδο περιστροφής του αστέρα, για το λόγω που περιγράψαμε στην παράγραφο 2.4.2. Μέχρι στιγμής ο ταχύτερος αστέρας νετρονίων που έχει βρεθεί, περιστρέφετε με περίοδο 1.39ms (βλ. §2.6.1). Συνεπώς, καταστατικές των οποίων οι προβλεπόμενες μικρότερες περίοδοι περιστροφής είναι μεγαλύτερες από την παραπάνω τιμή

Θα πρέπει να αποκλειστούν ως πιθανές πραγματικές καταστατικές εξισώσεις των αστέρων νετρονίων.

Όλα τα παραπάνω μας ειδιστούν την προσοχή στην χρήση μεγάλης ακρίβειας αριθμητικών σχημάτων, για την κατασκευή περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων, ώστε να μπορέσουμε να πάρουμε ακριβείς θεωρητικές τιμές στη μάζα και περίοδο των αστέρων. Επίσης υψηλής ακρίβειας σχετικιστικά μοντέλα ισορροπίας χρειάζονται ως αρχικές συνθήκες σε προγράμματα προσομοίωσης, όπως μοντελοποίηση μη-γραμμικών ταλαντώσεων, βαρυτική κατάρευση και εξαγωγή κυμάτων βαρύτητας κλπ. Την τελευταία 20ετία έχουν κατασκευαστεί αρκετοί κώδικες πάνω στην κατασκευή μοντέλων ισορροπίας, τόσο αργά περιστρεφόμενων όσο και ταχέως περιστρεφόμενων.

Από όλα τα παραπάνω γίνεται σαφές πως ο κώδικας για την κατασκευή των αντίστοιχων μοντέλων θα πρέπει να είναι καλά δοκιμασμένος και να περικλείει πολλές ιδιότητες, όπως ομοιόμορφη και διαφορική περιστροφή, μαγνητικό πεδίο κλπ. Στην ενότητα 4.1 θα αναφερθούμε στον κώδικα RNS που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα εργασία για την εξαγωγή των μοντέλων ισορροπίας. Θα δώσουμε εν συντομίᾳ τις βασικές εξισώσεις καθώς και τον αλγόριθμο που χρησιμοποιεί, δεν θα μπούμε όμως στο βασικό κορμό του και δεν θα εξηγήσουμε καθόλου τις υπορουτίνες του, καθώς ζεφεύγει από το σκοπό της εργασίας. Ο ενδιαφερόμενος μπορεί να τον βρει και να τον φορτώσει στον υπολογιστή του, καθώς είναι διαθέσιμος στο κοινό και γραμμένος με τέτοια μορφή ώστε να δουλεύει σε κάθε σύστημα (βλ. §4.1.1).

Στο υποκεφάλαιο 4.2 περιγράφουμε το βασικό κορμό του προγράμματος προσομοίωσης ακτινικών ταλαντώσεων για την εξαγωγή των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων. Ο κώδικας CACTUS αποτελείται από πολλά κομμάτια γραμμένα από διαφορετικούς προγραμματιστές - ερευνητές και πραγματικά αποτελεί έναν *giant code**. Θα αναφερθούμε στην δομή και λειτουργία τουλάχιστον εκείνου του μέρους που χρησιμοποιήσαμε.

Η επιτυχία της προσέγγισης τεχνητού ιξώδους (*artificial viscosity*), είναι πλέον γνωστή στην υπολογιστική υδροδυναμική. Ωστόσο, υπάρχουν έμφυτες δυσκολίες στην αντιμετώπιση της σχετικιστικής περιοχής, οι οποίες σπάνε τον διατηρήσιμο χαρακτήρα του συστήματος των εξισώσεων και παράγουν επιπλοκές στην αριθμητική μεταχείριση. Τα τελευταία χρόνια όμως, έχει δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στην ανεύρεση νέων αριθμητικών σχημάτων, ικανών να ξεπερνούν τις παραπάνω δυσκολίες, τέτοια σχήματα αρχικά δημιουργήθηκαν στο πεδίο της κλασσικής υδροδυναμικής και στην συνέχεια προστέθηκαν και στην σχετικιστική. Τα σχήματα αυτά ονομάζονται *High Resolution Shock Capturing (HRSC)* και είναι βασισμένα στη λύση του τοπικού προβλήματος Riemann, εκμεταλλεύοντας τον χαρακτήρα της υπερβολικής μορφής των υδροδυναμικών εξισώσεων. Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούν έχουν υψηλή ακρίβεια (2nd τάξεως και πάνω) σε περιοχές όπου η λύση είναι ομαλή και παράλληλα η ανάλυση των ασυνεχειών, π.χ. παρουσία κρουστικών κυμάτων, γίνεται αρκετά απλή. Σε τέτοιου είδους σχήματα κάνουμε την αναφορά στην ενότητα 4.3 και ιδιαίτερα στις § 4.3.3-4.3.5.

Τέλος στο υποκεφάλαιο 4.4, παρουσιάζουμε τα κύρια χαρακτηριστικά του υπερυπολογιστή

*Η ονομασία αυτή δίνεται σε προγράμματα τα οποία αποτελούνται από πολλά κομμάτια, άριστα συνδεδεμένα μεταξύ τους και που χρειάζονται την χρήση υπερ-υπολογιστών αν θέλουμε να πετύχουμε μεγάλη ακρίβεια σε σύντομο χρονικό διάστημα.

που χρησιμοποιήσαμε στη παρούσα εργασία.

4.1 Ο Κώδικας Κατασκευής Μοντέλων Ισορροπίας

Στην υπόθεση ότι οι αστέρες νετρονίων δεν είναι αξονικά συμμετρικοί, θα είχαμε εξαγωγή βαρυτικών κυμάτων σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα, με αποτέλεσμα την μετατροπή τους σε μια κατάσταση όπου η αξονική συμμετρία θα ήταν εμφανής. Το βαρυτικό πεδίο κοντά σε αστέρες νετρονίων είναι ισχυρό ($2GM_{\text{ns}}/c^2R_{\text{ns}} \sim 0.4$), σε αντίθεση με αυτό του ηλίου που είναι της τάξης του 10^{-6} , για το λόγω αυτό χρειαζόμαστε να λύσουμε την περιστρεφόμενη και αξονικά συμμετρική κατάσταση του αστέρα, μέσα στα πλαίσια της ΓΘΣ. Ότι ισχύει για την γεωμετρία αλλά και το χωρόχρονο ενός περιστρεφόμενου αστέρα έχουμε αναφερθεί στην §2.1, οπότε στις επόμενες παραγράφους θα εστιάσουμε την προσοχή μας κυρίως στο διαφορετικό τρόπο αντιμετώπισης των εξισώσεων πεδίου.

Για την ύλη και για το χωρόχρονο κάνουμε τις επιπλέον εξής υποθέσεις, μαζί με αυτές της σελ. 9.

1. Η κατανομή της ύλης καθώς και ο χωρόχρονος παρουσιάζουν αξονική συμμετρία.[†]
2. Η ύλη και ο χωρόχρονος είναι σε μια στάσιμη[‡] κατάσταση.
3. Δεν υπάρχουν κινήσεις της ύλης κατά του μεσημβρινού. Οι μοναδικές επιτρεπόμενες κινήσεις είναι κυκλικές και οι οποίες εκφράζονται μέσο της γωνιακής ταχύτητας.
4. Η γωνιακή ταχύτητα Ω είναι σταθερή, όπως την αντιλαμβάνεται ένας αδρανειακός παρατηρητής στο άπειρο.
5. Η ύλη μπορεί αντιμετωπίζεται ως ιδανικό ρευστό.

Κάτω υπό αυτές τις συνθήκες, η μετρική του χώρου-χρόνου, σε σφαιρικές συντεταγμένες, παίρνει την μορφή

$$ds^2 = -e^{\gamma+\rho}dt^2 + e^{\gamma-\rho}\bar{r}^2 \sin^2 \theta(d\phi - \omega dt)^2 + e^{2\alpha}(d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2), \quad (4.1)$$

η οποία είναι ακριβώς ίδια με την μετρική (2.1), μόνο που κάναμε τις αντικαταστάσεις

$$2\nu = \gamma + \rho \quad \text{και} \quad 2\psi = \gamma - \rho, \quad (4.2)$$

ότι αναφέραμε στην §2.1, ισχύουν και εδώ, με την διαφορά ότι η συντεταγμένη \bar{r} δεν είναι ακριβώς ίδια με την συντεταγμένη του Schwarzschild r που χρησιμοποιήσαμε στην (2.1). Στο δριο της σφαιρικής συμμετρίας, το \bar{r} αντιστοιχεί στην ισοτροπική συντεταγμένη Schwarzschild. Κύκλοι με κέντρο τον άξονα συμμετρίας έχουν περιφέρεια $2\pi r$ όπου το r σχετίζεται με τις συντεταγμένες \bar{r}, θ μέσο της σχέσης

$$r = e^{\frac{1}{2}(\gamma-\rho)}\bar{r} \sin \theta. \quad (4.3)$$

[†]Η υπόθεση αυτή μας βοηθάει στην εισαγωγή συντεταγμένης ϕ , στην οποία η μετρική του χώρου είναι ανεξάρτητη από αυτήν.

[‡]Ορίζουμε ως στάσιμο χωρόχρονο, εκείνον στον οποίο μπορούμε να βρούμε μια χρονική συντεταγμένη t με την ιδιότητα, όλες οι εξισώσεις της μετρικής να είναι ανεξάρτητες του χρόνου t .

Οι εξισώσεις του Einstein (4.12) γράφονται για τις μετρικές συναρτήσεις ρ , γ και ω αντίστοιχα

$$\nabla^2[\rho e^{\gamma/2}] = S_\rho(\bar{r}, \mu), \quad (4.4)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}} - \frac{\mu}{\bar{r}^2} \partial_\mu \right) \gamma e^{\gamma/2} = S_\gamma(\bar{r}, \mu), \quad (4.5)$$

$$\left(\nabla^2 + \frac{2}{\bar{r}} \partial_{\bar{r}} - \frac{2\mu}{\bar{r}^2} \partial_\mu \right) \omega e^{(\gamma-2\rho)/2} = S_\omega(\bar{r}, \mu), \quad (4.6)$$

όπου ∇^2 είναι η Λαπλασιανή[§] του επίπεδου χώρου, $\mu = \cos \theta$ [¶], και τα S_ρ , S_γ και S_ω είναι οι ενεργές πηγές που περιέχουν μη-γραμμικούς όρους καθώς και όρους σύζευξης. Στις παραπάνω τρεις εξισώσεις πεδίου θα πρέπει να προσθέσουμε και μια εξισώση για το α , το σύμμορφο δηλαδή παράγοντα που χαρακτηρίζει την 2-επιφάνεια, έτσι ώστε να πάρουμε ένα σετ 4 εξισώσεων. Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για την εξαγωγή των παραπάνω σχέσεων, μπορεί να λάβει υπόψη του τις εργασίες των Butterworth, Ipser (BI code), 1976[15] καθώς και των Komatsu *et al* [45].

Η εξισώση της υδροστατικής ισορροπίας (2.16), μπορεί να ολοκληρωθεί, εάν διαλέξουμε κατάλληλη καταστατική εξισώση. Στην συγκεκριμένη εργασία αναφερόμαστε μόνο σε πολυτροπικές καταστατικές, έτσι διαλέγουμε την (2.12). Για την συγκεκριμένη καταστατική, ένα μοντέλο μπορεί να οριστεί μόνο από το λόγω της κεντρικής πίεσης του αστέρα προς την κεντρική πυκνότητα ενέργειας $\kappa \equiv r_c/\varepsilon_c$ καθώς και από τον λόγω της πολικής προς την ισημερινή συντεταγμένη ακτίνα r_p/r_e . Πλέον οι τέσσερις εξισώσεις πεδίου μαζί με την εξισώση της υδροστατικής ισορροπίας μπορούν να λυθούν, με εκλογή κατάλληλων συνθηκών, και να μας δώσουν τις τέσσερις μετρικές συναρτήσεις καθώς και την κατανομή της πυκνότητας. Τα αριθμητικά σχήματα που προτάθηκαν κατά καιρούς για την εξαγωγή μοντέλων ισορροπίας, διαφέρουν κυρίως στην εκλογή και μέθοδο ολοκλήρωσης των παραπάνω εξισώσεων πεδίου, καθώς και στο πεπερασμένο πλέγμα και πεπερασμένο αριθμητικό σχήμα που θα χρησιμοποιήσουν για την ολοκλήρωση των εξισώσεων.

4.1.1 Το Αριθμητικό σχήμα RNS

Όλες οι μέθοδοι, που υπάρχουν και λύνουν το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει την κατάσταση ισορροπίας ενός αστέρα που περιστρέφεται, είναι αριθμητικές, καθώς δεν έχει βρεθεί ακόμα ακριβής αναλυτική λύση που να περιγράφει τόσο το εσωτερικό όσο και το εξωτερικό χωρόχρονο του αστέρα. Οι πρώτες προσπάθειες ανήκουν στον Hartle (1967)[38] καθώς ήταν ο πρώτος που έδωσε μια μέθοδο υπολογισμού αργά περιστρεφόμενων μοντέλων. Την προσπάθειά του ακολούθησαν οι Butterworth και Ipser (1976), φτιάχνοντας το αριθμητικό σχήμα (BI) βασισμένο σε μια Newton-Raphson διαδικασία γραμμικοποίησης και επανάληψης, για την λύση των εξισώσεων πεδίου. Το αρχικό σχήμα BI χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή

[§]Σε σφαιρικές συντεταγμένες δίνεται από την $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$

[¶]Η εκλογή της ανεξάρτητης μεταβλητής μ αντί του θ γίνεται για αποφυγή της φανερής ανωμαλίας $\cot \theta$ στους πόλους.

μοντέλων με ομοιόμορφη πυκνότητα καθώς και για πολυτροπικά μοντέλα. Πολλοί ήταν οι Αστροφυσικοί που βασίστηκαν πάνω στο αρχικό σχήμα BI και το επέκτειναν για διαφορετικές καταστάσεις, όπως για μοντέλα που χρησιμοποιούν ρεαλιστικές καταστατικές, (Friedman, Ipser, Parker (FIP)), μοντέλα με εξωτικές καταστατικές (Lattimer).

Την προσπάθεια αυτή συνέχισαν οι Komatsu, Eriguchi και Hachisu (KEH,1989)[45], ανοίγοντας έτσι το δρόμο στην δημιουργία μιας νέας γενιάς αριθμητικών σχημάτων. Η αρχική τους ιδέα βασίστηκε πάνω στις εξισώσεις (4.4)-(4.6), αλλά ανέπτυξαν ένα καινούργιο σχήμα για την λύση αυτών. Τις παραπάνω ελλειπτικές εξισώσεις, που κάθε μια αντιστοιχεί στις μετρικές συναρτήσεις ρ, γ, ω , βρήκαν τρόπο να τις μετατρέψουν σε ολοκληρωτικές εξισώσεις χρησιμοποιώντας ιδιότητες των συναρτήσεων Green. Στις ολοκληρωτικές αυτές εξισώσεις μπορούμε εύκολα πλέον να εισάγουμε συνοριακές συνθήκες με ασυμπτωτική συμπεριφορά, διότι και οι συναρτήσεις Green μπορούν να έχουν ακριβώς την ίδια συμπεριφορά ($1/r$) ή ακόμα πιο απότομη στις μεγάλες αποστάσεις. Στην ολοκληρωτική έκφραση των (4.4)-(4.6), τα ολοκληρώματα περιέχουν ποσότητες από την μετρική και την ύλη, όπως την πυκνότητα ενέργειας και την πίεση. Η τέταρτη μετρική συνάρτηση αυτοκούνει σε μια πρώτης τάξεως μερική διαφορική εξίσωση, η οποία εύκολα μπορεί να ολοκληρωθεί, εφόσον γνωρίζουμε τις τρεις άλλες μετρικές συναρτήσεις. Ο χώρος ολοκλήρωσης περιορίζεται μέχρι το διπλάσιο της ακτίνας του αστέρα, όπου οι τιμές των μετρικών συναρτήσεων θεωρούνται ότι μηδενίζονται σε αυτήν την τιμή, αντί βέβαια στου απείρου.

Το σχήμα KEH είναι ανανεωμένη έκδοση του αυτοσυνεπούς - πεδίου (Self-consistent-field, SCF), ενός σχήματος κατάλληλου για εξέλιξη Νευτώνειων αστέρων. Στο σχήμα αυτό η εξέλιξη γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Αρχικά οι τιμές των μετρικών συναρτήσεων $\rho, \gamma, \omega, \alpha$ αλλά και η πυκνότητα ενέργειας ε καθώς και η πίεση P , διαλέγονται τυχαία. Οι τιμές αντικαθίστανται στις ολοκληρωτικές εξισώσεις των (4.4)-(4.6), η λύση των οποίων θα δώσει νέες τιμές στα ρ, γ, ω . Η νέα τιμή της τέταρτης μετρικής συνάρτησης α , βγαίνει από ολοκλήρωση της αντιστοιχης ολοκληρωτικής συνάρτησης, στην οποία έχουμε χρησιμοποιήσει τις νέες τιμές των ρ, γ, ω . Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω αποκτηθείσες τιμές στην εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας (2.16), παίρνουμε νέες τιμές για τα P και ε . Σε αυτό το σημείο τελειώνει ο πρώτος κύκλος επανάληψης. Χρησιμοποιώντας τώρα την ίδια διαδικασία, την επαναλαμβάνουμε μέχρι η διαφορά των παλιών από τις νέες τιμές γίνει μικρότερη από κάποιο μικρό όριο (10^{-5}), τότε η διαδικασία σταματάει. Το αρχικό KEH σχήμα χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή μοντέλων με ομοιόμορφη καθώς και διαφορική περιστροφή, τόσο για πολυτροπικές όσο και για ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις.

Οι Cook, Shapiro και Teukolsky (CST)[22], βελτίωσαν το σχήμα (KEH) εισάγοντας μια νέα ακτινική μεταβλητή η οποία απεικονίζει τον χώρο $[0, \infty)$, στο κλειστό χώρο $[0, 1]$. Η αλλαγή αυτή στη μεταβλητή \bar{r} γίνεται μέσω του μετασχηματισμού

$$\bar{r} = \bar{r}_e \left(\frac{s}{1-s} \right), \quad (4.7)$$

όπου \bar{r}_e είναι η αδιάστατη ακτίνα της επιφανείας της ύλης, στον ισημερινό. Με αυτό το μετασχηματισμό οι παραπάνω συγγραφείς κατάφεραν να απεικονίσουν το χώρο ως

$$s = 0.0 \Leftrightarrow \bar{r} = 0, \quad (4.8)$$

$$s = 0.5 \Leftrightarrow \bar{r} = \bar{r}_e, \quad (4.9)$$

$$s = 1.0 \Leftrightarrow \bar{r} \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι ο χώρος ολοκλήρωσης των εξισώσεων πεδίου δεν χρειάζεται να κοπεί σε κάποιο πεπερασμένο σημείο, όπως γινόταν στο KEH όπου χρησιμοποιούσαν το διπλάσιο περίπου της ακτίνας του αστέρα για να τερματίσουν το πλέγμα, αλλά καλύπτει όλο το χώρο. Με αυτήν την επιλογή η εκλογή των συνοριακών συνθηκών μπορεί να εφαρμοστεί με ακρίβεια στο άπειρο.

Οι εξισώσεις βέβαια αλλάζουν μορφή αλλά ο βασικός τρόπος της αριθμητικής μεθόδου παραμένει ο ίδιος. Για να πετύχουν γρηγορότερη σύγκλιση στη διαδικασία των επαναλήψεων, χρησιμοποίησαν μια τεχνική χαλάρωσης του συστήματος (overrelaxation technique), παρόμοια με αυτή του KEH, της μορφής

$$u^{(k+1)} = w\hat{u}^{(k+1)} + (1-w)u^{(k)}, \quad (4.11)$$

όπου $u^{(k)}$ είναι η k -ιστή επανάληψη στην τιμή των μετρικών συναρτήσεων, με το w να παίζει το ρόλο μιας εκ των ρ, γ, ω και $\hat{u}^{(k+1)}$ είναι οι νέες τιμές που προέκυψαν από το προηγούμενο βήμα της u^k . Ο αριθμητικός παράγοντας w , είναι ο παράγον χαλάρωσης ή αλλιώς παράγον απόσβεσης (*damping factor*), που χρησιμοποιείτε χυρίως για την επιτάχυνση της σύγκλισης. Σε κάθε επανάληψη οι ποσότητες που παραμένουν αμετάβλητες είναι ο λόγος της πολικής προς την ισημερινή συντεταγμένη ακτίνα r_p/r_e και η κεντρική πυκνότητα του αστέρα ρ_c .

Οι Friedman *et al.*, (1995) [74], υλοποίησαν τον δικό τους κώδικα KEH, ακολουθώντας το σχήμα CST. Ανακάλυψαν ότι η εκλογή των συντεταγμένων στο αρχικό KEH σχήμα, επηρεάζει την μετρική συνάρτηση α με αποτέλεσμα να παρουσιάζει ταλαντώσεις κατά την ακτινική διεύθυνση. Η ταλάντωση εμφανίζεται χυρίως στο εσωτερικό του αστέρα παρουσιάζοντας αριθμητικό σφάλμα 1-2% στην μάζα, ακτίνα, και ώς και σε άλλες ποσότητες του αστέρα. Το πρόβλημα λύθηκε χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη φόρμουλα πεπερασμένων διαφορών στην δεύτερη τάξη ακτινική παράγωγο που εμφανίζεται στον όρο της πηγής, στην αντίστοιχη πρώτης τάξεως διαφορική εξίσωση της μετρικής συνάρτησης α και η οποία φόρμουλα χρησιμοποιεί τα διπλάσια σημεία πλέγματος. Με την αντιμετώπιση αυτή πετυχαίνετε ή εξαφάνιση των ταλαντώσεων, δίνοντας ένα ακριβές αστρικό μοντέλο.

Ο RNS (Rotating Neutron Stars) έχει δοκιμαστεί και συγχριθεί μαζί με άλλα σχήματα και έχει επιτύχει σε όλα, αναδεικνύοντας τον ως έναν από τους πιο ακριβείς, για την κατασκευή μοντέλων ισορροπίας, κώδικες. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει αποτελέσματα καθώς και συγκρίσεις με άλλους κώδικες στις εργασίες [74, 57]. Ο RNS είναι γραμμένος σε γλώσσα προγραμματισμού ANSI C, δεν έχει χρησιμοποιηθεί καθόλου γλώσσα μηχανής ώστε να γίνεται *compilation* από κάθε μεταγλωττιστή της γλώσσας C. Είναι διαθέσιμος στο κοινό μαζί με το manual στην διεύθυνση:

<http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns>.

4.2 Ο κώδικας Cactus

Στην ενότητα αυτή θα αναφερθούμε στο 3-διάστατο σχετικιστικό υδροδυναμικό κώδικα που αναπτύχθηκε από την συνεργασία του Washington University/NCSA/AEI-Golm πανεπιστημίου με τη NASA για το πρόγραμμα Neutron Star Grand Challenge Project (NSGCP) [79]. Το υπολογιστικό αυτό εργαλείο ακούει στο όνομα CACTUS (χάκτος), και αρχικά αναπτύχθηκε για τις επιστημονικές κοινότητες που ασχολούνται κυρίως με την ΓΘΣ και την Αστροφυσική. Στην πορεία όμως έγινε ένα ενοποιημένο πλαίσιο εργασίας για διάφορες άλλες ερευνητικές ομάδες. Το CACTUS αποτελεί κομβικό σημείο ένωσης διαφόρων τεχνολογικών καινοτομιών στα πλαίσια της υπολογιστικής επιστήμης καθώς εμπεριέχει το σύστημα Globus, κατάλληλο για κατανομή των υπολογισμών σε διαφορετικές θέσεις, το Distributed Adapted Grid Hierarchies DAGH, ένα σύστημα κατάλληλο για παράλληλο υπολογισμό με προσαρμοσμένο πλέγμα, PETSC, βιβλιοθήκη κατάλληλη για λύση ελλειπτικών εξισώσεων και τέλος μια παράλληλη I/O βιβλιοθήκη την λεγόμενη PANDA. Όλα τα παραπάνω παρέχουν τις κατάλληλες προϋποθέσεις για την λύση των εξισώσεων πεδίου, και αποτελούν από μόνες τους μια εξαιρετική βάση για οποιοδήποτε άλλο υπολογισμό, στα χέρια κάθε επιστημονικής ερευνητικής ομάδας. Για τους Αστροφυσικούς, αποτελεί ένα σπουδαίο εργαλείο προσομοίωσης μέσω του *Cactus Computational Toolkit*, παρέχοντας όλη σχεδόν την υποδομή για την ουσιαστική λύση οποιουδήποτε συστήματος Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ). Έτσι το CACTUS δεν αποτελεί εργαστήριο πολλών ερευνητικών έργων στην υπολογιστική επιστήμη αλλά ένα εργαστήριο για κάθε κλάδο των Θετικών επιστημών.

Το CACTUS αποτελεί ένα τυμηματικό κώδικα για την δημιουργία φορητών προσομοιώσεων πεπερασμένων διαφορών. Από την αρχή της κατασκευής του σχεδιάστηκε έτσι ώστε να στηρίζει τις προσπάθειες ανάπτυξης ερευνητικών έργων, διαφόρων προγραμματιστών, ανεξαρτήτων μεταξύ τους, παρέχοντας τους έναν σύστημα αναθεώρησης το CVS code. Τα προγράμματα αυτά των διαφώρων επιστημών καλωδιόνονται στο CACTUS ως *αγκάθια*, "thorns". Ο παραλληλισμός και η φορητότητα (parallelism and portability), επιτυγχάνονται με την χρήση του MPI, του υποσυστήματος I/O και της διασύνδεσης μέσω του API. Το τελευταίο υποστηρίζει τόσο την C όσο και την F77/F90 γλώσσα προγραμματισμού. Ο χρήστης που κατέχει την F77/F90 και που θέλει να φτιάξει τον δικό του *thorn* ώστε να το εισάγει μέσα στον πυρήνα "flesh" του CACTUS, δεν χρειάζεται να ξέρει τίποτα από γλώσσα C, και μπορεί να χρησιμοποιήσει από κάποιον άλλο προγραμματιστή το δικό του *thorn*, το οποίο είναι γραμμένο στην C. Ο πυρήνας εμπεριέχει το λογισμικό για την διάσπαση της κυριότητας του προγράμματος, τα I/O καθώς και άλλα προγράμματα λογισμικού περιεχομένου.

Ο χρήστης έχει την δυνατότητα να εισάγει το δικό του *thorn* όπως για παράδειγμα έναν "λύτη" (από εδώ και πέρα solver) των εξισώσεων του Einstein, καθώς και άλλους φορμαλισμούς των εξισώσεων ή οποιεσδήποτε ρουτίνες αυτός θεωρεί καλύτερες για την επίτευξη καλύτερης ανάλυσης. Το *thorn* μπορεί να είναι οποιοσδήποτε κώδικας σχεδιασμένος για την εξαγωγή αρχικών δεδομένων, συνθηκών βαθμίδας, τμήμα οπτικοποίησης και πολλά άλλα. Επίσης τα *thorns* δεν χρειάζεται να έχουν καμία σχέση με την Σχετικότητα, επιτρέποντας έτσι και την εισαγωγή άλλων κλάδων της Φυσικής ή των Μαθηματικών ή ακόμα και των Μηχανολόγων/Μηχανικών.

Καθώς ο σκοπός των περισσοτέρων Αστροφυσικών είναι η μελέτη ρεαλιστικών αστροφυσικών συστημάτων, τα οποία χρειάζονται 3-διάστατες προσομοιώσεις και περικλείουν διαφορετικές κλίμακες χρόνου και μήκους, είναι πολύ σημαντικό η κατασκευή του κώδικα να περιλαμβάνει μεγάλης κλίμακας χρόνου προσομοιώσεις, πράγμα που απαιτεί την χρήση παραλληλων υπερυπολογιστών. Το CACTUS κατασκευάστηκε με το παραπάνω σκεπτικό, επιτυγχάνοντάς το με την χρήση του **MPI**: *Message Passing Interface*^{||}. Με το τρόπο αυτό επιτυγχάνουμε υψηλή απόδοση φορητού παραλληλισμού, χρησιμοποιώντας ένα κατανεμημένο μοντέλο μνήμης. Το MPI αποτελεί βασικό κομμάτι στην αρχιτεκτονική των υπερ-υπολογιστών, και πολλοί από αυτούς, SGI Origin 2000, Cray T3E, HP/Convex Exemplar, IBM SP-2, MareNostrum, το χρησιμοποιούν. Το επίπεδο όμως του MPI στο CACTUS επιτρέπει και χρήση από υπολογιστές σε συστοιχία καθώς και PC's. Ο παραλληλισμός στο CACTUS βασίζεται σε μια γενική διάσπαση της κυριότητας του προγράμματος, κατανέμοντας ομοιόμορφα τις συναρτήσεις του ηλεκτρονικού δικτύου κατα μήκος των επεξεργαστών, παρέχοντας μια ζώνη-φάντασμα (ghost-zone) επικοινωνίας για stencil widths και grid staggerings. Ο κώδικας μπορεί να μεταγλωττιστεί και χωρίς το MPI, επιτρέποντας τον ίδιο πηγαίο κώδικα να τρέξει σε έναν μόνο επεξεργαστή-workstation. Επειδή η γνώση του MPI είναι υποχρεωτική σε τέτοιου είδους κώδικες αλλά και επειδή η χρήση του σε κάθε υπερυπολογιστικό κέντρο θεωρείται δεδομένη, αφιερώνουμε μερικές μόνο σελίδες στο Παράρτημα Γ'.3. Το CACTUS έχει δοκιμαστεί στον SGI Origin 2000 χρησιμοποιώντας 256 κόμβους, στον SGI/Cray T3E χρησιμοποιώντας 1024 κόμβους, σε SGI O2 και NT clusters καθώς και σε SGI workstations. Τέλος για το σκοπό της παρούσας εργασίας χρησιμοποιήσαμε το CACTUS για πρώτη φορά στο MareNostrum χρησιμοποιώντας 512 κόμβους (βλ. §4.4). Σε όλες τις παραπάνω υπολογιστικές μηχανές πέτυχε πάνω από 90% linear scaling. Στο πρόγραμμα της NASA, NSGCP το CACTUS παίζει ένα σημαντικό ρόλο και πετυχαίνει 142GFlops σε μια πλήρη εξέλιξη του χωροχρόνου, συζευγμένου με ένα thorn σχετικιστικής υδροδυναμικής GR3D **.

Η χρήση του πλήρους συστήματος των εξισώσεων πεδίου μαζί με τις εξισώσεις της σχετικιστικής υδροδυναμικής, απαιτεί ένα μεγάλο αριθμό 3-διάστατων πινάκων για την εξέλιξη του συστήματος. Στην προσπάθεια να έχουμε καλή ανάλυση σε ρεαλιστικές προσομοιώσεις, το CACTUS χρησιμοποιεί όλη την μνήμη που του χρειάζεται και εξάγει τα αποτελέσματα σε λογικά χρονικά διαστήματα. Κατά την ανάπτυξή του, ιδιαίτερο ενδιαφέρον δόθηκε σε προβλήματα που οφείλονται καθαρά στο λογισμικό, όπως διαχείρισης, υποστήριξης και ανάπτυξης collaborative code. Για να μειωθούν λοιπόν τα φράγματα μεταξύ διαφορετικών ερευνητικών ομάδων, ο κώδικας κατασκευάστηκε έτσι, ώστε να διαθέτει:

1. Μια αρθρωτή δομή κώδικα, που επιτρέπει πολλές νέες υποομάδες από διαφορετικούς κώδικες να συνδέονται ως αγκάθια (*thorns*), στο τμήμα του πυρήνα του κώδικα (*flesh*), εξού και το όνομα "Κάκτος".
2. Μια βιβλιοθήκη από χρήσιμα τέστ, για τον έλεγχο αλλά και τη σωστή διαχείρηση των *thorns* με άλλα κομμάτια του προγράμματος.

^{||}The Message Passing Interface (MPI) standard, <http://www.ncs.anl.gov/mpi>

^{**}Available at <http://wugrav.wustl.edu/Codes/GR3D>

3. Διάφορα υπολογιστικά εργαλεία για την ανάπτυξη πηγαίου κώδικα, όπως εγχειρίδια, elliptic solvers, εργαλεία οπτικοποίησης κ.α.

Το υδροδυναμικό κομμάτι του κώδικα που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα εργασία δι-απραγματεύεται αναλυτικά στην παράγραφο **§4.3**. Αν και όλα τα μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε έγιναν με την προσέγγιση Cowling, χρατώντας δηλαδή το χώρο παγωμένο, ύσταν χρήσιμο να αναφέρουμε ποια *Thorns* έχουν γραφτεί για το CACTUS, που εξελίσσουν το χωρόχρονο.

Οι εξισώσεις πεδίου του Einstein λύνονται χρησιμοποιώντας τις εξής διαφορετικές προσεγγίσεις: (i) τον κλασικό ADM φορμαλισμό που διαπραγματεύτηκαμε στη παράγραφο **§1.2.1**, (ii) τον φορμαλισμό BM, ένα είδους υπερβολικού φορμαλισμού, (βλ. σελ. 5) και (iii) τον BSSN φορμαλισμό που διαπραγματεύτηκαμε στην παράγραφο **§1.2.2**. Η χρονική εξέλιξη τόσο του ADM όσο και του BSSN φορμαλισμού γίνεται με την εκλογή διαφόρων αριθμητικών σχημάτων. Πρόσφατα προστέθηκαν ένα leapfrog (non staggered in time) και ένα επαναληπτικό Crank-Nicholson σχήμα. Ο κώδικας σχεδιάστηκε να μεταχειρίζεται τυχαίες συνθήκες μετάθεσης και οι λοισθησης. Επιπλέον το γκρουπ AEI Numerical Relativity [52] ανέπτυξε ακριβείς συνθήκες βαθμίδας για χωροχρόνους με παρουσία Μελανής Οπής, καθώς και κατάλληλες συνοριακές συνθήκες για την λύση των εξισώσεων πεδίου.

Ο κώδικας όπως είπαμε και παραπάνω έχει ελεγχθεί σε πολλά αρχιτεκτονικά συστήματα υπολογιστών και έχει πετύχει σε πολλά τεστ σύγχλισης, με διαφορετικούς συνδυασμούς χωροχρόνου και υδροδυναμικών σχημάτων, πεπερασμένων διαφορών. Οι προσομοιώσεις που έγιναν στην εργασία των Font *et al*(2000) [30], περιέχουν, μεταξύ άλλων, την εξέλιξη καταστάσεων ισορροπίας συμπαγών αστέρων (λύσεις των TOV εξισώσεων) και την εξέλιξη των σχετικιστικών αστέρων (boosted TOV stars $v = 0.87c$), ένα τεστ για το οποίο υπάρχει αναλυτική λύση. Επιπλέον στην εργασία των Font *et al*(2002) [29], έδειξαν ότι το CACTUS πέρασε με επιτυχία μια σειρά από αυστηρά long-term αριθμητικών τεστ, όπως της εξέλιξης μη-περιστρεφόμενων αλλά και ταχέως περιστρεφόμενων, στάσιμων αστέρων και το σχηματισμό ορίζοντα γεγονότων στην κατάρρευση ενός σχετικιστικού αστέρα σε Μελανή Οπή. Η υψηλή ανάλυση που πετυχαίνουμε με την χρήση υδροδυναμικών σχημάτων, μας επιτρέπει την εξέταση των συχνοτήτων από ακτινικές, ημι-ακτινικές και τετραπολικές ταλαντώσεις σχετικιστικών αστέρων και χρησιμοποίησή τους ως αποτίμηση της ακρίβειας του κώδικα. Οι συχνότητες αυτές ελέγχουν με τις συχνότητες που προκύπτουν από άλλες μεθόδους όπως αυτή των διαταραχών καθώς και της αξονικά συμμετρικής μη-γραμμικής εξέλιξης, και βρέθηκαν να ικανοποιούνται όλες σε μεγάλο βαθμό.

Σχόλια

Σε όλες τις παραπάνω περιπτώσεις, το CACTUS (μαζί βέβαια με το υδροδυναμικό του κομμάτι) αναπαράγει τα αποτελέσματα με εκπληκτική ακρίβεια, και είναι ικανό να εξάγει βαρυτικά κύματα που πιθανόν να παράγονται από μη-ακτινικές αστρικές ταλαντώσεις. Για το λόγω αυτό η μελέτη που κάνουμε πάνω στις συχνότητες των *r-modes* χρησιμοποιώντας το CACTUS καθώς και το υδροδυναμικό κομμάτι thorn-Whisky, το οποίο θα αναφέρουμε αμέσως παρακάτω,

δεν μας αφήνει καμία αμφιβολία για την εγκυρότητα και ακρίβεια των αποτελεσμάτων που θα δείξουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Στο Παράτημα Γ'.2, έχουμε παραθέσει το αρχείο με τις διάφορες παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε για την εξαγωγή των μοντέλων ισορροπίας, καθώς και μια πλήρη ανάλυση των *Thorns* που χρησιμοποιήσαμε.

4.3 Ο κώδικας Whisky

Ο *Whisky* είναι ένας υδροδυναμικός κώδικας που λύνει τις γενικές σχετικιστικές υδροδυναμικές εξισώσεις σε 3-διάστατο αριθμητικό πλέγμα με Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ο κώδικας δημιουργήθηκε υπό την επίβλεψη ενός πρώην ερευνητικού προγράμματος, *EU Network on Sources of Gravitational Radiation*, αρχικοί συγγραφείς του κώδικα είναι οι Luca Baiotti, Ian Hawke και Pedro Montero, που βασίστηκαν σε μια προηγούμενη έκδοση υδροδυναμικού κώδικα το GR3D. Ο κώδικας δημιουργήθηκε ως *thorn* για να ενταχθεί στο πυρήνα του CACTUS Computational Toolkit (για περισσότερες πληροφορίες βλ. [16]), το οποίο δημιουργήθηκε στο Albert Einstein Institute (Golm) καθώς και στο Lousiana state University (Baton Rouge).

Ο κώδικας ενσωματώνει αριθμητικά σχήματα, τα οποία έχουν πιστοποιηθεί για την ακρίβεια τους από μια σειρά αμέτρητων εργασιών τα τελευταία χρόνια. Συγκεκριμένα ο *Whisky* περιλαμβάνει:

- (i) την Piecewise Parabolic Method (PPM) και την Essentially Non Oscillatory (ENO) μεθόδους για την διαδικασία της αναδόμησης (reconstruction),
- (ii) τον Harten-Lax-van Leer-Einfeldt (HLLE) approximate Riemann solver καθώς και την φόρμουλα ροής Marquina.
- (iii) Την αναλυτική έκφραση του αριστερού μέρους των ιδιοδιανυσμάτων καθώς και την συμπαγή φόρμουλα ροής για τον Riemann solver τύπου Roe.
- (iv) Την χρήση της μεθόδου των γραμμών, "Method of Lines (MoL)", για την υλοποίηση υψηλής τάξης χρόνου, εξέλιξης σχημάτων.
- (v) Την πιθανότητα σύζευξης των γενικών σχετικιστικών υδροδυναμικών εξισώσεων με αυτό της σύμφωνης αναλυμένης 3-μετρικής.

Από όλα τα παραπάνω εκτεταμένη αναφορά θα κάνουμε μόνο στα κομμάτια που χρησιμοποιήσαμε, δηλαδή στην PPM μέθοδο αναδόμησης (βλ. §4.3.4) και στην φόρμουλα του Marquina (βλ. §4.3.5) από τα HRSC (βλ. §4.3.3) που χρησιμοποιήσαμε. Τέλος εκτεταμένη αναφορά θα γίνει και στη μέθοδο των γραμμών (βλ. §4.3.6)

4.3.1 Εξέλιξη των Σχετικιστικών Υδροδυναμικών Εξισώσεων

Ενώ ο κώδικας CACTUS παρέχει την λύση για κάθε χρονικό βήμα των εξισώσεων του Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (4.12)$$

ο κώδικας Whisky παρέχει την χρονική εξέλιξη των υδροδυναμικών εξισώσεων, εκφρασμένων μέσα από τις διατηρητικές εξισώσεις του τανυστή ενέργειας - ορμής $T^{\mu\nu}$

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Ταυτότητες Bianchi}), \quad (4.13)$$

αλλά και της πυκνότητας ροής της ύλης J^μ

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \quad (\text{Εξίσωση Συνέχειας}), \quad (4.14)$$

όπου $J^\mu = \rho u^\mu$, ρ η πυκνότητα μάζας - ηρεμίας στο τοπικό σύστημα αναφοράς και u^μ η 4-ταχύτητα του ρευστού. ∇_μ η συναλλοίωτη παράγωγος της 4-μετρικής του χωροχρόνου. Στην συνέχεια ότια χρησιμοποιήσουμε φυσικές αδιάστατες μονάδες ($G = c = 1$). Οι Ελληνικοί δείκτες τρέχουν από 0 μέχρι 3 ενώ οι Λατινικοί από 1 εως 3. Επίσης αμελούμε την ύπαρξη μη-αδιαβατικών φαινομένων, π.χ. viscous φαινομένων, υποθέτοντας πως ο τανυστής ενέργειας - ορμής είναι αυτός ενός ιδανικού ρευστού

$$T^{\mu\nu} = \rho h u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (4.15)$$

όπου P είναι η πίεση του ρευστού και $g^{\mu\nu}$ η 4-μετρική του χωροχρόνου. Επιπλέον, η σχετικιστική ειδική ενθαλπία ορίζεται από την

$$h = 1 + \varepsilon + \frac{P}{\rho} \quad (4.16)$$

με ε την εσωτερική ειδική πυκνότητα ενέργειας του ρευστού στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς.

Οι εξισώσεις (4.13), (4.14), γραμμένες στην διατηρητική τους μορφή δεν είναι κατάλληλες για την χρήση προχωρημένων αριθμητικών σχημάτων. Για να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα υδροδυναμικά αριθμητικά σχήματα εξέλιξης, και συγχεκριμένα για να χρησιμοποιήσουμε τις προχωρημένες HRSC μεθόδους, ότια πρέπει τις παραπάνω υδροδυναμικές εξισώσεις μετά την $3+1$ φολιδοποίηση να τις γράψουμε με την μορφή υπερβολικού συστήματος πρώτης τάξεως εξισώσεις. Εισάγοντας ένα explicit σύστημα συντεταγμένων ($x^0 = t, x^i$), όπου το βαθμωτό x^0 εκπροσωπεί την φολιδοποίηση του χώρου σε διαφορετικές υπερ-επιφάνειες συντεταγμένων (x^i), όπως ακριβώς αναφέραμε και στην παράγραφο 1.2.2, οι εξισώσεις (4.13), (4.14), μετά την προβολή τους στη βάση $\{n^\mu, (\partial_{x^i})^\mu\}$, όπου n^μ χρονοειδές διάνυσμα κανονικό σε μια δοσμένη υπερ-επιφάνεια, παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} T^{\mu\nu} &= -\sqrt{-g} \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda}, \\ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g} J^\mu &= 0, \end{aligned} \quad (4.17)$$

όπου $\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma}$ είναι στοιχείο όγκου της 4-μετρικής με $g = \det(g_{\mu\nu})$ και $\gamma \equiv \det(\gamma_{ij})$, όπου γ_{ij} η 3-μετρική του χώρου. Το $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$ αποτελεί το 4-σύμβολο Christoffel και ορίζεται από την σχέση

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_{\mu}g_{\nu\beta} + \partial_{\nu}g_{\mu\beta} - \partial_{\beta}g_{\mu\nu}), \quad (4.18)$$

με το ∂_{μ} να δηλώνει παραγώγιση προς την αντίστοιχη συντεταγμένη.

Το μόνο που μένει να κάνουμε είναι να απεικονίσουμε τις αρχικές (*primitive*), $\mathbf{w} \equiv (\rho, v_i, \epsilon)$ υδροδυναμικές μεταβλητές $\dagger\dagger$, στις διατηρητικές (*conserved*) υδροδυναμικές μεταβλητές $\mathbf{q} \equiv (D, S_i, \tau)$, μέσο των σχέσεων:

$$\mathbf{U}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} D \\ S_j \\ \tau \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma}W\rho \\ \sqrt{\gamma}\rho hW^2v_j \\ \sqrt{\gamma}(\rho hW^2 - P - W\rho) \end{bmatrix}, \quad (4.19)$$

Ας τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι οι χωρικές συνιστώσες της 3-ταχύτητας σχετίζονται με τις αντίστοιχες της 4-ταχύτητας μέσο της σχέσης

$$u^i = W(v^i - \beta/\alpha), \quad (4.20)$$

όπου α, β^i , η χρονική συνάρτηση άλματος (lapse function) και το διάνυσμα χωρικής μετατόπισης συντεταγμένων (shift vector) αντίστοιχα. Οι εξισώσεις (4.17) μπορούν πλέον να γραφούν με την επιθυμητή μορφή (*conservation form*):

$$\partial_t \mathbf{U}(\mathbf{w}) + \partial_i \mathbf{F}^i(\mathbf{w}) = \mathbf{S}(\mathbf{w}), \quad (4.21)$$

όπου $\mathbf{U}(\mathbf{w})$ το διάνυσμα κατάστασης (*state vector*), $\mathbf{F}^i(\mathbf{w})$ το διάνυσμα ροών (*flux vector*)

$$\mathbf{F}^i(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} \alpha \left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) D \\ \alpha \left(\left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) S_j + \sqrt{\gamma} P \delta_j^i \right) \\ \alpha \left(\left(v^i - \frac{\beta^i}{\alpha} \right) \tau + \sqrt{\gamma} v^i P \right) \end{bmatrix}, \quad (4.22)$$

και τέλος $\mathbf{S}(\mathbf{w})$ το διάνυσμα των πηγών (*source vector*)

$$\mathbf{S}(\mathbf{w}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha\sqrt{\gamma} T^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} \Gamma_{\mu j}^{\sigma} \\ \alpha\sqrt{\gamma} (T^{\mu 0} \partial_{\mu} \alpha - \alpha T^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^0) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$

$\dagger\dagger(\rho, P)$ μετρημένες στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς του ρευστού, την 3-ταχύτητα ($v^i = \frac{u^i}{\alpha u^0} + \frac{\beta^i}{\alpha}$), μετρημένη στο ZAMO (βλ. σελ. 10), την πυκνότητα ενέργειας ϵ και τέλος τον σχετικιστικό παράγοντα Lorentz $W \equiv \alpha u^0 \equiv (1 - \gamma_{ij} v^i v^j)^{-1/2}$.

Για να κλείσουμε το σύστημα των εξισώσεων, (παρατηρείστε ότι έχουμε επτά μεταβλητές, πέντε από τις οποίες είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, $(\rho, u^i, \epsilon, P, W)$ σε ένα σύστημα 5 εξισώσεων (4.21)), χρειαζόμαστε μια καταστατική εξίσωση που να συνδέει την πίεση P με την πυκνότητα μάζας - ηρεμίας ρ καθώς και την πυκνότητα ενέργειας ϵ . Το Whisky έχει γραφτεί για να δέχεται οποιαδήποτε καταστατική. Για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας, μιας και οι ανάγκες μας περιορίζονται σε πολυτροπικά μοντέλα, χρησιμοποιήσαμε την αδιαβατική πολυτροπική καταστατική που δίνεται από την σχέση:

$$P = K\rho^\Gamma$$

όπου Γ ο αδιαβατικός εκθέτης (ή πολυτροπικός εκθέτης) και K η πολυτροπική σταθερά, την οποία δεν πρέπει να την συγχέουμε με το ίχνος της εξωτερικής καμπυλότητας (βλ. σελ. 4). Σε πολλές περιπτώσεις αντί του αδιαβατικού δείκτη Γ , χρησιμοποιούμε τον πολυτροπικό δείκτη N , ο οποίος συνδέεται με το Γ μέσο της σχέσης $\Gamma = 1 + 1/N$. Η εσωτερική ενέργεια συνδέεται με την ειδική εσωτερική πυκνότητα ενέργειας μέσω της σχέσης

$$\varepsilon = \frac{\epsilon}{\rho} - 1 \quad (4.24)$$

Παρατηρήσεις - Συμπεράσματα

Ο παραπάνω φορμαλισμός είχε σκοπό να αποκτήσει ως βασικό του πλεονέκτημα τον υπερβολικό και διατηρητικό χαρακτήρα των εξισώσεων. Από την υπολογιστική σκοπιά, η υπερβολική και διατηρητική φύση των σχετικιστικών εξισώσεων Euler, επιτρέπει την χρήση σχημάτων βασισμένα στα χαρακτηριστικά πεδία, χαρακτηριστικές ιδιοτιμές και χαρακτηριστικά ιδιοδιανύσματα (βλ. §4.3.2) του ίδιου του συστήματος, φέροντας έτσι στις σχετικιστικές υδροδυναμικές εξισώσεις τα εργαλεία της κλασικής ρευστοδυναμικής.

Οι ιδιοτιμές (χαρακτηριστικές ταχύτητες) των αντίστοιχων Ιακωβιανών πινάκων είναι πραγματικές, όχι όμως και διακριτές, και ένα πλήρες σετ δεξιών-ιδιοδιανυσμάτων υπάρχει. Το σύστημα λοιπόν των εξισώσεων (4.21), ικανοποιεί την υπερβολική μορφή αυτών. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να παρατηρούμε ότι το δεξί μέρος της (4.21) εξαρτάται μόνο από την μετρική, τις πρώτες παραγώγους της, καθώς και από τον τανυστή ενέργειας - ορμής. Επιπλέον, ενώ το σύστημα των εξισώσεων της δεν είναι αυστηρά υπερβολικό, ισχυρή υπερβολικότητα λαμβάνουμε μόνο στην περίπτωση $\mathbf{S}(\mathbf{w}) = 0$, δηλαδή μόνο σε έναν επίπεδο χωρόχρονο.

Η γνώση της φασματικής (spectral) πληροφορίας είναι θεμελιώδους σημασίας στην κατασκευή HRSC σχημάτων, βασισμένων σε Riemann solvers. Τα σχήματα αυτά είναι εξαιρετικής σημασίας για την σωστή αναπάρασταση των χρουστικών κυμάτων, των οποίων η παρουσία είναι προσδωκόμενη σε πολλά αστροφυσικά σενάρια. Δυο σημαντικά αποτελέσματα επιβεβαιώνουν την παραπάνω άποψη. Το πρώτο ανήκει στους Lax και Wendroff, οι οποίοι ισχυρίζονται ότι ένα σταθερό σχήμα συγκλίνει σε μια λύση των υδροδυναμικών εξισώσεων. Το δεύτερο ανήκει στους Hou και LeFloch, οι οποίοι ισχυρίζονται, ότι γενικά, ένα μη-διατηρητικό σχήμα θα συγκλίνει στην λάθος λύση όταν ένα χρουστικό κύμα εμφανίζεται, υπογραμμίζοντας με αυτόν τον τρόπο την χρησιμότητα των διατηρητικών φορμαλισμών των ροών (flux conservative

formulations), που αναπτύξαμε σε αυτήν την ενότητα. Για τους παραπάνω λόγους η αναφορά των HRSC σχημάτων γίνεται σε ξεχωριστή ενότητα (βλ. §4.3.3).

4.3.2 Χαρακτηριστικά Ιδιοδιανύσματα και Ιδιοτιμές

Η χρήση των HRSC σχημάτων εξαρτάται σημαντικά από την γνώση της φασματικής ανάλυσης (spectral decomposition) του Ιακωβιανού πίνακα του συστήματος

$$\frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{U}(\mathbf{w})}. \quad (4.25)$$

Οι χαρακτηριστικές ταχύτητες (ιδιοτιμές) και πεδία (ιδιοδιανύσματα) είναι το στοιχείο κλειδί σε κάθε HRSC σχήμα. Η φασματική ανάλυση των Ιακωβιανών πινάκων των γενικών σχετικιστικών υδροδυναμικών εξισώσεων με χρήση πολυτροπικής καταστατικής εξίσωσης έγινε για πρώτη φορά στην εργασία των Eulderink, Mellema[28], ενώ για γενική καταστατική αλλά διαγώνια χωρική μετρική στην εργασία των Banyauls F. et al.[11] Στην ενότητα αυτή θα προχωρήσουμε στην πλήρη φασματική ανάλυση, ορισμένη για κάθε γενική χωρική μετρική. Εστιάζουμε την προσοχή μας μόνο στην διεύθυνση x , παρουσιάζοντας έτσι μόνο την φασματική ανάλυση του Ιακωβιανού πίνακα (4.25) ως προς την διεύθυνση $i = x$. Οι άλλες δύο διεύθυνσεις μπορούν να βγούν πολύ εύκολα με εναλλαγή των δεικτών. Οι τρεις 5×5 Ιακωβιανοί πίνακες \mathcal{B}^i του συστήματος (4.25) είναι

$$\mathcal{B}^i = \alpha \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{U}(\mathbf{w})}. \quad (4.26)$$

Χρειαζόμαστε λοιπόν ενα ολοκληρωμένο σετ δεξιών $[\mathbf{R}_i]$ και αριστερών $[\mathbf{L}_i]$ ιδιοδιανύσμάτων και τις αντίστοιχες ιδιοτιμές λ_i , κατα μήκος της x διεύθυνσης, δηλαδή

$$\left[\frac{\partial \mathbf{F}^x(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{U}(\mathbf{w})} \right] [\mathbf{R}_i] = \lambda_i [\mathbf{R}_i], \quad \text{με } i = 1, \dots, 5. \quad (4.27)$$

Ανάλογη εξίσωση ικανοποιούν και τα αριστερά ιδιοδιανύσματα $[\mathbf{L}_i]$. Η λύση του παραπάνω συστήματος περιέχει μια τριπλά εκφυλισμένη ιδιοτιμή, οι ιδιοτιμές λοιπόν του \mathcal{B}^x είναι

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \alpha v^x - \beta^x. \quad (4.28)$$

που ορίζουν τα κύματα ύλης (*material waves*) και άλλες δύο διαχριτές ιδιοτιμές λ_{\pm} , που σχετίζονται με τα ακουστικά κύματα (*acoustic waves*)

$$\lambda_{\pm} = \frac{\alpha}{1 - v^2 c_s^2} \left\{ v^x (1 - c_s^2) \pm c_s \sqrt{(1 - v^2)[\gamma^{xx}(1 - v^2 c_s^2) - v^x v^x (1 - c_s^2)]} \right\} - \beta^x, \quad (4.29)$$

όπου c_s είναι η τοπική ταχύτητα του ήχου ορισμένη ως

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial P}{\partial E} \right|_{\mathcal{S}} = \frac{\chi}{h} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\kappa}{h}, \quad (4.30)$$

όπου $\chi = \partial P / \partial \rho|_{\varepsilon}$, $\kappa = \partial P / \partial \varepsilon|_{\rho}$, \mathcal{S} η εντροπία ανα σωματίδιο και $E = \rho(1 + \varepsilon)$ η ολική πυκνότητα ενέργεια ηρεμίας. Στις παραπάνω ιδιοτιμές αντιστοιχεί ένα ολοκληρωμένο σύνολο δεξιών και αριστερών ιδιοδιανυσμάτων. Τα δεξιά-ιδιοδιανύσματα $[\mathbf{R}_i]$ δίνονται από

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\mathcal{K}}{hW} \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ 1 - \frac{\mathcal{K}}{hW} \end{bmatrix}, \quad (4.31)$$

$$\mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} Wv_y \\ h(\gamma_{xy} + 2W^2v_xv_y) \\ h(\gamma_{yy} + 2W^2v_yv_y) \\ h(\gamma_{zy} + 2W^2v_zv_y) \\ Wv_y(2hW - 1) \end{bmatrix}, \quad (4.32)$$

$$\mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} Wv_z \\ h(\gamma_{xz} + 2W^2v_xv_z) \\ h(\gamma_{yz} + 2W^2v_yv_z) \\ h(\gamma_{zz} + 2W^2v_zv_z) \\ Wv_z(2hW - 1) \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

για τις εκφυλισμένες ιδιοτιμές, ενώ για τις λ_{\pm} διαχριτές ιδιοτιμές τα δεξιά-ιδιοδιανύσματα είναι

$$\mathbf{R}_{\pm} = \begin{bmatrix} 1 \\ hW\mathcal{C}^x_{\pm} \\ hWv_y \\ hWv_z \\ hW\tilde{\mathcal{A}}^x_{\pm} - 1 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

Ενώ τα αριστερά-ιδιοδιανύσματα $[\mathbf{L}_i]$ δίνονται από

$$\mathbf{L}_1 = \frac{W}{\mathcal{K} - 1} \begin{bmatrix} h - W \\ Wv^x \\ Wv^y \\ Wv^z \\ -W \end{bmatrix}, \quad (4.35)$$

$$\mathbf{L}_2 = \frac{1}{h\xi} \begin{bmatrix} -\gamma_{zz}v_y + \gamma_{yz}v_z \\ v^x(\gamma_{zz}v_y - \gamma_{yz}v_z) \\ \gamma_{zz}(1 - v_xv^x) + \gamma_{xz}v_zv^x \\ -\gamma_{yz}(1 - v_xv^x) + \gamma_{xz}v_yv^x \\ -\gamma_{zz}v_y + \gamma_{yz}v_z \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{L}_3 = \frac{1}{h\xi} \begin{bmatrix} -\gamma_{yy}v_z + \gamma_{zy}v_y \\ v^x(\gamma_{yy}v_z - \gamma_{zy}v_y) \\ -\gamma_{zy}(1 - v_xv^x) - \gamma_{xy}v_zv^x \\ \gamma_{yy}(1 - v_xv^x) + \gamma_{xy}v_yv^x \\ -\gamma_{yy}v_z + \gamma_{zy}v_y \end{bmatrix}, \quad (4.37)$$

$$\mathbf{L}_{\mp} = \pm \frac{h^2}{\Delta} \begin{bmatrix} hW\mathcal{V}_{\pm}^x\xi + \frac{\Delta}{h^2}l_{\mp} \\ \Gamma_{xx}(1 - \mathcal{K}\tilde{\mathcal{A}}_{\pm}^x) + (2\mathcal{K} - 1)\mathcal{V}_{\pm}^x(W^2v^x\xi - \Gamma_{xx}v^x) \\ \Gamma_{xy}(1 - \mathcal{K}\tilde{\mathcal{A}}_{\pm}^x) + (2\mathcal{K} - 1)\mathcal{V}_{\pm}^x(W^2v^y\xi - \Gamma_{xy}v^x) \\ \Gamma_{xz}(1 - \mathcal{K}\tilde{\mathcal{A}}_{\pm}^x) + (2\mathcal{K} - 1)\mathcal{V}_{\pm}^x(W^2v^z\xi - \Gamma_{xz}v^x) \\ (1 - \mathcal{K})[-\gamma v^x + \mathcal{V}_{\pm}^x(W^2\xi - \Gamma_{xx})] - \mathcal{K}W^2\mathcal{V}_{\pm}^x\xi \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

όπου οι επόμενες σχέσεις έχουν χρησιμοποιηθεί

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\pm}^x &\equiv \frac{v^x - \Lambda_{\pm}^x}{\gamma^{xx} - v^x\Lambda_{\pm}^x}, & \tilde{\mathcal{A}}_{\pm}^x &\equiv \frac{\gamma^{xx} - v^xv^x}{\gamma^{xx} - v^x\Lambda_{\pm}^x}, \\ \Delta &\equiv h^3W(\mathcal{K} - 1)(\mathcal{C}_{+}^x - \mathcal{C}_{-}^x)\xi, & \xi &\equiv \Gamma_{xx} - \gamma v^xv^x, \\ \gamma &\equiv \det(\gamma_{ij}) = \gamma_{xx}\Gamma_{xx} + \gamma_{xy}\Gamma_{xy} + \gamma_{xz}\Gamma_{xz}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{xx} &= \gamma_{yy}\gamma_{zz} - \gamma_{yz}^2, & \Gamma_{xy} &= \gamma_{yz}\gamma_{xz} - \gamma_{xy}\gamma_{zz}, & \Gamma_{xz} &= \gamma_{xy}\gamma_{yz} - \gamma_{xz}\gamma_{yy}, \\ \Gamma_{xx}v_x + \Gamma_{xy}v_y + \Gamma_{xz}v_z &= \gamma v^x, & \Lambda_{\pm}^i &= \frac{\lambda_{\pm} + \beta^i}{\alpha} \\ \mathcal{K} &\equiv \frac{\kappa}{\kappa - \rho c_s^2}, & \mathcal{C}_{\pm}^x &\equiv v_x - \mathcal{V}_{\pm}^x \end{aligned}$$

Ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται για την πλήρη εξαγωγή των παραπάνω εξισώσεων μπορεί να απευθεινθεί στις εργασίες [11, 28]. Μια πολύ καλή εισαγωγή στο παραπάνω φορμαλισμό γίνεται και στο *Living Reviews* άρθρο του Jose A. Font, [31].

4.3.3 Τα Αριθμητικά Σχήματα HRSC

Στην ενότητα αυτή ωα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τα αριθμητικά σχήματα που βασίζονται στις πεπερασμένες διαφορές, ειδικών για την λύση μη-γραμμικών υπερβολικών συστημάτων από εξισώσεις με παρουσία νόμων διατήρησης. Όπως περιγράψαμε στις παραπάνω ενότητες, οι σχετικιστικές εξισώσεις της υδροδυναμικής άνήκουν σε αυτήν την κατηγορία, ανεξαρτήτως του φορμαλισμού τους. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα σχήματα βασισμένα σε *artificial viscosity*, και τα *High Resolution Shock Capturing* σχήματα. Μεγάλη έμφαση ωα δώσουμε στα τελευταία καθώς βασίζονται σε ακριβή ή κατά προσέγγιση λύσεις του τοπικού προβλήματος Riemann, χρησιμοποιώντας την χαρακτηριστική δομή των εξισώσεων. Η εισαγωγή μας σε αυτά τα σχήματα, αν και ωα είναι όσο το δυνατόν πλήρης τουλάχιστον στα κομμάτια που χρησιμοποιήσαμε στο κώδικα *Whisky*, δεν φτάνει την απαιτούμενη προσοχή, που δικαιωματικά τους ανήκει, βάση της σπουδαιότητάς τους. Για το λόγο αυτό ο ενδιαφερόμενος μπορεί να κοιτάξει το άρθρο *Living Reviews* των Marti και Müller [51] καθώς και το βιβλίο του Toro [75] για μια εκτενή αναφορά.

Κάθε σύστημα εξισώσεων που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες ενότητες, μπορεί να λυθεί αριθμητικά αντικαθιστώντας τις μερικές παραγώγους από πεπερασμένες διαφορές σε ένα διακριτό αριθμητικό πλέγμα, και στη συνέχεια να προχωρήσουμε το χρόνο μέσο ενός αλγορίθμου. Έτσι το διάνυσμα κατάστασης $\mathbf{U}(\mathbf{w})$ στην αρχική υπερ-επιφάνεια, μαζί με μια καταστατική αλλά και τις σχέσεις που δίνουν τις αρχικές μεταβλητές \mathbf{w} , μας οδηγεί στον υπολογισμό των διανυσμάτων ροής και των όρων των πηγών. Μέσο αυτής της διαδικασίας η πρώτη χρονική παράγωγος των δεδομένων υπολογίζεται οδηγώντας την λύση σε διάδοση forward ως προς το χρόνο, με χρονικό βήμα που καθορίζεται από την συνθήκη των Courant-Friedrichs-Lowy (CFL).

Οι υδροδυναμικές εξισώσεις αποτελούν, όπως προλογίσαμε, ένα μη-γραμμικό υπερβολικό σύστημα με αποτέλεσμα ομαλά (*smooth*) αρχικά δεδομένα να μετατρέπονται σε ασυνεχή, σε πεπερασμένο χρόνο κατα την διάρκεια της εξέλιξης. Τα 1^η τάξεως σε ακρίβεια σχήματα γίνονται *dissipative* κοντά στις ασυνέχειες, ενώ τα 2nd τάξεως, ή ανώτερα, παράγουν σπειροειδής ταλαντώσεις κοντά στην ασυνέχεια, γνωστά και ως φαινόμενα Gibbs. Για να αποφύγουμε τα παραπάνω φαινόμενα, τα πεπερασμένα αυτά σχήματα έχουν τροποποιηθεί κατά καιρούς με διαφόρους τρόπους, οδηγώντας σε πολύ καλή αναπαράσταση των ασυνεχών λύσεων. Ένα από αυτά είναι και τα HRSC.

Ας θεωρήσουμε το ειδικό σύστημα των υδροδυναμικών εξισώσεων όπως αυτό περιγράφεται από την εξίσωση (4.21), και ας θεωρήσουμε ένα υπολογιστικό κελί του διακριτού χωροχρόνου. Επίσης ας θέσουμε Σ την περιοχή (απλά συνεκτική) ενός δοσμένου 4-διάστατου τοπολογικού χώρου Ξ , κλειστή από την επιφάνεια $\partial\Sigma$. Θεωρούμε λοιπόν την 3-επιφάνεια $\partial\Sigma$ ως το προσανατολισμένο υπερ-παραλληλεπίπεδο δημιουργημένο από δύο υπερ-επιφάνειες, μια χρονικής $\{\sum_{x^0}, \sum_{x^0+\Delta x^0}\}$, και μια χωρικής $\{\sum_{x^i}, \sum_{x^i+\Delta x^i}\}$ που ενώνει τα δύο παραλληλεπίπεδα κομμάτια μαζί. Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (4.21) πάνω στο χώρο Σ , η μεταβολή του $\mathbf{U}(\mathbf{w})$ ως προς το χρόνο, στο Σ δίνεται - κρατώντας μακριά τους όρους της πηγής - από τις ροές $\mathbf{F}^i(\mathbf{w})$ μέσο του συνόρου $\partial\Sigma$. Η ολοκληρωτική μορφή του συστήματος (4.21) γράφεται

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{U}(\mathbf{w})}{\partial x^0} d\Sigma + \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{F}^i(\mathbf{w})}{\partial x^i} d\Sigma = \int_{\Sigma} \mathbf{S} d\Sigma, \quad (4.39)$$

η οποία μπορεί να γραφεί με την παρακάτω διατηρήσιμη και καλά ορισμένη μορφή, χρήσιμη για υπολογιστικές εφαρμογές:

$$\begin{aligned} (\overline{\mathbf{U}} \Delta V)_{x^0+\Delta x^0} - (\overline{\mathbf{U}} \Delta V)_{x^0} &= - \int_{\sum_{x^1+\Delta x^1}} \mathbf{F}^1 dx^0 dx^2 dx^3 + \int_{\sum_{x^1}} \mathbf{F}^1 dx^0 dx^2 dx^3 \\ &\quad - \int_{\sum_{x^2+\Delta x^2}} \mathbf{F}^2 dx^0 dx^1 dx^3 + \int_{\sum_{x^2}} \mathbf{F}^2 dx^0 dx^1 dx^3 \\ &\quad - \int_{\sum_{x^3+\Delta x^3}} \mathbf{F}^3 dx^0 dx^1 dx^2 + \int_{\sum_{x^3}} \mathbf{F}^3 dx^0 dx^1 dx^2 \\ &\quad + \int_{\Sigma} \mathbf{S} d\Sigma, \end{aligned} \quad (4.40)$$

όπου με $\overline{\mathbf{U}}, \mathbf{F}$ εννοούμε το $\overline{\mathbf{U}}(\mathbf{w})$ και $\mathbf{F}(\mathbf{w})$ αντίστοιχα, ενώ

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{U}} &= \frac{1}{\Delta V} \int_{\Delta V} \mathbf{U} dx^1 dx^2 dx^3, \\ \Delta V &= \int_{x^1}^{x^1+\Delta x^1} \int_{x^2}^{x^2+\Delta x^2} \int_{x^3}^{x^3+\Delta x^3} dx^1 dx^2 dx^3. \end{aligned}$$

Ένα αριθμητικό σχήμα γραμμένο με την παραπάνω διατηρήσιμη μορφή εγγυάται πως, χωρίς την παρουσία πηγών, οι διατηρητικές ποσότητες διατηρούνται και αριθμητικά από τις εξισώσεις των πεπερασμένων διαφορών.

Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων της (4.40), οι οποίες είναι μια από τις πιο διακριτικές μορφές των *upwind* HRSC σχημάτων, γίνεται αφού πρώτα κάποιος ορίσει τις λεγόμενες "αριθμητικές ροές", οι οποίες χαρακτηρίζονται από την σχέση

$$\hat{\mathbf{F}}_{j+\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \mathbf{F}(\mathbf{U}(x^{j+1/2}, x^0)). \quad (4.41)$$

Οι αριθμητικές ροές υπολογίζονται από έναν προσεγγιστικό ή ακριβή Riemann solver. Υψηλή ανάλυση πετυχαίνουμε χρησιμοποιώντας μονοτονικά πολυώνυμα, ώστε να κάνουμε παρεμβολή (interpolation), της προσεγγιστικής λύσης στο αριθμητικό κελί. Η ακριβής λύση όμως των προβλημάτων του Riemann, κοστίζουν σε υπολογιστικό χρόνο, και ειδικά αν γίνονται σε πολυ-διάστατο χώρο, το κόστος είναι αρκετά μεγαλύτερο. Για το λόγω αυτό προσεγγιστικοί Riemann solvers έχουν προταθεί και χρησιμοποιηθεί κατά κόρον.

Εφαρμογή των HRSC στο Whisky

Η χρονική ενημέρωση (time update), τόσο των σχετικιστικών υδροδυναμικών εξισώσεων, όσο και των εξισώσεων πεδίου του Einstein, γίνεται με την μέθοδο των γραμμών, *Method of Lines* (MoL) [48] (βλ. §4.3.6). Η μέθοδος αυτή είναι ένας τρόπος μετασχηματισμού των μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ), όπως η (4.21), σε συνήθης διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ). Για να γίνει αυτό μέσα στο *Whisky*, χρειάζονται τα ακόλουθα βήματα.

- Χωρισμός του χώρου σε υπολογιστικά κελιά. Τα κελιά μπορεί να είναι 1-διάστατα, 2-διάστατα ή 3-διάστατα, αναλόγως με το πλέγμα που θα χρησιμοποιήσουμε, π.χ. στην περίπτωση ενός 3-διάστατου πλέγματος το κελί είναι ένας κύβος με διαστάσεις dx, dy, dz . Θα υποθέσουμε μια Καρτεσιανή διαμέληση του χώρου, υποχρεωτική για το *Whisky*, όχι όμως και για την μέθοδο MoL.
- Για ένα συγκεκριμένο κελί με Καρτεσιανές συντεταγμένες (x_i, y_j, z_k) , ολοκληρώνουμε την (4.21) ώστε να πάρουμε την ΣΔΕ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{w}} = & \iiint \mathbf{S} d^3x + \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{F}^1(\mathbf{w}(x_{i-1/2}, y, z)) dy dz \\ & - \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} \mathbf{F}^1(\mathbf{w}(x_{i+1/2}, y, z)) dy dz + \dots \end{aligned}$$

όπου τα όρια του Καρτεσιανού κελιού δίνονται από $x_{i\pm 1/2}$ και ούτε καθεξής.

- Διαιρώντας με τον όγκο του κελιού παίρνουμε μια ΣΔΕ του $\bar{\mathbf{w}}$, δηλαδή την κατά μέσο όρο ολοκλήρωση του \mathbf{w} πάνω στο κελί, με όρους των συναρτήσεων ροής και των όρων των πηγών ως συναρτήσεις των χωρικών διαφορών του $\bar{\mathbf{w}}$. Σημειώνουμε ότι, αντιθέτως με την χωρική διαφορά του \mathbf{w} , η χωρική διαφορά του $\bar{\mathbf{w}}$ είναι καλά ορισμένη στο κελί που εμφανίζεται η ασυνέχεια.

Η ΣΔΕ μπορεί να λυθεί με την βοήθεια του *Cactus Thorn* MoL. Το μόνο που μένει να κάνει το *Whisky* είναι να επιστρέψει τις τιμές του διακριτού χωρικού διαφορικού τελεστή

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{w}}) = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{w}} \quad \text{όπου} \quad \tilde{\mathbf{w}} \equiv \int \mathbf{w} dx dy dz, \quad (4.42)$$

δοσμένου των δεδομένων \mathbf{w} , και να εφοδιάσει τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, ώστε να υπολογίσει το δεξιό μέρος της εξισώσης, στο επόμενο χρονικό βήμα. Αξίζει να τονίσουμε ότι στην εφαρμογή της MoL η λύση της ΣΔΕ (4.42), θα είναι ακριβής μέχρι N -τάξεως, δοσμένου ότι ο χρονικός ολοκληρωτής (time integrator), του MoL θα είναι N -τάξεως ακριβής ως προς το χρόνο και παράλληλα ο διακριτός χωρικός τελεστής \mathbf{L} θα είναι N -τάξεως ακριβής ως προς το χώρο και 1^η τάξεως ως προς το χρόνο.

Με την μέθοδο αυτή του *Whisky* ο τελεστής \mathbf{L} θα απλοποιηθεί προσεγγίζοντας τα ολοκληρώματα με τον κανόνα του μέσου σημείου (*midpoint rule*), για να πάρουμε

$$\mathbf{L}(\tilde{\mathbf{w}}) = \mathbf{S}_{i,j,k} + \mathbf{F}_{i-1/2,j,k}^1 - \mathbf{F}_{i+1/2,j,k}^1 + \dots \quad (4.43)$$

Δοσμένης αυτής της απλοποίησης, ο τελεστής διαχωρίζεται στα επόμενα σημεία:

1. Υπολογισμός των όρων των πηγών $\mathbf{S}(\mathbf{w}(x_i, y_j, z_k))$ σε όλα τα σημεία του πλέγματος.
2. Σε κάθε συντεταγμένη διεύθυνση x^a , υπολόγιση την *intercell flux* $\mathbf{F}^a(\mathbf{w}_{i+1/2,j,k})$:

Από τα αρχικά δεδομένα $\bar{\mathbf{w}}$ του χρονικού σημείου t^n μπορούμε να αναδομήσουμε τα αρχικά δεδομένα στα σύνορα του κελιού, $(\mathbf{w}_{i+1/2,j,k})$ για κάθε απαιτούμενης τάξεως ακρίβειας του χώρου, εκτός της γειτονιάς της ασυνέχειας. Ωστόσο η παραπάνω μεταχείριση οδηγεί σε μηδενικής τάξεως ακρίβεια ως προς το χρόνο. Για να εισάγουμε πρώτης τάξεως ακρίβεια ως προς το χρόνο, θα πρέπει να βρούμε το $(\mathbf{w}_{i+1/2,j,k})(t)$, διατηρώντας ταυτόχρονα την υψηλή ακρίβεια στο χώρο. Η προσπάθεια αυτή απαιτεί δυο βήματα:

- (α') Αναδόμηση της πληροφορίας \mathbf{w} πάνω στα κελιά παρακείμενα των απαιτούμενων συνοριακών συνθηκών του κελιού. Η αναδόμηση αυτή (reconstruction) θα πρέπει να διατηρεί την υψηλή της ακρίβεια στο χώρο. Η διαδικασία αυτή θα δώσει δυο τιμές των $(\mathbf{w}_{i+1/2,j,k})$, τις οποίες θα ονομάσουμε \mathbf{w}_L και \mathbf{w}_R , όπου το \mathbf{w}_L προέρχεται από το αριστερό κελί i ενώ το \mathbf{w}_R προέρχεται από το δεξί κελί $i+1$. Περισσότερα για την μέθοδο της αναδόμησης αναφέρουμε στην παράγραφο §4.3.4.
- (β') Λύση του προβλήματος Riemann στο σύνορο του κάθε υπολογιστικού κελιού, έχοντας ως αρχικές τιμές τα $\mathbf{w}_{L,R}$. Αυτό είναι και το αρχικό πρόβλημα τιμών της ΜΔΕ (4.21). Από την στιγμή που το πραγματικό διάνυσμα \mathbf{w} δεν είναι *piecewise constant*, δεν θα πάρουμε την ακριβή λύση του γενικού προβλήματος ακόμα και αν λύσουμε το ακριβές τοπικό πρόβλημα του Riemann. Ωστόσο το γεγονός ότι η ακρίβεια που πάρνουμε με την παραπάνω μέθοδο, είναι υψηλή, μας αφήνει ικανοποιημένους. Περισσότερα για την μέθοδο υπολογισμού των ροών αναφέρουμε στην παράγραφο §4.3.5.
- 3. Υπολογισμός σε κάθε κατεύθυνση (x, y, z) , της *intercell flux* $\mathbf{F}^{(x)}(\mathbf{w}_{i+1/2,j,k})$, $\mathbf{F}^{(y)}(\mathbf{w}_{i,j+1/2,k})$, $\mathbf{F}^{(z)}(\mathbf{w}_{i,j,k+1/2})$, οι οποίες αποτελούν τις ροές, κατά μήκος των συνόρων των υπολογιστικών κελιών i και $i+1$.
- 4. Επαναφορά των αρχικών μεταβλητών και υπολογισμός του Τανυστή ενέργειας ορμής, και εισαγωγή του στις εξισώσεις του Einstein.

Από τα παραπάνω καταλαβαίνουμε ότι το δύσκολο μέρος του *Whisky* εκφράζεται από δυο ρουτίνες. Μια για την αναδόμηση του \mathbf{w} στα σύνορα του υπολογιστικού κελιού με χρήση των μέσων όρων $\bar{\mathbf{w}}$ και μια δεύτερη για τον υπολογισμό των *intercell* ροών \mathbf{F} στο σύνορο του υπολογιστικού κελιού.

4.3.4 Η Μέθοδος Αναδόμησης PPM

Στα τέλη του 1950 ο Godunov απέδειξε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 1 (Godunov) *Κάθε γραμμική μέθοδος αναδόμησης, ακριβειας μεγαλύτερης της πρώτης τάξεως, μπορεί να εισάγει σπειροειδής ταλαντώσεις, γνωστές και ως φαινόμενα Gibbs.*

Ο όρος **γραμμική** σημαίνει ότι η μέθοδος αναδόμησης είναι ανεξάρτητη των δεδομένων που αναδομήθηκαν. Οι απλές κεντρικές διαφορές είναι γραμμικά σχήματα 2^{nd} τάξεως και προκαλούν φαινόμενα Gibbs κοντά στην ασυνέχεια (χρουστικό κύμα). Αντ' αυτού, θα πρέπει να βρούμε την κατάλληλη μέθοδο αναδόμησης, η οποία εξαρτάται από τα δεδομένα \mathbf{w} που αναδομούνται. Επιπλέον αν προσθέσουμε και την απαίτηση η μορφή να είναι διατηρητική, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο μια μέθοδος η οποία ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις και ταυτόχρονα είναι και 1^{st} τάξεως,

$$\mathbf{w}^{\text{First}}(x) = \bar{\mathbf{w}}_i, \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}], \quad (4.44)$$

και κάθε μέθοδος 2^{nd} τάξεως, διατηρητικής μορφής, μπορεί να γραφεί με όρους του slope Δ_i ως

$$\mathbf{w}^{\text{Second}}(x) = \bar{\mathbf{w}}_i + \frac{x_i - x}{x_{i+1/2} - x_{i-1/2}} \Delta_i, \quad x \in [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]. \quad (4.45)$$

Piecewise Parabolic Method

Η μέθοδος PPM εισήχθει από τους Collela και Woodward [20] και αποτελεί μια περίπλοκη μέθοδο με αρκετά βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να εκτελέσουμε μια υψηλής τάξης παρεμβολή σε ένα δευτέρου βαθμού πολυώνυμο, ώστε να πάρουμε προκαταρκτικές τιμές για τις αρχικές μεταβλητές (*primitive*) \mathbf{w} . Το δεύτερο βήμα γίνεται για να φτιάξουμε τις ασυνέχειες πιο απότομες, ώστε να κρατήσουμε το προφίλ τους *sharp*. Στο τρίτο βήμα πλαταίνουμε την ζώνη δομής κοντά στο χρουστικό κύμα. Ακόμα ένα βήμα λαμβάνει μέρος για να διατηρήσει την μονοτονικότητα και τέλος οι παραγόμενες αναδομημένες μεταβλητές, ξαναρυθμίζονται ώστε να χρησιμοποιηθούν ως αρχικές τιμές στο τοπικό σύστημα του προβλήματος του Riemann.

Εφαρμόζουμε πρώτα παρεμβολή σε ένα δευτέρου βαθμού πολυώνυμο, ώστε να πάρουμε προκαταρκτικές τιμές για τις αρχικές μεταβλητές (*primitive*) \mathbf{w} .

$$\mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_i + \mathbf{w}_{i+1}) + \frac{1}{6}(\delta_m \mathbf{w}_i + \delta_m \mathbf{w}_{i+1}), \quad (4.46)$$

όπου

$$\delta_m \mathbf{w}_i = \begin{cases} \min(|\delta \mathbf{w}_i|, 2|\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i|, 2|\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}|) \operatorname{sgn}(\delta \mathbf{w}_i) & \text{if } (\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_i)(\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_{i-1}) > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}, \quad (4.47)$$

και

$$\delta \mathbf{w}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{w}_{i+1} - \mathbf{w}_{i-1}), \quad (4.48)$$

Μακριά από περιοχές όπου παρουσιάζονται ακρότατα, οι οριακές τιμές του \mathbf{w} δίνονται από την σχέση

$$\mathbf{w}_{i+1}^L = \mathbf{w}_i^R = \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}.$$

Ειδική μεταχείριση χρειάζεται στις περιοχές όπου συναντιόνται οι ασυνέχειες. Στις περιπτώσεις αυτές μόνο οι τιμές πυκνότητας αλλάζουν με αποτέλεσμα οι τιμές ρ_i^L , ρ_i^R θα πρέπει να αλλάξουν αν ικανοποιείται η συνθήκη

$$\Gamma K_0 \frac{|\rho_{i+1} - \rho_{i-1}|}{\min(\rho_{i+1}, \rho_{i-1})} \geq \frac{|p_{i+1} - p_{i-1}|}{\min(p_{i+1}, p_{i-1})},$$

με K_0 σταθερά. Η παραπάνω διαδικασία που ακολουθήσαμε ονομάζεται steeping και γίνεται για να εξασφαλίσουμε το απότομο προφίλ της ασυνέχειας. Οι αναδομήσεις της πυκνότητας στα σύνορα του κελιού υπολογίζονται από τις σχέσεις

$$\rho_i^L = \rho_i^L(1 - \eta_i) + \left(\rho_{i-1} + \frac{\delta_m \rho_{i-1}}{2} \right) \eta_i, \quad (4.49)$$

$$\rho_i^R = \rho_i^R(1 - \eta_i) + \left(\rho_{i+1} - \frac{\delta_m \rho_{i+1}}{2} \right) \eta_i, \quad (4.50)$$

όπου δ_m δίνεται από την (4.47) και

$$\eta_i = \max[0, \min(\eta^{(1)}(\tilde{\eta}_i - \eta^{(2)}))],$$

όπου $\eta^{(1)}$, $\eta^{(2)}$ είναι ελεύθερες παράμετροι, ενώ το $\tilde{\eta}_i$ ορίζεται από την σχέση

$$\tilde{\eta}_i = \begin{cases} \frac{-\rho_{i+2} - \rho_{i-2} - 4\rho_i}{12\delta\rho_i} & \text{if } \begin{cases} \delta^2 \rho_{i+1} \cdot \delta^2 \rho_{i-1} > 0 \\ |\rho_{i+1} - \rho_{i-1}| - \epsilon^{(1)} \min(|\rho_{i+1}|, |\rho_{i-1}|) > 0 \end{cases} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases},$$

με $\epsilon^{(1)}$ μια άλλη ελεύθερη παράμετρο ενώ το $\delta\rho_i$ δίνεται από (4.48). Τέλος

$$\delta^2 \rho_i = \frac{\rho_{i+1} - 2\rho_i + \rho_{i-1}}{6(\Delta x)^2}.$$

Το επόμενο βήμα είναι η πλάτυση της ζώνης δομής, κοντά στις περιοχές παρουσίας χρουστικού κύματος. Η τάξη της μεθόδου κοντά στις περιοχές αυτές, μειώνεται για την

αποφυγή σπειροειδών μεταχρουστικών ταλαντώσεων. Οι περιοχές αυτές εντοπίζονται όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες

$$\frac{|p_{i+1} - p_{i-1}|}{\min(p_{i+1}, p_{i-1})} > \epsilon^{(2)} \quad \text{και} \quad u_{i-1} > u_{i+1}.$$

Στις περιοχές αυτές οι μεταβλητές \mathbf{w}^L και \mathbf{w}^R αντικαθίστανται από τις

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^{L(\text{flat})} &= \mathbf{w}_i f_i + \mathbf{w}_i^L (1 - f_i), \\ \mathbf{w}_i^{R(\text{flat})} &= \mathbf{w}_i f_i + \mathbf{w}_i^R (1 - f_i). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση βάρους f_i δίνεται από το μέγιστο των \tilde{f}_i και \tilde{f}_{i+s_i} όπου

$$\tilde{f}_i = \min \left(1, a_i \max \left(0, \left(\frac{p_{i+1} - p_{i-1}}{p_{i+2} - p_{i-2}} - \omega^{(1)} \right) \omega^{(2)} \right) \right).$$

Οι δείκτες s_i του \tilde{f}_{i+s_i} είναι ίσοι με το $+1$ ή το -1 αναλόγως αν η διαφορά $p_{i+1} - p_{i-1}$ είναι θετική ή αρνητική αντίστοιχα, ενώ το a_i δίνεται από την

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{|p_{i+1} - p_{i-1}|}{\min(p_{i+1}, p_{i-1})} > \epsilon^{(2)} \quad \text{and} \quad u_{i-1} > u_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}.$$

Το επόμενο βήμα του αλγορίθμου, εξασφαλίζει την διατήρηση της μονοτονικότητας. Στις ομαλές περιοχές της ροής ισχύει $\mathbf{w}_{i+1}^L = \mathbf{w}_i^R = \mathbf{w}_{i+\frac{1}{2}}$, αλλά χοντά στις ασυνέχειες οι παραπάνω τιμές πρέπει να τροποποιηθούν κατάλληλα, έτσι ώστε η καμπύλη παραβολής της παρεμβολής σε κάθε ζώνη υπολογιστικού κελιού i να είναι μονοτονική συνάρτηση που παίρνει τιμές μεταξύ των \mathbf{w}_i^L και $= \mathbf{w}_i^R$. Οι ακόλουθες τροποποιήσεις είναι λοιπόν απαραίτητες

$$\mathbf{w}_i^L = \mathbf{w}_i \quad \text{and} \quad \mathbf{w}_i^R = \mathbf{w}_i \quad \text{if} \quad (\mathbf{w}_i^R - \mathbf{w}_i)(\mathbf{w}_i - \mathbf{W}_i^L) \leq 0,$$

$$\mathbf{w}_i^L = 3\mathbf{w}_i - 2\mathbf{w}_i^R \quad \text{if} \quad (\mathbf{w}_i^R - \mathbf{w}_i^L) \left(\mathbf{w}_i - \frac{1}{2}(\mathbf{W}_i^L + \mathbf{W}_i^R) \right) > \frac{(\mathbf{w}_i^R - \mathbf{w}_i^L)^2}{6},$$

$$\mathbf{w}_i^R = 3\mathbf{w}_i - 2\mathbf{w}_i^L \quad \text{if} \quad (\mathbf{w}_i^R - \mathbf{w}_i^L) \left(\mathbf{w}_i - \frac{1}{2}(\mathbf{w}_i^L + \mathbf{w}_i^R) \right) < -\frac{(\mathbf{w}_i^R - \mathbf{w}_i^L)^2}{6}.$$

Το τελευταίο βήμα είναι να χρησιμοποιούσαμε τις αναδομημένες τιμές \mathbf{w}^L και \mathbf{w}^R , ώστε να δημιουργήσουμε τις ενεργές τιμές στις αριστερές και δεξιές καταστάσεις του προβλήματος Riemann. Για να πετύχουμε όμως το παραπάνω βήμα θα πρέπει να μας είναι γνωστή η τιμή των ιδιοτιμών λ^ζ , όπου $\zeta = -1, 0, 1$. Ο εκθέτης -1 αναφέρεται στην ιδιοτιμή $\lambda^{-1} = u - cs$,

το 0 στην $\lambda^0 = u$ και το +1 στην τιμή $\lambda^{+1} = u + cs$. Αρχικά οι σταθερές Δw και $w_{6,i}$ θα πρέπει να οριστούν από τις

$$\Delta w_i = w_i^R - w_i^L \quad \text{και} \quad w_{6,i} = 6 \left(w_i - \frac{1}{2} (w_i^L + w_i^R) \right).$$

Η αριστερή $\tilde{w}_i^{L(\zeta)}$ και δεξιά $\tilde{w}_i^{R(\zeta)}$ τιμή, τώρα αναδομούνται σύμφωνα με τις

$$w_i^{L(\zeta)} = w_i^R - \frac{1}{2} a^\zeta \left(\Delta w_i - \left(1 - \frac{2}{3} a^\zeta \right) w_{6,i} \right),$$

και

$$w_i^{R(\zeta)} = w_{i+1}^L + \frac{1}{2} b^\zeta \left(\Delta w_{i+1} + \left(1 - \frac{2}{3} b^\zeta \right) w_{6,i+1} \right),$$

όπου

$$a^\zeta = \frac{\lambda_i^\zeta \Delta t}{\Delta x} \quad \text{και} \quad b^\zeta = -\frac{\lambda_{i+1}^\zeta \Delta t}{\Delta x}.$$

Οι ενεργές αριστερές και δεξιές καταστάσεις του προβλήματος του Riemann δίνονται από τις επόμενες σχέσεις:

$$\begin{aligned} p_{k,i+\frac{1}{2}} &= p_{k,i+\frac{1}{2}} + C_{k,i+\frac{1}{2}}^2 \left(\beta_{k,i+\frac{1}{2}}^+ + \beta_{k,i+\frac{1}{2}}^- \right), \\ u_{k,i+\frac{1}{2}} &= u_{k,i+\frac{1}{2}} + C_{k,i+\frac{1}{2}} \left(\beta_{k,i+\frac{1}{2}}^- + \beta_{k,i+\frac{1}{2}}^+ \right), \\ \rho_{k,i+\frac{1}{2}} &= \left(\frac{1}{\rho_{k,i+\frac{1}{2}}} - \sum_{\zeta=-1,0,+1} \beta_{k,i+\frac{1}{2}}^\zeta \right)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.51}$$

όπου

$$C_{k,i+\frac{1}{2}}^2 = \Gamma p_{k,i+\frac{1}{2}} \rho_{k,i+\frac{1}{2}},$$

και $k = L, R$. Οι συντελεστές $\beta_{k,i+\frac{1}{2}}^\pm$ υπολογίζονται σύμφωνα με τις σχέσεις

$$\beta_{l,i+\frac{1}{2}}^\zeta = 0 \quad \text{αν} \quad \lambda_i^\zeta \leq 0,$$

$$\beta_{r,i+\frac{1}{2}}^\zeta = 0 \quad \text{αν} \quad \lambda_{i+1}^\zeta \geq 0,$$

διαφορετικά

$$\beta_{k,i+\frac{1}{2}}^\pm = \mp \frac{1}{2C_{k,i+\frac{1}{2}}} \left((u_{k,i+\frac{1}{2}} - u_{k,i+\frac{1}{2}}^\pm) \pm \frac{p_{k,i+\frac{1}{2}} - p_{k,i+\frac{1}{2}}^\pm}{C_{k,i+\frac{1}{2}}} \right),$$

$$\beta_{k,i+\frac{1}{2}}^0 = \left(\frac{p_{k,i+\frac{1}{2}} - p_{k,i+\frac{1}{2}}^0}{C_{i+\frac{1}{2}}^2} + \frac{1}{\rho_{k,i+\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\rho_{k,i+\frac{1}{2}}^0} \right).$$

Για κάθε παθητική μεταβλητή, όπως η εφαπτόμενη συνιστώσα της ταχύτητας v , οι ενεργές καταστάσεις του προβλήματος του Riemann είναι

$$\begin{aligned} v_{i+\frac{1}{2}}^L &= v_{i+\frac{1}{2}}^L \quad \text{αν } \lambda_i^\zeta \leq 0, \\ v_{i+\frac{1}{2}}^R &= v_{i+\frac{1}{2}}^R \quad \text{αν } \lambda_{i+1}^\zeta \geq 0, \end{aligned}$$

διαφορετικά

$$v_{k,i+\frac{1}{2}} = v_{k,i+\frac{1}{2}}^0.$$

Τα δεδομένα του προβλήματος του Riemann είναι

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} (\rho_{i+\frac{1}{2}}^L, \rho_{i+\frac{1}{2}}^L u_{i+\frac{1}{2}}^L, E_{i+\frac{1}{2}}^L) & \text{αν } x < 0, \\ (\rho_{i+\frac{1}{2}}^R, \rho_{i+\frac{1}{2}}^R u_{i+\frac{1}{2}}^R, E_{i+\frac{1}{2}}^R) & \text{αν } x > 0 \end{cases}.$$

Η αναδόμηση PPM είναι 3^{ης} τάξεως ακριβής μέθοδος στα ομαλά σημεία του ρευστού. Στον επόμενο πίνακα αναφέρονται οι τιμές των ελεύθερων παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο PPM, όπως αυτά εμφανίζονται στην αρχική εργασία των Collela και Woodward [20].

$\eta^{(1)}$	$\eta^{(2)}$	$\omega^{(1)}$	$\omega^{(2)}$	$\epsilon^{(1)}$	$\epsilon^{(2)}$	K_0
20	0.05	0.75	10	0.01	0.01	0.1

Πίνακας 4.1: Οι τιμές των ελεύθερων παραμέτρων, που χρησιμοποιούνται στον αλγόριθμο αναδόμησης PPM.

4.3.5 Marquina Solver

Το πρόβλημα του Riemann

Δοσμένων των αναδομημένων τιμών, από την παραπάνω μέθοδο, μας μένει να λύσουμε το τοπικό πρόβλημα του Riemann για να πάρουμε την intercell ροή. Το τοπικό πρόβλημα του Riemann καθορίζεται από την παρακάτω εξίσωση, ομογενούς και διατηρητικής μορφής

$$\partial_t \mathbf{w} + \partial_x \mathbf{F}^i(\mathbf{w}) = 0 \tag{4.52}$$

με αρχικές τιμές $\mathbf{w}^{L,R}$, διαχωρισμένες από μια ασυνέχεια στο $x^{(1)} = 0$. Οι όροι των ροών για διαφορετικές διευθύνσεις δίνονται αντίστοιχα από παρόμοιες σχέσεις. Η λύση του παραπάνω προβλήματος, δίνεται σε μορφή κυμάτων, τα οποία ικανοποιούν διαφορετικές καταστάσεις.

Τα κύματα μπορεί να είναι είτε χρουστικά (*shocks*), κατά μήκος των οποίων όλες οι υδροδυναμικές μεταβλητές μεταβάλλονται ασυνεχώς, είτε κύματα αραίωσης (*rarefaction*), όπου όλες οι μεταβλητές αλλάζουν χωρίς κάποιου είδους ασυνέχειας, είτε ασυνέχεια επαφής (*contact or tangential discontinuity*) κατά μήκος του οποίου, μερικές και όχι όλες οι τιμές των μεταβλητών, αλλάζουν ασυνεχώς, ενώ οι υπόλοιπες παραμένουν σταθερές. Τα χαρακτηριστικά της εξέλιξης συγκλίνουν και σπάνε στο χρουστικό κύμα, αποκλίνουν στο κύμα αραίωσης ενώ είναι παράλληλες στις υπόλοιπες γραμμικές ασυνέχειες.

Η διακριτοποίηση της παραπάνω εξίσωσης, π.χ. στην x διεύθυνση, δίνει

$$\frac{\partial \mathbf{w}_i}{\partial t} + \frac{(\mathbf{f}^*)_{i+1/2} - (\mathbf{f}^*)_{i-1/2}}{\Delta x} = 0, \quad (4.53)$$

όπου με $(\mathbf{f}^*)_{i \pm 1/2}$ συμβολίζουμε την αριθμητική ροή (*numerical flux*), υπολογισμένη στα διαστήματα $i \pm 1/2$ του χωρικού υπολογιστικού κελιού i . Οι διαφορετικές μέθοδοι που έχουν προταθεί κατά καιρούς ως λύτες στο πρόβλημα του Riemann, έχουν να κάνουν με τον υπολογισμό των αριθμητικών αυτών ροών, τέτοιες μέθοδοι είναι το γραμμικό σύστημα (Linear System), ο HLLE, Roe, και Marquina solver. Από τους παραπάνω λύτες θα αναφερθούμε μόνο στο Marquina solver καθώς είναι αυτός που χρησιμοποιήσαμε στο κώδικα Whisky. Ο λόγος που δεν χρησιμοποιήσαμε κάποιον άλλο, οφείλεται κυρίως στη συμπεριφορά του Marquina να λύνει το πρόβλημα του Riemann, χρησιμοποιώντας διαφορετικά αριστερά και δεξιά διανύσματα κατάστασης (*state vectors*). Έχει δημιουργηθεί ειδικά για υπερβολικά συστήματα που περιέχουν νόμους διατήρησης.

Η φόρμουλα Marquina δημιουργήθηκε από τους Donat, Marquina [25], και εισάγει μια καινούργια μέθοδο διαχώρισης των ροών που οδηγεί σε upstream σχήμα. Στο σχήμα αυτό δεν υπάρχουν ενδιάμεσα τεχνητά σημεία, σε κάθε υπολογιστικά κελιά, πράγμα που σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ακριβές ή προσεγγιστικές λύσεις του Riemann.

Marquina solver

Δοσμένων των διανυσμάτων κατάστασης, οι χαρακτηριστικές τιμές και ροές, υπολογίζονται από τις

$$\begin{aligned} \omega_l^j &= \mathbf{L}^j(\mathbf{U}_l)\mathbf{U}_l \quad , \quad \phi_l^j = \mathbf{L}^j(\mathbf{U}_l)\mathbf{F}(\mathbf{U}_l) \\ \omega_r^j &= \mathbf{L}^j(\mathbf{U}_r)\mathbf{U}_r \quad , \quad \phi_r^j = \mathbf{L}^j(\mathbf{U}_r)\mathbf{F}(\mathbf{U}_r) \end{aligned}$$

με $j = 1, \dots, n$, όπου n ο αριθμός των εξισώσεων του συστήματος, ενώ $\mathbf{L}^j(\mathbf{U}_l)$ και $\mathbf{L}^j(\mathbf{U}_r)$ είναι τα κανονικοποιημένα αριστερά ιδιοδιανύσματα του Ιακωβιανού πίνακα του συστήματος των νόμων διατήρησης, υπολογισμένα από τα αριστερά και δεξιά διανύσματα κάταστασης $\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r$.

Έστω $\lambda^1(\mathbf{U}_l), \dots, \lambda^n(\mathbf{U}_l)$ και $\lambda^1(\mathbf{U}_r), \dots, \lambda^n(\mathbf{U}_r)$ οι αντίστοιχες ιδιοτιμές. Τότε για κάθε $j = 1, \dots, n$ η διαδικασία είναι η ακόλουθη:

1. Αν το $\lambda^j(\mathbf{U})$ δεν αλλάζει πρόσημο στο $[\mathbf{U}_l, \mathbf{U}_r]$, συγκεκριμένα αν $\lambda^j(\mathbf{U}_l)\lambda^j(\mathbf{U}_r) > 0$, τότε το βαθμωτό σχήμα είναι upwind και η αριθμητική ροή υπολογίζεται σύμφωνα με την αντίστοιχη χαρακτηριστική πληροφορία. Έτσι λοιπόν αν $\lambda^j(\mathbf{U}_l) > 0$, τότε

$$\phi_+^j = \phi_l^j \quad , \quad \phi_-^j = 0$$

ειδάλλως

$$\phi_+^j = 0 \quad , \quad \phi_-^j = \phi_r^j$$

2. Διαφορετικά, για να αποφύγουμε τυχαίες αριθμητικές παθολογίες, το βαθμωτό σχήμα αλλάζει στο περισσότερο viscous σχήμα των Lax-Friedrichs.

$$a^j = \max\{|\lambda^j(U_l)|, |\lambda^j(U_r)|\}$$

$$\phi_+^j = \frac{\phi_l^j + a^j \omega_l^j}{2} \quad , \quad \phi_-^j = \frac{\phi_r^j - a^j \omega_r^j}{2}$$

Η φόρμουλα Marquina γράφεται:

$$\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}^* = \sum_{j=1}^n [\phi_+^j \mathbf{R}^j(\mathbf{U}_l) + \phi_-^j \mathbf{R}^j(\mathbf{U}_r)]$$

όπου $\mathbf{R}^j(U_l)$ και $\mathbf{R}^j(U_r)$ είναι τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του Ιακωβιανού πίνακα $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}$.

Περισσότερα για τον Marquina υπάρχουν στην εργασία των Donat,Marquina [25], ενώ ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει περισσότερα για solvers του προβλήματος Riemann, στο βιβλίο του Toro [75].

4.3.6 Η μέθοδος των Γραμμών (MoL)

Η μέθοδος των γραμμών αποτελεί τον κατάλληλο τρόπο διαχωρισμού της χρονικής εξέλιξης, από την χωρική εξέλιξη των εξισώσεων. Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, μπορούμε να μετατρέψουμε ένα σύστημα MΔΕ σε ένα σύστημα ΣΔΕ. Ας πάρουμε για παράδειγμα το υπερβολικό σύστημα MΔΕ

$$\partial_t \mathbf{w} + \mathbf{A}^i(\mathbf{w}) \partial_i \mathbf{B}(\mathbf{w}) = S(\mathbf{w}).$$

Η μέθοδος των γραμμών, με μια δεδομένη διακριτοποίηση ως προς το χώρο, μπορεί να το μετατρέψει στο σύστημα

$$\partial_t \mathbf{w} = \mathbf{L}(\mathbf{w}), \tag{4.54}$$

το οποίο αποτελείται από ΣΔΕ.

Με δεδομένη λοιπόν την διαφοροποίηση μεταξύ της χρονικής και χωρικής διαχριτοποίησης, μπορούμε να εφαρμόσουμε μια γνωστή σταθερή μέθοδο ολοκλήρωσης του χρόνου των ΣΔΕ, την μέθοδο Runge-Kutta. Για τις ανάγκες του προγράμματός μας χρησιμοποιήσαμε, μια Runge-Kutta πολλαπλών βημάτων τέταρτης τάξεως, όπως αυτή αναπτύχθηκε από τους Shu και Osher [70]. Η μέθοδος αυτή έχει τα εξής βήματα:

1. Βήμα πρόβλεψης:

$$\mathbf{w}^{(0)} = \mathbf{w}^n, \quad (4.55)$$

$$\mathbf{w}^{(1)} = \mathbf{w}^{(0)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{w}^{(0)}), \quad (4.56)$$

2. Βήμα διόρθωσης, το οποίο εξαρτάται από την τάξη της μεθόδου. Για την Runge-Kutta 3^{ης} τάξης (RK3) έχουμε:

$$\mathbf{w}^{(2)} = \frac{1}{\alpha} \left(\beta \mathbf{w}^{(0)} + \mathbf{w}^{(1)} + \Delta t \mathbf{L}(\mathbf{w}^{(1)}) \right), \quad (4.57)$$

$$\mathbf{w}^{(3)} = \frac{1}{\beta} \left(\mathbf{w}^{(0)} + 2\mathbf{w}^{(2)} + 2\Delta t \mathbf{L}(\mathbf{w}^{(2)}) \right), \quad (4.58)$$

$$\mathbf{w}^{n+1} = \mathbf{w}^{(3)} \quad (4.59)$$

με $\alpha = 4$ και $\beta = 3$.

Η μέθοδος αυτή των γραμμών, μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο σε υπερβολικά όσο και σε παραβολικά αλλά και ελλειπτικά συστήματα εξισώσεων. Στο παράρτημα Γ'.2 αναφέρουμε συγκεκριμένα τις παραμέτρους που χρησιμοποιήσαμε στον κώδικα.

4.3.7 Αλλαγή Μεταβλητών

Η λύση του προβλήματος του Riemann απαιτεί την τιμή της πίεσης καθώς και μερικών θερμοδυναμικών παραγώγων. Δεδομένης της συναρτησιακής σχέσης μεταξύ των αρχικών και διατηρητικών μεταβλητών, σχέση (4.19), η αντίστροφη διαδικασία εύρεσης των αρχικών μεταβλητών από τις διατηρητικές, δεν μπορεί να γίνει με χρήση ενός κλειστού συστήματος. Αντ' αυτού θα πρέπει να εφαρμοστεί μια επαναληπτική διαδικασία, η οποία μπορεί να είναι χρονοβόρα, αλλά μας επιστρέφει τις σωστές τιμές των αρχικών μεταβλητών. Η εφαρμογή της επαναληπτικής διαδικασίας, γίνεται με την χρήση της Runge-Kutta, συγκεκριμένα οι αρχικές μεταβλητές ανανεώνονται από τις μέσες τιμές των διατηρητικών μεταβλητών σε κάθε βήμα της τελευταίας, ενώ οι τιμές τους αποθηκεύονται σε έναν 3-διάστατο πίνακα.

Αναλυτικά, βρίσκουμε την ρίζα της συνάρτησης

$$f = \bar{\rho} \bar{W} - \tilde{D},$$

όπου $\bar{\rho}$ η μεταβλητή που θα λύσουμε την παραπάνω εξίσωση, \bar{W} ο παράγοντας Lorentz ο οποίος δίνεται από την

$$\bar{W} = \sqrt{1 + \frac{S^2}{(\tilde{D}\bar{h})^2}},$$

όπου $\tilde{D} = \gamma^{-1/2} D$, με γ την ορίζουσα της 3-μετρικής γ_{ij} και S^2 ορισμένο από την σχέση $S^2 = \gamma^{ij} \tilde{S}_i \tilde{S}_j$. Η παράγωγος που χρειάζεται για την επαναληπτική μέθοδο Runge-Kutta, θα πρέπει να είναι συναρτήσει της μεταβλητής \bar{r} . Συγκεκριμένα δίνεται από την

$$f' = \bar{W} - 2 \frac{\bar{\rho} S^2 \bar{h}'}{\bar{W} \tilde{D}^2 \bar{h}^3},$$

όπου h' , η παράγωγος της ενθαλπίας

$$h' = \bar{\rho}^{-1} \frac{\partial P}{\partial \rho},$$

όπου η ενθαλπία h μαζί με την ειδική εσωτερική ενέργεια ε δίνονται από την καταστατική εξίσωση.

Βρίσκοντας το \bar{r} , μπορούμε να βρούμε το \bar{P} χρησιμοποιώντας την πολυτροπική καταστατική εξίσωση (2.12), και τέλος με την βοήθεια της σχέσης

$$v^i(\bar{P}) = \frac{S^i}{\tau + \tilde{D} + \bar{P}}$$

βρίσκουμε και τις 3-ταχύτητες, ολοκληρώνοντας έτσι το σετ των αρχικών μεταβλητών $\mathbf{w} \equiv (\rho, v^i, \epsilon)$, όπου η εσωτερική ενέργεια ε προκύπτει με χρήση της (4.16) και της (4.24).

4.3.8 Η Ατμόσφαιρα

Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι Αστροφυσικοί σήμερα στις προσομοιώσεις αστέρων νετρονίων, είναι η αντιμετώπιση του κενού έξω από την επιφάνεια του αστέρα. Το πρόβλημα έγκειται στη διατηρητική μορφή του συστήματος των εξισώσεων (4.21). Συγκεκριμένα η εξίσωση συνέχειας που ικανοποιείται σε όλο το ρευστό, παραβιάζεται μόλις φτάσουμε ελάχιστα έξω από την επιφάνεια του αστέρα, το οποίο θεωρείται, μαθηματικά τουλάχιστον, ως κενό. Η παραβίαση αυτή προκαλεί την ταχύτητα του ήχου να παίρνει μεγάλες τιμές φτάνοντας την ταχύτητα του φωτός και τότε ο κώδικας καταρρέει.

Η αντιμετώπιση του παραπάνω προβλήματος γίνεται μάλλον με έναν τεχνητό και πανεξυπνο τρόπο, εισάγοντας την ατμόσφαιρα έξω από τον αστέρα. Χρησιμοποιήσαμε την λέξη τεχνητός γιατί η ατμόσφαιρα αυτή δεν υπάρχει στις εξισώσεις της υδροδυναμικής αλλά την βάζουμε εμείς με το χέρι, χωρίς να γνωρίζουμε βέβαια αν πραγματικά υπάρχει κάποιου είδους ατμόσφαιρας έξω από τους αστέρες νετρονίων. Η ατμόσφαιρα δεν είναι τίποτα άλλο από μια περιοχή πολύ μικρής πυκνότητας γύρω από τον αστέρα, καλύπτοντας τον υπολογιστικό μας χώρο, όπου βρίσκεται σε απόλυτη ισορροπία.

Αντιμετωπίζουμε την ατμόσφαιρα ως ιδανικό ρευστό, με καταστατική εξίσωση αυτή που χρησιμοποιήσαμε και για τον ίδιο τον αστέρα (αδιαβατική), και με μηδενική συνιστώσα ταχύτητας. Το τελευταίο σημαίνει απλά ότι η ατμόσφαιρα δεν περιστρέφεται με το ρευστό. Θα πρέπει να τονίσουμε στο σημείο αυτό ότι η μη περιστροφή της ατμόσφαιρας δεν αποτελεί και την μοναδική προσέγγιση, πολλές φορές μπορούμε να θέσουμε την ίδια περιστροφή μαζί με αυτήν του αστέρα. Επιπλέον η πυκνότητα μάζας - ηρεμίας που βάζουμε, είναι περίπου 5-7 τάξης μεγέθους μικρότερη της αρχικής κεντρικής πυκνότητας. Ο υπολογιστικός χώρος της ατμόσφαιρας συνήθως καλείται συνήθως ζώνη πλέγματος (*gridzones*), και σε αυτόν τον χώρο χρησιμοποιούμε ακριβώς την ίδια διαδικασία εξέλιξης των υδροδυναμικών εξισώσεων όπως ακριβώς χρησιμοποιούμε και στο ρευστό.

Στην περίπτωση που οι διατηρητικές μεταβλητές D ή τ παίρνουν τιμές μικρότερες από κάποιο ελάχιστο όριο, τότε το υπολογιστικό κελί που περιέχει τις τιμές των διατηρητικών μεταβλητών δεν ανανεώνεται. Επιπλέον αν η πυκνότητα πέσει κάτω από το ελάχιστο όριο, που εμείς πάντα θέτουμε, στην διαδικασία της μετατροπής διατηρητικών σε αρχικών μεταβλητών, τότε και πάλι όλες οι μεταβλητές επαναφέρονται στις αρχικές συνθήκες. Στην παρούσα εργασία αντιμετωπίζουμε την ατμόσφαιρα σε τρία ξεχωριστά μέρη:

1. **Μέσα στο Whisky για την δημιουργία αρχικών τιμών.** Μέσα στο *Thorn: Whisky.RNSID* υπάρχουν έμφυτες οι ατμοσφαιρικές παράμετροι, έτσι ώστε η ατμόσφαιρα που δημιουργείται να είναι σύμφωνη.
2. **Μέσα στη ρουτίνα μετατροπής των διατηρητικών μεταβλητών στις αρχικές μεταβλητές.** Εδώ βρίσκεται το κύριο μέρος της επαναφοράς των αρχικών συνθηκών για την ατμόσφαιρα. Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιούμε είναι πολύ απλός. Εάν ο επαναληπτικός αλγόριθμος της *Runge-Kutta*, που χρησιμοποιούμε για την μετατροπή των διατηρητικών στις αρχικές μεταβλητές, βγάλει αρνητική τιμή για το ρ , τότε το ρ επαναφέρεται στην αρχική τιμή της ατμόσφαιρας ενώ οι συνιστώσες της ταχύτητας μηδενίζονται. Επιπλέον τα P, ϵ, S^i και τ επαναφέρονται σε τιμές σύμφωνες με αυτές του ρ .
3. **Όταν κάνουμε την ανανέωση του χρόνου.** Εάν η ανανέωση σε κάποιο υπολογιστικό κελί, οδηγήσει σε αρνητικές τιμές του D ή του τ , τότε δεν ανανεώνουμε το κελί αυτό και δεύτερον, όλες οι τιμές του συγκεκριμένου κελιού επαναφέρονται στην αρχική τιμή της ατμόσφαιρας.

Η μεταχείριση της ατμόσφαιρας είναι πολύ σημαντική σε πολλές προσομοιώσεις και ανά δεν είμαστε προσεκτικοί μπορεί να οδηγήσουμε τον κώδικα σε κατάρρευση. Περισσότερες πληροφορίες για την ατμόσφαιρα ο αναγνώστης μπορεί να βρει στην εργασία των *Shapiro et al.* [66]. Πρόσφατα έγινε και η πρώτη προσπάθεια αντιμετώπισης του κενού σε Νευτώνειους και ομοιόμορφα περιστρεφόμενους αστέρες. Τα αποτελέσματα είναι σε πλήρη συμφωνία με μοντέλα που περιέχουν ατμόσφαιρα, ωστόσο όμως σε πολύ μεγάλες ταχύτητες περιστροφής ο κώδικας καταρρέει, (βλ. [76]).

4.4 MareNostrum Supercomputer

Τα τελευταία χρόνια γίνεται μια προσπάθεια στην δημιουργία-κατασκευή μεγάλων υπολογιστικών κέντρων. Η προσπάθεια αυτή πηγάζει χυρίως από την ανάγκη οπτικοποίησης - μοντελοποίησης των διαφόρων φυσικών συστημάτων. Ας πάρουμε για παράδειγμα την Σχετικιστική Υδροδυναμική, μπορούμε πολύ εύκολα, με χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή του σπιτιού μας, να φτιάξουμε το μοντέλο ενός μονοδιάστατου αστέρα και να πάρουμε ακριβή αποτελέσματα για τις βασικές του ιδιότητες. Μπορούμε όμως να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για το πως συμπεριφέρεται ο αστέρας; Η απάντηση είναι και βέβαια όχι, χρειαζόμαστε την ανάλυσή του σε δύο ή τρεις διαστάσεις, και πάλι ένας κοινός υπολογιστής μπορεί να προσομοιώσει ένα τέτοιο σύστημα, αλλά η ανάλυση δεν θα είναι καθόλου καλή. Η δημιουργία ενός 3-διάστατου μοντέλου απαιτεί τεράστια υπολογιστική ισχύ και αρκετή μνήμη, ειδικά όταν το σύστημα αποτελείται από έναν ταχέως περιστρεφόμενο σχετικιστικό αστέρα, όπου οι εξισώσεις είναι μη γραμμικές και πεπλεγμένες.

Για να καλύψει τις παραπάνω ανάγκες, η επιστημονική κοινότητα έστρεψε το ενδιαφέρον της στην κατασκευή ολοένα και μεγαλύτερων υπερ-υπολογιστών. Στην αναζήτηση πόρων για το σκοπό αυτό, η Ευρωπαϊκή Κοινότητα προσφέρθηκε χρηματοδοτώντας κατα καιρούς διάφορα Πανευρωπαϊκά πρόγραμματα. Ένα τέτοιο πρόγραμμα αποτελεί και το *HPC-Europa*: Pan-European Research Infrastructure on High Performance Computing. Το Ευρωπαϊκό αυτό πρόγραμμα, χρηματοδοτεί μαζί με τις αντίστοιχες κυβερνήσεις, την κατασκευή, συντήρηση και λειτουργία έξι μεγάλων υπολογιστικών κέντρων. Τα κέντρα αυτά είναι:

- BSC (Barcelona)
- EPCC (Edinburgh)
- IDRIS (Paris)
- CINECA (Bologna)
- HLRS (Stuttgart)
- SARA (Amsterdam)

Το παραπάνω πρόγραμμα χρηματοδοτεί κάθε πεδίο υπολογιστικής επιστήμης, όπως θεωρητική φυσική, φυσική συμπυκνωμένης ύλης, επιστήμη των υλικών, υπολογιστική ρευστοδυναμική, αστροφυσική, μετεωρο-κλιματολογία, επιστήμη των υπολογιστών, υπολογιστική χημεία, μοριακή μοντελοποίηση, υπολογιστική βιολογία και life sciences. Χρήσιμες πληροφορίες για το πρόγραμμα *HPC-Europa* κανές και για τα αντίστοιχα υπολογιστικά κέντρα υπάρχουν στο διαδίκτυο, στη σελίδα <http://www.hpc-europa.org/>

Το υπολογιστικό κέντρο της Βαρκελώνης (Barcelona Supercomputing Center BSC) χαρακτηρίζεται από τα μεγαλύτερα ερευνητικά κέντρα στον κόσμο. Η έρευνά του επεκτείνεται μέχρι στιγμής σε τομείς όπως *Deep Computing, Computer Architecture, Life Sciences* και *Earth Sciences*. Το ενδιαφέρον μας για αριθμητικούς υπολογισμούς συχνοτήτων μηγραμμών ταλαντώσεων από ταχέως περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες, επέκτεινε την έρευνα του BSC και στο πεδίο της Σχετικιστικής Αστροφυσικής.

Στο BSC, και συγκεκριμένα στο Campus Nord του Τεχνικού Πανεπιστημίου της Καταλονίας (UPC), στεγάζεται ο μεγαλύτερος Υπερυπολογιστής της Ευρώπης και πέμπτος στον

κόσμο, και ακούει στο όνομα MareNostrum. Η λειτουργία του ξεκίνησε το Μάιο του 2004 και οφείλεται σε συμφωνία της Ισπανικής κυβέρνησης και της IBM. Καταλαμβάνει έκταση $120m^2$ σε έναν χώρο $170m^2$, περιτριγυρισμένο από γυαλί ύψους 5 μέτρων. Ο MareNostrum διαθέτει 2406 JS20 υπολογιστικούς κόμβους (blades) και 42 p615 servers. Κάθε κόμβος διαθέτει δυο επεξεργαστές της IBM (Power PC 970FX) στα 2.2GHz με λειτουργικό σύστημα Linux, 4GB μνήμης RAM και 40GB HDD.

Όλοι οι servers παρέχουν 236 TB disk storage και 9.6 TB κύριας μνήμης, ευπρόσιτα από οποιονδήποτε κόμβο μέσο του συστήματος GPFS (Global Parallel File System). Τα δίκτυα που αλληλοσυνδέουν τον MareNostrum είναι:

Myrinet Network: Δίκτυο υψηλού φάσματος που χρησιμοποιείται κυρίως για παράλληλες εφαρμογές επικοινωνίας.

Gigabit Network: Δίκτυο Ethernet χρησιμοποιημένο από τους κόμβους για την εξ αποστάσεως επικοινωνία των servers με το δίκτυο που δουλεύει το GPFS.

Περισσότερες πληροφορίες για τα τεχνικά χαρακτηριστικά του υπερ-υπολογιστή MareNostrum, υπάρχουν στην διεύθυνση: <http://www.bsc.es/resources/marenostrum/>.

Πλήρες εγχειρίδιο για τον τρόπο λειτουργίας του καθώς και τις βασικές εντολές του συστήματος Linux υπάρχει στην σελίδα του BSC.

Κεφάλαιο 5

Ανάλυση Αποτελεσμάτων

Στο παρών κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από τρισδιάστατες προσομοιώσεις διαφόρων πολυτροπικών σχετικιστικών μοντέλων, που εκτελέσαμε κατά τη διάρκεια της εργασίας αυτής. Οι προσομοιώσεις έγιναν για τέσσερις διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις που περιγράφουν ασυμπίεστο ρευστό και που αντιστοιχούν στους πολυτροπικούς δείκτες $N = 1, 0.75, 0.5$ και 0.25 . Στις επόμενες ενότητες παρουσιάζουμε ξεχωριστά κάθε πολυτροπικό μοντέλο. Στην πρώτη ενότητα (μοντέλο με πολυτροπικό δείκτη $N = 1.0$), περιγράφουμε με λεπτομέρειες τα βήματα που ακολουθήσαμε για την εξαγωγή των αποτελεσμάτων, ενώ στις ακόλουθες ενότητες εστιάζουμε την προσοχή μας κυρίως στην ανάλυση αυτών.

5.1 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 1$

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα από προσομοιώσεις ενός σχετικιστικού πολυτροπικού μοντέλου, το οποίο ακολουθεί την πολυτροπική καταστατική εξίσωση

$$P = K\rho^\Gamma,$$

με

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{N}.$$

Αρχικά όμως ξεκινήσουμε με ένα μοντέλο που έχει πολυτροπικό δείκτη $N = 1$. Για το μοντέλο αυτό οι τιμές του πολυτροπικού εκθέτη Γ και της πολυτροπικής σταθεράς K σε αδιάστατες μονάδες ($c = G = M_\odot = 1$) είναι

$$\Gamma = 2 \quad \text{και} \quad K = 100$$

5.1.1 Κατασκευή Ακολουθίας Μη-Περιστρεφόμενου Μοντέλου

Ως πρώτο βήμα υπολογίζουμε την ακολουθία όλων εκείνων των αστέρων, διαφορετικής πυκνότητας μάζας ηρεμίας, τα οποία όμως δε παρουσιάζουν περιστροφή. Για την κατασκευή μιας τέτοιας ακολουθίας χρησιμοποιούμε τον κώδικα RNS (βλ. §4.1.1), εκτελώντας την εντολή

```
./rns -q poly -t Tonik -N 1.0 -K 100 -D ρc -r 1.0 -a 1e-5
```

Περισσότερες πληροφορίες* σχετικά με τις παραμέτρους του κώδικα RNS, υπάρχουν στην εργασία [74], καθώς και στο εγχειρίδιο που υπάρχει μαζί με τον κώδικα.

Ο RNS για να αρχίσει να επεξεργάζεται τα μοντέλα, χρειάζεται μια καταστατική εξίσωση, είτε από κάποιο πίνακα (-q tab), είτε από κάποιο αναλυτικό πολυτροπικό μοντέλο (-q poly), είτε ενός ομογενούς μοντέλου με πυκνότητα ενέγειας σταθερή (-q constant), είτε τέλος ενός παράξενου αστέρα (strange star -q strange).

Η σχετικιστική πολυτροπική καταστατική εξίσωση ορίζεται από τις εξισώσεις

$$P = K \rho_c^\Gamma, \quad (5.1)$$

$$\varepsilon = \frac{P}{\Gamma - 1} + \rho. \quad (5.2)$$

Η καταστατική αυτή έχει την ιδιότητα να υπάρχει ελευθερία αναγωγής των ιδιοτήτων ενός αστέρα σε διάφορα μοντέλα με τον ίδιο λόγο μάζας προς ακτίνα (M/R), αλλάζοντας απλώς την τιμή της σταθεράς K . Μια βασική κλίμακα μήκους L μπορεί να διατυπωθεί ως

$$L = c^{\frac{\Gamma-2}{\Gamma-1}} \cdot \sqrt{\frac{K^{\frac{1}{\Gamma-1}}}{G}},$$

βάση της οποίας μπορούμε να ορίσουμε τις σχέσεις που συνδέουν αδιάστατα πολυτροπικά μεγέθη ($c = G = K = 1$) με τα φυσικά μεγέθη, π.χ.

$$\begin{aligned} M &= \frac{Lc^2}{G} \bar{M}, \\ R &= L \bar{R}, \\ \varepsilon &= \frac{c^4}{L^2 G} \bar{\varepsilon}, \end{aligned}$$

όπου οι ποσότητες με την μπάρα, δηλώνουν τις αδιάστατες πολυτροπικέες ποσότητες.

Με την παραπάνω εντολή ο κώδικας υπολογίζει ένα πολυτροπικό μοντέλο (-q poly) με πολυτροπικό δείκτη (-N 1.0), πολυτροπική σταθερά (-K 100), με τιμή κεντρικής πυκνότητας μάζας ηρεμίας -D ρc και λόγο αξόνων (-r 1.0). Η σύγκλιση διακόπτεται όταν επιτευχθεί ακρίβεια της τάξης του (-a 1e-5) σε μια μεταβλητή που παρακολουθούμε. Στην συγκεκριμένη περίπτωση όλες οι μονάδες είναι γεωμετροποιημένες με $c = G = M_\odot = 1$.

*Με την εντολή ./rns -help παίρνουμε μια λίστα όλων των παραμέτρων του κώδικα.

Όπως αναφέραμε και στην §4.1.1, ο κώδικας RNS χρησιμοποιεί ως παράμετρο περιστροφής το λόγο r_p/r_e , που είναι ο λόγος της πολικής ακτίνας του αστέρα προς την ακτίνα του ισημερινού του αστέρα. Η σκέψη αυτή βασίστηκε στο γεγονός πως η περιστροφή του αστέρα παραμορφώνει το σώμα εκτρέποντάς το από την σφαιρική συμμετρία. Έτσι, ένας αστέρας με λόγο $r_p/r_e = 1$ σημαίνει πως είναι τέλεια σφαιρικός και άρα μιλάμε για έναν μη περιστρεφόμενο αστέρα, ενώ ένας με λόγο $r_p/r_e = 0.7$ σημαίνει πως έχει τέτοια ταχύτητα περιστροφής ώστε η πολική ακτίνα του αστέρα μειώθηκε στο 70% της ισημερινής ακτίνας.

Ξεκινώντας από μια τιμή $\rho_c = 0.8 \cdot 10^{-3}$ και αυξάνοντας την αναβήμα $0.05 \cdot 10^{-3}$ κατασκευάζουμε την ακολουθία του μη περιστρεφόμενου σχετικιστικού πολυτροπικού μοντέλου. Οι τιμές που πήραμε φαίνονται στο Πίνακα A'.1 στο Παράρτημα A'. Στις πρώτες δύο στήλες αναγράφονται οι τιμές της κεντρικής πυκνότητας ηρεμίας, ρ_c , καθώς και της κεντρικής πυκνότητας ενέργειας, ε_c , του αστέρα. Στην τρίτη στήλη φαίνεται η βαρυτική μάζα του αστέρα, M , ενώ στην τέταρτη η μάζα ηρεμίας ή αλλιώς, βαρυονική μάζα, M_0 . Στην πέμπτη και έκτη στήλη αναγράφονται η περιφερειακή, R_e , και η ισημερινή ακτίνα, r_e του αστέρα αντιστοίχως. Τέλος, στην έβδομη στήλη αναγράφεται η γωνιακή ταχύτητα Kepler του αστέρα, Ω_K .

Η βαρυονική ή αδρανειακή μάζα M_0 , είναι η μάζα ηρεμίας όλων των βαρυονίων αιθροιστικά, όπως ακριβώς και στη Νευτώνεια βαρύτητα, ενώ η βαρυτική μάζα M , είναι η σχετικιστική μάζα ενέργεια που δημιουργεί το βαρυτικό πεδίο και περιλαμβάνει την βαρυτική ενέργεια σύνδεσης, την εσωτερική ενέργεια και την περιστροφική ενέργεια. Επειδή η βαρυτική ενέργεια σύνδεσης είναι αρνητική εξ ορισμού (το έργο που λαμβάνουμε κατά το σχηματισμό του συστήματος από τα μεμονωμένα σωματίδια στο άπειρο), η βαρυονική μάζα είναι μεγαλύτερη της βαρυτικής, δηλ. $M_{\text{grav}} < M_0$.

Η περιφερειακή ακτίνα R_e (circumferential radius) διαφέρει από την ισημερινή ακτίνα του αστέρα r_e (coordinate equatorial radius), αφού η R_e είναι η ακτίνα του αστέρα όπως την μετράει κανείς με τη βοήθεια του στοιχείου μήκους του χώρου, ds^2 , κατά μήκος της περιφέρειας μεγίστου κύκλου, και η οποία διαφέρει από την τιμή $2\pi r_e$.

5.1.2 Κατασκευή Ακολουθίας Περιστρεφόμενου Μοντέλου στο 'Οριο Kepler

Το δεύτερο βήμα είναι να εξάγουμε την ακολουθία του ίδιου μοντέλου στην μέγιστη ταχύτητα περιστροφής του, δηλαδή στο όριο του Kepler. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε και πάλι τον κώδικα RNS με την εντολή

```
./rns -q poly -t Kepler -N 1.0 -e εc -a 1e-5
```

Στην παραπάνω εντολή ωραία πρέπει να προσέξουμε δυο κυρίως πράγματα. Πρώτον, ότι πλέον έχουμε την επιλογή `-t Kepler`, με την οποία ο κώδικας ξεκινάει από μια τιμή κεντρικής πυκνότητας ενέργειας ε_c και υπολογίζει την Ω_K . Το πρόγραμμα ωραία ξεκινήσει από το μη περιστρεφόμενο μοντέλο ($r_p/r_e=1$) που αντιστοιχεί στην παραπάνω κεντρική πυκνότητα ενέργειας και ωραία συνεχίσει έως ότου ο λόγος r_p/r_e φτάσει τη μικρότερη δυνατή τιμή του αντίστοιχου μοντέλου, με μια ακρίβεια της τάξης του 10^{-4} στη γωνιακή ταχύτητα. Αυτό που υπολογίζει στην ουσία ο RNS είναι ο λόγος Ω_p/Ω , δηλαδή η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής ενός σωματιδίου σε κυκλική τροχιά στον ισημερινό προς τη γωνιακή ταχύτητα του αστέρα. Για να φτάσουμε στο όριο του Kepler, πέρα από το οποίο ο αστέρας ωραία ξένει μάζα, ο λόγος αυτός ωραία πρέπει να γίνει ίσος με τη μονάδα. Τότε $\Omega = \Omega_K$. Έτσι, όταν ο παραπάνω λόγος φτάσει στο 0.9999, δηλαδή σε μια ακρίβεια της τάξης του 10^{-4} ο υπολογισμός σταματά. Στην περίπτωση που θέλουμε να αυξήσουμε ή να μειώσουμε την τιμή αυτή, τότε ωραία πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την εντολή `-b` και την ακρίβεια που θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε.

Το δεύτερο είναι οι μονάδες της κεντρικής πυκνότητας ενέργειας ε_c . Στην περίπτωση αυτή ο κώδικας δέχεται τις πολυτροπικές μονάδες και όχι τις γεωμετροποιημένες. Επιπλέον, ωραία εκτυπώσει τις τιμές του μοντέλου σε πολυτροπικές μονάδες. Έτσι, ωραία πρέπει να κάνουμε μια μετατροπή από τις αδιάστατες πολυτροπικές στις αδιάστατες μονάδες ($c = G = M_\odot = 1$). Στον παρακάτω Πίνακα 5.1 φαίνονται οι πράξεις που ωραία πρέπει να εκτελέσουμε για το σκοπό αυτό. Στην αριστερή στήλη αναγράφονται οι ποσότητες που εκτυπώνει ο RNS και αντιστοιχούν στις πολυτροπικές μονάδες, ενώ στα δεξιά αναγράφεται η πράξη που ωραία εκτελέσουμε για τη μετατροπή στις γεωμετροποιημένες μονάδες.

Οι τιμές που πήραμε από την κατασκευή της ακολουθίας αυτής φαίνονται στο Πίνακα A'.2 στο Παράρτημα A'.

Αδιάστατες Πολυτροπικές Μονάδες $c = G = K = 1$	Αδιάστατες Μονάδες $c = G = M_{\odot} = 1$
ε_c	÷ K^N
ρ_0	÷ K^N
M	× $K^{N/2}$
M_0	× $K^{N/2}$
R_e	× $K^{N/2}$
r_e	× $K^{N/2}$
Ω	÷ $K^{N/2}$
Ω_p	÷ $K^{N/2}$
T	× $K^{N/2}$
W	× $K^{N/2}$
J	× K^N
I	× $K^{3N/2}$
$h+$	× $K^{N/2}$
$h-$	× $K^{N/2}$

Πίνακας 5.1: Πίνακας μετατροπής μονάδων από αδιάστατες πολυτροπικές σε αδιάστατες μονάδες $c = G = M_{\odot} = 1$. *Παράδειγμα :* Αν ο RNS τυπώσει $\varepsilon_c = 1.1e-1$ τότε θα πρέπει να διαιρέσουμε με K^N , για να πάρουμε τις γεωμετροποιημένες μονάδες, έτσι αν $K = 100$ και $N = 1$ τότε θα πάρουμε $\varepsilon_c = 1.1e-3$.

5.1.3 Κατασκευή Ακολουθίας Σταθερής Βαρυονικής Μάζας

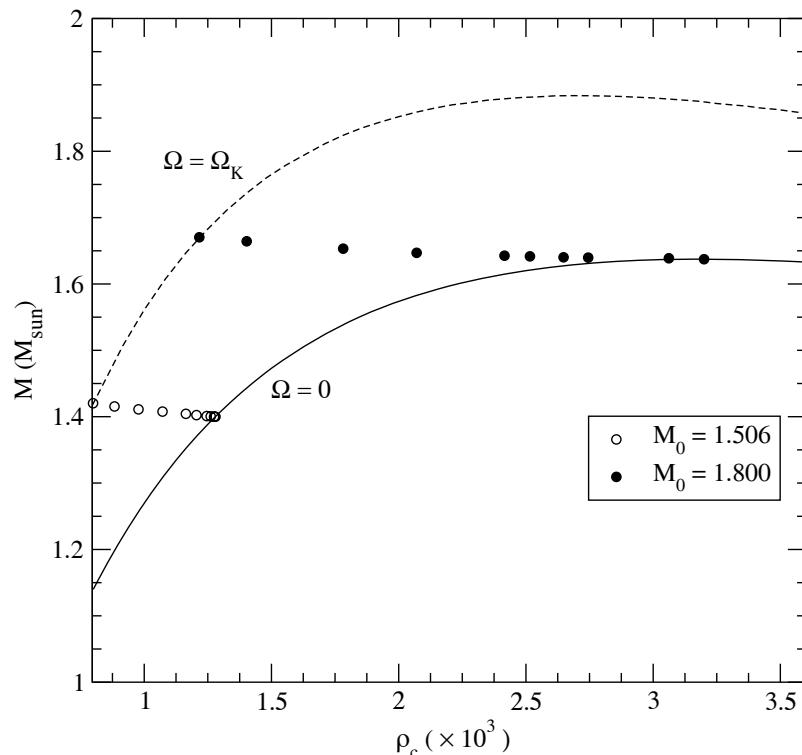
Έχοντας υπολογίσει την ακολουθία τόσο των μοντέλων μέγιστης περιστροφής όσο και των μη περιστρεφόμενων μοντέλων, κατασκευάζουμε την ακολουθία μοντέλων σταθερής μάζας ηρεμίας, $M_0 = \sigma_{\text{stat}}$. Η διαδικασία που θα ακολουθήσουμε και σε άλλες καταστατικές εξισώσεις είναι ίδια με αυτή που θα περιγράψουμε αμέσως παρακάτω.

Από την ακολουθία του μη περιστρεφόμενου μοντέλου ($\Omega = 0$) διαλέγουμε την βαρυτική μάζα που ανήκει στο μέγιστο της ακολουθίας και εκείνη την τιμή που αντιστοιχεί σε βαρυτική μάζα $1.4M_\odot$. Η τελευταία εκλογή είναι προφανής, αν σκεφτούμε πως είναι η μοναδική παρατηρούμενη μάζα με μεγάλη ακρίβεια. Τη μάζα αυτή θα τη επιλέξουμε και στις άλλες καταστατικές εξισώσεις. Για τις παραπάνω τιμές κατασκευάζουμε ακολουθίες μοντέλων ισορροπίας, τα οποία ξεκινούν από το μη-περιστρεφόμενο όριο και καταλήγουν στο μέγιστο όριο περιστροφής Kepler. Η εντολή με την οποία κατασκευάζουμε τις παραπάνω ακολουθίες δίνεται στον RNS και είναι

```
./rns -q poly -t rmass -N 1.0 -e εc -z M0 -a 1e-5 -b 1e-4
```

Στην παραπάνω εντολή έχουμε προσθέσει τις εξής επιπλέον παραμέτρους : Αρχικά με την παράμετρο (-t rmass), επιβάλλουμε στον RNS να υπολογίσει ένα μοντέλο ισορροπίας συγκεκριμένης κεντρικής πυκνότητας ενέργειας ϵ_c και συγκεκριμένης βαρυονικής μάζας M_0 . Στη συγκεκριμένη περίπτωση, σε βαρυτική μάζα $M = 1.400M_\odot$ αντιστοιχεί μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$. Η επιλογή της μάζας ηρεμίας γίνεται με την παράμετρο -z M_0 . Η εντολή -b 1e-4 αναφέρεται στη σχετική ακρίβεια υπολογισμού της μάζας ηρεμίας, ο κώδικας υπολογίζει πολλά ενδιάμεσα μοντέλα ίδιας κεντρικής πυκνότητας και καταλήγει στο ζητούμενο μέσω μιας διαδικασίας τύπου Newton-Raphson.

Την παραπάνω διαδικασία την επαναλαμβάνουμε μεταβάλλοντας κάθε φορά την κεντρική πυκνότητα ϵ_c μέχρι να φτάσουμε στο μέγιστο όριο περιστροφής. Με τον τρόπο αυτό κατασκευάσαμε δύο ακολουθίες μοντέλων ισορροπίας. Μια με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.506M_\odot$ και μια ακόμη με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.800M_\odot$. Οι τιμές των δύο παραπάνω μοντέλων φαίνονται στους πίνακες A'.3 και A'.4 του Παραρτήματος A' . Στο Σχήμα 5.1 φαίνονται όλες οι παραπάνω ακολουθίες που κατασκευάσαμε.



Σχήμα 5.1: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας πολυτροπικών μοντέλων με $N = 1.0$ και $K = 100$. Στο σχήμα φαίνονται η ακολουθία των μη-περιστρεφόμενων μοντέλων ($\Omega = 0$ μαύρη γραμμή), η ακολουθία των μέγιστα περιστρεφόμενων μοντέλων, πέρα από την οποία έχουμε απώλεια μάζας του αστέρα ($\Omega = \Omega_K$ διακεκομμένη γραμμή) και τέλος οι δύο ακολουθίες σταθερής μάζας ηρεμίας. Η μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.506 M_{\odot}$ αντιστοιχεί σε βαρυτική μάζα $M = 1.400$ στο μη περιστρεφόμενο όριο, ενώ η τιμή $M_0 = 1.800 M_{\odot}$ αντιστοιχεί σε $M = 1.637$ στο μη περιστρεφόμενο όριο.

5.1.4 Εξαγωγή Συχνοτήτων των Περιστροφικών Ταλαντώσεων

Για να διεγείρουμε τους περιστροφικούς τρόπους ταλάντωσης (*r*-modes) κατά τη χρονική εξέλιξη των μοντέλων, διαταράσσουμε το αρχικά στάσιμο μοντέλο προσθέτοντας συγκεκριμένη διαταραχή δu^i στην 3-ταχύτητα u^i όπως ακριβώς έγινε στην εργασία [73]. Καθώς δεν υπάρχει ακριβής γραμμική ιδιοσυνάρτηση διαθέσιμη στην βιβλιογραφία που να αντιστοιχεί στον $l = m = 2$ τρόπο ταλάντωσης, χρησιμοποιούμε αντί αυτής μια προσεγγιστική ιδιοσυνάρτηση, σε σφαιρικές συντεταγμένες, έγκυρη μόνο σε χαμηλές τιμές περιστροφής $O(\Omega)$ στο όριο της πρώτης τάξης της Μετανευτώνιας προσέγγισης. Επιπλέον, εφαρμόζουμε και τη μετατροπή των σφαιρικών σε καρτεσιανές συντεταγμένες, καθώς αυτές είναι που χρησιμοποιούνται από το CACTUS. Με την παραπάνω ιδιοσυνάρτηση πολλαπλασιασμένη με ένα αρχικό πλάτος, μπορούμε να διεγείρουμε κυρίως τον $l = m = 2$ περιστροφικό τρόπο ταλάντωσης. Στο Παράρτημα Γ' βρίσκεται το αρχείο με τις παραμέτρους του CACTUS που χρησιμοποιήσαμε για την προσομοίωση.

Από τα αρχεία που εκτυπώνει το CACTUS, μας ενδιαφέρουν μόνο εκείνα που αναφέρονται στο υδροδυναμικό χομμάτι και όχι οι μεταβλητές του χωροχρόνου, αφού για λόγους που έχουμε ήδη εξηγήσει στο Κεφάλαιο 3, χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση Cowling, κρατώντας το χωροχρόνο σταθερό.

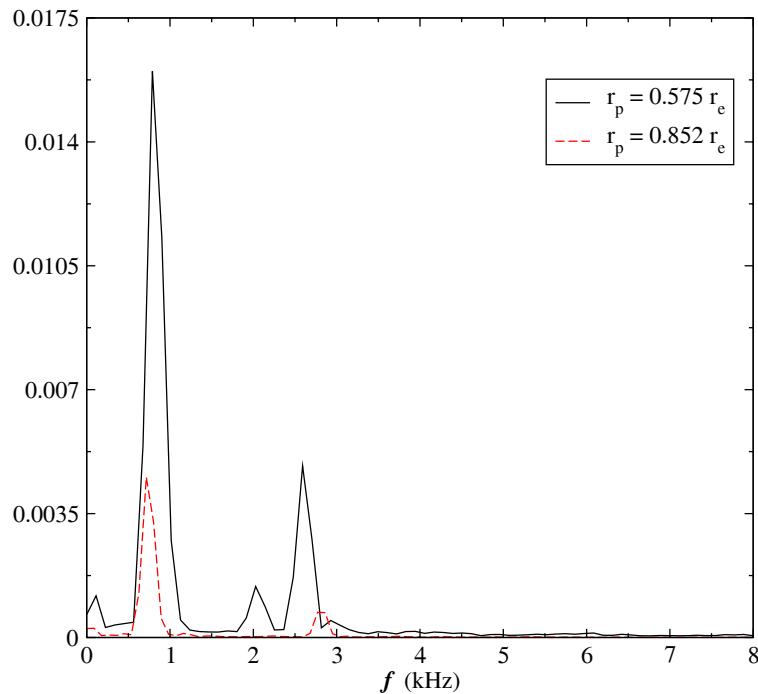
Στη z συνιστώσα της ταχύτητας (σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, v^z) κατά μήκος του \hat{x} -ονα x εφαρμόσαμε ένα μετασχηματισμό Fourier κατά μήκος όλων των σημείων του πλέγματος. Για να βρούμε την ακριβή τιμή της συχνότητας, ωστόσο πρέπει πρώτα να πάρουμε την παράγωγο του μετασχηματισμού Fourier (FFT). Με κεντρικές διαφορές μεταξύ των γειτονικών σημείων[†], υπολογίσαμε την συχνότητα του *r*-mode. Η ακρίβεια είναι 2ας τάξεως αφού η κατανομή είναι συμμετρική. Με τον τρόπο αυτό καταφέραμε να βγάλουμε τις συχνότητες για όλα τα μοντέλα του Πίνακα A'.5 και A'.6. Στο Σχήμα 5.2 φαίνονται οι συχνότητες των ταλαντώσεων, όπως αυτές προέκυψαν από το μετασχηματισμό Fourier της ταχύτητας v^z του πολυτροπικού μοντέλου σταθερής βαρυονικής μάζας $M_0 = 1.506M_\odot$. Η συνεχής γραμμή αντιστοιχεί στο τελευταίο μοντέλο του Πίνακα A'.5, που είναι το μοντέλο στο όριο απώλειας μάζας (δηλαδή το πιο γρήγορα περιστρεφόμενο), ενώ η διακεκομένη γραμμή αντιστοιχεί στο μοντέλο με λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.852$, μικρότερης δηλαδή ταχύτητας περιστροφής. Στο Σχήμα 5.3 παρουσιάζονται οι συχνότητες ταλάντωσης του πολυτροπικού μοντέλου σταθερής βαρυονικής μάζας $M_0 = 1.800M_\odot$. Από τα σχήματα αυτά, συμπεραίνουμε δύο πράγματα:

[†]Η μέθοδος των κεντρικών διαφορών είναι 2ας τάξεως ως προς το σφάλμα.

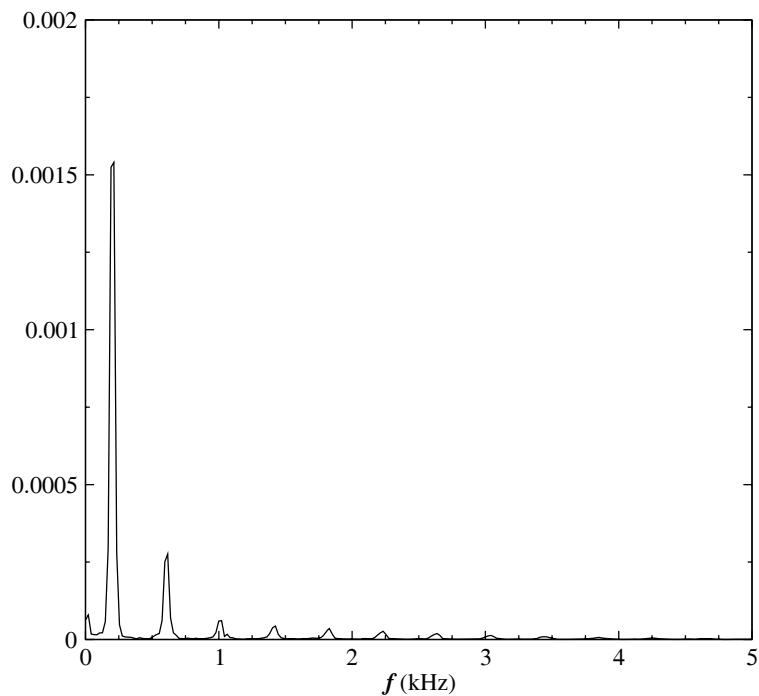
Η συχνότητα των περιστροφικών ταλαντώσεων (*r-modes*) ελαττώνεται με την μείωση της ταχύτητας περιστροφής, γεγονός που περιμέναμε και από την θεωρία. Στο μη-περιστρεφόμενο μοντέλο περιμένουμε η παραπάνω συχνότητα πρακτικά να μηδενιστεί. Πράγματι, παρατηρώντας το μοντέλο με την μικρότερη ταχύτητα περιστροφής ($r_p/r_e = 0.997$) του σχήματος 5.3, βλέπουμε πως πρακτικά η συχνότητα τείνει προς τη μηδενική τιμή.

Το δεύτερο συμπέρασμα έχει να κάνει με την εξαγωγή επιπλέον συχνοτήτων ταλάντωσης. Λόγω της προσεγγιστικής φύσεως της ιδιοσυνάρτησης που χρησιμοποιήσαμε, επιπλέον τρόποι ταλάντωσης έχουν διεγερθεί. Μερικοί από αυτούς είναι αδρανειακοί (*inertial modes*), αλλά υπάρχουν και άλλοι οι οποίοι είναι μη-αδρανειακοί (*other-modes*), και ο χαρακτηρισμός τους απαιτεί μεγαλύτερη ευκρίνεια και περαιτέρω ανάλυση.

Στους πίνακες 5.2 και 5.3, αναγράφουμε τα αποτελέσματα των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων. Εκτός από τους περιστροφικούς τρόπους ταλάντωσης, αναγράφεται επίσης και οι συχνότητες ενός μη αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης. Για να εξαχριβώσουμε τη φύση του παραπάνω τρόπου ταλάντωσης απαιτείται περισσότερη μελέτη και σύγκριση με άλλες ήδη υπάρχουσες συχνότητες από τη θεωρία. Τέτοια μελέτη έπειται να γίνει στο μέλλον. Συνεπώς αν και αναγράφουμε μόνο για μια ακολουθία τις συχνότητες αυτές δε θα τις λάβουμε υπόψη μας στις επόμενες καταστατικές εξισώσεις. Στο Παράρτημα A', υπάρχουν καταχωρημένες όλες οι συχνότητες των διαφόρων τρόπων ταλάντωσης που παρατηρήσαμε.



Σχήμα 5.2: Διάγραμμα συχνότητας - πλάτους ταλάντωσης (αυθαίρετης κλίμακας) όπως αποκτήθηκε από μετασχηματισμό Fourier της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x . Οι συχνότητες αντιστοιχούν στο πολυτροπικό μοντέλο μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$ για δυο διαφορετικές τιμές περιστροφής. Παρατηρούμε πως εκτός του r -mode διεγείρονται και άλλοι τρόποι ταλάντωσης.



Σχήμα 5.3: Διάγραμμα συχνότητας - πλάτους ταλάντωσης (αυθαίρετης κλίμακας) όπως αποκτήθηκε από μετασχηματισμό Fourier της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x . Οι συχνότητες αντιστοιχούν στο πολυτροπικό μοντέλο μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.800M_\odot$ για περιστροφή $r_p = 0.997r_e$. Παρατηρούμε την κύρια συχνότητα εξαγωγής της περιστροφικής ταλάντωσης (r -mode) καθώς και άλλους μη αδρανειακούς τρόπους ταλάντωσης.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	r-mode kHz	other-mode kHz	f_* kHz
1.280	1.444	1.000000	0.000	-	0.000
1.275	1.438	0.997227	0.141	0.418	0.082
1.261	1.420	0.987278	0.251	2.492	0.174
1.245	1.400	0.976180	0.343	2.574	0.237
1.205	1.350	0.948116	0.492	2.686	0.343
1.164	1.300	0.919000	0.596	2.756	0.419
1.072	1.187	0.852000	0.745	2.815	0.535
0.978	1.074	0.780000	0.819	2.806	0.610
0.883	0.961	0.698000	0.842	2.736	0.655
0.799	0.863	0.575000	0.823	2.613	0.673

Πίνακας 5.2: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και ενός μη αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης (other-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$. Η τελευταία στήλη αναγράφει τη συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.

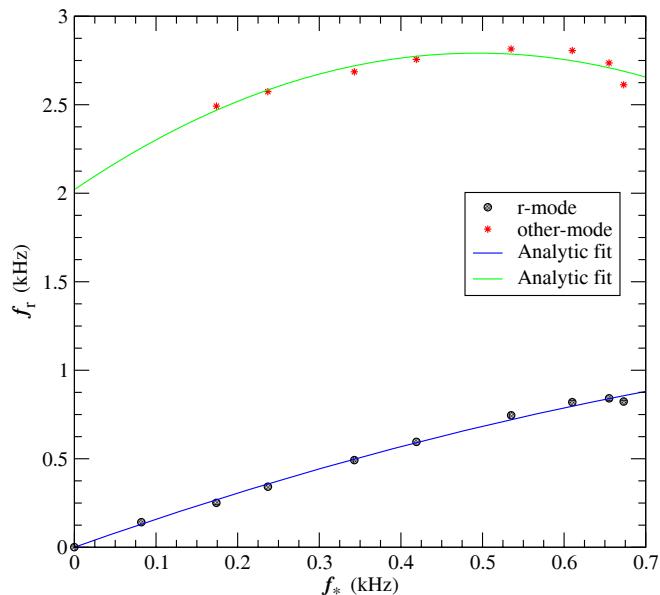
ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	r-mode kHz	f_* kHz
3.200	4.224	1.0000	0.000	0.000
3.062	3.999	0.9972	0.202	0.127
2.745	3.498	0.9849	0.421	0.259
2.648	3.349	0.9780	0.506	0.335
2.516	3.149	0.9661	0.608	0.405
2.416	2.999	0.9551	0.682	0.456
2.071	2.499	0.9015	0.906	0.620
1.782	2.099	0.8360	1.046	0.730
1.403	1.599	0.7090	1.108	0.821
1.216	1.363	0.5750	1.056	0.832

Πίνακας 5.3: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.800M_\odot$. Η τελευταία στήλη αναγράφει την συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.

5.1.5 Ανάλυση και Επεξεργασία Δεδομένων

Με την εξαγωγή των συχνοτήτων των περιστροφικών τρόπων ταλάντωσης είμαστε έτοιμοι να ξεκινήσουμε την ανάλυση των διαφόρων μοντέλων. Βασικός σκοπός είναι η μελέτη της διακύμανσης των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων, συναρτήσει των διαφόρων καταστατικών εξισώσεων, από διάφορα πολυτροπικά σχετικιστικά μοντέλα ισορροπίας.

Στο Σχήμα 5.4 δείχνουμε το διάγραμμα συχνότητα περιστροφής - συχνότητα ταλάντωσης, δυο διαφορετικών τρόπων ταλάντωσης του ρευστού, που εντοπίσαμε κατά το μετασχηματισμό Fourier του μοντέλου ισορροπίας. Ο ένας από αυτούς είναι ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης $l = m = 2$ και ανήκει, όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφάλαιο, στην κατηγορία των αδρανειακών τρόπων ταλάντωσης. Για το λόγο αυτό έχουμε προσθέσει το σημείο $(0,0)$ αφού κάθε αδρανειακός τρόπος ταλάντωσης, στο όριο της μη-περιστροφής τείνει στη μηδενική συχνότητα. Παρατηρούμε πως για τον άλλο τρόπο ταλάντωσης κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει και άρα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι σίγουρα δεν είναι αδρανειακός τρόπος ταλάντωσης.



Σχήμα 5.4: Διάγραμμα συχνότητας περιστροφής του αστέρα f_* - συχνότητας ταλάντωσης. Στους δυο τρόπους ταλάντωσης έχουμε προσθέσει και την αναλυτική προσαρμογή των συχνοτήτων τους. Ο τρόπος ταλάντωσης που δε μηδενίζει τη συχνότητά του σε μηδενική περιστροφή, δεν αποτελεί αδρανειακό τρόπο ταλάντωσης. Ο δεύτερος είναι ο γνωστός $l = m = 2$ *r-mode*.

Οι συναρτήσεις που δίνουν την αναλυτική προσαρμογή (Analytic Fit) των σημείων είναι:

Περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης (r-mode)

$$f_r = 1.63799 f_* - 0.543482 f_*^2.$$

Μη αδρανειακός τρόπος ταλάντωσης (other-mode)

$$f_r = 2.02071 + 3.12475 f_* - 3.16703 f_*^2.$$

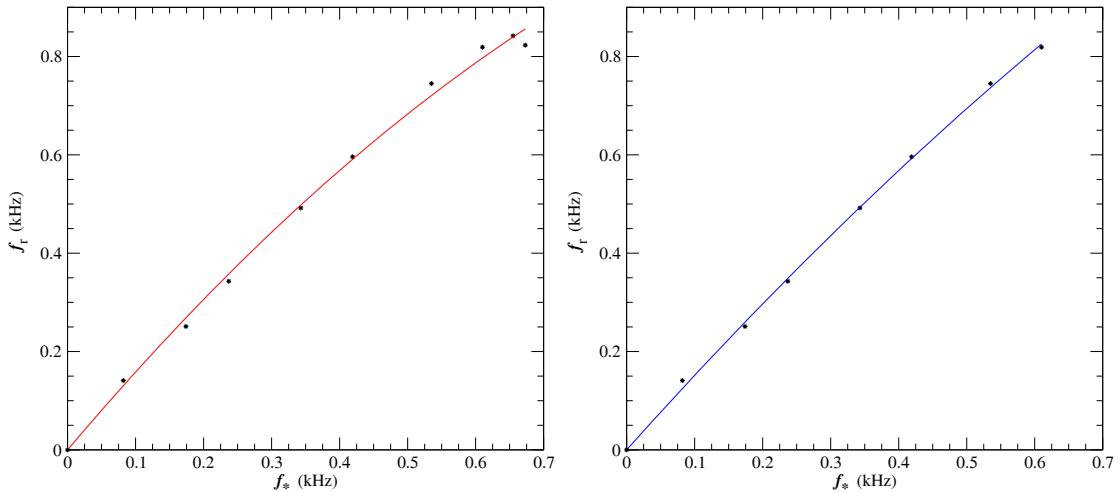
Παρατήρηση

Αν παρατηρήσουμε προσεκτικά τις τιμές των συχνοτήτων του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης τόσο του Πίνακα 5.2 όσο και του Πίνακα 5.3, θα δούμε πως καθώς η συχνότητα περιστροφής αυξάνει, αυξάνει μονότονα και η συχνότητα της ταλάντωσης, εκτός από το τελευταίο σημείο. Το ίδιο παρατηρήθηκε σε όλες τις ακολουθίες που κατασκευάσαμε.

Ο λόγος για αυτή τη συμπεριφορά είναι ότι τα δυο τελευταία μοντέλα της ακολουθίας είναι κοντά στο όριο απώλειας μάζας λόγω ταχύτατης περιστροφής, όπου η ισημερινή ακτίνα του αστέρα αυξάνει ταχύτατα με αποτέλεσμα το σχήμα του να απομακρύνεται από το ελλειψοειδές και να γίνεται *cusp-like*[‡].

Για να πετύχουμε μια πολύ καλή τετραγωνική προσαρμογή των σημείων ωστε να παραλείψουμε τα δυο τελευταία μοντέλα (τα δυο ταχύτερα). Το Σχήμα 5.5 δείχνει τη διαφορά της προσαρμογής αυτής των συχνοτήτων του πολυτροπικού μοντέλου σταθερής βαρυονικής μάζας $M_0 = 1.506 M_\odot$.

[‡]Το σχήμα αυτό παρομοιάζετε με μια μπάλα του ράγκμπι.

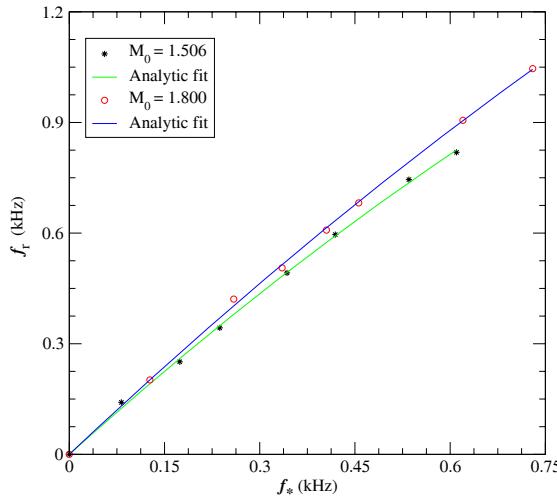


Σχήμα 5.5: Αριστερά: Τετραγωνική προσαρμογή όλων των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων της πολυτροπικής σχετικιστικής μοντέλων ισορροπίας, σταθερής βαρυνονικής μάζας $M_0 = 1.506M_\odot$. Παρατηρούμε την εκτροπή από την αναλυτική σχέση του τελευταίου κυρίως σημείου. **Δεξιά:** Τετραγωνική προσαρμογή της παραπάνω ακολουθίας παραλείποντας τα δυο τελευταία μοντέλα. Παρατηρείστε ότι η ακρίβεια προσαρμογής έχει αυξηθεί σημαντικά.

Η νέα συνάρτηση προσαρμογής, παραλείποντας τα δυο ταχύτερα μοντέλα, γίνεται τώρα:

$$f_r = 1.54829f_* - 0.320242f_*^2.$$

Στη συνέχεια, όποτε κάνουμε τετραγωνική προσαρμογή των συχνοτήτων της περιστροφικής ταλάντωσης, θα παραλείπουμε τα δυο ταχύτερα μοντέλα. Στους Πίνακες όμως θα εξακολουθούμε να αναγράφουμε τις τιμές τους.



Σχήμα 5.6: Τετραγωνική προσαρμογή των συχνοτήτων της πολυτροπικής σχετικιστικής ακολουθίας μοντέλων ισορροπίας, σταθερής βαρυονικής μάζας $M_0 = 1.506M_\odot$ και $M_0 = 1.800M_\odot$.

Στο Σχήμα 5.6 φαίνεται η διακύμανση των συχνοτήτων περιστροφικής ταλάντωσης για τις δύο ακολουθίες μοντέλων σταθερής μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$ και $M_0 = 1.800M_\odot$, των πολυτροπικών αστέρων $N = 1.0, K = 100$.

Οι συναρτήσεις προσαρμογής των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων (r-mode) είναι:

$$M_0 = 1.506M_\odot \quad f_r = 1.54829f_* - 0.320242f_*^2. \quad (5.3)$$

$$M_0 = 1.800M_\odot \quad f_r = 1.62356f_* - 0.264609f_*^2. \quad (5.4)$$

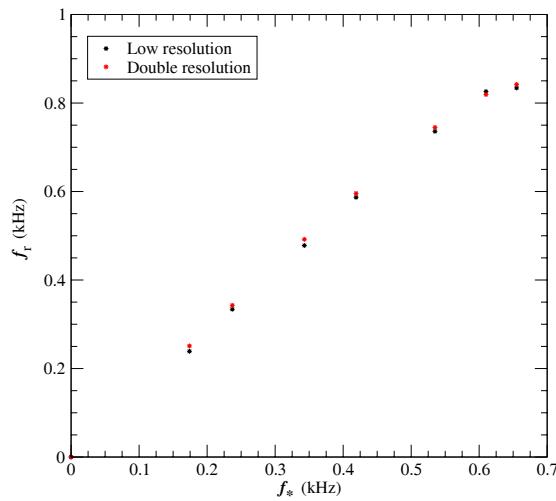
Μέχρι τώρα δεν έχουμε αναφέρει σχεδόν τίποτα για την ανάλυση με την οποία κατασκευάσαμε τις ακολουθίες των μοντέλων ισορροπίας. Βέβαια όταν μιλούμε για ανάλυση εννοούμε τον αριθμό των σημείων του πλέγματος στις τρεις διαστάσεις. Αρχικά, για να πάρουμε μια ιδέα της σχετικής διαφοράς των συχνοτήτων που θα προέκυπτε από την επιλογή της ανάλυσης χρησιμοποιήσαμε τις εξής δύο επιλογές αριθμών πλέγματος

$$\text{Low Resolution : } N_x = 32 \quad N_y = 57 \quad N_z = 45,$$

και

$$\text{High Resolution : } N_x = 60 \quad N_y = 113 \quad N_z = 89,$$

όπου N ο αριθμός των σημείων του πλέγματος στην αντίστοιχη διεύθυνση. Στο Σχήμα 5.7 φαίνονται οι συχνότητες της περιστροφικής ταλάντωσης της ακολουθίας των πολυτροπικών μοντέλων σταθερής μάζας ηρεμίας $1.506M_{\odot}$ για τις δύο παραπάνω αναλύσεις. Όπως φαίνεται και από το Σχήμα 5.7, η σχετική διαφορά δεν ξεπερνά συνήθως το 5%, ενώ σε μερικά μοντέλα φτάνει μέχρι και 0.85%. Για το λόγω αυτό αποφασίσαμε να μην αυξήσουμε και άλλο την ανάλυση κατά την εξαγ



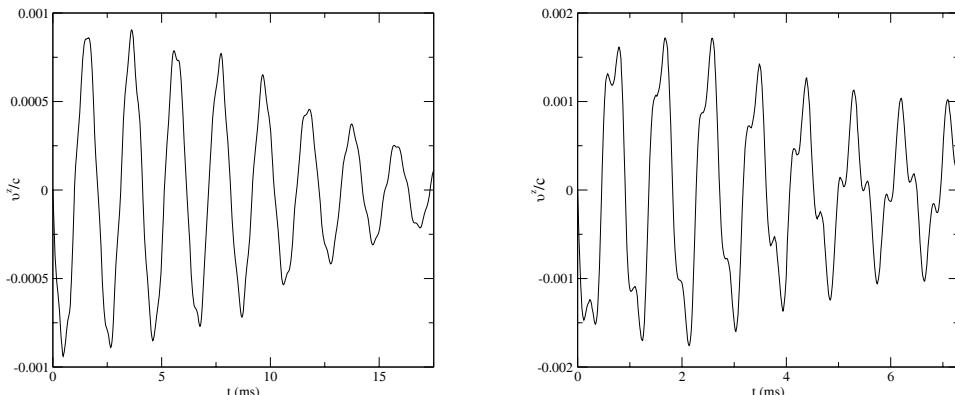
Σχήμα 5.7: Σύγκριση συχνοτήτων περιστροφικών ταλαντώσεων με χρήση δύο διαφορετικών αναλύσεων. Η σχετική διαφορά δεν υπερβαίνει το 5% ενώ σε μερικά μοντέλα φτάνει και το 0.85%.

Ο αριθμός των σημείων του πλέγματος επιλέχθηκε σκοπίμως να μην είναι ίδιος στους τρεις άξονες. Λόγω συμμετρίας στον άξονα x , χρησιμοποιούμε μόνο τα σημεία με $x > 0$, έτσι ώστε

ο αριθμός των σημείων στον áξονα x να είναι ο μισός περίπου από τον αριθμό των σημείων στον áξονα y . Λόγω της περιστροφής του αστέρα και της πλάτυνσής του στον ισημερινό, στον áξονα z δε χρειαζόμαστε τον ίδιο αριθμό σημείων με τον áξονα y , για να μην αλλάζουμε óμως σε κάθε περιστρεφόμενο μοντέλο το υπολογιστικό πλέγμα, διαλέξαμε το ίδιο σε όλους τους αστέρες, παίρνοντας το μοντέλο πολύ χαμηλής περιστροφής για κάθε καταστατική και εξετάζοντας μέχρι ποια σημεία επεκτείνεται η επιφάνεια του αστέρα.

Η επιλογή της χρονικής εξέλιξης του κάθε αστέρα óμως επιλέχθηκε με διαφορετικά κριτήρια. Επειδή κάθε ακολουθία μοντέλων σταυρεής βαρυονικής μάζας είναι διαφορετική στην ίδια καταστατική εξίσωση ($\pi.\chi. N = 1$), πόσο μάλιστα οι ακολουθίες διαφορετικών καταστατικών, αποφασίσαμε να εξελίξουμε τον αστέρα βάση συγκεκριμένου αριθμού περιστροφής. Έτσι κάθε μοντέλο εκτελεί 6 τον αριθμό περιστροφές. Οπότε ο πιο γρήγορα περιστρεφόμενος αστέρας εξελίχθηκε για 1500 με 3500 βήματα ενώ ο πιο αργά περιστρεφόμενος αστέρας κάθε ακολουθίας εξελίχθηκε για 25000 με 40000 βήματα αναλόγως με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής τους.

Στο Σχήμα 5.8 φαίνεται η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας v^z σε συγκεκριμένο σημείο του áξονα x του αστέρα, κανονικοποιημένη με την ταχύτητα του φωτός, για δύο διαφορετικά περιστρεφόμενα μοντέλα διαφορετικής μάζας ηρεμίας.



Σχήμα 5.8: Χρονική εξέλιξη της ταχύτητας v^z σε συγκεκριμένο σημείο του áξονα x μέσα στον αστέρα.

Αριστερά : Μοντέλο σταθερής βαρυονικής μάζας $1.506M_{\odot}$ και λόγου αξόνων $r_p/r_e = 0.948$. Παρατηρούμε τη μείωση του πλάτους της ταχύτητας συναρτήσει της χρονικής εξέλιξης καθώς επίσης και το φαινόμενο συμβολής δυο τρόπων ταλάντωσης με παρόμοια συχνότητα.

Δεξιά : Μοντέλο σταθερής βαρυονικής μάζας $1.800M_{\odot}$ και λόγου αξόνων $r_p/r_e = 0.709$. Παρατηρούμε (εκτός από το φαινόμενο συμβολής) και την ύπαρξη επιπλέον τρόπων ταλάντωσης υψηλότερης συχνότητας εκτός του περιστροφικού τρόπου (r -mode). Η ύπαρξη αυτή φαίνεται καθαρά με την εμφάνιση διπλής κορυφής.

Στο ίδιο σχήμα παρατηρούμε αρχικά την εμφάνιση ενός επιπλέον τρόπου ταλάντωσης, με συχνότητα κοντά σε αυτήν του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης. Οι δυο συχνότητες, δηλώνουν την ύπαρξή τους με την εμφάνιση ενός χροσσού συμβολής, ο οποίος φαίνεται καθαρά και στις δυο εικόνες του Σχήματος 5.8. Εκτός από αυτό, φανερεί είναι και η ύπαρξη ταλαντώσεων υψηλότερης συχνότητας.

Τέλος, υπάρχει και η ανάλυση των ιδιοσυναρτήσεων των μοντέλων. Παρατηρήσαμε πως σε μερικές περιπτώσεις εκτός του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης, υπάρχει και ένας άλλος αδρανειακός τρόπος ταλάντωσης ο οποίος σε όλα τα μοντέλα συμπεριφέρεται διαφορετικά από τον r -mode, δίνοντάς μας τη δυνατότητα να τον διακρίνουμε. Στο Σχήμα 5.9 φαίνονται οι ιδιοσυναρτήσεις του πραγματικού και φανταστικού μέρους, όπως επίσης και το πλάτος αυτής, όπως προκύπτουν από τον μετασχηματισμό Fourier. Βλέπουμε πως το πλάτος δεν ακολουθεί μια εκ των δυο ιδιοσυναρτήσεων, πραγματικό ή το φανταστικό, αλλά επηρεάζεται από την παρουσία και των δυο. Σε κάποια λοιπόν μοντέλα ο r -mode είναι το πραγματικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης και σε άλλα το φανταστικό, με αποτέλεσμα να μη μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το διαχωρισμό πραγματικού-φανταστικού μέρους για να πούμε σε ποιο από τους δυο ανήκει[§]. Η βασική ιδιότητα του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης, είναι ότι αυξάνει μονότονα μέχρι την επιφάνεια του αστέρα όπου εκεί παίρνει και τη μέγιστη τιμή του. Σε όλα τα μοντέλα μια από τις δυο ιδιοσυναρτήσεις συμπεριφέρεται κατά αυτό τον τρόπο, έτσι ώστε η άλλη ή να αλλάζει πρόσημο είτε να σταματά η μονοτονία της πριν την επιφάνεια και στη συνέχεια να μειώνεται και πάλι. Η ύπαρξη αυτή των δυο ιδιοσυναρτήσεων στη συχνότητα του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης, επιβεβαιώνεται και από τους χροσσούς συμβολής της χρονικής εξέλιξης της ταχύτητας v^z σε συγκεκριμένο σημείο του άξονα x , όπως άλλωστε είδαμε στο Σχήμα 5.8.

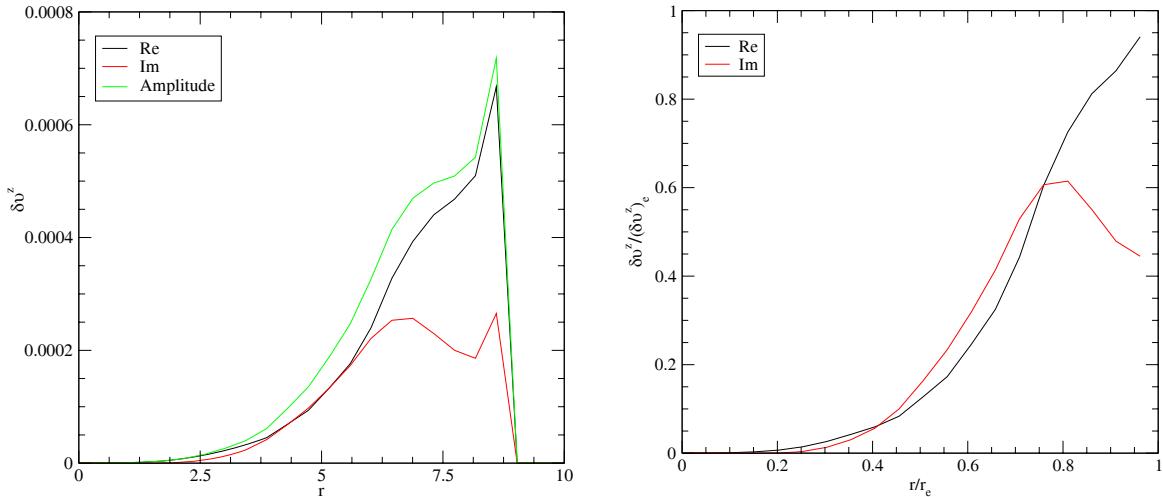
Στο Σχήμα 5.9 δίνουμε και τη συμπεριφορά του πραγματικού και φανταστικού μέρους κανονικοποιημένο ως προς το πλάτος στην επιφάνεια. Συγκεντρώσαμε όλες τις ιδιοσυναρτήσεις τόσο του πραγματικού όσο και του φανταστικού μέρους κάθε μοντέλου και κάθε καταστατικής ($N = 1.0, 0.75, 0.5, 0.25$) για ακολουθίες σταθερής βαρυονικής μάζας που αντιστοιχούν μόνο σε $1.400M_{\odot}$ βαρυτικής μάζας στο όριο μη περιστροφής, στο Παράρτημα Β'.

Όπως παρατηρείτε στο Σχήμα 5.9 (Δεξιά εικόνα), η κανονικοποιημένη ιδιοσυνάρτηση δε φτάνει την μονάδα, δηλαδή την ακτίνα του αστέρα και αυτό διότι αφαιρέσαμε το τελευταίο σημείο που βρίσκεται περίπου στην επιφάνεια του αστέρα καθαρά για λόγους αποφυγής του αριθμητικού ψευδή πάντοτε παρουσιάζει η επιφάνεια. Το σημείο ακριβώς πάνω στην επιφάνεια του αστέρα επηρεάζεται άμεσα από την τιμή της ατμόσφαιρας που προστέθηκε (βλ. §4.3.8).

Τέλος στο Σχήμα 5.10 φαίνονται οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις που πήραμε από όλα τα μοντέλα της ακολουθίας $1.506M_{\odot}$, πλην του μοντέλου με λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.997$ (το μοντέλο της ακολουθίας με τη χαμηλότερη περιστροφή), καθώς σε τόσο χαμηλές τιμές περιστροφής απαιτείται υψηλότερη ανάλυση. Αριστερά φαίνεται ο περιστροφικός τρόπος

[§] Όπως θα δούμε για τις υπόλοιπες καταστατικές ($N = 0.5, 0.25$) κάτι τέτοιο δεν ισχύει τουλάχιστον σε όλα τα μοντέλα. Έτσι θα δούμε ότι σε μερικά από αυτά πραγματικά ο r -mode ακολουθεί κυρίως το φανταστικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης.

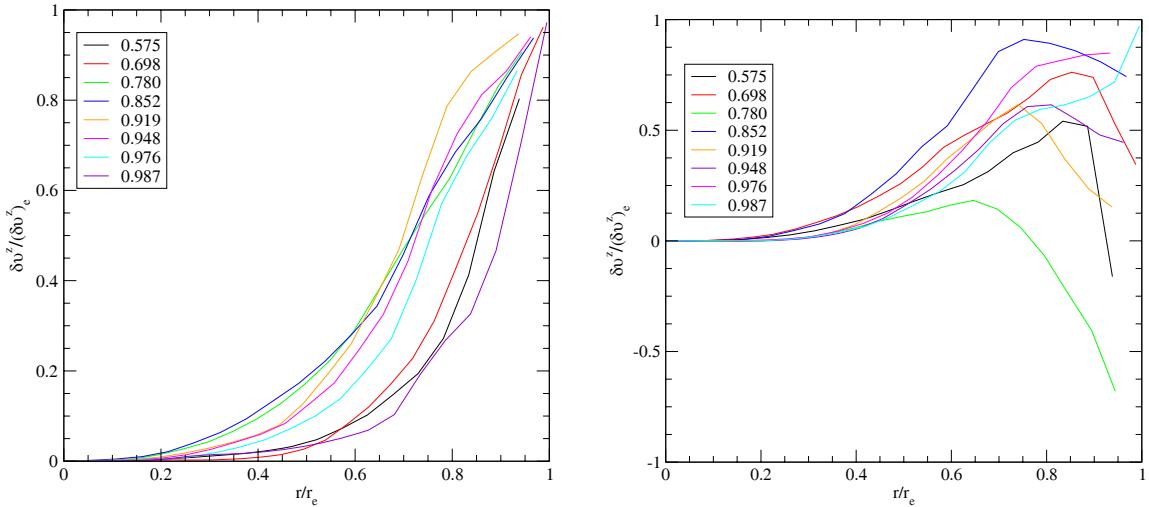
ταλάντωσης ενώ δεξιά κάποιος αδρανειακός τρόπος που για να μπορέσουμε με ακρίβεια να τον κατηγοριοποιήσουμε απαιτείται μεγαλύτερη μελέτη και σύγκριση με ιδιοσυναρτήσεις από τη θεωρία.



Σχήμα 5.9: Διάγραμμα πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλο με βαρυονική μάζα $1.506M_{\odot}$ και περιστροφή $r_p = 0.948 r_e$.

Αριστερά : Μη κανονικοποιημένο διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων. Στο σχήμα φαίνεται πως το πλάτος της ταλάντωσης της ταχύτητας δεν ακολουθεί το πραγματικό, αλλά ούτε και το φανταστικό μέρος, αλλά μια ενδιάμεση κατάσταση στην οποία επηρεάζεται από την παρουσία ενός επιπλέον αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης.

Δεξιά : Κανονικοποιημένο διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια. Μπορούμε να διακρίνουμε καθαρά την ύπαρξη δυο διαφορετικών τρόπων ταλάντωσης από τη συμπεριφορά του πραγματικού και φανταστικού μέρους της ιδιοσυνάρτησης, όπως προκύπτουν από μετασχηματισμό Fourier. Ο περιστροφικός τρόπος ανήκει σε εκείνη την ιδιοσυνάρτηση που αυξάνει μονότονα μέχρι την επιφάνεια αστέρα.



Σχήμα 5.10: Κανονικοποιημένο διάγραμμα ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με σταθερή βαρυονική μάζα $1.506M_\odot$ και διαφορετικές τιμές περιστροφής.

Αριστερά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων των περιστροφικών ταλαντώσεων. Όι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούνται είτε από το φανταστικό είτε από το πραγματικό μέρος, όλες όμως αυξάνονται μονότονα από το κέντρο μέχρι την επιφάνεια του αστέρα.

Δεξιά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ενός αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης κοντά στη συχνότητα του r -mode. Μπορούμε να διακρίνουμε καθαρά τη διαφορετική συμπεριφορά του από τον $l = m = 2$ περιστροφικό τρόπο ταλάντωσης. Χαρακτηριστικό τους είναι είται η αλλαγή προσίμου είται η μείωσή τους πριν φτάσουν στην επιφάνεια του αστέρα.

5.2 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 0.75$

Στην προηγούμενη ενότητα αναπτύξαμε αναλυτικά όλη τη διαδικασία εξαγωγής και ανάλυσης των δεδομένων. Στην ενότητα αυτή, όπως και στις υπόλοιπες, θα παρουσιάσουμε αποκλειστικά τις συχνότητες των περιστροφικών ταλαντώσεων.

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη ενότητα, οι μονάδες που δουλεύει ο υπολογιστικός κώδικας RNS είναι οι πολυτροπικές ($c = G = K = 1$). Η χλίμακα μήκους θα πρέπει να μετατραπεί σε μονάδες του CACTUS ($c = G = M_\odot = 1$). Από τη στιγμή που υπάρχει ελεύθερη επιλογή για την τιμή του K , θα πρέπει να επιλέξουμε την καλύτερη δυνατή περίπτωση ώστε να την τροποποιούμε κατάλληλα για κάθισε καταστατική εξίσωση. Ένας κατάλληλος τρόπος είναι να ορίσουμε ως σημείο αναφοράς κάθισε καταστατικής ένα μη περιστρεφόμενο μοντέλο. Το κίνητρο για αυτό προέρχεται από την πειραματική μέτρηση του λόγου μάζας προς ακτίνα γνωστού αστέρα νετρονίων και η οποία είναι $M/R = 0.23$ [23] (βλ. σελ 12). Εάν υποθέσουμε ότι η μάζα ενός αστέρα νετρονίων είναι M_{NS} , τότε όλες οι καταστατικές θα πρέπει να επιτρέπουν την ύπαρξη ενός μη περιστρεφόμενου μοντέλου με ακτίνα $R_{NS} = M_{NS}/0.23$. Μια πασιφανής εκλογή για την τιμή M_{NS} είναι η $1.4M_\odot$. Σύμφωνα λοιπόν με τις παραπάνω υποθέσεις, η πολυτροπική σταθερά παίρνει τις τιμές

$$\text{Για } N = 0.75 \rightarrow K^N = 112.49 \Rightarrow K = 543, \quad (5.5)$$

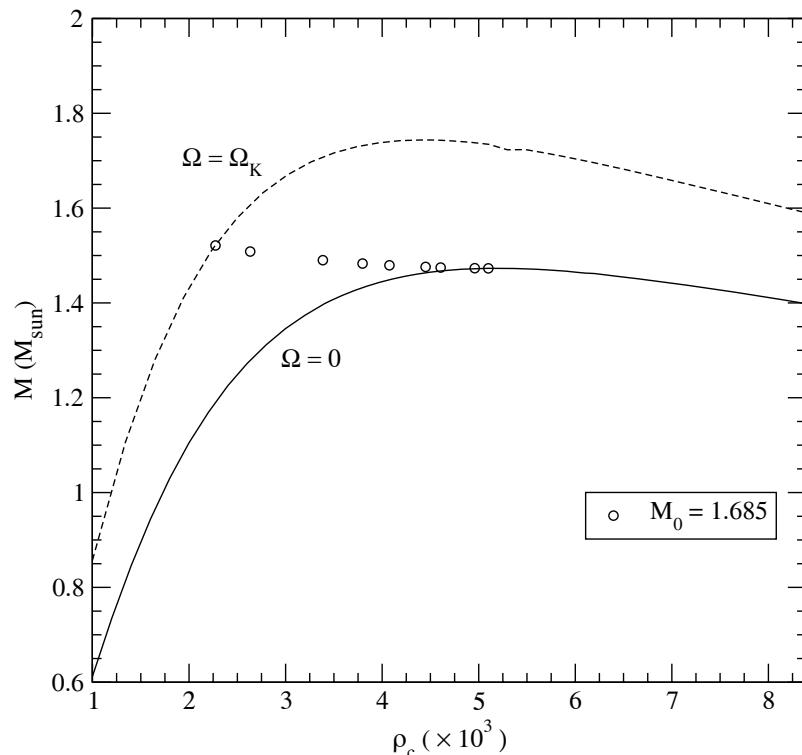
$$\text{Για } N = 0.50 \rightarrow K^N = 191.57 \Rightarrow K = 36699, \quad (5.6)$$

$$\text{Για } N = 0.25 \rightarrow K^N = 369.30 \Rightarrow K = 1.86 \cdot 10^{10}. \quad (5.7)$$

Με χρήση των παραπάνω τιμών και με τη βοήθεια και του Πίνακα 5.1, μπορούμε να κάνουμε οποιαδήποτε μετατροπή μονάδων θέλουμε.

Στο Σχήμα 5.11 φαίνεται η ακολουθία πολυτροπικού μοντέλου ισορροπίας με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.685M_\odot$. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί σε βαρυτική μάζα $1.473M_\odot$ στο όριο μη περιστροφής και η οποία είναι η μέγιστη τιμή της ακολουθίας των μη περιστρεφόμενων μοντέλων. Η εκλογή βαρυτικής μάζας $1.400M_\odot$ είναι πολύ κοντά στην παραπάνω τιμή και προτιμήσαμε να μη τη χρησιμοποιήσουμε αφού δεν θα έδινε αισθητές διαφορές στη συχνότητα των περιστροφικών ταλαντώσεων.

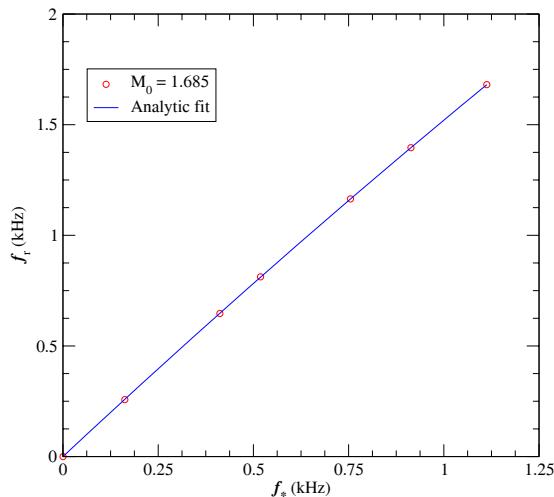
Στο πίνακα 5.4 αναγράφονται οι τιμές των συχνοτήτων του $l = m = 2$ περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης. Επιπλέον τρόποι ταλάντωσης έχουν καταγραφεί και σημειωθεί στον Πίνακα Α'.10 του Παραρτήματος Α. Παραλείποντας τα δύο τελευταία μοντέλα του Πίνακα 5.4, παρουσιάζουμε την αναλυτική προσαρμογή των συχνοτήτων τους συναρτήσει της συχνότητας περιστροφής στο Σχήμα 5.12.



Σχήμα 5.11: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας πολυτροπικών μοντέλων με $N = 0.75$ και $K = 543$ σε ένα διάγραμμα κεντρικής πυκνότητας ηρεμίας - βαρυτικής μάζας. Στο σχήμα φαίνονται η ακολουθία των μη-περιστρεφόμενων μοντέλων ($\Omega = 0$ μαύρη γραμμή), η ακολουθία των μέγιστα περιστρεφόμενων μοντέλων, πέρα από την οποία έχουμε απώλεια μάζας του αστέρα ($\Omega = \Omega_K$ διακεκομμένη γραμμή) και τέλος η ακολουθία σταθερής μάζας ηρεμίας. Η μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.685 M_\odot$ αντιστοιχεί σε βαρυτική μάζα $M = 1.473 M_\odot$ στο όριο μη περιστροφής.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	r-mode kHz	f_* kHz
5.100	6.923	1.0000	0.000	0.000
4.959	6.667	0.9979	0.258	0.162
4.606	6.044	0.9861	0.647	0.412
4.451	5.778	0.9772	0.812	0.519
4.075	5.156	0.9468	1.165	0.755
3.796	4.711	0.9152	1.396	0.914
3.387	4.089	0.8547	1.681	1.113
2.632	3.022	0.6953	1.844	1.341
2.274	2.551	0.5575	1.731	1.365

Πίνακας 5.4: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.685M_\odot$. Η τελευταία στήλη αναγράφει τη συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.



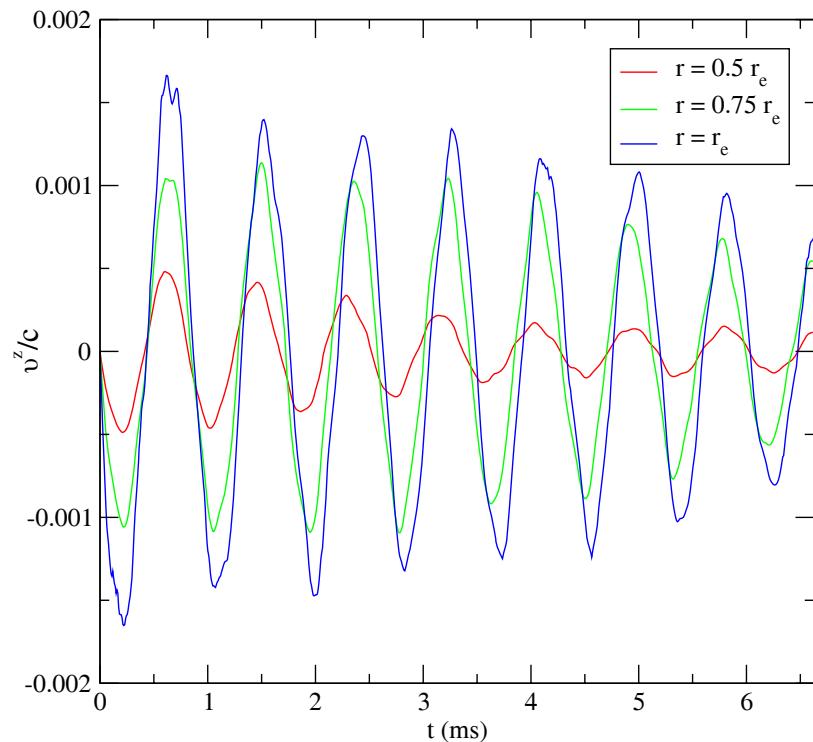
Σχήμα 5.12: Τετραγωνική προσαρμογή των συχνοτήτων της πολυτροπικής σχετικιστικής ακολουθίας μοντέλων ισορροπίας, σταθερής βαρυονικής μάζας $M_0 = 1.685M_\odot$.

Η συνάρτηση προσαρμογής των συχνοτήτων του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης (r-mode) είναι:

$$M_0 = 1.685M_\odot$$

$$f_r = 1.60921f_* - 0.0888661f_*^2. \quad (5.8)$$

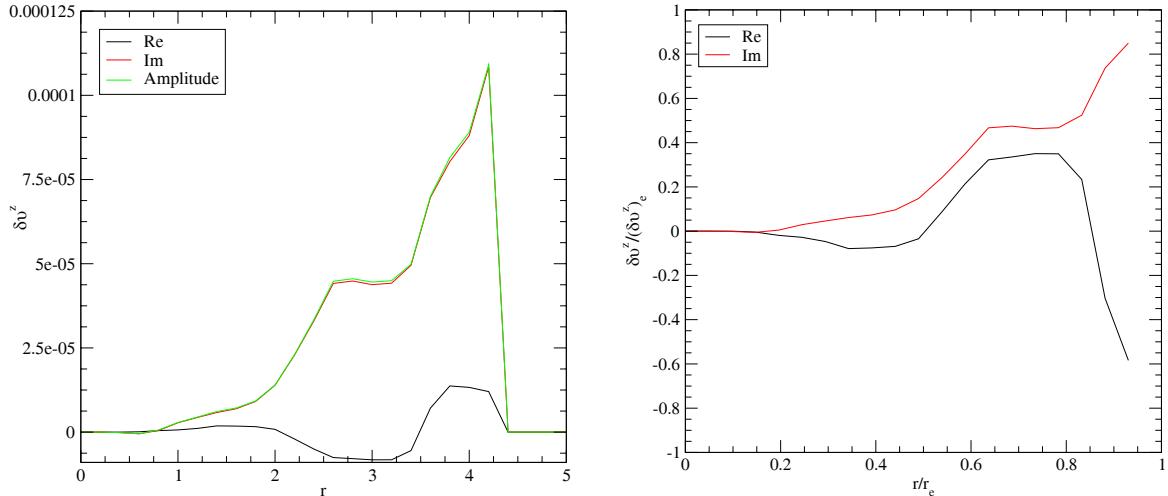
Στο Σχήμα 5.13 φαίνονται η χρονική εξέλιξη της ταχύτητας v^z σε συγκεκριμένα σημεία του άξονα x του αστέρα, κανονικοποιημένη με την ταχύτητα του φωτός. Το μοντέλο έχει λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.9468$. Βλέπουμε την αύξηση του πλάτους της ταλάντωσης καθώς απομακρυνόμαστε από το κέντρο του αστέρα μέχρι να φτάσουμε στην επιφάνειά του. Η ταλάντωση στην επιφάνεια του αρχικού μοντέλου ισορροπίας ($r_e = 4.514$) φαίνεται να επηρεάζεται και από μια άλλη συχνότητα ταλάντωσης, που την καταλαβαίνουμε από την παρουσία διπλής κορυφής.



Σχήμα 5.13: Χρονική εξέλιξη της ταχύτητας v^z σε τρια διαφορετικά σημεία του αστέρα ακτίνας r_e . Παρατηρούμε ότι το πλάτος της ταλάντωσης της ταχύτητας στο ισημερινό επίπεδο μειώνεται καθώς προχωρούμε από την επιφάνεια του αστέρα προς το κέντρο του.

Στο Παράρτημα Β' δίνουμε τις μορφές των ιδιοσυναρτήσεων του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης των μοντέλων ισορροπίας, καθώς και ενός άλλου τρόπου ταλάντωσης. Στο Σχήμα 5.14 σχεδιάσαμε το φανταστικό και πραγματικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης όπως προέκυψε από το μετασχηματισμό Fourier και το κανονικοποιήσαμε ως προς το πλάτος της και ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e .

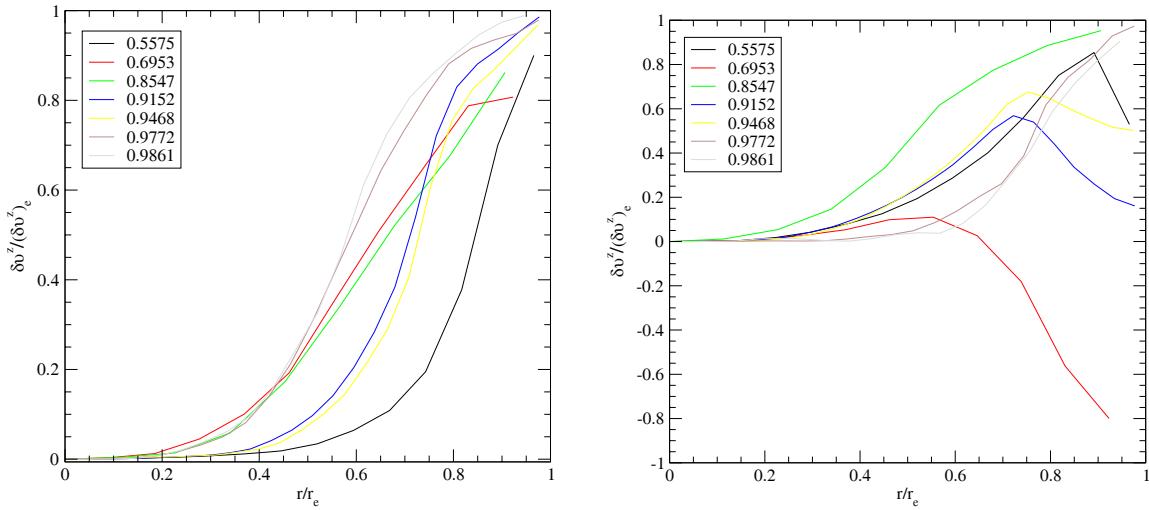
Τέλος, στο Σχήμα 5.15 φαίνονται οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις που πήραμε από όλα τα μοντέλα της ακολουθίας $1.685M_\odot$, πλην του μοντέλου με λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.9979$ (μοντέλο της ακολουθίας με τη χαμηλότερη περιστροφή), καθώς σε τόσο χαμηλές τιμές περιστροφής απαιτείται υψηλότερη ανάλυση. Αριστερά φαίνεται ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης ενώ δεξιά κάποιος αδρανειακός τρόπος που για να μπορέσουμε με ακρίβεια να τον κατηγοριοποιήσουμε απαιτείται μεγαλύτερη μελέτη και σύγκριση με ιδιοσυναρτήσεις από τη θεωρία.



Σχήμα 5.14: Διάγραμμα πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλο με σταθερή βαρυονική μάζα $1.685M_\odot$ και λόγο περιστροφής $r_p/r_e = 0.9979$.

Αριστερά : Μη κανονικοποιημένο διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων. Στο σχήμα φαίνεται πως το πλάτος της ταλάντωσης της ταχύτητας ακολουθεί το πραγματικό μέρος, στην περίπτωση αυτή μπορούμε να ξεχωρίσουμε τον r -mode.

Δεξιά : Κανονικοποιημένο διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια. Παρατηρούμε τη διαφορετική συμπεριφορά του πραγματικού και φανταστικού μέρους της ιδιοσυνάρτησης.



Σχήμα 5.15: Κανονικοποιημένο διάγραμμα ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με σταθερή βαρυονική μάζα $1.685M_\odot$ και διαφορετικές τιμές περιστροφής.

Αριστερά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης (r -mode) για διάφορες τιμές περιστροφής.

Δεξιά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ενός άλλου αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης. Παρατηρούμε την διαφορετική συμπεριφορά των ιδιοσυναρτήσεων από αυτές του r -mode.

5.3 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 0.50$

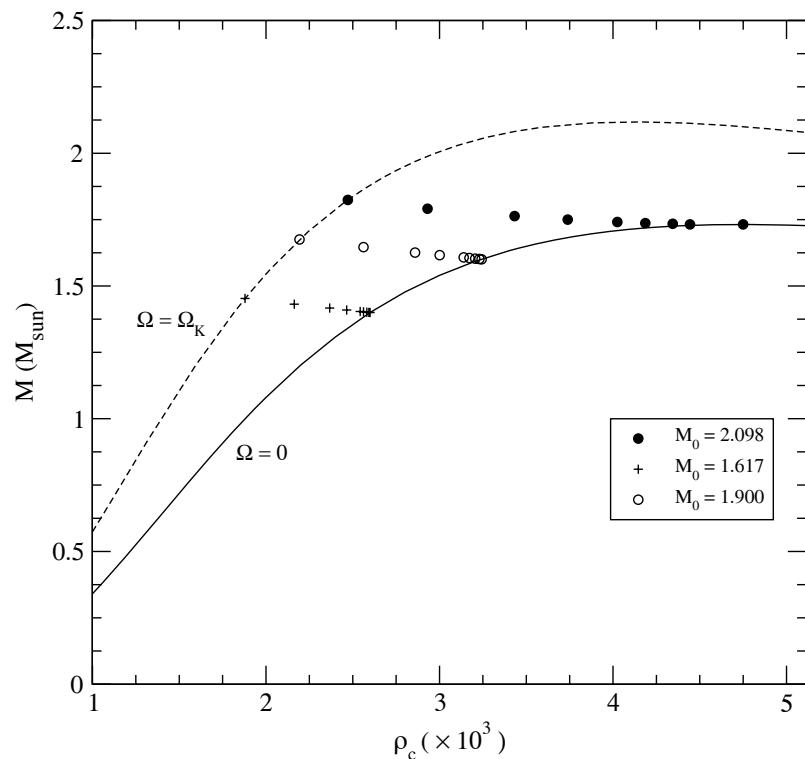
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε σχετικιστικά μοντέλα ισορροπίας με πολυτροπικό δείκτη $N = 0.50$, πολυτροπικής σταθεράς $K = 36699$.

Στο Σχήμα 5.16 φαίνονται οι ακολουθίες των πολυτροπικών μοντέλων ισορροπίας με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.617M_{\odot}$, $2.098M_{\odot}$ και $1.900M_{\odot}$. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στο όριο μη περιστροφής και σε βαρυτικές μάζες $1.400M_{\odot}$, την οποία την επιλέξαμε για όλες τις καταστατικές, $1.73144M_{\odot}$ η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη βαρυτική μάζα της ακολουθίας των μη περιστρεφόμενων μοντέλων της καταστατικής $N = 0.50$ και τέλος $1.600M_{\odot}$, μια μεσαία τιμή μεταξύ των δύο παραπάνω μαζών.

Στους Πίνακες 5.5, 5.6 και 5.7 αναγράφονται οι τιμές των συχνοτήτων του $l = m = 2$ περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης. Επιπλέον τρόποι ταλάντωσης έχουν καταγραφεί και σημειωθεί στους Πίνακες A'16, A'17 και A'18 του Παραρτήματος A'. Παραλείποντας τα δύο ταχύτερα μοντέλα κάθε ακολουθίας, παρουσιάζουμε την αναλυτική προσαρμογή των συχνοτήτων τους συναρτήσει της συχνότητας περιστροφής στο Σχήμα 5.17.

ρ_c $(\times 10^{-3})$	ε_c $(\times 10^{-3})$	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz
2.600	2.922	1.00000	0.000	0.000
2.593	2.913	0.99480	0.210	0.318
2.581	2.897	0.98580	0.344	0.524
2.562	2.871	0.97140	0.486	0.741
2.543	2.845	0.95723	0.592	0.902
2.465	2.740	0.90136	0.878	1.312
2.367	2.610	0.83404	1.104	1.602
2.163	2.349	0.70412	1.356	1.877
1.879	2.001	0.49751	1.458	1.782

Πίνακας 5.5: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.617M_{\odot}$. Η προ-τελευταία στήλη αναγράφει τη συχνότητα περιστροφής του αστέρα, $f_* = \Omega/2\pi$.



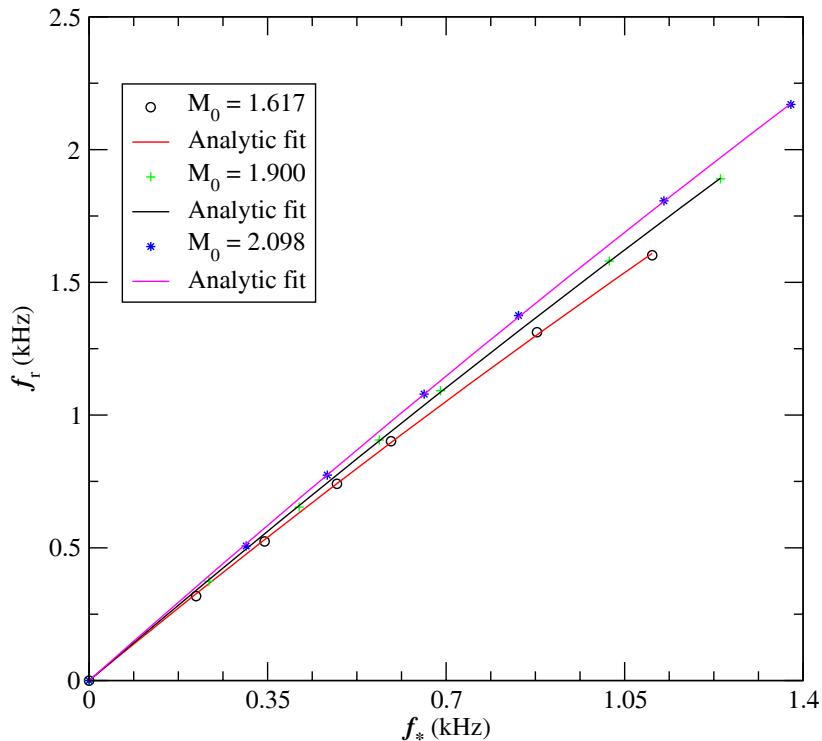
Σχήμα 5.16: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας πολυτροπικών μοντέλων με $N = 0.50$ και $K = 36699$ σε ένα διάγραμμα κεντρικής πυκνότητας ηρεμίας - βαρυτικής μάζας. Στο σχήμα φαίνονται η ακολουθία των μη-περιστρεφόμενων μοντέλων ($\Omega = 0$ μαύρη γραμμή), η ακολουθία των μέγιστα περιστρεφόμενων μοντέλων, πέρα από την οποία έχουμε απώλεια μάζας του αστέρα ($\Omega = \Omega_K$ διακεκομμένη γραμμή) και οι τρείς ακολουθίες των πολυτροπικών μοντέλων ισορροπίας με σταθερή βαρυονική μάζα.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz
3.242	3.867	1.000000	0.000	0.000
3.229	3.847	0.995088	0.235	0.374
3.206	3.810	0.984744	0.412	0.653
3.172	3.758	0.970582	0.569	0.906
3.139	3.706	0.956290	0.689	1.092
3.001	3.497	0.897760	1.020	1.580
2.859	3.289	0.837530	1.238	1.890
2.562	2.871	0.709920	1.503	2.154
2.193	2.386	0.507910	1.596	2.073

Πίνακας 5.6: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.900M_\odot$. Η προ-τελευταία στήλη αναγράφει την συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz
4.750	6.716	1.0000	0.000	0.000
4.444	6.055	0.9943	0.308	0.507
4.343	5.846	0.9867	0.467	0.774
4.186	5.533	0.9726	0.657	1.079
4.024	5.220	0.9528	0.842	1.375
3.739	4.698	0.9068	1.127	1.807
3.433	4.176	0.8426	1.376	2.170
2.931	3.393	0.7078	1.646	2.418
2.472	2.749	0.5165	1.711	2.273

Πίνακας 5.7: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 2.098M_\odot$. Η προ-τελευταία στήλη αναγράφει την συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.



Σχήμα 5.17: Τετραγωνική προσαρμογή των συχνοτήτων της πολυτροπικής σχετικιστικής ακολουθίας μοντέλων ισορροπίας $N = 0.50$, $K = 36699$, για τρεις διαφορετικές ακολουθίες σταθερής βαρυονικής μάζας.

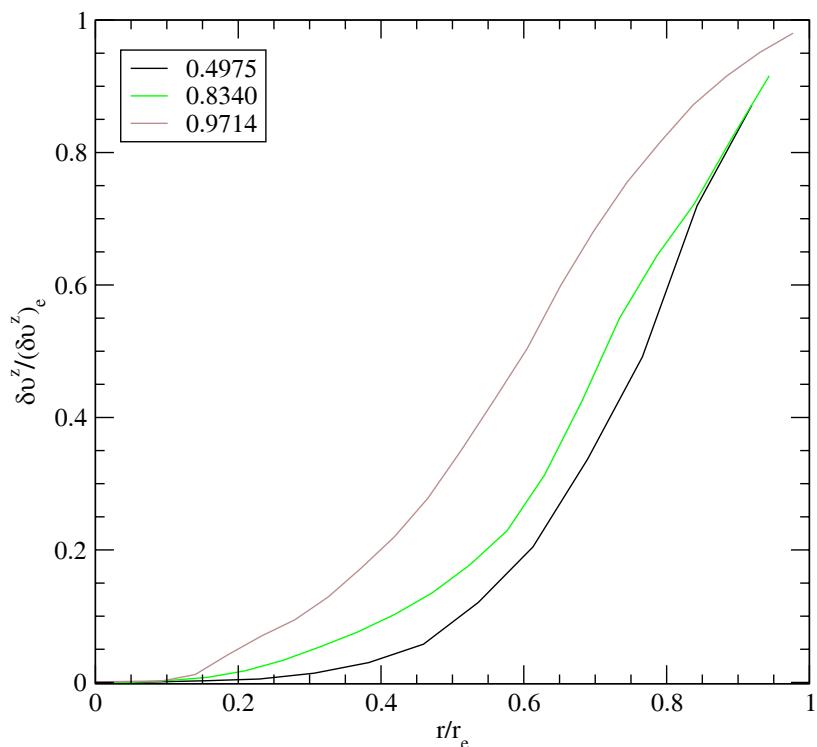
Οι συναρτήσεις προσαρμογής των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων (r-mode) είναι:

$$M_0 = 1.617M_{\odot} \quad f_r = 1.58077f_* - 0.111796f_*^2. \quad (5.9)$$

$$M_0 = 1.900M_{\odot} \quad f_r = 1.63683f_* - 0.0874238f_*^2. \quad (5.10)$$

$$M_0 = 2.098M_{\odot} \quad f_r = 1.70037f_* - 0.0879633f_*^2. \quad (5.11)$$

Στο Παράρτημα Β' δίνουμε τις μορφές των ιδιοσυναρτήσεων του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης των μοντέλων ισορροπίας, καθώς και ενός άλλου τρόπου ταλάντωσης μόνο για την ακολουθία σταθερής μάζας ηρεμίας $1.617M_{\odot}$. Στο Σχήμα 5.18 σχεδιάζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης μόνο για τρεις διαφορετικές τιμές περιστροφής του αστέρα.



Σχήμα 5.18: Κανονικοποιημένο διάγραμμα ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x ενός μοντέλου με σταθερή βαρυονική μάζα $1.617M_{\odot}$ για τρεις διαφορετικούς λόγους περιστροφής του.

5.4 Πολυτροπικό μοντέλο $N = 0.25$

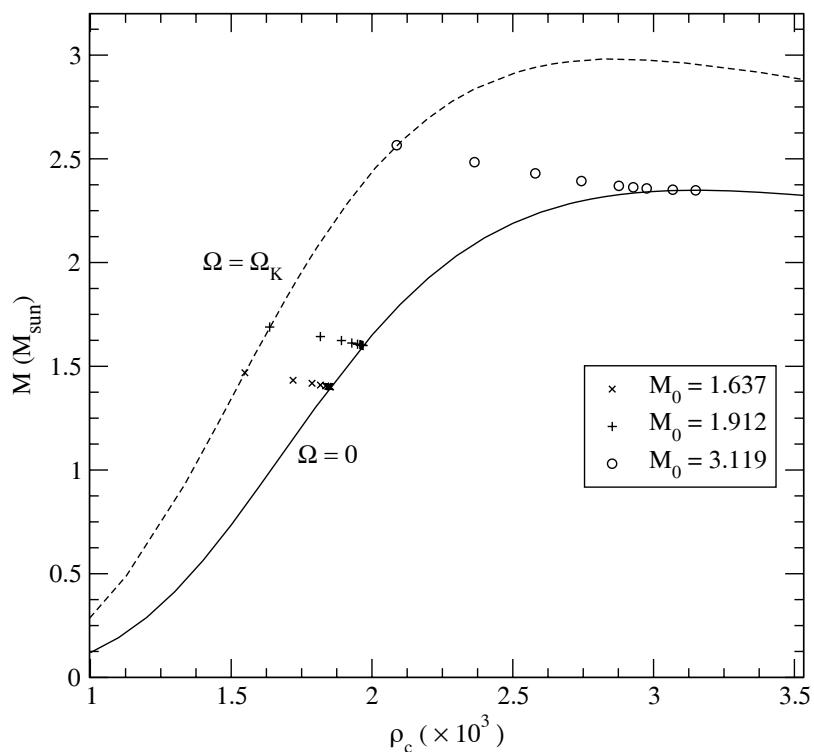
Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε σχετικιστικά μοντέλα ισορροπίας με πολυτροπικό δείκτη $N = 0.25$, πολυτροπικής σταθεράς $K = 1.86 \cdot 10^{10}$.

Στο Σχήμα 5.19 φαίνονται οι ακολουθίες των πολυτροπικών μοντέλων ισορροπίας με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.637M_{\odot}$, $3.119M_{\odot}$ και $1.912M_{\odot}$. Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στο όριο μη περιστροφής και σε βαρυτικές μάζες $1.400M_{\odot}$, την οποία την επιλέξαμε για όλες τις καταστατικές, $2.34851M_{\odot}$ η οποία αντιστοιχεί στη μέγιστη βαρυτική μάζα της ακολουθίας των μη περιστρεφόμενων μοντέλων της καταστατικής $N = 0.25$ και τέλος $1.600M_{\odot}$, μια ενδιάμεση τιμή μεταξύ των δυο παραπάνω μαζών.

Στους Πίνακες 5.8, 5.9 και 5.10 αναγράφονται οι τιμές των συχνοτήτων του $l = m = 2$ περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι στους πίνακες αυτούς δίνουμε ακρίβεια μέχρι το πέμπτο δεκαδικό σημείο στις τιμές των ρ_c και ε_c , ενώ φτάνουμε και στο έκτο δεκαδικό ψηφίο για την περιστροφή του αστέρα (λ όγος r_p/r_e). Όπως αναφέραμε στην §4.1, ο κώδικας RNS για να παράγει ένα μοντέλο χρειάζεται την κεντρική πυκνότητα ρ_c και το λόγο των αξόνων r_p/r_e , που έμμεσα δηλώνει την περιστροφή του αστέρα. Επειδή η περίπτωση της καταστατικής με πολυτροπικό δείκτη $N = 0.25$, δίνει ένα ρευστό σχεδόν ασυμπίεστο, έπρεπε να προσθέσουμε ένα παράγοντα χαλάρωσης, ώστε να κάνουμε πιο ήπια τη σύγκλιση του συστήματος των υδροδυναμικών εξισώσεων με τις εξισώσεις του χωροχρόνου (`-c value`)[¶].

Επιπλέον τρόποι ταλάντωσης έχουν καταγραφεί και σημειώθεί στους Πίνακες A'.24, A'.25 και A'.26 του Παραρτήματος A'. Παραλείποντας τα δυο ταχύτερα μοντέλα κάθε ακολουθίας, παρουσιάζουμε την αναλυτική προσαρμογή των συχνοτήτων τους συναρτήσει της συχνότητας περιστροφής στο Σχήμα 5.20.

[¶]Η προκαθορισμένη τιμή είναι το 1.0. Εμείς χρησιμοποιήσαμε τον παράγοντα 0.8 ενώ υπήρχαν και μοντέλα που εξήχθησαν και με χαμηλότερη τιμή του παραπάνω παράγοντα.



Σχήμα 5.19: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας πολυτροπικών μοντέλων με $N = 0.25$ και $K = 1.86 \cdot 10^{10}$ σε ένα διάγραμμα κεντρικής πυκνότητας - βαρυτικής μάζας. Στο σχήμα φαίνονται η ακολουθία των μη-περιστρεφόμενων μοντέλων ($\Omega = 0$ μαύρη γραμμή), η ακολουθία των μέγιστα περιστρεφόμενων μοντέλων, πέρα από την οποία έχουμε απώλεια μάζας του αστέρα ($\Omega = \Omega_K$, διακεκομμένη γραμμή) και οι τρείς ακολουθίες των πολυτροπικών μοντέλων ισορροπίας με σταθερή βαρυονική μάζα.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz
1.85289	1.95444	1.000000	0.000	0.000
1.85038	1.95126	0.993213	0.233	0.349
1.84700	1.94692	0.982055	0.358	0.534
1.84314	1.94205	0.971348	0.451	0.656
1.83565	1.93257	0.951345	0.587	0.878
1.81693	1.90902	0.903451	0.817	1.238
1.78705	1.87180	0.833076	1.062	1.573
1.71989	1.78990	0.702859	1.342	1.852
1.54870	1.59020	0.428125	1.520	1.742

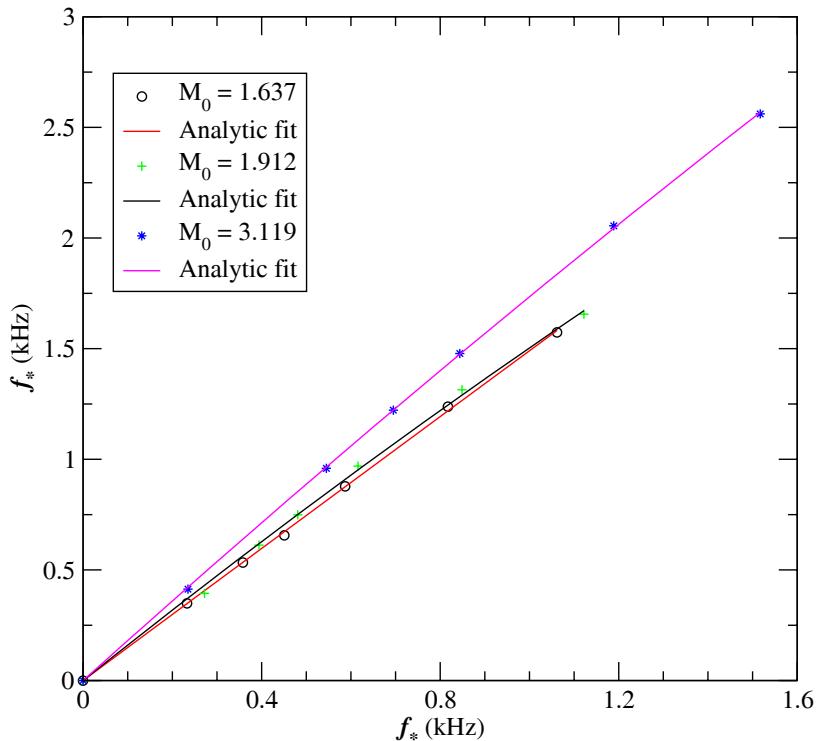
Πίνακας 5.8: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.637M_\odot$. Η προ-τελευταία στήλη αναγράφει τη συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz
1.96849	2.10594	1.000000	0.000	0.000
1.96503	2.10127	0.990420	0.272	0.394
1.96101	2.09585	0.980619	0.394	0.612
1.95697	2.09044	0.970732	0.481	0.749
1.94888	2.07961	0.951897	0.616	0.969
1.92849	2.05253	0.906743	0.849	1.314
1.89175	2.00440	0.831817	1.122	1.656
1.81693	1.90902	0.704156	1.407	1.990
1.63675	1.69140	0.438536	1.584	1.924

Πίνακας 5.9: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.912M_\odot$. Η προ-τελευταία στήλη αναγράφει τη συχνότητα περιστροφής του αστέρα $f_* = \Omega/2\pi$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz
3.15000	4.59200	1.000000	0.000	0.000
3.06818	4.33252	0.996784	0.235	0.413
2.97609	4.06174	0.982923	0.545	0.959
2.92780	3.92820	0.971679	0.695	1.222
2.87680	3.79300	0.957138	0.844	1.478
2.74341	3.46601	0.907503	1.189	2.055
2.58000	3.11160	0.829296	1.517	2.561
2.36350	2.70650	0.703363	1.804	2.897
2.08800	2.27250	0.488673	1.909	2.775

Πίνακας 5.10: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 3.119M_\odot$. Η προ-τελευταία στήλη αναγράφει την συχνότητα περιστροφής του αστέρα, $f_* = \Omega/2\pi$.



Σχήμα 5.20: Τετραγωνική προσαρμογή των συχνοτήτων της πολυτροπικής σχετικιστικής ακολουθίας μοντέλων ισορροπίας $N = 0.25$, $K = 1.86 \cdot 10^{10}$, για τρεις διαφορετικές ακολουθίες σταθερής βαρυονικής μάζας.

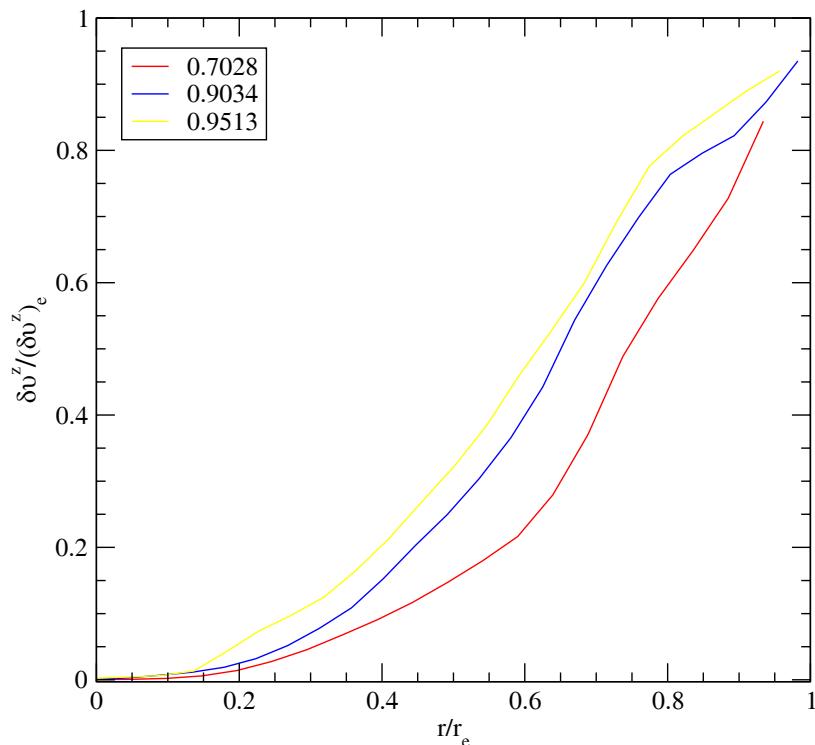
Οι συναρτήσεις προσαρμογής των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων (r-mode) είναι:

$$M_0 = 1.637M_{\odot} \quad f_r = 1.49422f_* - 0.003980488f_*^2. \quad (5.12)$$

$$M_0 = 1.912M_{\odot} \quad f_r = 1.6132f_* - 0.110047f_*^2. \quad (5.13)$$

$$M_0 = 3.119M_{\odot} \quad f_r = 1.81505f_* - 0.0806967f_*^2. \quad (5.14)$$

Στο Παράρτημα Β' δίνουμε τις μορφές των ιδιοσυναρτήσεων του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης των μοντέλων ισορροπίας, καθώς και ενός άλλου τρόπου ταλάντωσης, μόνο για την ακολουθία σταθερής μάζας ηρεμίας $1.637M_{\odot}$. Στο Σχήμα 5.21 σχεδιάζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης μόνο για τρεις διαφορετικές τιμές περιστροφής του αστέρα.



Σχήμα 5.21: Κανονικοποιημένο διάγραμμα ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x ενός μοντέλου με σταθερή βαρυονική μάζα $1.637M_{\odot}$ για τρεις διαφορετικούς λόγους περιστροφής του.

5.5 Διακύμανση των συχνοτήτων των περιστροφικών ταλαντώσεων

Έχοντας καταγράψει όλες τις τιμές των συχνοτήτων από περιστροφικές ταλαντώσεις των μοντέλων ισορροπίας για όλες τις παραπάνω καταστατικές, τις αποτυπώνουμε σε ένα διάγραμμα συχνότητας περιστροφής - συχνότητας ταλάντωσης.

Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε τις αναλυτικές συναρτήσεις προσαρμογής, που εξήγαμε από τις συχνότητες των περιστροφικών ταλαντώσεων. Στις συναρτήσεις αυτές δεν ανήκουν τα δύο ταχύτερα μοντέλα κάθε ακολουθίας, όπως αναφέραμε στις παραπάνω ενότητες. Για την εξαγωγή της διακύμανσης των συχνοτήτων ακολουθήσαμε το εξής σκεπτικό.

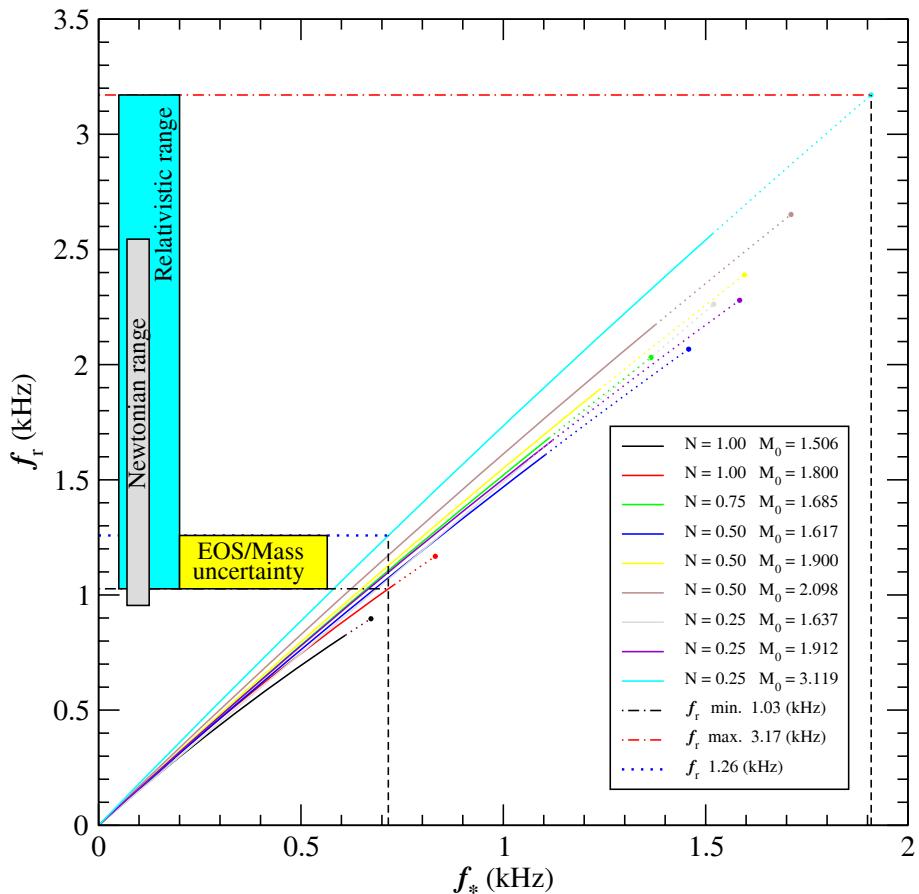
Θα πρέπει να οριοθετήσουμε τη συχνότητα περιστροφής των μοντέλων. Το κάτω όριο προκύπτει πολύ απλά από την παρατηρούμενη τιμή των 716 Hz, του πιο γρήγορα περιστρεφόμενου γνωστού μέχρι σήμερα πάλσαρ. Το άνω όριο είναι δύσκολο να προβλευθεί, καθώς δε γνωρίζουμε μέχρι που μπορεί να φτάσει η συχνότητα περιστροφής ενός ρεαλιστικού μοντέλου αστέρα νετρονίων. Σίγουρα ένα άνω όριο προκύπτει από τη θεωρία, εάν επιβάλλουμε την αιτιότητα ως μοναδική απαίτηση των καταστατικών εξισώσεων, τότε ένας βαρυτικά δέσμιος αστέρας δεν μπορεί να περιστρέψεται ταχύτερα από 0.28 ms (περίπου 3.57 kHz) [46], αλλά κάτι τέτοιο ξεφεύγει πολύ από τα μοντέλα που προσομοιώσαμε.

Για το λόγω αυτό, αποφασίσαμε να βάλουμε ως μέγιστο όριο περιστροφής το ταχύτερο μοντέλο που προσομοιώσαμε. Το μοντέλο αυτό ανήκει στην πολυτροπική καταστατική εξισώση με πολυτροπικό δείκτη $N = 0.25$, σταθερής μάζας ηρεμίας $M_0 = 3.119M_{\odot}$. Η συχνότητα περιστροφής αυτού του μοντέλου είναι 1.909 kHz, που αντιστοιχεί σε περίοδο περιστροφής ~ 0.524 ms. Το Σχήμα 5.22 δείχνει ακριβώς αυτά τα όρια. Παρατηρήστε ότι σε κάθε ακολουθία έχουμε προσθέσει το ταχύτερο μοντέλο της, αυτό στο οποίο η ταχύτητα περιστροφής φτάνει το όριο του Kepler. Το μοντέλο αυτό προστέθηκε από την τετραγωνική συνάρτηση προσαρμογής του κάθε μοντέλου, επεκτείνοντάς το μέχρι την συχνότητα περιστροφής του mass-shedding limit.

Τα παραπάνω όρια συχνότητας περιστροφής παρατηρούμε ότι αντιστοιχούν σε κάποια ελάχιστη και μέγιστη τιμή συχνότητας των r-mode. Οι τιμές αυτές είναι:

Ελάχιστη τιμή συχνότητας των περιστροφικών ταλαντώσεων 1.0268 kHz

Μέγιστη τιμή συχνότητας των περιστροφικών ταλαντώσεων 3.17085 kHz



Σχήμα 5.22: Συγκεντρωτικό διάγραμμα των αναλυτικών συναρτήσεων προσαρμογής από τις συχνότητες των $l = m = 2$ περιστροφικών τρόπων ταλάντωσης για διάφορες καταστατικές εξισώσεις. Παρατηρούμε τη διακύμανσή τους μεταξύ 1.02 και 3.17 kHz για συχνότητες περιστροφής από 0.716 έως 1.909 kHz. Στο σχήμα υπάρχει επίσης και το Νευτώνειο όριο των αντίστοιχων συχνοτήτων. Παρατηρούμε την μεγέθυνσή της περιοχής διακύμανσης και την μετατόπισή της προς ανώτερες συχνότητες των r -modes. Επιπλέον επεκτείνοντας την συχνότητα περιστροφής των 0.716 kHz μέχρι την ακολουθία $N = 0.25, M_0 = 3.119$ παίρνουμε και την περιοχή της αβεβαιότητας ως προς την μάζα των καταστατικών εξισώσεων που εξελίξαμε. Η περιοχή αυτή κυμαίνεται μεταξύ 1.02 και 1.26 kHz.

5.6 Συμπεράσματα-Συζήτηση

Ο κύριος σκοπός της εργασίας αυτής ήταν πρώτον η καταγραφή των συχνοτήτων και δεύτερον η διαπίστωση της διακύμανσης που φαίνεται να έχουν για διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις και τιμές μαζών. Αν περιμένουμε λοιπόν να εντοπίσουμε κύματα βαρύτητας, πηγή των οποίων είναι οι ασταθείς στην βαρυτική ακτινοβολία, περιστροφικοί $l = m = 2$ τρόποι ταλάντωσης, θά αναμένουμε να τα εντοπίσουμε σε ένα παράθυρο συχνότητας από 1.02 έως 3.17 kHz περίπου.

Στο Σχήμα 5.22 έχουμε προσθέσει εκτός από τη σχετικιστική περιοχή διακύμανσης των συχνοτήτων (κυανή περιοχή) των περιστροφικών τρόπων ταλάντωσης και τη Νευτώνεια περιοχή (γκρι περιοχή) αυτών όπως προκύπτει από τη προσέγγιση χαμηλής περιστροφής. Θυμίζουμε πως οι συχνότητες που αντιλαμβάνεται ένας αδρανειακός παρατηρητής στο άπειρο από τους περιστροφικούς $l = m = 2$ τρόπους ταλάντωσης δίνεται από την σχέση

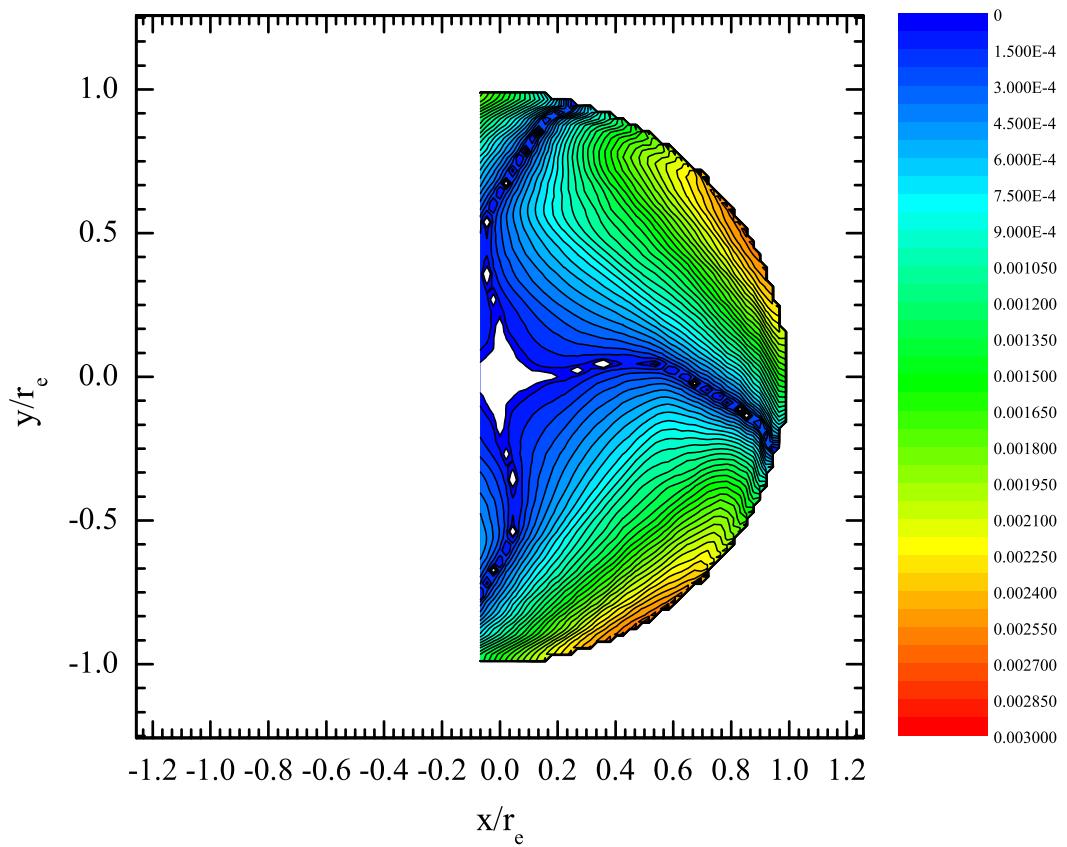
$$f_i = \frac{4}{3} f_*$$

Παρατηρούμε πως η περιοχή αυτή στη Σχετικότητα μεγεθύνεται και μεταπολίζεται προς υψηλότερες συχνότητες, γεγονός που επιβεβαιώνεται και από μεμονομένα μοντέλα που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενες εργασίες [73, 82].

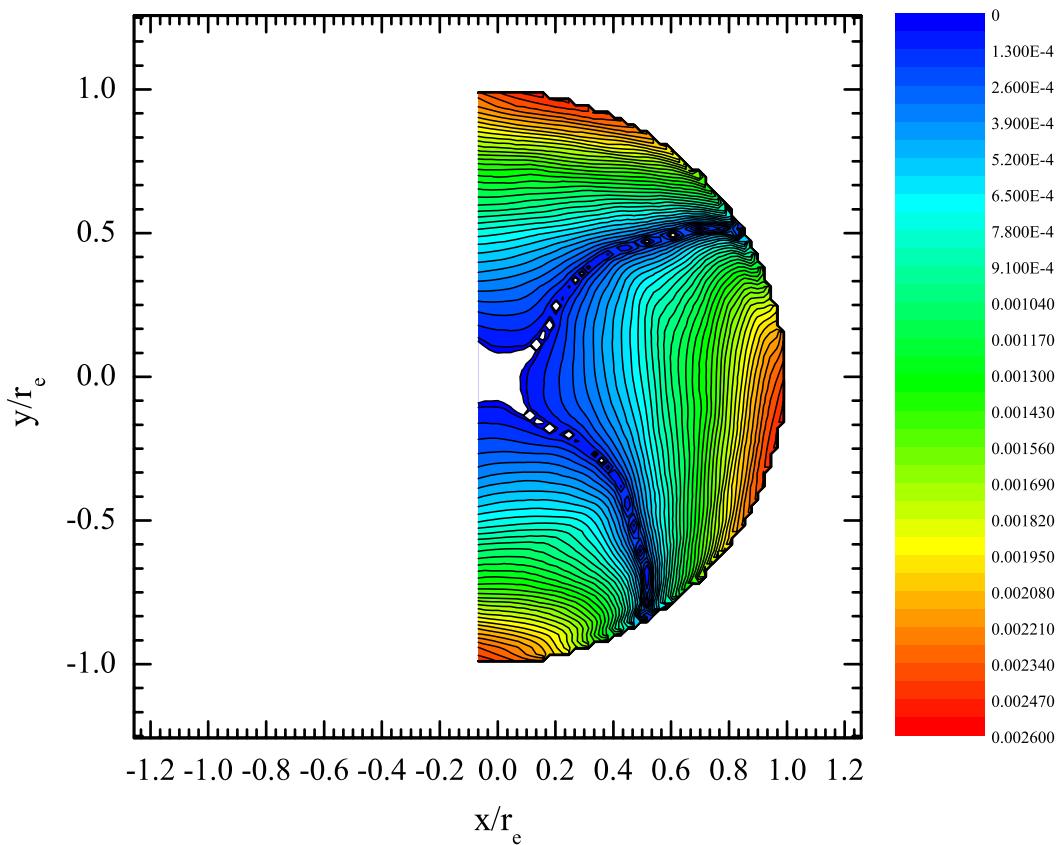
Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονίσουμε πως μοντέλα που προέρχονται από την ακολουθία $M_0 = 1.506 M_\odot$ της πολυτροπικής καταστατικής εξίσωσης $N = 1.0$ θα πρέπει να αποκλειστούν από την λίστα των πιθανών μοντέλων πηγής των οποίων είναι οι ασταθείς στη βαρυτική ακτινοβολία, περιστροφικοί $l = m = 2$ τρόποι ταλάντωσης, αφού το ταχύτερο μοντέλο τους δεν φτάνει το όριο των 716 Hz.

Με λίγα λόγια καθορίσαμε την περιοχή ανίχνευσης των βαρυτικών κυμάτων που πιθανόν να προέρχονται από περιστροφικές $l = m = 2$ ταλαντώσεις. Τα αποτελέσματα αναμένεται να φανούν χρήσιμα στην ανάλυση δεδομένων από τους ανιχνευτές βαρυτικής ακτινοβολίας νέας γενιάς.

Το δεύτερο αξιοσημείωτο της εργασίας αυτής είναι η εύρεση ενός άλλου αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης κοντά στη συχνότητα του r-mode, ο οποίος τον εντοπίστηκε από τη διαφορετική μορφή του πραγματικού και φανταστικού μέρους της ιδιοσυνάρτησης, όπως προέκυψε από τον μετασχηματισμό Fourier. Περαιτέρω ανάλυση, η οποία έπειται να γίνει στο μέλλον, θα δώσει απαντήσεις για το είδος και την ακριβή συμπεριφορά αυτού του τρόπου ταλάντωσης. Στα Σχήματα 5.23 και 5.24 παρουσιάζουμε το μετασχηματισμό Fourier της ταχύτητας του ρευστού στο επίπεδο xy , κανονικοποιημένων ως προς την ακτίνα του αστέρα (πραγματικό και φανταστικό μέρος). Το αποτέλεσμα οφείλεται στη συμβολή μεταξύ δύο τρόπων ταλάντωσης.



Σχήμα 5.23: Μετασχηματισμός Fourier (Πραγματικό μέρος) της δv^z στο επίπεδο xy στη συχνότητα του r -mode. Το αποτέλεσμα οφείλεται στη συμβολή του r -mode με άλλο αδρανειακό τρόπο ταλάντωσης.



Σχήμα 5.24: Μετασχηματισμός Fourier (Φανταστικό μέρος) της δv^z στο επίπεδο xy στη συχνότητα του r -mode. Το αποτέλεσμα οφείλεται στη συμβολή του r -mode με άλλο αδρανειακό τρόπο ταλάντωσης.

Παράρτημα Α'

ΠΙΝΑΚΕΣ

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζουμε τους κυριότερους πίνακες δεδομένων που αποκτήσαμε για κάθε μοντέλο από το CACTUS. Οι πίνακες παρουσιάζονται ανά καταστατική πολυτροπική εξίσωση, διαφορετικού πολυτροπικού δείκτη. Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι πάντα οι γεωμετροποιημένες $c = G = M_{\odot} = 1$, ενώ σε περίπτωση που δε γίνεται χρήση αυτών, θα το αναφέρουμε ρητά. Η χρήση των γεωμετροποιημένων μονάδων ήταν υποχρεωτική, καθώς σε αυτές τις μονάδες έχει γραφεί ο υπολογιστικός κώδικας CACTUS.

Πρέπει να τονίσουμε ότι στην περίπτωση της βαρυτικής και βαρυονικής μάζας, έχουμε χρησιμοποιήσει στρογγυλοποίηση ως προς το τρίτο δεκαδικό ψηφίο, αλλά σε μερικές τιμές, έπρεπε να προχωρήσουμε μέχρι και στο πέμπτο δεκαδικό ψηφίο. Ο λόγος ήταν επειδή κατά τη διάρκεια εύρεσης της μέγιστης μάζας στην ακολουθία του μη περιστρεφόμενου μοντέλου και κοντά στην τιμή αυτή, η διαφορά κυμαίνονταν στο τέταρτο με πέμπτο δεκαδικό ψηφίο. Έτσι, στα πρώτα μοντέλα και πριν φτάσουμε ακόμα στην μέγιστη μάζα, χρησιμοποιείται ακρίβεια τρίτου δεκαδικού (π.χ. 1.20500), ενώ κοντά στην μέγιστη μάζα, χρησιμοποιείται ακρίβεια ως προς το πέμπτο δεκαδικό (π.χ. 1.79858).

Στους Πίνακες καταγραφής συχνοτήτων, έχουμε συμπεριλάβει μόνο εκείνες τις συχνότητες που μπορούσαμε να εντοπίσουμε από τον Μετασχηματισμό Fourier. Μεγαλύτερη ανάλυση θα έδινε πολλούς περισσότερους τρόπους ταλάντωσης. Όπου υπάρχει το σύμβολο —, σημαίνει πως δε μπορέσαμε να εντοπίσουμε άλλη συχνότητα ή ότι ήταν πρακτικά πολύ μικρού πλάτους, και η καταγραφή της τιμής της ήταν σχεδόν αδύνατη.

Στο Πίνακα της επόμενης σελίδας, δίνονται οι ορισμοί των συμβόλων που χρησιμοποιήθηκαν σε Πίνακες και Σχήματα της εργασίας αυτής.

Συμβολισμός	Ονομασία
ρ_c	<i>Κεντρική πυκνότητα μάζα ηρεμίας</i>
ε_c	<i>Κεντρική πυκνότητα ενέργειας</i>
M	<i>Βαρυτική μάζα</i>
M_0	<i>Μάζα ηρεμίας \equiv Βαρυονική μάζα</i>
R_e	<i>Περιφερειακή ακτίνα του ισημερινού</i>
r_e	<i>Συντεταγμένη ισημερινή ακτίνα</i>
Ω	<i>Γωνιακή ταχύτητα του αστέρα</i>
Ω_K	<i>Γωνιακή ταχύτητα του αστέρα στο όριο Kepler</i>
T/W	<i>Περιστροφική/βαρυτική ενέργεια</i>
r_p/r_e	<i>Πολική/ισημερινή ακτίνα \equiv Καθορίζει την ταχύτητα περιστροφής</i>
f_*	<i>Συχνότητα περιστροφής του αστέρα $\Omega/2\pi$</i>
f_r	<i>Συχνότητα των ακτινικών περιστροφικών ταλαντώσεων (r-mode)</i>
$\delta v^z/v^z$	<i>Κανονικοποιημένη κάθετη ταχύτητα στο ισημερινό επίπεδο</i>

Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 1.0$

Ακολουθία Μη-Περιστρεφόμενων Μοντέλων

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	M_0 M_\odot	R_e	r_e	Ω_K ($\times 10^{-2}$)
0.800	0.864	1.14000	1.20500	10.420	9.249	3.172
0.850	0.922	1.17600	1.24600	10.330	9.112	3.268
0.900	0.981	1.20900	1.28400	10.230	8.980	3.361
0.950	1.040	1.24000	1.32000	10.140	8.853	3.451
1.000	1.100	1.27000	1.35300	10.050	8.731	3.538
1.050	1.160	1.29700	1.38500	9.959	8.614	3.623
1.100	1.221	1.32200	1.41400	9.874	8.501	3.706
1.150	1.282	1.34600	1.44200	9.791	8.391	3.787
1.200	1.344	1.36800	1.46800	9.710	8.286	3.865
1.250	1.406	1.38800	1.49200	9.632	8.184	3.942
1.300	1.469	1.40800	1.51500	9.555	8.086	4.017
1.350	1.532	1.42600	1.53600	9.480	7.991	4.091
1.400	1.596	1.44200	1.55700	9.407	7.899	4.162
1.450	1.660	1.45800	1.57500	9.336	7.810	4.233
1.500	1.725	1.47300	1.59300	9.267	7.724	4.302
1.550	1.790	1.48600	1.61000	9.200	7.641	4.369
1.600	1.856	1.49900	1.62500	9.133	7.560	4.436
1.650	1.922	1.51100	1.64000	9.069	7.482	4.501
1.700	1.989	1.52200	1.65300	9.006	7.406	4.564
1.750	2.056	1.53200	1.66600	8.945	7.333	4.627
1.800	2.124	1.54200	1.67800	8.885	7.261	4.689
1.850	2.192	1.55100	1.68900	8.826	7.192	4.749
1.900	2.261	1.55900	1.69900	8.768	7.124	4.809
1.950	2.330	1.56700	1.70900	8.713	7.059	4.867
2.000	2.400	1.57400	1.71700	8.658	6.995	4.925
2.050	2.470	1.58000	1.72600	8.604	6.934	4.981
2.100	2.541	1.58600	1.73300	8.552	6.873	5.037
2.150	2.612	1.59200	1.74000	8.500	6.815	5.092
2.200	2.684	1.59700	1.74700	8.450	6.758	5.146
2.250	2.756	1.60200	1.75300	8.400	6.703	5.199
2.300	2.829	1.60600	1.75900	8.352	6.648	5.251
2.350	2.902	1.61000	1.76400	8.304	6.595	5.303

2.400	2.976	1.61400	1.76800	8.258	6.544	5.354
2.450	3.050	1.61700	1.77300	8.212	6.494	5.404
2.500	3.125	1.62000	1.77600	8.167	6.445	5.453
2.550	3.200	1.62300	1.78000	8.124	6.398	5.502
2.600	3.276	1.62500	1.78300	8.081	6.351	5.550
2.650	3.352	1.62700	1.78600	8.039	6.306	5.598
2.700	3.429	1.62900	1.78800	7.997	6.262	5.644
2.750	3.506	1.63100	1.79100	7.957	6.219	5.690
2.800	3.584	1.63300	1.79200	7.917	6.177	5.736
2.850	3.662	1.63400	1.79400	7.878	6.133	5.781
2.900	3.741	1.63500	1.79500	7.839	6.095	5.825
2.950	3.820	1.63600	1.79600	7.802	6.056	5.869
3.000	3.900	1.63650	1.79700	7.765	6.017	5.912
3.050	3.980	1.63675	1.79800	7.728	5.979	5.979
3.100	4.061	1.63707	1.79810	7.693	5.943	5.943
3.150	4.142	1.63724	1.79858	7.657	5.907	5.907
3.200	4.224	1.63726	1.80000	7.623	5.871	5.871
3.250	4.306	1.63715	1.79838	7.589	5.837	5.837
3.300	4.389	1.63688	1.79820	7.556	5.803	5.803
3.350	4.472	1.63653	1.79733	7.523	5.770	5.770
3.400	4.556	1.63604	1.79671	7.491	5.738	5.738
3.450	4.640	1.63544	1.79632	7.459	5.706	5.706
3.500	4.725	1.63473	1.79538	7.428	5.675	5.675
3.550	4.810	1.63393	1.79415	7.397	5.645	5.645
3.600	4.896	1.63303	1.79302	7.367	5.615	5.615
3.650	4.982	1.63204	1.79171	7.337	5.586	5.586
3.700	5.069	1.63098	1.79023	7.308	5.557	5.557
3.750	5.156	1.62973	1.78856	7.279	5.529	5.529

Πίνακας A'.1: Ακολουθία μη περιστρεφόμενων ($\Omega = 0$) σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων καταστάσεων ισορροπίας, πολυτροπικού δείκτη $N = 1.0$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 100$. Όλες οι τιμές είναι αδιάστατες με ($c = G = M_{\odot} = 1$)

Ακολουθία Σταθερής Μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
1.280	1.444	1.40000	9.585	8.125	1.000000	0.000	0.000
1.275	1.438	1.40014	9.606	8.145	0.997227	0.252	0.006
1.261	1.420	1.40061	9.675	8.212	0.987278	0.539	0.030
1.245	1.400	1.40113	9.754	8.290	0.976180	0.733	0.057
1.205	1.350	1.40250	9.963	8.494	0.948116	1.061	0.123
1.164	1.300	1.40430	10.191	8.719	0.919000	1.296	0.196
1.072	1.187	1.40770	10.788	9.303	0.852000	1.656	0.365
0.978	1.074	1.41120	11.555	10.060	0.780000	1.887	0.550
0.883	0.961	1.41540	12.642	11.140	0.698000	2.029	0.755
0.799	0.863	1.42010	14.931	13.430	0.575000	2.084	0.954

Πίνακας A'.3: Ιδιότητες μοντέλων ισορροπίας με $N = 1.0, K = 100$, σταθερής μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$.

Ακολουθία Σταθερής Μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.800M_\odot$

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
3.200	4.224	1.63726	7.623	5.872	1.0000	0.000	0.0000
3.062	3.999	1.63860	7.729	5.978	0.9972	0.394	0.006
2.745	3.498	1.63980	8.013	6.263	0.9849	0.876	0.035
2.648	3.349	1.64040	8.119	6.368	0.9780	1.037	0.051
2.516	3.149	1.64150	8.278	6.527	0.9661	1.254	0.080
2.416	2.999	1.64240	8.413	6.661	0.9551	1.413	0.106
2.071	2.499	1.64710	9.007	7.248	0.9015	1.920	0.238
1.782	2.099	1.65320	9.726	7.956	0.8360	2.261	0.403
1.403	1.599	1.66420	11.350	9.563	0.7090	2.543	0.718
1.216	1.363	1.67030	13.693	11.910	0.5750	2.576	0.924

Πίνακας A'.4: Ιδιότητες μοντέλων ισορροπίας με $N = 1.0, K = 100$, σταθερής μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.800M_\odot$.

Καταγραφή Συχνοτήτων Ταλάντωσης

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation kHz			
1.280	1.444	1.000000	0.000	0.000	-	-	-	-
1.275	1.438	0.997227	0.082	0.141	0.418	0.695	0.993	1.275
1.261	1.420	0.987278	0.174	0.251	2.492	1.970	-	-
1.245	1.400	0.976180	0.237	0.343	2.574	1.857	1.044	-
1.205	1.350	0.948116	0.343	0.492	2.686	1.643	-	-
1.164	1.300	0.919000	0.419	0.596	2.756	1.487	-	-
1.072	1.187	0.852000	0.535	0.745	2.815	2.815	-	-
0.978	1.074	0.780000	0.610	0.819	2.806	1.772	3.412	-
0.883	0.961	0.698000	0.655	0.842	2.736	1.943	3.257	-
0.799	0.863	0.575000	0.673	0.823	2.613	2.051	-	-

Πίνακας Α'.5: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικού μοντέλου με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.506M_\odot$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation kHz			
3.200	4.224	1.0000	0.000	0.000	-	-	-	-
3.062	3.999	0.9972	0.127	0.202	0.607	1.008	1.415	1.823
2.745	3.498	0.9849	0.259	0.421	2.556	3.443	-	-
2.648	3.349	0.9780	0.335	0.506	3.492	2.428	1.539	-
2.516	3.149	0.9661	0.405	0.608	3.527	2.257	1.855	-
2.416	2.999	0.9551	0.456	0.682	3.550	2.105	-	-
2.071	2.499	0.9015	0.620	0.906	3.597	1.618	2.799	-
1.782	2.099	0.8360	0.730	1.046	3.567	-	-	-
1.403	1.599	0.7090	0.821	1.108	3.367	2.364	4.026	5.612
1.216	1.363	0.5750	0.832	1.056	3.145	2.500	4.582	-

Πίνακας Α'.6: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικού μοντέλου με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.800M_\odot$.

Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 0.75$

Ακολουθία Μη-Περιστρεφόμενων Μοντέλων

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	M_0 M_\odot	R_e	r_e	Ω_K ($\times 10^{-2}$)
1.000	1.040	0.61250	0.64220	7.104	6.477	4.133
1.200	1.262	0.73490	0.77830	7.105	6.348	4.527
1.400	1.489	0.84550	0.90360	7.072	6.198	4.889
1.600	1.721	0.94360	1.01700	7.019	6.038	5.224
1.800	1.960	1.03000	1.11900	6.950	5.875	5.538
2.000	2.205	1.10500	1.20900	6.873	5.715	5.833
2.200	2.456	1.16900	1.28800	6.789	5.558	6.113
2.400	2.714	1.22500	1.35700	6.702	5.408	6.378
2.600	2.978	1.27200	1.41700	6.614	5.265	6.631
2.800	3.250	1.31200	1.46900	6.525	5.129	6.873
3.000	3.528	1.34600	1.51300	6.438	5.001	7.103
3.200	3.814	1.37400	1.55000	6.351	4.880	7.325
3.400	4.108	1.39800	1.58100	6.266	4.766	7.537
3.600	4.408	1.41700	1.60700	6.183	4.659	7.742
3.800	4.717	1.43200	1.62800	6.103	4.558	7.938
4.000	5.034	1.44500	1.64600	6.025	4.463	8.128
4.200	5.359	1.45500	1.65900	5.950	4.374	8.311
4.400	5.691	1.46200	1.66900	5.877	4.290	8.487
4.600	6.033	1.46700	1.67700	5.807	4.212	8.657
4.800	6.382	1.47100	1.68200	5.739	4.137	8.821
4.900	6.560	1.47161	1.68320	5.706	4.102	8.902
5.000	6.741	1.47230	1.68415	5.673	4.067	8.980

5.100	6.923	1.47294	1.68505	5.642	4.034	9.057
5.150	7.015	1.47303	1.68520	5.626	4.018	9.096
5.200	7.107	1.47307	1.68524	5.610	4.002	9.133
5.250	7.200	1.47302	1.68518	5.595	3.986	9.171
5.300	7.294	1.47292	1.68502	5.580	3.970	9.208
5.400	7.483	1.47251	1.68400	5.550	3.939	9.282
5.500	7.674	1.47174	1.68335	5.520	3.910	9.355
5.600	7.867	1.47094	1.68215	5.491	3.881	9.426
5.700	8.063	1.46989	1.68058	5.463	3.853	9.496
5.800	8.261	1.46848	1.67856	5.435	3.825	9.523
5.900	8.461	1.46700	1.67600	5.407	3.799	9.633
6.000	8.664	1.46500	1.67400	5.380	3.773	9.700
6.100	8.868	1.46300	1.67100	5.354	3.747	9.766
6.200	9.075	1.46200	1.66800	5.328	3.723	9.830
6.400	9.497	1.45700	1.66200	5.278	3.676	9.956
6.600	9.927	1.45200	1.65500	5.229	3.632	10.08
6.800	10.367	1.44700	1.64700	5.182	3.589	10.20
7.000	10.817	1.44200	1.63900	5.137	3.549	10.31
7.200	11.276	1.43600	1.63000	5.094	3.511	10.42
7.400	11.745	1.43000	1.62100	5.052	3.475	10.53
7.800	12.713	1.41800	1.60200	4.973	3.408	10.74
8.200	13.722	1.40500	1.58200	4.889	3.347	10.93
8.600	14.771	1.39100	1.56200	4.830	3.292	11.11
9.000	15.861	1.37800	1.54100	4.766	3.242	11.28

Πίνακας A'.7: Ακολουθία Μη Περιστρεφόμενων ($\Omega = 0$) σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων καταστάσεων ισορροπίας, πολυτροπικού δείκτη $N = 0.75$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 543$.

Πίνακας Ακολουθίας Περιστρεφόμενων Μοντέλων στο Όριο Kepler

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	M_0 M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
0.998	1.040	0.85612	0.90202	10.755	9.841	0.5278	2.736	1.291
1.341	1.422	1.10586	1.18507	10.487	9.296	0.5342	3.197	1.269
1.647	1.778	1.28040	1.39010	10.186	8.798	0.5392	3.564	1.250
1.942	2.133	1.41094	1.54828	9.882	8.344	0.5435	3.889	1.232
2.225	2.489	1.50794	1.66916	9.593	7.939	0.5473	4.180	1.216
2.260	2.533	1.51812	1.68204	9.558	7.892	0.5477	4.214	1.215
2.499	2.844	1.57952	1.76065	9.324	7.584	0.5505	4.442	1.202
2.763	3.200	1.63206	1.82939	9.077	7.272	0.5533	4.681	1.188
3.019	3.555	1.67016	1.88035	8.851	6.997	0.5558	4.900	1.175
3.266	3.911	1.69768	1.91799	8.646	6.756	0.5580	5.101	1.163
3.506	4.267	1.71687	1.94484	8.459	6.542	0.5600	5.287	1.151
3.739	4.622	1.72974	1.96335	8.287	6.351	0.5618	5.459	1.140
3.964	4.978	1.73773	1.97528	8.130	6.181	0.5633	5.620	1.130
4.184	5.333	1.74225	1.98245	7.986	6.029	0.5648	5.769	1.119
4.398	5.689	1.74366	1.98529	7.854	5.891	0.5554	5.908	1.109
4.503	5.867	1.74366	1.98570	7.791	5.827	0.5667	5.975	1.104
4.606	6.045	1.74307	1.98527	7.731	5.767	0.5673	6.039	1.100
4.709	6.222	1.74193	1.98407	7.673	5.709	0.5678	6.101	1.095
4.909	6.578	1.73893	1.98057	7.565	5.601	0.5689	6.220	1.086
5.105	6.933	1.73448	1.97495	7.463	5.502	0.5699	6.333	1.077
5.297	7.289	1.72297	1.96816	7.369	5.412	0.5708	6.438	1.068
5.484	7.645	1.72351	1.96051	7.281	5.329	0.5716	6.538	1.059
5.668	8.000	1.71708	1.95184	7.198	5.253	0.5724	6.633	1.051
5.847	8.356	1.71009	1.94231	7.121	5.182	0.5731	6.722	1.043
6.023	8.711	1.70296	1.93252	7.048	5.116	0.5738	6.807	1.036
6.195	9.067	1.69580	1.92259	6.980	5.056	0.5744	6.888	1.028
6.531	9.778	1.68082	1.90167	6.855	4.946	0.5756	7.038	1.013
6.934	10.667	1.66173	1.87476	6.717	4.829	0.5768	7.207	0.996
7.690	12.445	1.62499	1.82242	6.489	4.642	0.5789	7.492	0.964
8.393	14.223	1.59000	1.77267	6.309	4.500	0.5805	7.723	0.936

Πίνακας Α'.8: Ακολουθία περιστρεφόμενων σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων ισορροπίας στο όριο απώλειας μάζας (**mass-shedding limit**, $\Omega = \Omega_K$), πολυτροπικού δείκτη $N = 0.75$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 543$.

Ακολουθία Σταθερής Μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.685M_\odot$

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
5.100	6.923	1.47294	5.642	4.034	1.0000	0.000	0.000
4.959	6.667	1.47354	5.691	4.084	0.9979	0.501	0.005
4.606	6.044	1.47487	5.835	4.228	0.9861	1.274	0.038
4.451	5.778	1.47597	5.911	4.303	0.9772	1.605	0.064
4.075	5.156	1.47936	6.127	4.514	0.9468	2.335	0.150
3.796	4.711	1.48299	6.329	4.709	0.9152	2.828	0.242
3.387	4.089	1.49010	6.710	5.076	0.8547	3.446	0.421
2.632	3.022	1.50849	7.900	6.230	0.6953	4.151	0.902
2.274	2.551	1.52107	9.414	7.741	0.5575	4.225	1.212

Πίνακας Α'.9: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας σχετικιστικού πολυτροπικού μοντέλου $N = 0.75$, $K = 543$, σταθερής μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.685M_\odot$

Καταγραφή Συχνοτήτων Ταλάντωσης

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation		
					kHz		
5.100	6.923	1.0000	0.000	0.000	-	-	-
4.959	6.667	0.9979	0.162	0.258	4.005	0.872	-
4.606	6.044	0.9861	0.412	0.647	4.830	1.973	3.482
4.451	5.778	0.9772	0.519	0.812	4.943	2.451	3.190
4.075	5.156	0.9468	0.755	1.165	5.172	2.675	3.556
3.796	4.711	0.9152	0.914	1.396	5.275	2.294	-
3.387	4.089	0.8547	1.113	1.681	5.391	-	-
2.632	3.022	0.6953	1.341	1.844	5.211	-	-
2.274	2.551	0.5575	1.365	1.731	4.935	-	-

Πίνακας Α'.10: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικού μοντέλου με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.685M_\odot$.

Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 0.50$

Ακολουθία Μη-Περιστρεφόμενων Μοντέλων

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	M_0 M_\odot	R_e	r_e	Ω_K ($\times 10^{-2}$)
1.000	1.018	0.34060	0.35350	5.297	4.951	4.786
1.200	1.231	0.48690	0.51230	5.613	5.115	5.247
1.400	1.450	0.64150	0.68480	5.843	5.182	5.670
1.600	1.675	0.79610	0.86240	6.003	5.177	6.065
1.800	1.907	0.94370	1.03700	6.107	5.120	6.436
2.000	2.146	1.08000	1.20400	6.166	5.028	6.786
2.200	2.395	1.20200	1.35700	6.190	4.914	7.118
2.400	2.653	1.30800	1.49600	6.186	4.788	7.435
2.600	2.922	1.40000	1.61700	6.161	4.656	7.736
2.800	3.202	1.47700	1.72300	6.121	4.524	8.024
3.000	3.495	1.54002	1.81190	6.069	4.394	8.299
3.200	3.801	1.59156	1.88627	6.010	4.270	8.563
3.400	4.121	1.63264	1.94680	5.945	4.151	8.815
3.600	4.456	1.66471	1.99502	5.876	4.040	9.057
3.800	4.806	1.68904	2.03231	5.806	3.936	9.289
4.000	5.174	1.70683	2.06003	5.735	3.839	9.512
4.200	5.559	1.71912	2.07946	5.665	3.748	9.725
4.400	5.963	1.72679	2.09178	5.595	3.665	9.929
4.600	6.386	1.73063	2.09805	5.527	3.587	10.01
4.700	6.605	1.73135	2.09923	5.493	3.551	10.22
4.750	6.716	1.73144	2.09935	5.477	3.533	10.27
4.800	6.829	1.73113	2.09888	5.460	3.516	10.31
4.850	6.943	1.73108	2.09877	5.444	3.499	10.36
4.900	7.058	1.73070	2.09814	5.428	3.482	10.40
5.000	7.293	1.72946	2.09606	5.396	3.449	10.49
5.200	7.780	1.72543	2.08932	5.333	3.388	10.66
5.400	8.289	1.71971	2.07966	5.273	3.332	10.83
5.600	8.822	1.71261	2.06755	5.216	3.280	10.99
5.800	9.380	1.70456	2.05375	5.160	3.231	11.14
6.000	9.963	1.69533	2.03787	5.107	3.187	11.28

Πίνακας Α'.11: Ακολουθία Μη Περιστρεφόμενων ($\Omega = 0$) σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων καταστάσεων ισορροπίας, πολυτροπικού δείκτη $N = 0.50$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 36699$.

Πίνακας Ακολουθίας Περιστρεφόμενων Μοντέλων στο Όριο Kepler

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	M_0 M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
0.999	1.017	0.57299	0.59833	8.765	8.143	0.4632	3.155	1.730
1.098	1.122	0.67873	0.71382	8.929	8.189	0.4672	3.322	1.717
1.315	1.357	0.91440	0.97745	9.150	8.145	0.4760	3.675	1.692
1.595	1.670	1.20115	1.31092	9.222	7.888	0.4870	4.103	1.661
1.820	1.931	1.40375	1.55625	9.167	7.593	0.4953	4.429	1.638
1.908	2.035	1.47484	1.64452	9.126	7.468	0.4984	4.552	1.630
1.994	2.140	1.54035	1.72699	9.079	7.341	0.5014	4.672	1.622
1.998	2.145	1.54342	1.73088	9.076	7.334	0.5015	4.678	1.622
2.037	2.192	1.57100	1.76595	9.053	7.277	0.5028	4.730	1.618
2.245	2.453	1.70560	1.94031	8.909	6.966	0.5095	5.008	1.600
2.446	2.714	1.81178	2.08204	8.751	6.672	0.5154	5.265	1.585
2.562	2.871	1.86397	2.15329	8.655	6.507	0.5186	5.411	1.576
2.675	3.027	1.90849	2.21505	8.558	6.350	0.5215	5.549	1.568
2.750	3.132	1.93459	2.25169	8.495	6.251	0.5234	5.638	1.563
2.859	3.288	1.96876	2.30024	8.402	6.111	0.5261	5.767	1.555
2.966	3.445	1.99779	2.34208	8.311	5.979	0.5285	5.890	1.548
3.104	3.654	2.02945	2.38841	8.194	5.815	0.5315	6.045	1.539
3.272	3.915	2.06000	2.43394	8.058	5.630	0.5350	6.227	1.527
3.433	4.176	2.08204	2.46756	7.925	5.464	0.5380	6.396	1.517
3.588	4.437	2.09750	2.49169	7.803	5.315	0.5408	6.554	1.507
3.883	4.959	2.11422	2.51894	7.584	5.062	0.5455	6.839	1.488
4.160	5.481	2.11800	2.52647	7.393	4.855	0.5494	7.089	1.470
4.419	6.003	2.11352	2.52102	7.226	4.685	0.5526	7.309	1.453
4.663	6.525	2.10430	2.50784	7.080	4.543	0.5553	7.503	1.437
4.895	7.047	2.09205	2.48962	6.952	4.424	0.5577	7.677	1.421
5.114	7.569	2.07868	2.46920	6.838	4.323	0.5597	7.831	1.406

Πίνακας A'.12: Ακολουθία περιστρεφόμενων σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων καταστάσεων ισορροπίας στο όριο απώλειας μάζας (**mass-shedding limit**, $\Omega = \Omega_K$), πολυτροπικού δείκτη $N = 0.50$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 36699$.

Ακολουθία Σταθερής Μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.617M_\odot$

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
2.600	2.922	1.40000	6.161	4.656	1.00000	0.000	0.000
2.593	2.913	1.40040	6.175	4.669	0.99480	0.651	0.016
2.581	2.897	1.40120	6.200	4.691	0.98580	1.065	0.043
2.562	2.871	1.40260	6.242	4.728	0.97140	1.505	0.088
2.543	2.845	1.40380	6.284	4.765	0.95723	1.832	0.133
2.465	2.740	1.40940	6.463	4.925	0.90136	2.718	0.313
2.367	2.610	1.41680	6.710	5.150	0.83404	3.416	0.540
2.163	2.349	1.43150	7.332	5.728	0.70412	4.198	0.997
1.879	2.001	1.45290	9.139	7.507	0.49751	4.513	1.633

Πίνακας Α'.13: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων $N = 0.50, K = 36699$, σταθερής μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.617M_\odot$

Ακολουθία Σταθερής Μάζας ηρεμίας $M_0 = 1.900M_\odot$

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
3.242	3.867	1.60096	5.996	4.244	1.000000	0.000	0.000
3.229	3.847	1.60180	6.012	4.258	0.995088	0.728	0.016
3.206	3.810	1.60340	6.043	4.284	0.984744	1.275	0.049
3.172	3.758	1.60530	6.087	4.323	0.970582	1.761	0.095
3.139	3.706	1.60740	6.133	4.362	0.956290	2.132	0.143
3.001	3.497	1.61620	6.335	4.540	0.897760	3.156	0.339
2.859	3.289	1.62600	6.571	4.751	0.837530	3.832	0.548
2.562	2.871	1.64660	7.207	5.334	0.709920	4.651	1.002
2.193	2.386	1.67540	8.945	7.039	0.507910	4.941	1.605

Πίνακας Α'.14: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων $N = 0.50, K = 36699$, σταθερής μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.900M_\odot$

Ακολουθία Σταθερής Μάζας ηρεμίας $M_0 = 2.098M_\odot$

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω_c ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
4.750	6.716	1.73144	5.477	3.533	1.0000	0.000	0.000
4.444	6.055	1.73193	5.589	3.650	0.9943	0.955	0.019
4.343	5.846	1.73383	5.639	3.697	0.9867	1.445	0.045
4.186	5.533	1.73669	5.722	3.775	0.9726	2.034	0.093
4.024	5.220	1.74073	5.822	3.866	0.9528	2.605	0.162
3.739	4.698	1.75020	6.038	4.061	0.9068	3.487	0.322
3.433	4.176	1.76328	6.338	4.331	0.8426	4.260	0.549
2.931	3.393	1.79095	7.075	5.007	0.7078	5.094	1.031
2.472	2.749	1.82404	8.725	6.629	0.5165	5.299	1.583

Πίνακας Α'.15: Ιδιότητες καταστάσεων ισορροπίας σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων $N = 0.50, K = 36699$, σταθερής μάζας ηρεμίας $M_0 = 2.098M_\odot$

Καταγραφή Συχνοτήτων Ταλάντωσης

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode		other modes of oscillation		
				kHz	kHz	kHz		
2.600	2.922	1.00000	0.000	0.000	-	-	-	-
2.593	2.913	0.99480	0.210	0.318	4.045	3.406	-	-
2.581	2.897	0.98580	0.344	0.524	4.245	3.186	-	-
2.562	2.871	0.97140	0.486	0.741	4.448	2.940	2.208	-
2.543	2.845	0.95723	0.592	0.902	4.598	2.720	-	-
2.465	2.740	0.90136	0.878	1.312	4.989	-	-	-
2.367	2.610	0.83404	1.104	1.602	5.231	-	-	-
2.163	2.349	0.70412	1.356	1.877	5.407	-	-	-
1.879	2.001	0.49751	1.458	1.782	5.199	-	-	-

Πίνακας Α'.16: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.617M_\odot$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation kHz
3.242	3.867	1.000000	0.000	0.000	- -
3.229	3.847	0.995088	0.235	0.374	3.574 -
3.206	3.810	0.984744	0.412	0.653	4.609 3.260
3.172	3.758	0.970582	0.569	0.906	4.822 2.722
3.139	3.706	0.956290	0.689	1.092	4.996 2.732
3.001	3.497	0.897760	1.020	1.580	5.400 -
2.859	3.289	0.837530	1.238	1.890	5.648 -
2.562	2.871	0.709920	1.503	2.154	5.820 -
2.193	2.386	0.507910	1.596	2.073	5.525 -

Πίνακας A'.17: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.900M_\odot$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation kHz
4.750	6.716	1.0000	0.000	0.000	- - -
4.444	6.055	0.9943	0.308	0.507	4.795 - -
4.343	5.846	0.9867	0.467	0.774	5.010 2.452 3.439
4.186	5.533	0.9726	0.657	1.079	5.252 3.098 -
4.024	5.220	0.9528	0.842	1.375	5.512 2.672 4.163
3.739	4.698	0.9068	1.127	1.807	5.818 - -
3.433	4.176	0.8426	1.376	2.170	6.066 1.358 -
2.931	3.393	0.7078	1.646	2.418	6.163 - -
2.472	2.749	0.5165	1.711	2.273	5.829 - -

Πίνακας A'.18: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 2.098M_\odot$.

Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 0.25$

Ακολουθία Μη-Περιστρεφόμενων Μοντέλων

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M	M_0	R_e	r_e	Ω_K ($\times 10^{-2}$)
M_\odot	M_\odot					
1.000	1.004	0.11960	0.12210	3.386	3.266	5.545
1.100	1.107	0.19158	0.19742	3.838	3.644	5.818
1.200	1.212	0.28910	0.30126	4.275	3.981	6.079
1.300	1.317	0.41316	0.43685	4.689	4.265	6.330
1.400	1.425	0.56364	0.60457	5.070	4.489	6.373
1.500	1.535	0.73470	0.80180	5.410	4.646	6.807
1.600	1.648	0.92083	1.02390	5.706	4.741	7.035
1.800	1.887	1.30300	1.50700	6.155	4.762	7.472
2.000	2.148	1.65000	1.98400	6.425	4.627	7.884
2.100	2.289	1.79808	2.20055	6.503	4.526	8.082
2.200	2.439	1.92537	2.39488	6.549	4.414	8.274
2.300	2.599	2.03219	2.56454	6.570	4.297	8.460
2.400	2.770	2.11951	2.70854	6.569	4.182	8.641
2.500	2.954	2.18906	2.82726	6.553	4.069	8.815
2.600	3.152	2.24293	2.92219	6.524	3.963	8.983
2.700	3.367	2.28324	2.99533	6.485	3.864	9.146
2.800	3.600	2.31224	3.04923	6.439	3.772	9.302
2.850	3.724	2.32283	3.06935	6.414	3.730	9.377
2.900	3.853	2.33134	3.08692	6.389	3.689	9.451
2.950	3.988	2.33725	3.09845	6.362	3.649	9.524
3.000	4.129	2.34288	3.10792	6.335	3.612	9.595
3.050	4.277	2.34608	3.11436	6.308	3.577	9.665
3.100	4.431	2.34793	3.11803	6.280	3.543	9.732
3.150	4.592	2.34851	3.11918	6.252	3.511	9.798
3.200	4.760	2.34795	3.11807	6.225	3.480	9.863
3.250	4.936	2.34639	3.11492	6.197	3.451	9.925
3.300	5.120	2.34395	3.10996	6.169	3.424	9.987
3.400	5.512	2.33700	3.09500	6.115	3.373	10.10
3.500	5.942	2.32700	3.07600	6.062	3.328	10.22
3.600	6.411	2.31643	3.05279	6.011	3.287	10.32
3.700	6.924	2.30329	3.02546	5.961	3.250	10.42
3.800	7.484	2.28945	2.99645	5.914	3.217	10.52
3.900	8.095	2.27592	2.96766	5.870	3.188	10.60
4.000	8.761	2.26209	2.93814	5.828	3.162	10.69
4.100	9.487	2.22731	2.87328	5.774	3.136	10.77
4.200	10.277	2.23180	2.87449	5.749	3.117	10.83

Πίνακας Α'.19: Ακολουθία Μη Περιστρεφόμενων ($\Omega = 0$) σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων καταστάσεων ισορροπίας, πολυτροπικού δείκτη $N = 0.25$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 1.86 \cdot 10^{10}$.

Πίνακας Ακολουθίας Περιστρεφόμενων Μοντέλων στο Όριο Kepler

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	M M_\odot	R_e	r_e	r_p/r_e	Ω ($\times 10^{-2}$)	$T/ W $ ($\times 10^{-1}$)
0.997	1.001	0.28500	6.746	6.429	0.3631	3.507	2.3583
1.128	1.137	0.49007	7.607	7.058	0.3757	3.784	2.3108
1.334	1.354	0.92785	8.588	7.533	0.3992	4.227	2.2304
1.459	1.489	1.23760	8.965	7.540	0.4145	4.501	2.1843
1.579	1.625	1.54381	9.184	7.383	0.4296	4.770	2.1425
1.695	1.760	1.82751	9.286	7.124	0.4439	5.032	2.1077
1.740	1.814	1.93144	9.301	7.003	0.4494	5.133	2.0960
1.780	1.863	2.02013	9.305	6.890	0.4540	5.223	2.0860
1.806	1.895	2.07578	9.302	6.812	0.4571	5.282	2.0801
1.912	2.030	2.28453	9.262	6.484	0.4689	5.520	2.0583
2.012	2.166	2.45641	9.188	6.164	0.4796	5.742	2.0400
2.108	2.301	2.58985	9.092	5.864	0.4886	5.952	2.0282
2.198	2.437	2.69412	8.987	5.591	0.4969	6.145	2.0187
2.283	2.572	2.77583	8.882	5.349	0.5042	6.323	2.0105
2.364	2.707	2.83712	8.776	5.135	0.5104	6.487	2.0044
2.512	2.978	2.91614	8.578	4.781	0.5207	6.777	1.9947
2.540	3.032	2.92688	8.542	4.721	0.5224	6.829	1.9929
2.581	3.114	2.94125	8.488	4.636	0.5250	6.904	1.9899
2.646	3.249	2.95868	8.404	4.509	0.5287	7.021	1.9856
2.708	3.385	2.96939	8.324	4.397	0.5320	7.129	1.9822
2.766	3.520	2.97494	8.249	4.297	0.5348	7.229	1.9791
2.822	3.655	2.98175	8.182	4.211	0.5377	7.318	1.9730
2.976	4.062	2.97607	7.998	4.001	0.5437	7.557	1.9634
3.112	4.468	2.96237	7.850	3.852	0.5486	7.745	1.9494
3.376	5.416	2.91735	7.593	3.633	0.5562	8.063	1.9137
3.533	6.093	2.88203	7.458	3.540	0.5594	8.223	1.8927

Πίνακας A'.20: Ακολουθία περιστρεφόμενων σχετικιστικών πολυτροπικών μοντέλων καταστάσεων ισορροπίας στο όριο απώλειας μάζας (**mass-shedding limit**, $\Omega = \Omega_K$) , πολυτροπικού δείκτη $N = 0.25$ και πολυτροπικής σταθεράς $K = 1.86 \cdot 10^{10}$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation kHz
1.96849	2.10594	1.000000	0.000	0.000	- - -
1.96503	2.10127	0.990420	0.272	0.394	- - -
1.96101	2.09585	0.980619	0.394	0.612	4.190 2.048 2.319
1.95697	2.09044	0.970732	0.481	0.749	4.336 2.243 2.583
1.94888	2.07961	0.951897	0.616	0.969	4.557 2.536 2.915
1.92849	2.05253	0.906743	0.849	1.314	4.892 2.104 3.913
1.89175	2.00440	0.831817	1.122	1.656	5.251 - -
1.81693	1.90902	0.704156	1.407	1.990	5.564 - -
1.63675	1.69140	0.438536	1.584	1.924	5.549 - -

Πίνακας A'.25: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 1.912M_\odot$.

ρ_c ($\times 10^{-3}$)	ε_c ($\times 10^{-3}$)	r_p/r_e	f_* kHz	r-mode kHz	other modes of oscillation kHz
3.15000	4.59200	1.000000	0.000	0.000	- - -
3.06818	4.33252	0.996784	0.235	0.413	2.393 2.808 1.890
2.97609	4.06174	0.982923	0.545	0.959	2.903 2.610 -
2.92780	3.92820	0.971679	0.695	1.222	4.704 2.267 3.739
2.87680	3.79300	0.957138	0.844	1.478	4.430 - -
2.74341	3.46601	0.907503	1.189	2.055	5.459 6.142 -
2.58000	3.11160	0.829296	1.517	2.561	5.879 7.706 -
2.36350	2.70650	0.703363	1.804	2.897	6.169 - -
2.08800	2.27250	0.488673	1.909	2.775	6.076 - -

Πίνακας A'.26: Συχνότητες του περιστροφικού τρόπου ταλάντωσης $l = m = 2$ (r-mode) καθώς επίσης και πολλών άλλων αδρανειακών και μη τρόπων ταλάντωσης (other modes of oscillation) πολυτροπικών μοντέλων με σταθερή μάζα ηρεμίας $M_0 = 3.119M_\odot$.

Παράρτημα Β'

ΣΧΗΜΑΤΑ

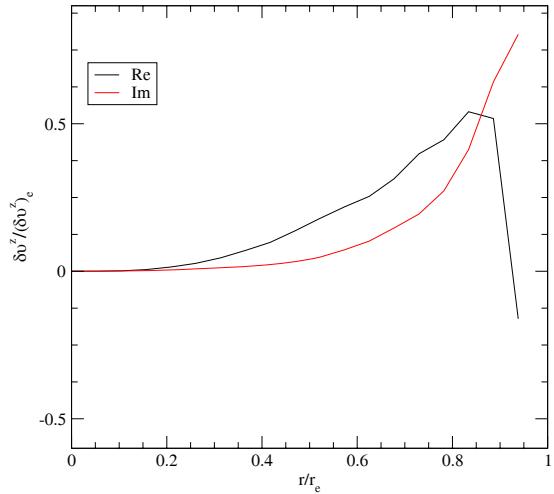
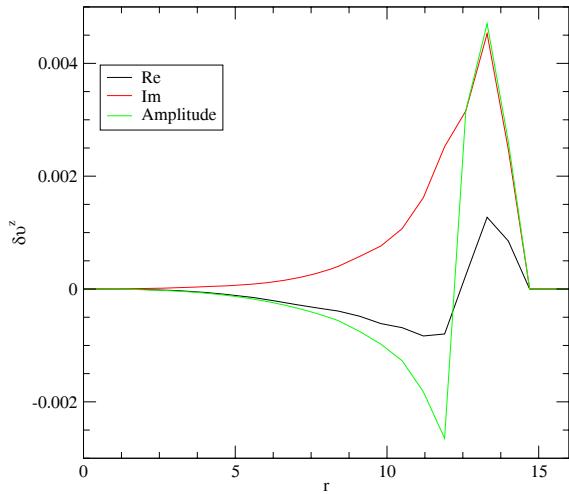
Στο Παράρτημα αυτό έχουμε συγκεντρώσει όλα τα επιπλέον σχήματα. Σε κάθε καταστατική εξισώση παρουσιάζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις της ακολουθίας σταθερής βαρυονικής μάζας, η οποία αντιστοιχεί σε $1.400M_{\odot}$ βαρυτική μάζα, στο όριο μη περιστροφής.

Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 1.0$

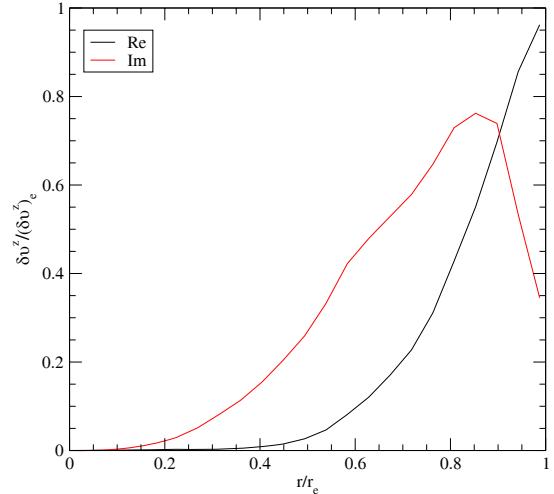
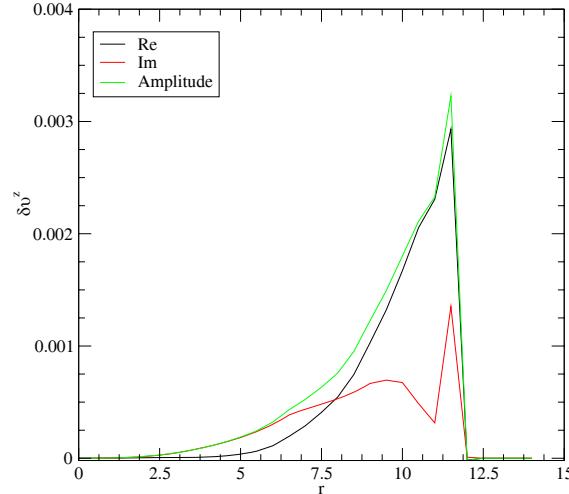
Όλα τα παρακάτω μοντέλα αναφέρονται στην ακολουθία με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.506M_{\odot}$. Τα διαγράμματα δείχνουν την παρουσία του πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με διαφορετικές τιμές περιστροφής r_p/r_e . Συγκεκριμένα

Αριστερά : Φαίνεται το μη κανονικοποιημένο διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων, μαζί με το πλάτος (πράσινη γραμμή) της περιστροφικής ταλάντωσης της ιδιοσυνάρτησης.

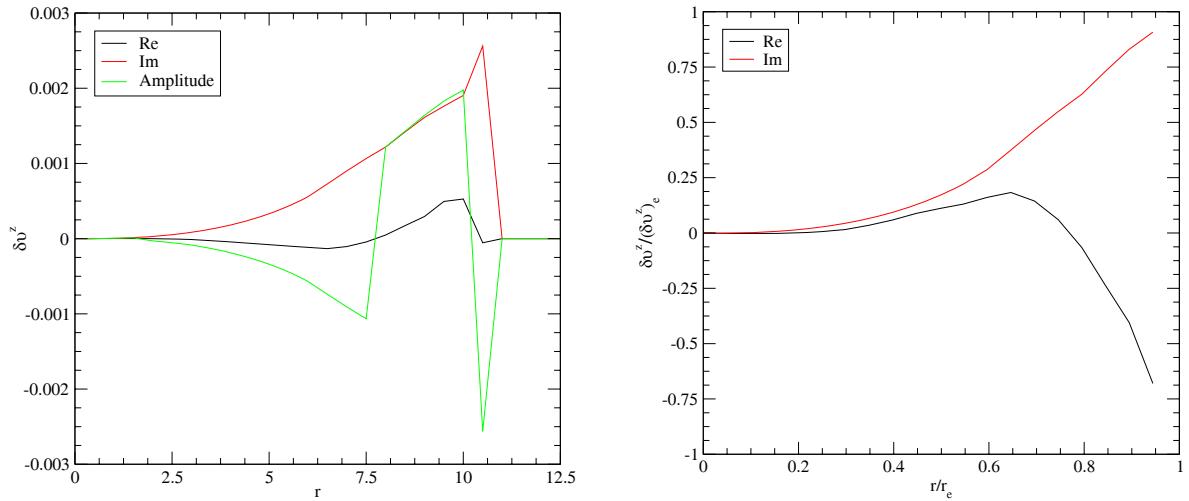
Δεξιά : Φαίνεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια.



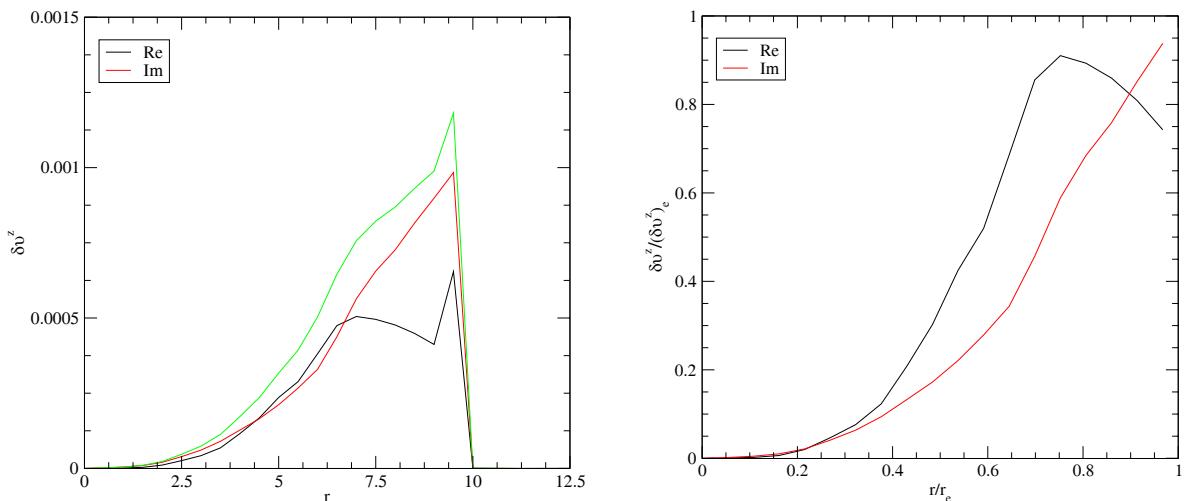
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.575$



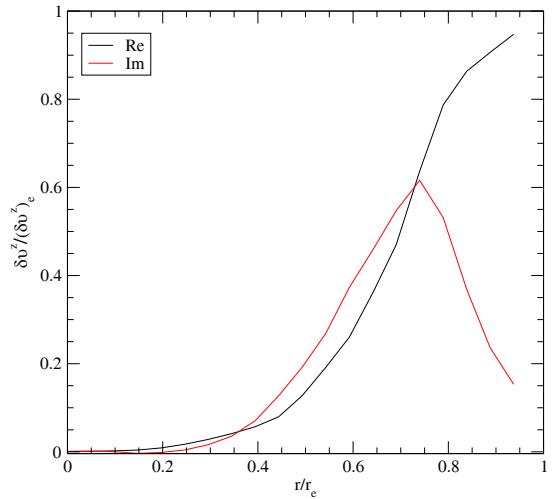
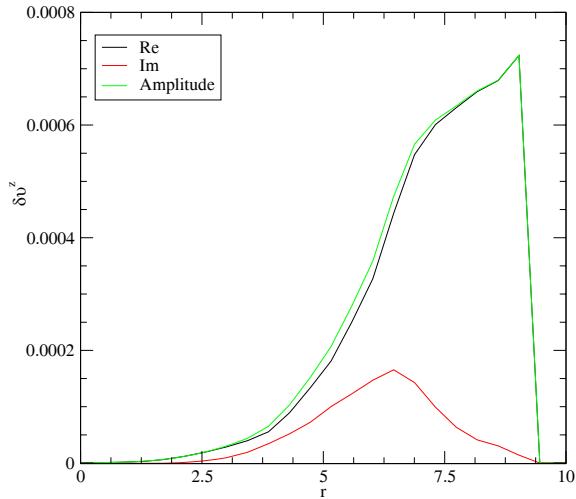
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.698$



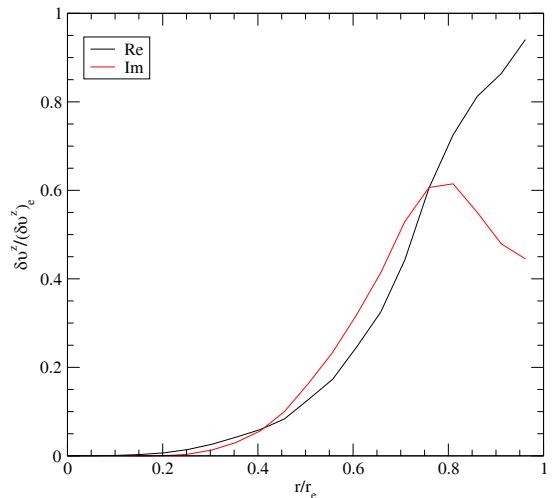
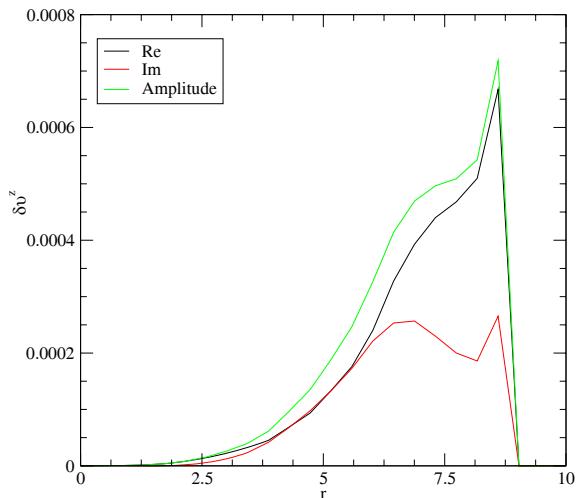
$$\text{Περιστροφή } r_p/r_e = 0.780$$



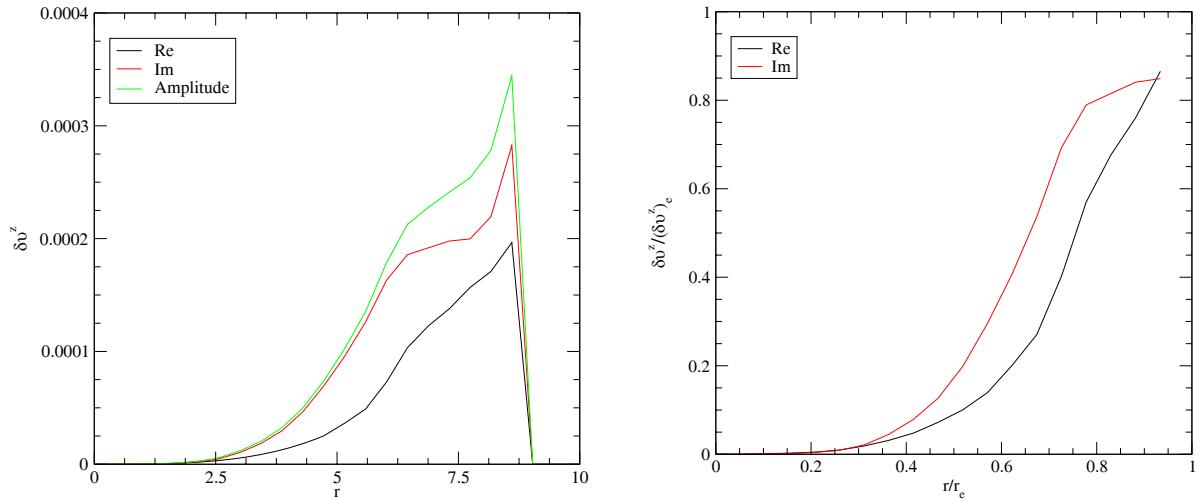
$$\text{Περιστροφή } r_p/r_e = 0.852$$



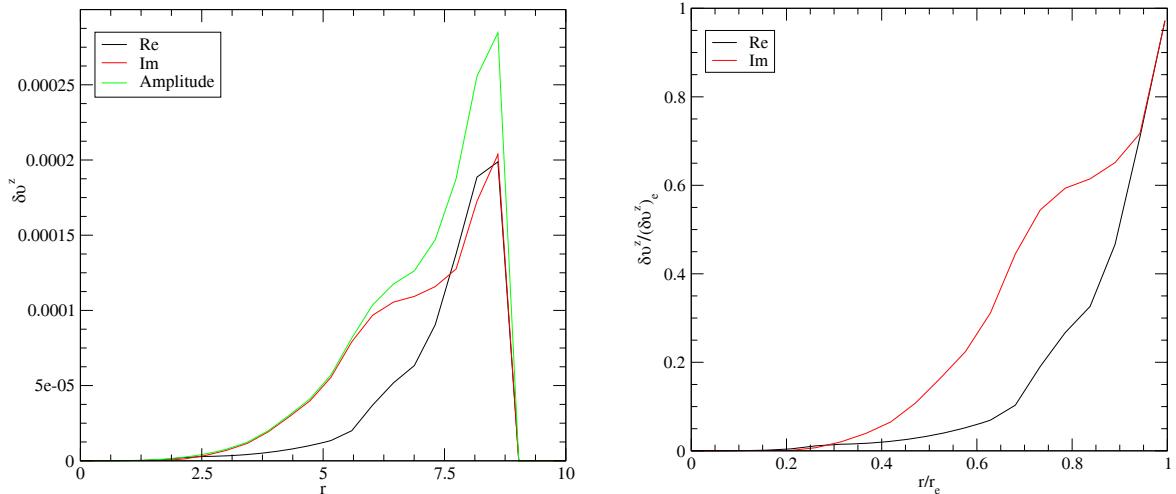
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.919$



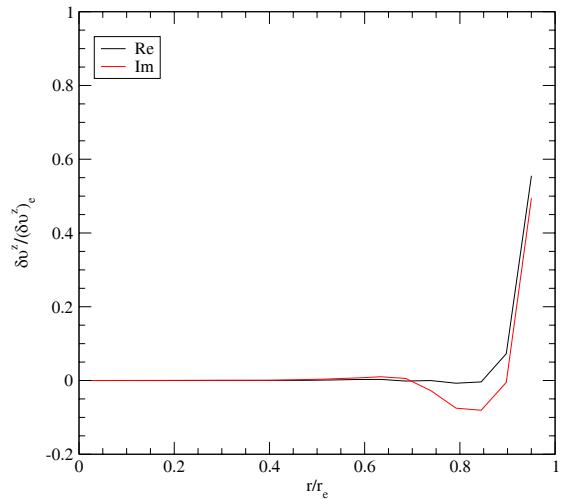
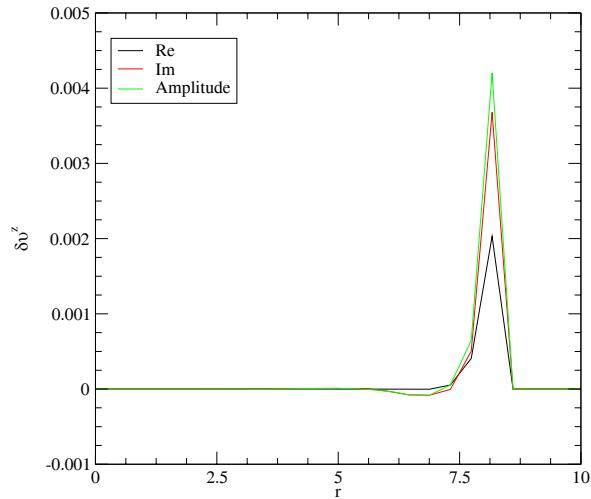
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.948$



Περιστροφή $r_p/r_e = 0.976$



Περιστροφή $r_p/r_e = 0.987$



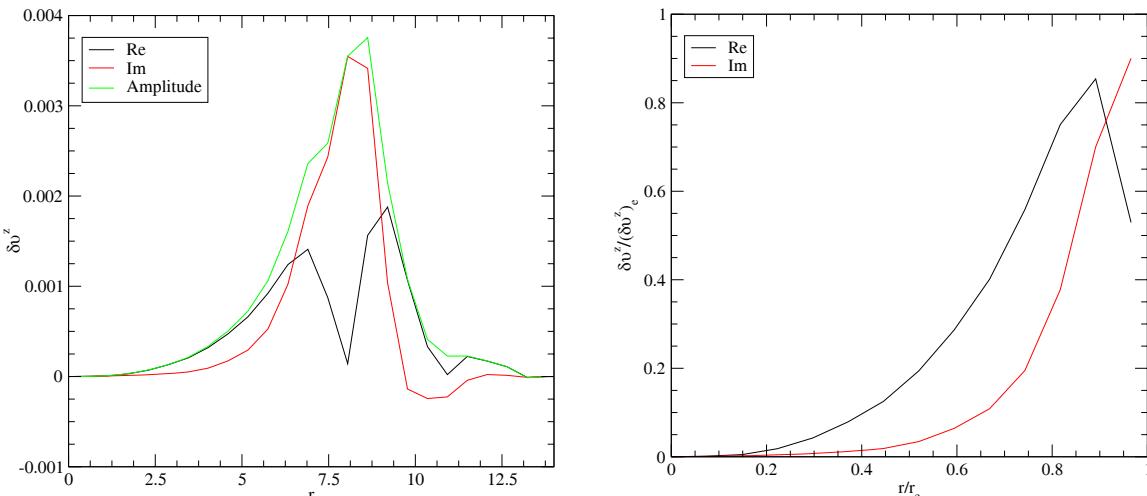
$\Pi\varepsilon\rhoιστροφή$ $r_p/r_e = 0.997$

Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 0.75$

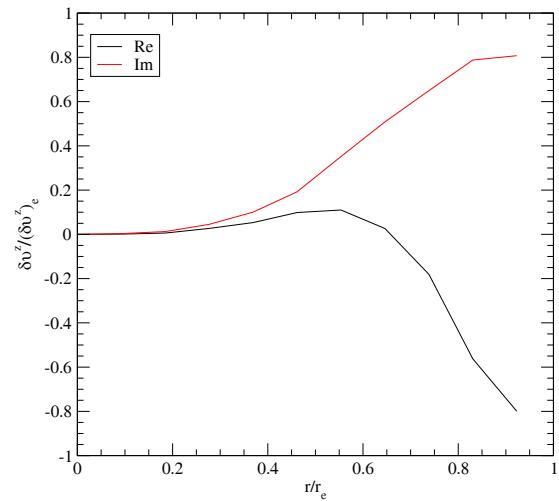
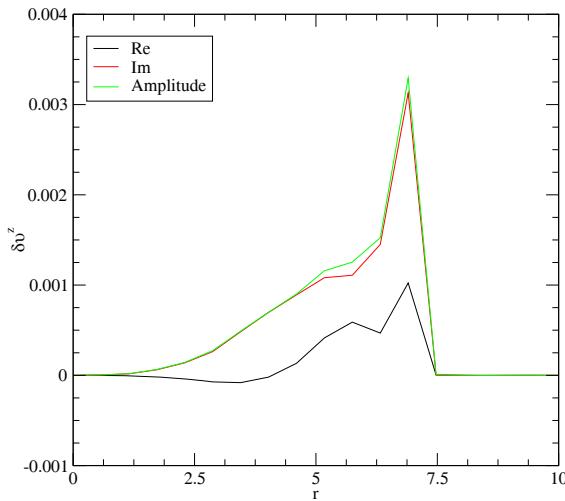
Όλα τα παρακάτω μοντέλα αναφέρονται στην ακολουθία με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.685M_{\odot}$. Τα διαγράμματα δείχνουν την παρουσία του πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοσυναρτήσεων της u^z συνιστώσας της ταχύτητας χατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με διαφορετικές τιμές περιστροφής r_p/r_e . Συγκεκριμένα

Αριστερά : Φαίνεται το μη κανονικοποιημένο διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων, μαζί με το πλάτος (πράσινη γραμμή) της περιστροφικής ταλάντωσης της ιδιοσυνάρτησης.

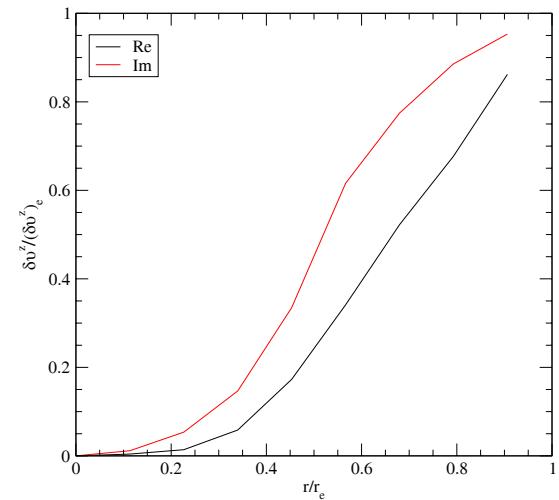
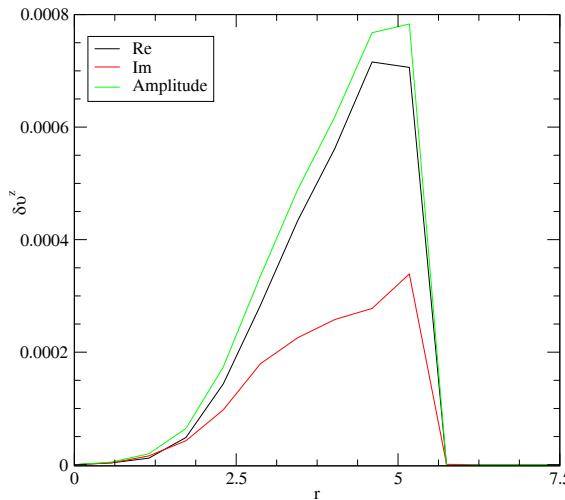
Δεξιά : Φαίνεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια.



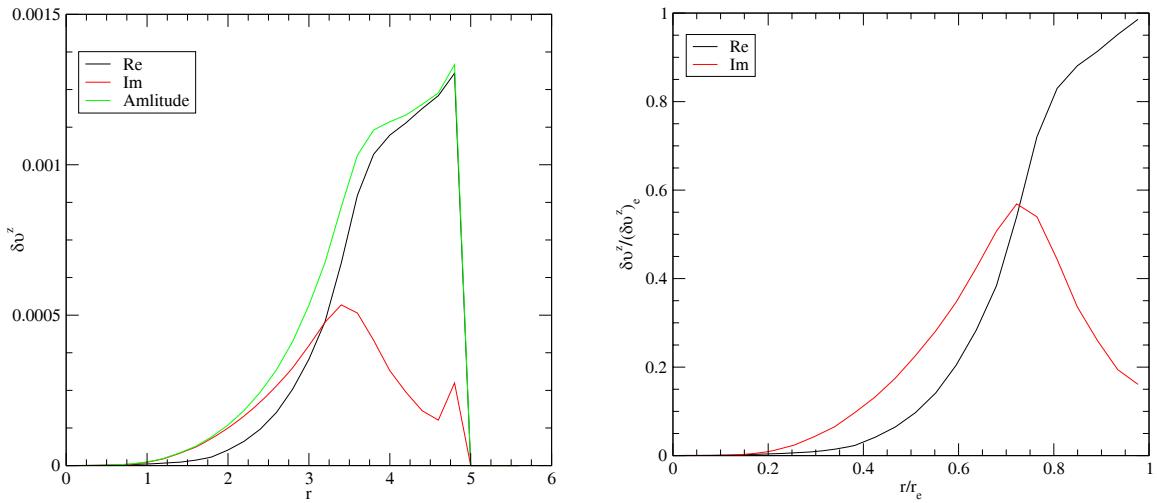
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.5575$



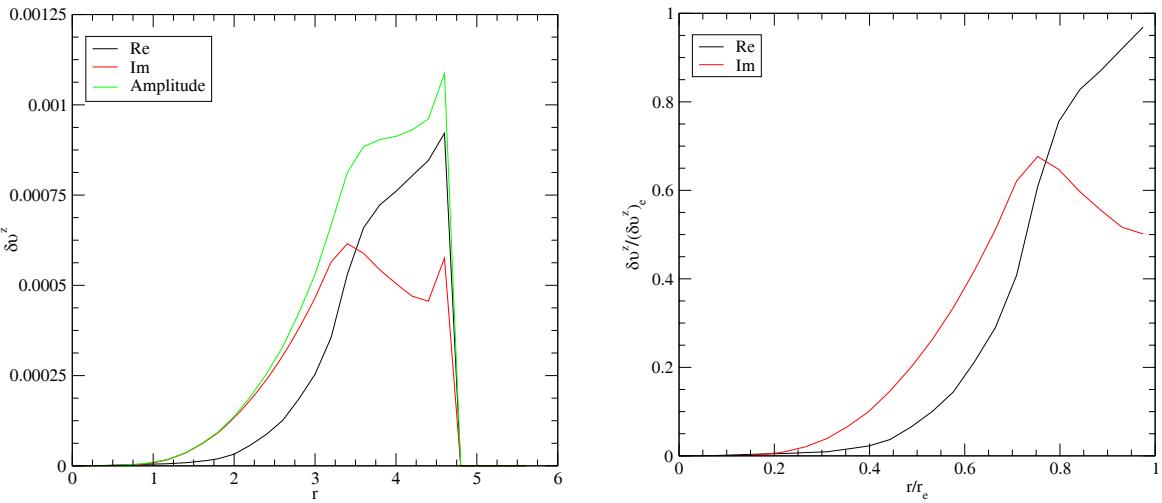
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.6953$



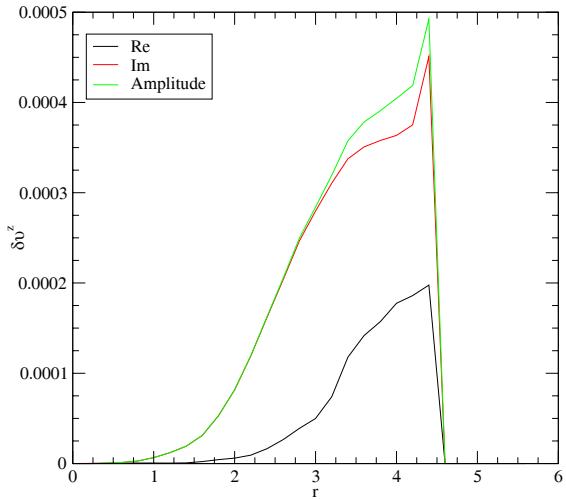
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.8547$



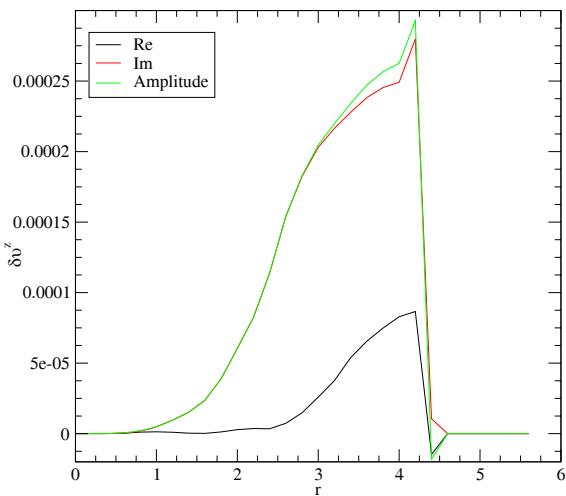
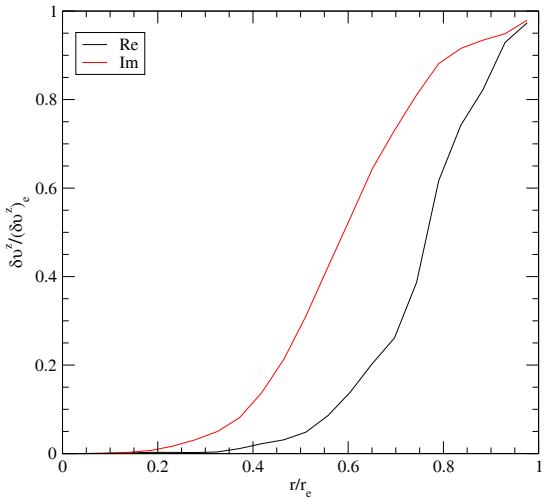
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.9152$



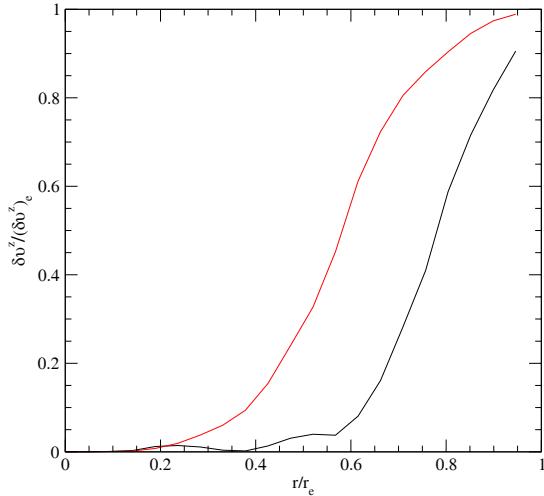
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.9468$

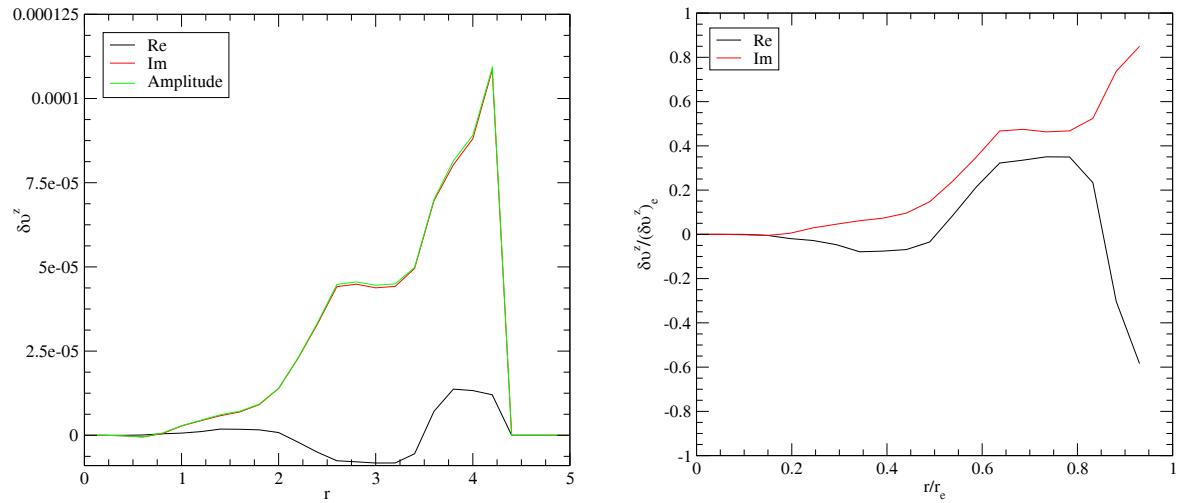


Περιστροφή $r_p/r_e = 0.9772$



Περιστροφή $r_p/r_e = 0.9861$





$$\Pi \varepsilon \sigma \tau \rho o \varphi \eta \quad r_p/r_e = 0.9979$$

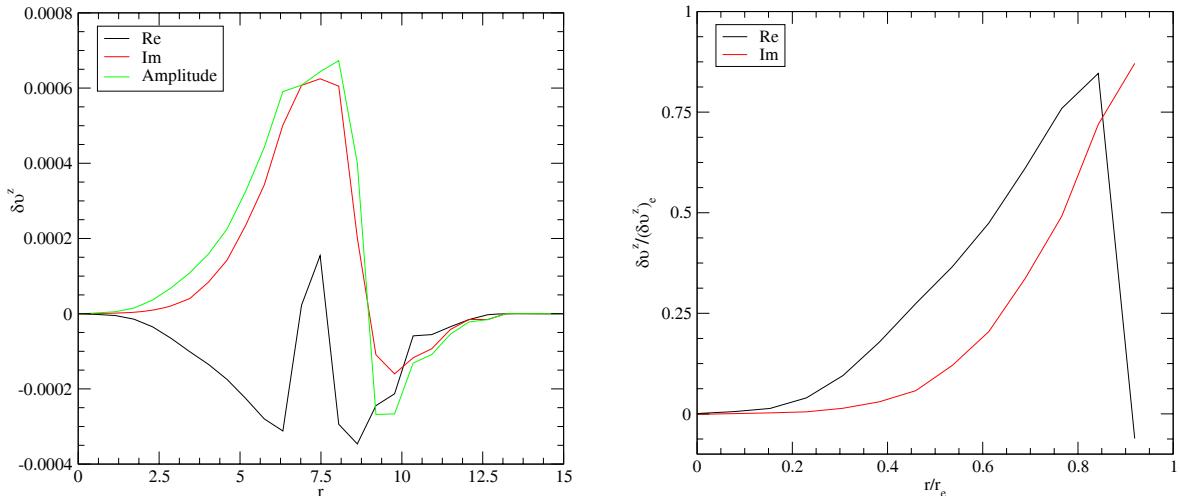
Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 0.50$

Όλα τα παρακάτω μοντέλα αναφέρονται στην ακολουθία με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.617M_{\odot}$. Τα διαγράμματα δείχνουν την παρουσία του πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοσυναρτήσεων της u^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με διαφορετικές τιμές περιστροφής r_p/r_e . Συγκεκριμένα

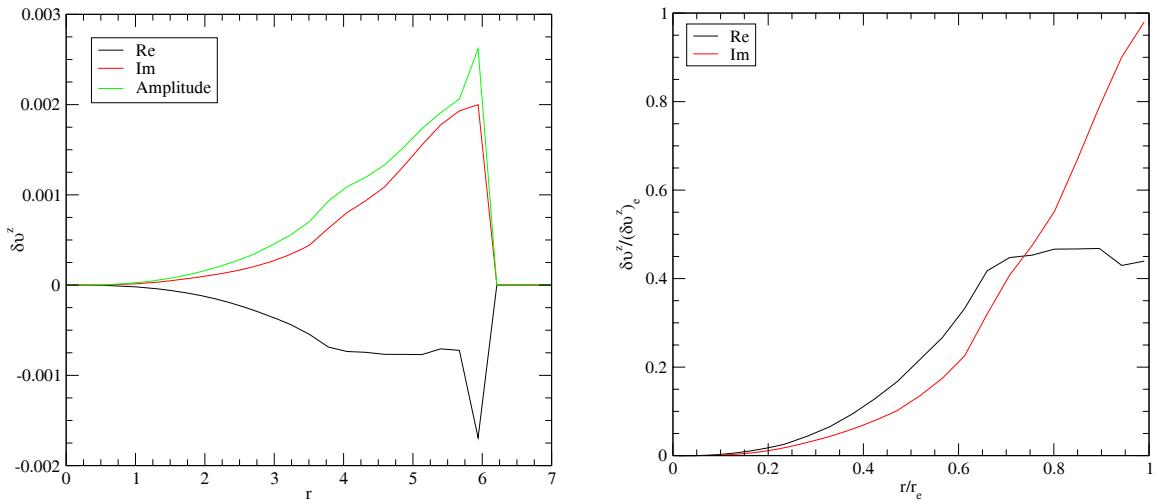
Αριστερά : Φαίνεται το μη κανονικοποιημένο διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων, μαζί με το πλάτος (πράσινη γραμμή) της περιστροφικής ταλάντωσης της ιδιοσυνάρτησης.

Δεξιά : Φαίνεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια.

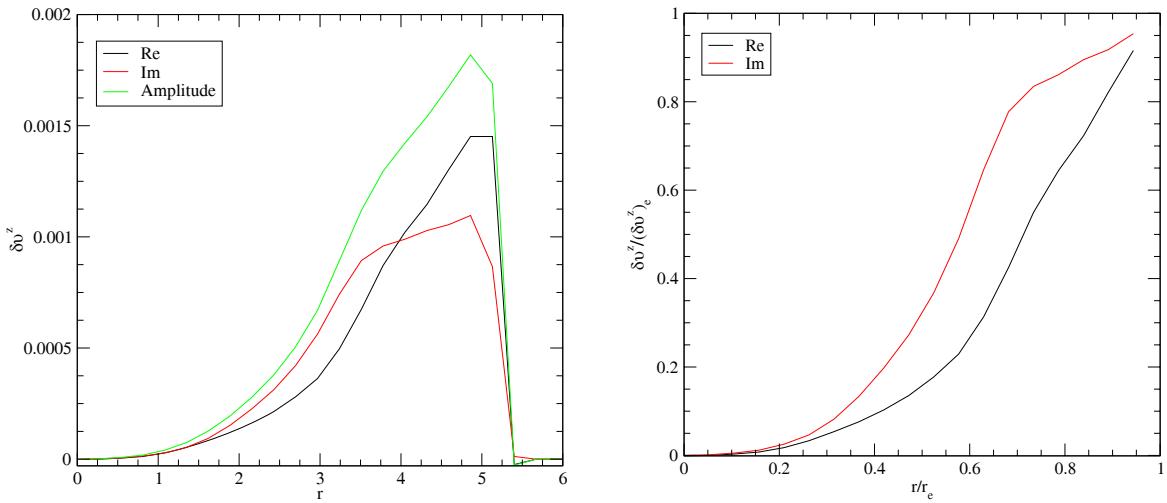
Παρατηρούμε ότι σε αντίθεση με τις προηγούμενες περιπτώσης ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης (r -mode), ακολουθεί το φανταστικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης, πλην του μοντέλου με περιστροφή $r_p/r_e = 0.8340$ που ακολουθεί το πραγματικό.



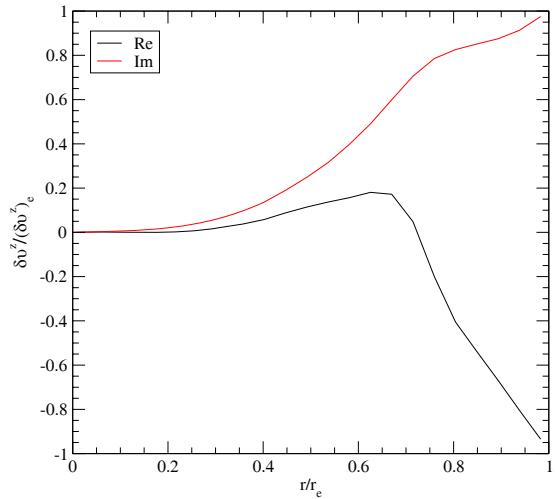
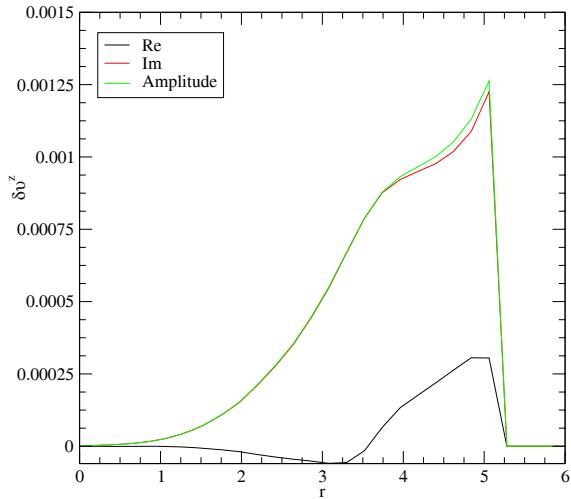
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.49751$



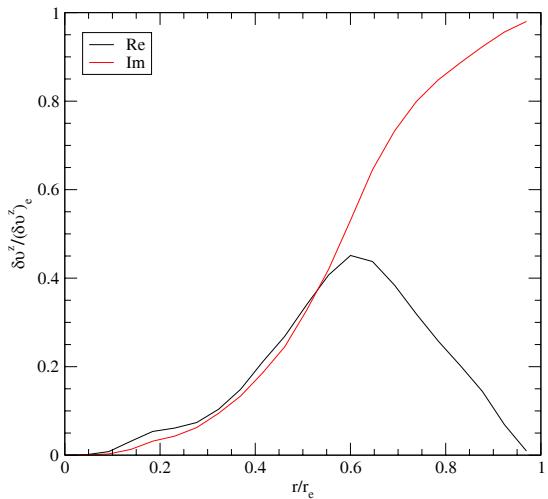
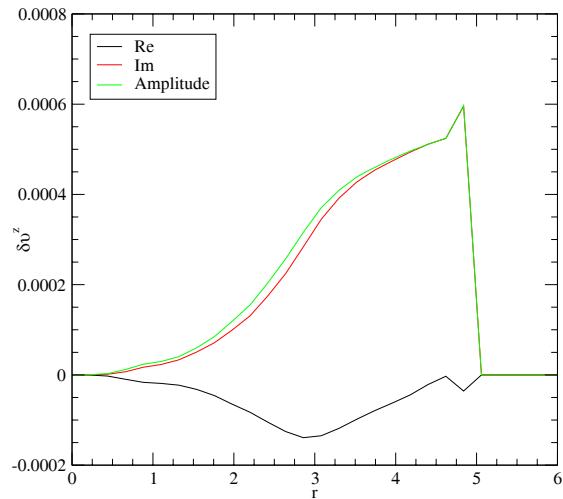
$$\Pi\epsilon\sigma\tau\varrho\omega\eta \quad r_p/r_e = 0.70412$$



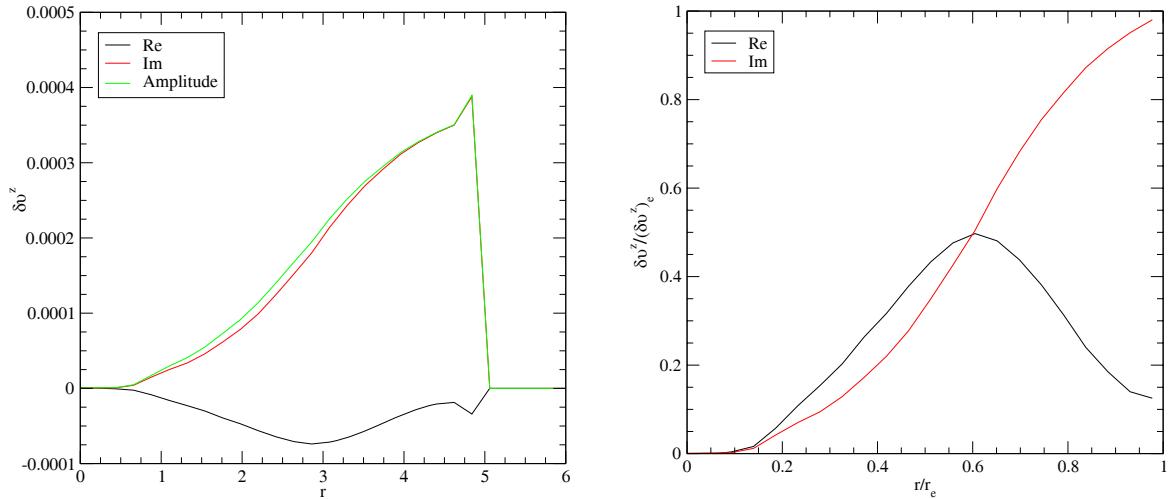
$$\Pi\epsilon\sigma\tau\varrho\omega\eta \quad r_p/r_e = 0.83404$$



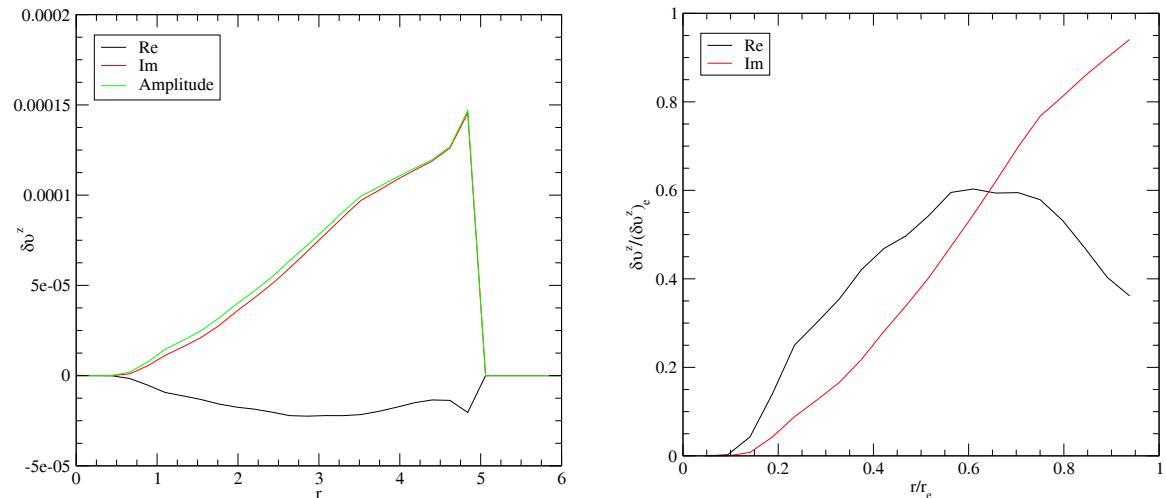
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.90136$



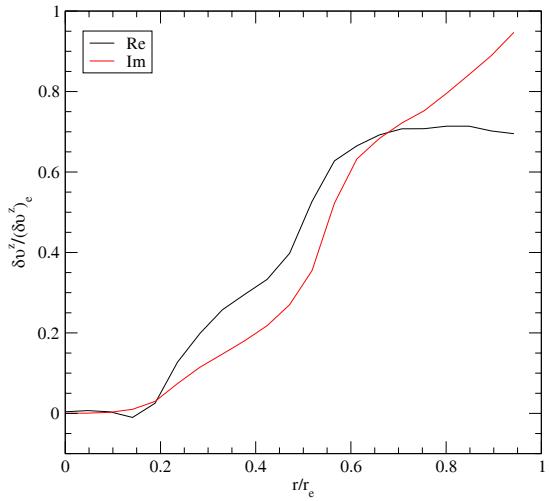
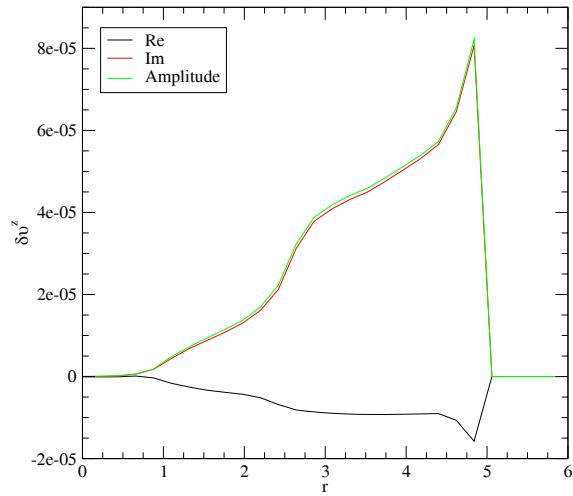
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.95723$



$$\Pi\epsilon\sigma\tau\varrho\circ\varphi\dot{\eta} \quad r_p/r_e = 0.97140$$

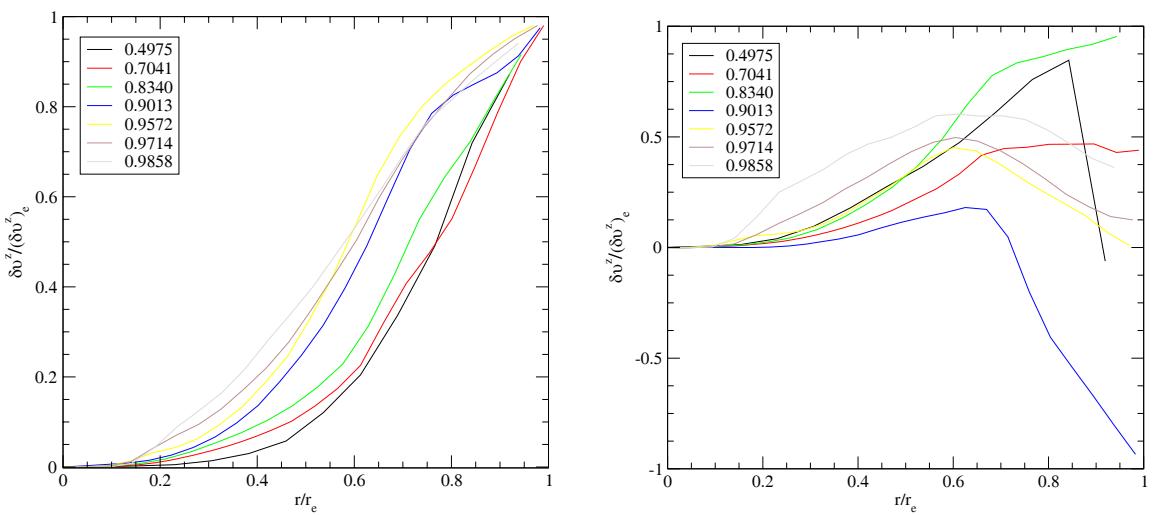


$$\Pi\epsilon\sigma\tau\varrho\circ\varphi\dot{\eta} \quad r_p/r_e = 0.98580$$



$$\text{Περιστροφή } r_p/r_e = 0.99480$$

Στο Σχήμα B'.1 φαίνονται οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις που πήραμε από όλα τα μοντέλα της ακολουθίας $1.617M_{\odot}$, πλην του μοντέλου με λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.99480$ (μοντέλο της ακολουθίας με τη χαμηλότερη περιστροφή), καθώς σε τόσο χαμηλές τιμές περιστροφής απαιτείται υψηλότερη ανάλυση. Αριστερά φαίνεται ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης ενώ δεξιά κάποιος αδρανειακός τρόπος που για να μπορέσουμε με ακρίβεια να τον κατηγοριοποιήσουμε απαιτείται μεγαλύτερη μελέτη και σύγχριση με ιδιοσυναρτήσεις από τη θεωρία. Σε όλες τις περιπτώσεις που είδαμε παραπάνω φαίνεται ότι ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης ακολουθεί το φανταστικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης.



Σχήμα B'.1: Κανονικοποιημένο διάγραμμα ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με σταθερή βαρυονική μάζα $1.617M_{\odot}$ και διαφορετικές τιμές περιστροφής.

Αριστερά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων των περιστροφικών ταλαντώσεων. Όι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούνται κυρίως από το φανταστικό μέρος και όλες αυξάνουν μονότονα από το κέντρο μέχρι την επιφάνεια του αστέρα.

Δεξιά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ενός αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης κοντά στη συχνότητα του r -mode. Μπορούμε να διακρίνουμε καθαρά τη διαφορετική συμπεριφορά του από τον $l = m = 2$ περιστροφικό τρόπο ταλάντωσης. Χαρακτηριστικό τους είναι είται η αλλαγή προσίμου είται η μείωσή τους πριν φτάσουν στην επιφάνεια του αστέρα.

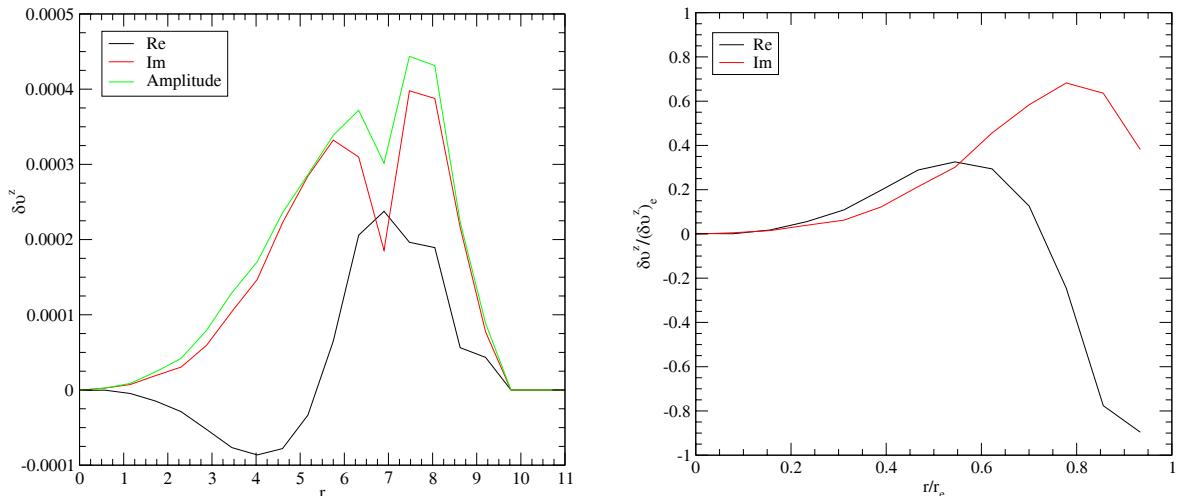
Πολυτροπικό Μοντέλο $N = 0.25$

Όλα τα παρακάτω μοντέλα αναφέρονται στην ακολουθία με σταθερή μάζα ηρεμίας $1.637M_{\odot}$. Τα διαγράμματα δείχνουν την παρουσία του πραγματικού και φανταστικού μέρους των ιδιοσυναρτήσεων της u^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με διαφορετικές τιμές περιστροφής r_p/r_e . Συγκεκριμένα

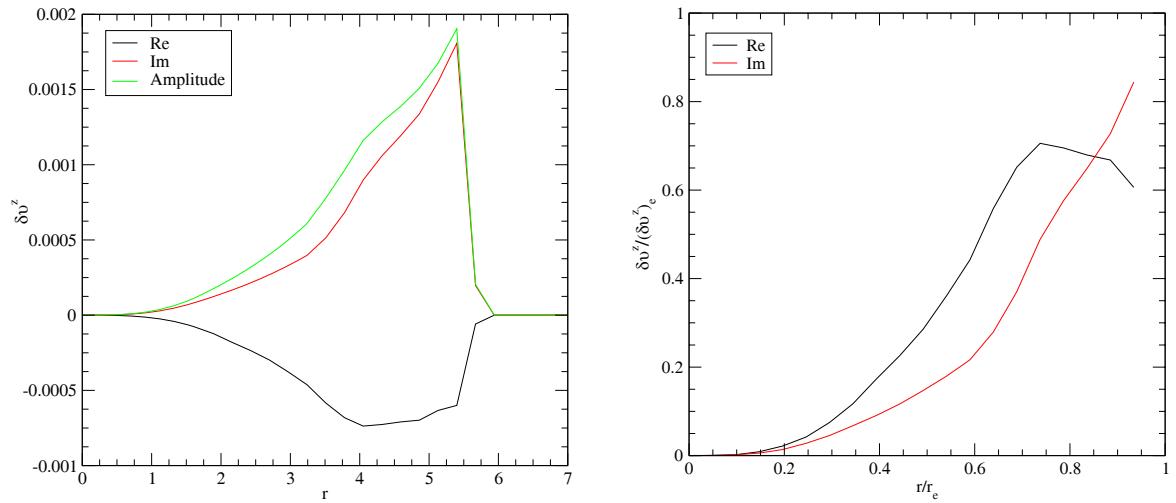
Αριστερά : Φαίνεται το μη κανονικοποιημένο διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων, μαζί με το πλάτος (πράσινη γραμμή) της περιστροφικής ταλάντωσης της ιδιοσυνάρτησης.

Δεξιά : Φαίνεται το κανονικοποιημένο διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων στην επιφάνεια.

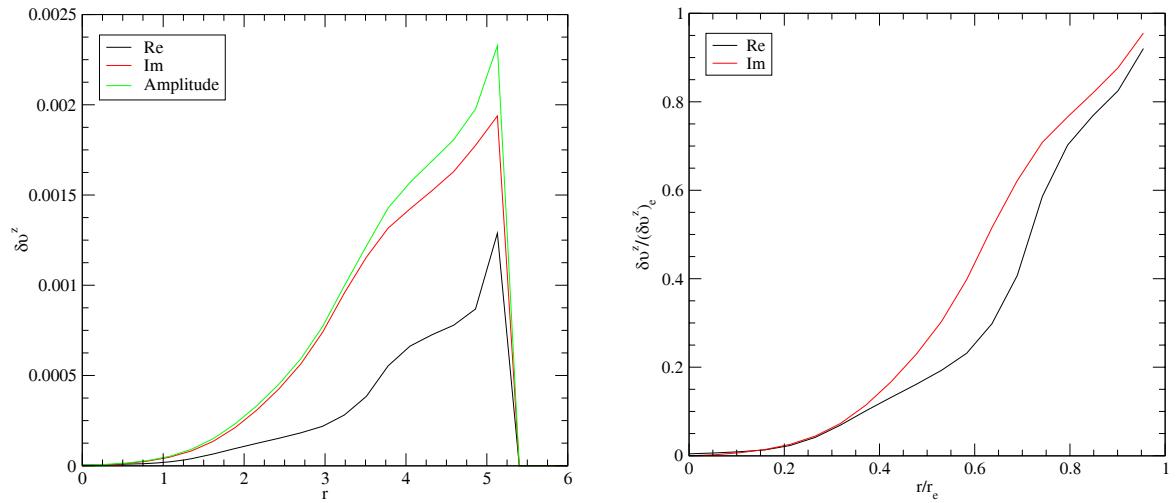
Παρατηρούμε ότι και στην περίπτωση του μοντέλου $N = 0.25$ όπως και σε αυτή του $N = 0.50$, ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης (r -mode), ακολουθεί το φανταστικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης.



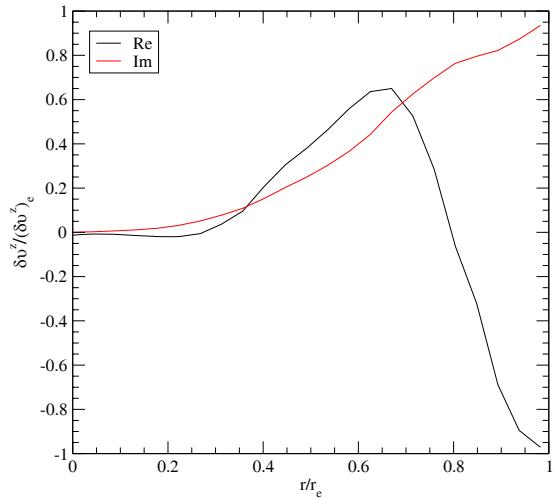
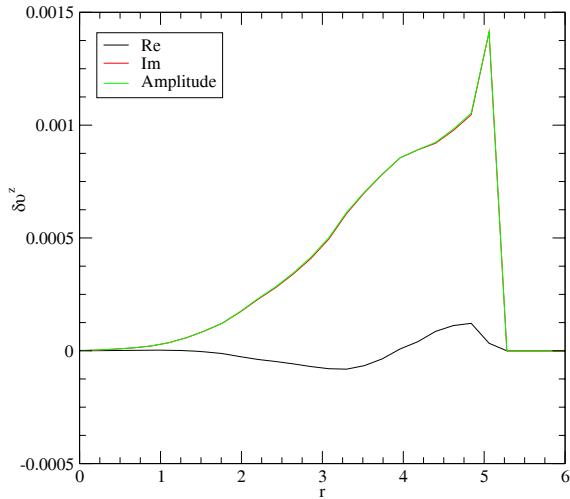
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.4281$



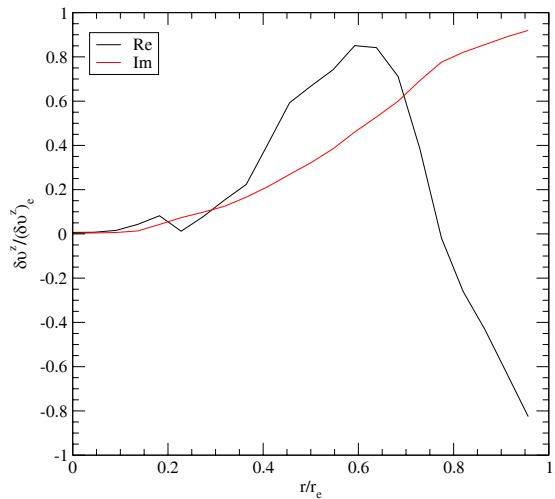
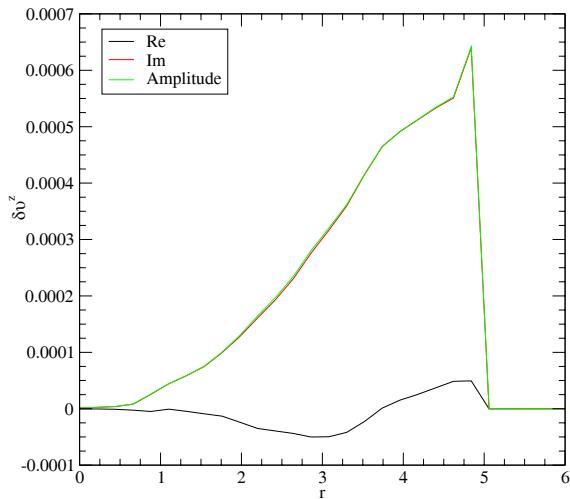
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.7028$



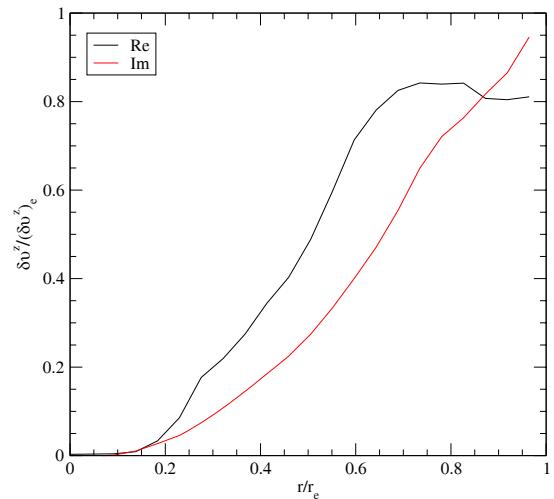
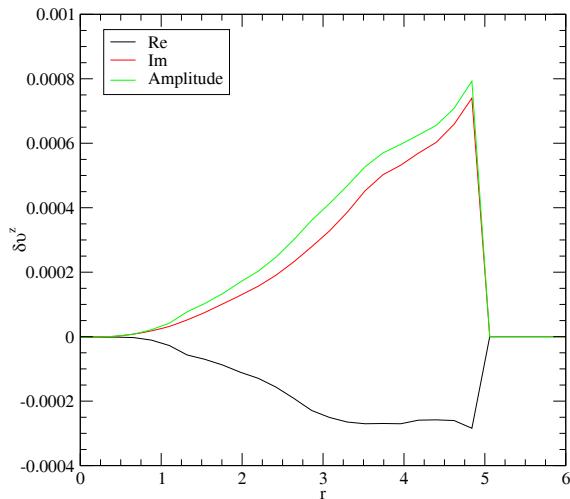
Περιστροφή $r_p/r_e = 0.8330$



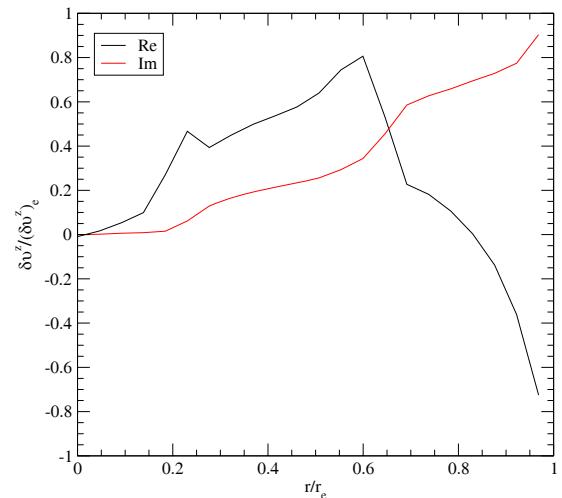
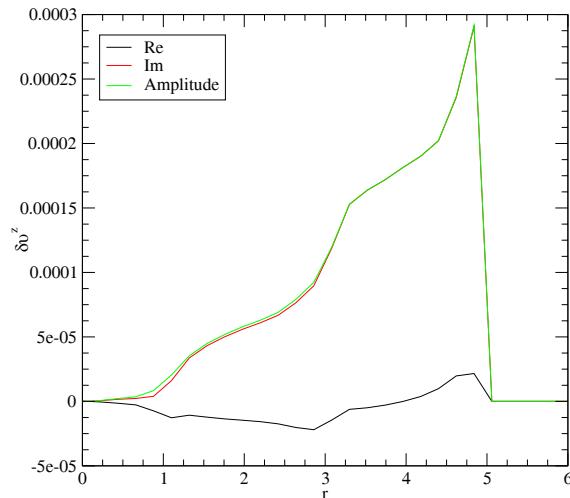
$$\Pi\epsilon\sigma\tau\rho\circ\varphi\eta \quad r_p/r_e = 0.9034$$



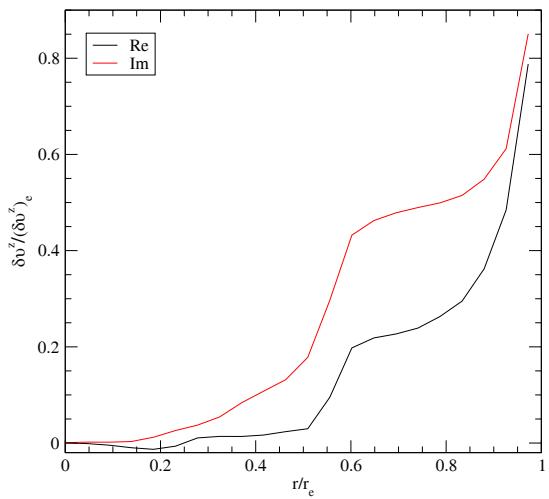
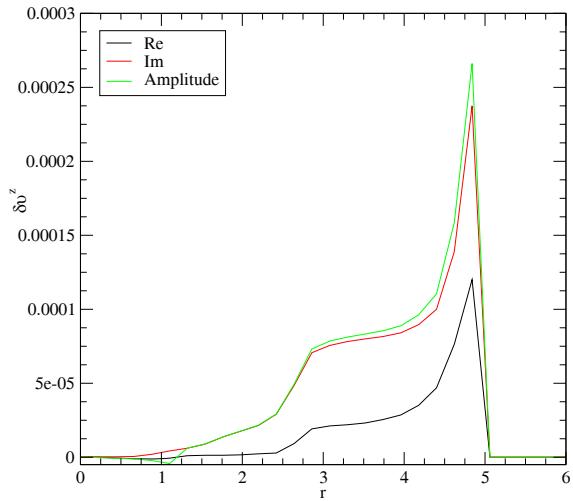
$$\Pi\epsilon\sigma\tau\rho\circ\varphi\eta \quad r_p/r_e = 0.9513$$



Περιστροφή $r_p/r_e = 0.9713$

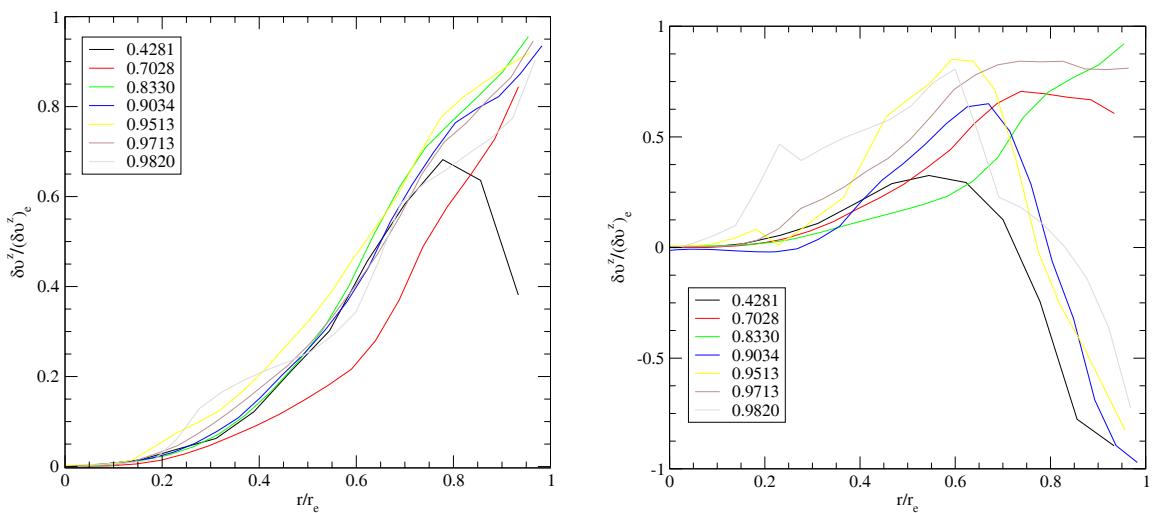


Περιστροφή $r_p/r_e = 0.9820$



$$\Pi \varepsilon \rho i \sigma \tau \rho o \varphi \dot{\eta} \quad r_p/r_e = 0.9932$$

Στο Σχήμα B'.2 φαίνονται οι κανονικοποιημένες ιδιοσυναρτήσεις που πήραμε από όλα τα μοντέλα της ακολουθίας $1.637M_{\odot}$, πλην του μοντέλου με λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.9932$ (μοντέλο της ακολουθίας με τη χαμηλότερη περιστροφή), καθώς σε τόσο χαμηλές τιμές περιστροφής απαιτείται υψηλότερη ανάλυση. Αριστερά φαίνεται ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης ενώ δεξιά κάποιος αδρανειακός τρόπος που για να μπορέσουμε με ακρίβεια να τον κατηγοριοποιήσουμε απαιτείται μεγαλύτερη μελέτη και σύγκριση με ιδιοσυναρτήσεις από τη θεωρία. Σε όλες τις περιπτώσεις που είδαμε παραπάνω φαίνεται ότι ο περιστροφικός τρόπος ταλάντωσης ακολουθεί το φανταστικό μέρος της ιδιοσυνάρτησης.



Σχήμα B'.2: Κανονικοποιημένο διάγραμμα ως προς την ακτίνα του αστέρα r_e αλλά και το πλάτος των ιδιοσυναρτήσεων της v^z συνιστώσας της ταχύτητας κατά μήκος του άξονα x για μοντέλα με σταθερή βαρυονική μάζα $1.637M_{\odot}$ και διαφορετικές τιμές περιστροφής.

Αριστερά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα των ιδιοσυναρτήσεων των περιστροφικών ταλαντώσεων. Όι ιδιοσυναρτήσεις αποτελούνται μόνο από το φανταστικό μέρος και όλες αυξάνουν μονότονα από το κέντρο μέχρι την επιφάνεια του αστέρα, πλην του μοντέλου $r_p/r_e = 0.4281$, όπου παρουσιάστηκε μια απότομη αλλαγή φάσης, κοντά στην επιφάνεια του αστέρα.

Δεξιά : Συγκεντρωτικό διάγραμμα ιδιοσυναρτήσεων ενός αδρανειακού τρόπου ταλάντωσης κοντά στην συχνότητα του r -mode. Μπορούμε να διακρίνουμε καθαρά τη διαφορετική συμπεριφορά του από τον $l = m = 2$ περιστροφικό τρόπο ταλάντωσης. Χαρακτηριστικό τους είναι είται η αλλαγή προσίμου είται η μείωσή τους πριν φτάσουν στην επιφάνεια του αστέρα.

Παράρτημα Γ'

ΚΩΔΙΚΕΣ

Στο Παράρτημα αυτό εξηγούμε με αναλυτικό τρόπο ορισμένα αρχεία που χρησιμοποιήσαμε κατά την διάρκεια της εργασίας αυτής, για την χρησιμοποίηση των διαφόρων προγραμμάτων. Θα ήταν τελείως άσκοπο να αναγράψουμε τον υπολογιστικό κώδικα, μιας και αυτός αφενός μεν αποτελείται από εκατοντάδες σελίδες, αφετέρου δε είναι διαθέσιμος στο ευρύ κοινό. Για το λόγω αυτό θεωρήσαμε χρησιμότερο να παρουσιάσουμε ορισμένα μόνο μέρη που χωρίς την γνώση τους δεν θα μπορούσε κάποιος να προχωρήσει.

Στην πρώτη ενότητα παρουσιάζουμε τον τρόπο που πρέπει να γράψει κάποιος ένα αρχείο ώστε να μπορέσει να εκτελέσει οποιοδήποτε πρόγραμμα σε έναν υπερυπολογιστή και συγκεκριμένα σε αυτόν που χρησιμοποιήσαμε εμείς για τις ανάγκες του υπολογιστικού κώδικα, το *MareNostum*. Επιπλέον αναφέρουμε χρήσιμες εντολές που πρέπει κάποιος να γνωρίζει όταν χρησιμοποιεί το λειτουργικό σύστημα ενός υπερυπολογιστή.

Στην δεύτερη ενότητα παρουσιάζουμε το αρχείο με τις εντολές - παραμέτρους που θα πρέπει να γράψει κάποιος για να κατασκευάσει ένα μοντέλο και να το εξελίξει όπως αυτός επιθυμεί στον υπολογιστικό κώδικα *CACTUS*. Εξηγούμε κάθε κομμάτι αυτού έτσι ώστε να γίνει ακόμα πιο κατανοητή η διαδικασία εξέλιξης των μοντέλων που χρησιμοποιήσαμε.

Τέλος αναφέρουμε λίγα πράγματα για το τρόπο με τον οποίο ένα σειριακό πρόγραμμα γίνεται παράλληλο. Όπως αναφέραμε και στο αντίστοιχο κεφάλαιο περιγραφής του κώδικα *CACTUS*, το πρόγραμμα αυτό δημιουργήθηκε με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορεί να τρέχει σε έναν επεξεργαστή αλλά και σε πολλούς περισσότερους. Στην αντίστοιχη ενότητα περιγράφουμε την βασική δομή της διαδικασίας μετατροπής ενός σειριακού προγράμματος σε παράλληλο.

Γ'.1 Χρησιμοποιώντας έναν Υπερυπολογιστή

Υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι γνώστης του λειτουργικού συστήματος **UNIX** καθώς και των βασικών εντολών του. Παρακάτω δίνουμε ακριβείς οδηγίες του τρόπου εισαγωγής σε έναν υπερυπολογιστή καθώς και βασικές χρήσιμες εντολές για να κινηθεί κανείς μέσα σε ένα τέτοιο σύστημα.

Ας υποθέσουμε ότι έχεις πάρει την άδεια να χρησιμοποιήσεις τις εγκαταστάσεις ενός υπερυπολογιστή, και σου έχουν δώσει όνομα χρήστη και κωδικό

```
Username: auth2006
```

```
Password: abc1234
```

Για να εισέρθεις στο σύστημα χρειάζεσαι την διεύθυνσή του, το **MareNostrum** χρησιμοποιεί 4 πύλες εισαγωγής mn1 έως mn4. Όλες οι συνδέσεις πρέπει να γίνουν μέσα σε ένα σύστημα ασφαλείας των **UNIX** που λέγεται Secure Shell. Για να μπούμε λοιπόν δεν έχει παρά να χρησιμοποιήσουμε την εντολή

```
localsystem$: ssh -l auth2006 mn1.bsc.es
```

```
usertest's password: abc1234
```

και αμέσως έχεις εισαχθεί στο σύστημα του υπερυπολογιστή. Τώρα στην δική σου οθόνη να αναγράφεται αντί του τοπικού σου συστήματος localsystem\$ το σύστημα του MareNostrum, auth2006@login1:~>.

Το πρώτο πράγμα που κάνουμε είναι να αλλάξουμε τον κώδικα που μας έδωσαν, για να γίνει αυτό δίνουμε την εντολή

```
auth2006@login1$: passwd -l abc1234
```

```
password: New Password
```

Καλό είναι να αλλάζουμε σε τακτά χρονικά διαστήματα τον κώδικό μας για λόγους ασφαλείας. Το **MareNostrum** αλλά και κάθε σοβαρό σύστημα ασφαλείας δεν δέχεται λέξεις γνωστές που υπάρχουν στο λεξικό, π.χ. η εισαγωγή του κωδικού pulsar1234 θα σας αφήσει με το μήνυμα ότι δεν γίνεται δεκτός, έτσι μια σωστή εκλογή είναι από τυχαία γράμματα wqfg1111.

Το δεύτερο βήμα είναι η μεταφορά κάποιου φακέλου από το δικό μας σύστημα στο σύστημα του υπερυπολογιστή. Ανοίγουμε ένα νέο κέλυφος (shell) στον υπολογιστή μας και αν θέλουμε να μεταφέρουμε από το Desktop το φάκελο Cactus τότε εισάγουμε την εντολή

```
localsystem$: scp /home/user/Desktop/Cactus auth2006@mn1.bsc.es : .
```

Όπου χρησιμοποιήσαμε το Secure Copy, την διεύθυνση που βρίσκεται ο φάκελός μας και με την τελεία στο τέλος, λέμε να πάει στο αρχικό φάκελο του συστήματος του υπευπολογιστή. Από εκεί και μετά τον μετακινούμε όπως θέλουμε χρησιμοποιώντας γνωστές εντολές του UNIX. Η μεταφορά αρχείων από το σύστημα του υπερυπολογιστή στο δικό μας τοπικό σύστημα γίνεται με χρήση παρόμοιας εντολής πάλι όμως από το τοπικό μας σύστημα

```
localsystem$: scp auth2006@mn1.bsc.es : "Source MN dir" "Local dir"
```

Κάθε φορά που εκτελείται μεταφορά μας ζητάει και το password. To MareNostrum διαθέτει τις εξής κατηγορίες για να τρέξεις κάποιο πρόγραμμα.

Class	Max. Blades	CPU time limit	Wall time limit
debug	64	10 min.	10 min.
interactive	1	45 min.	24 hours
Seq	1	3 hours	12 hours
small	32	12 hours	12 hours
medium	128	48 hours	48 hours
large	512	7 days	7 days
elarge	1024	14 days	14 days
challenge	2282		

Κάθε μια από αυτές εκτελεί και μια ορισμένη δουλειά, δεν θα επεκταθούμε παραπάνω στις κατηγορίες αυτές, εμείς χρησιμοποιήσαμε μια συγκεκριμένη κατηγορία που μας υπέδειξε το MareNostrum, την class_a. Για να πάρουμε περισσότερες πληροφορίες για τις παραπάνω κατηγορίες δεν έχουμε παρα να δώσουμε την εντολή

```
auth2006@login1$: llclass or llclass -l class_name
```

Όπου με την πρώτη εντολή σου δίνονται γενικές οδηγίες περί των κατηγοριών, ενώ με την δεύτερη σου δίνει συγκεκριμένες πληροφορίες για μια συγκεκριμένη κατηγορία.

Η επόμενη χρήσιμη εντολή είναι το άνοιγμα κειμενογράφου, για να γράψουμε τον τρόπο (εντολές) της αποστολής μιας συγκεκριμένης διεργασίας, όπου στην συνέχεια θα την αναφέρουμε ως 'εργασία' ή job. Για να ανοίξουμε κειμενογράφο με το παράθυρο να βρίσκεται στο ίδιο κέλυφος με αυτό που χρησιμοποιούμε, εκτελούμε την εντολή

```
auth2006@login1$: emacs -nw name_file
```

Ενώ για να ανοίξουμε ξεχωριστά το παράθυρο ωστε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την επιλογή **-x**, αντί της **-nw**.

Παρακάτω δίνουμε ακριβώς τις εντολές που πρέπει να γράψουμε στον κειμενογράφο για την εκτέλεση μιας εργασίας. Το κείμενο το σώζουμε με προέκταση **.job**.

test_rmode.job

```
# ! /bin/tcsh
#
# @ job_name = cactus_rmodes
# @ job_type = parallel
# @ class = class_a
# @ group = auth95
# @ initialdir = /home/auth95/auth95022/Cactus/exe
# @ output = OUTPUT/whatevername.out
# @ error = OUTPUT/whatevername.err
# @ restart = no
# @ node = 256
# @ total_tasks = 512
# @ queue

#environment
setenv MP_EUILIB gm
setenv OBJECT_MODE 64
setenv MP_RSH ssh

#Machine_list for loadleveler
setenv MLIST machine_list_$LOADL_STEP_ID
/opt/ibmll/LoadL/full/bin/ll_get_machine_list > $MLIST

set NPROCS=`cat $MLIST |wc -l`
set OUTDIR = /home/auth95/auth95022/Cactus/exe/OUTPUT
mkdir -p ${OUTDIR}

mpirun -np ${NPROCS} -machinefile $MLIST ./test_rmode.sh >
${OUTDIR}/$LOADL_STEP_ID_rmodes.info
```


Τώρα όταν εξηγήσουμε τι κάνει ακριβώς η κάθε γραμμή. Αρχικά η εργασία είναι η μονάδα εκτέλεσης του LoadLeveler* και όλες οι εργασίες πρέπει να περνούν από αυτό. Το LoadLeveler επιτρέπει την εκτέλεση πολλαπλών-βήματων εργασίες, ενώ κάθε βήμα μπορεί να έχει διαφορετικής ομάδας από κατευθυντήριες οδηγίες ή διαφορετικά ψευδοεντολές (directives), η οποίες λήγουν με την λέξη κλειδί queue. Οι ψευδοεντολές μπορούν να περιέχουν μια ονομασία του κάθε βήματος (step-name), έτσι ώστε να ενημερώνουν το LoadLeveler. Οι ψευδοεντολές αυτές εμφανίζονται ως σχόλια με την μορφή

```
# @ directive = value
```

Παρακάτω επεξηγούμε την κάθε εντολή

! /bin/tcsh: Συγκεκριμένη εντολή εκκίνησης κάθε εργασίας που στέλνουμε στο LoadLeveler δίνοντάς του την οδηγία που να στείλει και από που να διαβάσει την εργασία αυτή.

@ job-name = cactus_rmodes: Το όνομα της εργασίας.

@ job-type = parallel: Ο τύπος της εργασίας. Αν το πρόγραμμα δεν έχει γραφτεί για παράλληλη επεξεργασία υπάρχει και η επιλογή serial, δηλαδή σειριακής επεξεργασίας.

@ class = class-a: Η κατηγορία στην οποία η εργασία πρέπει να ενταχθεί.

@ group = auth95: Το όνομα της ομάδας στην οποία ανήκεις μέσα στο MareNostrum.

@ initialdir = /.../exe: Η διεύθυνση στην οποία βρίσκεται το executable αρχείο μέσα στο σύστημα του MareNostrum. Η διεύθυνση μέχρι το προσωπικό σου κέλυφος που εμφανίζεται όταν εισέρχεσαι στο σύστημα είναι /home/auth95/auth95022/, όπου το auth95022 είναι το όνομα (αριθμός) που έχεις μέσα στην ομάδα που ανήκεις.

*Το LoadLeveler είναι η "υπηρεσία" που χρησιμοποιεί το MareNostrum για μαζική επεξεργασία από τους υπολογιστές (batch processing support.) Περισσότερες πληροφορίες σχετικά με LoadLeveler υπάρχουν στην σελίδα

<http://publib.boulder.ibm.com/clresctr/docs/LoadL/v32/200405/am2ug301/am2ug30102.html>

@ output = OUTPUT/name.out:

Το όνομα του αρχείου που θα συγκεντρώσει κάποια αρχεία εξόδου (stdout) της εργασίας.

@ error = OUTPUT/name.err:

Το όνομα του αρχείου που θα συγκεντρώσει κάποια αρχεία εξόδου λάθους (stderr) της εργασίας.

@ restart = no:

Οδηγία για ενδεχόμενη επανεκκίνηση αν υπάρξει κάποια μορφή δυσλειτουργίας ή λάθους στον τρόπο εφαρμογής της εργασίας.

@ node = 256:

Ο ελάχιστος αριθμός κόμβων (nodes) που πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά την επεξεργασία του προγράμματος.

@ total_tasks = 512:

Ο ελάχιστος αριθμός επεξεργαστών (processors) που πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατά την επεξεργασία του προγράμματος. Συνήθως είναι το διπλάσιο κάθε κόμβου, επειδή ο κάθε κόμβος αποτελείται από δύο επεξεργαστές.

@ queue:

Με την εντολή αυτή ο LoadLeveler καταλαβαίνει πως όλες οι ψευδοεντολές έχουν καταγραφεί και πρέπει να στείλει την συγκεκριμένη εργασία για επεξεργασία. Αμέσως μετά από την εντολή αυτή ακολουθούν οι εντολές περιβάλλοντος του συστήματος.

Οι παρακάτω τρεις εντολές είναι συγκεκριμένες του περιβάλλοντος του συστήματος του LoadLeveler, και προτάσθηκαν για χρήση τους από την ομάδα του MareNostrum. Οι εντολές αυτές είναι:

```
setenv MP_EUILIB gm
setenv OBJECT_MODE 64
setenv MP_RSH ssh
```

Με τις παρακάτω εντολές λέμε στο LoadLeveler να δημιουργήσει μια λίστα μηχανής με συγκεκριμένο δείκτη αναγνώρισης της μορφής (\$LOADL_STEP_ID), το οποίο είναι χρήσιμο για την δημιουργία μοναδικών καταλόγων εργασίας (working directories). Επιπλέον μια εργασία θα πρέπει να περιέχει και την λίστα των επεξεργαστών που χρειάστηκαν για την επεξεργασία του προγράμματος που τους ανατέθηκε. Με την εντολή ll_get_machine_list το LoadLeveler καταγράφει και τυπώνει σε συγκεκριμένο αρχείο εξόδου την λίστα αυτή. Επιπλέον χρησιμοποιώντας την εντολή ll_get_machine_list > \$MLIST, ανακατευθύνουμε την έξοδο σε συγκεκριμένο αρχείο για κάθε βήμα εργασίας, ενώ με την εντολή |wc -l παίρνουμε τον αριθμό των επεξεργαστών.

```
setenv MLIST machine_list_ $LOADL_STEP_ID
/opt/ibmll/LoadL/full/bin(ll_get_machine_list > $MLIST
set NPROCS = `cat $MLIST |wc -l`
```

Κατόπιν δημιουργούμε τον φάκελο OUTDIR μέσα στον οποίο θα αποθηκεύονται όλα τα αρχεία εξόδου

```
set OUTDIR = /home/auth95/auth95022/Cactus/exe/OUTPUT
mkdir -p ${OUTDIR}
```

Τέλος λέμε να διαβάσει από το αρχείο test_rmode.sh την διεύθυνση από την οποία θα πάρει το parameter file, χωρίς το οποίο δεν μπορεί να τρέξει το πρόγραμμα CACTUS, και κάθε πληροφορία που παίρνει από το CACTUS να την αποθηκεύει στο φάκελο OUTDIR με όνομα που θα παίρνει από το \${LOADL_STEP_ID} και θα έχει μια κατάληξη rmodes.info.

```
mpirun -np ${NPROCS} -machinefile $MLIST ./test_rmode.sh >
${OUTDIR}/${LOADL_STEP_ID}_rmodes.info
```

Το αρχείο test_rmode.sh θα πρέπει να αναγράφει μέσα τα εξής στοιχεία:

test_rmode.sh

```
#! /bin/tcsh
export LD_LIBRARY_PATH=/opt/ibmcmp/lib64:$LD_LIBRARY_PATH
/usr/bin/time ./cactus_Whisky ./par/name.par
```

Με τις παραπάνω εντολές λέμε στο LoadLeveler που να ψάζει τις βιβλιοθήκες του CACTUS, οι οποίες μετά την εγκατάσταση του προγράμματος έχουν καταγραφεί σε συγκεκριμένη διεύθυνση. Κατόπιν με την εντολή /usr/bin/time, λέμε να αναγράψει και τον χρόνο που θα κάνουν οι επεξεργαστές να ολοκληρώσουν την εργασία, από την στιγμή βέβαια που θα την αναβάλουν και τέλος την διεύθυνση στην οποία υπάρχει το executable αρχείο. Στην συγκεκριμένη περίπτωση λέμε ότι το executable υπάρχει στο φάκελο(.) και που δεν είναι άλλος από το φάκελο εκεί που είχαμε δηλώσει αρχικά στο αρχείο test_rmode.job σαν initialdir. Μέσα σε αυτό το φάκελο θα βρεί το executable που δηλώνεται με το όνομα cactus_Whisky.exe.

Επιπλέον μέσα στο φάκελο εκεί έχουμε δημιουργήσει έναν υποφάκελο με όνομα par και μέσα σε αυτόν υπάρχει το parameter file για το CACTUS, το οποίο θα εξηγήσουμε στην επόμενη ενότητα.

Πληκτρολογώντας την εντολή

```
auth2006@login1$: llsubmit test_rmode.job
```

στέλνουμε την εργασία για επεξεργασία ενώ μας επιστρέφει παράλληλα το id με το οποίο το σύστημα την αναγνωρίζει. Ενώ με την εντολή

```
auth2006@login1$: llcancel job_id
```

την ακυρώνουμε. Επιπλέον με την εντολή

```
auth2006@login1$: llq -l job_id
```

το σύστημα μας παρέχει αναλυτική πληροφόρηση για την εργασία. Τέλος αν θέλουμε να δούμε όλες τις εργασίες που τρέχουν στο σύστημα εκτελούμε την εντολή

```
auth2006@login1$: llq -x all | more
```

Γ'.2 Οι παράμετροι του **Cactus**

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε το *parameter file* που χρησιμοποιήσαμε για να εξελίξουμε κάθε ένα μοντέλο που περιγράψαμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Θα εξηγήσουμε την παρουσία κάθε εντολής έτσι ώστε ο αναγνώστης να μπορέσει να καταλάβει καλύτερα, σε συνδυασμό και με όλη την θεωρία που αναγράφηκε στα προηγούμενα κεφάλαια (κυρίως το Κεφάλαιο 4), την διαδικασία που εφαρμόσαμε. Μαζί με κάθε γραμμή του κώδικα θα αναφέρουμε και τα σχόλια - υποδείξεις ή άλλες επιλογές που έχει ο χρήστης. Όλες οι παρακάτω εντολές έχουν γραφεί σε λειτουργικό σύστημα UNIX και με κειμενογράφο *emacs*. Θυμίζουμε πως το CACTUS έχει σχεδιαστεί μόνο για το παραπάνω λειτουργικό σύστημα. Καλό θα ήταν η παρών ενότητα να συνδυαστεί με όλα όσα ανεγράφησαν στις ενότητες §4.2, 4.3.

Αρχικά πρέπει να προσθέσουμε όλα Thorns που πρόκειται να χρησιμοποιηθούν από το CACTUS, έτσι ξεκινούμε με την εντολή

```
ActiveThorns = "ADMBase ADMConstraints ADMCoupling ADMMacros
AEILocalInterp Boundary BSSN_ MoL PUGH PUGHInterp IOASCII IOBasic
PUGHReduce PUGHSlab CartGrid3D CoordBase CoordGauge EOS_ Base EOS_
Ideal_ Fluid EOS_ Polytrope IOBasic IOUtil LocalInterp MoL Slab
SpaceMask SphericalSurface StaticConformal SymBase Time Whisky Whisky-
Init_ Data Whisky_ RNSID extract ellbase RotatingSymmetry180"
```

Μια πρώτη σημαντική παρατήρηση που πρέπει να επισημάνουμε είναι ότι η παραπάνω γραμμή δεν θα πρέπει να σπάσει αλλά να είναι συνεχόμενη, έτσι ώστε όποτε ο κειμενογράφος αλλάζει σειρά να εμφανίζεται το σύμβολο ↵ ή ↲, στα αριστερά ή δεξιά της στήλης του κειμενογράφου.

Η επόμενη εντολή προέρχεται από το Thorn του **Cactus** και χρησιμοποιείται για να δηλώσουμε τα χρονικά βήματα εξέλιξης του μοντέλου. Στο παρόν παράδειγμα χρησιμοποιούμε 3229 βήματα. Κάθε παράμετρος που αναφέρεται σε κάποιο Thorn πρέπει να γραφεί με την μορφή

Name of implementation or thorn::Name of the parameter

```
Cactus::cctk_itlast = 3229
```

Η επόμενη εντολή προέρχεται από το Thorn **IOUtil** το οποίο είναι υπεύθυνο για το άνοιγμα φακέλου στον οποίο θα αναγραφούν όλα οι πληροφορίες εξόδου.

```
IO::out_dir = "data/R-modes/High_ N_ 1.0_ M_ 1.506_ axr_ 0.575_ 64p"
```

Η επόμενη εντολή προέρχεται από το Thorn **IOBasic**. Το Thorn αυτό έχει γραφτεί για να τυπώνει μεταβλητές που θέλουμε στην οισόνη του τοπικού μας υπολογιστή (στην περίπτωση που τρέχει σε κάποιο παράλληλο σύστημα π.χ. MareNostrum εμφανίζεται σε ένα αρχείο με την προέκταση του rmode.info, που αναφέραμε λίγο παραπάνω). Επιπλέον υπάρχει και η δυνατότητα να λέμε με ποιο ρυθμό θέλουμε να μας εμφανίζει στην οισόνη. Η χρήση της παρακάτω εντολής τυπώνει τις μεταβλητές της πυκνότητας ρ από το Thorn του **Whisky** και την συνάρτηση χρονικού άλματος α από το Thorn **ADMBase** ανά δύο χρονικά βήματα.

```
IOBasic::outInfo_ every = 2
IOBasic::outInfo_ vars = " whisky::rho admbase::alp "
```

Οι επόμενες εντολές προέρχονται από το Thorn **Whisky**, για το οποίο έχει γίνει λόγος στην ενότητα 4.3. Από το Thorn αυτό χρησιμοποιούμε τις παρακάτω παραμέτρους

Whisky::whisky_rho_central	= 0.799e-3
Whisky::rho_rel_min	= 1.0e-6
Whisky::initial_atmosphere_factor	= 0.1
#Whisky::initial_rho_abs_min	= 5.e-13
Whisky::riemann_solver	= "Marquina"
Whisky::recon_method	= "ppm"
Whisky::ppm_detect	= "yes"
Whisky::whisky_eos_table	= "2D_Polytropic"
Whisky::whisky_eos_type	= "Polytype"
Whisky::bound	= "none"
Whisky::Whisky_MaxNumSandRVars	= 16
Whisky::whisky_stencil	= 3

Παρακάτω επεξηγούμε την κάθε εντολή

Whisky::whisky_rho_central: Για να οριστεί ένα πλήρες μοντέλο στο CACTUS χρειαζόμαστε την κεντρική πυκνότητά του και το λόγο των αξόνων του r_p/r_e . Εδώ ορίζουμε την κεντρική πυκνότητα του αστέρα.

Whisky::rho_rel_min:

Σχετική τιμή πυκνότητας ρ της ατμόσφαιρας. Η προκαθορισμένη τιμή είναι 10^{-7} . Η πραγματική τιμή της πυκνότητας της ατμόσφαιρας θα είναι $\rho = \text{rho_rel_min} \times \text{whisky_rho_central}$.

Whisky::initial_atmosphere_factor:	Εναλλακτική τιμή παραμέτρου, η οποία πολλαπλασιάζει την τιμή της ατμόσφαιρας που βρέθηκε από τον αρχικό solver με τον αντίστοιχο παράγοντα. Το κίνητρο για την εισαγωγή αυτής της παραμέτρου βασίζεται στο γεγονός ότι μερικές φορές είναι προτιμότερο να θέτουμε την αρχική ατμόσφαιρα λίγο πιο κάτω από την τιμή αποκοπής της ατμόσφαιρας που χρησιμοποιήθηκε κατά την διάρκεια της εξέλιξης της, καθώς με το τέχνασμα αυτό αποφεύγουμε truncation errors.
Whisky::initial_rho_abs_min:	Βρίσκεται σε σχόλιο. Έχουμε είδη χρησιμοποιήσει το Whisky::initial_atmosphere_factor
Whisky::riemann_solver:	Επιλογή ενός solver και συγκεκριμένα του Marquina .(βλ. §4.3.5). Οι υπόλοιπες επιλογές του κώδικα είναι ο HLLE και Roe .
Whisky::recon_method:	Επιλογή μεθόδου αναδόμησης. Διαλέξαμε την ppm .(βλ. §4.3.4), άλλες επιλογές είναι οι tvd και η eno (Essentially Non-Oscillatory method).
Whisky::ppm_detect:	Στην σελ. 73 αναφερθήκαμε σε μια διαδικασία που ονομάζεται steeping η οποία γίνεται για να εξασφαλίσουμε το απότομο προφίλ της ασυνέχειας. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει ή όχι αν στην παραπάνω παράμετρο δώσουμε το όρισμα yes η πο αντίστοιχα. Για τις υπόλοιπες επιλογές αναδόμησης υπάρχουν οι επιλογές tvd_limiter και eno_order .

Whisky::whisky_ eos_ table
Whisky::whisky_ eos_ type:

Για την επιλογή της καταστατικής, δύο τύποι αναγνωρίζονται και ελέγχονται από την παράμετρο whisky_ eos_ type. Αυτές είναι οι "Polytype", όπου η πίεση είναι συνάρτηση της πυκνότητας $P = P(\rho)$, και η πιο γενική "General", όπου η πίεση αποτελεί συνάρτηση της πυκνότητας και της εσωτερικής ενέργειας $P = P(\rho, \varepsilon)$. Για τις καταστατικές τύπου Polytype μια λιγότερη εξίσωση εξελίσσεται και η ειδική εσωτερική ενέργεια καθορίζεται πλήρως από την πυκνότητα. Η καταστατική όμως που χρησιμοποιείται καθορίζεται από την παράμετρο whisky_ eos_ table. Οι καταστατικές τύπου Polytype εμπεριέχουν την επιλογή "2D_Polytropic" και οι General την επιλογή "Ideal_Fluid".

Whisky::whisky_ stencil :

Οι υψηλές τάξης αναδόμησης PPM και ENO, χρειάζονται να αυξήσουν το μέγεθος του stencil χρησιμοποιώντας το whisky_ stencil και τον driver::ghostsize.

Οι υπόλοιπες εντολές καθορίζονται από επιλογές του ίδιου του κώδικα Whisky.

Οι επόμενες εντολές προέρχονται από το Thorn **Whisky_ RNSID**. Το Thorn αυτό έχει γραφτεί για να παράγει τα αρχικά δεδομένα από μεμονωμένους αξονικά συμμετρικούς περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες με διαταραχή. Από το Thorn αυτό χρησιμοποιούμε τις παρακάτω παραμέτρους

rnsid::RNS_Gamma	= 2.0
rnsid::RNS_K	= 100.0
rnsid::axes_ratio	= 0.575
rnsid::accuracy	= 1e-6
rnsid::cf	= 0.7
rnsid::consistent_boundaries	= "yes"
rnsid::rotation_type	= "uniform"
rnsid::A_diff	= 1.0
rnsid::perturbation	= "yes"
rnsid::pert_method	= "velocity"
rnsid::pert_type	= "toroidal"
rnsid::pert_l	= 2
rnsid::pert_r_mode_eigenfunc	= "1PN_01"
rnsid::pert_amplitude	= 0.04
rnsid::radius	= 7.0

Οι παραπάνω εντολές νομίζω ότι δεν αξίζουν ιδιαίτερο σχολιασμό, καθώς μπορεί ο καθένας να τις καταλάβει. Επειδή διαλέξαμε ομοιόμορφη περιστροφή θέσαμε την παράμετρο A_{diff} στην μονάδα, αν διαλέγαμε την επιλογή της διαφορικής περιστροφής εκεί παίζοντας με το A_{diff} όμως μεταβάλλαμε τον τρόπο περιστροφής του. Στην συνέχεια λέμε στον κώδικα να λάβει υπόψη του την διαταραχή, να την εφαρμόσει στην ταχύτητα και μάλιστα αυτή να είναι τοροειδής μορφής κυρίως της $l = 2$ μορφής και να χρησιμοποίηση συγκεκριμένη ιδιοσυνάρτηση για τον r-mode την 1PN_01 (1st PostNewtonian Order). Τέλος του λέμε να εφαρμόσει στο σημείο της ακτίνας με $r_e = 7.0$ την παραπάνω διαταραχή πλάτους 0.04.

Καλό λοιπόν είναι να ξέρουμε πρώτα την ακτίνα του αστέρα που πρόκειται να εφαρμόσουμε την διαταραχή, έτσι ώστε να την εφαρμόσουμε σε κάποιο σημείο στο εσωτερικό του και όχι ακριβώς στην επιφάνειά του ή έξω από αυτόν.

Οι επόμενες δύο εντολές προέρχονται από το Thorn **EOS_Polytrope**, από το οποίο εξαρτάται αποκλειστικά το Whisky, και έχει έναν συγκεκριμένο σκοπό, να θέσει στην ατμόσφαιρα την καταστατική του αστέρα αλλά παράλληλα να μηδενίζει τις υδροδυναμικές ποσότητες στην ατμόσφαιρα αν και όπου χρειαστεί.

```
EOS_Polytrope::eos_gamma = 2.0
EOS_Polytrope::eos_k = 100.0
```

Οι επόμενες εντολές προέρχονται από τα Thorn **IOBasic** και **IOASCII**. Τα Thorn αυτά χρησιμοποιούνται για να εκτυπώνουμε τα αποτελέσματα σε κάποιο αρχείο και με συγκεκριμένο ρυθμό. Έτσι με τις παρακάτω εντολές λέμε να μας εκτυπώσει όλες τις διανυσματικές και βαθμωτές μεταβλητές από το Whisky καθώς και τις χωροχρονικές μεταβλητές του ADM φορμαλισμού. Διαλέγουμε να μας εκτυπώνει με συγκεκριμένο τρόπο (g) κάθε 5 χρονικά βήματα.

```
IOBasic::outScalar_ every = 5
IOBasic::out_ format = "g"
IOBasic::outScalar_ vars = "admconstraints::ham whisky::whisky_prim_
vector_ var whisky::whisky_prim_scalar_ var"

IOASCII::out1D_ every = 5
IOASCII::out_ format = "g"
IOASCII::out1D_ vars = "admbase::alp admbase::shift admconstraints::ham
whisky::whisky_prim_vector_ var whisky::whisky_prim_scalar_ var
admbase::gxx"
```

Οι επόμενες εντολές προέρχονται από το Thorn **CartGrid**. Με το Thorn αυτό φτιάχνουμε την δομή του πλέγματος ενώ χρησιμοποιώντας το Thorn **CoordBase**, φτιάχνουμε το διάστημα του πλέγματος, δηλαδή τον χώρο που ωστε να καταλαμβάνει καθώς και το διάστημά του κάθε σημείου (dx, dy, dz). Τέλος με το Thorn **PUGH**, καθορίζουμε τον αριθμό των σημείων του πλέγματος σε κάθε διάσταση μαζί με το `ghost_size` που αναφέραμε παραπάνω. Οι εντολές για όλα τα παραπάνω είναι:

```

CartGrid3D::avoid_origin = "no"
CartGrid3D::type = "coordbase"
CartGrid3D::domain = "full"

CoordBase::domainsize = "minmax"
CoordBase::xmin = 0.0
CoordBase::xmax = 19.6 # = (nx-4)*dx
CoordBase::ymin = -19.6 # = (ny-1)*dy/2
CoordBase::ymax = 19.6
CoordBase::zmin = -15.4
CoordBase::zmax = 15.4 # = (nz-1)*dz/2
CoordBase::dx = 0.35
CoordBase::dy = 0.35
CoordBase::dz = 0.35

CoordBase::boundary_size_x_lower = 3
CoordBase::boundary_shiftout_x_lower = 1

```

```

Driver::ghost_size = 3
Driver::global_nx = 60
Driver::global_ny = 113
Driver::global_nz = 89

```

Σε μορφή σχολίων δίνουμε τον τύπο από τον οποίο βγαίνει το μέγεθος του αστέρα στους αντίστοιχους άξονες.

Οι επόμενες εντολές προέρχονται από την εξέλιξη του χωροχρονικού μέρους και αφορούν τα Thorn **ADMBase**, **ADMMacros**. Παρατηρήστε ότι αναφέροντας τον όρο static στην εξέλιξη διαλέγουμε την λεγόμενη προσέγγιση Cowling, που αναφέραμε στα παραπάνω κεφάλαια. Επίσης με την επιλογή rnsid στην παράμετρο **ADMBase::initial...** καθοδηγούμε το CACTUS να πάρει τα αρχικά δεδομένα από το αντίστοιχο Thorn **Whisky_-RNSID**. Οι εντολές αυτές είναι:

```

ADMBase::evolution_method = "none"
ADMBase::initial_data = "rnsid"
ADMBase::initial_lapse = "rnsid"
ADMBase::initial_shift = "rnsid"
ADMBase::lapse_evolution_method = "static"
ADMBase::metric_type = "physical"
ADMBase::shift_evolution_method = "static"
ADMMacros::spatial_order = 4

```

Η επόμενη εντολή προέρχεται από το Thorn **Boundary**.

```
Boundary::radpower = 2
```

Το Thorn αυτό εξασφαλίζει ένα γενικό μέσο αλληλεπίδρασης με τις συνοριακές συνήκες, αφού εφοδιάζει τον κώδικα με μια ομάδα από συνοριακές συνθήκες μιας, δυο και τριών μεταβλητών. Με το κάλεσμα και μόνο του Thorn Boundary παρέχει έναν μεγάλο αριθμό ψευδοσυναρτήσεων, που επιτρέπει τα αντίστοιχα Thorn εφαρμογής να καταχωρίσουν ρουτίνες οι οποίες με την σειρά τους θα εφοδιάσουν τον κώδικα με συγκεκριμένες φυσικές συνοριακές συνθήκες. Με το κάλεσμα της παραμέτρου **radpower**, επιλέγουμε τις Radiation Boundary Condition ενώ το όρισμα 2 συμβολίζει το ρυθμό εξασθένισης στην εξαγωγή (extrapolation) των παραπάνω συνοριακών συνθηκών. Οι συνθήκες αυτές είναι της μορφής

$$f = f_0 + \frac{u(r - vt)}{r} + \frac{h(r + vt)}{r}$$

τα οποία είναι εξερχόμενα ακτινικά κύματα με εξασθένιση $1/r$, με f_0 μια ασυμπτωτική τιμή που δηλώνει τα εισερχόμενα κύματα. Η παραπάνω σχέση οδηγεί στην εξής διαφορική εξίσωση

$$\frac{x^i}{r} \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{vx^i}{r^2} (f - f_0) = \frac{k}{r^n} \frac{vx^i}{r^2}$$

όπου το n είναι ο αριθμός που δίνεται από το **radpower**.

Ο υδροδυναμικός κώδικας Whisky χρησιμοποιεί το Thorn **MoL**, για να εκπληρώσει την χρονική εξέλιξη, πράγμα που σημαίνει ότι και αν κάποια άλλα Thorn χρησιμοποιούν και αυτά την μέθοδο χρονικής εξέλιξης MoL, τότε η ακρίβεια θα είναι αυτή που χρησιμοποιεί το MoL, δηλαδή τέταρτης τάξης ως προς το χρόνο. Περισσότερα για την μέθοδο υπάρχουν στην παράγραφο §4.3.6. Οι εντολές που χρησιμοποιούμε είναι

```
MoL::ODE_Method = "generic"
MoL::MoL_Intermediate_Steps = 4
MoL::MoL_Num_Scratch_Levels = 3
```

Παρακάτω σχολιάζουμε την κάθε μια από τις παραπάνω εντολές.

MoL::ODE_Method:

Επιλογή μεθόδου ολοκλήρωσης. Οι διαθέσιμες παράμετροι είναι οι RK2, RK3, IC-N, ICN-Avg και η generic. Αυτές αντιστοιχούνε σε Runge-Kutta 2ης και 3ης τάξης στην επαναληπτική Crank Nicholson και τέλος μια Runge-Kutta πολλαπλών βημάτων τρίτης τάξεως, όπως αυτή αναπτύχθηκε από τους Shu και Osher [70].

MoL::MoL_Intermediate_Steps:

Η παράμετρος αυτή καθορίζει τον αριθμό των ενδιάμεσων βημάτων που θα χρειαστούμε για την λύση των $\Sigma\Delta E$. Στην περίπτωση που η επιλογή είναι η generic, καθορίζει την τάξη της ακρίβειας της μεθόδου.

MoL::MoL_Num_Scratch_Levels:

Η παράμετρος αυτή καθορίζει το ποσό του scratch space που χρησιμοποιήθηκε.

Η επόμενη εντολή περιέχει το Thorn **SpaceMask**.

```
SpaceMask::use_mask = "yes"
```

Σύμφωνα με αυτό παρέχεται στον χρήστη μια συνάρτηση πλέγματος (grid function) με την οποία μπορεί να αποθηκεύει σε κάθε σημείο του πλέγματος καταστάσεις τις οποίες επιθυμεί. Η μοναδική παράμετρος που υπάρχει είναι το use_mask με επιλογές yes/no. Αν χρησιμοποιηθεί η πρώτη, φορτώνονται συγκεκριμένες εσωτερικές ρουτίνες, οι οποίες χρησιμοποιούνται ως bit field, διαφορετικών bits ή συνδυασμό αυτών για την αντιπροσώπευση συγκεκριμένων καταστάσεων.

Η επόμενη εντολή περιέχει το Thorn **Time**. Σκοπός του είναι η επιλογή του χρονικού βήματος της εξέλιξης μέσα από κάποιες ρουτίνες.

Time::dtfac = 1.6

Από μόνο του έχει προκαθορισμένη την ρουτίνα `time::timestep_ method = "courant-static"`, για το λόγο αυτό δεν χρειάζεται να την αναγράψουμε. Η ρουτίνα αυτή υπολογίζει από την αρχή της εξέλιξης το χρονικό βήμα, από μια ορισμένη γνωστή συνθήκη τύπου courant, χρησιμοποιώντας το χωρικό βήμα του πλέγματος και μια παράμετρο `dtfac` που καθορίζεται κάθε φορά από τον χρήστη του προγράμματος. Η συνθήκη αυτή είναι

$$\Delta t = dtfac \cdot \min(\Delta x^i)$$

όπου $\min(\Delta x^i)$ η ελάχιστη τιμή της μεταβολής του χωρικού βήματος. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα το χρονικό βήμα της επανάληψης θα είναι $\Delta t = 1.6 \cdot 0.35 = 0.56$. Για να βρούμε τον πραγματικό χρόνο εξέλιξης, αρκεί να πολλαπλασιάσουμε το παραπάνω χρονικό βήμα με τον αριθμό των `iterations` που διαλέξαμε και τέλος να το διαιρέσουμε με τον αριθμό 203 για να καταλήξουμε σε ms. Έτσι το συγκεκριμένο μοντέλο έχει εξελιχθεί για πραγματικό χρόνο

$$\text{real_time_evo} = \frac{3229 \cdot 0.56}{203} = 8.907 \text{ ms}$$

Η εμπειρική σχέση λοιπόν που ισχύει για τον πραγματικό χρόνο εξέλιξης συναρτήσει των βημάτων εξέλιξης είναι

$$t_{\text{evo}} = \frac{dtfac \cdot \min(\Delta x^i)}{203} \cdot \text{iterations} \quad (\text{ms})$$

Γ'.3 MPI

Το *Message-Passing Interface* ή MPI, αποτελεί τον πιο γνωστό τρόπο αλλαγής ενός προγράμματος από σειριακό σε παράλληλο. Δεν αποτελεί κάποια νέα γλώσσα προγραμματισμού, παρά είναι μια βιβλιοθήκη υπο-προγραμμάτων, τα οποία μπορούν να ανακαλεστούν ανά πάσα στιγμή μέσα στο πρόγραμμα από τις C/C++ ή την Fortran γλώσσες προγραμματισμού. Αρχικά κατασκευάστηκε από μια διεθνής ομάδα επιστημών από πολλούς κλάδους της επιστήμης, με μοναδικό σκοπό την ταχεία μεταφορά μηνυμάτων μεταξύ υπολογιστών. Έτσι αντί ένα πρόγραμμα να τρέχει σε έναν μόνο υπολογιστή για ώρες ή ακόμα και για μέρες (σειριακός τρόπος), με την χρήση του MPI, μπορεί να γίνει σε πολλούς υπολογιστές ταυτόχρονα για ελάχιστα λεπτά ή ώρες. Η βασική ιδέα λοιπόν του MPI, δεν είναι άλλος από τον καταμερισμό της εργασίας σε πολλούς υπολογιστές αντί για έναν.

Το πρόγραμμα CACTUS που χρησιμοποιήσαμε στην παρούσα εργασία, γράφτηκε από την αρχή με γνώμονα την παραλληλοποίηση του. Για το λόγω αυτό στις παρακάτω ενότητες θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μόνο την βασική ιδέα του τρόπου με τον οποίο γίνεται ένα πρόγραμμα από σειριακό σε παράλληλο. Θα επικεντρωθούμε χυρίως στην βασική ιδέα του Message-Passing και πως αυτό καλείται από την γλώσσα προγραμματισμού C. Για το λόγω αυτό έχουμε επιλέξει να παρουσιάσουμε το απλό πρόγραμμα "Hello World".

Ο αναγνώστης που θέλει να μάθει πολλά περισσότερα για το MPI, μπορεί να στραφεί είτε στο διαδίκτυο[†], είτε στην διεθνή βιβλιογραφία. Εκεί μπορεί να βρει βιβλία τόσο αρχικού επιπέδου [58] όσο και προχωρημένου επιπέδου [43].

[†]<http://www.cs.berkeley.edu/~demmel/cs267>

<http://www.mcs.anl.gov/dbpp>

<http://www.netlib.org/utk/papers/mpi-book/mpi-book.html>

To Hello World χρησιμοποιώντας MPI

Το πρώτο πρόγραμμα που γράψαμε στην πορεία εκμάθησης μιας γλώσσας προγραμματισμού ήταν το "Hello world", το οποίο απλώς τυπώνει στην οθόνη του υπολογιστή την φράση "Hello World". Στην ενότητα αυτή θα αναγράψουμε το πρόγραμμα αυτό χρησιμοποιώντας όρους της βιβλιοθήκης του MPI. Κατόπιν θα προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε κάθε όρο που χρησιμοποιήσαμε στο πρόγραμμα αυτό, έτσι ώστε να δώσουμε μια βασική ιδέα παραλληλισμού ενός κώδικα στον αναγνώστη. Το παρακάτω πρόγραμμα είναι γραμμένο σε γλώσσα προγραμματισμού C.

```
# include <stdio.h>
# include <string.h>
# include "mpi.h"

main(int argc, char* argv[]){
    int      my_rank;      /* rank of process */
    int      p;           /* number of processes */
    int      source;       /* rank of sender */
    int      dest;         /* rank of receiver */
    int      tag = 0;       /* tag of messages */
    char     message[100];  /* storage for message */
    MPI_Status   status;    /* return status for receive */
MPI_Init(&argc, &argv);      /* Start up MPI */

MPI_Comm_rank(MPI_COMM_WORLD, &my_rank);      /* Find out process rank */
MPI_Comm_size(MPI_COMM_WORLD, &p);      /* Find out number of processes */
if (my_rank != 0) {
/* Create Message */
sprintf(message,"Hello World from process %d!",my_rank);
dest = 0;
/* Use strlen+1 so that '\0' gets transmitted */
MPI_Send(message, strlen(message)+1, MPI_CHAR, dest, tag,
        MPI_COMM_WORLD);
} else { /* my_rank==0 */
    for (source = 1; source < p; source++) {
        MPI_Recv(message, 100, MPI_CHAR, source, tag,
                MPI_COMM_WORLD, &status);
        printf("%s\n", message);
    }
}
/* Shut down MPI */
mpi_Finalize();
} /* main */
```

Στα περισσότερα παράλληλα συστήματα, η διαδικασία της αλλαγής ενός προγράμματος από σειριακό σε παράλληλο, απαιτεί έναν μη αρνητικό αριθμό p επεξεργαστών που θα εκτελέσουν το πρόγραμμα. Οι επεξεργαστές αυτοί θα έχουν βαθμούς από $0, 1, \dots, p-1$. Το πιο απλό παράλληλο πρόγραμμα λοιπόν, είναι να γράψουμε μερικές σειρές από κώδικα έτσι ώστε κάθε επεξεργαστής, πλην του 0, να στείλει ένα μήνυμα στον 0, και για να δούμε αν τα πείρε πραγματικά, να πούμε στον 0 να τα τυπώσει στην οθόνη του. Το παραπάνω πρόγραμμα γράφτηκε για το σκοπό αυτό.

Παρατηρήστε ότι το πρόγραμμα αποτελείται κυρίως από συναρτήσεις που καλούμε από την βιβλιοθήκη της C. Για να καταλάβουμε λοιπόν το MPI θα πρέπει πρώτα να μάθουμε ορισμένες νέες συναρτήσεις από την βιβλιοθήκη του MPI, η οποία βρίσκεται μέσα στις βιβλιοθήκες της γλώσσας C. Ας ξεκινήσουμε πρώτα από το header file που πρέπει να υπάρχει πάντα όταν ξεκινάμε να γράψουμε ένα πρόγραμμα με MPI. Θα πρέπει να φορτώσουμε το πακέτο συναρτήσεων αλλά και δηλώσεων-ορισμών, με τις οποίες θα μεταγλωτιστεί το MPI πρόγραμμα. Αυτό γίνεται με την εντολή

```
# include "mpi.h"
```

Το MPI χρησιμοποιεί ένα συνεπές σχήμα για την παρουσίαση των δεικτών του. Έτσι για παράδειγμα όλοι οι δείκτες του ξεκινούν με τα κεφαλαία "MPI_". Οι υπόλοιποι χαρακτήρες των MPI σταυρεών γράφονται με κεφαλαία, για παράδειγμα (MPI_CHAR). Ο πρώτος χαρακτήρας των υπολοίπων ονομάτων των MPI συναρτήσεων, γράφεται με κεφαλαία ακολουθούμενος από μικρά γράμματα, όπως για παράδειγμα (MPI_Init).

Πριν καλέσουμε οποιαδήποτε MPI συνάρτηση, πρέπει πρώτα να καλέσουμε την συνάρτηση MPI_Init, και την οποία θα πρέπει να την καλέσουμε μόνο μια φορά κατά την διάρκεια ενός προγράμματος. Οι παράμετροί της αποτελούν δείκτες στις παραμέτρους της κύριας συνάρτησης, argc και argv. Μόλις το πρόγραμμα τελειώσει από κάθε χρήση συναρτήσεως του MPI, πρέπει να καλέσουμε την MPI_Finalize, η οποία κλείνει κάθε << ανοικτή δουλειά >> που άφησε το MPI, όπως για παράδειγμα μπορεί να ελευθερώσει μνήμη που κατέχει το MPI.

Το MPI παρέχει επίσης την συνάρτηση MPI_Comm_rank, η οποία επιστρέφει τον βαθμό-θέση του επεξεργαστή με την δεύτερη κατά σειρά παράμετρό του (&my_rank). Η πρώτη παράμετρος είναι ο λεγόμενος επικοινωνών, δηλαδή αυτός που επικοινωνεί, ή διαφορετικά **communicator**, ο οποίος αποτελεί μια συλλογή από διαδικασίες με τις οποίες μπορούνε να στέλνουν μηνύματα μεταξύ τους οι επεξεργαστές. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε τον MPI_COMM_WORLD communicator. Πολλές από τις διεργασίες που θα κάνουμε κατά την διάρκεια ενός προγράμματος, εξαρτώνται από τις διαδικασίες που εκτελούν το πρόγραμμα. Για αυτό το MPI μας παρέχει την συνάρτηση MPI_Comm_size. Η πρώτη του παράμετρος είναι ένας communicator. Επιστρέφει τον αριθμό των διεργασιών του communicator με την δεύτερή του παράμετρο.

Η πραγματική μεταφορά όμως μηνυμάτων γίνεται από τις συναρτήσεις MPI_Send και MPI_Recv. Η πρώτη στέλνει ένα μήνυμα σε ένα καθορισμένο επεξεργαστή ενώ η δεύτερη το λαμβάνει. Οι δύο αυτές συναρτήσεις αποτελούν τις σημαντικότερες εντολές του MPI. Η γενική τους σύνταξη είναι :

```

int MPI_Send(
    void*          message      /* in */,
    int            count        /* in */,
    MPI_Datatype   datatype    /* in */,
    int            dest         /* in */,
    int            tag          /* in */,
    MPI_Comm       comm        /* in */)

int MPI_Recv(
    void*          message      /* out */,
    int            count        /* in */,
    MPI_Datatype   datatype    /* in */,
    int            source       /* in */,
    int            tag          /* in */,
    MPI_Comm       comm        /* in */,
    MPI_Status*    status       /* out */)

```

Το περιεχόμενο του μηνύματος αποθηκεύεται σε ένα κελί μνήμης δηλωμένο από την παράμετρο `message`. Οι επόμενοι δυο παράμετροι, `count` και `datatype`, επιτρέπουν στο σύστημα να καθορίσει τον χώρο που θέλει για αποθήκευση του μηνύματος, το μήνυμα περιέχει μια σειρά από τιμές `count` καθεμιά με τύπο MPI datatype. Οι παράμετροι `dest` και `source` αποτελούν τους βαθμούς του επεξεργαστή λήψης και επιστολής αντίστοιχα.

Το MPI έχει δυο μηχανισμούς ειδικά σχεδιασμένους για διαμέλιση του χώρου που καταλαμβάνει ένα μήνυμα, τις ετικέτες (tags) και τον communicator. Η ετικέτα αποτελεί ακέραιο αριθμό (integer), ενώ για communicator χρησιμοποιούμε το `MPI_COMM_WORLD`. Υπάρχει επίσης ένα wildcard, `MPI_ANY_TAG` το οποίο χρησιμοποιείται από την `MPI_Recv` για ετικέτα. Με λίγα λόγια, για να μπορέσει ο επεξεργαστής X να στείλει ένα μήνυμα στον επεξεργαστή Y, το όρισμα `comm` που χρησιμοποιεί ο X στην κλήση του `MPI_Send`, θα πρέπει να είναι το ίδιο με αυτό που θα χρησιμοποιήσει ο Y για να καλέσει την `MPI_Recv`. Στην περίπτωση που δεν χρησιμοποιήσουν το ίδιο, ο Y με χρήση του ορίσματος `MPI_ANY_TAG` λύνει τέτοιου είδους προβλήματα.

Η τελευταία παράμετρος του `MPI_Recv`, `status`, επιστρέφει πληροφορίες για το μέγεθος του μηνύματος που έλαβε. Η δομή του αποτελείται από τρεις αριθμούς μια για την πηγή, μια για την ετικέτα και μια για το λάθος. Τα ονόματά τους είναι:

status → MPI_SOURCE

status → MPI_TAG

status → MPI_ERROR

Έτσι για παράδειγμα, η πηγή της δέκτη είναι το MPI_ANY_SOURCE, τότε το status → MPI_SOURCE, όπου περιέχει το βαθμό του επεξεργαστή που έστειλε το μήνυμα.

Με λίγα λόγια κάθε μήνυμα θα πρέπει να αποτελείται από δύο μέρη, την πληροφορία που μεταδίδεται και τον φάκελο. Μέσα στον φάκελο θα πρέπει να υπάρχουν

1. Ο βαθμός του Αποστολέα
2. Ο βαθμός του Παραλήπτη
3. Μια ετικέτα
4. Ένας communicator

Κάθε Thorn του κώδικα CACTUS, είναι γραμμένο σε μορφή MPI. Η λύση των εξισώσεων τόσο του βαρυτικού πεδίου όσο και της υδροδυναμικής, γίνεται παράλληλα από ένα πλήθος επεξεργαστών που εμείς αποφασίζουμε να χρησιμοποιήσουμε. Η διαδικασία επικοινωνίας μεταξύ των υπολογιστών, γίνεται με τον τρόπο που περιγράψαμε παραπάνω, βέβαια όχι τόσο απλά, αλλά ο βασικός κορμός παραμένει ο ίδιος, χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις MPI_Send() και MPI_Recv().

Βιβλιογραφία

- [1] Σειραδάκης Χ. Γ. και Βάρβογλης Χ. *Εισαγωγή στη Σύγχρονη Αστρονομία*. Εκδόσεις Γαρταγάνη, (1994).
- [2] Alcubierre M., Allen G., Brügmann B., Seidel E. and Suen W-M. *Phys. Rev. D* , **62**,(124011), (2000).
- [3] Alcubierre M. and others. *Phys. Rev. D* , **62**,(044034), (2000).
- [4] Alcubierre M. and others. *Phys. Rev. Lett.* , **87**,(271103), (2001).
- [5] Andersson N. "Gravitational waves from instabilities in relativistic stars". *Class. Quantum Grav.* , **20**,:R105–R144, For a related online version see: N. Andersson, "Gravitational waves from instabilities in relativistic stars",(February, 2002) (2003). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 3 April 2003, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0211057>.
- [6] Andersson N., and Kokkotas K.D. "The R-Mode Instability in Rotating Neutron Stars". *Int. J. Mod. Phys. D* , **10**,:381–441, For a related online version see: N. Andersson, *et al.* "The R-Mode Instability in Rotating Neutron Stars",(Octomber, 2000) (2001). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 23 April 2002, <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0010102>.
- [7] Andersson N., Jones D.I., Kokkotas K.D., and Stergioulas N. "R-Mode Runaway and Rapidly Rotating Neutron Stars". *Astrophys. J.* , **337**,:1224–1232, For a related online version see: N. Andersson, *et al.* "R-Mode Runaway and Rapidly Rotating Neutron Stars",(February,2000). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 23 April 2002, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0002114>.
- [8] Andersson N., Kokkotas K.D., and Stergioulas N. "On the Relevance of the r-mode Instability for Accreting Neutron Stars and White Dwarfs". *Astrophys. J.* , **516**,:307–314, For a related online version see: N. Andersson, *et al.* "On the Relevance of the r-mode Instability for Accreting Neutron Stars and White Dwarfs",(June, 1998) (1999). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 2 May 1998, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/9806089>.

- [9] Arnett M., and Bowers R.L. "A Microscopic Interpretation of Neutron Star Structure". *Astrophys. J. Suppl. Ser.* , **33**,:415–436, (1977).
- [10] Arnowitt R., Deser S. and Misner C. W. "The Dynamics of General Relativity. In *Gravitation: An introduction to current research*". Pages 227-264, ed. by L. Witten, (1962).
- [11] Banyuls F. and others. *Astrophys. J.* , **476**,(221), (1997).
- [12] Baumgarte T.W., and Shapiro S.L. *Phys. Rev. D* , **59**,(024007), (1999).
- [13] Bogdanov S., Grindlay J.E., and Maureen van der Berg. "An X-ray Variable Millisecond Pulsar in the Globular Cluster 47 Tucanae: Closing the Link to Low Mass X-ray Binaries". *Astrophys. J.* , **630**,:1029–1036, September (2005). [Available at <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0506031>].
- [14] Brodbeck O., Frittelli S., Hübner P. and Reula O.A. *J. Math. Phys.* , **40**,(909), (1999).
- [15] Butterworth E.M., and Ipser J.R. *Astrophys. J.* , **204**,:200, (1976).
- [16] CACTUS COMPUTATIONAL TOOLKIT. Available at: www.cactuscode.org.
- [17] Chandrasekhar S. *Phys. Rev. Lett.* , **24**,(611), (1970).
- [18] Cheng K.S., Taam R.E., and Wang W. "Pulsar Wind Nebulae and the Non-thermal X-ray Emission of Millisecond Pulsars". *Astrophys. J.* , **641**,:427–437, February (2006). [Available at <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0602609>].
- [19] Choquet-Bruhat Y. and York J.W. "General Relativity and Gravitation". vol. 1, ed. by Held A., Plenum, New York, (1980).
- [20] Collela P., and Woodward P.R. "The Piecewise parabolic method (PPM) for gas dynamical simulations". *J. Comput. Phys.* , **54**,:174–201, (1984). [Article in Online Journal Living Reviews in Relativity]:cited on 5 June 2002, <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume3/2000-2font>.
- [21] Cook G.B., Shapiro S.L., and Teukolsky S.A. "Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state". *Astrophys. J.* , **424**,:823–845, (1994).
- [22] Cook G.B., Shapiro S.L., and Teukolsky S.A. "Spin-up of a Rotating Star by Angular Momentum Loss: Effects of General Relativity". *Astrophys. J.* , **398**,:203–223, (1992).
- [23] Cottam J., Paerels F., and Mendez M. "Gravitationally redshifted absorption lines in the X-ray burst spectra of a neutron star". *Nature*, **420**,:51–54, November (2002). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 7 February 2003, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0211126>.

- [24] Cowling T.G. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , **101**,(367), (1941).
- [25] Donat R., and Marquina A. "Capturing Shock Reflections: An Improved Flux Formula". *J. Comput. Phys.* , **125**,(42), (1996).
- [26] Edmonds P.D. and others. "A Millisecond Pulsar Optical Counterpart With Large Amplitude Variability In The Globular Cluster 47 Tucanae". *Astrophys. J.* , **579**,:741–751, November (2002). [Available at <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0207426>].
- [27] Edmonds P.D. and others. "An Extensive Census of HST Counterparts to Chandra X-ray Sources In The Globular Cluster 47 Tucanae. I. Astrometry and Photometry ". *Astrophys. J.* , **596**,:1177–1196, Octomber (2003). [Available at <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0307187>].
- [28] Eulderink F., and Mellema G. *Astron. Astrophys.* , **284**,(652), (1994).
- [29] Font J.A., Goodale T., Iyer S., Miller M., Rezzolla L., Seidel E., Stergioulas N., Suen Wai-Mo, and Tobias M. "Three-dimensional general relativistic hydrodynamics II: Long-term dynamics of single relativistic stars". *Phys. Rev. D* , **65**,:084024–1–084024–18, For a related online version see: J.A. Font, *et al.* "Three-dimensional general relativistic hydrodynamics II: Long-term dynamics of single relativistic stars", (Octomber,2001) (2002). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 13 June 2002, <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0110047>.
- [30] Font J.A., Miller M., Suen Wai-Mo, and Tobias M. "Three-dimensional numerical general relativistic hydrodynamics: Formulations, methods and code tests". *Phys. Rev. D* , **61**,:044011–1–044011–26, For a related online version see: J.A. Font, *et al.* "Three-dimensional Numerical General Relativistic Hydrodynamics I: Formulations, Methods and Code Tests", (November,1998) (2000). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 1 December 1998, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/9811015>.
- [31] Font Jose A. "Numerical Hydrodynamics in General Relativity". *Living Rev. Relativ.* , **65**,:084024–1–084024–18, (2000). [Article in Online Journal Living Reviews in Relativity]:cited on 5 June 2002, <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume3/2000-2font>.
- [32] Friedman J.L. "Upper Limit on the Rotation of Relativistic Stars". In *Millisecond Pulsars. A Decade of Surprise*, ed. by Fruchter A.S., Tavani M. and Backer D.C., volume 72 of *ASP Conferense Series*, 177-185. (Astronomical Society of the Pacific, San Franciso, California,1995).
- [33] Friedman J.L., and Lockitch K.H. "Implications of the r-mode instability of rotating relativistic stars. In *Proceedings of the 9th Marcel Grossmann Meeting,*". Pages 163–181, ed. by Gurzadyan V.G., Jantzen R.T., and Ruffini R.,(World Scientific, Singapore, 2002).

- [34] Friedman J.L., and Schutz B.F. *Astrophys. J.*, **221**,(937), (1978).
- [35] Friedman J.L., and Schutz B.F. *Astrophys. J.*, **222**,(281), (1978).
- [36] Friedrich H. and Rendall A. "Einstein's field equations and their physical interpretation". ed. by Schmid B.G., Springer, Berlin, (2000),available as gr-qc/0002074.
- [37] Geroch R. "General Relativity". ed by Hall G.S. and Pulham J.R.,(Institute of Physics Publishing), (1996). available as gr-qc/9602055.
- [38] Hartle J.B. "Slowly Rotating Relativistic Stars I. Equations of Structure". *Astrophys. J.*, **150**,:1005–1029, (1967).
- [39] Hartle J.B. "The equation of state and bounds on the mass of nonrotating neutron stars". *Astrophys. J.*, **213**,:831–835, (1977).
- [40] Hartle J.B., and Sabbatini A.G. "Bounds on the mass and moment of inertia of non-rotating neutron stars". *Phys. Rep.*, **46**,:201–247, (1978).
- [41] Hartle J.B., and Thorne K.S. "Slowly Rotating Relativistic Stars II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars". *Astrophys. J.*, **153**,:807–834, (1968).
- [42] Hessels Jason W.T. and others. "A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz". *Science*, **311**,(Issue,5769):1901–1904, For a related online version see: Jason W.T. Hessels, *et al.* "A Radio Pulsar Spinning at 716 Hz",(March,2006). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 16 Jan 2006, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0601337>.
- [43] Karniadakis E. G, and Kirby M. R. "Parallel Scientific Computing in C++ and MPI". Cambridge University Press, (2003).
- [44] Kokkotas K.D., and Stergioulas N. "Gravitational Waves From Compact Sources. In Proceedings of the 5th International Workshop *New Worlds in Astroparticle Physics*". (2005). [Online Los Alamos Archive Preprint]: Available as, <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0506083>.
- [45] Komatsu H., Eriguchi Y., and Hachisu I. "Rapidly rotating general relativistic stars-I. Numerical method and its application to uniformly rotating polytropes". *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, **237**,:355–379, (1989).
- [46] Koranda S., Stergioulas N., and Friedman J.L. "Upper limit Set by Causality on the Rotation and Mass of Uniformly Rotating Relativistic Stars". *Astrophys. J.*.
- [47] Kulkarni S.R. "The First Decade of Millisecond Pulsars: An Overview". In *Millisecond Pulsars. A Decade of Surprise*, ed. by Fruchter A.S., Tavani M. and Backer D.C., volume 72 of *ASP Conference Series*, 79-101. (Astronomical Society of the Pacific, San Francisco, California,1995).

- [48] Laney C.B. "Computational Gasdynamics.". Cambridge University Press, (1983).
- [49] Lattimer J.M. and Prakash M. *Science*, **304**,(536), (2004).
- [50] Lockitch Keith H. "Stability and Rotational Mixing of Modes in Newtonian and Relativistic Stars". PHD Thesis, University of Wisconsin-Milwaukee, August (1999). Available as gr-qc/9909029.
- [51] Marti J.M., and Müller E. "Numerical Hydrodynamics in Special Relativity". *Living Rev. Relativ.* , **2**,, (1999). [Article in Online Journal Living Reviews in Relativity]:cited on 1 July 1999, <http://www.livingreviews.org/lrr-1999-3>.
- [52] Max Planck Institute for Gravitational Physics. "NCSA/LCA - Potsdam - WashU International Numerical Relativity Group". [Online HTML Document]:cited on 13 September 2002, <http://jean-luc.aei.mpg.de>.
- [53] Messenger C. and Vecchio A. "Searching for gravitational waves from low mass X-ray binaries". *Class. Quantum Grav.* , **21**,:S729–S734, February (2004).
- [54] Miller M. "On the Numerical Stability of the Einstein Equations". [Online Los Alamos Archive Preprint]: Available as, <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0008017>.
- [55] Nakamura T. and Oohara K. "Frontiers in Numerical Relativity". ed. by Evans C.R., Finn L.S. and Hobill D.W., (Cambridge Univ. Press, Cambridge, England), (1989).
- [56] Nakamura T., and Oohara K. and Kojima Y. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* , **90**,(1), (1987).
- [57] Nozawa T., Stergioulas N., Gourgoulhon E. and Eriguchi Y. "Construction of highly accurate models of rotating neutron stars - comparison of three different numerical schemes". *Astron. Astrophys. Suppl.* , **132**,:431–454, For a related online version see: T. Nozawa, *et al.* "Construction of highly accurate models of rotating neutron stars - comparison of three different numerical schemes", (April,1998) (1998). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 2 May 1998, <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/9804048>.
- [58] Pacheco S. Peter. "Parallel Programming with MPI". Morgan Kaufmann Publishers, Inc., (1997).
- [59] Papaloizou J., and Pringle J.E. "Non-radial oscillations of rotating stars and their relevance to the short-period oscillations of cataclysmic variables". *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , **182**,:423–442, (1978).
- [60] "Proceedings of Black Holes and Gravitational Waves". *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 136. ed. by T. Nakamura and H. Kodama.

- [61] Reula O.A. *Living Rev. Relativ.* , (1998-3). At <http://www.livingreviews.org/>.
- [62] Sa P.M., and Tome B. *Phys. Rev. D* , **71**,(044007), (2005).
- [63] Saio H. *Astrophys. J.* , **256**,(717), (1982).
- [64] Sarbach O., Calabrese G., Pullin J. and Tiglio M. *Phys. Rev. D* , **66**,(064002).
- [65] Schenk A.K., Arras P., Flanagan E.E., Teukolsky S.A., and Wasserman I. *Phys. Rev. D* , **65**,(024001), (2002).
- [66] Shapiro S.L. *et al.* "Relativistic MHD in dynamical spacetimes: Numerical Methods and Tests. ". (2005). [Online Los Alamos Archive Preprint]: Available as, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/0503420>.
- [67] Shibata M., and Nakamura T. *Phys. Rev. D* , **52**,(5428), (1995).
- [68] Shibata M. and Uryu K. *Prog. Theor. Phys.* , **107**,:265, (2002).
- [69] Shinkai H. and Yoneda G. "Re-formulating the Einstein equations for stable numerical simulations - Formulation Problem in Numerical Relativity -". In *Progress in Astronomy and Astrophysics*. Nova Science Publ., December (2002). Also available as gr-qc/0209111.
- [70] Shu C.W., and Osher S.J. *J. Comput. Phys.* , **77**,(439), (1988).
- [71] Smarr L. and York J. W. *Phys. Rev. D* , **17**,(2529), (1978).
- [72] Stergioulas N. "The Structure and Stability of Rotating Relativistic Stars". PhD Thesis, USA, (1996).
- [73] Stergioulas N., and Font J.A. "Nonlinear r-modes in rapidly rotating relativistic stars". *Phys. Rev. Lett.* , **86**,:1148–1151, For a related online version see: N. Stergioulas, et al., "Nonlinear r-modes in rapidly rotating relativistic stars", (July, 2000) (2001). [Online Los Alamos Archive Preprint]: cited on 23 April 2002, <http://www.arxiv.org/abs/gr-qc/0007086>.
- [74] Stergioulas N., and Friedman J.L. "Comparing Models Of Rapidly Rotating Relativistic Stars Constructed by Two Numerical Methods". *Astrophys. J.* , **444**,:306–311, (1995).
- [75] Toro E.F. "Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics.". Springer-Verlag, 2nd edition,, (1999).
- [76] Tsakiris N., and Stergioulas N. Currently on development.
- [77] Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., and Shibahashi H. "Nonradial Oscillations of Stars". University of Tokyo Press, 2nd edition,, (1989).

- [78] van Kerkwijk M.H., van Paradijs J., and Zuiderwijk E.J. "On the masses of neutron stars". *Astron. Astrophys.* , **303**,: 497–501, For a related online version see: M.H. Kerkwijk, *et al.* "On the masses of neutron stars", (May 1995). [Online Los Alamos Archive Preprint]:cited on 23 April 2002, <http://www.arxiv.org/abs/astro-ph/9505071>.
- [79] Washington University Gravity Group. "Neutron Star Grand Challenge". [Online HTML Document]:cited on 13 September 2002,<http://wugrav.wustl.edu/Relativ/nsgr.html>.
- [80] Yoneda G., and Shinkai H. *Class. Quantum Grav.* , **18**,(441), (2001).
- [81] York J. W. "Kinematics and Dynamics of General Relativity. In *Sources of Gravitational Radiation*". Pages 83-126, ed. by L. Smarr, (1979).
- [82] Yoshida S., and Eriguchi Y. "R-mode oscillations of rapidly rotating barotropic stars in general relativity: Analysis by the relativistic Cowling approximation". *Mon. Not. R. Astron. Soc.* , **356**,:217–224, (2005).