

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ
ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΑΔΑΜΑΝΤΙΟΥ ΣΤΑΥΡΙΔΗ
Πτυχιούχου Φυσικού

ΜΗ ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΒΡΑΔΕΩΣ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΩΝ
ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ
2004

ΑΔΑΜΑΝΤΙΟΥ ΣΤΑΥΡΙΔΗ

ΜΗ ΑΚΤΙΝΙΚΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ
ΒΡΑΔΕΩΣ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΩΝ
ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΩΝ ΑΣΤΕΡΩΝ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Τυποβλήθηκε στο Τμήμα Φυσικής,
Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής
Σ.Θ.Ε, Α.Π.Θ
Ημερομηνία Προφορικής εξέτασης : Δεκέμβριος 2004

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Πανεπιστημίου Ιωαννίνων :
Νικόλαος Μπατάκης

Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε/Α.Π.Θ :
Νικόλαος Σπύρου (Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Πανεπιστημίου Πατρών :

Δημήτριος Τσουμπελής
Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε/Α.Π.Θ :
Λουκάς Βλάχος

Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε/Α.Π.Θ :
Κωνσταντίνος Κόκκοτας (Επιβλέπων)

Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε/Α.Π.Θ :
Δημήτριος Παπαδόπουλος (Μέλος τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής)

Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε/Α.Π.Θ :
Νικόλαος Στεργιούλας

Στους πρώτους μου δασκάλους·
τους γονείς μου

Ερχόμαστε από μια σκοτεινή άβυσσο· Καταλήγουμε σε μια σκοτεινή άβυσσο· Το μεταξύ φωτεινό διάστημα το λέμε Ζωή.

Ευτύς ως γεννηθούμε, αρχίζει κι η επιστροφή, ταυτόχρονα το ξεκίνημα και ο γυρισμός· κάθε στιγμή πεθαίνουμε. Γι' αυτό πολλοί διαλάλησαν: Σκοπός της ζωής είναι ο θάνατος.

Μα κι ευτύς ως γεννηθούμε, αρχίζει κι η προσπάθεια να δημιουργήσουμε, να συνθέσουμε, να κάμουμε την ύλη ζωή, κάθε στιγμή γεννιούμαστε. Γι' αυτό πολλοί διαλάλησαν : Σκοπός της εφήμερης ζωής είναι η αθανασία.

Στα πρόσκαιρα ζωντανά μας σώματα τα δύο τούτα ρεύματα παλεύουν : α) ο ανήφορος, προς τη σύνθεση, προς τη ζωή, προς την αθανασία· β) ο κατήφορος, προς την αποσύνθεση, προς την ύλη, προς το θάνατο.

Και τα δύο ρέματα πηγάζουν από τα έγκατα της αρχέγονης ουσίας. Στη αρχή η ζωή ξαφνιάζει, σαν παράνομη φαίνεται, σαν παρά φύση, σαν εφήμερη αντίδραση στις σκοτεινές αιώνιες πηγές· μα βαθύτερα νιώθουμε : η Ζωή είναι κι αυτή άναρχη, ακατάλυτη φορά του Σύμπαντου.

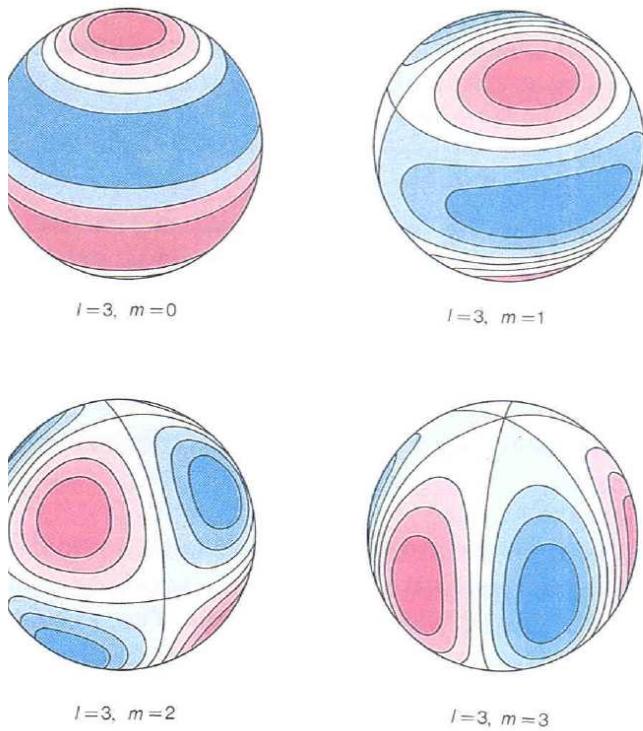
Αλλιώς, πούθε η περανθρώπινη δύναμη που μας σφεντονίζει από το αγέννητο στο γεννητό και μας γκαρδιώνει - φυτά, ζώα, ανθρώπους- στον αγώνα ; Και τα δύο αντίδρομα ρέματα είναι άγια.

Χρέος μας λοιπόν να συλλάβουμε το όραμα που χωράει κι εναρμονίζει τις δύο τεράστιες τούτες άναρχες, ακατάλυτες ορμές· και με τ' όραμα τούτο να ρυθμίζουμε το στοχασμό μας και την πράξη.

Απόσπασμα από την 'Ασκητική'

' Δεν ελπίζω τίποτε, δεν φοβάμαι τίποτε,
είμαι λεύτερος.'

Νίκος Καζαντζάκης



Σχήμα 1: Μη ακτινικές ταλαντώσεις αστέρα με αρμονικό δείκτη $l = 3$ για αζιμουθιακούς δείκτες $m = 0, 1, 2, 3$. Οι περιοχές με το χυανό χρώμα διαστέλλονται ενώ οι περιοχές με το κόκκινο συστέλλονται. Οι γραμμές μεταξύ αυτών των περιοχών είναι γραμμές ισορροπίας (nodal lines) του αστρικού ρευστού και δεν έχουν κίνηση. Για την τιμή $l = 3$, έχουμε τρεις γραμμές ισορροπίας στην οριζόντια διεύθυνση. Η τιμή του αζιμουθιακού δείκτη, m , παριστάνει τις γραμμές ισορροπίας στην κατακόρυφη διεύθυνση. Στην περίπτωση του ηλίου, αυτές οι ταλαντώσεις παρατηρούνται άμεσα μέσω της μετάθεσης Doppler των γραμμών ακτινοβολίας που προέρχονται από τα διαφορετικά σημεία της επιφάνειάς του.

Ευχαριστίες

Φτάνοντας στο σημείο της συγγραφής του διδακτορικού μου, έρχονται στο μυαλό μου διάφορες σκέψεις. Θα ήθελα πρώτα από όλα να ευχαριστήσω με όλη μου την καρδιά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κώστα Κόκκοτα, για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με αυτό το θέμα αλλά και για την συνεχή του συμπαράσταση και πολύτιμη βοήθεια καθόλη τη διάρκεια των τελευταίων ετών. Πέρα από επιβλέποντα καθηγητή τολμώ να πω ότι τον αισθάνομαι και σαν φίλο μου. Δεν δίστασε σε κάθε δύσκολη στιγμή να μου δίνει βοήθεια, συμβουλές και κουράγιο όχι μόνο για επιστημονικά θέματα αλλά και για θέματα που αφορούσαν την προσωπική μου ευτυχία και πρόοδο. Επιπλέον πιστεύω ότι η πολύχρονη συναναστροφή μου μαζί του και οι πολύωρες συζητήσεις μας για διάφορα θέματα, μου έδωσαν πολλά ερευνήσματα για να βελτιώσω τον χαρακτήρα και την προσωπικότητα μου. Ο μεγάλος σεβασμός και η απεριόριστη εκτίμησή μου προς το πρόσωπό του είναι αποτέλεσμα όλων των παραπάνω. Στη συνέχεια οι ευχαριστίες μου στρέφονται προς την οικογένειά μου, συνολικά, η οποία χωρίς κανένα δισταγμό στάθηκε από την αρχή μέχρι το τέλος στο πλευρό μου κυρίως ηθικά αλλά και οικονομικά όσες φορές χρειάστηκε. Χωρίς αυτούς, πιστεύω, δεν θα ήμουνα στην θέση που βρίσκομαι τώρα. Στην συνέχεια, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς μου επιτροπής. Τον καθηγητή κ. Νικόλαο Σπύρου για το συνεχές ενδιαφέρον του για την πρόοδο μου, αλλά και την σημαντική συμπαράστασή του, υλική και ηθική, ειδικά στις αρχές του διδακτορικού μου. Τον ευχαριστώ ιδιαιτέρως και για την προσεκτική ανάγνωση του κειμένου της διδακτορικής διατριβής, η τελική μορφή του οποίου με τις εύστοχες παρατηρήσεις του βελτιώθηκε σημαντικά. Τον αναπληρωτή καθηγητή κ. Δημήτρη Παπαδόπουλο τον ευχαριστώ για την εμπιστοσύνη που έδειξε στην δουλειά μου, και την πολύτιμη συμβολή του σε πρακτικά θέματα κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής. Τους καθηγητές κ.κ. Γιάννη Σειραδάκη και Σταύρο Αυγολούπη τους ευχαριστώ γιατί με προσήλκυσαν με τον ιδιαίτερο και μοναδικό τρόπο τους, στο χώρο της αστρονομίας από φοιτητή. Θα ήταν παράλειψη να μην ευχαριστήσω τον Johannes Ruoff, με τον οποίο η δίχρονη συνεργασία κατά τη διάρκεια της διατριβής μου ήταν πολύ ευχάριστη και εποικοδομητική. Τον υπ. διδάκτορα Μίλτο Βαβουλίδη ευχαριστώ για την προσεκτική ανάγνωση και την βοήθειά του στις διορθώσεις του αρχικού κειμένου. Χρέος μου τέλος, είναι να ευχαριστήσω Τίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ), μια και η διδακτορική διατριβή εκπονήθηκε ενόσω είμουνα υπότροφος του για το πρόγραμμα εσωτερικού του έτους 1997 (Αρ. σύμβασης 2541, 1997).

Αδαμάντιος Σταυρίδης
Νοέμβριος 2004
Θεσσαλονίκη.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	3
2	Στατικό μοντέλο	23
2.1	Υποθέσεις	23
2.2	Εξισώσεις στατικού μοντέλου	23
2.3	Αριθμητική κατασκευή του στατικού μοντέλου	27
3	Εξισώσεις διαταραχών	29
3.1	Μεταβλητές Euler-Lagrange	29
3.2	Ανάλυση σε σφαιρικές αρμονικές	30
3.3	Γραμμικοποίηση εξισώσεων Einstein	35
3.4	Αριθμητικές μέθοδοι	37
3.4.1	Αριθμητικά σχήματα	38
3.4.2	Σύγκλιση και ακρίβεια αριθμητικής μεθόδου	41
4	Αριθμητική εξέλιξη	
	στην προσέγγιση Cowling	43
4.1	Εξισώσεις κίνησης	44
4.2	Αριθμητικά αποτελέσματα	47
4.2.1	Αξονικά συμμετρικές $m = 0$	49
4.2.2	Μη αξονικά συμμετρικές $m \neq 0$	56
4.3	Συμπεράσματα	59
5	Νέα συνθήκη βαθμίδας	63
5.1	Ανάλυση σε σφαιρικές αρμονικές	65
5.2	Εξισώσεις διαταραχών	67
5.3	Συμπεράσματα	70
6	Εξισώσεις διαταραχών στη βαθμίδα RW	71
6.1	Αναγωγή σε σύστημα πρώτης τάξης	72
6.2	Αριθμητικά αποτελέσματα	74
6.3	Συμπεράσματα	78

7 Εξισώσεις δεύτερης τάξης	79
7.1 Στατικό μοντέλο	80
7.1.1 Μονοπολικές εξισώσεις	82
7.1.2 Τετραπολικές εξισώσεις	83
7.2 Εξισώσεις διαταραχών	85
7.3 Οριακές συγνθήκες	92
7.4 Αριθμητικά αποτελέσματα	94
7.4.1 Εξισώσεις στατικού μοντέλου	95
7.4.2 Εξισώσεις διαταραχών	96
7.5 Συμπεράσματα	101
8 Σύνοψη	103
A' Εξισώσεις κίνησης	107
B' Συνιστώσεις διαταραγμένων εξισώσεων Einstein στην νέα βαθμίδα	111
Γ' Συνιστώσεις εξισώσεων κίνησης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	117
Δ' Συνιστώσεις εξισώσεων στη βαθμίδα Regge-Wheeler τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$	121
Βιβλιογραφία	131
Βιογραφικό Σημείωμα	141

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η μελέτη των αστέρων είναι ίσως μια από τις πιο ενδιαφέρουσες δραστηριότητες του ανθρώπινου γένους με ποικίλες προεκτάσεις, που δεν είναι τόσο προφανείς στην καθημερινή ζωή του ανθρώπου. Η πιο σημαντική από αυτές κατά την άποψη του συγγραφέα είναι η συνειδητοποίηση της ‘μικρότητας’ αλλά ταυτόχρονα και της ‘μεγαλοσύνης’ του ανθρώπου μέσα στο σύμπαν, η οποία βοηθάει στην αναπτύξη ενός τρόπου σκέψης πιο μετριοπαθούς, πιο ανθρώπινου και πιο ‘γήινου’. Μ’ αυτές τις σκέψεις ξεκίνησα το διδακτορικό μου ελπίζοντας πέρα από τον ορίζοντα των γνώσεων να διευρύνει και την ανθρώπινη πλευρά του χαρακτήρα μου.

Τα αστέρια είναι τα ‘μουσικά όργανα’ του σύμπαντος. Έχουν τους δικούς τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης (ιδιοσυχνότητες - modes) οι οποίοι παράγουν την ‘μουσική’-κύματα που ταξιδεύουν μέσα στο σύμπαν και φτάνουν μέχρι τα ‘αυτιά’ μας κουβαλώντας χρήσιμες πληροφορίες από τις πηγές τους. ‘Ακούγοντας’ και αναλύοντας τις συχνότητες αυτών των ‘ήχων’ μπορούμε να βγάλουμε χρήσιμα συμπεράσματα για το είδος και τη σύσταση των πηγών-αστέρων.

Η γέννηση, η εξέλιξη και ο θάνατος των αστέρων είναι διαδικασίες που γίνονται σε μεγάλες χρονικές κλίμακες σε σχέση με τα ανθρώπινα δεδομένα. Όλες αυτές οι φάσεις στη ζωή των αστέρων περνάνε εν μέσω σημαντικών μεταβολών στη χημική σύσταση, το μέγεθος, την λαμπρότητα και τις άλλες φυσικές ποσότητες που τους περιγράφουν. Σε καμία από τις φάσεις αυτές ο αστέρας δεν βρίσκεται σε κατάσταση ηρεμίας. Αντίθετα σε κάθε φάση της εξέλιξής του βρίσκεται σε λεπτή ισορροπία. Οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις στο εσωτερικό τους, η ύπαρξη ρευμάτων ύλης, οι εκρηκτικές τους αναδιατάξεις (υπερχαινοφανείς supernova), έχουν ως αποτέλεσμα να βρίσκονται σε μια διαρκή αναταραχή λιγότερο ή περισσότερο έντονη, ανάλογα με το στάδιο της εξέλιξής τους. Οποιαδήποτε μικρή μεταβολή σε κάποια από τις παραμέτρους του, οδηγεί σε μικρές μεταβολές και άλλων, ενώ ταυτόχρονα ενεργοποιούνται μηχανισμοί για την εξομάλυνση τους ανάλογα με το είδος αυτών. Το χρονικό διάστημα μέχρι την εξομάλυνση αυτών των μεταβολών χαρακτηρίζεται από μικροταλαντώσεις

και εκπομπή ακτινοβολίας σε διάφορα μέρη του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος.

Στα πλαίσια αυτής της εργασίας μελετήσαμε τις μη ακτινικές ταλαντώσεις των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων, όπως περιγράφονται από την Γενική Θεωρία Σχετικότητας. Το δρόμο για την μελέτη των μη ακτινικών ταλαντώσεων των αστέρων άνοιξε ο Thorne και οι συνεργάτες του στα τέλη της δεκαετίας του 60 [20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28], οι οποίοι έβαλαν τα θεμέλια για την μελέτη των ταλαντώσεων αυτών σε μη περιστρεφόμενους αστέρες. Με τις ταλαντώσεις των μη περιστρεφόμενων αστέρων ασχολήθηκαν κι άλλοι ερευνητές [51, 52, 53, 54, 55] την δεκαετία του 90 εμπλουτίζοντας τη γνώση και την κατανόησή μας στο θέμα.

Αμέσως μετά, η μελέτη επεκτάθηκε στους βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες αρχικά για τις αξονικά συμμετρικές ταλαντώσεις από τους Chandrasekhar & Ferrari [29, 31], όπου και επιβεβαίωσαν το γνωστό από τη Νευτώνεια θεωρία [32, 33], ότι η περιστροφή εισάγει τη σύζευξη μεταξύ των δύο διαφορετικών ειδών κανονικών ταλαντώσεων ενός μη περιστρεφόμενου αστέρα. (βλ. κεφάλαιο 3 για ανάλυση των δύο ειδών ταλαντώσεων). Στη συνέχεια, ο Kojima [35], έδωσε το πλαίσιο για την πλήρη γενική περιγραφή των διαταραχών των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων και παρήγαγε τις εξισώσεις στην πρώτη τάξη προσέγγισης ως προς την περιστροφή.

Η μελέτη αυτή, την τελευταία εικοσαετία, έχει προσελκύσει πολλούς επισήμους από την διεθνή επιστημονική κοινότητα γιατί συνδέεται με μια μεγάλη πρόκληση για την πειραματική και θεωρητική Φυσική στις αρχές της νέας χιλιετίας. Την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων. Σύμφωνα με την Γενική Θεωρία Σχετικότητας του Einstein βαρυτικά κύματα παράγονται από μη συμμετρικές χρονικές μεταβολές του βαρυτικού πεδίου. Τα βαρυτικά αυτά κύματα είναι ουσιαστικά απειροελάχιστες μεταβολές στη δομή του ίδιου του χωρόχρονου που ζούμε. Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ, ότι τα βαρυτικά κύματα, όπως και τα αντίστοιχα ηλεκτρομαγνητικά, σκεδάζονται απορροφώνται και δίνουν φαινόμενα συμβολής. Στο σύνθησης όμως ‘περιβάλλον’ του σύμπαντος που ταξιδεύουν, τα φαινόμενα αυτά είναι αμελητέα με αποτέλεσμα να μεταφέρουν την όποια πληροφορία της πηγής τους αναλλοίωτη σε κάποιον παρατηρητή μέσα στο σύμπαν.

Την πρώτη έμμεση επιβεβαίωση της ύπαρξης των βαρυτικών κυμάτων έκαναν οι Hulse & Taylor [38] το 1975 παρατηρώντας ότι η τροχιακή περίοδος του διπλού συστήματος πάλσαρ PSR 1913+16 ελαττώνεται με το χρόνο λόγω της εκπομπής βαρυτικών κυμάτων. Όπως ήταν λογικό, μετά την έμμεση πειραματική επιβεβαίωση της ύπαρξης των βαρυτικών κυμάτων οι προσπάθειες στράφηκαν στην άμεση ανίχνευση αυτών. Την τελευταία δεκαετία έχουν κατασκευαστεί μια πλειάδα ανιχνευτών σε πολλές χώρες (LIGO, VIRGO, TAMA, GEO600, ALLEGRO, NIOBE, NAUTILUS, EXPLORER, AURIGA, GRAIL, OMNI, TIGA) και γίνεται μια τεράστια παγκόσμια προσπάθεια για να ανοιχτεί ένα καινούργιο ‘παράθυρο’ στο σύμπαν, το παράθυρο των βαρυτικών κυμάτων. Αυτοί οι επίγειοι ανιχνευτές είναι ευαίσθητοι στην περιοχή συχνοτήτων μεταξύ 1Hz και μερικών $k\text{Hz}$. Ταυτόχρονα έχει ήδη εγκριθεί από την Ευρωπαϊκή υπηρεσία διαστήματος (ESA) και την Αμερικανική υπη-

ρεσία διαστήματος (NASA), η κατασκευή του πρώτου δορυφορικού ανιχνευτή βαρυτικών κυμάτων Laser Interferometer Space Antenna (LISA) ο οποίος όλα είναι ευαίσθητος στην περιοχή των χαμηλών συχνοτήτων μεταξύ 10^{-4}Hz και 1Hz και αναμένεται να τεθεί σε τροχιά περί το έτος 2012.

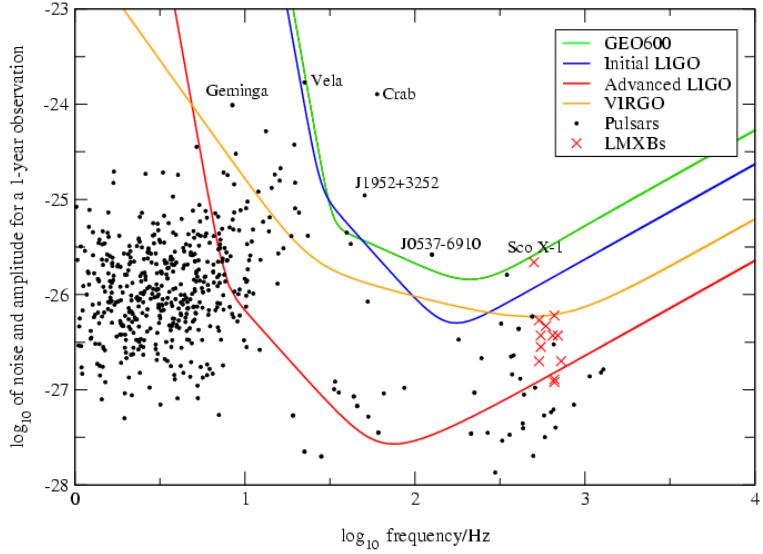
Οι πιθανές πηγές βαρυτικών κυμάτων που εμπίπτουν στην περιοχή συχνοτήτων ανίχνευσης των επίγειων ανιχνευτών και επομένως χρήσουν άμεσης θεωρητικής μελέτης είναι οι ακόλουθες [74]:

1. Τα κλειστά διπλά συστήματα αστέρων που αποτελούνται είτε από δύο μελανές οπές, είτε από μια μελανή οπή και ένα αστέρα νετρονίων, είτε από δύο αστέρες νετρονίων και βρίσκονται στα τελευταία στάδια πριν την σύγκρουσή τους,
2. Η βαρυτική κατάρρευση γίγαντα η υπεργίγαντα αστέρα σε αστέρα νετρονίων ή σε μαύρη τρύπα στο γαλαξία μας αλλά και σε άλλους γαλαξίες,
3. Οι περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων (πάλσαρς) του γαλαξία μας.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι καμπύλες ευαισθησίας των τριών μεγαλύτερων ανιχνευτών βαρυτικών κυμάτων και η θέση των διάφορων πηγών ως προς αυτές. Όπως είναι φανερό, υπάρχουν αρκετά διπλά συστήματα αστέρων αλλά και μεμονωμένοι πάλσαρς που η βαρυτική ακτινοβολία που εκπέμπουν είναι ανιχνεύσιμη εφόσον αυτή εκπέμπεται για αρκετό χρονικό διάστημα. Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται παραπέμπουμε στην εργασία [43] για μια πρόσφατη αναφορά για το στάδιο στο οποίο βρίσκεται αυτή τη στιγμή η έρευνα σε σχέση με τους ανιχνευτές και τις πιθανές πηγές βαρυτικών κυμάτων. Όπως γίνεται άμεσα φανερό από το σχήμα 1.1, ακόμα και οι πιο σύγχρονοι ανιχνευτές σε πολλές περιπτώσεις έχουν επίπεδο θορύβου μεγαλύτερο από το ίδιο το σήμα σε πολλές περιπτώσεις. Αυτό σημαίνει ότι για να εξαχθεί το σήμα από το θόρυβο του ανιχνευτή όλα πρέπει να είναι γνωστά εκ των προτέρων κάποια πρότυπα των πιθανών κυματομορφών από αυτές τις πηγές (sample palletes). Το γεγονός αυτό καθιστά τη θεωρητική μελέτη των πηγών απαραίτητο εργαλείο για την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων από αυτές.

Στην παρούσα διατριβή, επικεντρώσαμε την μελέτη μας στους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Οι αστέρες αυτοί, στα πρώτα στάδια της γέννησής τους είναι σε φάση έντονης αναδιάταξης της δομής τους και ως εκ τούτου απέχουν πολύ από το να είναι σφαιρικά ή αξονικά συμμετρικοί, με αποτέλεσμα κάθε κίνηση της ύλης στο εσωτερικό τους να συνοδεύεται από εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας. Επιπλέον, είναι ταχέως περιστρεφόμενοι και θερμοί με θερμοκρασίες της τάξης των $T = 10^{11} \text{K}$. Στη συνέχεια όμως, ψύχονται με εκπομπή νετρίνων αποκτώντας τελικά θερμοκρασίες της τάξης των $T = 10^9 \text{K}$ και ταυτόχρονα μέσω της εκπομπής βαρυτικής ακτινοβολίας, ελαττώνται η περίοδος περιστροφής τους, όπως όλα δείξουμε στη συνέχεια.

Η μελέτη των αστέρων αυτών μπορεί να γίνει με δύο μεθόδους. Η πρώτη είναι με τη βοήθεια της γραμμικής θεωρίας διαταραχών. Θεωρούμε αρχικά έναν



Σχήμα 1.1: Καμπύλες ευαισθησίας συναρτήσει της συχνότητας των τριών σημαντικότερων ανιχνευτών βαρυτικής ακτινοβολίας. Στον οριζόντιο άξονα σχεδιάζεται ο δεκαδικός λογάριθμος της συχνότητας ενώ στον κατακόρυφο ο δεκαδικός λογάριθμος της ευαισθησίας του ανιχνευτή για παρατηρήσεις διάρκειας ενός έτους. Οι τελείες στο διάγραμμα παριστάνουν μεμονωμένους αστέρες νετρονίων ενώ τα x διπλά συστήματα χαμηλής μάζας που εκπέμπουν κυρίως σε ακτίνες X (Low mass X-ray binaries LMXBs)

βραδέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων σε κατάσταση ηρεμίας. Στη συνέχεια υποθέτουμε μικρές διαταραχές των θεμελιώδων ποσοτήτων που περιγράφουν την δυναμική κατάσταση του ρευστού και τη γεωμετρία του χωρόχρονου. Οι διαταραχές των αστέρων αυτών, μπορούν να αναλυθούν σε άνθροισμα μικρών κανονικών ταλαντώσεων (normal mode analysis) με την βοήθεια των συναρτήσεων των σφαιρικών αρμονικών. Ακολούθως, και με την υπόθεση ότι οι διαταραχές είναι μικρές, γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις Einstein και τις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού ως προς τις διαταραγμένες ποσότητες. Από τις διάφορες ταλαντώσεις που διεγείρονται ενδιαφέρουν περισσότερο οι τετραπολικές (quadrupole) γιατί μέσω αυτών έχουμε σημαντικότερη εκπομπή βαρυτικών χυμάτων. Το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν, μπορούμε να το επιλύσουμε αριθμητικά με τις ακόλουθες δύο μεθόδους, προκειμένου να βρούμε τις ιδιοταλαντώσεις του συστήματος αστέρα-χωρόχρονου.

Ως πρόβλημα αρχικών τιμών. Δίνουμε δηλαδή κάποιες αρχικές συνθήκες στις διαταραγμένες ποσότητες, και παρακολουθούμε την χρονική εξέλιξη

του συστήματος αστέρα-χωρόχρονου επιλύοντας αριθμητικά το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων που το περιγράφει. Στη συνέχεια οι συχνότητες των ιδιοταλαντώσεων που διεγείρονται υπολογίζονται με μετασχηματισμό Fourier των παραγόμενων χρονικών σημάτων. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι για ένα συγκεκριμένο σετ αρχικών συνθηκών μπορούμε να μελετήσουμε μόνο ένα τμήμα του φάσματος των ιδιοταλαντώσεων. Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι με τις παρούσες δυνατότητες υπολογιστικής ισχύος, η αριθμητική τους επίλυση είναι γρήγορη.

Ως πρόβλημα συνοριακών συνθηκών. Σ' αυτήν την περίπτωση υποθέτουμε ότι οι διαταραγμένες ποσότητες του συστήματος έχουν χρονική εξάρτηση της μορφής $e^{i(\sigma+i/\tau)t}$ όπου σ είναι η πραγματική τιμή της ιδιοταλάντωσης και εκφράζει τη συχνότητα της και τ η μιγαδική και εκφράζει το χρόνο απόσβεσης. Έτσι, με την επιβολή των κατάλληλων οριακών συνθηκών στο κέντρο, στην επιφάνεια του αστέρα και στο άπειρο, υπολογίζουμε άμεσα τις ιδιοσυχνότητες των ιδιοταλαντώσεων του συστήματος αστέρα-χωρόχρονου που διεγείρονται. Το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι σε περιοχές που τυχόν το φάσμα των ιδιοσυχνοτήτων είναι εκφυλισμένο, (όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 3 πιο αναλυτικά), η μέθοδος δεν λειτουργεί. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι με αυτήν μπορεί να μελετηθεί όλο το φάσμα των ιδιοταλαντώσεων του συστήματος.

Η δεύτερη μέθοδος είναι εξελίσσοντας χρονικά τις πλήρεις μη γραμμικές εξισώσεις Einstein, εισάγοντας κάποια αρχικά δεδομένα. Τα βασικά μειονεκτήματα αυτού του τρόπου είναι ότι αφενός απαιτεί τεράστια υπολογιστική ισχύ και αφετέρου υπάρχουν προς το παρόν πολλά προβλήματα αστάθειας των προγραμμάτων. Παρόλα αυτά τα τελευταία τρία χρόνια έχουν γίνει σημαντικά βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση [75, 76, 77, 78, 79] και υπάρχει η αισιοδοξία ότι σε μερικά χρόνια με την ταχύτατη αύξηση της υπολογιστικής δύναμης των σύγχρονων επεξεργαστών αλλά και των αριθμητικών μεθόδων επίλυσης μη γραμμικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων, θα επιτευχθεί η σταθερότερη και ταχύτερη αριθμητική εξέλιξη των εξισώσεων αυτών.

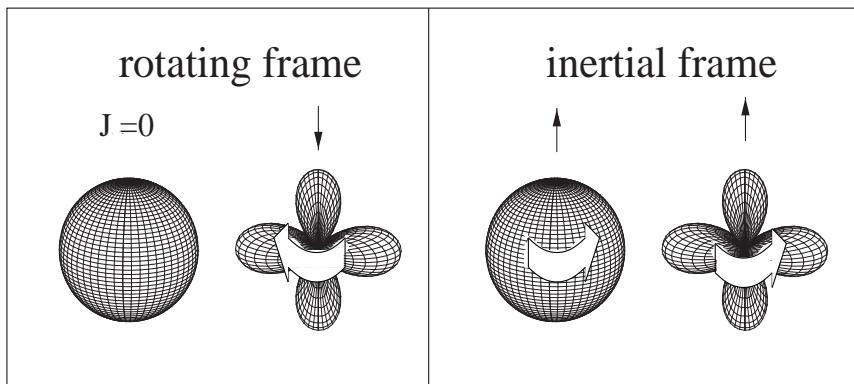
Ανάλυση φάσματος ιδιοσυχνοτήτων

Πριν προχωρήσουμε παραπέρα στην ανάλυση των διαταραχών των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων θεωρούμε χρήσιμο να κάνουμε μια μικρή ανάλυση των ιδιοσυχνοτήτων - χαρακτηριστικών τρόπων ταλάντωσης - (modes) - που είναι γνωστές και έχουν μελετηθεί έως σήμερα. Οι ιδιοσυχνότητες αυτές μπορούν να ταξινομηθούν με βάση την φυσική αιτία που τις προκαλεί, [19] στις ακόλουθες κατηγορίες :

- **f(undamental) mode.** Είναι η βασική ιδιοσυχνότητα χάμε αστέρα λόγω της αλληλεπίδρασής του με τον περιβάλλοντα χώρο, η τιμή της οποίας είναι ανάλογη με την μέση πυκνότητα του αστέρα, $\omega_f \propto \sqrt{M/R^3}$, και δεν εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της δομής του. Τυπικές τιμές αυτής της ιδιοσυχνότητας είναι $f = 1.5 - 3 \text{ kHz}$ με χρόνο απόσβεσης $\tau = 0.1 - 0.5 \text{ sec}$.
- **p(ressure) modes.** Είναι ιδιοσυχνότητες η ύπαρξη των οποίων, όπως φανερώνει το όνομά τους, οφείλεται στο ότι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται σε ένα στοιχειώδη όγκο του ρευστού προέρχεται από την πίεση στο εσωτερικό του αστέρα. Υπάρχουν άπειρες αρμονικές από αυτές, είναι σχεδόν ακτινικές και η συχνότητα τους εξαρτάται από την ταχύτητα του ήχου στον αστέρα. Τυπικές τιμές για την πρώτη αρμονική αυτών των ιδιοσυχνοτήτων είναι $f = 4 - 7 \text{ kHz}$ με χρόνο απόσβεσης $\tau > 1 \text{ sec}$.
- **g(ravity) modes.** Είναι ιδιοσυχνότητες που εμφανίζονται μόνο σε μη βαροτροπικούς αστέρες μη μηδενικής θερμοκρασίας. Υπάρχουν άπειρες αρμονικές και το αίτιο της εμφάνισής τους είναι η προσπάθεια των βαρυτικών δυνάμεων να εξομαλύνουν ανομοιογένειες μάζας στο εσωτερικό του αστέρα. Τυπικές συχνότητες αυτών είναι $f < 500 \text{ Hz}$ με χρόνο απόσβεσης $\tau > 5 \text{ sec}$.
- **w(ave) modes.** Είναι ιδιοσυχνότητες του χωρόχρονου που συνδέονται με το βαθμό της καμπυλότητάς του. Δεν υπάρχουν ανάλογες στην Νευτώνεια Θεωρία ενώ τυπικές συχνότητες αυτών είναι $f > 6 \text{ kHz}$ με πολύ μικρό χρόνο απόσβεσης της τάξης $\tau \propto 0.1 \text{ msec}$. [55, 56, 57]
- **r(otational) modes.** Όπως φανερώνει το όνομά τους αυτές οι ιδιοσυχνότητες εμφανίζονται μόνο σε περιστρεφόμενους αστέρες, ενώ σε μη περιστρεφόμενους το φάσμα τους είναι εκφυλισμένο. Η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στον στοιχειώδη όγκο του ρευστού είναι η δύναμη Coriolis. Είναι ασταθείς όπως έχει αποδειχτεί [90, 69] και συνδέονται άμεσα με την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων από τον αστέρα, γι' αυτό και έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον των αστροφυσικών την τελευταία πενταετία. Πιθανόν αποτελούν εξήγηση και για άλλα αστροφυσικά φαινόμενα, για τα οποία θα αναφερθούμε με λεπτομέρεια στη συνέχεια.

Τα παραπάνω είδη ταλαντώσεων των μη περιστρεφόμενων αστέρων κατατάσσονται με βάση την συμπεριφορά τους σε μετασχηματισμούς στροφής (parity) σε πολικές και αξονικές. Οι πρώτες τρεις, f, p, g είναι πολικές (polar), οι r αξονική (axial) και οι w και πολικές και αξονικές. Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι σε ένα μη περιστρεφόμενο αστέρα, οι δύο κατηγορίες ταλαντώσεων, αξονικές και πολικές, είναι ανεξάρτητες-ασύζευκτες μεταξύ τους, ενώ σε έναν περιστρεφόμενο αστέρα είναι συζευγμένες με τη σύζευξη αυτή να είναι αποτέλεσμα ακριβώς της περιστροφής του αστέρα. Για μια πιο λεπτομερή ανάλυση παραπέμπουμε τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται στα [58, 59].

Ένα πολύ σημαντικό φαινόμενο που εμφανίζεται στην περίπτωση των περιστρεφόμενων αστέρων και παρουσιάζει μεγάλο αστροφυσικό ενδιαφέρον είναι μια αστάθεια που για πρώτη φορά ανακαλύφτηκε σε Νευτώνειους περιστρεφόμενους αστέρες από τους Chandrasekhar [61, 62] και Friedman & Schutz [63] και έχει το όνομά τους, δηλαδή αστάθεια CFS (CFS instability). Η βασική αρχή αυτής της αστάθειας είναι απλή και είναι η ακόλουθη. Ας φανταστούμε μια ιδιοσυχνότητα ενός περιστρεφόμενου αστέρα η οποία έχει μια γωνιακή ταχύτητα φάσης σ/m . Αναλόγως με τη σχέση του μέτρου αλλά και της φοράς της ταχύτητας αυτής συγκριτικά με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα Ω , ένας παρατηρητής μακριά από τον αστέρα μπορεί να βλέπει αυτήν την ιδιοσυχνότητα να διαδίδεται είτε με την φορά περιστροφής του αστέρα είτε με την αντίθετη. Έτσι, ιδιοσυχνότητες, που στο περιστρεφόμενο μαζί με τον αστέρα σύστημα αναφοράς έχουν γωνιακή ταχύτητα φάσης αντίθετη με την γωνιακή ταχύτητα του αστεριού, έχουν αρνητική στροφορμή, γιατί τείνουν να ελαττώσουν την στροφορμή του αστέρα. Στην περίπτωση που η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα Ω , είναι μεγαλύτερη σε μέτρο από την γωνιακή ταχύτητα φάσης μιας τέτοιας ιδιοσυχνότητας ω/m , τότε αυτή ‘παρασύρεται’ από την περιστροφή του αστέρα και φαίνεται στον εξωτερικό παρατηρητή να περιστρέφεται με την ίδια φορά περιστροφής με το αστέρι. Με αυτόν τον τρόπο μια τέτοια ιδιοσυχνότητα έχει θετική στροφορμή για έναν μακρινό παρατηρητή. Έτσι, η στροφορμή που απάγουν τα βαρυτικά κύματα μειώνει την ήδη αρνητική στροφορμή μιας τέτοιας ιδιοσυχνότητας με αποτέλεσμα να αυξάνεται το πλάτος της. Το φαινόμενο αυτό φαίνεται παραστατικά στο σχήμα 1.2. Η δράση της



Σχήμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση της δράσης της αστάθειας CFS. Μια ιδιοσυχνότητα (που παριστάνεται με τον λοβό) υπόκειται στην αστάθεια, εφόσον έχει αντίθετες φορές περιστροφής στο συν-περιστρεφόμενο με τον αστέρα σύστημα αναφοράς (αριστερά) και στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (δεξιά) στο οποίο ο αστέρας (που παριστάνεται με τη σφαίρα) φαίνεται να περιστρέφεται.

αστάθειας αυτής εξαρτάται και από τους μηχανισμούς απόσβεσης στο εσωτερικό του αστέρα νετρονίων. Ο χρόνος απόσβεσης ή διέγερσης μιας ταλαντωσης είναι ο λόγος του ρυθμού με τον οποίο χάνει ενέργεια προς την ενέργειά της δηλαδή,

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt}. \quad (1.1)$$

Οι κυριότεροι μηχανισμοί απόσβεσης στους αστέρες νετρονίων είναι το γραμμικό ιξώδες (shear viscosity) και το γενικό ιξώδες (bulk viscosity). Η επιδραση του αστρικού ρευστού στην απόσβεση των ταλαντώσεων μελετάται από τον υπολογισμό της ενέργειας της διαταραχής στο περιστρεφόμενο με τον αστέρα σύστημα αναφοράς. Ο υπολογισμός αυτός σε πρώτη προσέγγιση και για λόγους απλότητας έχει γίνει στην Νευτώνεια θεωρία. Έτσι, η ενέργεια της διαταραχής δίνεται από τη σχέση,

$$E = \frac{1}{2} \int \left[\epsilon \delta u^a \delta u_a^* + \frac{\delta p \delta \epsilon}{\epsilon} + \delta \Phi \delta \epsilon^* \right] dV, \quad (1.2)$$

όπου δu , $\delta \Phi$, $\delta \epsilon$ και δp είναι αντίστοιχα οι διαταραχές της ταχύτητας του ρευστού, του βαρυτικού δυναμικού, της πυκνότητας ενέργειας και της πίεσης του αστρικού ρευστού. Ο αστερίσκος δηλώνει συζυγές μιγαδικό.

Ο μηχανισμός απόσβεσης λόγω γραμμικού ιξώδους δρα και είναι ο κύριος μηχανισμός απόσβεσης στις χαμηλές θερμοκρασίες $T \leq 10^9 \text{K}$ και οφείλεται στη μεταφορά ορμής λόγω της σκέδασης μεταξύ των νετρονίων. Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω αυτού του μηχανισμού είναι,

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{SHEAR} = 2 \int \eta \delta \sigma^{\mu\nu} \delta \sigma_{\mu\nu}^* dV, \quad (1.3)$$

όπου $\sigma_{\mu\nu}$ είναι ο τανυστής τάσης (shear tensor) και η είναι ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους του ρευστού. Τυπικές τιμές του συντελεστή αυτού για αστέρες νετρονίων είναι [66, 68],

$$\eta = 2 \times 10^{18} \left(\frac{\epsilon}{10^{15} \text{gr/cm}^3} \right)^{9/4} \left(\frac{T}{10^9 \text{K}} \right)^{-2} \text{gr cm}^{-1} \text{s}^{-1}. \quad (1.4)$$

Ο μηχανισμός απόσβεσης λόγω γενικού ιξώδους δρα και είναι ο κύριος μηχανισμός απόσβεσης στις υψηλές θερμοκρασίες $T \geq 10^9 \text{K}$ όπου το αστρικό ρευστό γίνεται διαφανές στα νετρίνα. Καθώς το αστρικό ρευστό ταλαντώνεται απαιτείται κάποιος χρόνος προκειμένου η δράση της ασθενούς αλληλεπίδρασης να επαναφέρει την ισορροπία στο αστρικό ρευστό. Αυτό έχει σαν συνέπεια να δημιουργείται μια διαφορά φάσης μεταξύ των διαταραχών της πίεσης και της πυκνότητας, που είναι υπεύθυνη για τη δημιουργία αυτού του μηχανισμού απόσβεσης. Ο ρυθμός απώλειας ενέργειας λόγω αυτού του μηχανισμού υπολογίζεται ως,

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{BULK} = \int \zeta \delta \sigma^{\mu\nu} \delta \sigma_{\mu\nu}^* dV, \quad (1.5)$$

όπου ζ είναι ο συντελεστής γενικού ιξώδους του αστρικού ρευστού. Για τυπικούς αστέρες νετρονίων ο συντελεστής αυτός έχει τιμή,

$$\zeta = 6 \times 10^{25} \left(\frac{\sigma + m\Omega}{1\text{Hz}} \right)^{-2} \left(\frac{\epsilon}{10^{15}\text{gr/cm}^3} \right)^2 \left(\frac{T}{10^9\text{K}} \right)^6 \text{gr cm}^{-1} \text{s}^{-1}. \quad (1.6)$$

Τέλος η βαρυτική ακτινοβολία έχει ρυθμό απόσβεσης ενέργειας από την ιδιοταλάντωση που δίνεται στη Νευτώνεια προσέγγιση [92] από την έκφραση,

$$\frac{dE}{dt} = -\sigma(\sigma + m\Omega) \sum_{l=2}^{\infty} N_l \sigma^{2l} (|\delta D_{lm}|^2 + |\delta J_{lm}|^2), \quad (1.7)$$

όπου,

$$N_l = \frac{4\pi G}{c^{2l+1}} \frac{(l+1)(l+2)}{l(l-1)[(2l+1)!!]^2}, \quad (1.8)$$

και δD_{lm} και δJ_{lm} είναι οι ροπές της πυκνότητας μάζας-ενέργειας (mass multipole) και οι ροπές της πυκνότητας των ρευμάτων (current multipole) που δίνονται από τις ολοκληρωτικές εκφράσεις,

$$\delta D_{lm} = \int \delta \epsilon r^l Y_{lm}^* dV, \quad (1.9)$$

$$\delta J_{lm} = \frac{2}{c} \left(\frac{l}{l+1} \right)^{1/2} \int r^l (\epsilon \delta \vec{u} + \vec{u} \delta \epsilon) \cdot \vec{Y}_{lm}^{B*} dV, \quad (1.10)$$

όπου Y_{lm} είναι οι σφαιρικές αρμονικές και \vec{Y}_{lm}^{B*} είναι οι διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές,

$$\vec{Y}_{lm}^{B*} = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \hat{r} \times \nabla Y_{lm}. \quad (1.11)$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις μπορούμε να εξάγουμε μερικά χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά τη βαρυτική ακτινοβολία. Κάθε κίνηση του αστρικού ρευστού που προκαλεί σε μεταβολές της πυκνότητας ενέργειας του αστέρα οδηγεί στην εκπομπή βαρυτικών χυμάτων χυρίως μέσω των ροπών της πυκνότητας μάζας ενέργειας (1.9). Όπως είναι φανερό και από τις παραπάνω εκφράσεις, οι ροπές της πυκνότητας των ρευμάτων δίνουν μικρότερη συνεισφορά στην βαρυτική ακτινοβολία, αφού όπως προκύπτει από τις (1.9) και (1.10),

$$|\delta J|^2 = \frac{|\delta D|^2}{c^2}. \quad (1.12)$$

Αντίθετα, στην περίπτωση των ιδιοσυχνοτήτων r που δεν χαρακτηρίζονται από μεταβολές της πυκνότητας ενέργειας αλλά χυρίως από τις μεταβολές της τετραταχύτητας του ρευστού, η συνεισφορά των ροπών της πυκνότητας ρευμάτων (1.10) είναι πιο σημαντική.

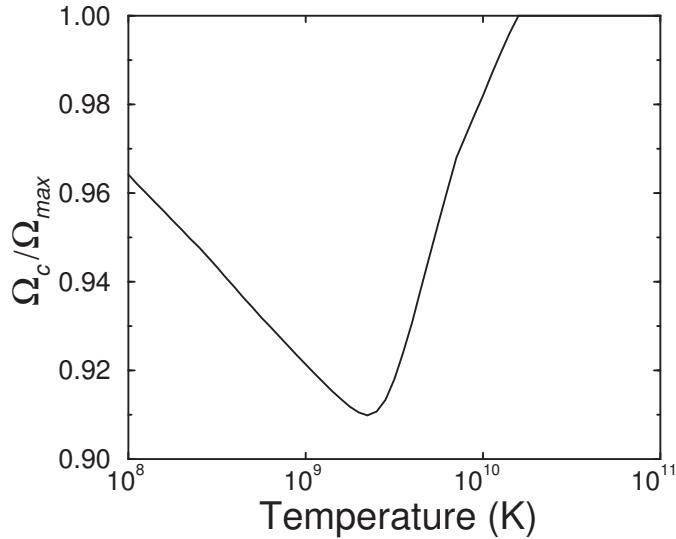
Ο συνολικός ρυθμός απόσβεσης για ένα αστέρα νετρονίων θα δίνεται από το άνθροισμα ρυθμών απόσβεσης λόγω των τριών προηγουμένων μηχανισμών, με άλλα λόγια,

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{GW}} + \frac{1}{\tau_{shear}} + \frac{1}{\tau_{bulk}}. \quad (1.13)$$

Υπολογίζοντας από τις σχέσεις (1.3), (1.5), (1.7) τους χρόνους απόσβεσης τ_{shear} , τ_{bulk} και τ_{GW} αντίστοιχα μπορούμε να καθορίσουμε το πρόσημο της σχέσης (1.13) το οποίο είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας και της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του αστέρα. Με αυτό τον τρόπο καθορίζουμε σε ποιο εύρος θερμοκρασιών και συχνοτήτων περιστροφής του αστέρα δρα η αστάθεια CFS.

Οι Friedman και Schutz [63] μελέτησαν αυτήν την αστάθεια για την βασική ιδιοσυχνότητα f των αστέρων νετρονίων και απέδειξαν ότι αυτή η αστάθεια ενεργοποιείται για κάθε περιστρεφόμενο αστέρα στην Γενική Θεωρία Σχετικότητας. Οι εν δυνάμει συνέπειες αυτής της απόδειξης ήταν πολύ ενδιαφέρουσες και διπλής κατεύθυνσης. Θα μπορούσε για παράδειγμα αυτή η αστάθεια να περιορίζει τη μέγιστη περίοδο περιστροφής των αστέρων νετρονίων, μέσω της εκπομπής βαρυτικών κυμάτων τα οποία θα ήταν ταυτόχρονα και ανιχνεύσιμα; Αναλυτικοί υπολογισμοί [64, 65, 66, 67] για την σχέση της αστάθειας της ιδιοσυχνότητας f με την εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας και τους μηχανισμούς απόσβεσης έδειξαν ότι η αστάθεια είναι ενεργή από μια κρίσιμη τιμή της γωνιακής ταχύτητας του αστεριού Ω_c . Έτσι, αστέρες που περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα μικρότερη της Ω_c είναι ευσταθείς, ενώ αστέρες που περιστρέφονται με μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα θα είναι ασταθείς και θα εκπέμπουν βαρυτική ακτινοβολία. Επειδή οι μηχανισμοί απόσβεσης, όπως προαναφέρθηκε, εξαρτώνται από τη θερμοκρασία, η κρίσιμη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής θα είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας. Η καμπύλη της αστάθειας σε συνάρτηση με τη θερμοκρασία δίνεται στο σχήμα 1.3. Όπως φαίνεται από το σχήμα αυτό, οι μηχανισμοί απόσβεσης για την ιδιοσυχνότητα f είναι τόσο ισχυροί που δεν αφήνουν την αστάθεια να δράσει παρά μόνο για θερμοκρασίες στην περιοχή από 10^7 K έως 10^{10} K και για γωνιακές ταχύτητες περιστροφής του αστέρα της τάξης $\Omega = 0.91\Omega_K$. Έτσι, όπως γίνεται φανερό η αστάθεια της ιδιοσυχνότητας f δεν είναι αστροφυσικά ενδιαφέρουσα, γιατί αφενός δεν μπορεί να ελαττώσει πολύ την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα και αφετέρου δεν παράγει ικανοποιητικά ποσά ενέργειας σε βαρυτική ακτινοβολία.

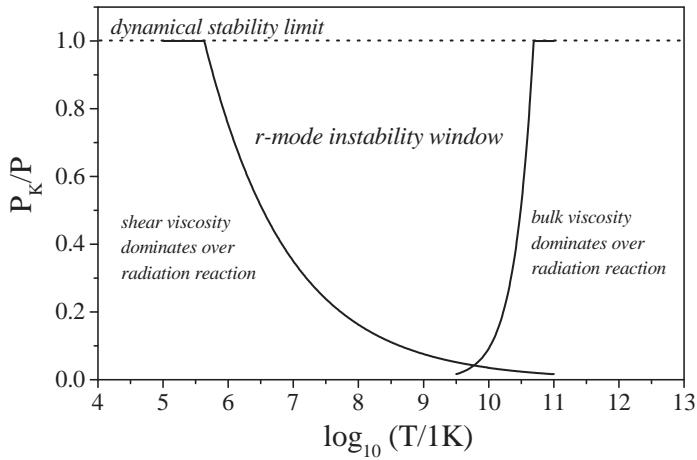
Στη συνέχεια το ενδιαφέρον στράφηκε στη σχέση μεταξύ της ιδιοσυχνότητας r και της αστάθειας CFS. Ο Andersson [90] και οι Friedman & Morsink [69] έδειξαν ανεξάρτητα ότι και αυτές οι ιδιοσυχνότητες είναι ασταθείς στην εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Στη συνέχεια οι Andersson, Kokkotas & Schutz [91] και οι Lindblom, Owen & Morsink [93] έδειξαν ότι στην περίπτωση της ιδιοσυχνότητας r οι μηχανισμοί απόσβεσης δεν μπορούν να σταματήσουν την εξέλιξη της αστάθειας ακόμα και σε χαμηλές γωνιακές ταχύτητες περιστροφής, γεγονός που αναπτέρωσε τις ελπίδες για την ύπαρξη αστέρων νετρονίων που εκπέμπουν ικανοποιητικά για ανίχνευση ποσά βαρυτικής ακτινοβολίας. Παρό-



Σχήμα 1.3: Καμπύλη αστάθειας σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας για την ιδιοσυχνότητα f και για έναν τυπικό αστέρα νετρονίων $R = 10 \text{ km}$, $M = 1.4 M_\odot$ και $P_K \simeq 0.8 \text{ ms}$.

μοιοι υπολογισμοί με την περίπτωση της ιδιοσυχνότητας f δίνουν την καμπύλη αστάθειας για την ιδιοσυχνότητα r σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας, που φαίνεται στο σχήμα 1.4. Όπως γίνεται φανερό από το σχήμα, για θερμοκρασίες της τάξης των $T = 10^9 \text{ K}$ ακόμα και μια πολύ μικρή γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα $\Omega \simeq 0.2\Omega_K$, είναι ικανή να τον οδηγήσει σε αστάθεια CFS. Επιπλέον, στο σχήμα 1.5 δίνεται το παράθυρο αστάθειας για μεγαλύτερες τιμές του αρμονικού δείκτη $l = 3, 4$ και όπως είναι φανερό το παράθυρο συρρικνώνεται για μεγαλύτερες τιμές του l . Τέλος, στο σχήμα 1.6 δίνονται οι δύο καμπύλες αστάθειας και για τις δύο ιδιοσυχνότητες r και f μαζί, για λόγους σύγκρισης. Όπως είναι φανερό από το σχήμα αυτό, η περιοχή ‘δράσης’ της αστάθειας λόγω της ιδιοσυχνότητας r είναι πολύ μεγαλύτερη από την περίπτωση της ιδιοσυχνότητας f .

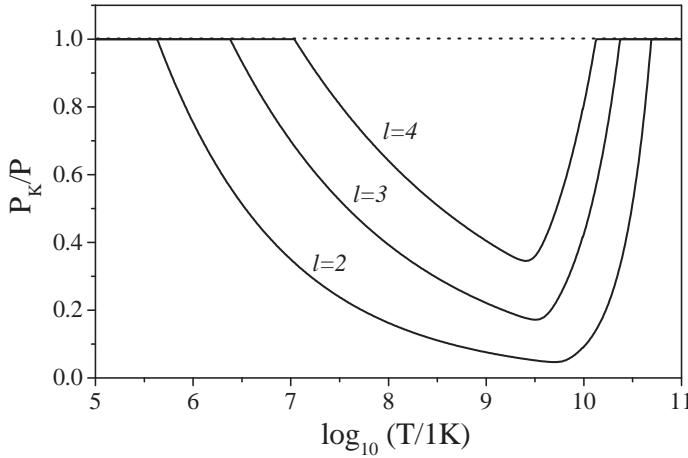
Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς για την αστάθεια της ιδιοσυχνότητας r προτάθηκαν δύο σενάρια με ιδιαίτερο αστροφυσικό ενδιαφέρον, που δίνουν μια ικανοποιητική εξήγηση σε δύο ενδιαφέροντα παρατηρησιακά δεδομένα. Το πρώτο σενάριο [91, 93], που παριστάνεται στο σχήμα 1.7 αφορά έναν ταχέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων που δημιουργείται σε θερμοκρασία της τάξης των $T \geq 10^{11} \text{ K}$, από την βαρυτική κατάρρευση ενός προγεννήτορα αστέρα νετρονίων. Σύμφωνα με αυτό το σενάριο, ο αστέρας ψύχεται μέσα σε μερικά δευτερόλεπτα, δηλαδή κινείται οριζόντια προς τα αριστερά στο διάγραμμα και εισέρχεται στο παράθυρο δράσης της αστάθειας της ιδιοσυχνότητας r . Από εδώ και πέρα, αναλαμβάνει η αστάθεια να μετατρέψει την στροφορμή του αστέρα σε ενέργεια που εκπέμπεται από το σύστημα με βαρυτικά κύματα, ενώ



Σχήμα 1.4: Καμπύλη αστάθειας σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας για την $l = m = 2$ ιδιοσυχνότητα r και για ένα τυπικό αστέρα νετρονίων $R = 10$ km, $M = 1.4 M_{\odot}$ και $P_K \simeq 0.8$ ms. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο δεκαδικός λογάριθμος της θερμοκρασίας του αστέρα, ενώ ο κατακόρυφος άξονας είναι ο λόγος της περιόδου περιστροφής του αστέρα προς τη μέγιστη περίοδο περιστροφής στο όριο Kepler.

ταυτόχρονα ο αστέρας ψύχεται περαιτέρω, και κινείται διαγωνίως προς τα κάτω στο διάγραμμα, μέχρι να εξέλθει από το παράθυρο αστάθειας. Στο τέλος αυτής της διαδικασίας ο αστέρας έχει χάσει περίπου το 95% της στροφορμής του και το 99% της περιστροφικής κινητικής του ενέργειας, εκπέμποντας βαρυτικά κύματα. Η διαδικασία αυτή εξαρτάται επιπλέον και από το μέγιστο πλάτος που μπορεί να φτάσει η ιδιοσυχνότητα r . Στο σχήμα δίνονται δύο διαφορετικές καμπύλες εξέλιξης για δύο διαφορετικά μέγιστα πλάτη της ιδιοσυχνότητας r . Είναι φανερό, ότι όσο μεγαλύτερο είναι το μέγιστο πλάτος α , τόσο πιο υψηλή είναι η θερμοκρασία όταν ο αστέρας και εξέρχεται από το παράθυρο αστάθειας.

Το σενάριο αυτό δίνει μια εξήγηση στην έλλειψη ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων στα υπολείμματα σουπερνόβα. Επιπλέον η βαρυτική ακτινοβολία που εκπέμπεται σ' αυτήν την διαδικασία είναι ανιχνεύσιμη μέχρι την απόσταση του συμήνους της Παρθένου (Virgo cluster), δηλαδή σε απόσταση $D \simeq 15$ Mpc, ανάλογα με το μέγιστο πλάτος της ιδιοσυχνότητας r . Η εφαρμογή του σεναρίου αυτού στον πιο γνωστό πάλσαρ, τον Crab πάλσαρ, δίνει εντυπωσιακά αποτελέσματα. Η περίοδος του αυτή τη στιγμή είναι $P = 33$ s. Η περίοδος του κατά την γέννησή του πριν από 1000 χρόνια μπορεί να υπολογιστεί από τον λόγο της περιόδου περιστροφής προς το ρυθμό μεταβολής της P/\dot{P} ολοκληρώνοντας προς τα πίσω για 1000 χρόνια και προκύπτει να είναι $P \simeq 19$ s, που είναι ακριβώς και η περίοδος που προβλέπει το παραπάνω σενάριο. Δηλαδή,



Σχήμα 1.5: Καμπύλη αστάθειας σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας της ιδιοσυχνότητας r για διαφορετικές τιμές του αρμονικού δείκτη l για ένα τυπικό αστέρα νετρονίων $R = 10 \text{ km}$, $M = 1.4 M_{\odot}$ και $P_K \simeq 0.8 \text{ ms}$. Ο οριζόντιος άξονας είναι ο δεκαδικός λογάριθμος της θερμοκρασίας του αστέρα, ενώ ο κατακόρυφος άξονας ο λόγος της περιόδου περιστροφής του αστέρα προς τη μέγιστη περίοδο περιστροφής στο όριο Kepler.

αρχικά μετά την δημιουργία του πάλσαρ από την κατάρρευση του προγεννήτορα αστέρα νετρονίων, η περίοδος του ήταν της τάξης του $P = 1 - 2 \text{ ms}$. Στη συνέχεια εισερχόμενος στο παράθυρο αστάθειας της ιδιοσυχνότητας r εξέπεμψε με τη μορφή βαρυτικής ακτινοβολίας το 95% της στροφορμής του σε περίπου ένα χρόνο με αποτέλεσμα η περίοδος του να φτάσει τα $P \simeq 19 \text{ s}$.

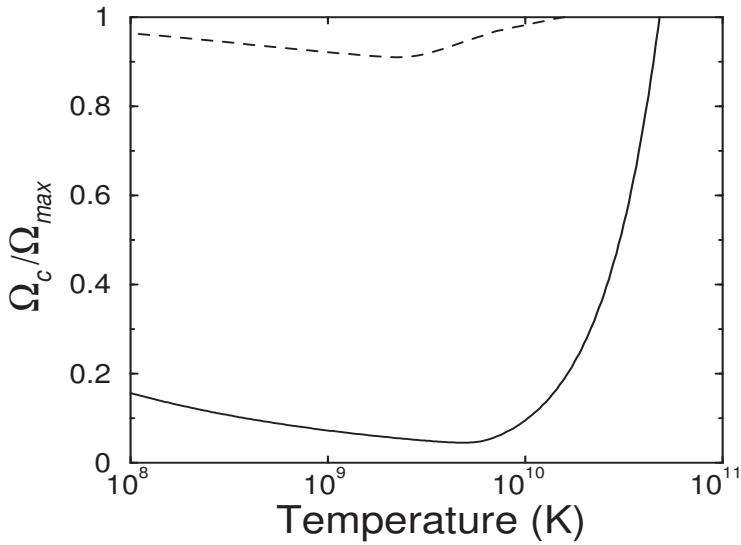
Το επόμενο ερώτημα που αφορά το σενάριο αυτό, είναι αν τα κύματα βαρύτητας που εκπέμπουν αυτοί οι αστέρες είναι ανιχνεύσιμα. Αυτό είναι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον θέμα με δεδομένο ότι οι επίγειοι ανιχνευτές έχουν μπει σε πρώτη φάση λειτουργίας. Υπολογισμοί από τους Owen et. al [44] δίνουν για το αδιάστατο πλάτος των βαρυτικών κυμάτων,

$$h(t) = 7.54 \times 10^{-23} \alpha \tilde{J} \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^3 \left(\frac{15 \text{ Mpc}}{D} \right), \quad (1.14)$$

όπου α είναι μια σταθερά κανονικοποίησης που σχετίζεται με το πλάτος της ταλάντωσης,

$$\tilde{J} = \frac{1}{MR^4} \int_0^R \epsilon r^6 dr \quad (1.15)$$

και D είναι η απόσταση από τον αστέρα-πηγή. Αν υποθέσουμε ότι η απόσταση αυτή είναι στο σημήνος της παρθένου (Virgo cluster), δηλαδή $D \simeq 15 \text{ Mpc}$,

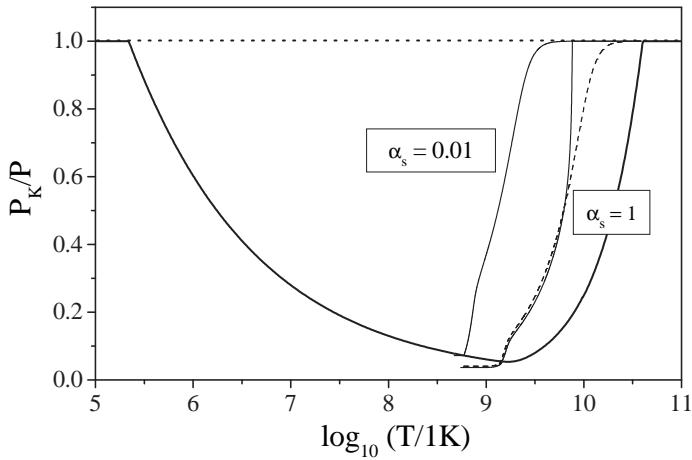


Σχήμα 1.6: Καμπύλες αστάθειας σαν συνάρτηση της θερμοκρασίας. Η συνεχόμενη γραμμή είναι για την $l = m = 2$ ρ ιδιοσυχνότητα, ενώ η στικτή είναι για την ιδιοσυχνότητα f . Όπως φαίνεται καθαρά από το διάγραμμα η περιοχή δράσης της αστάθειας της ιδιοσυχνότητας ρ είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη της f .

τότε ο ρυθμός γέννησης αστέρων νετρονίων περιμένουμε να είναι μερικές δεκάδες το χρόνο. Έτσι για το σενάριο του σχήματος 1.7 το αδιάστατο πλάτος των εκπεμπόμενων βαρυτικών χυμάτων δίνεται στο σχήμα 1.8. Στο σχήμα διακρίνεται καθαρά η ύπαρξη των δύο φάσεων στην εξέλιξη του πλάτους της ιδιοσυχνότητας r . Η πρώτη φάση είναι η φάση της αύξησης του πλάτους της, ενώ η δεύτερη φάση είναι η φάση του κορεσμού (saturation) και της πτώσης του πλάτους. Η πιο πιθανή φάση για την ανίχνευση βαρυτικών χυμάτων είναι η δεύτερη.

Όπως όμως γίνεται εμφανές από το σχήμα το πλάτος του βαρυτικού κύματος που εκπέμπεται δεν είναι ικανοποιητικό για άμεση ανίχνευση. Χρησιμοποιώντας όμως κάποιες τεχνικές βελτίωσης του ανιχνεύσιμου βαρυτικού σήματος, όπως για παράδειγμα την μέθοδο φιλτραρίσματος παραθύρου (matched filtering), το σήμα που προκύπτει είναι ανιχνεύσιμο από την βελτιωμένη γενιά ανιχνευτών laser, LIGO-II. Το πλάτος του σήματος μετά την επεξεργασία σε σχέση με την ευαισθησία των ανιχνευτών δίνεται στο σχήμα 1.9. Από το σχήμα αυτό φαίνεται ότι το σήμα όταν είναι ανιχνεύσιμο από το βελτιωμένο ανιχνευτή LIGO-II.

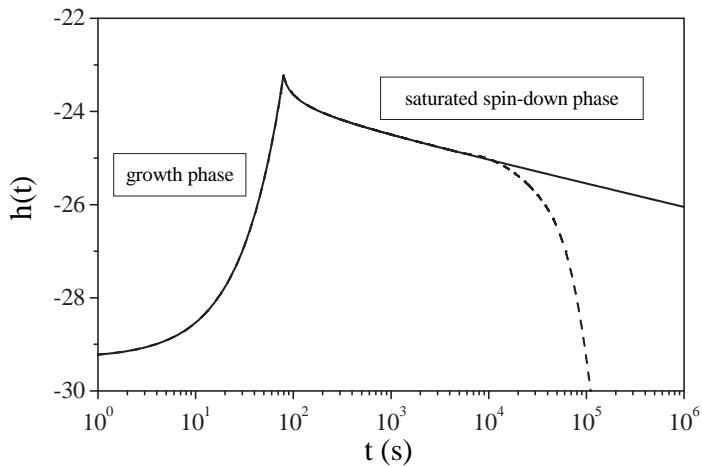
Το δεύτερο σενάριο [70, 71, 72], παριστάνεται στο σχήμα 1.10, και αφορά ένα διπλό σύστημα αστέρων στο οποίο ο ένας συνοδός προσαυξάνει τη μάζα και τη στροφορμή του άλλου. Λόγω του ιξώδους αυξάνεται η θερμοκρασία του αστέρα που δέχεται τη μάζα και κινείται οριζόντια προς τα δεξιά ακολουθώντα-



Σχήμα 1.7: Σενάριο εξέλιξης πρωτοσχηματιζόμενου αστέρα νετρονίων λόγω της αστάθειας της ιδιοσυχνότητας r . Οι δύο διαφορετικές καμπύλες εξέλιξης παριστάνουν δύο διαφορετικά σενάρια εξέλιξης σαν συνάρτηση του μέγιστου πλάτους που μπορεί να φτάσει η ιδιοσυχνότητα r . Οι άξονες είναι ίδιοι με τα προηγούμενα διαγράμματα.

ε τη διαδρομή A-B. Σε κάποια φάση, επέρχεται ισορροπία μεταξύ του ρυθμού θέρμανσης από το ιξώδες και του ρυθμού ψύξης από την εκπομπή νετρίνων, και ο αστέρας εκπέμπει βαρυτική ακτινοβολία χάνοντας στροφορμή μέχρι να επέλθει ξανά ισορροπία εξερχόμενος και πάλι από το παράθυρο αστάθειας ακολουθώντας τη διαδρομή B-C. Αυτή η διαδικασία κρατάει μερικούς μήνες και στη συνέχεια ο αστέρας ψύχεται και αυξάνεται η συχνότητα περιστροφής του ακολουθώντας τη διαδρομή C-D-A. Έτσι ωα φτάσει και πάλι στο παράθυρο αστάθειας και ωα ακολουθήσει τον ίδιο κύκλο και πάλι. Αυτή η δεύτερη φάση ψύξης και επιτάχυνσης της συχνότητας περιστροφής είναι που διαρκεί περισσότερο, περίπου 10^6 χρόνια, πράγμα που σημαίνει ότι ο αστέρας νετρονίων βρίσκεται ελάχιστα μέσα στο παράθυρο που δρα η αστάθεια όπου και εκπέμπει βαρυτικά κύματα.

Το σενάριο αυτό, δίνει εξήγηση για τη σχετικά στενή κατανομή των γωνιακών ταχυτήτων περιστροφής των παρατηρήσιμων αστέρων νετρονίων μικρής μάζας σε διπλά συστήματα που εκπέμπουν ακτίνες X (low mass X-ray binaries). Όπως φαίνεται καθαρά από το σχήμα, οι δύο ακραίες τιμές συχνοτήτων περιστροφής αντιστοιχούν στα σημεία A και D και αντιστοιχούν σε τιμές περιόδου $P = 1.5$ ms και $P = 6.5$ ms. Αυτό είναι και το φάσμα περιόδων που παρατηρούμε στα διπλά αυτά συστήματα. Επιπλέον, το σενάριο αυτό δίνει εξήγηση στο κατώτατο όριο τιμών των συχνοτήτων περιστροφής που παρατηρούμε στους πάλσαρς δεύτερης γενιάς (recycled pulsars). Η ακρίβεια μεταξύ

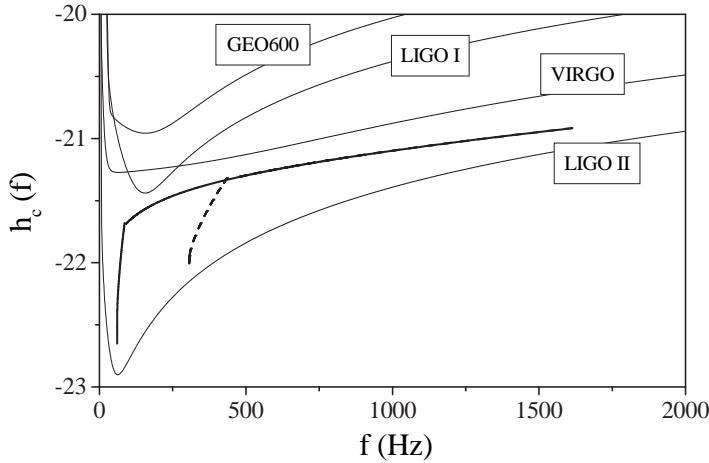


Σχήμα 1.8: Το αδιάστατο πλάτος της ιδιοσυχνότητας r που προκύπτει από το σενάριο του σχήματος 1.7. Είναι φανερές από το σχήμα οι δύο φάσεις της εξέλιξης του πλάτους. Η εστιγμένη γραμμή είναι για μοντέλα αστέρων νετρονίων με φλοιό (crust), όπου φαίνεται ότι και το σήμα διαρκεί λιγότερο. Στον οριζόντιο άξονα σχεδιάζεται ο χρόνος και στον κατακόρυφο ο δεκαδικός λογάριθμος του αδιάστατου βαρυτικού σήματος που εκπέμπεται.

της παρατηρούμενης $P = 1.56$ ms και της προβλεπόμενης με βάση το παραπάνω σενάριο τιμής $P = 1.5$ ms είναι πολύ καλή. Και πάλι η καμπύλη εξέλιξης εξαρτάται από το μέγιστο πλάτος της ιδιοσυχνότητας r . Στο σχήμα 1.10 φαίνονται επίσης δύο διαφορετικές καμπύλες εξέλιξης για δύο διαφορετικές τιμές του μέγιστου πλάτους a .

Μετά από αυτή την ενδιαφέρουσα εισαγωγική συζήτηση είναι φανερό ότι η μελέτη των περιστρεφόμενων αστέρων στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας είναι πολύ ενδιαφέρουσα και έχει πολλά να προσφέρει τόσο από θεωρητική όποιψη στην κατανόηση κάποιων ανεξήγητων μέχρι σήμερα παρατηρησιακών δεδομένων, αλλά και πειραματικά όσον αφορά στην ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων, την τελευταία πρόβλεψη της Θεωρίας που δεν έχει ακόμα επιβεβαιωθεί άμεσα.

Στην παρούσα διατριβή, δίνουμε έμφαση στην μελέτη των μη ακτινικών ταλαντώσεων βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων χρησιμοποιώντας την θεωρία διαταραχών. Η βασική λογική πίσω από τη θεωρία διαταραχών είναι η ακόλουθη απλή : Έχουμε ένα φυσικό σύστημα σε ισορροπία, στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι ο αστέρας με τον χωρόχρονο, διαταράσσουμε τα φυσικά μεγέθη που το περιγράφουν, χωρίς να μας ενδιαφέρει αρχικά η φυσική αιτία που μπορεί να προκαλέσει αυτήν την διαταραχή, και στη συνέχεια γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα υποθέτοντας ότι η διαταραχή εί-

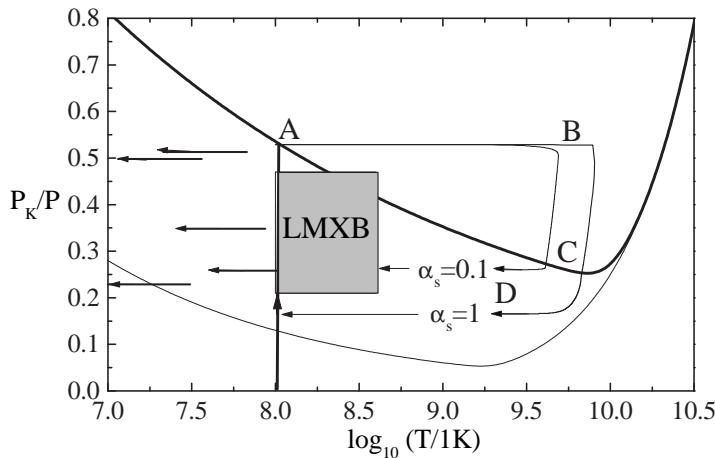


Σχήμα 1.9: Το αδιάστατο πλάτος της ιδιοσυχνότητας r με έντονη γραμμή (αντίστοιχη με αυτή του σχ. 1.8) που προκύπτει από το σενάριο του σχήματος 1.7 μετά από την τεχνική επεξεργασίας σήματος (matched filtering) σε σχέση με τις ευαισθησίες των διαφόρων ανισχνευτών. Στο οριζόντιο άξονα παριστάνεται η συχνότητα και στον κατακόρυφο ο δεκαδικός λογάριθμος του αδιάστατου πλάτους του βαρυτικού κύματος.

ναι μικρή. Από την επίλυση των γραμμικοποιημένων εξισώσεων μελετούμε την απόκριση του συστήματος στη διαταραχή είτε αναλυτικά είτε αριθμητικά και προκύπτουν οι ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του συστήματος.

Η χρησιμότητα της θεωρίας διαταραχών στη μελέτη των μη ακτινικών αστρικών ταλαντώσεων στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας, έγκειται στο γεγονός ότι παρέχει ένα ξεκάθαρο φυσικό πλαίσιο μελέτης αυτών. Έτσι, τα αποτελέσματα που πάρνουμε μπορούν να χρησιμοποιηθούν περαιτέρω ως βάση για την εξαγωγή συμπερασμάτων από την μελλοντικά ανιχνεύσιμη ακτινοβολία βαρυτικών κυμάτων σχετικά με τη δομή των αστέρων (πηγών) την μάζα και την ακτίνα τους όπως έχει προταθεί στο παρελθόν στην περίπτωση των μη περιστρεφόμενων αστέρων [103, 104, 105]. Επιπλέον, όλες οι προσπάθειες για αριθμητική επίλυση των πλήρων μη γραμμικών εξισώσεων Einstein, έχουν ως αναφορά για σύγκριση τα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας διαταραχών. Αυτό συμβαίνει γιατί λόγω της πολυπλοκότητας στη δομή και στην αριθμητική επίλυση των μη γραμμικών εξισώσεων η φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων είναι δύσκολη.

Η συμβολή της παρούσας διατριβής στην μελέτη των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας είναι πολλαπλή. Αρχικά είναι η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων που περιγράφουν τις μη ακτινικές ταλαντώσεις αυτών αγνοώντας τις διαταραχές των χωρόχρονου, προ-



Σχήμα 1.10: Σενάριο εξέλιξης για ένα διπλό σύστημα αστέρων που εκμπέμπει συνέχεια συμπεριλάβαμε και τις χωροχρονικές διαταραχές για την επίλυση του πλήρους συστήματος των εξισώσεων αστέρα-χωρόχρονου. Διαπιστώσαμε ότι η συνθήκη βαθμίδας που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα στη βιβλιογραφία έχει προβλήματα όσον αφορά την αριθμητική επίλυσή του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων που δίνει. Για το λόγο αυτό επιλέξαμε και χρησιμοποιήσαμε για την παραγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν τις διαταραχές ενός τέτοιου αστέρα μια άλλη συνθήκη βαθμίδας η οποία παράγει ένα σύστημα εξισώσεων που σε μια πρώτη ματιά φαίνεται πιο απλό και αριθμητικά ‘επιλύσιμο’. Τέλος θέλοντας να ελέγχουμε τα όρια της γραμμικής προσέγγισης διαταραχών στο τμήμα των ταλαντώσεων του αστρικού ρευστού προχωρήσαμε ένα βήμα παραπάνω. Εισαγάγαμε τους όρους δεύτερης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ως προς την παράμετρο περιστροφής ε και μελετήσαμε την επίδραση αυτών τόσο στο στατικό αστρικό μοντέλο όσο και στις εξισώσεις διαταραχών.

Έτσι η οργάνωση της διδακτορικής διατριβής είναι η ακόλουθη: Στο κεφάλαιο 2.1 δίνουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν το στατικό μοντέλο του χωρόχρονου και του αστέρα που στη συνέχεια θα διαταράξουμε, και εξηγούμε πως γίνεται η αριθμητική ολοκλήρωση τους προκειμένου να παράγουμε τα δεδομένα του στατικού αστρικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε στις αριθμητικές προσομειώσεις. Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 3 εισάγουμε τις διαταραχές, γραμ-

ματιάζουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν τη διαταραχή του στατικού μοντέλου και εξηγούμε πως γίνεται η αριθμητική ολοκλήρωση τους προκειμένου να παράγουμε τα δεδομένα του στατικού αστρικού μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε στις αριθμητικές προσομειώσεις. Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 4 εισάγουμε τις διαταραχές, γραμ-

μικοποιούμε τις εξισώσεις Einstein και περιγράφουμε την αριθμητική μέθοδο που θα χρησιμοποιήσουμε για την ολοκλήρωση τους. Στη συνέχεια, στο κεφάλαιο 4 ολοκληρώνουμε αριθμητικά τις εξισώσεων διαταραχών αγνοώντας τις χωροχρονικές διαταραχές προκειμένου να μελετήσουμε τις ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης του αστρικού ρευστού. Στο κεφάλαιο 5 εισάγουμε μια καινούργια βαθμίδα, την BCL gauge και παραγάγουμε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις στην βαθμίδα αυτή που προκύπτουν καταλληλότερες για αριθμητική εξέλιξη σε σχέση με την βαθμίδα που είχε χρησιμοποιηθεί ευρέως μέχρι σήμερα. Στη συνέχεια στο κεφάλαιο 6 εισάγουμε μια νέα γραφή των εξισώσεων πρώτης τάξης που ήδη υπάρχουν στην βιβλιογραφία η οποία βελτιώνει τις αριθμητική συμπεριφορά των εξισώσεων που ολοκληρώνουμε. Τέλος στο κεφάλαιο 7 εισάγουμε στο στατικό μοντέλο και στις εξισώσεις διαταραχών όρους δεύτερης τάξης ως προς την περιστροφή και μελετούμε την επίδραση αυτών στις ιδιοσυχνότητες του αστρικού ρευστού.

Μονάδες και Συμβολισμοί

- Το ίχνος (signature) της μετρικής είναι $(-, +, +, +)$, δηλ. τα χρονοειδή τετραδιανύσματα έχουν αρνητική ορίζουσα.
- Χρησιμοποιούμε γεωμετρικές μονάδες δηλαδή θέτουμε $c = G = 1$.
- Οι παράγωγοι ως προς το χρόνο συμβολίζονται με μια τελεία πάνω από το γράμμα (overdot) π.χ. \dot{A} , ενώ οι παράγωγοι ως προς την ακτινική διεύθυνση με ένα τόνο στα δεξιά του γράμματος (prime), π.χ. A' .
- Οι συναλλοίωτες παράγωγοι συμβολίζονται με ελληνικό ερωτηματικό (;). Οι μερικές παράγωγοι ως προς x^μ συμβολίζονται με $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, και μερικές φορές συντομότερα, ως ∂_μ ή με κόμμα $,_\mu$.
- Οι ελληνικοί δείκτες παίρνουν τιμές από 0 – 3 ενώ οι λατινικοί από 1 – 3.

Κεφάλαιο 2

Στατικό μοντέλο

2.1 Υποθέσεις

Σ' αυτό το κεφάλαιο όμως δώσουμε μια σύντομη περιγραφή του στατικού μοντέλου το οποίο στην συνέχεια θα διαταράξουμε για μελετήσουμε την απόχρισή του. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα βραδέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων που αποτελείται από τέλειο ρευστό, μηδενικής θερμοκρασίας και περιστρέφεται ομογενώς γύρω από τον άξονα του, με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω . Παρόλο που ένας πραγματικός αστέρας νετρονίων μπορεί να έχει πιο πολύπλοκη δομή όπως π.χ. στερεό πυρήνα, φλοιό, μαγνητικό πεδίο, ή ακόμα και κάποιο ποσοστό της μάζας του να είναι σε υπέρευστη μορφή (superfluid), η απλουστευμένη υπόθεση που κάναμε περιγράφει με αρκετή ακρίβεια τις γενικές ιδιότητες (bulk properties) ενός αστέρα νετρονίων. Οι παρατηρήσεις των *glitches* των πάλσαρς μας δείχνουν ότι η απόκλιση από το μοντέλο του τέλειου ρευστού λόγω των παραπάνω δομών είναι πάρα πολύ μικρές [39]. Επιπλέον, η υπόθεση της μηδενικής θερμοκρασίας δικαιολογείται από το γεγονός ότι η θερμική ενέργεια ($< 1 MeV$) είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια Fermi ($> 60 MeV$) στο εσωτερικό τους. Τέλος, για την υπόθεση της ομογενούς περιστροφής του, αξίζει να αναφέρουμε τα εξής : Παρόλο που κατά την γέννησή του ένας αστέρας νετρονίων έχει διαφορική περιστροφή, καθώς φύχεται, αφενός το γραμμικό ιξώδες (shear viscosity) λόγω της διαφυγής των νετρίνων, αφετέρου η δημιουργία τυρβώδων ροών στην ζώνη μεταφοράς του, αλλά πιθανόν και λόγω επανασύνδεσης μαγνητικών δυναμικών γραμμών, η διαφορική περιστροφή εκφυλίζεται σε ομογενής. Η χρονική κλίμακα μέσα στην οποία γίνεται αυτή η μετάβαση είναι δύσκολο να υπολογιστεί επακριβώς αλλά σύμφωνα με μια τελευταία μελέτη [40] πιστεύεται ότι είναι της τάξης των δευτερολέπτων.

2.2 Εξισώσεις στατικού μοντέλου

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, η περιστροφή του αστέρα θεωρείται ως διαταραχή του μη περιστρεφόμενου μοντέλου τάξης $\varepsilon = \Omega / \sqrt{M/R^3}$, όπου Ω είναι

η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα, M η μάζα του και R η ακτίνα του. Στην συνέχεια θα αναπτύξουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν αυτόν τον αστέρα στην γραμμική προσέγγιση περιστροφής δηλαδή διατηρώντας όρους πρώτης τάξης μόνο ως προς ϵ . Ο χωρόχρονος εντός και περί τον αστέρα περιγράφεται από την μετρική,

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\epsilon \omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi \quad (2.1)$$

όπου τα ν, λ, ω είναι συναρτήσεις της ακτινικής απόστασης r από το κέντρο του αστέρα. Το ρευστό του αστέρα περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας ορμής του τέλειου ρευστού,

$$T_{\mu\nu} = (p + \epsilon) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

όπου p, ϵ είναι η πίεση και η πυκνότητα ενέργειας, αντίστοιχα, του τέλειου ρευστού και u_μ είναι η τετρα-ταχύτητα του, η οποία αρχικά έχει μόνο δύο συνιστώσες σε πρώτη τάξη ως προς ϵ ,

$$u_\mu = [-e^\nu, 0, 0, \epsilon(\Omega - \omega)r^2 e^{-\nu}] . \quad (2.3)$$

Για να συμπληρωθεί η περιγραφή του ρευστού χρειαζόμαστε και μια εξίσωση κατάστασης. Στη γενική περίπτωση όπως γνωρίζουμε από την θερμοδυναμική, η πίεση είναι συνάρτηση της θερμοκρασίας T και της πυκνότητας ενέργειας ϵ του ρευστού $p = p(T, \epsilon)$. Η υπόθεση όμως της μηδενικής θερμοκρασίας του ρευστού μας επιτρέπει να υιοθετήσουμε μια μονοπαραμετρική εξίσωση κατάστασης στην οποία η πίεση δεν έχει εξάρτηση από τη θερμοκρασία. Στα πλαίσια αυτής της διατριβής θα χρησιμοποιήσουμε δύο διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις.

1. Την απλή πολυτροπική εξίσωση κατάστασης [41],

$$p = K \epsilon^\Gamma \quad (2.4)$$

όπου K , είναι η πολυτροπική σταθερά και Γ ο πολυτροπικός δείκτης που συνδέεται με τον πολυτροπικό εκθέτη n , με τη σχέση,

$$\Gamma = 1 + \frac{1}{n} \quad (2.5)$$

και

2. την αδιαβατική σχετικιστική πολυτροπική καταστατική εξίσωση [42],

$$p = K \rho_0^\Gamma \quad (2.6\alpha')$$

$$\epsilon = \rho_0 + \frac{p}{\Gamma - 1} \quad (2.6\beta')$$

όπου ρ_0 είναι η πυκνότητα της μάζας ηρεμίας (rest mass density).

Η αδιαβατική πολυτροπική εξίσωση κατάστασης προκύπτει με την επιπλέον υπόθεση ότι οι κινήσεις του αστρικού ρευστού είναι αδιαβατικές. Από την υπόθεση αυτή και χρησιμοποιώντας το πρώτο θερμοδυναμικό αξίωμα, προκύπτει και η σχέση μεταξύ της πυκνότητας μάζας ρ_0 και της πυκνότητας μάζας ενέργειας ϵ .

Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι για τιμές του πολυτροπικού εκθέτη $n < 1$, παίρνουμε 'σκληρές' (stiff) εξισώσεις κατάστασης, ενώ για $n > 1$, παίρνουμε 'μαλακές' (soft) καταστατικές εξισώσεις. Τέλος για τιμές του πολυτροπικού εκθέτη $0.5 < n < 1$, παίρνουμε μοντέλα αστέρων νετρονίων με ιδιότητες συγκρίσιμες με παρατηρούμενους πάλσαρς.

Από τις συνιστώσεις των εξισώσεων Einstein,

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

παίρνουμε τις ακόλουθες εξισώσεις που περιγράφουν πλήρως τον στατικό μοντέλο,

$$m' = 4\pi r^2 \epsilon \quad (2.8\alpha')$$

$$\nu' = -\frac{1}{2r} + \frac{e^{2\lambda}}{2r} + 4\pi e^\lambda p r \quad (2.8\beta')$$

$$\lambda' = \frac{1}{2r} - \frac{e^{2\lambda}}{2r} + 4\pi e^\lambda \epsilon r \quad (2.8\gamma')$$

$$\nu'' = -\nu'^2 + \lambda' \nu' + \frac{\lambda' - \nu'}{r} + 8\pi e^{2\lambda} p \quad (2.8\delta')$$

$$\varpi'' - \left[4\pi r(p + \epsilon)e^{2\lambda} - \frac{4}{r} \right] \varpi' - 16\pi e^{2\lambda}(p + \epsilon)\varpi = 0 \quad (2.8\epsilon')$$

όπου έχουμε εισάγει τη μεταβλητή,

$$\varpi = \Omega - \omega, \quad (2.9)$$

και

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}. \quad (2.10)$$

Προσθέτοντας τις εξισώσεις (2.8β') και (2.8γ') κατά μέλη προκύπτει μια χρήσιμη σχέση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αντικατάσταση ποσοτήτων του στατικού μοντέλου στις διαταραγμένες εξισώσεις

$$4\pi r e^\lambda (p + \epsilon) = \nu' + \lambda'. \quad (2.11)$$

Η εξίσωση (2.8ε') έχει ιδιαίτερη σημασία μια και εισάγει ένα φαινόμενο το οποίο στην Νευτώνεια θεωρία δεν υπήρχε. Πιο συγκεκριμένα αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του φαινομένου που ονομάζεται παράσυρση των αδρανειακών συστημάτων [17] (dragging of inertial frames), και συσχετίζει άμεσα το χωρόχρονο με το ρευστό. Με άλλα λόγια μας λέει ότι ένας αδρανειακός παρατηρητής που

βρίσκεται έξω από ένα περιστρεφόμενο αστέρα, δεν μπορεί να μείνει ακίνητος αλλά παρασύρεται κι αυτός σε περιστροφή, λόγω της περιστροφής του αστέρα. Αυτό το καθαρά σχετικιστικό φαινόμενο πού δεν έχει αντίστοιχο στην Νευτώνεια θεωρία, όπως προαναφέρθηκε αποτελεί το αίτιο εμφάνισης πολλών σημαντικών νέων φαινομένων όπως θα δούμε σε παρακάτω κεφάλαια. Τέλος, αξίζει να αναφερθεί ότι αυτό είναι και το μόνο επιπλέον δεδομένο σε σχέση με το μοντέλο μη περιστρεφόμενου αστέρα, που έχουμε στην γραμμική προσέγγιση, αφού η αλλαγή στο σχήμα του αστέρα έρχεται από τους όρους δεύτερης τάξης ως προς την περιστροφή όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο. Έξω από τον αστέρα ισχύει,

$$e^{2\nu} = e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad \varpi = \Omega - \frac{2J}{r^3} \quad (2.12)$$

όπου M είναι η συνολική μάζα του αστέρα και J η στροφορμή του. Τέλος από την σχετικιστική αρχή διατήρησης της ενέργειας,

$$T_{\mu\nu}^{\ ;\ \mu} = 0, \quad (2.13)$$

παίρνουμε την διαφορική εξίσωση που περιγράφει την πίεση στο εσωτερικό του αστέρα,

$$p' = -(p + \epsilon)\nu'. \quad (2.14)$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση για την πίεση με την (2.8β') εύκολα προκύπτει ότι,

$$p' = -(p + \epsilon) \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (m + 4\pi r^3 p), \quad (2.15)$$

που σημαίνει ότι η παράγωγος της πίεσης στην επιφάνεια του αστέρα μηδενίζεται λόγω του μηδενισμού των p και ϵ . Η παράγωγος όμως της πυκνότητας μάζας-ενέργειας συμπεριφέρεται αρκετά διαφορετικά. Από την ίδια σχέση προκύπτει για το ϵ' ,

$$\epsilon' = -\nu'(p + \epsilon) \left(\frac{dp}{d\epsilon} \right)^{-1}. \quad (2.16)$$

Κοντά στην επιφάνεια, $p \ll \epsilon$, συνεπώς,

$$(p + \epsilon) \left(\frac{dp}{d\epsilon} \right)^{-1} \simeq \epsilon \left(\frac{dp}{d\epsilon} \right)^{-1}. \quad (2.17)$$

Για την περίπτωση της απλής πολυτροπικής καταστατικής εξίσωσης (2.4), έχουμε,

$$\frac{dp}{d\epsilon} = K\Gamma\epsilon^{\Gamma-1}, \quad (2.18)$$

και επομένως,

$$\epsilon' = -\nu' \frac{\epsilon^{2-\Gamma}}{K\Gamma}. \quad (2.19)$$

Κοντά στην επιφάνεια του αστέρα η πυκνότητα ενέργειας $\epsilon \rightarrow 0$, και το ν' τείνει σε σταθερή τιμή. Έτσι εύκολα συμπεραίνει κανείς ότι η τιμή της παραγώγου της πυκνότητας ενέργειας ϵ' , κοντά στην επιφάνεια του αστέρα, εξαρτάται από την τιμή του πολυτροπικού δείκτη Γ . Για $\Gamma < 2$, έχουμε $\epsilon' \rightarrow 0$, για $\Gamma = 2$ έχουμε το ϵ' να τείνει σε μια σταθερή τιμή, και για $\Gamma > 2$ προκύπτει $\epsilon' \rightarrow -\infty$. Το γεγονός αυτό θα πρέπει να ληφθεί σοβαρά υπόψη στην αριθμητική εξέλιξη των εξισώσεων διαταραχών προκειμένου να αντιμετωπιστούν προβλήματα αριθμητικών ασταθειών στην επιφάνεια του αστέρα λόγω της απόκλισης του ϵ' .

Η πρώτης τάξης προσέγγιση εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι πολύ ικανοποιητική ακόμα και για τους ταχύτερα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Πράγματι, χρησιμοποιώντας την περίοδο του πλέον γρήγορα περιστρεφόμενου παρατηρήσιμου αστέρα νετρονίων που είναι $P \simeq 2 \text{ ms}^1$, η οποία αντιστοιχεί σε γωνιακή ταχύτητα περιστροφής $\Omega = 3100 \text{ s}^{-1}$ και βάζοντας σαν τυπική μάζα ενός τέτοιου αστέρα $M = 1.4 M_{\odot}$ και τυπική ακτίνα $R = 10 \text{ km}$, η παράμετρος ϵ γύρω από την οποία αναπτύσσουμε τις εξισώσεις μας προκύπτει να είναι,

$$\epsilon \simeq 0.4 \ll 1 \quad (2.20)$$

που σημαίνει ότι η προσέγγιση που κάνουμε είναι παραπάνω από ικανοποιητική να περιγράψουμε ακόμα και τους πλέον ταχύτατα περιστρεφόμενους αστέρες. Στην περίπτωση των νεογέννητων αστέρων νετρονίων που δημιουργούνται από βαρυτική κατάρρευση ενός αστέρα μεγάλης μάζας, είναι ακόμα μεγαλύτερη με αποτέλεσμα η παράμετρος περιστροφής ϵ να είναι της τάξης του 0.8 οπότε στην περίπτωση αυτή εξίσου σημαντικές διορθώσεις δίνουν και οι όροι δεύτερης τάξης, όπως θα μελετήσουμε αναλυτικά στο κεφάλαιο 7.

2.3 Αριθμητική κατασκευή του στατικού μοντέλου

Η κατασκευή του στατικού μοντέλου βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα γίνεται με αριθμητική ολοκλήρωση των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων (2.8α'), (2.8β'), (2.8ε'), (2.14) και μιας εκ των δύο εξισώσεων κατάστασης (2.4) ή (2.6). Οι αρχικές συνθήκες που πρέπει να δώσουμε είναι η κεντρική πυκνότητα του αστέρα ϵ_c , μια τυχαία τιμή για το δυναμικό στο κέντρο του, ν_c , η πολυτροπική σταθερά K , ο πολυτροπικός εκθέτης n και ο ρυθμός περιστροφής ϵ . Στη συνέχεια από την εξισωση κατάστασης βρίσκουμε την κεντρική πίεση p_c και ολοκληρώνουμε το σύστημα των εξισώσεων μέχρι την επιφάνεια αστέρα δηλαδή μέχρι να μηδενιστεί η πίεση. Η τιμή του δυναμικού λ σε κάθε βήμα της αριθμητικής ολοκλήρωσης βρίσκεται από την εξισωση (2.10). Στην επιφάνεια του αστέρα και χρησιμοποιώντας τις υπολογισμένες τιμές μάζας και ακτίνας βρίσκουμε την πραγματική τιμή του δυναμικού ν από την σχέση (2.12) και με βάση την διαφορά από την υπολογισμένη με την αριθμητική ολοκλήρωση

¹Ο PSR 1937+21 για παράδειγμα έχει περίοδο περιστροφής $P = 1.6 \text{ ms}$

τιμή, διορθώνουμε τις τιμές του δυναμικού στο εσωτερικό του αστέρα, εκμεταλλευόμενοι τη γραμμικότητα της Δ.Ε. για το δυναμικό ν . Η ολοκλήρωση της εξίσωσης δεύτερης τάξης (2.8ε') γίνεται με αναγωγή της σε πρώτη τάξη, θέτοντας $\omega' = z$. Στη συνέχεια, δίνουμε αυθαίρετη αρχική τιμή στο ω και $z = 0$ και ολοκληρώνουμε μέχρι την επιφάνεια του αστέρα. Ακολούθως, με βάση και πάλι την (2.12) καθώς και τον δοθέντα ρυθμό περιστροφής του αστέρα ϵ , διορθώνουμε τις αρχικά υπολογισμένες τιμές, λόγω και πάλι της γραμμικότητας της διαφορικής εξίσωσης. Η αριθμητική ολοκλήρωση έγινε με την μέθοδο Runge-Kutta τέταρτης τάξης και με την ρουτίνα rk4.f από το [14].

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις διαταραχών

Στο κεφάλαιο αυτό κάνουμε μια εισαγωγή στη γραμμική θεωρία διαταραχών, εφαρμόζοντάς την στο πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε. Έτσι, εισάγουμε τις διαταραχές του στατικού μοντέλου ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα, που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Διαταράσσουμε ταυτόχρονα το χωρόχρονο και το αστρικό ρευστό εισάγοντας μικρές διαταραχές τάξης δ, στα μεγέθη που περιγράφουν την ισορροπία τους. Στη συνέχεια παράγουμε τις διαταραγμένες εξισώσεις Einstein και τις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού, και τις γραμμικοποιούμε ταυτόχρονα ως προς την παράμετρο περιστροφής ε και την παράμετρο των διαταραχών δ. Περιγράφουμε αναλυτικά το τρόπο με τον οποίο διαταράσσουμε το χωρόχρονο και το αστρικό ρευστό και στη συνέχεια κάνουμε μια εκτενή αναφορά στις αριθμητικές μεθόδους που έχουν αναπτυχθεί για την επίλυση του πεπλεγμένου συστήματος των διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων που προκύπτει.

3.1 Μεταβλητές Euler-Lagrange

Η μελέτη των μικρών διαταραχών στο εσωτερικό ενός βραδέως περιστρεφόμενου σχετικιστικού αστέρα, ακολουθώντας τις μεθόδους της μηχανικής συνεχών μέσων, μπορεί να γίνει με δύο διαφορετικούς τρόπους περιγραφής που είναι ουσιαστικά ισοδύναμοι.

- Με την παρακολούθηση της μεταβολής των διαφόρων μεγεθών κατά μήκος της τροχιάς ενός στοιχειώδους όγκου (volume element) του ρευστού, ή
- με την μελέτη της μεταβολής των διαφόρων μεγεθών του συνεχούς μέσου, σε ένα σταθερό σημείο ως προς το σύστημα του παρατηρητή.

Η πρώτη μέθοδος αναφέρεται ως μέθοδος του Lagrange, ή σωματιδιακή περιγραφή, και η δεύτερη ως μέθοδος του Euler ή χωρική περιγραφή. Στο χωρόχρονο έξω από τον αστέρα η σωματιδιακή περιγραφή, προφανώς, παύει να ισχύει και συνεπώς χρησιμοποιείται αποκλειστικά η χωρική.

Προκειμένου να μελετηθεί καλύτερα η σχέση αλλά και η φυσική σημασία των δύο αυτών τρόπων περιγραφής των διαταραχών, ας θεωρήσουμε την υδροδυναμική ροή του διαταραγμένου αστέρα σε σχέση με την υδροδυναμική ροή της στατικής κατανομής και ας συμβολίσουμε με $Q(\mathbf{x}, t)$, $Q_0(\mathbf{x}, t)$ μια φυσική ποσότητα, π.χ. πίεση, ταχύτητα, στη διαταραγμένη και στην αδιατάραχτη ροή αντίστοιχα. Επιπλέον, ας συμβολίσουμε με $\xi(\mathbf{x}, t)$ την μετατόπιση από τη θέση ισορροπίας ενός στοιχειώδους όγκου του ρευστού, δηλαδή το διάνυσμα μετατόπισης (displacement vector). Η διαφορά,

$$\delta Q = Q(\mathbf{x}, t) - Q_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.1)$$

είναι η χωρική περιγραφή - Eulerian - των διαταραχών, η διαφορά δηλαδή μεταξύ της διαταραγμένης και της αρχικής ποσότητας σε μια συγκεκριμένη χωρική θέση. Η διαφορά,

$$\Delta Q = Q[\mathbf{x} + \xi(\mathbf{x}, t), t] - Q_0(\mathbf{x}, t) \quad (3.2)$$

είναι η σωματιδιακή περιγραφή - Lagrangian - των διαταραχών, η διαφορά δηλαδή μεταξύ της διαταραγμένης και της αρχικής ποσότητας για την κίνηση του ίδιου στοιχειώδους όγκου μέσα στο ρευστό. Αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση σε σειρά Taylor ως προς ξ , παίρνουμε τη σχέση μεταξύ των δύο τρόπων περιγραφής,

$$\Delta Q = \delta Q + \xi_i \frac{\partial Q}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \xi_i \xi_j \frac{\partial^2 Q}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \dots \quad (3.3)$$

Με την υπόθεση ότι οι διαταραχές είναι μικρές, μπορούμε να σταματήσουμε το ανάπτυγμα στον πρώτο όρο, στη γραμμική δηλαδή προσέγγιση. Έτσι παίρνουμε την παρακάτω σχέση μεταξύ των περιγραφών Euler και Lagrange της ποσότητας Q ,

$$\Delta Q = \delta Q + \xi \cdot \nabla Q. \quad (3.4)$$

Από τον ορισμό του διανύσματος μετατόπισης ξ προκύπτει για την σωματιδιακή μορφή της διαταραχής της ταχύτητας,

$$\Delta \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{x} + \xi, t) - \mathbf{v}_0(\mathbf{x}, t) = \frac{d\xi}{dt} \quad (3.5)$$

Η σημασία των σωματιδιακών διαταραχών Langrange είναι μεγάλη, γιατί σε πρώτη τάξη ως προς τις διαταραχές οι τελεστές Δ και $\frac{d}{dt}$ αντιμετατίθενται. Στην ανάλυση της παρούσας διατριβής, θα χρησιμοποιήσουμε τις χωρικές διαταραχές Euler, μια που ενδιαφερόμαστε για το σύστημα χωρόχρονου-ρευστού, ώστε να έχουμε κοινή περιγραφή των διαταραχών στο εσωτερικό του αστέρα αλλά και στο χωρόχρονο.

3.2 Ανάλυση σε σφαιρικές αρμονικές

Στη γενική περίπτωση οι συναρτήσεις που περιγράφουν τις διαταραχές του χωρόχρονου θα είναι συναρτήσεις και των τεσσάρων μεταβλητών της μετρικής t ,

r, θ, ϕ . Λόγω όμως της σφαιρικής συμμετρίας του μοντέλου μπορούμε να χωρίσουμε τις συναρτήσεις των διαταραχών σε ακτινικά και γωνιακά μέρη με την βοήθεια της ανάλυσης σε σφαιρικές αρμονικές. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τα ολοκληρώματα των σφαιρικών αρμονικών ολοκληρώνουμε ως προς τις γωνίες θ, ϕ απαλείφοντας τη γωνιακή εξάρτηση των διαταραγμένων εξισώσεων ώστε να καταλήξουμε σε Δ.Ε.Μ.Π των μεταβλητών r, t . Έτσι, αναλυτικότερα μια βαθμωτή συνάρτηση της μορφής $\Psi(t, r, \theta, \phi)$ θα εκφραστεί με τη βοήθεια των σφαιρικών αρμονικών ως εξής,

$$\Psi(t, r, \theta, \phi) = X(r, t) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \phi)$$

, όπου,

$$Y_{lm} = Q_{lm} P_{lm} \exp(i m \phi) \quad (3.6)$$

είναι οι σφαιρικές αρμονικές, $P_{lm}(\theta)$ τα προσαρτημένα πολυώνυμα Legendre, και,

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{(l-m)(l+m)}{(2l-1)(2l+1)}}. \quad (3.7)$$

Η διαταραχή στο ρευστό του αστέρα θα γίνει δίνοντας μια μικρή ταχύτητα προς κάθε μία από τις τρεις συντεταγμένες κατευθύνσεις r, θ, ϕ αλλά παράλληλα διαταρασσοντας την πίεση και την πυκνότητά του. Αν υποθέσουμε ότι οι διαταραχές είναι βαροτροπικές, δηλαδή ο αδιαβατικός τους δείκτης είναι ίσος με αυτόν της στατικής κατανομής, τότε οι διαταραχές στην πίεση και στην πυκνότητα συνδέονται με την ταχύτητα του ήχου ως εξής :

$$C_s^2 = \frac{\delta p}{\delta \epsilon} \quad (3.8)$$

Επιπλέον, το άθροισμα ως προς τον αρμονικό δείκτη l , θα έχει πρώτο όρο το $l = 2$, γιατί η εκπομπή βαρυτικών κυμάτων προέρχεται από αυτό τον δείκτη και πάνω. Για τις τιμές του αρμονικού δείκτη $l = 0$ και $l = 1$ έχουμε τις ακτινικές και διπολικές αστρικές ταλαντώσεις αντίστοιχα, οι οποίες αφενός δεν μπορούν να παράγουν βαρυτικά κύματα, και αφετέρου χρειάζονται ειδικό χειρισμό [20] λόγω αναλυτικών σχέσεων που ισχύουν για τις συγκεκριμένες σφαιρικές αρμονικές και δεν θα μας απασχολήσουν εφεξής.

Έτσι, οι συναλλοίωτες συνιστώσες του διαταραγμένου διανύσματος της τετρα-ταχύτητα έχουν την μορφή :

$$\delta u_r = -e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r, t) Y_{lm} \quad (3.9\alpha')$$

$$\delta u_\theta = -e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[V_{lm}(r, t) \frac{\partial}{\partial \theta} - U_{lm}(r, t) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{lm} \quad (3.9\beta')$$

$$\delta u_\phi = -e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[V_{lm}(r, t) \frac{\partial}{\partial \phi} + U_{lm}(r, t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_{lm} \quad (3.9\gamma')$$

Η συνιστώστα για την διαταραχή ως προς το συντεταγμένο χρόνο δu_t θα προκύψει από την διαταραχή της συνθήκης κανονικοποίησης της ταχύτητας,

$$(g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})(u^\mu + \delta u^\mu)(u^\nu + \delta u^\nu) = -1 \quad (3.10)$$

όπου με $h_{\mu\nu}$ συμβολίζουμε τις διαταραχές του μετρικού τανυστή, στις οποίες θα αναφερθούμε σε αμέσως επόμενη παράγραφο. Οι διαταραχές στην πίεση και στην πυκνότητα όπως αναφέρθηκε παραπάνω συνδέονται μεταξύ τους μέσω της ταχύτητας του ήχου και θα αναλυθούν και αυτές σε σφαιρικές αρμονικές ως ακολούθως,

$$\delta p = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta p_{lm} Y_{lm} \quad \delta \epsilon = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta \epsilon_{lm} Y_{lm} \quad (3.11)$$

Μια χρήσιμη μεταβλητή που θα χρησιμοποιήσουμε και θα απλοποιήσει σημαντικά τις διαταραχμένες εξισώσεις είναι η διαταραχή της ενθαλπίας, την οποία θα συμβολίζουμε με H και συνδέεται με τις διαταραχές της πίεσης και της πυκνότητας ως εξής :

$$H = \frac{\delta p}{p + \epsilon} = C_s^2 \frac{\delta \epsilon}{p + \epsilon}. \quad (3.12)$$

Στη συνέχεια θα εισάγουμε τις διαταραχές του χωρόχρονου. Θα συμβολίσουμε την διαταραχμένη μετρική με $h_{\mu\nu}$, υποθέτοντας ότι οι διαταραχές που εισάγουμε είναι πολύ μικρότερες σε μέτρο από την αρχική μετρική ($h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$) και θα πρέπει να αναλύσουμε τις 10 συνιστώσες της ώστε να έχουν την σωστή συμπεριφορά σε μετασχηματισμό στροφής parity πάνω σε μια 2-σφαίρα. Εδώ πρέπει να θυμηθούμε ότι υπάρχουν γενικά δύο ειδών μετασχηματισμοί στροφής πάνω σε μια σφαίρα. Οι πολικές (polar) όπου οι συναρτήσεις μετασχηματίζονται ως εξής :

$$P(-x) = (-1)^l P(x), \quad (3.13)$$

και οι αξονικές (axial) όπου οι συναρτήσεις μετασχηματίζονται ως εξής :

$$A(-x) = (-1)^{l+1} A(x). \quad (3.14)$$

Επιπλέον, ανάλογα με την συμπεριφορά των συνιστωσών της διαταραχμένης μετρικής στο μετασχηματισμό στροφής, θα χρησιμοποιήσουμε την κατάλληλη οικογένεια σφαιρικών αρμονικών. Έτσι οι συνιστώσες

- h_{tt} ,
- h_{tr} ,
- h_{rr}

μετασχηματίζονται σαν βαθμωτά μεγέθη, οι

- $(h_{t\theta}, h_{t\phi})$,
- $(h_{r\theta}, h_{r\phi})$

σαν διανύσματα και οι h_{ij} με $i, j = \{\theta, \phi\}$ σαν τανυστές. Για τις ποσότητες που μετασχηματίζονται σαν βαθμωτά μεγέθη θα χρειαστούμε τις βαθμωτές σφαιρικές αρμονικές Y_{lm} , που είναι πολικές. Για τις ποσότητες που μετασχηματίζονται σαν διανύσματα θα χρειαστούμε τις διανυσματικές σφαιρικές αρμονικές που είναι πολικές.

- πολικές $(-1)^l$

$$\Psi_{lm} = \left(\frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta}, \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right) \quad (3.15)$$

- αξονικές $(-1)^{l+1}$

$$\Phi_{lm} = \left(-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi}, \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) \quad (3.16)$$

Για τις ποσότητες που μετασχηματίζονται σαν τανυστές θα χρειαστούμε τις τανυστικές σφαιρικές αρμονικές που είναι και πάλι δύο ειδών

- πολικές $(-1)^l$

$$\Psi_{lm} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} & \frac{1}{2} X_{lm} \\ * & \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \cos \theta \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (3.17\alpha')$$

$$\Phi_{lm} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (3.17\beta')$$

- αξονικές $(-1)^{l+1}$

$$\chi_{lm} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \frac{X_{lm}}{\sin \theta} & \frac{1}{2} \sin \theta W_{lm} \\ * & \left(\sin \theta \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} - \cos \theta \right) \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (3.18)$$

όπου ο αστερίσκος δηλώνει συμμετρία και,

$$W_{lm} = \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \quad (3.19)$$

$$X_{lm} = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \phi} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \quad (3.20)$$

Έτσι, οι συνιστώσες της διαταραχμένης μετρικής μπορούν να αναλυθούν ως εξής,

$$h_{tt} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l H_{0,lm}(r,t) Y_{lm}, \quad (3.21\alpha')$$

$$h_{tr} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l H_{1,lm}(r,t) Y_{lm}, \quad (3.21\beta')$$

$$h_{rr} = e^{2\lambda} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l H_{2,lm}(r,t) Y_{lm}, \quad (3.21\gamma')$$

$$h_{t\theta} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-h_{0a,lm}(r,t) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + h_{0p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm}, \quad (3.21\delta')$$

$$h_{t\phi} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(h_{0a,lm}(r,t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + h_{0p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}, \quad (3.21\varepsilon')$$

$$h_{r\theta} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-h_{1a,lm}(r,t) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + h_{1p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm}, \quad (3.21\tau')$$

$$h_{t\phi} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(h_{1a,lm}(r,t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + h_{1p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}, \quad (3.21\zeta')$$

και τέλος το γωνιακό μέρος της διαταραγμένης μετρικής,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l h_{2,lm}(r,t) \chi_{lm} \\ &+ r^2 \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \{ G_{lm}(r,t) \Psi_{lm} + K_{lm}(r,t) \Phi_{lm} \}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

όπου οι 10 συναρτήσεις $H_0, H_1, H_2, h_{0,a}, h_{0,p}, h_{1,a}, h_{1,p}, G, h_2, K$, δεν είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, αλλά έχουμε την ελευθερία να μηδενίσουμε 4 από αυτές, μέσω της επιλογής μιας συνθήκης βαθμίδας (gauge), ανάλογης με αυτήν στην ηλεκτρομαγνητική θεωρία. Όπως εύκολα καταλαβαίνει κανείς, είναι πολύ σημαντική η καλύτερη δυνατή επιλογή της συνθήκη βαθμίδας γιατί όχι απλοποιήσει κατά πολύ τις προκυπτουσες εξισώσεις διαταραχών. Η πλέον συνήθης συνθήκη βαθμίδας στην βιβλιογραφία είναι αυτή των Regge-Wheeler [26], στην οποία έχουν μηδενιστεί οι συναρτήσεις

$$G(r,t) = 0 \quad (3.23)$$

$$h_{0,p}(r,t) = 0 \quad (3.24)$$

$$h_{1,p}(r,t) = 0 \quad (3.25)$$

$$h_2(r,t) = 0 \quad (3.26)$$

και για λόγους απλότητας στις συναρτήσεις που περιγράφουν τις αξονικές διαταραχές, παραλείπουμε τον δείκτη a δηλαδή,

$$h_{0,a} = h_0, \quad h_{1,a} = h_1. \quad (3.27)$$

Η διαταραγμένη μετρική σ' αυτή τη βαθμίδα μπορεί να γραφεί πιο συμβολικά με την μορφή πίνακα ως εξής,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{polar} + h_{\mu\nu}^{axial}, \quad (3.28)$$

όπου,

$$h_{\mu\nu}^{polar} = \begin{bmatrix} e^{2\nu} H_0 & H_1 & 0 & 0 \\ * & e^{2\lambda} H_2 & 0 & 0 \\ * & * & r^2 K & 0 \\ * & * & * & r^2 \sin^2 \theta K \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (3.29)$$

$$h_{\mu\nu}^{axial} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -h_0 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} & h_0 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ * & 0 & -h_1 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} & h_1 \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (3.30)$$

όπου ο αστερίσκος και πάλι δηλώνει συμμετρία. Την βαθμίδα αυτή υιοθέτησε και ο Kojima [35] στην παραγωγή των διαταραγμένων εξισώσεων Einstein στην περίπτωση ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα, με τις οποίες θα ασχοληθούμε αναλυτικότερα παρακάτω.

3.3 Γραμμικοποίηση εξισώσεων Einstein

'Οπως είναι προφανές από την διαταραχή του χωρόχρονου επηρεάζονται και τα σύμβολα Christoffel αλλά και ο τανυστής Riemann, οι διαταραγμένες συνιστώσες των οποίων, στη γραμμική προσέγγιση, υπολογίζονται από τις σχέσεις,

$$\delta \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} (h_{\beta\nu;\gamma} + h_{\gamma\nu;\beta} - h_{\beta\gamma;\nu}) \quad (3.31)$$

$$\delta R_{\mu\nu} = -\delta \Gamma^\beta_{\mu\nu;\beta} + \delta \Gamma^\beta_{\mu\beta;\nu}. \quad (3.32)$$

Ακολούθως, μπορούμε να γράψουμε τις διαταραγμένες εξισώσεις Einstein,

$$\delta G_{\mu\nu} = 8\pi \delta T_{\mu\nu}, \quad (3.33)$$

όπου η διαταραχή του τανυστή Einstein, $\delta G_{\mu\nu}$, σε πρώτη τάξη ως προς ε , δίνεται από την σχέση,

$$\begin{aligned} -2\delta G_{\mu\nu} &= h_{\mu\nu;\alpha}{}^{\dot{\alpha}} - (f_{\mu;\nu} + f_{\nu;\mu}) + 2R_\mu^\alpha{}_\nu^\beta h_{\alpha\beta} + h^\alpha{}_\alpha{}_{;\mu;\nu} \\ &- (R^\alpha{}_\nu h_{\mu\alpha} + R^\alpha{}_\mu h_{\nu\alpha}) + g_{\mu\nu}(f_\alpha{}^{\dot{\alpha}} - h^\alpha{}_{\alpha;\beta}{}^{\dot{\beta}}) \\ &+ Rh_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

με,

$$f_\mu = h_{\mu\nu}{}^{\dot{\nu}}, \quad (3.35)$$

ενώ η διαταραχή του τανυστή ενέργειας ορμής γράφεται,

$$\delta T_{\mu\nu} = (\delta p + \delta \epsilon) u_\mu u_\nu + (p + \epsilon) (\delta u_\mu u_\nu + u_\mu \delta u_\nu) + \delta p g_{\mu\nu} + p h_{\mu\nu}. \quad (3.36)$$

Το σύστημα των εξισώσεων συμπληρώνεται από τις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού,

$$\delta(T_{\mu\nu}^{;\mu}) = 0, \quad (3.37)$$

οι οποίες δίνονται αναλυτικά από τη σχέση,

$$\begin{aligned} \delta T_{\mu\nu}^{;\mu} &= g^{\mu\kappa} \left(\delta T_{\kappa\nu,\mu} - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda \delta T_{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \delta T_{\kappa\lambda} - \delta \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} - \delta \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_{\kappa\lambda} \right) \\ &- h^{\mu\kappa} \left(T_{\kappa\nu,\mu} - \Gamma_{\kappa\mu}^\lambda T_{\lambda\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda T_{\kappa\lambda} \right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Με τη βοήθεια όλων των παραπάνω εξισώσεων και χρησιμοποιώντας το πακέτο συμβολικών υπολογισμών MapleV version 5 για Linux με την επιπλέον βιβλιοθήκη για τανυστικούς υπολογισμούς GRTensorII version 1.71b [111], επαληθεύσαμε τις διαταραγμένες εξισώσεις Einstein (3.33), για ένα βραδέως και ομογενώς περιστρεφόμενο αστέρα, που είχε παράγει ο Kojima [35]. Επιπλέον παραγάγμε και παραθέτουμε στο παράρτημα A τις εξισώσεις κίνησης του ρευστού (3.38) που δεν υπάρχουν στην παραπάνω εργασία.

Πριν προχωρήσουμε στην μελέτη του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, όπως ήταν χρήσιμο στο σημείο αυτό να κάνουμε κάποιες διευχρινιστικές παρατηρήσεις σχετικά με τις εξισώσεις. Οι 10 ανεξάρτητες διαφορικές εξισώσεις μερικών παραγώγων ($\Delta.E.M.P.$) που προκύπτουν από τις (3.33) μπορούν να χωριστούν σε δύο κατηγορίες:

- στις εξισώσεις περιορισμού (constrain),
- και στις εξισώσεις χρονικής εξέλιξης (evolution).

Οι εξισώσεις περιορισμού είναι όλες οι συνιστώσες των εξισώσεων Einstein που περιέχουν τον χρονικό δείκτη, δηλαδή οι tt , tr , $t\theta$, $t\phi$, και πρέπει να ικανοποιούνται σε κάθε χρονική στιγμή. Χρησιμοποιούνται δε στον αριθμητικό κώδικα σε κάθε χρονικό βήμα για έλεγχο της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Πιο συγκεκριμένα, η tt συνιστώσα εκφράζει την αρχή διατήρησης της ενέργειας, ενώ οι υπόλοιπες τρεις την αρχή διατήρησης της ορμής για κάθε κατεύθυνση r , θ , ϕ . Οι εξισώσεις χρονικής εξέλιξης είναι οι υπόλοιπες έξι συνιστώσες των εξισώσεων διαταραχών. Επιπλέον, από τις διαταραγμένες εξισώσεις κίνησης του ρευστού (3.38) παίρνουμε τέσσερις επιπλέον εξισώσεις εξέλιξης των τριών ταχυτήτων του ρευστού και της διαταραχής της ενυλαπίας H . Επομένως, έχουμε συνολικά δέκα εξισώσεις εξέλιξης, από την αριθμητική επίλυση των οπίων με κατάλληλες αρχικές συνθήκες, μπορούμε να μελετήσουμε τη χρονική συμπεριφορά του συστήματος αστέρα-χωρόχρονου.

Παρόλα αυτά, δεν είναι τόσο εύκολο να γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν σε κατάλληλη μορφή για αριθμητική εξέλιξη. Οι γνώσεις

μας όσον αφορά την αριθμητική επίλυση συστήματος πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους είναι σχετικά περιορισμένες και μόνο για συγκεκριμένες μορφές αυτών μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι δεν θα αντιμετωπίσουμε αριθμητικές αστάθειες κατά την επίλυσή τους. Πιο συγκεκριμένα, για της πρώτης τάξης Δ.Ε.Μ.Π. γνωρίζουμε αρκετά πράγματα ώστε να είμαστε σίγουρη για την αριθμητική συμπεριφορά τους. Έτσι, στόχος μας είναι να φέρουμε τις εξισώσεις εξέλιξης σε μορφή τέτοια, ώστε να είναι πρώτης τάξης ως προς τον χώρο και τον χρόνο. Ένα επιπλέον αρκετά σημαντικό στοιχείο για την επιτυχία της προσπάθειας που ταυτόχρονα αποτελεί και την έκφραση της φυσικής στο μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει το πρόβλημα, είναι και οι οριακές συνθήκες. Οριακές συνθήκες πρέπει να επιβληθούν κατάλληλα στην επιφάνεια του αστέρα, στο κέντρο του καθώς και στο άπειρο. Είναι εύκολα κατανοητό ότι η σωστή επιβολή συνοριακών συνθηκών είναι απαραίτητη αλλά και επιβεβλημένη προκειμένου τα αριθμητικά αποτελέσματα να είναι συμβατά με την φυσική υπόσταση του προβλήματος. Παραπάνω συζήτηση σχετικά με τις οριακές συνθήκες θα κάνουμε σε επόμενο κεφάλαιο. Στην επόμενη παράγραφο θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στα συστήματα υπερβολικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους και στις μεθόδους διαχριτοποίησής τους (discretization methods).

3.4 Αριθμητικές μέθοδοι

Οι υπερβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους περιγράφουν πολλά και σημαντικά φαινόμενα στη Φυσική, όπως αεροδυναμικές και υδροδυναμικές ροές, ατμοσφαιρικές ροές και γενικότερα φαινόμενα που έχουν να κάνουν με διάδοση διαταραχών. Οι λύσεις αυτών είναι γενικά πιο περίπλοκες και πιο ενδιαφέρουσες από αυτές των ελλειπτικών ή των παραβολικών Δ.Ε.Μ.Π., αλλά ταυτόχρονα η αριθμητική επίλυση αυτών είναι η δυσκολότερη. Στη γενική περίπτωση ένα υπερβολικό γραμμικό σύστημα Δ.Ε.Μ.Π με σταθερούς συντελεστές, μπορεί να γραφεί συμβολικά ως εξής :

$$\dot{X} + AX' = SX, \quad (3.39)$$

όπου $X = [X_1(r, t), X_2(r, t), \dots, X_k(r, t)]^T$ είναι το διάνυσμα στήλη των άγνωστων συναρτήσεων των μεταβλητών του προβλήματος (στην περίπτωση μας οι μεταβλητές είναι οι r και t), A είναι ο $k \times k$ πίνακας των ροών (flux matrix) και S είναι ο $k \times k$ ‘πίνακας σύζευξης’ (source/coupling matrix). Όταν ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος τότε το σύστημα χαρακτηρίζεται ως ισχυρά υπερβολικό (strongly hyperbolic). Ο A θα είναι διαγωνιοποιήσιμος είτε όταν είναι συμμετρικός, οπότε το σύστημα χαρακτηρίζεται συμμετρικό υπερβολικό (symmetric hyperbolic), είτε αν έχει k διακριτές ιδιοτιμές, οπότε το σύστημα χαρακτηρίζεται σαν αυστηρά υπερβολικό (strictly hyperbolic), είτε αν έχει k γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοτιματα. Οποιαδήποτε από τις τρεις παραπάνω υποθέσεις ισχύει είναι ικανή να μας εξασφαλίσει την αριθμητική ευστάθεια του συστήματος.

Όλα τα παραπάνω ισχύουν βάση θεωρήματος [13] και στην περίπτωση που ο πίνακας σύζευξης S είναι μηδενικός. Έτσι, για λόγους απλότητας στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στο παραπάνω σύστημα χωρίς τον πίνακα σύζευξης. Εφόσον ο πίνακας A είναι διαγωνιοποιήσιμος θα υπάρχει ένας πίνακας L , με L^{-1} τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων του A , που θα τον διαγωνιοποιεί, δηλαδή,

$$D = LAL^{-1}, \quad (3.40)$$

όπου ο πίνακας D έχει στην διαγώνιό του τις ιδιοτιμές του A . Έτσι πολλαπλασιάζοντας από αριστερά την (3.39) (θέτοντας $S = 0$) με L , παίρνουμε,

$$\begin{aligned} L\dot{X} &= LAX' \\ &= (3.40) \\ &= DLX', \end{aligned} \quad (3.41)$$

και ορίζοντας $Y = LX$ μπορούμε να αναχθούμε σε ένα σύστημα από ασύζευκτες (uncoupled) εξισώσεις

$$\dot{Y} = DY', \quad (3.42)$$

για την αριθμητική επίλυση του οποίου έχουν αναπτυχθεί αρκετές αριθμητικές μέθοδοι, κάθε μια με τα δικά της πλεονεκτήματα, μειονεκτήματα, αλλά και συνυψήκες σύγκλισης. Στη συνέχεια θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά στις μεθόδους διαχριτοποίησης και αριθμητικής επίλυσης που έχουν αναπτυχθεί για αυτού του είδους τα συστήματα διαφορικών εξισώσεων [13, 15].

3.4.1 Αριθμητικά σχήματα

Προκειμένου να επιλυθεί αριθμητικά μια διαφορική εξίσωση ή ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, θα πρέπει να διαχριτοποιηθούν οι παράγωγοι που περιέχουν, δηλαδή να χρησιμοποιηθούν τύποι πεπερασμένων διαφορών για αυτές. Προκειμένου να κατανοήσει κάποιος την βασική αρχή στην οποία στηρίζεται η διαδικασία αυτή, ακολουθεί, ένα απλό παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $f(x)$ και την αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor γύρω από ένα σημείο x_0 , με βήμα h προς τα εμπρός και προς τα πίσω,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3), \quad (3.43)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{h}{1!} f'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \mathcal{O}(h^3). \quad (3.44)$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω προκύπτει η ακόλουθη σχέση για τον υπολογισμό της πρώτης παραγώγου,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2). \quad (3.45)$$

που χαρακτηρίζεται δεύτερης τάξης ακρίβειας, μια που οι όροι που παραλείπονται είναι τρίτης τάξης, ως προς h . Αν συμβολίσουμε με δ_i τη i το σημείο x_0 , με $i+1$ το $x_0 + h$ και με $i-1$ το $x_0 - h$, η παραπάνω σχέση γράφεται,

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad (3.46)$$

Ο παραπάνω τύπος επίσης χαρακτηρίζεται σαν τύπος κεντρικών διαφορών (central difference) μια που για να υπολογιστεί η παράγωγος σ' ένα σημείο χρησιμοποιήθηκε πληροφορία από δύο σημεία εκατέρωθεν αυτού. Παρομοίως, με πρόσθεση κατά μέλη των αναπτυγμάτων, προκύπτει αντίστοιχος τύπος για τον υπολογισμό της δεύτερης παραγώγου,

$$f''_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2} + \mathcal{O}(h^2), \quad (3.47)$$

που είναι κι αυτός δεύτερης τάξης κεντρικών διαφορών. Με παρόμοια αναπτύγματα προκύπτουν κι άλλοι τύποι μεγαλύτερης ακρίβειας, αλλά και πλαγίων διαφορών. Επιπλέον από τον ορισμό της παραγώγου, παίρνουμε

$$f'_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} + \mathcal{O}(h), \quad (3.48)$$

$$f'_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{h} + \mathcal{O}(h). \quad (3.49)$$

Και οι δύο παραπάνω τύποι, είναι πρώτης τάξης ακρίβειας, ο δε πρώτος τύπος αναφέρεται σαν εμπρόσθιας διαφοράς (forward difference) ενώ ο δεύτερος σαν οπίσθιας διαφοράς (backward difference), γιατί στην μία περίπτωση παίρνουμε το επόμενο σημείο, ενώ στην άλλη το προηγούμενο. Όλη η παραπάνω ανάλυση έγινε με την υπόθεση ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι η θ -ση, αλλά είναι προφανές ότι μπορεί να εφαρμοστεί και στην περίπτωση που ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος.

Έτσι για την διακριτοποίηση της αρχικής μας εξίσωσης (3.39) μπορούμε να συνδυάσουμε οποιοδήποτε από τα παραπάνω σχήματα πεπερασμένων διαφορών, τόσο για τη χρονική μεταβλητή t όσο και για τη χωρική r . Ας υποθέσουμε για λόγους απλότητας ότι έχουμε την ακόλουθη υπερβολική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους,

$$\dot{x} + ax' = sx \quad (3.50)$$

όπου $x = x(r, t)$, $a = a(r)$ και $s = s(r)$. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω σχήματα μπορούμε να γράψουμε την διακριτοποιημένη μορφή της διαφορικής εξίσωσης με διαφορετικούς τρόπους. Επειδή η εξίσωση έχει δύο μεταβλητές όχι χρειαστούμε δύο δείκτες έναν για κάθε μεταβλητή. Έτσι, όταν χρησιμοποιήσουμε κάτω δείκτη για την χωρική μεταβλητή και πάνω δείκτη για την χρονική μεταβλητή. Για να διαπιστώσουμε την ευστάθεια (stability) αλλά και την σύγκλιση (convergence) στην αρχική διαφορική εξίσωση, μιας τέτοιας εξίσωσης διαφορών χρειάζεται επιπλέον μελέτη η οποία ξεφεύγει από τα όρια αυτής της

παρουσίασης. Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται παραπέμπουμε στις αναφορές [13, 15]. Εμείς από εδώ και πέρα όμως αναφερόμαστε στις μελέτες ευστάθειας και σύγκλισης χωρίς απόδειξη. Έτσι, χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, σχήμα εμπρόσθιας διαφοράς για το χρόνο και για τη θέση παίρνουμε την ακόλουθη εξίσωση διαφορών,

$$x_k^{n+1} = x_k^n - R(x_{k+1}^n - x_k^n) + \Delta t s_k x_k^n, \quad (3.51)$$

όπου $R = a\Delta t/\Delta r$, η οποία είναι πρώτης τάξης ακρίβειας και ως προς το χρόνο και ως προς τη θέση $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta r)$. Έτσι από την μελέτη σταθερότητας (stability analysis) αυτής της εξίσωσης διαφορών προκύπτει ότι για $a < 0$ είναι σταθερή εφόσον $R < 1$, ενώ για $a > 0$ είναι πάντα ασταθής.

Παρομοίως χρησιμοποιώντας σχήμα κεντρικών διαφορών για τη θέση και εμπρόσθιας διαφοράς για το χρόνο προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση διαφορών,

$$x_k^{n+1} = x_k^n - \frac{R}{2}(x_{k+1}^n - 2x_k^n + x_{k-1}^n) + \Delta t s_k x_k^n, \quad (3.52)$$

η οποία είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο αλλά δεύτερης τάξης ως προς τη θέση $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(\Delta r^2)$. Η μελέτη ευστάθειας σ' αυτήν την περίπτωση μας αποδεικνύει ότι η εξίσωση διαφορών είναι ασταθής για όλα τα $R \neq 0$.

Τέλος, αν χρησιμοποιήσουμε σχήμα κεντρικών διαφορών τόσο για το χρόνο όσο και για τη θέση, η εξίσωση διαφορών και κατά συνέπεια το αριθμητικό σχήμα που προκύπτει είναι γνωστό με το όνομα Lax-Wendroff και έχει την ακόλουθη μορφή,

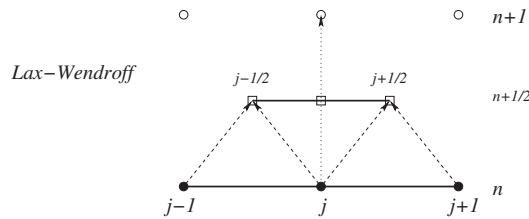
$$x_k^{n+1} = x_k^n - \frac{R}{2}(x_{k+1}^n - x_{k-1}^n) + \frac{R^2}{2}(x_{k+1}^n - 2x_k^n + x_{k-1}^n) + \Delta t s_k x_k^n \quad (3.53)$$

το οποίο είναι δεύτερης τάξης και ως προς το χρόνο και ως προς τη θέση $\mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(\Delta r^2)$. Η μελέτη ευστάθειας αποδεικνύει ότι το αριθμητικό σχήμα Lax-Wendroff είναι ευσταθές ανεξαρτήτως της τιμής του συντελεστή a , αρκεί να ισχύει,

$$R = \frac{|a|\Delta t}{\Delta r} \leq 1. \quad (3.54)$$

Αυτό είναι και το σχήμα που όμως χρησιμοποιήσουμε για την αριθμητική εξέλιξη των διαταραγμένων εξισώσεων Einstein και των εξισώσεων κίνησης του διαταραγμένου ρευστού. Για να βελτιώσουμε την ακρίβειά του και να αποφύγουμε ανεπιθύμητα φαινόμενα στη λύση τους όμως κάνουμε μια μικρή προσαρμογή. Αντί να υπολογίζουμε σε ένα βήμα τις πεπερασμένες διαφορές όμως τις χρησιμοποιήσουμε και ένα ενδιάμεσο βιοηθητικό βήμα και όμως τις υπολογίζουμε σε δύο βήματα. Το πλεονέκτημα που έχει αυτός ο εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού των πεπερασμένων διαφορών είναι ότι αποφεύγει τη δημιουργία αριθμητικού ιξώδους (numerical viscosity), που ‘μολύνει’ τους υπολογισμούς, αλλά και την μετατόπιση του αριθμητικού πλέγματος. Η υλοποίηση του γίνεται ως εξής: Ορίζουμε ενδιάμεσες τιμές της συνάρτησης $x_{k+1/2}^{n+1/2}$ στο μισό χρονικό $t^{n+1/2}$

και χωρικό βήμα $r_{k+1/2}$ τις οποίες υπολογίζουμε και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας αυτές υπολογίζουμε τις τιμές στο ολόκληρο βήμα. Αυτό ουσιαστικά είναι θέμα συμβολισμού, αφού μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το πλέγμα μας έχει διπλάσιο αριθμό σημείων και μας δείχνει ότι μια μικρή έξυπνη αλλαγή σε ένα αριθμητικό σχήμα μπορεί να επιφέρει δραστικά αποτελέσματα στην επίλυση του προβλήματος. Η υλοποίηση του αριθμητικού αυτού σχήματος φαίνεται στο σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Σχηματική αναπαράσταση του αριθμητικού σχήματος Lax-Wendroff δύο βημάτων.

Εδώ πρέπει να τονίσουμε ένα ακόμα σημείο που εισάγει πολυπλοκότητα στο πρόβλημα που θέλουμε να επιλύσουμε αριθμητικά. Οι συντελεστές αυτού του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων, δεν είναι σταθεροί, αλλά συναρτήσεις της ακτινικής απόστασης από το κέντρο του αστέρα.

3.4.2 Σύγκλιση και ακρίβεια αριθμητικής μεθόδου

Το επόμενο βήμα είναι ο έλεγχος και η διαπίστωση ότι ο αριθμητικός κώδικας που γράψαμε είναι πράγματι δεύτερης τάξης ακρίβειας και ως προς το χρόνο και ως προς το χώρο. Αυτό γίνεται αν λάβουμε υπόψη μας την ακόλουθη απλή και προφανή σχέση μεταξύ της αναλυτικής και αριθμητικής λύσης, εφόσον το

αριθμητικό σχήμα είναι δεύτερης τάξης,

$$X_{num}(r) = X_{anal}(r) + g(r)\Delta r^2 \quad (3.55)$$

όπου $g(r)$ είναι μια αυθαίρετη συνάρτηση του χώρου. Την χρησιμότητα της σχέσης αυτής στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε την αναλυτική λύση των εξισώσεων μας (αν την γνωρίζαμε εξάλλου δεν θα χρειαζόταν να καταφύγουμε στην αριθμητική λύση) μπορεί εύκολα να αντιληφθεί κανείς ως εξής: Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων τρεις φορές για 3 διαφορετικούς αριθμούς σημείων του αριθμητικού πλέγματος, επιλέγοντας να είναι πολλαπλάσια του 2, δηλαδή για N , $2N$ και $4N$. Αν το σύστημα και ο αριθμητικός κώδικας είναι δεύτερης τάξης ακρίβειας, τότε η αναλυτική λύση απλοποιείται, και επομένως δεν μας είναι απαραίτητη για να ελέγξουμε την ακρίβεια της μεθόδου. Έτσι, με τη βοήθεια της προηγούμενης απλής έκφρασης μεταξύ αναλυτικής και αριθμητικής λύσης μπορούμε να γράψουμε,

$$\begin{aligned} X_{num}^N(r) &= X_{anal}(r) + g(r)\Delta r^2 \\ X_{num}^{2N}(r) &= X_{anal}(r) + \frac{1}{4}g(r)\Delta r^2 \\ X_{num}^{4N}(r) &= X_{anal}(r) + \frac{1}{16}g(r)\Delta r^2 \end{aligned}$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη, εύκολα προκύπτει το ακόλουθο κριτήριο:

$$\left| \frac{X_{num}^N - X_{num}^{2N}}{X_{num}^{2N} - X_{num}^{4N}} \right| = 4 \quad (3.56)$$

Έτσι μπορούμε να ελέγξουμε την συμπεριφορά του αριθμητικού κώδικα σε σχέση μ' αυτό το κριτήριο, προκειμένου να επαληθεύσουμε την τάξη της ακρίβειάς του. Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι αυτό το κριτήριο εξασφαλίζει ότι αυξάνοντας τον αριθμό των σημείων του αριθμητικού πλέγματος το αριθμητικό σφάλμα ελαττώνεται κατά το αντίστροφο τετράγωνο αυτού. Δεν μας δίνει όμως κανένα συμπέρασμα για το αν και κατά πόσο η αριθμητική λύση συγκλίνει στην αναλυτική. Αυτό είναι το αντικείμενο μιας άλλης ανάλυσης, η οποία είναι περιπλοκη και εξειδικευμένη για κάθε ξεχωριστό πρόβλημα. Στη γενική περίπτωση βέβαια, η αριθμητική λύση συγκλίνει στην αναλυτική αλλά με διαφορετική ακρίβεια, ανάλογα με την περίπτωση. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η ανάλυση αυτή είναι σχεδόν αδύνατη λόγω της πολυπλοκότητάς του, και επομένως περιοριζόμαστε στην γενική υπόθεση, ότι η αριθμητική μας λύση συγκλίνει στην αναλυτική. Έτσι το μόνο που απομένει, είναι να ελέγξουμε στον αριθμητικό κώδικα είναι η σωστή μεταφορά και υλοποίηση των εξισώσεων.

Κεφάλαιο 4

Αριθμητική εξέλιξη στην προσέγγιση Cowling

Έχοντας θέσει το θεωρητικό αλλά και αριθμητικό υπόβαθρο στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα προχωρήσουμε στην αριθμητική ολοκλήρωση των διαταραγμένων εξισώσεων Einstein. Πιο συγκεκριμένα, επειδή στόχος μας είναι να μελετήσουμε τις ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του αστρικού ρευστού μπορούμε, σαν ένα πρώτο βήμα, να αγνοήσουμε τις διαταραχές του χωρόχρονου. Αυτή η προσέγγιση έγινε για πρώτη φορά για την μελέτη των ταλαντώσεων των Νευτώνειων αστέρων από τον Cowling [19] γι' αυτό από τότε πήρε και το όνομά του. Χρησιμοποιήθηκε στη συνέχεια για την μελέτη των ταλαντώσεων των Νευτώνειων αστέρων και από άλλους ερευνητές [36]. Για σχετικιστικούς αστέρες, χρησιμοποιήθηκε από τους Yoshida & Kojima [37], οι οποίοι και έδειξαν ότι η προσέγγιση αυτή είναι ικανοποιητική για την περιγραφή των ιδιοταλαντώσεων του αστρικού ρευστού και για σχετικιστικούς αστέρες. Πιο αναλυτικά, διαπίστωσαν ότι για τον βασικό κανονικό τρόπο ταλάντωσης, f mode, η ακρίβεια της προσέγγισης είναι καλύτερη όσο μεγαλύτερος είναι ο αρμονικός δείκτης l του κανονικού τρόπου ταλάντωσης που μελετούμε, αλλά και όσο πιο σχετικιστικό γίνεται το αστέρι, δηλαδή όσο πιο πολύ αυξάνεται ο λόγος της μάζας προς την ακτίνα του, M/R , που ονομάζεται συμπαγότητα (compactness). Για τις ιδιοσυχνότητες της πίεσης p , διαπίστωσαν ότι η ακρίβεια της προσέγγισης βελτιώνεται ομοίως με την αύξηση του ακτινικού αριθμού l αλλά αντίθετα μειώνεται με την αύξηση της συμπαγότητας του αστεριού. Ένα σημαντικό όριο που δεν πρέπει να ξεχνάμε στη μελέτη μας, είναι το όριο ευστάθειας των ακτινικών ταλαντώσεων. Το όριο αυτό εκφράζει την μέγιστη συμπαγότητα που μπορεί να έχει ένας αστέρας ώστε το πλάτος των ακτινικών ταλαντώσεων να μην οδηγήσει στην διάλυσή του και εξαρτάται από τη δομή του αστέρα. Το όριο ευστάθειας ενός πολυτροπικού αστέρα, σαν αυτούς που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω στη μελέτη μας, στις ακτινικές ταλαντώσεις είναι για τιμή συμπαγότητας $M/R = 0.215$.

4.1 Εξισώσεις κίνησης

Οι εξισώσεις στην προσέγγιση Cowling προκύπτουν εύκολα από τις εξισώσεις κίνησης του παραρτήματος A' μηδενίζοντας όλες τις συναρτήσεις που περιγράφουν χωροχρονικές διαταραχές. Επιπλέον, παραλείπουμε και τους δείκτες l, m , σ' όλες τις μεταβλητές για λόγους απλότητας και καθαρότητας των εξισώσεων. Έτσι, το τελικό σύστημα των εξισώσεων που έχουμε να εξελίξουμε αριθμητικά στο χρόνο γράφεται,

$$\begin{aligned} \dot{H} + \mathrm{i}m\Omega H &= C_s^2 e^{2\nu-2\lambda} R' + e^{2\nu-2\lambda} \left[C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) - \nu' \right] R \\ &\quad - e^{2\nu} \frac{\Lambda}{r^2} V + \mathrm{i}mC_s^2 \varpi H + (2\Omega - \omega)\dot{U} \end{aligned} \quad (4.1\alpha')$$

$$\dot{R} + \mathrm{i}m\Omega R = H' - \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] (\mathrm{i}mV + \mathcal{L}_1^{\pm 1} U) \quad (4.1\beta')$$

$$\dot{V} + \mathrm{i}m\Omega V = H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathrm{i}mV + \mathcal{L}_3^{\pm 1} U) - \frac{\mathrm{i}mr^2}{\Lambda} A \quad (4.1\gamma')$$

$$\dot{U} + \mathrm{i}m\Omega U = \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathrm{i}mU - \mathcal{L}_3^{\pm 1} V) + \frac{r^2}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} A \quad (4.1\delta')$$

όπου οι μεταβλητές H, R, V, U , έχουν οριστεί στις εξισώσεις (3.9)- (3.12),

$$\begin{aligned} A &= \varpi C_s^2 e^{-2\lambda} \left[R' + \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) - e^{2\lambda} \frac{\Lambda}{r^2} V \right] \\ &\quad + \left[\omega' + \varpi \left(\nu' - \frac{2}{r} \right) \right] e^{-2\lambda} R \end{aligned} \quad (4.2)$$

και οι τελεστές σύζευξης που περιέχονται στις εξισώσεις ορίζονται ως εξής :

$$\mathcal{L}_1^{\pm 1} A := (l-1)Q_{lm}A_{l-1,m} - (l+2)Q_{l+1,m}A_{l+1,m} \quad (4.3)$$

$$\mathcal{L}_2^{\pm 1} A := -(l+1)Q_{lm}A_{l-1,m} + lQ_{l+1,m}A_{l+1,m} \quad (4.4)$$

$$\mathcal{L}_3^{\pm 1} A := (l-1)(l+1)Q_{lm}A_{l-1,m} + l(l+2)Q_{l+1,m}A_{l+1,m} \quad (4.5)$$

όπου τα Q_{lm} έχει οριστεί στην (3.7) και όπως φαίνεται από τον ορισμό τους προκαλούν τη σύζευξη των όρων των εξισώσεων με διαφορετικούς αρμονικούς δείκτες l .

Επιπλέον χρήσιμο είναι σε αυτό το σημείο να αναφερθούμε στην τάξη των παραπάνω εξισώσεων με βάση την παράμετρο ε κατά την οποία αναπτύσσουμε τις εξισώσεις. Έτσι όλοι οι όροι που δεν περιέχουν $\Omega \sim \omega \sim \varpi = \mathcal{O}(\varepsilon)$, θα ονομάζονται μηδενικής τάξης. Όλοι οι όροι που περιέχουν $\Omega \sim \omega \sim \varpi = \mathcal{O}(\varepsilon)$ θα ονομάζονται πρώτης τάξης, και για την απλοποίηση αυτών μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους όρους μηδενικής τάξης, μια που σταματάμε το ανάπτυγμά μας σε όρους πρώτης τάξης. Για παράδειγμα, ο όρος που περιέχει \dot{U} στην εξισωση της ενθαλπίας (4.1β') μπορεί να μηδενιστεί αφού στη προσέγγιση

Cowling και στην μηδενική τάξη ισχύει $\dot{U} = 0$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας και πάλι το μηδενικό όριο της πρώτης εξισώσης για την εξέλιξη της μεταβολής της ενθαλπίας (4.1β'), ο συντελεστής A μπορεί να απλοποιηθεί και να γραφεί ως εξής,

$$A = \varpi e^{-2\nu} \dot{H} + e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R. \quad (4.6)$$

Αυτή η μορφή του συντελεστή A μας οδηγεί στον ορισμό των δύο νέων μεταβλητών που θα απλοποιήσουν τις παραπάνω εξισώσεις. Οι μεταβλητές αυτές θα οριστούν ως εξής,

$$\tilde{V} = V + \text{i}m \frac{\varpi r^2}{\Lambda} e^{-2\nu} H, \quad (4.7)$$

$$\tilde{U} = U - \frac{\varpi r^2}{\Lambda} e^{-2\nu} \mathcal{L}_2^{\pm 1} H, \quad (4.8)$$

και αντικαθιστώντας στις παραπάνω εξισώσεις και κρατώντας όρους πρώτης τάξης, το παραπάνω σύστημα των εξισώσεων μετασχηματίζεται ως εξής, (μετά τον μετασχηματισμό παραλείπουμε τις περισπωμένες $\tilde{\cdot}$)

$$\begin{aligned} \dot{H} + \text{i}m\Omega H &= e^{2\nu-2\lambda} C_s^2 R' + e^{2\nu-2\lambda} \left[C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) - \nu' \right] R \\ &\quad - e^{2\nu} \frac{\Lambda}{r^2} V + 2\text{i}m\varpi C_s^2 H \end{aligned} \quad (4.9\alpha')$$

$$\dot{R} + \text{i}m\Omega R = H' - B (\text{i}mV + \mathcal{L}_1^{\pm 1} U) \quad (4.9\beta')$$

$$\dot{V} + \text{i}m\Omega V = H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\text{i}mV + \mathcal{L}_3^{\pm 1} U) - \frac{\text{i}m}{\Lambda} r^2 e^{-2\lambda} BR \quad (4.9\gamma')$$

$$\dot{U} + \text{i}m\Omega U = \frac{2\varpi}{\Lambda} (\text{i}mU - \mathcal{L}_3^{\pm 1} V) + \frac{r^2}{\Lambda} e^{-2\lambda} BR \quad (4.9\delta')$$

όπου,

$$B = \omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right). \quad (4.10)$$

Το βασικό πλεονέκτημα που έχει το απλοποιημένο σύστημα είναι ότι στις δύο τελευταίες εξισώσεις δεν υπάρχουν πλέον χωρικές παράγωγοι, ουσιαστικά δηλαδή είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις ως προς τη χρονική μεταβλητή, γεγονός που απλοποιεί σε μεγάλο βαθμό την αριθμητική ολοκλήρωση.

Το παραπάνω σύστημα είναι ένα σύστημα άπειρων συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων ως προς το αρμονικό δείκτη l , για $l = 0 \dots \infty$ και $m = -l \dots l$, το οποίο συμβολικά μπορεί να γραφεί ως εξής :

$$A_{l,m} + \text{i}m\varepsilon f_1 A_{l,m} + \varepsilon g_1 P_{l-1,m} + \varepsilon h_1 P_{l+1,m} = 0 \quad (4.11)$$

$$P_{l,m} + \text{i}m\varepsilon f_2 P_{l,m} + \varepsilon g_2 A_{l-1,m} + \varepsilon h_2 A_{l+1,m} = 0 \quad (4.12)$$

όπου με P , συμβολίζουμε τις πολικές (polar-even) μεταβλητές (H, R, V) και με A , την αξονική (axial-odd) μεταβλητή U και με f_i, g_i και h_i είναι συναρτήσεις των μεγεθών ισορροπίας του αστέρα. Όπως καθαρά φαίνεται από την

παραπάνω γραφή η περιστροφή του αστέρα είναι αυτή που εισάγει τις συζεύξεις μεταξύ των συναρτήσεων διαταραχών διαφορετικών αρμονικών δεικτών l και αντιθέτων parity, όπως ακριβώς και στους Νευτώνειους αστέρες [33]. Έτσι, οι αξονικές (odd parity) συναρτήσεις διαταραχών τάξης l , δέχονται την επίδραση των πολικών (even parity) τάξης $l \pm 1$, και ομοίως οι πολικές συναρτήσεις διαταραχών τάξης l , δέχονται την επίδραση των αξονικών τάξης $l \pm 1$. Στο όριο μη περιστρεφόμενου αστέρα, δηλαδή για $\varepsilon = 0$, έχουμε δύο ανεξάρτητα συστήματα εξισώσεων $P_{lm} = 0$ και $A_{lm} = 0$.

Λόγω ακριβώς αυτής της μίξης των συναρτήσεων διαταραχών δεν είναι πλέον δυνατός ο διαχωρισμός τους σε πολικές και αξονικές με βάση τον κανόνα (3.13) και (3.14). Ο διαχωρισμός των εξισώσεων σ' αυτή την περίπτωση θα γίνει με βάση την συνολική τους συμπεριφορά ως προς τους μετασχηματισμούς στροφής. Έτσι, μια πολική εξισώση με άρτιο $l = |m|$ μετασχηματίζεται σαν πολική σε μετασχηματισμούς στροφής. Είναι όμως ταυτόχρονα συζευγμένη με την αξονική εξισώση με $l+1$, η οποία μετασχηματίζεται κι αυτή σαν πολική σε μετασχηματισμούς στροφής. Δηλαδή για άρτιο m , το σύστημα των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων έχει συνολικά άρτια parity. Αντίστοιχα, στην περίπτωση που η πρώτη εξισώση του συστήματος είναι αξονική τότε το όλο σύστημα έχει περιττή parity. Όταν το m είναι περιττό, προφανώς, ισχύουν τα αντίθετα. Οι Lockitch & Friedman [88] εισήγαγαν τους όρους αξονικώς άγον (axial led), και πολικώς άγον (polar led), ανάλογα με το αν η άγουσα συνάρτηση διαταραχής για $l = |m|$ είναι αξονική ή πολική. Για άρτιο m , οι polar led εξισώσεις έχουν άρτιο parity και οι axial περιττό, ενώ για περιττό m , ισχύουν ακριβώς τα αντίθετα. Η περίπτωση $m = 0$, (αξονικά συμμετρική, axisymmetric), είναι ιδιάζουσα, μια και δεν υπάρχουν αξονικές εξισώσεις για $l = 0$, παρά μόνο πολικές.

Τα παραπάνω γίνονται πιο κατανοητά αν γράψουμε το σύστημα των εξισώσεων ως εξής, όπου με ε συμβολίζουμε ποσότητες πρώτης τάξης, ως προς περιστροφή,

$$P_0 + \varepsilon i m P_0 + \varepsilon A_1 = 0 \quad (4.13)$$

$$A_1 + \varepsilon i m A_1 + \varepsilon P_0 + \varepsilon P_2 = 0 \quad (4.14)$$

$$P_1 + \varepsilon i m P_1 + \varepsilon A_2 = 0 \quad (4.15)$$

$$A_2 + \varepsilon i m A_2 + \varepsilon P_1 + \varepsilon P_3 = 0 \quad (4.16)$$

$$P_2 + \varepsilon i m P_2 + \varepsilon A_1 + \varepsilon A_3 = 0 \quad (4.17)$$

$$A_3 + \varepsilon i m A_3 + \varepsilon P_2 + \varepsilon P_4 = 0 \quad (4.18)$$

$$P_3 + \varepsilon i m P_3 + \varepsilon A_2 + \varepsilon A_4 = 0 \quad (4.19)$$

$$A_4 + \varepsilon i m A_4 + \varepsilon P_3 + \varepsilon P_5 = 0 \quad (4.20)$$

$$P_4 + \varepsilon i m P_4 + \varepsilon A_3 + \varepsilon A_5 = 0 \quad (4.21)$$

:

Όπως εύκολα φαίνεται, το σύστημα των συζευγμένων διαφορικών εξισώσεων

χωρίζεται σε δύο υποσυστήματα, που είναι ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, δηλαδή δεν αλληλεπιδρούν και δεν ανταλλάσσουν πληροφορίες και ενέργεια. Το ένα παριστάνεται με τα κόκκινα και κανονικά γράμματα ενώ το άλλο με τα μπλε και πλάγια (italics). Επιπλέον, φαίνεται καθαρά, ότι αναλόγως σε ποιά τιμή του σφαιρικού αρμονικού δείκτη l θα αποκόψουμε το σύστημα, χάνεται η επίδραση μιας εξίσωσης ενός των δύο υποσυστημάτων που έχουμε. Έτσι, π.χ. αν αποκόψουμε το σύστημα στην πολική εξίσωση με $l = 4$, όπως κάναμε παραπάνω, χάνεται η επίδραση στο σύστημα των εξισώσεων από της αξονικής εξίσωσης με $l = 5$ δηλαδή της A_5 . Αν είχαμε αποκόψει το σύστημα στην αξονική εξίσωση με $l = 4$, θα είχε χαθεί η επίδραση της πολικής εξίσωσης με $l = 5$ δηλαδή της P_5 κ.ο.κ. Όσον αφορά την επίδραση στην ακρίβεια των αποτελεσμάτων από την αποκοπή όρων του συστήματος, πρέπει να σημειώσουμε ότι όσο μεγαλώνει ο αρμονικός δείκτης l μειώνεται η ενέργεια που περιέχουν οι αντίστοιχοι αρμονικοί τρόποι ταλάντωσης και άρα μικραίνει η συνεισφορά τους.

Η μελέτη αυτού του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων θα γίνει εισάγοντας αρχικά δεδομένα στις διαταραγμένες συναρτήσεις με αρμονικό δείκτη $l = 2$, που είναι οι πιο ενδιαφέρουσες λόγω εκπομπής βαρυτικών χυμάτων και λύνοντάς το αριθμητικά από αρμονικό δείκτη $l = 0$, μέχρι κάποιο μέγιστο αρμονικό δείκτη l_{max} . Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι αν θέλουμε να διεγείρουμε και τα δύο είδη ταλαντώσεων, αξονικές και πολικές, θα πρέπει να δώσουμε αρχικές διαταραχές και στα δύο είδη τετραπολικών συναρτήσεων διαταραχών δηλαδή αξονικών και μια εκ των πολικών.

4.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Η χρήση του σχήματος Lax-Wendroff δύο βημάτων που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σε ένα αριθμητικό πλέγμα της τάξης των 200 σημείων στο εσωτερικό του αστεριού είναι ικανά να εξασφαλίσουν την σταθερότητα και σύγκλιση του αριθμητικού κώδικα με βάση το κριτήριο της παραγράφου 3.4.2 του προηγούμενου κεφαλαίου. Στο εσωτερικό του αστέρα τοποθετήσαμε 10 παρατηρητές σε ίσες αποστάσεις από το κέντρο και την επιφάνεια, για να παρακολουθούμε τις μεταβολές των συναρτήσεων διαταραχών κατά μήκος όλης της ακτίνας του αστέρα. Η χρησιμότητα των πολλών παρατηρητών έγκειται στην εμφάνιση του λεγόμενου συνεχούς φάσματος (continuous spectrum), σ' αυτήν την τάξη προσέγγισης. Η φυσική έκφραση αυτού του φαινομένου είναι ότι κάθε παρατηρητής στο εσωτερικό του αστεριού ‘αισθάνεται’ διαφορετική συχνότητα. Για πρώτη φορά ο Kojima [102] έθεσε το πρόβλημα της εμφάνισης συνεχούς φάσματος στην περίπτωση των αξονικών ταλαντώσεων των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων στη χαμηλότερη τάξη προσέγγισης, παίρνοντας δηλαδή μόνο τις αξονικές περιστροφικές διορθώσεις στην εξίσωση (4.11). Σ' αυτή την τάξη προσέγγισης, μελέτησε το πρόβλημα σαν πρόβλημα οριακών συνθηκών και συγχρίνοντας την εξίσωση ιδιοτιμών που περιγράφει αυτές τις ταλαντώσεις με την εξίσωση Rayleigh για την ασυμπίεστη ροή, συμπέρανε ότι το πρόβλημα

είναι εκφυλισμένο, λόγω του μηδενισμού του συντελεστή της παραγώγου μεγαλύτερης τάξης για ένα εύρος τιμών της ακτίνας στο εσωτερικό του αστέρα. Αργότερα οι Beyer & Kokkotas [97] απέδειξαν και μαθηματικά την ύπαρξη του συνεχούς φάσματος σ' αυτήν την τάξη προσέγγισης. Μπορεί με άλλα λόγια η εμφάνιση του συνεχούς φάσματος να είναι αποτέλεσμα της συγκεκριμένης προσέγγισης και να εξαφανίζεται αν αυξήσουμε την τάξη της προσέγγισης, αν λάβουμε δηλαδή υπ' όψιν όλους τους όρους της εξίσωσης (4.11). Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι η ύπαρξη του συνεχούς φάσματος δεν είναι ένα νέο φαινόμενο. Είναι γνωστό στην βιβλιογραφία των τέλειων ρευστών. Για παράδειγμα οι Schutz & Verdaguer [98, 99] μελετώντας τους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης διαφορικά περιστρεφόμενων πολυτροπικών δίσκων, χωρίς ιξώδες, εκτός από τις διακριτές οικογένειες ιδιοσυχνοτήτων p και r , παρατήρησαν την ύπαρξη μιας εκφυλισμένης περιοχής του φάσματος των ιδιοσυχνοτήτων. Παρόμοια εκφυλισμένα προβλήματα ιδιοτιμών εμφανίζονται και στην διαφορική περιστροφή των ρευστών [100, 101] ακόμα και στο πλάσμα. Το ανώμαλο σημείο, το σημείο στο οποίο εμφανίζεται ο εκφυλισμός, ονομάζεται συν-κινούμενο σημείο στην περίπτωση των περιστρεφόμενων δίσκων και χρίσιμο σημείο στην μηχανική των ρευστών.

Σε όλες τις προαναφερθήσες εργασίες για το φάσμα ταλαντώσεων των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων, η μελέτη έγινε ως πρόβλημα συνοριακών συνθηκών. Η δική μας μελέτη του παραπάνω συστήματος των εξισώσεων έγινε ως πρόβλημα αρχικών τιμών, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή δίνοντας δηλαδή αρχικές συνθήκες στις διαταραγμένες ποσότητες και παρακολουθώντας την εξέλιξη του συστήματος στη περιοχή του χρόνου. Το πλεονέκτημα που έχει αυτός ο τρόπος σε σχέση με την μελέτη ως πρόβλημα συνοριακών συνθηκών που έκανε ο Kojima είναι ότι δεν εμφανίζεται ο εκφυλισμός του φάσματος. Το χρονικό σήμα που καταγράφει ο κάθε παρατηρητής στο εσωτερικό του αστεριού με ένα μετασχηματισμό Fourier δίνει τις συχνότητες ταλαντώσεις του ρευστού. Έτσι, μπορούμε να συγχρίνουμε ποιες από αυτές είναι κοινές για όλους τους παρατηρητές και ποιες είναι διαφορετικές και οφείλονται στο συνεχές φάσμα.

Η μελέτη μας έγινε με βάση δύο παραμέτρους, το μέγιστο αρμονικό δείκτη στον οποίο αποκόπτουμε τις εξισώσεις, l_{\max} και την συμπαγότητα του αστεριού. Επιπλέον, ξεχωρίσαμε την αξονικά συμμετρική περίπτωση $m = 0$, όπου οι εξισώσεις απλοποιούνται σημαντικά, αλλά και για την γενική μη αξονικά συμμετρική περίπτωση όπου $m \neq 0$, που είναι αστροφυσικά πιο ενδιαφέρουσα λόγω της ιδιοσυχνότητας r . Χρησιμοποιήσαμε ένα σχετικιστικό πολυτροπικό αστέρι ίδιο με αυτό των Font et. al. [87] με κεντρική πυκνότητα $\epsilon_c = 7.914 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$, πολυτροπική σταθερά $K = 217.86 \text{ km}^2$ και πολυτροπικό εκθέτη $\Gamma = 2$. Με τα δεδομένα αυτά το αστέρι που προκύπτει έχει μάζα $M = 1.4M_\odot$, ακτίνα $R = 14.15 \text{ km}$ και έχει ταχύτητα Kepler $\Omega_K = 8141 \text{ s}^{-1}$. Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής που δώσαμε στον αστέρα είναι $\Omega = 4230 \text{ s}^{-1}$ που αντιστοιχεί σε τιμή της παραμέτρου $\epsilon = \Omega/\Omega_K = 0.5223$.

Πίνακας 4.1: Οι συχνότητες των f^0 και p^0 modes σαν συνάρτηση του μέγιστου αριθμού συζεύξεων l_{\max} για το σχετικιστικό πολυτροπικό αστέρι με μάζα $1.4M_{\odot}$ και ακτίνα $R = 14.15$ km. Η παράμετρος περιστροφής είναι $\varepsilon = 0.5223$. Οι συχνότητες δίνονται σε Hz. Η ιδιοσυχνότητα f και οι πρώτες p έχουν τις μεγαλύτερες σε τάξη διορθώσεις σε λόγω της περιστροφής. Για μέγιστο αριθμό συζεύξεων $l_{\max} = 3$, οι συχνότητες έχουν συγκλίνει.

l_{\max}	f^0	p_1^0	p_2^0	p_3^0	p_4^0
0	2687	4551	6344	8111	9867
1	2787	4610	6386	8144	9894
2	2795	4613	6387	8145	9895
3	2796	4613	6387	8145	9895

4.2.1 Αξονικά συμμετρικές $m = 0$

Ας προχωρήσουμε πρώτα στην ανάλυση των αποτελεσμάτων στην αξονικά συμμετρική περίπτωση, όπου δηλαδή $m = 0$. Αρχικά μελετήσαμε την επίδραση της περιστροφής στις συχνότητες των (ημι)ακτινικών κανονικών τρόπων ταλάντωσης δηλαδή του f^0 και των πρώτων p^0 . Στον πίνακα 4.1 φαίνονται οι συχνότητες αυτών των ιδιοσυχνοτήτων σαν συνάρτηση του μέγιστου αριθμού των συζεύξεων που θεωρήσαμε l_{\max} . Για $l_{\max} = 0$, δεν έχουμε διορθώσεις λόγω περιστροφής του αστέρα οι συχνότητες δηλαδή είναι οι αυτές του μη περιστρεφόμενου αστέρα. Για $l_{\max} = 1$, οι πολικές εξισώσεις αλληλεπιδρούν με τις αξονικές και γι' αυτό παρατηρείται μια μετατόπιση των συχνοτήτων προς μεγαλύτερες τιμές. Η μετατόπιση είναι της τάξης του 3.7% για την ιδιοσυχνότητα f , 1.3% για τον πρώτη ιδιοσυχνότητα p και ολοένα και μικραίνει όσο αυξάνεται η τάξη και η συχνότητα του κανονικού τρόπου ταλάντωσης. Όσο αυξάνεται ο αριθμός των μέγιστων συζεύξεων l_{\max} , τόσο οι διορθώσεις μικραίνουν σε απόλυτη τιμή και οι συχνότητες συγκλίνουν προς μια τιμή.

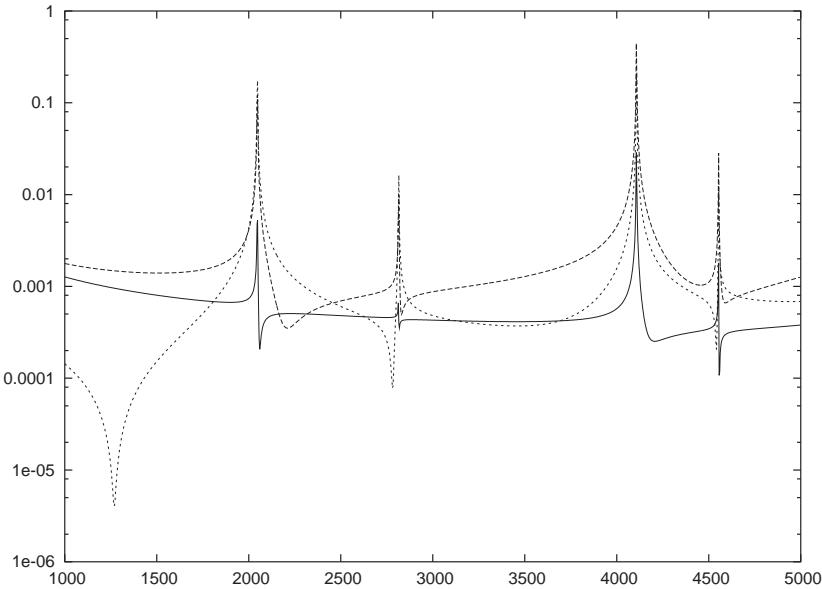
Το συνεχές φάσμα, όπως προαναφέρθηκε, έχει μελετηθεί χυρίως ως πρόβλημα συνοριακών τιμών, όπου εμφανίζεται σαν εκψυλισμός μιας περιοχής συχνοτήτων. Η εμφάνισή του στο πρόβλημα των αρχικών τιμών που εξετάζουμε εδώ γίνεται με διαφορετικό τρόπο. Πιο συγκεκριμένα τοποθετώντας στο εσωτερικό του αστέρα έναν αριθμό παρατηρητών, και παίρνοντας τον μετασχηματισμό Fourier του χρονικού σήματος του κάθε παρατηρητή, βλέπουμε μια σειρά από συχνότητες. Κάποιες από αυτές είναι οι ιδιοσυχνότητες του αστρικού ρευστού οπότε είναι κοινές για όλους του παρατηρητές, ενώ κάποιες άλλες είναι διαφορετικές για κάθε παρατηρητή, και είναι η ταυτότητα του συνεχούς φάσματος στην περιοχή του χρόνου. Στα σήματα 4.1 και 4.2 φαίνεται ο μετασχηματισμός Fourier για τρεις παρατηρητές σε διαφορετικές θέσεις μέσα στο αστέρι. Είναι φανερή η ύπαρξη των κοινών κορυφών που αντιστοιχούν στην f και στις

πρώτες τρεις ιδιοσυχνότητες p αντίστοιχα, αλλά στην περιοχή κάτω του 1.5 kHz στο σχήμα 4.2 βλέπουμε την ύπαρξη τριών διαφορετικών κορυφών για καθέναν από τους παρατηρητές στο εσωτερικό του αστεριού. Μ' αυτόν τον τρόπο μπορούμε να προσδιορίσουμε και τα όρια του συνεχούς φάσματος, βάζοντας έναν παρατηρητή πολύ κοντά στο κέντρο του αστεριού και έναν πολύ κοντά στην επιφάνεια.

Στη συνέχεια, μελετήσαμε τις αδρανειακές (inertial) ή υβριδικές (hybrid) ιδιοσυχνότητες, που είναι χαμηλοσυγχρονικές με συχνότητες κάτω του 1.5 kHz. Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυση των αποτελεσμάτων όμως θέλαμε να αναφερθούμε σε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες όσον αφορά την μελέτη των φασμάτων Fourier αυτών των ιδιοσυχνοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, από το μετασχηματισμό Fourier των χρονοσημάτων των παρατηρητών στο εσωτερικό του αστέρα, στην περιοχή κάτω των 1.5 kHz εμφανίζονται μια σειρά από κορυφές που δεν σημαίνει αναγκαστικά ότι όλες ανήκουν σε κάποια φυσική υπαρκτή ιδιοσυχνότητα. Αυτές που αντιστοιχούν σε μια πραγματική φυσική ιδιοσυχνότητα μπορούμε να τις ξεχωρίσουμε εύκολα, γιατί εμφανίζονται όσο κι αν αυξήσουμε το μέγιστο αριθμό συζεύξεων l_{\max} . Αντίθετα οι ‘πλασματικές’ κορυφές, αυτές δηλαδή που δεν αντιστοιχούν σε μια πραγματική φυσική ιδιοσυχνότητα αλλά είναι αριθμητικά λάθη, μια εμφανίζονται και μια χάνονται καθώς μεταβάλλεται ο μέγιστος αριθμός συζεύξεων. Αυτό φαίνεται καθαρά στο σχήμα 4.3 όπου σχεδιάζουμε τις υβριδικές-αδρανειακές ιδιοσυχνότητες αλλά και όλες τις ιδιοσυχνότητες που εμφανίζονται για κάθε l από $l_{\max} = 2$ έως $l_{\max} = 5$. Στο διάγραμμα αυτό οι σκιασμένες περιοχές αντιστοιχούν στις περιοχές τους συνεχούς φάσματος, που εμφανίζεται και σ' αυτήν την τάξη προσέγγισης. Αριστερά και δεξιά του συνεχούς φάσματος εμφανίζονται διάφορες ‘πλασματικές’ ιδιοσυχνότητες, οι οποίες μάλιστα είναι πυκνότερες κοντά στα όρια του συνεχούς φάσματος, αλλά οι πραγματικές ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν στις αδρανειακές ιδιοσυχνότητες είναι αυτοί που σημειώνονται με i_n^l , όπου l είναι ο αριθμός του μέγιστου αρμονικού δείκτη l_{\max} όπου εμφανίζονται για πρώτη φορά και n είναι ο αύξων αριθμός του. Έτσι, για παράδειγμα όπως βλέπουμε στο σχήμα για $l_{\max} = 3$ εμφανίζεται μόνο ο i_1^3 , ενώ για $l_{\max} = 5$ εμφανίζονται ο i_1^5 και ο i_2^5 .

Με βάση αυτό το κριτήριο στα επόμενα διαγράμματα έχουμε σχεδιάσει μόνο τις πραγματικές αδρανειακές ιδιοσυχνότητες, σαν συνάρτηση της συμπαγότητας του αστέρα. Όπως φαίνεται λοιπόν από το πρώτο διάγραμμα του σχήματος 4.4, για $l_{\max} = 3$ έχουμε την εμφάνιση μιας ζώνης συνεχούς φάσματος αλλά και μιας αδρανειακής ιδιοσυχνότητας της i_1^3 . Η ζώνη του συνεχούς φάσματος αυξάνει σε πλάτος με την αύξηση της συμπαγότητας του αστέρα και από την τιμή $M/R \simeq 0.17$ η ιδιοσυχνότητα δεν εμφανίζεται πλέον, γιατί φτάνει στα όρια της ζώνης του συνεχούς φάσματος και χάνεται μέσα σε αυτήν.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι για $l_{\max} = 4$ έχουμε την εμφάνιση και μιας δεύτερης αδρανειακής ιδιοσυχνότητας της i_1^4 αλλά ταυτόχρονα και μιας δεύτερης ζώνης συνεχούς φάσματος. Η καινούργια αυτή ιδιοσυχνότητα δεν είναι τόσο ‘ανθεκτική’ και βλέπουμε ότι για $M/R \simeq 0.11$ εξαφανίζεται κι αυτή μέσα στη ζώνη του συνεχούς φάσματος. Επίσης είναι εμφανές ότι καμμιά από τις δύο



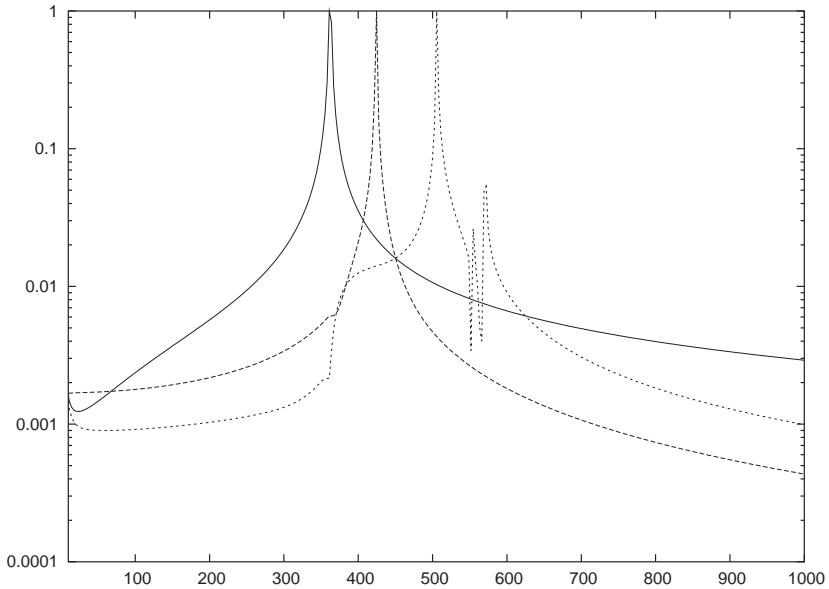
Σχήμα 4.1: Μετασχηματισμός Fourier των χρονοσημάτων της πολικής συνάρτησης διαταραχής H για τρεις διαφορετικούς παρατηρητές στο εσωτερικό του αστέρα. Φαίνονται οι κοινές κορυφές που αντιστοιχούν στις φυσικές ιδιοσυχνότητες f και των τριών πρώτων ιδιοσυχνοτήτων p . Στον οριζόντιο άξονα είναι σχεδιασμένη η συχνότητα σε Hz ενώ στον κατακόρυφο άξονα οι μονάδες είναι τυχαίες.

ζώνες συνεχούς φάσματος δεν βρίσκονται στην ίδια θέση με την αντίστοιχη για $l_{\max} = 3$, με άλλα λόγια και οι δύο έχουν μετατοπιστεί.

Ανεβάζοντας το δείκτη των μέγιστων συζεύξεων κατά ένα ακόμα δηλαδή $l_{\max} = 5$, έχουμε την εμφάνιση δύο καινούργιων αδρανειακών ιδιοσυχνοτήτων των i_1^5 και i_2^5 αλλά καμμίας καινούργιας ζώνης συνεχούς φάσματος. Οι δύο υπάρχουσες ζώνες απλώς μετατοπίζονται. Από τις δύο καινούργιες ιδιοσυχνότητες τώρα, η i_2^5 εξαφανίζεται μέσα στη ζώνη συνεχούς φάσματος για $M/R \simeq 0.07$, ενώ η i_2^5 παραμένει για αρκετά υψηλές τιμές συμπαγότητας. Ένα άλλο σημείο άξιο αναφοράς στο διάγραμμα αυτό είναι ότι η μια από τις δύο ζώνες του συνεχούς φάσματος καλύπτει σε όλο σχεδόν το εύρος της συμπαγότητας την i_1^3 ιδιοσυχνότητα, η οποία παρόλα αυτά συνεχίζει να υπάρχει.

Τέλος, για μέγιστο αριθμό συζεύξεων $l_{\max} = 6$, έχουμε την εμφάνιση δύο καινούργιων αδρανειακών ιδιοσυχνοτήτων των i_1^6 και i_2^6 και μιας ακόμα ζώνης συνεχούς φάσματος, με ταυτόχρονη μετατόπιση όλων σε σχέση με την προηγούμενη περίπτωση. Από τις δύο καινούργιες ιδιοσυχνότητες η i_1^6 επιζεί μέχρι $M/R \simeq 0.11$, ενώ η i_2^6 λιγότερο για $M/R \simeq 0.06$.

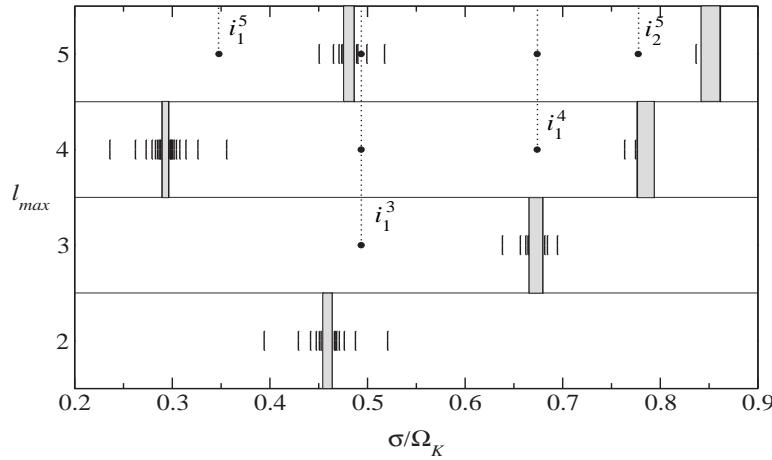
Όπως εύκολα παρατηρεί κανείς από τα διαγράμματα το πλάτος του συνεχούς φάσματος αυξάνει όσο πιο συμπαγές είναι το αστέρι και εμποδίζει την εμφάνιση καινούργιων αδρανειακών ιδιοσυχνοτήτων. Επιπλέον, είναι φανερό



Σχήμα 4.2: Μετασχηματισμός Fourier των χρονοσημάτων της αξονικής συνάρτησης διαταραχής U για τρεις διαφορετικούς παρατηρητές μέσα στον αστέρα και για συχνότητες χαμηλότερες του 1 kHz. Φαίνονται καθαρά οι διακριτές κορυφές για τους τρεις παρατηρητές που αντιστοιχούν στη διαφορετική συχνότητα που παρατηρεί ο καθένας. Αυτός είναι ο τρόπος εμφάνισης του συνεχούς φάσματος στη μελέτη του προβλήματος ως πρόβλημα αρχικών συνθηκών.

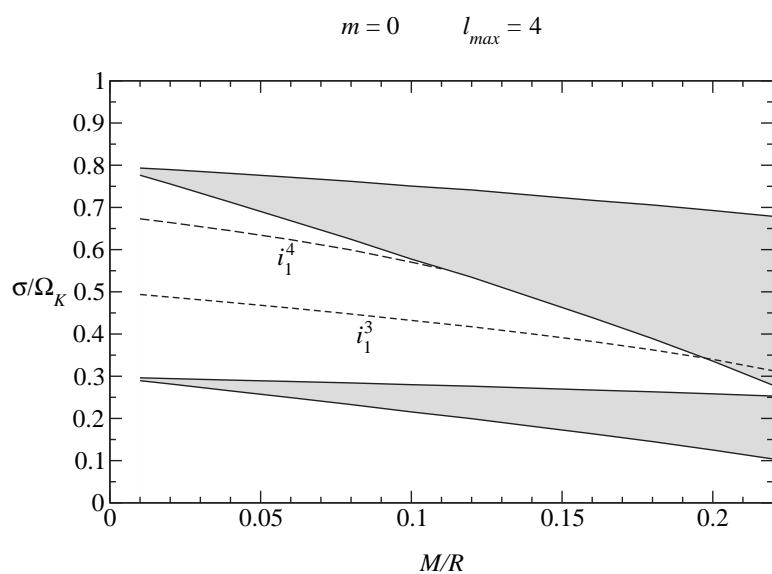
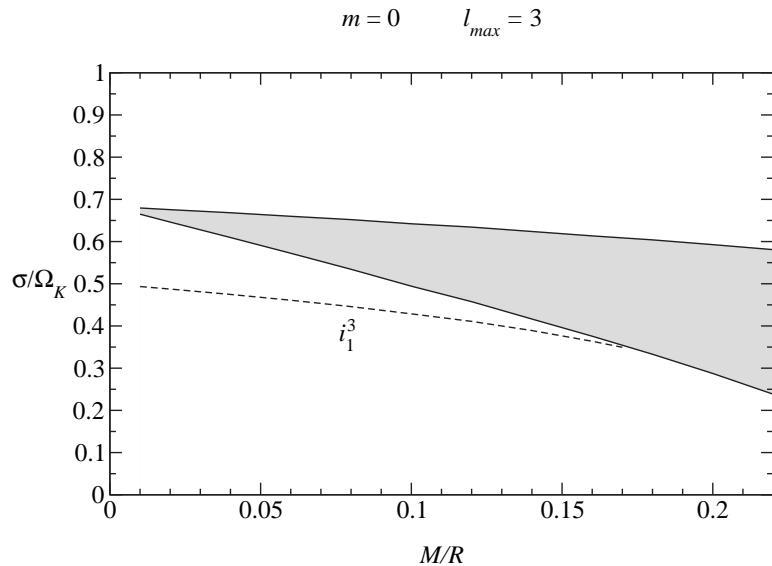
ότι κάποιες άλλες αδρανειακές ιδιοσυχνότητες εξαφανίζονται από ένα όριο συμπαγότητας και πάνω και μόνο δύο από αυτές οι i_1^3 και i_1^5 παραμένουν για όλη την κλίμακα της συμπαγότητας. Μάλιστα η πρώτη από αυτές παραμένει ακόμα κι όταν τα όρια του συνεχούς φάσματος περιλάβουν την συχνότητά της, ενώ η δεύτερη είναι πάντα εκτός των ορίων του συνεχούς φάσματος.

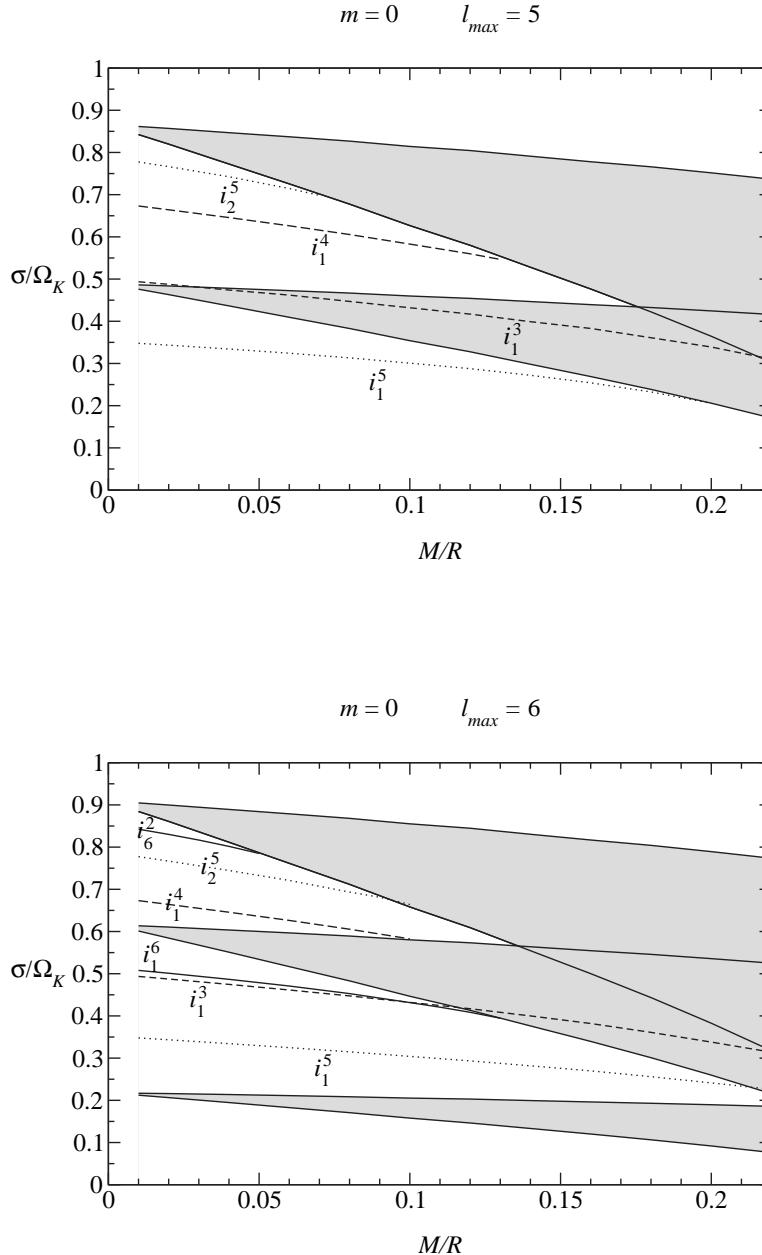
Το ερώτημα που γεννιέται μετά από την μελέτη αυτών των διαγραμμάτων είναι γιατί κάποιες ιδιοσυχνότητες δεν μπορούν να εμφανιστούν και να 'ζήσουν' μέσα στο συνεχές φάσμα ενώ άλλες εμφανίζονται. Υπάρχουν κάποιες προτιμήσεις ιδιοσυχνότητες ή μήπως η απάντηση βρίσκεται αλλού. Η εξήγηση που δίνουμε είναι φαινομενολογική και είναι η ακόλουθη. Μια ιδιοσυχνότητα που πρόκειται να εμφανιστεί πρώτη φορά για ένα συγκεκριμένο αριθμό μέγιστων συζεύξεων, π.χ. $l_{\max} = 3$, μπορεί να εμφανιστεί μόνο εάν η συχνότητά της δεν πέφτει μέσα στη συχνοτική περιοχή του συνεχούς φάσματος για τη συγκεκριμένη τιμή l_{\max} . Από εκεί και πέρα, αν αυξήσουμε τον αριθμό μέγιστων συζεύξεων l_{\max} δεν είναι η ιδιοσυχνότητα που μετατοπίζεται, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, αλλά το συνεχές φάσμα. Έτσι αν το συνεχές φάσμα πέσει σε περιοχή που είναι να εμφανιστεί μια καινούργια ιδιοσυχνότητα αυτή δεν μπορεί να εμφανιστεί, αν όμως πέσει σε περιοχή που ήδη υπάρχει κάποια που προέρχεται από χαμηλότερη τιμή του l_{\max} , τότε αυτή μπορεί να συνεχίσει να



Σχήμα 4.3: Ιδιοσυχνότητες που εμφανίζονται για διαφορετικές τιμές της τιμής μέγιστων συζεύξεων l_{\max} για αστρικό μοντέλο με $M/R = 0.01$. Γύρω από κάθε ζώνη συνεχούς φάσματος, που είναι οι περιοχές με γκρι σκίαση υπάρχουν πολλές ιδιοσυχνότητες που εμφανίζονται και εξαφανίζονται όσο αυξάνει το l_{\max} . Οι πραγματικές ιδιοσυχνότητες που αντιστοιχούν σε φυσικές ταλαντώσεις συμβολίζονται με i_n^l , και παραμένουν στη θέση τους όσο αυξάνεται ο αριθμός των μέγιστων συζεύξεων l_{\max} .

υπάρχει και μέσα σ' αυτό.





Σχήμα 4.4: Το συνεχές φάσμα και οι αδρανειακές ιδιοσυχνότητες (inertial modes) σαν συνάρτηση της συμπαγότητας M/R για την αξονικά συμμετρική περίπτωση $m = 0$ για διαφορετικές τιμές του μεγίστου αριθμού συζεύξεων l_{max} . Μόνο οι i_1^3 και i_1^5 ιδιοσυχνότητες παραμένουν για όλο το διάστημα συμπαγότητας ενώ όλες οι άλλες εξαφανίζονται μέσα στο συνεχές φάσμα.

4.2.2 Μη αξονικά συμμετρικές $m \neq 0$

Η περίπτωση των μη αξονικά συμμετρικών διαταραχών είναι πιο ενδιαφέρουσα λόγω της $l = m = 2$ ιδιοσυχνότητας r του αστρικού ρευστού. Όπως είναι γνωστό στη Νευτώνεια θεωρία η ιδιοσυχνότητα αυτή έχει μια διακεχιμένη τιμή, που δίνεται στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς και στην χαμηλότερη τάξη προσέγγισης αναλυτικά από τη σχέση,

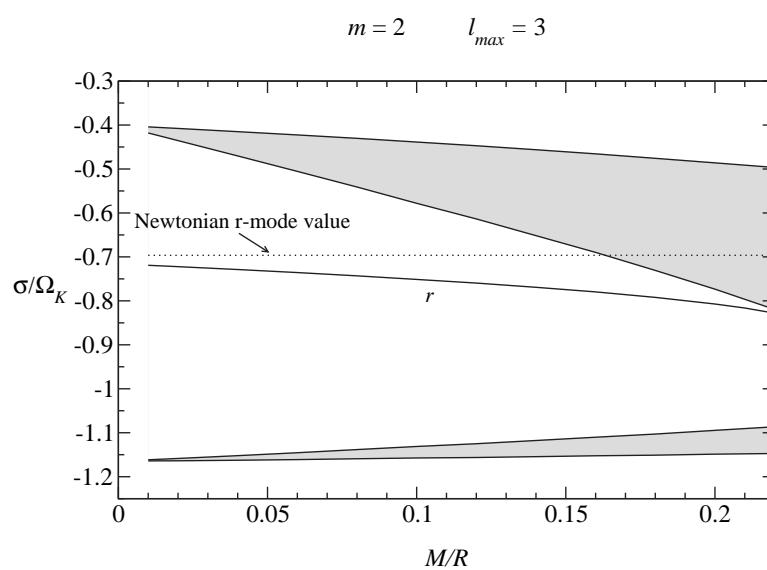
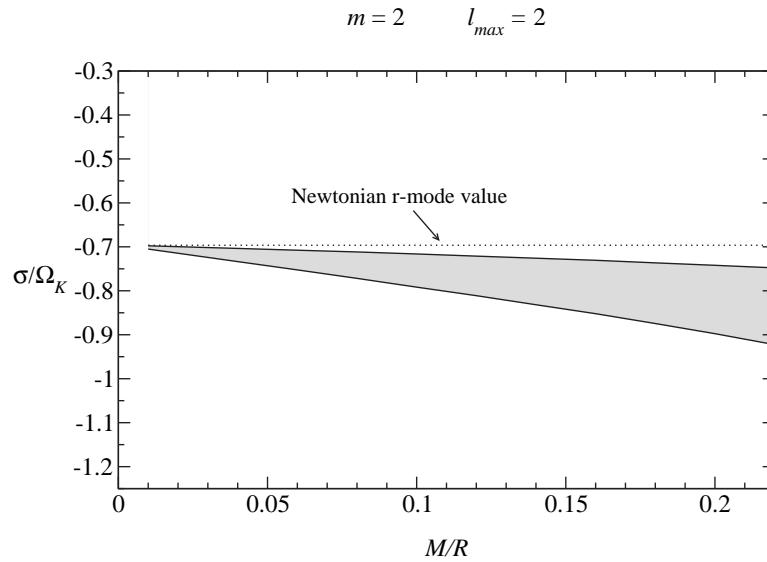
$$\sigma = -m\Omega \left(1 - \frac{2}{l(l+1)} \right) \quad (4.22)$$

Στην σχετικιστική περίπτωση τα πράγματα όμως είναι αρκετά διαφορετικά. Παρόμοιος υπολογισμός για την τιμή της ιδιοσυχνότητας r δίνει την αναλυτική σχέση,

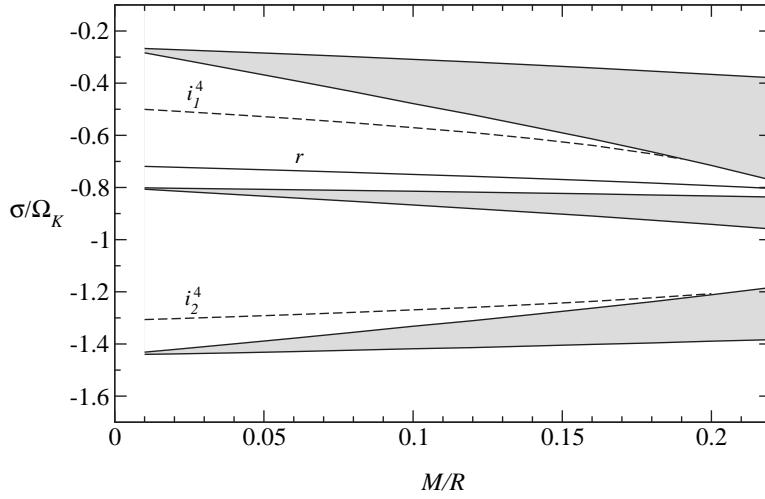
$$\sigma = -m\Omega \left[1 - \frac{2}{l(l+1)} \left(1 - \frac{\varpi(r)}{\Omega} \right) \right] \quad (4.23)$$

οπότε όπως είναι φανερό αντί για μια συχνότητα έχουν πλέον ένα ολόκληρο φάσμα συχνοτήτων με όρια που καθορίζονται από τις τιμές του ω στο κέντρο και στην επιφάνεια του αστέρα. Ο παραπάνω υπολογισμός έγινε με την υπόθεση ότι οι συζεύξεις με τις πολικές εξισώσεις διαταραχών είναι ανώτερης τάξης οπότε μπορούμε να τις αγνοήσουμε. Αυτό στην περίπτωση των βαροτροπικών διαταραχών που εξετάζουμε δεν ισχύει όπως αποδείχτηκε από τους Lockitch et. al. [89] γιατί στο μη περιστρεφόμενο όριο πρέπει να μην μηδενίζεται η συνεισφορά των πολικών (polar) εξισώσεων. Με άλλα λόγια στην βαροτροπική περίπτωση η ιδιοσυχνότητα r , δεν είναι καθαρά αξονική αλλά περιέχει και πολικές συνιστώσες, γι' αυτό και οι Lockitch et. al. χρησιμοποιούν τον όρο αξονικά άγον υβριδική, (axial-led hybrid) για τον ιδιοσυχνότητα r στην βαροτροπική περίπτωση. Τέλος πρέπει να σημειωθεί ότι στη μη αξονικά συμμετρική περίπτωση έχουμε το φαινόμενο της διάσπασης (splitting) των ιδιοσυχνοτήτων, δηλαδή για κάθε τιμή του αρμονικού δείκτη l έχουμε $2l$ διαφορετικές ιδιοσυχνότητες τις μισές θετικές και τις άλλες μισές αρνητικές, φαινόμενο ανάλογο με το Zeeman splitting στην κβαντομηχανική.

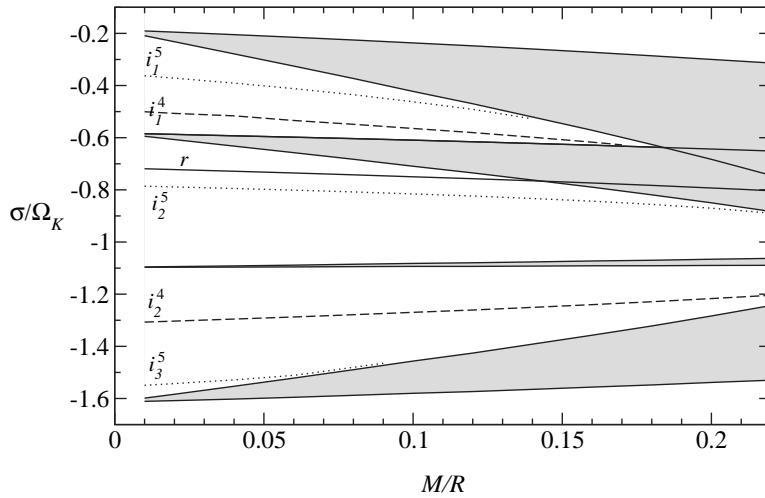
Τα αποτελέσματα των αριθμητικών προσομοιώσεων για την μη αξονικά συμμετρική περίπτωση φαίνονται στα σχήματα 4.5. Για $l_{\max} = 2$ έχουμε την εμφάνιση μόνο μιας ζώνης συνεχούς φάσματος η οποία αυξάνει σε πλάτος όσο πιο συμπαγής είναι ο αστέρας, ακριβώς όπως και την μη αξονικά συμμετρική περίπτωση και καμίας ιδιοσυχνότητας. Αν εισάγουμε όμως και τις συζεύξεις με τις πολικές συναρτήσεις διαταραχών για $l_{\max} = 3$ τα πράγματα αλλάζουν δραστικά όπως φαίνεται στο επόμενο διάγραμμα. Βλέπουμε την εμφάνιση και δεύτερης ζώνης συνεχούς φάσματος, αλλά ταυτόχρονα εμφανίζεται και μια υβριδική ιδιοσυχνότητα, που είναι το σχετικιστικό ανάλογο της $m = 2$ ιδιοσυχνότητας r . Σύμφωνα με την ονομασία που δίνουμε στις ιδιοσυχνότητες αυτή η ιδιοσυχνότητα r είναι για μας η i_1^3 ιδιοσυχνότητα. Αν στην συνέχεια αυξήσουμε και πάλι τον αριθμό μέγιστων συζεύξεων σε $l_{\max} = 4$ ή $l_{\max} = 5$ το μόνο



$m = 2 \quad l_{max} = 4$



$m = 2 \quad l_{max} = 5$



Σχήμα 4.5: Το συνεχές φάσμα και οι αδρανειακές ιδιοσυχνότητες r σαν συνάρτηση της συμπαγότητας M/R για την μη αξονικά συμμετρική περίπτωση $m = 2$, για διαφορετικές τιμές του μεγίστου αριθμού συζεύξεων l_{max} . Επιπλέον έχουμε σχεδιάσει και την Νευτώνια τιμή της ιδιοσυχνότητας r από τη σχέση (4.22) με εστιγμένη γραμμή. Ο σχετικιστικός ισοδύναμος της ιδιοσυχνότητας r εμφανίζεται μόνο για $l_{max} = 3$ έξω από τη ζώνη του συνεχούς φάσματος, καθώς η ζώνη αυτή μετατοπίζεται από τη θέση της για $l_{max} = 2$. Μόνο η ιδιοσυχνότητα r και οι i_1^4 και i_2^5 παραμένουν για όλο το διάστημα συμπαγότητας.

που αλλάζει είναι ότι εμφανίζεται κάθε φορά μια καινούργια ζώνη συνεχούς φάσματος με ταυτόχρονη μετατόπιση των ζωνών από τα προηγούμενα l_{\max} αλλά και κάποιες επιπλέον ιδιοσυχνότητες. Η ιδιοσυχνότητα r όμως παραμένει σε όλη την περιοχή συμπαγότητας ακόμα και μέσα στην περιοχή του συνεχούς φάσματος, καθώς επίσης και οι i_2^4 και i_2^5 ιδιοσυχνότητες.

Επιπλέον φαίνεται στα διαγράμματα ότι και στη μη αξονικά συμμετρική περίπτωση όσο αυξάνεται η συμπαγότητα του αστέρα τόσο αυξάνεται και το πλάτος της ζώνης του συνεχούς φάσματος με αποτέλεσμα μερικές ιδιοσυχνότητες να ‘καταστρέφονται’ πριν εμφανιστούν. Στο όριο όπου $l_{\max} \rightarrow \infty$ το συνεχές φάσμα υπάρχει θεωρητικά καλύψει όλο το φάσμα συχνοτήτων, χωρίς αυτό να σημαίνει την εξαφάνιση όλων των ιδιοσυχνοτήτων, όπως εξηγήσαμε στην αξονικά συμμετρική περίπτωση.

Για να ελέγξουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας, συγχρίναμε τις συχνότητες των r ιδιοσυχνοτήτων της δικής μας γραμμικής προσέγγισης με τις τιμές που δίνουν οι Font et. al [87] στη μη γραμμική προσέγγιση για δύο διαφορετικές τιμές γωνιακής ταχύτητας του αστέρα. Έτσι για τον αστέρα με μάζα $M = 1.4 M_{\odot}$ και ακτίνα $R = 14.15$ km και για γωνιακή ταχύτητα $\Omega = 2180$ s $^{-1}$ η τιμή της ιδιοσυχνοτήτας r στη μη γραμμική προσέγγιση είναι 500 Hz ενώ στην γραμμική προσέγγιση είναι 512 Hz, μια διαφορά της τάξης του 2.5%. Για τον ίδιο αστέρα και για γωνιακή ταχύτητα $\Omega = 4986$ s $^{-1}$ η τιμή της ιδιοσυχνοτήτας r στη μη γραμμική προσέγγιση είναι 1030 Hz ενώ στην γραμμική προσέγγιση είναι 1172 Hz, μια διαφορά της τάξης του 14%. Η απόκλιση των συχνοτήτων των δύο προσέγγισεων στην δεύτερη περίπτωση είναι μεγαλύτερη, γεγονός αναμενόμενο λόγω της μεγαλύτερης γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του αστέρα. Για να βελτιώσουμε την ακρίβεια της γραμμικής προσέγγισης σε σχέση με τα μη γραμμικά αποτελέσματα για μεγαλύτερες γωνιακές ταχύτητες περιστροφής του αστέρα, υπάρχει πρόταση να προχωρήσουμε σε ανάπτυγμα δεύτερης τάξης ως προς την παράμετρο περιστροφής ϵ , τόσο στο στατικό μοντέλο όσο και στις εξισώσεις διαταραχών.

4.3 Συμπεράσματα

Σ' αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιήσαμε την αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος των εξισώσεων που περιγράφουν την συμπεριφορά ενός διαταραγμένου βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, αγνοώντας την επίδραση των διαταραχών του χωρόχρονου. Τα συμπεράσματα που βγάλαμε είναι πολλαπλά και ιδιαίτερα χρήσιμα για την κατανόηση των ιδιοταλαντώσεων των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Επικεντρώσαμε τη μελέτη μας στις ιδιοταλαντώσεις αυτές στα πλαίσια της προσέγγισης Cowling και μελετήσαμε για πρώτη φορά την επίδραση της περιστροφής του αστέρα στις συχνότητές τους. Μελετήσαμε ξεχωριστά τις δύο κύριες περιπτώσεις

- Την αξονικά συμμετρική περίπτωση $m = 0$, και

- την μη αξονικά συμμετρική $m \neq 0$.

Το σύστημα των εξισώσεων αρχικά μελετήθηκε για διαφορετικούς αριθμούς μέγιστων συζεύξεων l_{\max} . Διαπιστώσαμε ότι οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων συγκλίνουν σε μια τιμή με την αύξηση του μέγιστου αυτού αριθμού. Στη συνέχεια παραθέσαμε τα αποτέλεσματα με τη μορφή διαγραμμάτων για τους διαφορετικούς αριθμούς μέγιστων συζεύξεων l_{\max} , όπου σχεδιάσαμε τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων σαν συνάρτηση της συμπαγότητας του αστέρα. Από αυτά τα διαγράμματα βγάλαμε τα ακόλουθα τρία βασικά συμπεράσματα για την συμπεριφορά του συνεχούς φάσματος που ισχύουν και στις δύο παραπάνω περιπτώσεις.

1. Το πλάτος της ζώνης του συνεχούς φάσματος αυξάνει όσο πιο συμπαγής είναι ο αστέρας νετρονίων.
2. Η θέση της ζώνης του συνεχούς φάσματος στο εσωτερικό του αστέρα αλλάζει με την αλλαγή του μέγιστου αριθμού συζεύξεων l_{\max} .
3. Οι θέσεις των διάφορων ζωνών του συνεχούς φάσματος στο εσωτερικό του αστέρα μπορούν να αλληλεπικαλύπτονται.

Επιπλέον ένα σημαντικό και εξαιρετικά χρήσιμο συμπέρασμα αυτού του κεφαλαίου όσον αφορά το συνεχές φάσμα είναι ότι με την προσέγγιση στην περιοχή του χρόνου μπορούμε να μελετήσουμε αυτή την περιοχή και να δούμε χάποιες χαρακτηριστικές ιδιοσυχνότητες που ‘ζούνε’ εκεί μέσα. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με τις μελέτες που είχαν γίνει στο παρελθόν στη περιοχή συχνοτήτων στην οποία το συνεχές φάσμα εμφανίζεται σαν εκφυλισμός με αποτέλεσμα να είναι αδύνατη η μελέτη του.

Όσον αφορά την $l = m = 2$ ιδιοσυχνότητα r δείξαμε για πρώτη φορά η εισαγωγή των πολικών όρων σύζευξης $l = 3$ και $l = 1$, ευθύνεται για την συνεχή ύπαρξη του σε όλο το φάσμα των συμπαγοτήτων. Οι Ruoff & Kokkotas [95, 96] μελετώντας μόνο το αξονικό κομμάτι των εξισώσεων είχαν παρατηρήσει ότι η ιδιοσυχνότητα r για την πολυτροπική εξίσωση κατάστασης δεν εμφανίζεται για όλους τους πολυτροπικούς δείκτες Γ και μάλιστα ούτε για την πολυτροπική εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε σε αυτήν τη μελέτη. Αποδείξαμε με αυτόν τον τρόπο ότι το φαινόμενο αυτό ήταν αποτέλεσμα της περιορισμένης προσέγγισης που είχαν υφεωρήσει. Αντίστοιχα αποτελέσματα με τα δικά μας, έβγαλαν αργότερα και άλλοι ερευνητές στην εργασία [94].

Τα αποτελέσματα της δουλειάς αυτής, δίνουν απάντηση και σε ένα άλλο βασικό ερώτημα της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας σε σχέση με τη Νευτώνεια θεωρία. Στο ερώτημα αν υπάρχουν ή όχι στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας εκτός από το συνεχές φάσμα και διακριτές περιστροφικές ιδιοσυχνότητες r . Το ερώτημα αυτό είναι πολύ σημαντικό σε σχέση με τα προτεινόμενα σενάρια εξέλιξης περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων με βάση την αστάθεια CFS της ιδιοσυχνότητας r , που αναφέρθηκαν στην εισαγωγή. Έτσι, αν για παράδειγμα δεν υπήρχαν διακριτές περιστροφικές ιδιοσυχνότητες

άμεση συνέπεια όταν να μην μπορεί να εφαρμοστεί κανένα από τα δύο σενάρια, μια και δεν όταν γνωρίζαμε σε αυτή την περίπτωση πώς συμπεριφέρονται οι μηχανισμοί απόσβεσης.

Ta αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες A2 και B2 όπως αναφέρεται στο βιογραφικό σημείωμα στο τέλος του παραρτήματος.

Κεφάλαιο 5

Νέα συνθήκη βαθμίδας

Σ' αυτό το κεφάλαιο θα γράψουμε τις εξισώσεις διαταραχών χρησιμοποιώντας μια άλλη συνθήκη βαθμίδας με απότερο σκοπό να γίνουν οι εξισώσεις που θα προκύψουν απλούστερες για αριθμητική εξέλιξη. Η συνθήκη βαθμίδας που θα επιλέξουμε, χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά σε μη περιστρεφόμενο αστέρα από τους L. Battiston, P. Cazzola, L. Lucaroni [45, 46, 47, 48, 49, 50] και θα αναφερόμαστε από εδώ και πέρα σ' αυτήν ως βαθμίδα BCL (BCL gauge) από τα αρχικά των ονομάτων των τριών συγγραφέων. Η διαφορά αυτής της βαθμίδας σε σχέση με τη Regge-Wheeler είναι ότι αντί να μηδενίζει τις συναρτήσεις διαταραχών $G, h_2, h_{0,p}, h_{1,p}$, (βλέπε κεφάλαιο 3 για την ανάλυση σε σφαιρικές αρμονικές) μηδενίζει και τις δύο γωνιακές συναρτήσεις διαταραχών K, G , και επίσης τις h_2, H_0 .

Στη περίπτωση μη περιστρεφόμενου αστέρα επειδή οι εξισώσεις των διαταραχών είναι απλούστερες, δεν υπάρχει κάποιο συγκριτικό πλεονέκτημα μεταξύ των δύο αυτών βαθμίδων. Έτσι, το μόνο ερωτηματικό που υπήρχε ήταν γιατί δεν μπορούσε να αναχθεί το σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τις πολικές διαταραχές ενός μη περιστρεφόμενου αστέρα που παρήγαγαν οι Chandrasekhar & Ferrari [30] στη διαγώνια συνθήκη βαθμίδας σε τέταρτης τάξης σύστημα, όπως στο αντίστοιχο σύστημα των εξισώσεων στη βαθμίδα Regge-Wheeler. Οι Ipser & Price το 1991 έδειξαν [34] ότι η διαγώνια συνθήκη βαθμίδας δεν ήταν πλήρως καθορισμένη γιατί είχε ένα βαθμό ελευθερίας παραπάνω ο οποίος έδινε μια επιπρόσθετη λύση, που όμως ήταν γραμμικώς εξαρτημένη από τις υπόλοιπες.

Στην περίπτωση όμως βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα, όπως θα διαπιστώσουμε στο κεφάλαιο αυτό, υπάρχουν συγκριτικά πλεονεκτήματα της συνθήκης βαθμίδας BCL σε σχέση με τη Regge-Wheeler. Το πρώτο είναι ότι οι εξισώσεις διαταραχών που προκύπτουν είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο, εκτός από μια, η οποία όμως με ένα απλό μετασχηματισμό μπορεί να γίνει κι αυτή πρώτης τάξης. Έτσι είναι πιο εύκολο να γραφούν σε μορφή κατάλληλη για αριθμητική εξέλιξη. Το δεύτερο είναι ότι οι εξισώσεις που προκύπτουν είναι συμμετρικές ως προς τις αξονικές και πολικές διαταραχές, με αποτέλεσμα να

είναι πιο εύκολος ο έλεγχος και η κατανόηση αυτών.

Θα προχωρήσουμε στην παραγωγή των εξισώσεων στην νέα αυτή συνθήκη βαθμίδας στην γενικότερη περίπτωση, υποθέτοντας μη βαροτροπικές διαταραχές. Σ' αυτήν την περίπτωση οι διαταραχές της πίεσης δp και της πυκνότητας ενέργειας δε συνδέονται μέσω της σχέσης,

$$\delta p = \frac{\Gamma_1 p}{p + \epsilon} \delta \epsilon + p' \xi^r \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - 1 \right) = \frac{\Gamma_1 p}{p + \epsilon} \delta \epsilon + (p + \epsilon) \nu' \xi^r \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma} - 1 \right) \quad (5.1)$$

όπου,

$$\Gamma = \frac{p + \epsilon}{p} \frac{dp}{d\epsilon}$$

είναι ο αδιαβατικός δείκτης του στατικού μοντέλου, Γ_1 είναι ο αδιαβατικός δείκτης των διαταραγμένων ποσοτήτων και ξ^r είναι η ακτινική συνιστώσα του διανύσματος διαταραχής (displacement vector). Σ' αυτήν την περίπτωση η ταχύτητα του ήχου δίνεται από τη σχέση,

$$C_s^2 = \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \frac{\delta p}{\delta \epsilon} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \frac{p'}{\epsilon'}. \quad (5.2)$$

Στο όριο των αδιαβατικών διαταραχών όπου $\Gamma = \Gamma_1$, η διαταραχή της πυκνότητας συνδέεται με αυτήν της πίεσης μέσω της ταχύτητας του ήχου (βλέπε 3.8). Η διαταραχή στην πυκνότητα προκύπτει από τη σχέση (5.1) και χρησιμοποιώντας την μεταβλητή της ενθαλπίας (3.12) εκφράζεται ως εξής,

$$\delta \epsilon = (p + \epsilon) C_s^{-2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l [H_{lm} - \xi_{lm}], \quad (5.3)$$

όπου έχουμε θέσει,

$$\xi_{lm} = \nu' \xi^r \left(1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right), \quad (5.4)$$

και επομένως το διάνυσμα διαταραχής έχει αναλυθεί σε σφαιρικές αρμονικές ως εξής,

$$\xi^r = \left[\nu' \left(1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right) \right]^{-1} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \xi_{lm} Y_{lm} \quad (5.5)$$

όπου και πάλι το άθροισμα ως προς τον αρμονικό δείκτη l , αρχίζει από το $l = 2$ (βλ. Κεφάλαιο 3).

Όπως είναι φανερό στη μη βαροτροπική περίπτωση, χρειαζόμαστε και μια επιπλέον εξισώση για το διάνυσμα διαταραχής $\xi(r, t)$, η οποία θα προκύψει από τη σχέση μεταξύ αυτού και της διαταραχής στην ταχύτητα,

$$\delta u_\mu = u^\nu h_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} u^\lambda \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\lambda} - \frac{1}{2} u_\mu u^\kappa u^\lambda h_{\kappa\lambda}, \quad (5.6)$$

η συνιστώσα r της οποίας δίνει,

$$\begin{aligned}\delta u_r &= u^t h_{rt} + u^\phi h_{r\phi} + g_{rr} \left(u^t \frac{\partial \xi^r}{\partial x^t} + u^\phi \frac{\partial \xi^r}{\partial x^\phi} \right) \\ \Rightarrow (\partial_t + \Omega \partial_\phi) \xi^r &= e^{-2\lambda} (e^\nu \delta u_r - h_{rt} - \Omega h_{r\phi})\end{aligned}\quad (5.7)$$

5.1 Ανάλυση σε σφαιρικές αρμονικές

Οι διαταραχές που δίνουμε στην συναλλοίωτη τετρα-ταχύτητα του αστρικού ρευστού έχουν τη μορφή,

$$\delta u_r = e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm} Y_{lm} \quad (5.8\alpha')$$

$$\delta u_\theta = e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(V_{lm} \frac{\partial}{\partial \theta} - U_{lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm} \quad (5.8\beta')$$

$$\delta u_\phi = e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(V_{lm} \frac{\partial}{\partial \phi} - U_{lm} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm} \quad (5.8\gamma')$$

Η διαταραχή της συνιστώσας της ταχύτητας ως προς το συντεταγμένο χρόνο t , θα προκύψει και πάλι από την διαταραχή της συνθήκης κανονικοποίησης της ταχύτητας (3.10) και είναι,

$$\delta u_t = \frac{1}{2} e^{-\nu} h_{tt} + \Omega e^{-\nu} h_{t\phi} - \Omega \delta u_\phi. \quad (5.9)$$

Οι διαταραχές των συνιστωσών του μετρικού τανυστή, μετά την ανάλυση σε σφαιρικές αρμονικές και την εφαρμογή της νέας συνθήκης βαθμίδας θα έχουν τη μορφή :

$$h_{tt} = -2\omega \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(h_{0a,lm}(r,t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + h_{0p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm} \quad (5.10\alpha')$$

$$h_{tr} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l H_{1,lm}(r,t) Y_{lm} \quad (5.10\beta')$$

$$h_{t\theta} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-h_{0a,lm}(r,t) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + h_{0p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm} \quad (5.10\gamma')$$

$$h_{t\phi} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(h_{0a,lm}(r,t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + h_{0p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm} \quad (5.10\delta')$$

$$h_{rr} = e^{2\lambda} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l H_{2,lm}(r,t) Y_{lm} \quad (5.10\epsilon')$$

$$h_{r\theta} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(-h_{1a,lm}(r,t) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + h_{1p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm} \quad (5.10\tau')$$

$$h_{r\phi} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(h_{1a,lm}(r,t) \sin \theta \frac{\partial}{\partial \phi} + h_{1p,lm}(r,t) \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm} \quad (5.10\zeta')$$

ενώ οι γωνιακές συνιστώσες είναι όλες $h_{ij} = 0$ με $i, j = \{\theta, \phi\}$. Έτσι, μετά την επιλογή της νέας συνθήκης βαθμίδας οι συνιστώσες της διαταραγμένης μετρικής γράφονται με τη μορφή πίνακα,

$$h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{polar} + h_{\mu\nu}^{axial} \quad (5.11)$$

με,

$$h_{\mu\nu}^{polar} = \begin{bmatrix} -2\omega h_{0,p} \frac{\partial}{\partial \phi} & H_1 & h_{0,p} \frac{\partial}{\partial \theta} & h_{0,p} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ * & e^{2\lambda} H_2 & h_{1,p} \frac{\partial}{\partial \theta} & h_{1,p} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (5.12)$$

$$h_{\mu\nu}^{axial} = \begin{bmatrix} -2\omega h_{0,a} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} & 0 & -h_{0,a} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} & h_{0,a} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ * & 0 & -h_{1,a} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} & h_{1,a} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \\ * & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{bmatrix} Y_{lm} \quad (5.13)$$

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω ότι πούμε δύο λόγια για το πως προκύπτει η συνιστώσα του διαταραγμένου μετρικού τανυστή h_{tt} σ' αυτή την συνθήκη βαθμίδας. Για να γίνει αυτό ότι χρειαστούμε την βοήθεια του εναλλακτικού φορμαλισμού των εξισώσεων Einstein που ονομάζεται $3+1$ φορμαλισμός ή (ADM formalism) [73]. Η βασική ιδέα αυτού του φορμαλισμού είναι η ακριβώς αντίθετη από την βασική ιδέα για την δημιουργία της Θεωρίας της Σχετικότητας, δηλαδή η ένωση του χώρου και του χρόνου στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Έτσι κύριος σκοπός του φορμαλισμού αυτού είναι ο διαχωρισμός του τετραδιάστατου χωρόχρονου τοπικά, σε τρισδιάστατες μη τεμνόμενες χωρικές υπερεπιφάνειες οι οποίες εξελίσσονται χρονικά. Αυτό επιτυγχάνεται με την εισαγωγή ενός νέου τανυστικού μεγέθους, που δεν υπάρχει στην συνηθισμένη μορφή των εξισώσεων Einstein, της εξωτερικής καμπυλότητας (extrinsic curvature) K_{ij} . Την χρονική εξέλιξη των τρισδιάστατων αυτών υπερεπιφανειών, καθορίζουν δύο άλλα μεγέθη, η βαθμωτή συνάρτηση (lapse function) A και το διάνυσμα μετατόπισης (shift vector) B^i τα οποία εκφράζουν και την ελευθερία βαθμίδας της Γενική Θεωρία Σχετικότητας σε αυτό το φορμαλισμό. Η σωστή επιλογή των δύο αυτών μεγεθών είναι καταλυτική γιατί μπορεί να απλοποιήσει ή να

περιπλέξει τις προκύπτουσες εξισώσεις. Όπως είναι φανερό και από τον ορισμό του ο φορμαλισμός αυτός είναι χρήσιμος στην περίπτωση που ενδιαφέρει η χρονική εξέλιξη των εξισώσεων πεδίου του Einstein.

Χρησιμοποιώντας την διδακτορική διατριβή του Ruoff [109] και την εργασία [60], η σχέση μεταξύ της συνιστώσας του μετρικού τανυστή h_{tt} , του διανύσματος μετατόπισης (shift vector) και της συνάρτησης lapse, είναι η ακόλουθη:

$$h_{tt} = 2A\alpha + 2B^i\beta_i = 2e^\nu\alpha - 2\omega h_{t\phi} \quad (5.14)$$

όπου α , A είναι η στατική και διαταραγμένη συνάρτηση lapse αντίστοιχα, και β_i , B^i , είναι η το στατικό και διαταραγμένο διάνυσμα μετατόπισης αντίστοιχα. Σε μη περιστρεφόμενο αστέρα όμως ισχύει, $\beta_i = 0$, $\alpha = 0$ και $\omega = 0$ και οδηγεί μέσω της (5.14) ότι και η συνιστώσα tt της διαταραχής του χωρόχρονου πρέπει να μηδενίζεται $h_{tt} = 0$. Πράγματι αυτή τη συνθήκη ένθεσαν και οι Battiston et al. [45] από τη αρχή μαζί με τις $h_{\theta\theta} = 0$, $h_{\theta\phi} = 0$ και $h_{\phi\phi} = 0$. Στην περίπτωση περιστρεφόμενου αστέρα όμως, όπως φαίνεται από την παραπάνω σχέση, παρόλο που $\alpha = 0$, η συνιστώσα tt της διαταραχής του μετρικού τανυστή είναι μη μηδενική $h_{tt} = -2\omega h_{t\phi} \neq 0$. Αν θέλαμε να έχουμε $h_{tt} = 0$, θα έπρεπε να είχαμε επιλέξει μια μηδενική συνάρτηση $\alpha \neq 0$, γεγονός όμως που θα προκαλούσε την εμφάνιση ανεπιθύμητων όρων με δεύτερης τάξης χωρικές παραγώγους στις τελικές εξισώσεις διαταραχών.

5.2 Εξισώσεις διαταραχών

Έτσι από το ανάπτυγμα σε σφαιρικές αρμονικές των tt , tr , rr και $\theta\theta + \phi\phi$ συνιστωσών των διαταραγμένων εξισώσεων Einstein (3.33) παίρνουμε,

$$\sum_{lm} \left[\left(A_{lm}^{(I)} + \tilde{A}_{lm}^{(I)} \right) Y_{lm} + B_{lm}^{(I)} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + C_{lm}^{(I)} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right] = 0 \quad (5.15)$$

όπου ο εκθέτης I εκφράζει την κάθε συνιστώσα αντίστοιχα. Παρομοίως από τις $t\theta, r\theta$ και $t\phi, r\phi$ συνιστώσες έχουμε αντίστοιχα,

$$\sum_{lm} \left[\left(a_{lm}^{(I)} + \tilde{a}_{lm}^{(I)} \cos \theta \right) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} - \left(b_{lm}^{(I)} + \tilde{b}_{lm}^{(I)} \cos \theta \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + \eta_{lm}^{(I)} \sin \theta Y_{lm} \right] = 0 \quad (5.16)$$

$$\sum_{lm} \left[\left(b_{lm}^{(I)} + \tilde{b}_{lm}^{(I)} \cos \theta \right) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + \left(a_{lm}^{(I)} + \tilde{a}_{lm}^{(I)} \cos \theta \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + \zeta_{lm}^{(I)} \sin \theta Y_{lm} \right] = 0 \quad (5.17)$$

Τέλος από τις $\theta\phi$ και $\theta\theta - \phi\phi$ συνιστώσες έχουμε αντίστοιχα,

$$\sum_{lm} \left[f_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + g_{lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + s_{lm} \frac{X_{lm}}{\sin^2 \theta} + t_{lm} \frac{W_{lm}}{\sin \theta} \right] = 0 \quad (5.18)$$

$$\sum_{lm} \left[g_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} - f_{lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} - t_{lm} \frac{X_{lm}}{\sin^2 \theta} + s_{lm} \frac{W_{lm}}{\sin \theta} \right] = 0 \quad (5.19)$$

Για να συμπληρωθεί το σύστημα των εξισώσεων που περιγράφει το σύστημα αστέρα χωρόχρονου, όταν χρειαστούμε και τις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού (3.38) από τις t και r συνιστώσες των οποίων παίρνουμε,

$$P_{lm}^{(I)} Y_{lm} + J_{lm}^{(I)} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + S_{lm}^{(I)} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} = 0 \quad (5.20)$$

Από τις θ και ϕ συνιστώσες των διαταραγμένων εξισώσεων κίνησης παίρνουμε,

$$\left[L_{lm} + \tilde{L}_{lm} \cos \theta \right] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} - \left[M_{lm} + \tilde{M}_{lm} \cos \theta \right] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + Q_{lm} \sin \theta Y_{lm} = 0 \quad (5.21)$$

$$\left[M_{lm} + \tilde{M}_{lm} \cos \theta \right] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + \left[L_{lm} + \tilde{L}_{lm} \cos \theta \right] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + R_{lm} \sin \theta Y_{lm} = 0 \quad (5.22)$$

όπου οι συνετελεστές $A, B, C, a, \tilde{a}, b, \tilde{b}, \eta, \zeta, s, t, f, g, P, J, S, L, \tilde{L}, M, \tilde{M}, Q, R$, είναι συνδυασμοί των συναρτήσεων που περιγράφουν τις διαταραχές του χωρόχρονου, του ρευστού και των ποσοτήτων του στατικού αστρικού μοντέλου, και επομένως συναρτήσεις μόνο των r, t . Οι αναλυτικές εκφράσεις τους δίνονται στο Παράρτημα B.¹

Στη συνέχεια όταν χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των συναρτήσεων των σφαιρικών αρμονικών για να απαλείψουμε την γωνιακή εξάρτηση από τις παραπάνω εξισώσεις. Η βασική σχέση ορθογωνιότητας των σφαιρικών αρμονικών είναι,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm} Y_{l'm'}^* \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (5.23)$$

όπου ο αστερίσκος δηλώνει συζυγές μιγαδικό. Δύο ακόμα πολύ χρήσιμες σχέσεις που όταν χρησιμοποιήσουμε είναι οι ακόλουθες,

$$\cos \theta Y_{lm} = Q_{l+1,m} Y_{l+1,m} + Q_{lm} Y_{l-1,m} \quad (5.24)$$

$$\sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} = l Q_{l+1,m} Y_{l+1,m} - (l+1) Q_{lm} Y_{l-1,m} \quad (5.25)$$

Πριν προχωρήσουμε στην απάλειψη της γωνιακής εξάρτησης από τις εξισώσεις διαταραχών όταν ορίσουμε κάποια χρήσιμα ολοκληρώματα των σφαιρικών αρμονικών που όταν χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Έτσι κάνουμε τους ακόλουθους ορισμούς,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{\pm 1} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{lm}^* \sin \theta \partial_\theta Y_{l'm'} d\Omega \\ &= (l-1) Q_{lm} A_{l-1,m} - (l+2) Q_{l+1,m} A_{l+1,m} \end{aligned} \quad (5.26)$$

¹Οι συνιστώσες στην αρχική έκδοση του άρθρου στο περιοδικό είχαν κάποια τυπογραφικά λάθη τα οποία στο παράρτημα αυτό έχουν διορθωθεί.

(5.27)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{\pm 1} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int \partial_\theta Y_{lm}^* \sin \theta Y_{l'm'} d\Omega \\ &= -(l+1) Q_{lm} A_{l-1,m} + l Q_{l+1m} A_{l+1,m} \end{aligned} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{\pm 1} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \left(l'(l'+1) \int Y_{lm}^* \cos \theta Y_{l'm'} d\Omega + \int Y_{lm}^* \sin \theta d_\theta Y_{l'm'} d\Omega \right) \\ &= (l-1)(l+1) Q_{lm} A_{l-1,m} + l(l+2) Q_{l+1m} A_{l+1,m} \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\mathcal{L}_4^{\pm 1} A := \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{l'm'} \cos \theta Y_{lm}^* d\Omega = Q_{lm} A_{l-1,m} + Q_{l+1m} A_{l+1,m} \quad (5.30)$$

Μεταξύ αυτών ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις,

$$\mathcal{L}_3^{\pm 1} = -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_1^{\pm 1}(\Lambda - 2) + \mathcal{L}_2^{\pm 1}\Lambda) \quad \mathcal{L}_4^{\pm 1} = -\frac{1}{2} (\mathcal{L}_1^{\pm 1} + \mathcal{L}_2^{\pm 1}) \quad (5.31)$$

όπου $\Lambda = l(l+1)$. Θα προχωρήσουμε τώρα στην απάλειψη των γωνιακών εξαρτήσεων από τις εξισώσεις διαταραχών. Η πρώτη εξισώση που όλα χρειαστούμε είναι η εξισώση εξέλιξης για το διάνυσμα διαταραχής η οποία προκύπτει πολύ εύκολα από την (5.7) να είναι,

$$\begin{aligned} (\partial_t + im\Omega\partial_\phi) \xi_{lm} &= \nu' \left(1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma} \right) \left(e^{2\nu-2\lambda} R_{lm} - e^{-2\lambda} H_{1,lm} \right. \\ &\quad \left. - im\Omega e^{-2\nu} h_{1p,lm} - \Omega e^{-\nu} \mathcal{L}_1^{\pm 1} h_{1a,lm} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας την (5.15) με $Y_{l'm'}^*$ και χρησιμοποιώντας τις (5.23), (5.25) έχουμε αμέσως,

$$A_{lm}^{(I)} + imC_{lm}^{(I)} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} B_{lm}^{(I)} + \mathcal{L}_4^{\pm 1} \tilde{A}_{lm}^{(I)} = 0 \quad (5.33)$$

Για να απαλείψουμε την γωνιακή εξάρτηση από τις (5.16), (5.17) τις πολλαπλασιάζουμε εναλλάξ με Y_θ^* και $Y_\phi^*/\sin \theta$ αντίστοιχα και τις προσθέτουμε και αφαιρούμε αντίστοιχα. Έτσι παίρνουμε,

$$\Lambda a_{lm}^{(I)} - im \left[\tilde{b}_{lm}^{(I)} + \zeta_{lm}^{(I)} \right] + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{a}_{lm}^{(I)} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} \eta_{lm}^{(I)} = 0 \quad (5.34)$$

$$\Lambda b_{lm}^{(I)} + im \left[\tilde{a}_{lm}^{(I)} + \eta_{lm}^{(I)} \right] + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{b}_{lm}^{(I)} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} \zeta_{lm}^{(I)} = 0 \quad (5.35)$$

Ομοίως από τις (5.18), (5.19) παίρνουμε,

$$\Lambda s_{lm} - im f_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} g_{lm} = 0 \quad (5.36)$$

$$\Lambda t_{lm} + im g_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} f_{lm} = 0 \quad (5.37)$$

Επιπλέον, από τις εξισώσεις κίνησης του ρευστού (5.20) πολλαπλασιάζοντας με $Y_{l'm'}^*$ και ολοκληρώνοντας ως προς τη στερεά γωνία $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ παίρνουμε,

$$P_{lm}^{(I)} + im S_{lm}^{(I)} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} J_{lm}^{(I)} = 0 \quad (5.38)$$

Τέλος για να απαλείψουμε τη γωνιακή εξάρτηση από τις εξισώσεις κίνησης (5.21), (5.22) χρησιμοποιούμε την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε για τις συνιστώσεις των εξισώσεων Einstein (5.16), (5.17) και παίρνουμε τελικά,

$$\Lambda L_{lm} - im \left(R_{lm} + \tilde{M}_{lm} \right) + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{L}_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} Q_{lm} = 0 \quad (5.39)$$

$$\Lambda M_{lm} + im \left(Q_{lm} + \tilde{L}_{lm} \right) + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{M}_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} R_{lm} = 0 \quad (5.40)$$

Οι αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων αυτών δίνονται στο παράρτημα B'.

5.3 Συμπεράσματα

Η επιλογή της κατάλληλης συνυθήκης βαθμίδας είναι πολύ σημαντική στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας. Η σημασία της έγκειται στο γεγονός ότι μπορεί να απλοποιήσει ή να περιπλέξει το υπό μελέτη πρόβλημα.

Σ' αυτό το κεφάλαιο παρουσιάσαμε την παραγωγή των εξισώσεων διαταραχών Einstein που περιγράφουν ένα βραδέως περιστρεφόμενο αστέρα και τον χωρόχρονο έξω από αυτόν σε μια καινούργια βαθμίδα. Η βαθμίδα αυτή είχε χρησιμοποιηθεί και μελετηθεί αναλυτικά μέχρι τώρα μόνο για μη περιστρεφόμενους αστέρες. Η βαθμίδα που είχε χρησιμοποιηθεί ευρέως μέχρι σήμερα στη βιβλιογραφία για βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες, ήταν η λεγόμενη Regge-Wheeler από το όνομα των συγγραφέων που την εισαγάγανε για πρώτη φορά. Παρόλα αυτά κανείς μέχρι σήμερα δεν είχε αποπειραθεί να επιλύσει αριθμητικά το σύστημα των εξισώσεων που προκύπτουν προκειμένου να βρεθούν οι χαρακτηριστικές ιδιοσυχνότητες του συστήματος, λόγω της αβέβαιης αριθμητικής συμπεριφοράς του.

Εμέις χρησιμοποιήσαμε πρώτη φορά για βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες την βαθμίδα αυτή που είχε πέσει σε αχρηστία. Διαπιστώσαμε από την τελική μορφή των εξισώσεων στην νέα αυτή βαθμίδα, ότι προκύπτουν αρκετά πιο απλές σε σχέση με τις αντίστοιχες στη βαθμίδα Regge-Wheeler. Η κύρια διαφορά αυτής της βαθμίδας σε σχέση με την αντίστοιχη Regge-Wheeler, είναι ότι μηδενίζει όλες τις γωνιακές συνιστώσες της διαταραχής του μετρικού τανυστή δηλαδή τις $h_{\theta\theta}$, $h_{\theta\phi}$, $h_{\phi\phi}$. Αυτές είναι και οι συνιστώσες που είναι υπεύθυνες στη βαθμίδα Regge-Wheeler, για την εμφάνιση των όρων δεύτερης τάξης ως προς χρόνο και χώρο που είναι ανεπιθύμητοι για την αριθμητική εξέλιξη. Επιπλέον οι τελικές εξισώσεις σ' αυτή τη βαθμίδα, που περιγράφουν τις διαταραχές ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, παρουσιάζουν συμμετρία ως προς τις συναρτήσεις που περιγράφουν τις πολικές και αξονικές διαταραχές, γεγονός που διευκολύνει τον έλεγχο και την κατανόηση τους.

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες A1 και B1 όπως αναφέρεται στο βιογραφικό σημείωμα στο τέλος του παραρτήματος.

Κεφάλαιο 6

Εξισώσεις διαταραχών στη βαθμίδα RW

Οι προσπάθειες για την αριθμητική επίλυση του συστήματος των διαφορικών εξισώσεων μερικών παραγώγων που περιγράφει τις διαταραχές ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων στα πλαίσια της Γ.Θ.Σ είναι περιορισμένες. Παρόλο που ένα πρώτο σύστημα εξισώσεων που περιγράφει τις διαταραχές αυτές είναι διαθέσιμο από την δεκαετία του 90 [35], αν και όχι στην καλύτερη μορφή, προσπάθειες για την αριθμητική του επίλυση δεν έχουν γίνει.

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μια εναλλακτική γραφή του συστήματος των εξισώσεων που περιγράφουν τις διαταραχές ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων στη βαθμίδα Regge-Wheeler [26]. Πιο συγκεκριμένα, θα ανάγουμε το σύστημα των εξισώσεων που παρήγαγε ο Kojima [35] σε πρώτης τάξης ως προς χρόνο και χώρο της μορφής,

$$\dot{Y} + AY' + BY = 0, \quad (6.1)$$

όπου ο πίνακας στήλης Y περιέχει τις συναρτήσεις διαταραχών και οι πίνακες A και B είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων του στατικού αστρικού μοντέλου. Για να το πετύχουμε αυτό θα χρησιμοποιήσουμε δύο εναλλακτικές μεταβλητές που χρησιμοποιήθηκαν στην εργασία [51], προκειμένου να αναχθεί το αντίστοιχο σύστημα εξισώσεων για μη περιστρεφόμενο αστέρα σε τρεις συζευγμένες κυματικές εξισώσεις, δύο για το χωρόχρονο και μια για το αστρικό ρευστό. Οι μεταβλητές αυτές είναι οι F και S οι οποίες σχετίζονται με τις συναρτήσεις διαταραχών μέσω των ακόλουθων σχέσεων,

$$F(t, r) = \frac{h_{\theta\theta}}{r} = \frac{K(t, r)}{r}, \quad (6.2)$$

$$S(t, r) = \frac{1}{r} \left(h_{tt} - \frac{e^\nu}{r^2} h_{\theta\theta} \right) = \frac{e^\nu}{r} [H_0(t, r) - K(t, r)]. \quad (6.3)$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι για λόγους συνέχισης της υπάρχουσας παράδοσης στη βιβλιογραφία σχετικά με αυτό το θέμα, στο κεφάλαιο αυτό θα

κρατήσουμε τον ακόλουθο ορισμό για το μετρικό τανυστή που περιγράφει το στατικό βραδέως περιστρεφόμενο αστέρα,

$$ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\varepsilon \omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi. \quad (6.4)$$

6.1 Αναγωγή σε σύστημα πρώτης τάξης

Η αναγωγή του πλήρους συστήματος των εξισώσεων που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του συστήματος αστέρα-χωρόχρονου σε πρώτη τάξη ως προς την παράμετρο περιστροφής ε , σε εξισώσεις πρώτης τάξης είναι επίπονη και αρκετά μακροσκελής. Προκειμένου να αποφύγουμε την κούραση του αναγνώστη θα αναφέρουμε τον τρόπο με τον οποίο έγινε αυτή η αναγωγή και θα δώσουμε τις αναλυτικές εκφράσεις των εξισώσεων που προκύπτουν στο παράρτημα. Όπως προαναφέρθηκε θα χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις που παρήγαγε ο Kojima [35] και δύο εναλλακτικές μεταβλητές S και F , για το υποσύστημα των πολικών συναρτήσεων διαταραχών. Έτσι ακολουθώντας την μεθοδολογία των Allen et. al. [51] παίρνουμε αρχικά από τις εξισώσεις Einstein ένα αρχικό σύστημα εξισώσεων της ακόλουθης μορφής,

$$\begin{aligned} \ddot{F} - e^{\nu-\lambda} F'' &= a_0(F, S, H, F') + \text{ima}_1(R, V, H_1, V', H'_1, \dot{F}, \dot{S}) \\ &+ \mathcal{L}_i^\pm a_2(h_0, h_1, U, h'_0, h'_1, U', \dot{h}_1), \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \ddot{S} - e^{\nu-\lambda} S'' &= b_0(S, F, S') + \text{imb}_1(R, V, H_1, R', V', \dot{H}, \dot{F}, \dot{S}, \ddot{V}) \\ &+ \mathcal{L}_i^\pm b_2(h_0, h_1, U, h'_0, h'_1, U', \dot{h}_0, \dot{h}_1, \dot{h}'_0, \dot{h}'_1), \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= c_0(S, F, S') + \text{imc}_1(R, V, H_1, \dot{F}, \dot{F}') \\ &+ \mathcal{L}_i^\pm c_2(h_0, U, h'_0, \dot{h}_0, \dot{h}_1), \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \ddot{h}_1 - e^{\nu-\lambda} h''_1 &= d_0(h_1, h'_1) + \text{imd}_1(h_0, h_1, U, h'_0, h'_1, U', \dot{h}_1) \\ &+ \mathcal{L}_i^\pm d_2(R, V, H_1, V', \dot{F}), \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_0 &= e_0(h_1, h'_1) + \text{ime}_1(h_0, U, h'_0, \dot{h}_1) \\ &+ \mathcal{L}_i^\pm d_2(V, \dot{F}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

όπου οι συντελεστές που εμφανίζονται είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων του στατικού αστρικού μοντέλου και ακολουθούν τον εξής κανόνα. Αυτοί με δείκτη 0 είναι μηδενικής τάξης ως προς την παράμετρο περιστροφής ε , με άλλα λόγια δεν περιέχουν καθόλου όρους ω , ω και Ω . Αυτοί με δείκτη 1 είναι οι συντελεστές πρώτης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$ που περιέχονται στη σύζευξη των συναρτήσεων διαταραχών με την ίδια parity. Τέλος αυτοί με δείκτη 2 είναι και αυτοί πρώτης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$ και περιέχονται στη σύζευξη των συναρτήσεων διαταραχών

αντίθετης parity μέσω των ολοκληρωμάτων των σφαιρικών αρμονικών \mathcal{L}_i^\pm , τα οποία έχουν οριστεί στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Προχωρούμε ορίζοντας τις μεταβλητές,

$$F_1 = \dot{F}, \quad S_1 = \dot{S}, \quad T_1 = \dot{h}_1 \quad (6.10)$$

$$F_2 = F', \quad S_2 = S', \quad T_2 = h'_1 \quad (6.11)$$

οι οποίες ανάγουν το παραπάνω σύστημα σε πρώτης τάξης ως προς το χώρο και το χρόνο. Έτσι το τελικό σύστημα εξισώσεων θα έχει τη μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 &= e^{\nu-\lambda} F'_2 + a_{01}F + a_{02}S + a_{03}H + a_{04}F_2 \\ &+ a_{10}R + a_{11}V + a_{12}H_1 + a_{13}V' + a_{14}H'_1 + a_{15}F_1 + a_{16}S_1 \\ &+ a_{20}h_0 + a_{21}h_1 + a_{22}U + a_{23}h'_0 + a_{24}h'_1 + a_{25}U' + a_{26}T_1, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= e^{\nu-\lambda} S'_2 + b_{01}S + b_{02}F + b_{03}S_2 \\ &+ b_{10}R + b_{11}V + b_{12}H_1 + b_{13}R' + b_{14}V' + b_{15}H'_1 + b_{16}F_1 + b_{17}S_1 \\ &+ b_{20}h_0 + b_{21}h_1 + b_{22}U + b_{23}h'_0 + b_{24}h'_1 + b_{25}U' + b_{26}T_2 \\ &+ b_{27}T'_1 + b_{28}T'_2, \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= c_{00}F + c_{01}S + c_{02}S_2 \\ &+ c_{10}H_1 + c_{11}V + c_{12}R + c_{13}F_1 + c_{14}F'_1 \\ &+ c_{20}h_0 + c_{21}U + c_{22}h'_0 + c_{23}T_1 + c_{24}h_1, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \dot{T}_1 &= e^{\nu-\lambda} T'_2 + d_{01}h_1 + d_{02}T_2 \\ &+ d_{10}h_0 + d_{11}h_1 + d_{12}U + d_{13}h'_0 + d_{14}T_2 + d_{15}U' + d_{16}T_1 \\ &+ d_{20}H_1 + d_{21}V + d_{22}R + d_{23}V' + d_{24}F_1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{h}_0 &= e_{00}h_1 + e_{01}h'_1 + e_{10}h_0 + e_{11}U + e_{12}h'_0 + e_{13}T_1 \\ &+ e_{20}V + e_{21}F_1. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Για να συμπληρωθεί το σύστημα των εξισώσεων θα χρειαστούμε και τις εξισώσεις κίνησης του ρευστού (3.36) οι οποίες στο σύστημα μεταβλητών που χρησιμοποιούμε παίρνουν τη μορφή,

$$\begin{aligned} \dot{H} &= k_{01}R + k_{02}V + k_{03}F_1 + k_{04}S_1 + k_{05}H'_1 + k_{06}R' + k_{07}H_1 \\ &+ k_{10}H + k_{11}S + k_{12}F \\ &+ k_{21}h_1 + k_{22}T_2, \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \dot{R} &= f_{00}F' + f_{01}S' + f_{02}H' + f_{03}F + f_{04}S \\ &+ f_{10}H_1 + f_{11}V + f_{12}R + f_{13}F_1 + f_{14}F'_1 + f_{15}V' \end{aligned}$$

$$+ f_{20}h'_0 + f_{21}h_0 + f_{22}U + f_{23}U' + f_{24}h_1 + f_{25}h'_1 + f_{26}T_1, \quad (6.18)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} &= q_{00}H + q_{01}F \\ &+ q_{10}H_1 + q_{11}H'_1 + q_{12}V + q_{13}R + q_{14}F_1 + q_{15}S_1 + q_{16}R' \\ &+ q_{20}U + q_{21}h_0, \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{U} &= s_{00}h_1 + s_{01}h'_1 \\ &+ s_{10}U + s_{11}h_0 + s_{12}h'_0 + s_{13}T_1 \\ &+ s_{20}V + s_{21}R + s_{22}H_1 + s_{23}H'_1 + s_{24}R' + s_{25}F_1 + s_{26}S_1. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Οι συντελεστές a_{ij} , b_{ij} , c_{ij} , d_{ij} , e_{ij} , k_{ij} , f_{ij} , q_{ij} , s_{ij} , είναι συναρτήσεις των ποσοτήτων του στατικού αστρικού μοντέλου και οι αναλυτικές εκφράσεις τους δίνονται στο παράρτημα Δ' .

6.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Σαν μια πρώτη δοκιμή της αριθμητικής ευστάθειας του παραπάνω συστήματος των εξισώσεων θα ολοκληρώσουμε αριθμητικά το χωροχρονικό κομμάτι αυτού αγνοώντας τις διαταραχές του αστρικού ρευστού. Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται αντίστροφη προσέγγιση Cowling, (Inverse Cowling approximation (ICA)) και χρησιμοποιούμε ίσημηκε για πρώτη φορά από τους Andersson et. al [57] για να μελετηθούν οι ιδιοσυχνότητες του χωρόχρονου w. Έτσι το απλοποιημένο σύστημα εξισώσεων που θα ολοκληρώσουμε είναι το ακόλουθο,

$$\dot{F} = F_1 \quad (6.21)$$

$$\dot{F}_2 = F'_1 \quad (6.22)$$

$$\dot{S} = S_1 \quad (6.23)$$

$$\dot{S}_2 = S'_1 \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \dot{F}_1 &= e^{\nu-\lambda}F'_2 + \frac{e^\nu}{r^3}(3\beta + \alpha + 4M - \Lambda r)F \\ &+ \frac{2}{r}(\alpha + \beta - re^{-\lambda})S + \frac{e^\nu}{r^2}(\alpha - \beta)F_2 \\ &+ \frac{im\omega}{r}\left[(\alpha - \beta)H_1 + r^2e^{-\lambda}H'_1 - r^3e^{-\nu}S_1\right] \\ &+ \frac{4im}{r\Lambda}\left[(\alpha + \beta - r\Lambda - re^{-\lambda})\omega - r^2e^{-\lambda}\omega'\right]F_1 \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \dot{S}_1 &= e^{\nu-\lambda}S'_2 + \frac{e^\nu}{r^3}(3\alpha + \beta - r\Lambda)S \\ &+ \frac{4e^{2\nu}}{r^6}\left(e^\lambda\alpha^2 - 2Mr + r\beta\right)F + \frac{e^\nu}{r^2}(\alpha - \beta)S_2 \\ &- \frac{2im}{r}e^{\nu-\lambda}\omega'H_1 - \frac{2im}{r\Lambda}\omega\left[2(\alpha + \beta) + \Lambda r - 2re^{-\lambda}\right]S_1 \end{aligned}$$

$$+ \frac{4im\epsilon^\nu}{r^3\Lambda} \left[2r^2e^{-\lambda}\omega' + 2\varpi(\alpha + \beta) + \omega(\alpha - \beta - 2M) \right] F_1 \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} \dot{H}_1 &= \frac{2\alpha}{r^3} e^{\nu+\lambda} F + S + rS_2 \\ &- im\omega H_1 + \frac{im}{r\Lambda} \left[(2\alpha e^\lambda + r)\omega - r^2\omega' \right] F_1 + \frac{im}{r\Lambda} r^2\omega F'_1 \end{aligned} \quad (6.27)$$

όπου,

$$\alpha \equiv M + kr^3p \quad \beta \equiv -(M - kr^3\epsilon). \quad (6.28)$$

Τέλος, προκειμένου να θέσουμε σωστά τα αρχικά δεδομένα για την αριθμητική ολοκλήρωση, αλλά και για να ελέγχουμε την ακρίβειά της θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη εξίσωση περιορισμού (constrain),

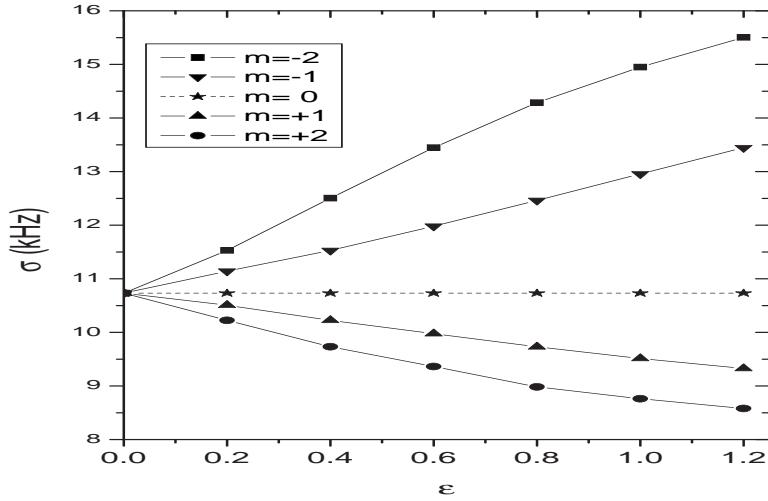
$$\begin{aligned} F'_2 &- \frac{\beta}{r^2} e^\lambda F_2 + \frac{e^\lambda}{r^3} (3\beta + 2M - r\Lambda) F \\ &+ \frac{1}{2r} e^{\lambda-\nu} \left[4(\alpha + \beta) - 4re^{-\lambda} - r\Lambda \right] S - re^{-\nu} S_2 \\ &+ \frac{im}{r\Lambda} e^{\lambda-\nu} \left[4\omega(\alpha + \beta - re^{-\lambda}) - 3r\Lambda\omega - 2r^2e^{-\lambda}\omega' \right] F_1 \\ &- im\omega r^2 e^{\lambda-2\nu} S_1 + \frac{im}{2r} e^{-\nu} \left[2\omega(\alpha - \beta)e^\lambda - r^2\omega' \right] H_1 \\ &- \frac{2im}{\Lambda} e^{-\nu} r\omega F'_1 + im\omega r e^{-\nu} H'_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Η αριθμητική ολοκλήρωση έγινε χρησιμοποιώντας την απλή πολυτροπική εξίσωση κατάστασης (2.4), αλλά και αστρικά μοντέλα σταθερής πυκνότητας. Πιο συγκεκριμένα το πολυτροπικό αστρικό μοντέλο (2.4) που χρησιμοποιήθηκε στην ολοκλήρωση έχει πολυτροπική σταθερά $K = 100 \text{ km}^2$, πολυτροπικό εκθέτη $\Gamma = 2$, μάζα $M = 1.267M_\odot$ και ακτίνα $R = 8.87 \text{ km}$ ενώ τα μοντέλα σταθερής πυκνότητας έχουν κοινή μάζα $M = 1.27 M_\odot$ και συμπαγότητες $M/R = 0.25$ και $M/R = 0.20$ αντίστοιχα. Τα αρχικά δεδομένα για την αριθμητική ολοκλήρωση παράγονται ως εξής: Δίνουμε μια αρχική διαταραχή στη μεταβλητή S και στη συνέχεια λύνουμε τη διαφορική εξίσωση (6.29) ως προς τη μεταβλητή F θέτοντας επιπλέον και $H_1 = 0$.

Στη γενική περίπτωση οι ιδιοσυχνότητες του περιστρεφόμενου αστέρα υπακούουν μια σχέση της μορφής,

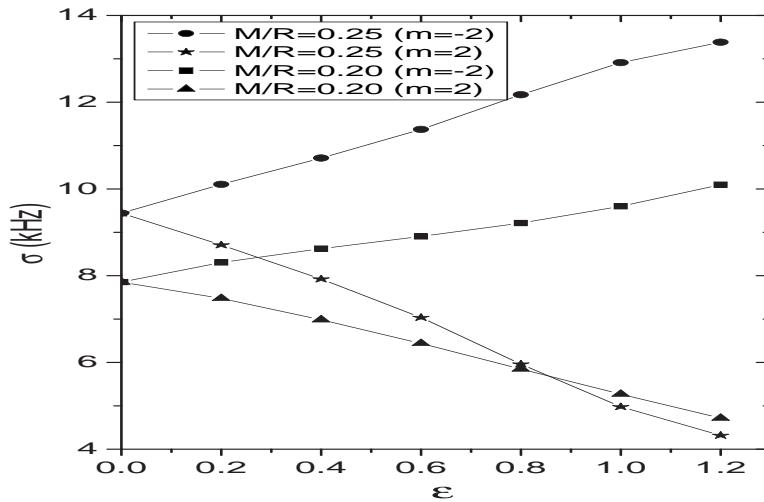
$$\sigma = \sigma_0 - km\Omega, \quad (6.30)$$

όπου σ_0 , είναι η τιμή της συχνότητας για τον μη περιστρεφόμενο αστέρα, m ο αζιμουθιακός δείκτης, Ω η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του αστέρα και k είναι μια συνάρτηση των ποσοτήτων του στατικού αστρικού μοντέλου. Η αριθμητική επίλυση του συστήματος μέσω των μετασχηματισμών Fourier των χρονοσειρών που προκύπτουν μας δίνει τις τιμές των ιδιοσυχνοτήτων του χωρόχρονου για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου περιστροφής ϵ . Εδώ να



Σχήμα 6.1: Τιμές της συχνότητας για την πρώτη ιδιοσυχνότητα του χωρόχρονου, w_1 για πολυτροπικά αστρικά μοντέλα, σαν συνάρτηση της παραμέτρου περιστροφής ϵ και για δύο διαφορετικές τιμές του αζιμουθιακού αρμονικού δείκτη $m = \pm 1$ και $m = \pm 2$. Είναι φανερή η διάσπαση του εκφυλισμού των ιδιοσυχνοτήτων (splitting) λόγω της περιστροφής του αστέρα. Οι συχνότητες εκφράζονται σε kHz.

σημειώσουμε ότι για το μετασχηματισμό Fourier χρησιμοποιήσαμε την συνάρτηση διαταραχής H_0 . Ο λόγος γι' αυτήν την επιλογή είναι ότι στο Νευτώνειο όριο αυτή ισοδύναμεί με τη διαταραχή στο βαρυτικό δυναμικό και άρα περιέχει όλη την πληροφορία σχετικά με το βαρυτικό πεδίο που ενδιαφέρει στην περίπτωση των ιδιοσυχνοτήτων του χωρόχρονου. Στο σχήμα 6.1, παρουσιάζουμε την διόρθωση στην πρώτη ιδιοσυχνότητα του χωρόχρονου w_1 λόγω της περιστροφής για διάφορες παραμέτρους περιστροφής ϵ , για τα πολυτροπικά αστρικά μοντέλο που αναφέρθηκε παραπάνω. Είναι φανερή η διάσπαση του εκφυλισμού της ιδιοσυχνότητας, λόγω της περιστροφής για τις διαφορετικές τιμές του αζιμουθιακού αριθμού $m = \pm 1$ και $m = \pm 2$. Στο σχήμα 6.2 παρουσιάζουμε και πάλι τις διορθώσεις στη πρώτη ιδιοσυχνότητα του χωρόχρονου, λόγω περιστροφής για τα δύο μοντέλα σταθερής πυκνότητας που αναφέρθηκαν παραπάνω στο κείμενο. Είναι φανερό ότι όσο πιο συμπαγές είναι το μοντέλο τόσο πιο μεγάλη είναι η τιμή της συχνότητας στο μη περιστρεφόμενο αστέρα, όπως έχει αποδειχτεί στο [55]. Ένα άλλο ενδιαφέρον συμπέρασμα, είναι ότι η πολική ιδιοσυχνότητα του χωρόχρονου w_1 για $l = 2$ και $m = \pm 1, \pm 2$, δεν εμπίπτει στην αστάθεια CFS για φυσικά αποδεκτές τιμές της παραμέτρου περιστροφής $\epsilon < 1$ γεγονός που οφείλεται στη αρχικά μεγάλη τιμή της συχνότητας του στο μη περιστρεφόμενο όριο.



Σχήμα 6.2: Συχνότητες της πρώτης ιδιοσυχνότητας του χωρόχρονου, ω1 για σταθερής πυκνότητας αστρικά μοντέλα σαν συνάρτηση της παραμέτρου περιστροφής ε και με διαφορετικές συμπαγότητες. Είναι φανερή κι εδώ η διάσπαση του εκφυλισμού των ιδιοσυχνοτήτων (splitting) λόγω της περιστροφής του αστέρα. Οι συχνότητες εκφράζονται σε kHz.

ε	Ω	$\sigma_{m=-2}$	$\sigma_{m=-1}$	$\sigma_{m=1}$	$\sigma_{m=2}$
0.0	0	10.8040	10.8040	10.8040	10.8040
0.2	0.4995	11.5294	11.1413	10.5070	10.2247
0.4	0.9902	12.5044	11.5294	10.2245	9.7312
0.6	1.4853	13.4466	11.9802	9.9763	9.3629
0.8	1.9804	14.2875	12.4622	9.7311	8.9827
1.0	2.4755	14.9495	12.9565	9.5126	8.7620
1.2	2.9706	15.5042	13.4471	9.3263	8.5791

Πίνακας 6.1: Οι συχνότητες της $l = 2$ πολικής ιδιοσυχνότητας του χωρόχρονου ω1 για διαφορετικές παραμέτρους περιστροφής ε , για τον πολυτροπικό αστέρα με ακτίνα $R=8.86$ km και μάζα $M = 1.267M_\odot$. Όλες οι συχνότητες δίνονται kHz.

6.3 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε την αναγωγή των εξισώσεων που περιγράφουν τις διαταραχές ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα στη βαθμίδα Regge-Wheeler σε σύστημα πρώτης τάξης ως προς το χρόνο. Όπως έχει προαναφερθεί, οι εξισώσεις σε αυτή τη βαθμίδα είναι αρκετά πολύπλοκες με αποτέλεσμα να μην είχε αποπειραθεί μέχρι σήμερα η αριθμητική τους επίλυση για την μελέτη του φάσματος ιδιοσυχνοτήτων του συστήματος χωρόχρονου ρευστού. Η διαδικασία για την αναγωγή τους σε σύστημα πρώτης τάξης είναι μακροσκελής και επίπονη. Επιπλέον, η αριθμητική ευστάθεια του πλήρους συστήματος των εξισώσεων είναι αμφίβολη. Σαν ένα πρώτο βήμα για τον έλεγχο της αριθμητικής ευστάθειας του συστήματος επιλύσαμε αριθμητικά το κομμάτι του συστήματος που περιγράφει τις χωροχρονικές διαταραχές, χρησιμοποιώντας τη λεγόμενη, Inverse Cowling approximation (I.C.A). Για πρώτη φορά υπολογίσαμε την πρώτη πολική ιδιοσυχνότητα του χωρόχρονου w_1 ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα και παρατηρήσαμε το φαινόμενο της διάσπασης του εκφυλισμού τους (splitting), φαινόμενο που είναι ανάλογο με το Zeeman splitting στην χβαντομηχανική και οφείλεται στη περιστροφή του αστέρα. Διαπιστώσαμε τέλος, ότι για $m = \pm 1, \pm 2$ η ιδιοσυχνότητα του χωρόχρονου w_1 δεν εμπίπτει στην αστάθεια CFS για φυσικά απόδεκτές τιμές της παραμέτρου ϵ και για τα πολυτροπικά αστέρια που μελετήσαμε, λόγω του ότι η τιμή της στο μη περιστρεφόμενο όριο είναι υψηλή.

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου έγιναν αποδεκτά για δημοσίευση στην εργασία A4 που αναφέρεται στο βιογραφικό σημείωμα στο τέλος του παραρτήματος.

Κεφάλαιο 7

Εξισώσεις δεύτερης τάξης

Σε πρόσφατες μελέτες [80, 81, 87] στα πλαίσια της προσέγγισης Cowling υπολογίστηκαν αξονικά συμμετρικές και μη ιδιοσυχνότητες για ταχέως περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες, στην πλήρη μη γραμμική προσέγγιση. Στις μελέτες αυτές διαπιστώθηκε ότι μπορεί να υπάρχουν φαινομενικές διασταυρώσεις ιδιοσυχνοτήτων των αξονικά συμμετρικών ιδιοσυχνοτήτων κοντά στη ταχύτητα Kepler. Αυτές οι φαινομενικές διασταυρώσεις ovoided crossings) το οποίο είναι γνωστό από τη Νευτώνια Θεωρία των περιστρεφόμενων αστέρων. Έχοντας κατά νου τα αποτελέσματα των παραπάνω μελετών, στο κεφάλαιο αυτό θα προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω και θα εισάγουμε στην μετρική αλλά και στις διαταραγμένες εξισώσεις κίνησης του ρευστού, όρους δεύτερης τάξης ως προς την παράμετρο περιστροφής $O(\varepsilon^2)$. Σκοπός μας είναι και πάλι να μελετήσουμε τη συμπεριφορά και τις ιδιοσυχνότητες του ρευστού όρα θα χρησιμοποιήσουμε κι εδώ την προσέγγιση Cowling δηλαδή θα αγνοήσουμε όλες τις διαταραχές του χωρόχρονου. Οι λόγοι που προχωρούμε σε αυτή τη μελέτη είναι βασικά τρεις. Πρώτον, είναι η μελέτη της βελτίωσης της ακρίβειας στη κατασκευή του στατικού αστρικού μοντέλου από την εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης. Με την εισαγωγή των όρων αυτών η σφαιρική συμμετρία του στατικού αστρικού μοντέλου παραβιάζεται και ισχύει πλέον μόνο η ακτινική. Επιπλέον έχουμε διορθώσεις που βελτιώνουν την ακρίβεια με την οποία υπολογίζουμε την ακτίνα και τη μάζα του αστέρα. Δεύτερον, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την επίδραση της εισαγωγής των όρων δεύτερης τάξης στις συχνότητες των ιδιοταλαντώσεων του ρευστού. Η εισαγωγή των όρων αυτών εισάγει επιπλέον συζεύξεις στις εξισώσεις διαταραχών, όπως θα φανεί αναλυτικά μέσα στο κεφάλαιο. Με αυτόν τον τρόπο θέλουμε να διαπιστώσουμε τα όρια της γραμμικής προσέγγισης του βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα σε σχέση με τα αντίστοιχα αποτελέσματα μη γραμμικών αριθμητικών υπολογισμών [87]. Τρίτον, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η συμπεριφορά του συνεχούς φάσματος με την εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης.

7.1 Στατικό μοντέλο

Η μετρική του χώρου σ' αυτήν την περίπτωση θα περιέχει και όρους που εξαρτώνται από τη γωνιακή μεταβλητή θ και είναι η ακόλουθη [82, 83, 84, 85, 94],

$$\begin{aligned} ds^2 = & -[e^{2\nu}(1+\varepsilon^2 2h) + \varepsilon^2 \omega^2 r^2 \sin^2 \theta] dt^2 + e^{2\lambda} \left(1 + \varepsilon^2 \frac{2e^{2\lambda}}{r} m\right) dr^2 \\ & + r^2(1+2\varepsilon^2 k) (d\theta^2 - 2\varepsilon \omega dt d\phi + \sin^2 \theta d\phi^2). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Οι συνιστώσεις του μετρικού τανυστή πρέπει να αναπτυχθούν σε ανάπτυγμα άρτιας τάξης ως προς ε , εκτός από την συνιστώσα $g_{t\phi}$, που το ανάπτυγμά της λόγω περιστροφικής συμμετρίας πρέπει να είναι περιττής τάξης. Έτσι συνολικά θα έχουμε,

$$\omega \sim \mathcal{O}(\varepsilon),$$

$$(h, m, k) \sim \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Επιπλέον οι συναρτήσεις h , m , k , είναι στην γενική περίπτωση συναρτήσεις των μεταβλητών r και θ και μπορούν να αναπτυχθούν με τη βοήθεια των πολυωνύμων Legendre, ως ακολούθως,

$$h(r, \theta) = h_0(r) + h_2(r)P_2(\cos \theta) \quad (7.2)$$

$$m(r, \theta) = m_0(r) + m_2(r)P_2(\cos \theta) \quad (7.3)$$

$$k(r, \theta) = k_0(r) + k_2(r)P_2(\cos \theta) \quad (7.4)$$

όπου,

$$P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta, \quad (7.5)$$

είναι το πολυώνυμο Legendre δεύτερης τάξης. Στις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται καθαρά ο διαχωρισμός των συναρτήσεων σε μονοπολικό ($l = 0$) και τετραπολικό μέρος ($l = 2$). Λόγω της συμμετρίας των συνιστωσών του μετρικού τανυστή στο μετασχηματισμό $r \rightarrow f(r)$ πρέπει να ισχύει

$$k_2 = 0. \quad (7.6)$$

Η αρχική τετρα-ταχύτητα του μοντέλου θα περιέχει και όρους δεύτερης τάξης

$$u^\phi = \Omega u^t \quad u^t = [-(g_{tt} + 2\varepsilon \Omega g_{t\phi} + \varepsilon^2 \Omega^2 g_{\phi\phi})]^{1/2} \quad (7.7)$$

Η πίεση και η πυκνότητα του στατικού μοντέλου θα διορθωθούν κι αυτές με όρους δεύτερης τάξης λόγω φυγόκεντρων δυνάμεων ως εξής,

$$P(r, \theta) = p(r) + \varepsilon^2(p + \epsilon)\{p_0(r) + p_2(r)P_2(\cos \theta)\} \quad (7.8)$$

$$E(r, \theta) = \epsilon(r) + \varepsilon^2(p + \epsilon)\{\epsilon_0(r) + \epsilon_2(r)P_2(\cos \theta)\} \quad (7.9)$$

όπου $p(r)$, $\epsilon(r)$ είναι η πίεση και η πυκνότητα του μη περιστρεφόμενου αστέρα και οι επιπλέον ποσότητες οι διορθώσεις δεύτερης τάξης. Σ' αυτήν την τάξη

προσέγγισης όταν χρειαστούμε επιπλέον εξισώσεις εκτός από τις (2.8) για την πλήρη περιγραφή του στατικού μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, όταν χρειαστούμε εξισώσεις για την περιγραφή του μονοπολικού μέρους των συναρτήσεων m_0 , p_0 , ϵ_0 και h_0 αλλά και του τετραπολικού m_2 , p_2 , ϵ_2 , k_2 και h_2 . Τέλος, σ' αυτήν την τάξη προσέγγισης όταν επηρεαστεί και το σχήμα του αστέρα αποκλίνοντας από τη σφαιρική συμμετρία. Έτσι, η επιφάνεια του αστέρα όταν δίνεται από τη σχέση,

$$r = R + \xi_0(R) + \xi_2(R)P_2(\cos \theta), \quad (7.10)$$

όπου R είναι η ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα. Οι απαραίτητες επιπλέον εξισώσεις για την περιγραφή του στατικού μας μοντέλου, όταν προκύψουν και πάλι από την λύση των εξισώσεων πεδίου Einstein (2.7) συμπεριλαμβάνοντας στο ανάπτυγμα και τους επιπλέον όρους δεύτερης τάξης $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.

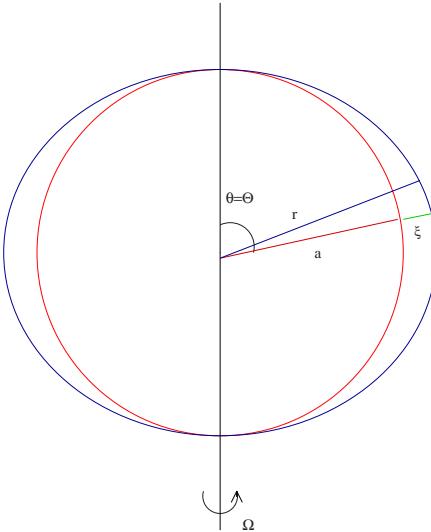
Ιδιαίτερη προσοχή πρέπει να δοθεί στο σύστημα συντεταγμένων στο οποίο όταν γίνει το παραπάνω ανάπτυγμα. Πιο συγκεκριμένα το ανάπτυγμα της διαταραχής της πίεσης ή της πυκνότητας του αστέρα για παράδειγμα σε κανονικές πολικές συντεταγμένες r , θ δεν ισχύει παντού στο εσωτερικό του αστέρα. Τέτοιο ανάπτυγμα όχει νόημα μόνο στην περίπτωση που οι διαταραχές αυτές είναι πολύ μικρότερες από τις ποσότητες του στατικού μοντέλου. Αυτό όμως δεν ισχύει κοντά στην επιφάνεια του αστέρα μια και εκεί η πίεση και η πυκνότητα του στατικού μοντέλου μηδενίζονται ενώ οι διαταραχές αυτών μπορεί να είναι πεπερασμένες. Για να αποφύγουμε την δημιουργία προβλημάτων το ανάπτυγμα δεν όταν γίνει στις κανονικές πολικές συντεταγμένες r , θ αλλά σε ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων R , Θ , που ορίζονται ως εξής : Θεωρούμε ένα σημείο στο εσωτερικό του βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα, που βρίσκεται πάνω σε μια συγκεκριμένη επιφάνεια σταθερής πυκνότητας. Η αντίστοιχη ακτίνα του μη περιστρεφόμενου μοντέλου που έχει την ίδια πυκνότητα όταν είναι η καινούργια ακτινική συντεταγμένη R ενώ η συντεταγμένη Θ εκφράζει την συνηθισμένη πολική γωνία θ . Έτσι, η σχέση νέων και παλαιών μεταβλητών δίνεται από τις σχέσεις,

$$\Theta = \theta \quad \epsilon[r(R, \Theta), \Theta] = \epsilon(R). \quad (7.11)$$

Η σχέση μεταξύ του νέου και παλαιού σύστηματος συντεταγμένων δίνεται στο σχήμα 7.1. Για μικρές γωνιακές ταχύτητες του αστέρα δηλαδή για μικρή τιμή της παραμέτρου περιστροφής ϵ , ο λόγος,

$$\frac{\xi(R, \Theta)}{R} \ll 1, \quad (7.12)$$

είναι πολύ μικρότερος της μονάδας μέσα στο εσωτερικό του αστέρα. Αν επιπλέον επιλεγεί η κεντρική πυκνότητα του περιστρεφόμενου αστέρα να είναι ίδια με αυτή του μη περιστρεφόμενου, τότε όταν ισχύει $\xi(R=0, \Theta) = 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση ουσιαστικά οι παλιές και οι νέες συντεταγμένες συμπίπτουν, οπότε για λόγους απλότητας όταν χρησιμοποιήσουμε αυτή την ιδιότητα για να απλουστεύσουμε τους υπολογισμούς μας.



Σχήμα 7.1: Σχηματική αναπαράσταση των δύο συστημάτων συντεταγμένων στον περιστρεφόμενο αστέρα. Με κόκκινο παριστάνεται η επιφάνεια σταθερής πυκνότητας του μη περιστρεφόμενου αστέρα, ενώ με μπλε είναι αυτή του περιστρεφόμενου. a είναι η ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα ενώ r αυτή του περιστρεφόμενου και ξ είναι η διαφορά τους.

7.1.1 Μονοπολικές εξισώσεις

Προκειμένου να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των μονοπολικών διορθώσεων στο στατικό αστρικό μοντέλο θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις Einstein (2.7). Έτσι, για τις μονοπολικές εξισώσεις παίρνουμε χρησιμοποιώντας μόνο τους όρους δεύτερης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ με $l = 0$ στις $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$ και $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$ συνιστώσεις των εξισώσεων πεδίου Einstein, που είναι οι ακόλουθες,

$$\begin{aligned} \frac{dm_0}{dr} &= 4\pi r^2 \frac{(p + \epsilon)}{C_s^2} p_0 + \frac{r^4}{12} e^{-2\nu-2\lambda} (\varpi')^2 - \frac{r^3}{3} \varpi^2 \left(e^{-2\nu-2\lambda} \right)' (7.13\alpha') \\ \frac{dp_0}{dr} &= -4\pi r(p + \epsilon) e^{2\lambda} p_0 - m_0 e^{4\lambda} \left(8\pi p + \frac{1}{r^2} \right) \\ &\quad + \frac{r^3}{12} e^{2\nu} (\varpi')^2 + \frac{1}{3} \frac{d}{dr} (\varpi r^2 e^{-2\nu}). \end{aligned} \quad (7.13\beta')$$

Επιπλέον, η διόρθωση δεύτερης τάξης h_0 της χρονικής συνιστώσας του μετρικού τανυστή μπορεί να υπολογιστεί από την ακόλουθη αλγεβρική σχέση,

$$h_0 = -p_0 + \frac{1}{3} r^2 \varpi^2 e^{-2\nu} + C, \quad (7.14)$$

Η τιμή της σταθεράς ωντα προσδιοριστεί από τη συνθήκη συνέχειας στην επιφάνεια του αστέρα και προκύπτει να είναι,

$$C = p_0(R) - \frac{1}{3}R^2 e^{2\lambda(R)}(\varpi(R))^2 - e^{2\lambda(R)} \frac{m_0(R)}{R}, \quad (7.15)$$

Ολοκληρώνοντας αριθμητικά τις εξισώσεις (7.13β'), (7.13β') από το κέντρο προς την επιφάνεια του αστέρα, με αρχικές συνθήκες,

$$p_0(0) = 0, \quad m_0(0) = 0, \quad (7.16)$$

παίρνουμε τις μονοπολικές διορθώσεις στο σφαιρικό μοντέλο. Η μονοπολική διόρθωση στη μάζα και στην ακτίνα του αστέρα, είναι αντίστοιχα,

$$\delta M = m_0(R) + \frac{J^2}{R^3}, \quad (7.17)$$

$$\xi_0(R) = p_0 \frac{R}{M}(R - 2M), \quad (7.18)$$

όπου J, M είναι η στροφορμή και η μάζα του αστέρα αντίστοιχα.

7.1.2 Τετραπολικές εξισώσεις

Την παραμόρφωση της επιφάνειας του αστεριού λόγω περιστροφής ωντα την πάρουμε από τις δεύτερης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ τετραπολικές εξισώσεις με $l = 2$. Επιπλέον, ωντα βρούμε και τις διαφορικές εξισώσεις που περιγράφουν τις τετραπολικές συναρτήσεις του στατικού μοντέλου, h_2, k_2, m_2 . Για το σκοπό αυτό ωντα χρησιμοποιήσουμε τις $R_{\theta\theta} - R_{\phi\phi} = 8\pi(T_{\theta\theta} - T_{\phi\phi})$, $G_{rr} = 8\pi T_{rr}$ και $G_{r\theta} = 0$, εξισώσεις πεδίου Einstein για $l = 2$. Έτσι παίρνουμε αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dr} &= -2\nu' h_2 \\ &+ \frac{r^4}{6} \left(\frac{1}{r} + \nu' \right) e^{-2\nu} \left[16\pi(p + \epsilon)\varpi^2 + e^{-2\lambda}(\varpi')^2 \right] \end{aligned} \quad (7.19\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{dh_2}{dr} &= \left[-2\nu' + \frac{e^{2\lambda}}{\nu'} \left(4\pi(p + \epsilon) - \frac{2m}{r^3} \right) \right] h_2 - \frac{2}{r^2\nu'} e^{2\lambda} v_2 \\ &+ \frac{r^3}{6} e^{-2\nu-2\lambda} (\varpi')^2 \left(r\nu' - \frac{e^{2\lambda}}{2r\nu'} \right) \\ &+ \frac{8\pi}{3} r^3 e^{-2\nu} \varpi^2 (p + \epsilon) \left(r\nu' - \frac{e^{2\lambda}}{2r\nu'} \right) \end{aligned} \quad (7.19\beta')$$

$$h_2 = -e^{2\lambda} \frac{m_2}{r} + \frac{8\pi}{3} r^4 e^{-2\nu} \varpi^2 (p + \epsilon) - \frac{r^4}{6} e^{-2\nu-2\lambda} (\varpi')^2, \quad (7.19\gamma')$$

όπου έχουμε εισάγει τη μεταβλητή $v_2 = h_2 + k_2$ για λόγους απλότητας στην αριθμητική ολοκλήρωση. Οι δύο πρώτες εξισώσεις είναι συνήθεις συζευγμένες διαφορικές εξισώσεις, τις οποίες πρέπει να λύσουμε με κατάλληλες οριακές

συνθήκες στην επιφάνεια του αστέρα. Προκειμένου να αποφύγουμε την επιβολή οριακών συνθηκών στην επιφάνεια κατά την αριθμητική ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων, η οποία μπορεί να προκαλέσει αριθμητικές ανακρίβεις, προτιμήσαμε μια άλλη μέθοδο επίλυσης τους. Πιο συγκεκριμένα όμως τις μετατρέψουμε σε μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης ως προς v_2 και στη συνέχεια όμως λύσουμε αυτήν αριθμητικά. Παραγωγίζοντας την (7.19α') ακόμα μια φορά και χρησιμοποιώντας την (7.19β') για να αντικαταστήσουμε την h'_2 στην εξίσωση που προκύπτει παίρνουμε την ακόλουθη δεύτερης τάξης εξίσωση για την μεταβλητή v_2 ,

$$v''_2 - \left(A_1 + \frac{\nu''}{\nu'} \right) v'_2 + \nu' A_2 v_2 = - \left(A_1 + \frac{\nu''}{\nu'} \right) S_1 - \nu' S_2 + S'_1 \quad (7.20)$$

όπου,

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{e^{2\lambda}}{\nu'} \left(4\pi(p+\epsilon) - \frac{2m}{r^3} \right) - 2\nu', \\ A_2 &= \frac{2e^{2\lambda}}{r^2\nu'}, \\ S_1 &= \frac{r^4}{6} e^{-2\nu} \left(\frac{1}{r} + \nu' \right) \left[16\pi(p+\epsilon)\varpi^2 + e^{-2\lambda}(\varpi')^2 \right], \\ S_2 &= \frac{r^3}{6} e^{-2\nu-2\lambda} (\varpi')^2 \left(r\nu' - \frac{e^{2\lambda}}{2r\nu'} \right) + \frac{8\pi}{3} r^3 e^{-2\nu} \varpi^2 (p+\epsilon) \left(r\nu' + \frac{e^{2\lambda}}{2r\nu'} \right). \end{aligned}$$

Θα περιγράψουμε την εναλλακτική μέθοδο που όμως χρησιμοποιήσουμε για να ολοκληρώσουμε αριθμητικά την παραπάνω διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης. Έστω για παράδειγμα η ακόλουθη συνήθης Δ.Ε. δεύτερης τάξης,

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x) \quad (7.21)$$

ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[x_1, x_2]$. Αν χρησιμοποιήσουμε εξισώσεις διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας για την διακριτοποίηση της όμως έχουμε,

$$\left[\frac{1}{\Delta x} + \frac{f(x_i)}{2\Delta x} \right] y_{i+1} + \left[g(x_i) - \frac{2}{\Delta x} \right] y_i + \left[\frac{1}{\Delta x} - \frac{f(x_i)}{2\Delta x} \right] y_{i-1} = h(x_i) \quad (7.22)$$

Η παραπάνω εξίσωση διαφορών μπορεί να υεωρηθεί σαν ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα y_i του οποίου ο πίνακας των συντελεστών είναι ο ακόλουθος τριδιαγώνιος,

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & \\ \dots & g(x_i) - \frac{2}{\Delta x} & \frac{1}{\Delta x} - \frac{f(x_i)}{2\Delta x} & 0 \\ \dots & \frac{1}{\Delta x} + \frac{f(x_i)}{2\Delta x} & \ddots & 0 \\ \dots & 0 & h & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ y_{i-1} \\ y_i \\ y_{i+1} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ h(x_{i-1}) \\ h(x_i) \\ h(x_{i+1}) \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (7.23)$$

Έτσι με μια απλή αντιστροφή του πίνακα με αριθμητική μέθοδο παίρνουμε άμεσα την λύση, χωρίς να χρειαστεί να επιβάλλουμε οριακές συνθήκες.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο αυτή στην (7.20) παίρνουμε το προφίλ των τετραπολικών διορθώσεων για την τετραπολική συνάρτηση του στατικού μοντέλου v_2 και στη συνέχεια της h_2 ενώ από την εξίσωση (7.19γ') παίρνουμε το προφίλ των διορθώσεων για μάζα m_2 . Τέλος η τετραπολική διόρθωση στην πίεση p_2 δίνεται από το αντίστοιχο τετραπολικό μέρος της εξίσωσης υδροστατικής ισορροπίας για $l = 2$ και είναι,

$$p_2 = -h_2 - \frac{r^2}{3} e^{-2\nu} \varpi^2. \quad (7.24)$$

7.2 Εξισώσεις διαταραχών

Πριν προχωρήσουμε στην παραγωγή των διαταραγμένων εξισώσεων κίνησης του ρευστού (3.38), στην δεύτερη τάξη προσέγγισης ως προς την περιστροφή, αξίζει να αναφερθεί το εξής. Για να αποφύγουμε την εμφάνιση αρνητικών προσήμων στους όρους με τις χωρικές παραγώγους στις τελικές εξισώσεις, όπως στην περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου, θα προσθέσουμε ένα μείον στους ορισμούς για τις διαταραχές των ταχυτήτων σε σχέση με τους ορισμούς που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Έτσι, τελικά θα χρησιμοποιήσουμε τους παρακάτω ορισμούς για τις διαταραγμένες ταχύτητες :

$$\delta u_r = -e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm} Y_{lm}, \quad (7.25\alpha')$$

$$\delta u_\theta = -e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(V_{lm} \frac{\partial}{\partial \theta} - U_{lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{lm}, \quad (7.25\beta')$$

$$\delta u_\phi = -e^\nu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left(V_{lm} \frac{\partial}{\partial \phi} - U_{lm} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) Y_{lm}. \quad (7.25\gamma')$$

Επιπλέον δίνουμε διαταραχές στην πίεση και στην πυκνότητα ενέργειας του αστρικού ρευστού ως ακολούθως,

$$\delta P = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta P Y_{lm}, \quad (7.26)$$

$$\delta E = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \delta E Y_{lm}, \quad (7.27)$$

οι οποίες λόγω πλέον της παραμόρφωσης του αστέρα λόγω περιστροφής (7.8), (7.9) θα είναι συναρτήσεις των r και θ . Αυτό έχει σαν άμεση συνέπεια, η

ταχύτητα του ήχου, που δίνεται από την σχέση,

$$C_{s,ROT}^2 = \frac{dP}{dE}, \quad (7.28)$$

να είναι κι αυτή συνάρτηση δύο μεταβλητών και όχι μιας όπως στην πρώτης τάξης προσέγγιση. Έτσι μπορεί να εκφραστεί σαν συνάρτηση της ταχύτητας του ήχου C_s^2 ως εξής,

$$\frac{dP}{dE} = C_s^2 - \varepsilon^2 \frac{(C_s^2)'}{\nu'} [p_0 + p_2 P_2(\cos \theta)], \quad (7.29)$$

όπου C_s^2 είναι η ταχύτητα του ήχου στην προσέγγιση πρώτης τάξης, δηλαδή,

$$C_s^2 = \frac{dp}{d\epsilon}. \quad (7.30)$$

Κρατώντας μέχρι και δεύτερης τάξης, $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, όρους ως προς την περιστροφή, αλλά και μηδενίζοντας όλες τις χωροχρονικές διαταραχές, από τις t, r συνιστώσεις των διαταραχμένων εξισώσεων του ρευστού (3.38) έχουμε,

$$\begin{aligned} A_{lm}^{(t)} Y_{lm} &+ \left(B_{lm}^{(t)} + \bar{B}_{lm}^{(t)} \cos \theta \right) \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \\ &+ \left(C_{lm}^{(t)} + \bar{C}_{lm}^{(t)} \cos \theta \right) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + \bar{D}_{lm}^{(t)} \sin^2 \theta Y_{lm} = 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

$$A_{lm}^{(r)} Y_{lm} + B_{lm}^{(r)} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + C_{lm}^{(r)} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + \bar{D}_{lm}^{(r)} \sin^2 \theta Y_{lm} = 0, \quad (7.32)$$

ενώ από τις θ, ϕ συνιστώσεις παίρνουμε αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} &\left(a_{lm} + \tilde{a}_{lm} \cos \theta + \bar{a}_{lm}^{(\theta)} \sin^2 \theta \right) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \\ &- \left(b_{lm} + \tilde{b}_{lm} \cos \theta + \bar{b}_{lm}^{(\theta)} \sin^2 \theta \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \\ &+ \bar{c}_{lm} \sin \theta \cos \theta Y_{lm} = 0, \end{aligned} \quad (7.33)$$

$$\begin{aligned} &\left(b_{lm} + \tilde{b}_{lm} \cos \theta + \bar{b}_{lm}^{(\phi)} \sin^2 \theta \right) \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \\ &+ \left(a_{lm} + \tilde{a}_{lm} \cos \theta + \bar{a}_{lm}^{(\phi)} \sin^2 \theta \right) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \\ &+ d_{lm} \sin \theta Y_{lm} = 0, \end{aligned} \quad (7.34)$$

όπου οι συντελεστές $A, \tilde{A}, \bar{A}, B, \tilde{B}, \bar{B}, C, \tilde{C}, \bar{C}, \bar{D}, a, \tilde{a}, \bar{a}, b, \tilde{b}, \bar{b}, d, \bar{c}$ είναι συνδυασμοί των συναρτήσεων που περιγράφουν τις διαταραχές και των ποσοτήτων του στατικού μοντέλου και επομένως συναρτήσεις των μεταβλητών r, t . Οι επιγεγραμμένοι συντελεστές είναι αυτοί που εμφανίζονται επιπλέον σε σχέση με τις εξισώσεις πρώτης τάξης και περιέχουν μόνο δεύτερης τάξης όρους ως προς την περιστροφή. Οι αναλυτικές εκφράσεις αυτών δίνονται στο

Παράρτημα Γ'. Για να απαλείψουμε την γωνιακή εξάρτηση από τις παραπάνω εξισώσεις όπως χρησιμοποιήσουμε επιπλέον από αυτά που χρησιμοποιήθηκαν στο κεφάλαιο 5, τα ακόλουθα ολοκληρώματα σφαιρικών αρμονικών,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1^{\pm 2} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{lm}^* \sin^2 \theta Y_{l'm'} d\Omega \\ &= -Q_{l+1,m} Q_{l+2,m} A_{l+2,m} \\ &- Q_{l,m} Q_{l-1,m} A_{l-2,m} \\ &+ (1 - Q_{l+1,m}^2 - Q_{l,m}^2) A_{l,m} \end{aligned} \quad (7.35)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2^{\pm 2} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int \frac{\partial Y_{lm}^*}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta Y_{l'm'} d\Omega \\ &= l Q_{l+1,m} Q_{l+2,m} A_{l+2,m} \\ &- (l+1) Q_{l,m} Q_{l-1,m} A_{l-2,m} \\ &+ \{l Q_{l+1,m}^2 - (l+1) Q_{l,m}^2 + 1\} A_{l,m} \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_3^{\pm 2} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int Y_{lm}^* \sin \theta \cos \theta \frac{\partial Y_{l'm'}}{\partial \theta} d\Omega \\ &= -(l+3) Q_{l+1,m} Q_{l+2,m} A_{l+2,m} \\ &+ (l-2) Q_{l,m} Q_{l-1,m} A_{l-2,m} \\ &+ \{l Q_{l+1,m}^2 - (l+1) Q_{l,m}^2\} A_{l,m} \end{aligned} \quad (7.37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4^{\pm 2} A &:= \sum_{l'm'} A_{l'm'} \int \frac{\partial Y_{lm}^*}{\partial \theta} \sin^2 \theta \frac{\partial Y_{l'm'}}{\partial \theta} d\Omega \\ &= -l(l+3) Q_{l+2,m} Q_{l+1} A_{l+2,m} \\ &- (l-2)(l+1) Q_{l,m} Q_{l-1,m} A_{l-2,m} \\ &+ \{l^2 Q_{l+1,m}^2 + (l+1)^2 Q_{l,m}^2\} A_{l,m} \end{aligned} \quad (7.38)$$

όπου μεταξύ αυτών ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

$$\mathcal{L}_2^{\pm 2} = \frac{m^2}{\Lambda} + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1}, \quad (7.39)$$

$$\mathcal{L}_1^{\pm 2} = \frac{m^2}{\Lambda} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1}. \quad (7.40)$$

Τελικά, μετά από την απαλοιφή των γωνιακών συναρτήσεων, παίρνουμε,

$$A_{lm}^{(t)} + \text{im} \left(C_{lm}^{(t)} + \mathcal{L}_4^{\pm 1} \bar{C}_{lm}^{(t)} \right) + \mathcal{L}_1^{\pm 1} B_{lm}^{(t)} + \mathcal{L}_4^{\pm 2} \bar{B}_{lm}^{(t)} + \mathcal{L}_1^{\pm 2} \bar{D}_{lm}^{(t)} = 0, \quad (7.41)$$

$$A_{lm}^{(r)} + \text{im} C_{lm}^{(r)} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} B_{lm}^{(r)} + \mathcal{L}_1^{\pm 2} \bar{D}_{lm}^{(r)} = 0, \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \Lambda a_{lm} &- \text{im} \left\{ \tilde{b}_{lm} + d_{lm} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \bar{b}_{lm}^{(\phi)} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} \bar{b}_{lm}^{(\theta)} \right\} \\ &+ \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{a}_{lm} + m^2 \bar{a}_{lm}^{(\phi)} + \mathcal{L}_2^{\pm 2} \bar{c}_{lm} + \mathcal{L}_4^{\pm 2} \bar{a}_{lm}^{(\theta)} = 0, \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} \Lambda b_{lm} &+ im \left\{ \tilde{a}_{lm} + \mathcal{L}_4^{\pm 1} \bar{c}_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} \bar{a}_{lm}^{(\theta)} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \bar{a}_{lm}^{(\phi)} \right\} \\ &+ \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{b}_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} d_{lm} + \mathcal{L}_4^{\pm 2} \bar{b}_{lm}^{(\phi)} + m^2 \bar{b}_{lm}^{(\theta)} = 0. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Από τις τελευταίες αυτές εξισώσεις εύκολα διαπιστώνουμε ότι με την εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης εμφανίζονται επιπλέον συζεύξεις (couplings) μεταξύ των συναρτήσεων που περιγράφουν τις διαταραχές με αρμονικούς δείκτες l και $l \pm 2$. Έτσι, μπορούμε να γράψουμε συμβολικά το σύστημα των εξισώσεων, όπως στην περίπτωση της πρώτης τάξης ως εξής :

$$A_{l,m} + im \varepsilon f_1 A_{l,m} + \varepsilon g_1 \mathcal{L}_i^{\pm 1} P_{l,m} + \varepsilon^2 h_1 \mathcal{L}_i^{\pm 2} A_{l,m} = 0 \quad (7.45)$$

$$P_{l,m} + im \varepsilon f_2 P_{l,m} + \varepsilon g_2 \mathcal{L}_i^{\pm 1} A_{l,m} + \varepsilon^2 h_2 \mathcal{L}_i^{\pm 2} P_{l+1,m} = 0, \quad (7.46)$$

όπου με A και P συμβολίζουμε αντίστοιχα τις αξονικές και πολικές συναρτήσεις διαταραχών ενώ οι συναρτήσεις f_i , g_i , h_i εξαρτώνται μόνο από τις ποσότητες του στατικού μοντέλου. Όπως φαίνεται καθαρά από την παραπάνω συμβολική μορφή γραφής του συστήματος των εξισώσεων η εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης ως προς την παράμετρο περιστροφής ε , εκτός από τις συνηθισμένες συζεύξεις των συναρτήσεων διαταραχών που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 4, εισάγει επιπλέον συζεύξεις μεταξύ των συναρτήσεων διαταραχών της ίδιας parity με αρμονικό δείκτη l και $l \pm 2$. Παρά την εμφάνιση όμως των νέων αυτών συζεύξεων τα δύο ανεξάρτητα υποσυστήματα εξισώσεων, αξονικώς άγον και πολικώς άγον, δεν αναμιγνύονται όπως είναι άλλωστε αναμενόμενο μια που ακόμα και ο βραδέως περιστρεφόμενος αστέρας είναι αναλογίωτος σε μετασχηματισμούς στροφής parity.

Το αρχικό σύστημα εξισώσεων, παραλείποντας τους αρμονικούς δείκτες στις συναρτήσεις διαταραχών για λόγους απλότητας, που προκύπτει είναι το ακόλουθο :

$$\begin{aligned} \dot{H} + im\Omega H &= e^{2\nu-2\lambda} C_s^2 \left(1 - \frac{2\hat{m}e^{2\lambda}}{r} - C \right) R' \\ &- \frac{\Lambda}{r^2} e^{2\nu} C_s^2 (1 - 2k_2 - C) V \\ &+ e^{2\nu-2\lambda} \left\{ C_s^2 \left[\left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) (1 - C) + \hat{h}' + 2k'_2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \nu' - \hat{h}' + \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (2r\nu'\hat{m} - C_s^2 (r\hat{m}' + (4r\nu' + 3)\hat{m})) \right\} u_1 \\ &+ im\varpi C_s^2 H - imC_s^2 \varpi^2 (\mathcal{L}_1^{\pm 1} U + imV) \\ &- 3C_s^2 \left[\varpi^2 + \frac{e^{2\nu}}{r^2} \left(\frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 + 2h_2 + p_2 + \epsilon_2 \right) \right] (\mathcal{L}_3^{\pm 2} V - im\mathcal{L}_4^{\pm 1} U) \\ &+ \mathcal{L}_1^{\pm 2} D^{(t)}, \\ \dot{R} + im\Omega R &= \left(1 + 2\hat{h} \right) H' + \hat{h}' H \\ &- \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] (imV + \mathcal{L}_1^{\pm 1} U) \end{aligned} \quad (7.47)$$

$$+ \frac{3}{2} \mathcal{L}_1^{\pm 2} \{ (p_2 - h_2) H' - h'_2 H \}, \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} + \text{im}\Omega V &= (1 + 2\hat{h})H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathcal{L}_3^{\pm 1}U + \text{im}V) \\ &+ \frac{\text{im}}{\Lambda} \left\{ -\varpi r^2 e^{-2\lambda} C_s^2 R' + \varpi \Lambda C_s^2 V \right. \\ &- r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + \varpi \left(C_s^2 \left(2\nu - \lambda' + \frac{2}{r} \right) + \nu' - \frac{2}{r} \right) \right] R \left. \right\} \\ &- 3h_2 \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 2} H + \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 2} H \\ &- \frac{3m^2}{2\Lambda} [h_2 - p_2 + 2C_s^2 (p_2 + h_2)] H, \end{aligned} \quad (7.49)$$

$$\begin{aligned} \dot{U} + \text{im}\Omega U &= \frac{2\varpi}{\Lambda} (\text{im}U - \mathcal{L}_3^{\pm 1}V) \\ &+ \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left\{ r^2 e^{-2\lambda} \varpi C_s^2 R' - \varpi \Lambda C_s^2 V \right. \\ &+ r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + \varpi \left(C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) + \nu' - \frac{2}{r} \right) \right] R \left. \right\} \\ &+ \text{im} \frac{3}{2} [(p_2 - h_2) - 2C_s^2 (p_2 + h_2)] H \left. \right\} \\ &- \text{im} \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 1} 3h_2 H + \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \text{im} \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_1^{\pm 1} H \\ &= \frac{2\varpi}{\Lambda} (\text{im}U - \mathcal{L}_3^{\pm 1}V) \\ &+ \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left\{ r^2 e^{-2\lambda} \varpi C_s^2 R' - \varpi \Lambda C_s^2 V \right. \\ &+ r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + \varpi \left(C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) + \nu' - \frac{2}{r} \right) \right] R \left. \right\} \\ &- 3h_2 \frac{1}{\Lambda} \text{im} \mathcal{L}_4^{\pm 1} H - 3C_s^2 (p_2 + h_2) \frac{1}{\Lambda} \text{im} \mathcal{L}_2^{\pm 1} H \\ &- 3(p_2 - h_2) \frac{1}{\Lambda} \text{im} \mathcal{L}_4^{\pm 1} H. \end{aligned} \quad (7.50)$$

Οι εξισώσεις για τις μεταβλητές V και U μπορούν να γραφούν απλούστερα με την χρήση της διαταραχμένης εξισωσης πρώτης τάξης για την ενθαλπία H (4.1β') και απλουστεύοντας τα ολοκληρώματα στην εξισωση για την μεταβλητή U , ως εξής,

$$\begin{aligned} \dot{V} + \text{im}\Omega V &= (1 + \hat{h} - \hat{p} - \hat{\epsilon})H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathcal{L}_3^{\pm 1}U + \text{im}V) \\ &+ \frac{\text{im}}{\Lambda} \left\{ -\varpi r^2 e^{-2\nu} \dot{H} - r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R \right. \\ &+ \text{im} r^2 e^{-2\nu} (C_s^2 \varpi^2 - \Omega \varpi) H \left. \right\} \\ &- 3h_2 \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 2} H + \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 2} H \end{aligned}$$

$$- \frac{3m^2}{2\Lambda} [h_2 - p_2 + 2C_s^2(p_2 + h_2)] H, \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{U} + im\Omega U &= \frac{2\varpi}{\Lambda} (imU - \mathcal{L}_3^{\pm 1}V) \\ &+ \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left\{ \varpi r^2 e^{-2\nu} \dot{H} + r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R \right. \\ &- imr^2 e^{-2\nu} (C_s^2 \varpi^2 - \Omega \varpi) H \} \\ &- 3p_2 \frac{1}{\Lambda} im\mathcal{L}_4^{\pm 1} H - 3C_s^2 (p_2 + h_2) \frac{1}{\Lambda} im\mathcal{L}_2^{\pm 1} H. \end{aligned} \quad (7.52)$$

Επιπλέον, ορίζοντας όπως στο κεφάλαιο 4, τις δύο νέες μεταβλητές \tilde{V} (4.7) και \tilde{U} (4.8), οι διαταραγμένες εξισώσεις παίρνουν την ακόλουθη μορφή, (όπου οι νέες περισπώμενες μεταβλητές έχουν αντικατασταθεί μετά τον μετασχηματισμό και πάλι με μη περισπώμενες για λόγους ταχύτητας και απλότητας)

$$\begin{aligned} \dot{H} + im\Omega H &= e^{2\nu-2\lambda} C_s^2 \left(1 - \frac{2\hat{m}e^{2\lambda}}{r} - C \right) R' \\ &- \frac{\Lambda}{r^2} e^{2\nu} C_s^2 (1 - 2k_2 - C) V \\ &+ e^{2\nu-2\lambda} \left\{ C_s^2 \left[\left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) (1 - C) + \hat{h}' + 2k'_2 \right] \right. \\ &- \left. \nu' - \hat{h}' + \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (2r\nu'\hat{m} - C_s^2 (r\hat{m}' + (4r\nu' + 3)\hat{m})) \right\} R \\ &+ 2im\varpi C_s^2 H - imC_s^2 \varpi^2 (\mathcal{L}_1^{\pm 1} U + imV) \\ &- 3C_s^2 \left[\varpi^2 + \frac{e^{2\nu}}{r^2} \left(\frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 + 2h_2 + p_2 + \epsilon_2 \right) \right] (\mathcal{L}_3^{\pm 2} V - im\mathcal{L}_4^{\pm 1} U) \\ &+ \mathcal{L}_1^{\pm 2} D^{(t)} \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$\begin{aligned} \dot{R} + im\Omega R &= \left(1 + 2\hat{h} \right) H' + \hat{h}' H \\ &- \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] (imV + \mathcal{L}_1^{\pm 1} U) \\ &+ \mathcal{L}_1^{\pm 2} \frac{3}{2} \{ (p_2 - h_2) H' - h'_2 H \} \\ &- \varpi r^2 e^{-2\nu} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] \left(\frac{m^2}{\Lambda} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \right) H \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} + im\Omega V &= (1 + 2\hat{h})H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathcal{L}_3^{\pm 1} U + imV) \\ &+ \frac{2}{\Lambda} r^2 e^{-2\nu} \varpi^2 \left(\frac{m^2}{\Lambda} + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \right) H \\ &+ \frac{im}{\Lambda} \left\{ -r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R + imr^2 \varpi^2 C_s^2 H \right\} \\ &- 3h_2 \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 2} H + \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 2} H \end{aligned}$$

$$- \frac{3m^2}{2\Lambda} [h_2 - p_2 + 2C_s^2(p_2 + h_2)] H \quad (7.55)$$

$$\begin{aligned} \dot{U} + im\Omega U &= \frac{2\varpi}{\Lambda} (imU - \mathcal{L}_3^{\pm 1}V) + \frac{im}{\Lambda} 2\varpi^2 r^2 e^{-2\nu} \left(\mathcal{L}_3^{\pm 1} \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \right) H \\ &+ \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} \left\{ r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R - imr^2 \varpi^2 C_s^2 e^{-2\nu} H \right\} \\ &- 3p_2 im \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 1} H - 3C_s^2 (p_2 + h_2) im \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} H. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Χρησιμοποιώντας τις ολοκληρωτικές σχέσεις (7.39), (7.40) οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να γραφούν ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \dot{H} + im\Omega H &= e^{2\nu-2\lambda} C_s^2 \left(1 - \frac{2\hat{m}e^{2\lambda}}{r} - C \right) R' \\ &- \frac{\Lambda}{r^2} e^{2\nu} C_s^2 (1 - 2k_2 - C) V \\ &+ e^{2\nu-2\lambda} \left\{ C_s^2 \left[\left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) (1 - C) + \hat{h}' + 2k'_2 \right] \right. \\ &\left. - \nu' - \hat{h}' + \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (2r\nu'\hat{m} - C_s^2 (r\hat{m}' + (4r\nu' + 3)\hat{m})) \right\} R \\ &+ 2im\varpi C_s^2 H - imC_s^2 \varpi^2 (\mathcal{L}_1^{\pm 1}U + imV) \\ &- 3C_s^2 \left[\varpi^2 + \frac{e^{2\nu}}{r^2} \left(\frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 + 2h_2 + p_2 + \epsilon_2 \right) \right] (\mathcal{L}_3^{\pm 2}V - im\mathcal{L}_4^{\pm 1}U) \\ &+ \mathcal{L}_1^{\pm 2} D^{(t)} \end{aligned} \quad (7.57)$$

$$\begin{aligned} \dot{R} + im\Omega R &= (1 + 2\hat{h}) H' + \hat{h}' H \\ &- \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] (imV + \mathcal{L}_1^{\pm 1}U) \\ &+ \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \mathcal{L}_1^{\pm 2} H' \\ &- \left\{ \frac{3}{2} h'_2 + \varpi r^2 e^{-2\nu} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] \right\} \mathcal{L}_1^{\pm 2} H \end{aligned} \quad (7.58)$$

$$\begin{aligned} \dot{V} + im\Omega V &= (1 + 2\hat{h}) H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathcal{L}_3^{\pm 1}U + imV) \\ &+ \frac{1}{\Lambda} (2r^2 e^{-2\nu} \varpi^2 - 3h_2) \mathcal{L}_2^{\pm 2} H \\ &+ \frac{im}{\Lambda} \left\{ -r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R \right\} \\ &+ \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 2} H + \frac{m^2}{\Lambda} \frac{3}{2} (p_2 - h_2) H \end{aligned} \quad (7.59)$$

$$\dot{U} + im\Omega U = \frac{2\varpi}{\Lambda} (imU - \mathcal{L}_3^{\pm 1}V) + r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} R$$

$$+ \frac{im}{\Lambda} (2\varpi^2 r^2 e^{-2\nu} - 3p_2) \mathcal{L}_4^{\pm 1} H. \quad (7.60)$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (7.24) του στατικού μοντέλου οι τελευταίες δύο εξισώσεις μπορούν να απλοποιηθούν περαιτέρω, ως εξής :

$$\begin{aligned} \dot{V} + im\Omega V &= (1 + 2\hat{h})H + \frac{2\varpi}{\Lambda} (\mathcal{L}_3^{\pm 1} U + imV) - \frac{3}{\Lambda} (2p_2 + 3h_2) \mathcal{L}_2^{\pm 2} H \\ &+ \frac{im}{\Lambda} \left\{ -r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] R \right\} \\ &+ \frac{3}{2} (p_2 - h_2) \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_4^{\pm 2} H + \frac{m^2}{\Lambda} \frac{3}{2} (p_2 - h_2) H, \end{aligned} \quad (7.61)$$

$$\begin{aligned} \dot{U} + im\Omega U &= \frac{2\varpi}{\Lambda} (imU - \mathcal{L}_3^{\pm 1} V) \\ &+ r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] \frac{1}{\Lambda} \mathcal{L}_2^{\pm 1} R \\ &- \frac{3im}{\Lambda} (3p_2 + 2h_2) \mathcal{L}_4^{\pm 1} H, \end{aligned} \quad (7.62)$$

όπου,

$$\hat{m} = m_0 + m_2 \quad (7.63)$$

$$\hat{p} = p_0 + p_2 \quad (7.64)$$

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0 + \epsilon_2 \quad (7.65)$$

$$\hat{h} = h_0 + h_2 \quad (7.66)$$

$$C = \frac{(C_s^2)'}{\nu' C_s^2} \hat{p} \quad (7.67)$$

$$D = e^{-2\nu} r^2 \varpi^2 C_s^2 (2C_s^2 - 1) + 3 \frac{(C_s^2)'}{\nu'} p_2 \quad (7.68)$$

είναι δεύτερης τάξης ακτινικές συναρτήσεις του στατικού αστρικού μοντέλου.

7.3 Οριακές συνθήκες

Η επιβολή οριακών συνθηκών είναι ένα σημαντικό μέρος του προβλήματος επίλυσης των εξισώσεων διαταραχών που χρίζει ιδιαίτερης προσοχής. Τα σημεία του αστέρα που επιβάλλονται οριακών συνθηκών είναι το κέντρο και η επιφάνειά του. Πιο συγκεκριμένα στο κέντρο του αστέρα το πρόβλημα που εμφανίζεται ως συνήθως είναι αποκλίνοντες συντελεστές του στατικού μοντέλου της μορφής $1/r$ ή $1/r^2$ κ.ο.κ. Για να αποφύγουμε την εμφάνιση όρων αυτής της μορφής στις εξισώσεις, προσπαθούμε να ορίσουμε καινούργιες μεταβλητές έτσι ώστε η εμφάνιση αυτών των όρων να μπορεί να αποφευχθεί. Αυτό φυσικά δεν είναι πάντα δυνατό και σε τέτοιες περιπτώσεις αυτό που κάνουμε για να αποφύγουμε αριθμητικές αστάθειες, είναι να μην λαμβάνουμε στην αριθμητική εξέλιξη τα πρώτα 2-3 σημεία του αριθμητικού πλέγματος κοντά στο κέντρο του αστέρα.

Στην επιφάνεια του αστέρα το πρόβλημα εμφανίζεται χυρίως σε συντελεστές που ο παρανομαστής τους περιέχει την ταχύτητα του ήχου στον αστέρα C_s^2 που στην επιφάνεια του μηδενίζεται. Ας επικεντρωθούμε στην επιφάνεια του αστέρα και ας προχωρήσουμε σε λεπτομερή ανάλυση για την επιβολή της οριακής συνυθήκης. Η επιφάνεια του αστέρα του στατικού μη περιστρεφόμενου αστρικού μοντέλου ορίζεται ως το σημείο στο οποίο η πίεση του μηδενίζεται. Επειδή η περιστροφή του αστέρα, όπως έχει αναφερθεί και στο κεφάλαιο 2.1, θεωρείται ως διαταραχή του μη περιστρεφόμενου μοντέλου, η επιφάνεια του λόγω ακριβώς αυτής της διαταραχής μετατοπίζεται κατά ένα διάνυσμα ξ^i . Έτσι, μπορούμε να αναπτύξουμε σε σειρά Taylor την πίεση γύρω από την ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα ως εξής,

$$\begin{aligned} 0 = P(t, R + \xi^i) &= P(t, R) + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} P(R) \\ &= p(R) + \delta p(t, R) + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} (p(R) + \delta p(t, R)) \\ &= p(R) + \delta p(t, R) + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} p(R) + \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \delta p(t, R) \end{aligned} \quad (7.69)$$

όπου με R συμβολίζεται η ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα. Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέος και επιπλέον χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι στην ακτίνα του μη περιστρεφόμενου αστέρα η πίεση μηδενίζεται $p(R) = 0$, καταλήγουμε τελικά στην ακόλουθη σχέση για την οριακή συνυθήκη,

$$\delta p = -\xi^i \frac{\partial p}{\partial x^i} \quad (7.70)$$

Στην προσέγγιση πρώτης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$, όπου η πίεση είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής μεταβλητής r ,

$$\delta p = -\xi^r p'. \quad (7.71)$$

Με απλές πράξεις και χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του στατικού μοντέλου (2.15) αυτή η εξίσωση καταλήγει να είναι ισοδύναμη με την εξίσωση του Κεφαλαίου 4 για την διαταραχή της ενθαλπίας (4.1β') αν σε αυτήν θέσουμε την ταχύτητα του ήχου $C_s^2 = 0$. Με άλλα λόγια, στην προσέγγιση πρώτης τάξης, η επιβολή της οριακής συνυθήκης στην επιφάνεια του αστέρα στις εξισώσεις διαταραχών γίνεται αυτόματα, αφού από την αριθμητική κατασκευή του στατικού αστρικού μοντέλου η ταχύτητα του ήχου μηδενίζεται στην επιφάνεια του αστέρα.

Στη συνέχεια, προχωρώντας ένα βήμα παραπάνω, θα εισάγουμε και τους όρους δεύτερης τάξης ως προς την παράμετρο περιστροφής ε , στον υπολογισμό μας. Σ' αυτήν την περίπτωση, η πίεση του στατικού μοντέλου δεν είναι συνάρτηση μόνο της ακτινικής μεταβλητής r αλλά και της πολικής γωνίας θ , σύμφωνα με την (7.8). Έτσι το ανάπτυγμα Taylor θα γίνει ως προς δύο μεταβλητές πλέον ως εξής,

$$\delta p + \xi^r \frac{\partial p(r, \theta)}{\partial r} + \xi^\theta \frac{\partial p(r, \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (7.72)$$

Παραγωγίζοντας ως προς τον συντεταγμένο χρόνο, t , την παραπάνω παίρνουμε,

$$\delta \dot{p} + \dot{\xi}^r \frac{\partial p(r, \theta)}{\partial r} + \dot{\xi}^\theta \frac{\partial p(r, \theta)}{\partial \theta} = 0. \quad (7.73)$$

Χρησιμοποιώντας τον διορθωμένο σε δεύτερη τάξη $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ ορισμό της συνάρτησης της διαταραχής της ενθαλπίας,

$$\begin{aligned} H &= \frac{\delta p}{P + E} \\ &= \frac{\delta p}{(p + \epsilon) [1 + p_0 + \epsilon_0 + (p_2 + \epsilon_2) P_2]}, \end{aligned} \quad (7.74)$$

τη σχέση,

$$\delta u^\mu = \frac{d}{ds} \xi^\mu = \frac{d\xi^\mu}{dx^\nu} \frac{dx^\nu}{ds} = u^\nu \frac{d\xi^\mu}{dx^\nu}, \quad (7.75)$$

όπου το διάνυσμα της τετρα-ταχύτητας περιέχει και όρους δεύτερης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ και δίνεται από την έκφραση,

$$u^\mu = e^{-\nu} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{r^2}{2} \varpi^2 e^{-2\nu} \sin^2 \theta - h_0 - h_2 P_2 \right), 0, 0, \varepsilon \Omega \right], \quad (7.76)$$

συνδυάζοντας κατάλληλα τις σχέσεις (7.73), (7.75) και (7.76), και ολοκληρώνοντας ως προς τις γωνίες θ και ϕ , μέσω των σφαιρικών αρμονικών, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση που περιγράφει την εξέλιξη της διαταραχής της ενθαλπίας την επιφάνεια του αστέρα,

$$\begin{aligned} \dot{H} + \mathrm{i}m\Omega H &= e^{2\nu-2\lambda} \left[\left(1 - \hat{h} - \frac{2e^{2\lambda}}{r} \hat{m} \right) \nu' - \hat{p}' \right] R \\ &\quad - 3e^{2\nu-2\lambda} \left[\left(\frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 - (1 + C_s^2) \epsilon_2 + h_2 + \frac{p_2}{2} \right) \nu' + \frac{p_2}{2} \right] \mathcal{L}_4^{\pm 2} R \\ &\quad - \frac{3e^{2\nu}}{r^2} p_2 (\mathcal{L}_3^{\pm 2} V - \mathrm{i}m \mathcal{L}_4^{\pm 1} U). \end{aligned} \quad (7.77)$$

Η χρήση της παραπάνω εξίσωσης για την εξέλιξη στην επιφάνεια του αστέρα μας εξασφαλίζει την σωστή επιβολή συνοριακών συνθηκών.

7.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Θα προχωρήσουμε στην παράθεση των αριθμητικών αποτελεσμάτων από την μελέτη των εξισώσεων στη δεύτερη τάξη προσέγγισης. Αρχικά κατασκευάσαμε μια ακόλουθη μοντέλων σχετικιστικών πολυτροπικών περιστρεφόμενων αστεριών με διαφορετικές γωνιακές ταχύτητες περιστροφής Ω , και συγκρίναμε τη βελτίωση που δίνει στον προσδιορισμό της μάζας και της ακτίνας η εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης. Η σύγκριση έγινε με βάση αποτελέσματα για διδιάστατα στατικά μοντέλα που παραθέτουν οι Font et. al. [87]. Στη συνέχεια

ολοκληρώσαμε αριθμητικά τις εξισώσεις διαταραχών χρησιμοποιώντας τον αριθμητικό σχήμα Lax-Wendroff δεύτερης τάξης. Μελετήσαμε και παραθέτουμε χωριστά τα αποτελέσματα για την αξονικά συμμετρική περίπτωση, $m = 0$, αλλά και για την γενική περίπτωση των μη αξονικά συμμετρικών διαταραχών, όπου $m \neq 0$.

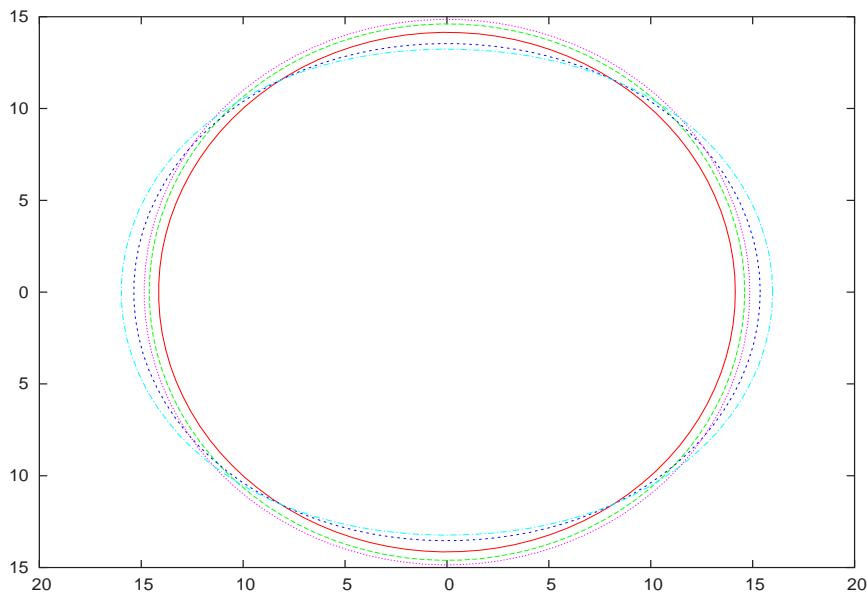
7.4.1 Εξισώσεις στατικού μοντέλου

Χρησιμοποιώντας τις δεύτερης τάξης εξισώσεις για το στατικό μοντέλο μπορούμε να βελτιώσουμε το μοντέλο του Κεφαλαίου 2, εισάγοντας και τις μονοπολικές αλλά και τις τετραπολικές διορθώσεις μέσω των εξισώσεων (7.13) και (7.19) και συγχρίνοντας με αντίστοιχα διδιάστατα ταχέως περιστρεφόμενα μοντέλα που έχουν κατασκευαστεί από τους [87] Ήα ελέγχουμε τα όρια της προσέγγισης μας. Με άλλα λόγια Ήα διαπιστώσουμε μέχρι ποιο ρυθμό περιστροφής η περιγραφή του στατικού μοντέλου με προσέγγιση βραδείας περιστροφής είναι ικανοποιητική, και σε ποιο ποσοστό.

Τα αποτελέσματα της σύγκρισης αυτής δίνονται στον πίνακα (7.1) για την σχετικιστική πολυτροπική εξισωση κατάστασης (2.6), με πολυτροπική σταθερά, $K = 217.86 \text{ km}^2$ και πολυτροπικό εκνέτη $\Gamma = 2$ για έναν αστέρα με κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας $\rho_0 = 5.867 \times 10^{-4}$ σε γεωμετρικές μονάδες ($\rho_0 = 7.914 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$), για 11 διαφορετικούς ρυθμούς περιστροφής ε . Το αστέρι που προκύπτει έχει μάζα $M = 1.4 M_\odot$ και ακτίνα $R = 14.15 \text{ km}$. Με βάση αυτές τις τιμές μάζας και ακτίνας η γωνιακή ταχύτητα Kepler στην προσέγγισή μας προκύπτει $\Omega_K = \sqrt{M/R^3} = 0.8122 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$, ενώ στην διδιάστατη προσέγγιση ταχείας περιστροφής είναι $\Omega_K = 0.5363 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$. Αυτό σημαίνει ότι στην προσέγγιση βραδείας περιστροφής τα αστέρια περιστρέφονται με μικρότερο ποσοστό της ταχύτητας Kepler σε σχέση με την διδιάστατη προσέγγιση ενός ταχέως περιστρεφόμενου αστέρα. Όπως φαίνεται από τον πίνακα αυτό τη μάζα του αστέρα μπορούμε να την προσεγγίσουμε με ακρίβεια της τάξης του 94%, ακόμα και για το πλέον ταχύτερα περιστρεφόμενο αστρικό μοντέλο. Για την ακτίνα, βλέπουμε ότι η προσέγγιση της βραδείας περιστροφής είναι λιγότερο ακριβής. Από το 60% του ορίου Kepler έχουμε απόκλιση από την ακτίνα που υπολογίζεται από το μοντέλο ταχείας περιστροφής σε ποσοστό πάνω από 10%. Η μέγιστη απόκλιση στον υπολογισμό της ακτίνας, για το ταχύτερα περιστρεφόμενο μοντέλο είναι της τάξης του 12%.

Η απόκλιση της προσέγγισης της βραδείας περιστροφής από τα διδιάστατα ταχέως περιστρεφόμενα μοντέλα στην ακτίνα, οφείλεται στην δημιουργία ισημερινών εξογκωμάτων (bulges) καθώς πλησιάζουμε στο όριο της ταχύτητας Kepler, στα διδιάστατα μοντέλα ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων, τα οποία δίνουν επιπλέον συνεισφορά στην ισημερινή ακτίνα του αστέρα, φαινόμενο το οποίο δεν μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από την ανάλυση σε πολυώνυμα Legendre, που κάνουμε στην προσέγγιση βραδείας περιστροφής. Στο σχήμα 7.2 δίνουμε συγκριτικά την ακτίνα του αστέρα που υπολογίζουμε στην πρώτη τάξη και στη συνέχεια την αλλαγή της, με την εισαγωγή των δεύτερης τάξης

μονοπολικών και τετραπολικών διορθώσεων, για δύο διαφορετικές τιμές της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής. Όπως φαίνεται από το σχήμα, όσο μεγαλύτερη είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής Ω ή έναλλαχτικά η παράμετρος περιστροφής ε του αστέρα, τόσο μεγαλύτερη είναι η απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία.



Σχήμα 7.2: Διορθώσεις δεύτερης τάξης στην ακτίνα ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου περιστροφής $\epsilon = 0.423$ και $\epsilon = 0.522$. Με κόκκινο είναι σχεδιασμένη η επιφάνεια του μη περιστρεφόμενου αστέρα, με πράσινο και μωβ είναι οι μονοπολικές διορθώσεις ξ_0 και με μπλε και γαλάζιο είναι οι τετραπολικές διορθώσεις ξ_2 για την ακτίνα για τις δύο παραμέτρους περιστροφής ε αντίστοιχα.

7.4.2 Εξισώσεις διαταραχών

Για την αριθμητική ολοκλήρωση των εξισώσεων διαταραχών δόθηκαν σαν αρχικές διαταραχές Γκαουσιανές αποκλίσεις των τετραπολικών ($l = 2$) συναρτήσεων διαταραχών πίεσης και πυκνότητας, και κατά συνέπεια περιμένουμε την διέγερση όλων των ιδιοσυχνοτήτων για $l = 2$, αλλά και κάποιων για υψηλότερο αλλά και χαμηλότερο αρμονικό δείκτη, λόγω της σύζευξης των εξισώσεων.

Η χρονική αριθμητική εξέλιξη των εξισώσεων διαταραχών στην δεύτερη τάξη προσέγγισης, όπως αναφέραμε και παραπάνω, παρουσίασε επιπλέον δυσκολίες σε σχέση με την περίπτωση της πρώτης τάξης. Παρουσιάστηκαν προβλήματα αριθμητικών ασταθμειών που προέρχονταν από την επιφάνεια του αστέρα και είχαν σαν αποτέλεσμα την εκθετική αύξηση του πλάτους των ταλαντώσεων μετά από ένα χρονικό διάστημα της τάξης των 4 ms. Για την κατανόηση των

Πίνακας 7.1: Διαφορές μεταξύ στατικών μοντέλων σε προσέγγιση βραδείας περιστροφής δεύτερης τάξης και ταχείας περιστροφής, με πολυτροπική εξίσωση κατάστασης $p = K\epsilon^{1+1/n}$, με $n = 1$, $K = 217.86 \text{ km}^2$ και με κεντρική πυκνότητα μάζας ηρεμίας σε γεωμετρικές μονάδες, $\rho_0 = 5.867 \times 10^{-4}$. Οι στήλες στον πίνακα είναι από αριστερά προς τα δεξιά : Η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα Ω , η βαρυτική μάζα και η ισημερινή ακτίνα ταχέως περιστρεφόμενου αστέρα M_{FR} , R_{FR} , η ακτίνα με την μονοπολική και την τετραπολική διόρθωση R_0 , R_2 αντίστοιχα, και η μάζα με την μονοπολική διόρθωση M_0 , στην προσέγγιση βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα. Η τετραπολική διόρθωση της μάζας M_2 , είναι αμελητέα γι' αυτό και παραλείπεται. Η τιμή της ταχύτητας Kepler για το συγκεκριμένο μοντέλο είναι $\Omega_K = \sqrt{M/R^3} = 0.8122 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$

Ω (10^4 s^{-1})	M_{FR} (M_\odot)	M_0 (M_\odot)	R_{FR} (km)	R_0 (km)	R_2 (km)
0.0	1.400	-	14.15	-	-
0.218	1.432	1.429	14.51	14.26	14.45
0.306	1.466	1.458	14.92	14.38	14.77
0.371	1.503	1.485	15.38	14.50	15.06
0.399	1.523	1.499	15.63	14.56	15.21
0.423	1.543	1.511	15.91	14.61	15.37
0.445	1.564	1.523	16.21	14.66	15.48
0.465	1.585	1.534	16.52	14.71	15.60
0.482	1.607	1.544	16.87	14.76	15.70
0.498	1.627	1.554	17.25	14.80	15.81
0.511	1.647	1.562	17.68	14.83	15.90
0.522	1.666	1.569	18.15	14.86	15.98

ασταθειών μελετήσαμε αναλυτικά τις εξισώσεις και για αξονικά συμμετρικές, $m = 0$, και μη αξονικά συμμετρικές, $m \neq 0$, διαταραχές.

Αξονικά συμμετρικές ($m = 0$)

Ας εξετάσουμε σε αυτή την περίπτωση τις ιδιοτιμές των εξισώσεων διαταραχών όπου σαν μέγιστο αρμονικό δείκτη λαμβάνουμε τον $l_{\max} = 2$. Οι εξισώσεις σε αυτήν την περίπτωση γράφονται αναλυτικά ως εξής (όπου ο εκθέτης στις συναρτήσεις διαταραχών δηλώνει τον αρμονικό δείκτη):

$$\begin{aligned}\dot{H}^0 &= e^{2\nu-2\lambda} \left[C_s^2 \left(1 - \frac{2e^{2\lambda}}{r} \hat{m} - C \right) + \frac{1}{3} \left(D + 6C_s^2 \frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 \right) \right] (R^0)' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{45}} e^{2\nu-2\lambda} \left(D + 6C_s^2 \frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 \right) (R^2)' \end{aligned} \quad (7.78)$$

$$\dot{R}^0 = [1 + 2\hat{h} + (p_2 - h_2)](H^0)' - \frac{3}{\sqrt{45}} (p_2 - h_2)(H^2)' \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned}\dot{H}^2 &= e^{2\nu-2\lambda} \left[C_s^2 \left(1 - \frac{2e^{2\lambda}}{r} \hat{m} - C \right) + \frac{5}{21} \left(D + 6C_s^2 \frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 \right) \right] (R^2)' \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{45}} e^{2\nu-2\lambda} \left(D + 6C_s^2 \frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 \right) (R^0)' \end{aligned} \quad (7.80)$$

$$\dot{R}^2 = [1 + 2\hat{h} + \frac{15}{21}(p_2 - h_2)](H^2)' - \frac{3}{\sqrt{45}} (p_2 - h_2)(H^0)' \quad (7.81)$$

Θέτοντας για λόγους απλότητας,

$$M_1 = e^{2\nu-2\lambda} C_s^2 \left(1 - \frac{2e^{2\lambda}}{r} \hat{m} - C \right), \quad (7.82)$$

$$M_2 = e^{2\nu-2\lambda} \left(D + 6C_s^2 \frac{e^{2\lambda}}{r} m_2 \right), \quad (7.83)$$

$$M_3 = 1 + 2\hat{h}, \quad (7.84)$$

$$M_4 = p_2 - h_2. \quad (7.85)$$

έχουμε το χαρακτηριστικό πίνακα του παραπάνω συστήματος,

$$\begin{pmatrix} 0 & M_1 + \frac{1}{3}M_2 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{15}M_2 \\ M_3 + M_4 & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{5}M_4 & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{15}M_2 & 0 & M_1 + \frac{5}{21}M_2 \\ -\frac{\sqrt{5}}{5}M_4 & 0 & M_3 + \frac{5}{7}M_4 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.86)$$

Οι ιδιοτιμές του παραπάνω πίνακα είναι οι ακόλουθες,

$$e_{1,2} = \pm \frac{1}{35} \sqrt{a+b}, \quad (7.87)$$

$$e_{3,4} = \pm \frac{1}{35} \sqrt{a-b}, \quad (7.88)$$

όπου,

$$a = 350M_2M_3 + 390M_2M_4 + 1225M_1M_3 + 1050M_1M_4, \quad (7.89)$$

$$b = \sqrt{30}(35M_2M_3 + 60M_2M_4 + 105M_1M_4). \quad (7.90)$$

Οι κυρίαρχοι όροι στους συντελεστές είναι,

$$M_1 = C_s^2 - \frac{(C_s^2)'}{\nu'} \hat{p}, \quad (7.91)$$

$$M_2 = 3 \frac{(C_s^2)'}{\nu'} p_2, \quad (7.92)$$

$$M_3 = 1, \quad (7.93)$$

$$M_4 = 0, \quad (7.94)$$

κι έτσι οι συντελεστές a και b προκύπτουν ως εξής :

$$a = 10M_2 + 35M_1, \quad (7.95)$$

$$b = \sqrt{30}M_2, \quad (7.96)$$

από τους οποίους προκύπτει η υπόριζη διαφορά προκύπτει να είναι,

$$a - b = 35C_s^2 - 21.43 \frac{(C_s^2)'}{\nu'} p_2 - 35 \frac{(C_s^2)'}{\nu'} p_0. \quad (7.97)$$

Επιπλέον, για την σχετικιστική πολυτροπική καταστατική εξίσωση που χρησιμοποιήσαμε προκύπτει ότι,

$$\frac{(C_s^2)'}{\nu'} = 1 - \Gamma + C_s^2, \quad (7.98)$$

το οποίο για πολυτροπικό δείκτη $\Gamma = 2$, στην επιφάνεια του αστέρα δίνει τελικά,

$$\frac{(C_s^2)'}{\nu'} = -1, \quad (7.99)$$

οπότε τελικά η υπόριζη ποσότητα προκύπτει να είναι,

$$a - b = 21.43p_2 + 35p_0. \quad (7.100)$$

Από το στατικό αστρικό μοντέλο γνωρίζουμε ότι η μονοπολική διόρθωση της πίεσης p_0 είναι πάντα θετική ενώ αντίθετα η αντίστοιχη τετραπολική p_2 πάντα αρνητική. Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο συνδυασμό τιμών των δύο αυτών διορθώσεων είναι δυνατόν να προκύψει αρνητικό υπόριζο με αποτέλεσμα μιγαδική ιδιοτιμή και επομένως αριθμητική αστάθεια. Και πράγματι για τιμές,

$$|p_2| > 1.63|p_0| \quad (7.101)$$

το υπόριζο προκύπτει αρνητικό. Στα σχετικιστικά πολυτροπικά αστρικά μοντέλα που χρησιμοποιήσαμε πράγματι ισχύει $p_2 \simeq 3p_0$, επομένως η αριθμητική εξέλιξη τους είναι πρακτικά αδύνατη. Πράγματι, γράφοντας τον αριθμητικό κώδικα για την εξέλιξη αυτών των εξισώσεων παρατηρούμε μετά από μικρό χρόνικο διάστημα τις συναρτήσεις των διαταραχών να αποκλίνουν κοντά στην επιφάνεια του αστέρα και οδηγούνται σε εκθετική αύξηση του πλάτους.

Μη αξονικά συμμετρικές ($m \neq 0$)

Στην περίπτωση των μη αξονικά συμμετρικών διαταραχών, παρόμοια ανάλυση του συστήματος των εξισώσεων για τον προσδιορισμό των ιδιοτιμών του, έχει διαφορετικό αποτέλεσμα λόγω και της εισαγωγής των όρων με $m \neq 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση μάλιστα η ανάλυση είναι απλούστερη μια και δεν υπάρχουν όροι με $l < m$, όπως υπήρχαν στην αξονικά συμμετρική περίπτωση της προηγούμενης παραγράφου. Έτσι, για να κάνουμε παρόμοια ανάλυση περιοριζόμαστε στη χρήση των εξισώσεων με $l = m = 2$. Η αντίστοιχη ανάλυση οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε αυτήν την περίπτωση οι εξισώσεις διαταραχών δεν παρουσιάζουν το αριθμητικό πρόβλημα της προηγούμενης παραγράφου, με άλλα λόγια οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι πραγματικές ανεξαρτήτως των τιμών του στατικού αστρικού μοντέλου και έτσι η αριθμητική τους εξέλιξη στο χρόνο είναι εφικτή.

Στη μη αξονικά συμμετρική περίπτωση ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και πάλι η ακρίβεια με την οποία θα υπολογιστεί η συχνότητα της ιδιοσυχνότητας r στη δεύτερη τάξη προσέγγισης. Για να διαπιστώσουμε την ακρίβεια των αποτελεσμάτων μας, χρησιμοποιήσαμε δύο μοντέλα με διαφορετική γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και συγκρίναμε με αποτελέσματα στην πρώτη τάξη περιστροφής αλλά και στην αυτά της ταχείας περιστροφής. Τα αποτελέσματα της σύγκρισης δίνονται στον πίνακα 7.2. Όπως φαίνεται από τον πίνακα καθαρά, για μικρές γωνιακές ταχύτητες περιστροφής του αστεριού η διόρθωση που εισάγουν οι όροι δεύτερης δεν είναι σημαντική. Για μεγαλύτερη όμως γωνιακή ταχύτητα περιστροφής βλέπουμε ότι η διόρθωση είναι σημαντική και η τιμή που παίρνουμε για τη συχνότητα της ιδιοσυχνότητας r είναι πολύ κοντά σ' αυτήν που δίνει και η προσέγγιση ταχείας περιστροφής. Το γεγονός ότι η διόρθωση στην συχνότητα είναι μεγαλύτερη για υψηλότερες γωνιακές ταχύτητες του αστεριού είναι εύκολα κατανοητό, αν σκεφτεί κανείς ότι η τιμή της συχνότητας της ιδιοσυχνότητας r είναι ανάλογη της γωνιακής ταχύτητας του αστεριού $\sigma_r \sim \Omega$ (4.23).

Πίνακας 7.2: Τιμές της συχνότητας της $l = m = 2$ ιδιοσυχνότητας r σε τρεις διαφορετικές προσεγγίσεις : γραμμικής πρώτης και δεύτερης τάξης σε αργή περιστροφή και ταχέως περιστρεφόμενη (Τ.Π.) για το αδιαβατικό πολυτροπικό αστρικό μοντέλο με μάζα $M = 1.4 M_{\odot}$ για δύο διαφορετικές τιμές της παραμέτρου περιστροφής ε . Οι συχνότητες δίνονται σε Hertz.

$\varepsilon = \Omega/\Omega_K$	$\mathcal{O}(\varepsilon)$	$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$	T.Π
0.268	512	511	500
0.614	1172	1025	1030

7.5 Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό προχωρήσαμε ένα βήμα παραπάνω και εισαγάγαμε στις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού όρους δεύτερης τάξης ως προς την περιστροφή $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Σαν πρώτο βήμα μελετήσαμε την επίδραση των όρων δεύτερης τάξης στην βελτίωση της ακρίβειας υπολογισμού του στατικού αστρικού μοντέλου. Έτσι, κατασκευάσαμε μια ακολουθία στατικών αστρικών μοντέλων με αυξανόμενη παράμετρο περιστροφής ε . Διαπιστώσαμε ότι η βελτίωση είναι εμφανής και σημαντική στην ακτίνα του, ενώ η μάζα του είναι λιγότερο ευαίσθητη στη διόρθωση. Η διόρθωση και στις δύο παραπάνω παραμέτρους του αστέρα, είναι μεγαλύτερη όσο μεγαλύτερη είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του Ω .

Όσον αφορά τις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού, διαπιστώσαμε ότι η εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης εισάγει επιπλέον συζεύξεις σ' αυτές χωρίς όμως να αλλάζει τη βασική δομή του συστήματος. Πιο συγκεκριμένα, μια συνάρτηση που περιγράφει πολική διαταραχή με αρμονικό δείκτη l , εκτός από την αλληλεπίδραση με τις συναρτήσεις που περιγράφουν αξονικές διαταραχές με αρμονικό δείκτη $l \pm 1$ (φαινόμενο πρώτης τάξης), αλληλεπιδρά μέσω των όρων δεύτερης τάξης, με συναρτήσεις που περιγράφουν πολικές διαταραχές με τον ίδιο αρμονικό δείκτη καθώς και με τις πολικές με αρμονικό δείκτη $l \pm 2$. Το ίδιο ισχύει αντίστοιχα (συμμετρικά) και για τις συναρτήσεις που περιγράφουν αξονικές διαταραχές.

Τέλος, μελετήσαμε την διόρθωση στην τιμή της συχνότητας της περιστροφικής ιδιοσυχνότητας τ λόγω των όρων δεύτερης τάξης και συγχρίναμε τις τιμές της προσέγγισης της γραμμικής θεωρίας διαταραχών με αντίστοιχες τιμές που έχουν υπολογιστεί στη μη γραμμική προσέγγιση. Διαπιστώσαμε ότι η διόρθωση από την εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης, είναι αρκετά ικανοποιητική και ποσοτικά σημαντική σε μεγάλες γωνιακές ταχύτητες περιστροφής των αστέρων. Κατά συνέπεια, μπορούμε να μελετήσουμε με ικανοποιητική ακρίβεια στα πλαίσια της γραμμικής θεωρίας τις διαταραχές των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων.

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου είναι στο στάδιο της συγγραφής και θα υποβληθούν για δημοσίευση στην εργασία A5 που αναφέρεται στο βιογραφικό σημείωμα στο τέλος του παραρτήματος.

Κεφάλαιο 8

Σύνοψη

Σ' αυτό το κεφάλαιο συνοψίζουμε τα αποτελέσματα και την πρωτότυπη συμβολή της παρούσας διατριβής. Επιπλέον, καταγράφουμε ανοιχτά προβλήματα στο ερευνητικό αυτό πεδίο και τέλος σχολιάζουμε τις προοπτικές του πεδίου αυτού στο άμεσο μέλλον. Τον τελευταίο χρόνο, το όνειρο και η προσπάθεια χρόνων της επιστημονικής κοινότητας που ασχολείται με την ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων έχουν φτάσει στο συναρπαστικότερό τους σημείο. Μια πληθώρα ανιχνευτών ανά τον κόσμο έχουν ήδη αρχίσει να λειτουργούν, άλλοι κανονικά συλλέγοντας δεδομένα και άλλοι στη φάση της βαθμονόμησης. Έτσι η παγκόσμια προσπάθεια χρόνων για την άμεση ανίχνευση των προβλεπόμενων από την Γενική Θεωρία Σχετικότητας, βαρυτικών κυμάτων πλησιάζει στο καθοριστικότερό της σημείο. Καθώς η βελτίωση των τεχνικών εξαγωγής του κρυμμένου μέσα στο θόρυβο του ανιχνευτή σήματος βελτιώνονται και ταυτόχρονα κατασκευαστικές και τεχνολογικές λεπτομέρειες τελειοποιούνται, η συμβολή της θεωρητικής μελέτης των εν δυνάμει πηγών βαρυτικών κυμάτων γίνεται ολοένα πιο σημαντική και επιτακτική. Στόχος της θεωρητικής έρευνας είναι η κατά το δυνατόν ακριβέστερη πρόβλεψη της μορφής της εκπεμπόμενης κυματομορφής. Όσο πλησιέστερα προς την ακριβή είναι η προβλεπόμενη θεωρητική τόσο περισσότερο αυξάνεται η πιθανότητα ανίχνευσής της.

Η συμβολή της παρούσας διατριβής είναι προς αυτή την κατεύθυνση, με έμφαση στη μελέτη μιας εκ των πιθανών πηγών βαρυτικών κυμάτων που εμπίπτουν στη συχνοτική περιοχή ανίχνευσης των επίγειων ανιχνευτών, τους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Πιο συγκεκριμένα, στα πλαίσια της διατριβής μελετήσαμε τις διαταραχές αυτών των αστέρων, στα πλαίσια της Γραμμικής Θεωρίας Διαταραχών, προκειμένου να βγάλουμε συμπεράσματα σχετικά με την βαρυτική ακτινοβολία που αυτοί εκπέμπουν. Επειδή οι εξισώσεις που περιγράφουν την δομή και εξέλιξή τους στο χωρόχρονο είναι πολύπλοκες μη γραμμικές Δ.Ε.Μ.Π. που δεν λύνονται αναλυτικά, παρά μόνο αριθμητικά, αναλύσαμε το πρόβλημα σε μικρότερα υποπροβλήματα με σκοπό να φτάσουμε στην τελική επίλυση με μεγαλύτερη βεβαιότητα αλλά και με περισσότερη κατανόηση των επιμέρους τμημάτων που το συνθέτουν. Θα μπορούσαμε να διαχωρίσουμε

το πρόβλημα της μελέτης των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων σε δύο κύρια επιμέρους τμήματα. Το πρώτο είναι το τμήμα που περιγράφει το αστρικό ρευστό και δίνεται από εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου ρευστού (3.38) και το δεύτερο είναι το τμήμα που περιγράφει τις διαταραχές του χωρόχρονου μέσα και έξω από αυτό και δίνεται από τις διαταραγμένες εξισώσεις Einstein (3.33). Στη Νευτώνεια Θεωρία το κομμάτι που περιγράφει τις διαταραχές του βαρυτικού δυναμικού Φ , έχει ελειπτική μορφή και άρα δεν προβλέπει την διάδοση των διαταραχών αυτών. Αντίθετα, στη Γ.Θ.Σ. το κομμάτι που περιγράφει τις διαταραχές του μετρικού τανυστή $g_{\mu\nu}$, έχει υπερβολική μορφή και άρα προβλέπεται διάδοση των διαταραχών αυτών, με τη μορφή βαρυτικών κυμάτων.

Ακολουθώντας τη παραπάνω λογική δώσαμε στα δύο πρώτα κεφάλαια το βασικό θεωρητικό και αριθμητικό υπόβαθρο. Στο κεφάλαιο 4 ασχοληθήκαμε με τη μελέτη του υποσυστήματος των εξισώσεων που περιγράφει τις διαταραχές του αστρικού ρευστού. Από τη μελέτη αυτή, εξήχθησαν χρήσιμα συμπεράσματα για το είδος και τη συμπεριφορά των ιδιοσυχνοτήτων του αστρικού ρευστού ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα. Υπολογίσαμε για πρώτη φορά τις τιμές των συχνοτήτων των ιδιοταλαντώσεων αυτών των αστέρων και επιβεβαιώσαμε την εμφάνιση ενός φαινομένου εκφυλισμού στο φάσμα ιδιοσυχνοτήτων τους, που ήταν ήδη γνωστό από τη θεωρία των τέλειων ρευστών. Στην συγκεκριμένη περίπτωσή εισάγει αντίστοιχα μια εκφυλισμένη περιοχή στο φάσμα ιδιοσυχνοτήτων των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων και περιπλέκει τα πράγματα.

Στη συνέχεια το κίνητρο για τη μελέτη που έγινε στο κεφαλαίο 5 ήταν η διαπίστωση ότι στη βιβλιογραφία δεν είχε επιχειρηθεί μέχρι σήμερα η αριθμητική επίλυση του συνολικού συστήματος των εξισώσεων αστέρα-χωρόχρονου, λόγω της πολυπλοκότητας των εξισώσεων αλλά και της άγνωστης αριθμητικής ‘συμπεριφοράς’ τους. Έτσι, εισαγάγαμε μια νέα συνθήκη βαθμίδας που απλοποιεί σημαντικά τις διαταραγμένες εξισώσεις που προκύπτουν. Μελετήσαμε και διαπιστώσαμε τις συγκεκριμένες διαφορές που υπάρχουν μεταξύ των δύο συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους, που εκφράζουν το ίδιο φυσικό πρόβλημα. Μετά από αυτή τη μελέτη, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι στην νέα αυτή συνθήκη βαθμίδας η αριθμητική επίλυση των Δ.Ε.Μ.Π εμφανίζεται να είναι σημαντικά απλούστερη.

Στο κεφάλαιο 6 χρησιμοποιήσαμε τις υπάρχουσες από τη βιβλιογραφία εξισώσεις στη βαθμίδα Regge-Wheeler και με μακροσκελείς πράξεις και ορισμούς νέων μεταβλητών τις αναγάγαμε σε ένα σύστημα πρώτης τάξης ως προς το χρόνο και το χώρο. Στη συνέχεια, προκειμένου να δοκιμάσουμε την αριθμητική ευστάθεια του συστήματος αυτού, επιλύσαμε αριθμητικά το κομμάτι που αναφέρεται στις διαταραχές του χωρόχρονου μηδενίζοντας όλες τις διαταραχές του αστρικού ρευστού χρησιμοποιώντας την προσέγγιση ICA. Έτσι, διαπιστώσαμε ότι το κομμάτι αυτό του προβλήματος είναι αριθμητικά ευσταθές και υπολογίσαμε για πρώτη φορά τις συχνότητες των ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης του χωρόχρονου ωνένος βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων. Επίσης, παρατηρήσαμε και το φαινόμενο της διάσπασης του εκφυλισμού τους (splitting)

λόγω της περιστροφής του αστέρα.

Τέλος, στο κεφάλαιο 7 έχοντας υπόψη τα πρόσφατα αποτελέσματα άλλων ερευνών σχετικά με τη σημασία της περιστροφικής ιδιοσυχνότητας για την πιθανή ανίχνευση βαρυτικών χυμάτων, επιστρέψαμε και πάλι στην μελέτη των ιδιοσυχνοτήτων του αστρικού ρευστού βελτιώνοντας όμως κατά μια τάξη την προσέγγισή μας. Εισαγάγαμε όρους δεύτερης τάξης ως προς την περιστροφή $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, τόσο στις εξισώσεις του στατικού μοντέλου όσο και στις εξισώσεις κίνησης του διαταραγμένου αστέρα. Θελήσαμε με αυτόν τον τρόπο να μελετήσουμε τα όρια της γραμμικής προσέγγισης. Τα συμπεράσματα αυτής της μελέτης κινήθηκαν προς δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη αφορά τη βελτίωση του στατικού αστρικού μοντέλου με την εισαγωγή των όρων δεύτερης τάξης και η δεύτερη αφορά τη βελτίωση της ακρίβειας στις τιμές των συχνοτήτων των ιδιοταλαντώσεων που εκπέμπουν βαρυτικά κύματα που δίνει η εισαγωγή των επιπλέον όρων.

Θα θέλαμε να τονίσουμε σε αυτό το σημείο, ότι η προσπάθεια για την κατανόηση των μη ακτινικών ταλαντώσεων των βραδέων περιστρεφόμενων αστέρων συνεχίζεται. Ένα επόμενο βήμα, που είναι μέσα στις προυθέσεις μας, είναι η αριθμητική επίλυση του πλήρους συζευγμένου συστήματος ταλαντώσεων χωρόχρονου και ρευστού. Η επίλυση ενός τέτοιου συστήματος είναι επίπονη και απαιτητική διαδικασία, αλλά ήδη έχουμε θέσει τα θεμέλια για τη μελέτη αυτή και τα πιθανά αποτελέσματα είναι πολύ σημαντικά. Από την επίλυση του πλήρους συστήματος, μπορούμε να βγάλουμε πολύ χρήσιμα συμπεράσματα για τις ιδιοσυχνότητες του ρευστού και του χωρόχρονου καθώς και για την αλληλεπίδραση αλλά και την ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ τους. Επιπλέον, με την ανίχνευση τους από τους γήινους ανιχνευτές θα μπορέσουν να μας βοηθήσουν να εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για την δομή και την καταστατική εξίσωση των αστέρων-πηγών τους.

Οι γνώσεις και η κατανόηση που έχουμε σήμερα για τους αστέρες νετρονίων προέρχεται αποκλειστικά από το ηλεκτρομαγνητικό φάσμα ακτινοβολίας και κυρίως από τις ακτίνες X και τα ραδιοκύματα. Η πιο εύκολα και με μεγαλύτερη ακρίβεια παρατηρούμενη παράμετρος ενός αστέρα νετρονίων είναι η συχνότητα περιστροφής του. Μια άλλη βασική παρατηρούμενη παράμετρος με αρκετή ακρίβεια, σε μερικές περιπτώσεις, είναι η μάζα του. Μελέτες από τους Finn και van Kerkwijk et. al. [106, 107] έχουν δείξει ότι τα όρια των μαζών για αστέρες νετρονίων χυμαίνονται από $1.04M_{\odot} < M < 1.44M_{\odot}$. Τέλος, όσον αφορά την ακτίνα ενός αστέρα νετρονίων παρατηρήσεις σε διπλά συστήματα που εκπέμπουν σε ακτίνες X, δίνουν την εκτίμηση ότι $R < 6M$, που δεν είναι αρκετά ικανοποιητική. Με βάση αυτά τα παρατηρησιακά δεδομένα δεν είναι δυνατόν να εξάγουμε συγκεκριμένες πληροφορίες για την καταστατική εξίσωση του αστέρα νετρονίων. Κι αυτό γιατί οι προτεινόμενες καταστατικές εξισώσεις είναι πολλές και δίνουν ένα μεγάλο εύρος στην πιθανή ακτίνα των αστέρων νετρονίων. Έτσι, μια ακριβέστερη μέθοδος προσδιορισμού της ακτίνας των αστέρων νετρονίων θα αποδεικνύσταν ιδιαίτερα χρήσιμη.

Η αστρονομία βαρυτικών χυμάτων, που θα αρχίσει να αναπτύσσεται με την

πρώτη ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων από αστέρες νετρονίων παρουσιάζει αυτήν τη δυνατότητα. Έτσι, για παράδειγμα με συνδυασμένες παρατηρήσεις της βασικής ιδιοσυχνότητας ταλάντωσης f και μιας εκ των ιδιοσυχνοτήτων του χωρόχρονου w , καθώς και των χρόνου απόσβεσής τους τ , μπορούμε να εξάγουμε με αρκετή ακρίβεια ένα όριο μαζών και ακτίνων για το δεδομένο αστέρα με βάση τα θεωρητικά δεδομένα που θα έχουμε από τις αριθμητικές προσομοιώσεις για διάφορες καταστατικές εξισώσεις, όπως έχει εξηγηθεί αναλυτικά για την περίπτωση των μη περιστρεφόμενων αστέρων από τους Andersson & Kokkotas [103, 108]. Επιπλέον, θα έχουμε τη δυνατότητα να καθορίσουμε και την καταστατική εξίσωση που ισχύει για τον συγκεκριμένο αστέρα.

Μια επιπλέον μελλοντική επέκταση της συμβολής της διδακτορικής διατριβής προς την παραπάνω κατεύθυνση θα ήταν η επίλυση του πλήρους συστήματος πρώτης τάξης για το διαταραγμένο αστέρα και το χωρόχρονο γύρω του, για διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις. Σκοπός αυτού του εγχειρήματος θα ήταν να δημιουργηθεί μια βάση δεδομένων με τις ‘αναμενόμενες’ τιμές των συχνοτήτων των ιδιοταλαντώσεων των βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων. Τα οφέλη αυτής της προσπάθειας είναι διπλά. Από τη μια την ‘αναγνώριση’ των παρατηρούμενων από τους ανιχνευτές βαρυτικής ακτινοβολίας συχνοτήτων, και από την άλλη ο υπολογισμός με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια της μάζας και της ακτίνας του αστέρα-πηγής από τον οποίο προέρχονται με βάση την επέκταση των μεθόδων που έχουν ήδη αναπτυχθεί, για περιστρεφόμενους αστέρες.

Παράρτημα A'

Εξισώσεις κίνησης

Στο παράρτημα αυτό, δίνονται οι συνιστώσες του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας ορμής (3.36) που προκύπτουν με βάση τους ορισμούς (3.9) για τις διαταραγμένες ταχύτητες. Επίσης, παραθέτουμε και τις συνιστώσες των διαταραγμένων εξισώσεων κίνησης του ρευστού $\delta(T_{\mu\nu}^{;\nu}) = 0$.

Για τις συνιστώσες του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας ορμής έχουμε,

$$\begin{aligned}\delta T_{tt} &= e^{2\nu} \sum_{lm} \left\{ 2\Omega(p + \epsilon) (U_{lm} - e^{-2\nu} h_{0,lm}) \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + [(p + \epsilon) C_s^{-2} H_{lm} - \epsilon H_{0,lm}] Y_{lm} + 2\Omega(p + \epsilon) V \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right\} \end{aligned}\quad (\text{A'.1})$$

$$\delta T_{tr} = \sum_{lm} [p H_{1,lm} - e^{2\nu}(p + \epsilon) R_{lm}] Y_{lm} \quad (\text{A'.2})$$

$$\begin{aligned}\delta T_{t\theta} &= e^{2\nu}(p + \epsilon) \sum_{lm} \left\{ -V_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + \left[U_{lm} - \frac{pe^{-2\nu}}{(p + \epsilon)} h_{0,lm} \right] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right\} \end{aligned}\quad (\text{A'.3})$$

$$\begin{aligned}\delta T_{t\phi} &= -(p + \epsilon) \sum_{lm} \left\{ e^{2\nu} V_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + \left(\frac{p}{p + \epsilon} h_{0,lm} - e^{2\nu} U_{lm} \right) \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - \left[\varpi \frac{H_{0,lm}}{2} + (\varpi C_s^{-2} + \Omega) H_{lm} \right] r^2 \sin^2 \theta Y_{lm} \right\} \end{aligned}\quad (\text{A'.4})$$

$$\delta T_{r\theta} = - \sum_{lm} p h_{1,lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \quad (\text{A'.5})$$

$$\delta T_{r\phi} = \sum_{lm} \left\{ p h_{1,lm} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} + \varpi r^2 (p + \epsilon) R_{lm} \sin^2 \theta Y_{lm} \right\} \quad (\text{A'.6})$$

$$\delta T_{rr} = e^{2\lambda} \sum_{lm} [p H_{2,lm} + (p + \epsilon) H_{lm}] Y_{lm} \quad (\text{A'.7})$$

$$\delta T_{\theta\theta} = r^2 \sum_{lm} [pK_{lm} + (p+\epsilon)H_{lm}] Y_{lm} \quad (\text{A'}.8)$$

$$\delta T_{\theta\phi} = \sum_{lm} \left[U_{lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} - V_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right] \quad (\text{A'}.9)$$

$$\begin{aligned} \delta T_{\phi\phi} &= (p+\epsilon) \sum_{lm} \left\{ \varpi \left(V_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + U_{lm} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(H_{lm} + \frac{p}{p+\epsilon} K_{lm} \right) Y_{lm} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A'}.10)$$

Από τις t, r, θ, ϕ συνιστώσες των διαταραγμένων εξισώσεων κίνησης μετά την απαλοιφή των γωνιακών εξαρτήσεων παίρνουμε αντίστοιχα,

$$P_{lm}^{(t)} + imS_{lm}^{(t)} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} J_{lm}^{(t)} = 0 \quad (\text{A'}.11)$$

$$P_{lm}^{(r)} + imS_{lm}^{(r)} + \mathcal{L}_1^{\pm 1} J_{lm}^{(r)} = 0 \quad (\text{A'}.12)$$

$$\Lambda b_{lm} - im \left(A_{lm} + \tilde{b}_{lm} \right) + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{a}_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} B_{lm} = 0 \quad (\text{A'}.13)$$

$$\Lambda a_{lm} + im (B_{lm} + \tilde{a}_{lm}) + \mathcal{L}_3^{\pm 1} \tilde{b}_{lm} + \mathcal{L}_2^{\pm 1} A_{lm} = 0 \quad (\text{A'}.14)$$

όπου οι συντελεστές $P_{lm}, S_{lm}, J_{lm}, a_{lm}, \tilde{a}_{lm}, b_{lm}, \tilde{b}_{lm}, A_{lm}, B_{lm}$ δύνονται από τις ακόλουθες εκφράσεις :

$$\begin{aligned} P_{lm}^{(t)} &= -\dot{H}_{lm} + C_s^2 e^{2\nu-2\lambda} R'_{lm} + e^{2\nu-2\lambda} \left[C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) + \nu' \right] R_{lm} \\ &\quad - C_s^2 e^{2\nu} \frac{\Lambda}{r^2} V_{lm} - \frac{C_s^2}{2} \dot{H}_{2,lm} - C_s^2 \dot{K}_{lm} \end{aligned} \quad (\text{A'}.15)$$

$$J_{lm}^{(t)} = C_s^2 (\omega - 2\Omega) \left(-\dot{U}_{lm} + e^{-2\nu} \dot{h}_{0,lm} \right) \quad (\text{A'}.16)$$

$$S_{lm}^{(t)} = (\varpi C_s^2 - \Omega) H_{lm} - \Omega C_s^2 \left(\frac{H_{2,lm}}{2} + K - H_{0,lm} \right) \quad (\text{A'}.17)$$

$$P_{lm}^{(r)} = -\dot{R}_{lm} + e^{-2\nu} \dot{H}_{1,lm} + H'_{lm} - \frac{H'_0}{2} \quad (\text{A'}.18)$$

$$\begin{aligned} J_{lm}^{(r)} &= - \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] U_{lm} \\ &\quad + \Omega e^{-2\nu} \left(\dot{h}_{1,lm} - h'_{0,lm} + 2\nu' h_{0,lm} \right) \end{aligned} \quad (\text{A'}.19)$$

$$S_{lm}^{(r)} = \Omega (-R_{lm} + e^{-2\nu} H_{1,lm}) - \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] V_{lm} \quad (\text{A'}.20)$$

$$a_{lm} = -\dot{V}_{lm} - im\Omega V_{lm} + H_{lm} - \frac{1}{2} H_{0,lm} \quad (\text{A'}.21)$$

$$\tilde{a}_{lm} = 2\varpi U_{lm} \quad (\text{A'}.22)$$

$$b_{lm} = -\dot{U}_{lm} - im\Omega U_{lm} + e^{-2\nu} \dot{h}_{0,lm} \quad (\text{A'}.23)$$

$$\tilde{b}_{lm} = -2\varpi V_{lm} \quad (\text{A'}.24)$$

$$\begin{aligned}
A_{lm} &= r^2 \varpi e^{-2\lambda} R'_{lm} - \Lambda \varpi V_{lm} + (\Omega - \varpi C_s^2) r^2 e^{-2\nu} \dot{K}_{lm} - \frac{1}{2} r^2 e^{-2\nu} \varpi \dot{H}_{2,lm} \\
&+ e^{-2\lambda} r^2 \left[\omega' + \varpi \left(\nu' - \frac{2}{r} \right) \right] R_{lm} \\
&+ e^{-2\lambda} r^2 \varpi C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) R_{lm} - \omega r^2 e^{-2\nu} \frac{\dot{H}_{0,lm}}{2} \quad (\text{A'.25}) \\
B_{lm} &= \Lambda \Omega e^{-2\nu} h_{0,lm} \quad (\text{A'.26})
\end{aligned}$$

Παράρτημα B'

Συνιστώσες διαταραγμένων εξισώσεων Einstein στην νέα βαθμίδα

Στο παράρτημα αυτό, δίνονται οι συνιστώσες του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας ορμής στην νέα βαθμίδα, καθώς και αναλυτικές εκφράσεις των συντελεστών που εμφανίζονται στις εξισώσεις διαταραχών στην νέα βαθμίδα. Για λόγους απλότητας έχουμε ορίσει τις ακόλουθες δύο καινούργιες μεταβλητές που εμφανίζονται συχνά στις εξισώσεις

$$Z_{lm} = h'_{0,lm} - \dot{h}_{1,lm} \quad (\text{B'.1})$$

$$Z_{e,lm} = h'_{0p,lm} - \dot{h}_{1e,lm} \quad (\text{B'.2})$$

Οι συνιστώσες του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας ορμής είναι,

$$\begin{aligned} \delta T_{tt} &= \sum_{lm} \left\{ (p + \epsilon) e^{2\nu} C_s^{-2} H_{lm} Y_{lm} \right. \\ &+ 2 [\Omega(p + \epsilon) (e^{2\nu} U_{lm} - h_{0,lm}) + \omega \epsilon h_{0,lm}] \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \\ &\left. + 2 [\Omega(p + \epsilon) (e^{2\nu} V_{lm} - h_{0p,lm}) + \omega \epsilon h_{0p,lm}] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B'.3})$$

$$\delta T_{tr} = \sum_{lm} [p H_{1,lm} - (p + \epsilon) e^{2\nu} R_{lm}] Y_{lm} \quad (\text{B'.4})$$

$$\begin{aligned} \delta T_{t\theta} &= \sum_{lm} \left\{ [p h_{0p,lm} + e^{2\nu} (p + \epsilon) V_{lm}] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right. \\ &\left. + [(p + \epsilon) e^{2\nu} U_{lm} - p h_{0,lm}] \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B'.5})$$

$$\delta T_{t\phi} = \sum_{lm} \left\{ [(p + \epsilon) e^{2\nu} U_{lm} - p h_{0,lm}] \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right.$$

$$+ \left[(p + \epsilon) e^{2\nu} V_{lm} - p h_{0p,lm} \right] \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \\ + \left[(p + \epsilon) (\varpi C_s^{-2} + \Omega) \right] H_{lm} r^2 \sin^2 \theta Y_{lm} \quad (B'.6)$$

$$\delta T_{rr} = e^{2\lambda} \sum_{lm} [p H_{2,lm} + (p + \epsilon) H_{lm}] Y_{lm} \quad (B'.7)$$

$$\delta T_{r\theta} = \sum_{lm} \left[p h_{1p,lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} - p h_{1,lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} \right] \quad (B'.8)$$

$$\begin{aligned} \delta T_{r\phi} &= \sum_{lm} \left\{ p h_{1p,lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + p h_{1,lm} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. + (p + \epsilon) \varpi r^2 R_{lm} \sin^2 \theta Y_{lm} \right\} \end{aligned} \quad (B'.9)$$

$$\delta T_{\theta\theta} = (p + \epsilon) r^2 \sum_{lm} H_{lm} Y_{lm} \quad (B'.10)$$

$$\delta T_{\theta\phi} = r^2 (p + \epsilon) \varpi \sum_{lm} \left[U_{lm} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} - V_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right] \quad (B'.11)$$

$$\delta T_{\phi\phi} = (p + \epsilon) \sum_{lm} \left\{ \varpi \left(V_{lm} \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \phi} + U_{lm} \sin \theta \frac{\partial Y_{lm}}{\partial \theta} \right) + \frac{H_{lm}}{2} Y_{lm} \right\} \quad (B'.12)$$

Οι συντελεστές που εμφανίζονται στις εξισώσεις Einstein είναι,

$$\begin{aligned} A_{lm}^{(tt)} &= \frac{2e^{2\nu}}{r^2} \left[r H'_{2,lm} - \Lambda h'_{1p,lm} - 8\pi r^2 C_s^{-2} e^{2\lambda} (p + \epsilon) H_{lm} \right. \\ &\quad \left. + \Lambda \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) h_{1p,lm} + \left(1 - 2r\lambda' + \frac{\Lambda e^{2\lambda}}{2} \right) H_{2,lm} \right] \end{aligned} \quad (B'.13)$$

$$\tilde{A}_{lm}^{(tt)} = 0 \quad (B'.14)$$

$$\begin{aligned} B_{lm}^{(tt)} &= 2\omega Z' + \left[\omega' - 2\omega(\lambda' + \nu' - \frac{2}{r}) \right] Z - \frac{4\omega}{r} h'_{0,lm} \\ &\quad - 32\pi\Omega(p + \epsilon) e^{2\nu+2\lambda} U_{lm} \\ &\quad + \frac{2}{r} \left[-\omega' + \omega \left(2\nu' + 2\lambda' - \frac{2}{r} - e^{2\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r} \right) \right] h_{0,lm} \end{aligned} \quad (B'.15)$$

$$\begin{aligned} C_{lm}^{(tt)} &= 2\omega \left(Z'_{e,lm} - H'_{1,lm} + e^{2\lambda} \dot{H}_2 \right) + [\omega' - 2\omega(\lambda' + \nu')] h'_{0p,lm} \\ &\quad + \left[-\omega' + 2\omega(\nu' + \lambda' - \frac{2}{r}) \right] \dot{h}_{1e,lm} + [\omega' + 2\omega(\lambda' - \nu')] H_{1,lm} \\ &\quad - 32\pi\Omega e^{2\nu+2\lambda} (p + \epsilon) V_{lm} \\ &\quad + \frac{2}{r} \left[-\omega' + 2\omega \left(\nu' + \lambda' - \frac{e^{2\lambda} - 1}{r} \right) \right] h_{0p,lm} \end{aligned} \quad (B'.16)$$

$$\begin{aligned} A_{lm}^{(tr)} &= \frac{2}{r} \dot{H}_{2,lm} + \frac{\Lambda}{r^2} (Z_{e,lm} - 2h'_{0p,lm} + 2\nu' h_{0p,lm}) \\ &\quad + 16\pi e^{2\nu} (p + \epsilon) R_{lm} - \left[\frac{4e^{-2\lambda}}{r} (\nu' + \lambda') - \frac{\Lambda}{r^2} \right] H_{1,lm} \end{aligned} \quad (B'.17)$$

$$\tilde{A}_{lm}^{(tr)} = \frac{2\Lambda\omega}{r^2} h_{1,lm} \quad (\text{B'.18})$$

$$B_{lm}^{(tr)} = \left[\frac{\Lambda\omega}{r^2} - 16\pi\Omega(p + \epsilon) \right] h_{1,lm} \quad (\text{B'.19})$$

$$C_{lm}^{(tr)} = \left(\frac{2\omega}{r} + \frac{\omega'}{2} \right) H_{2,lm} - 16\pi\Omega(p + \epsilon) h_{1p,lm} \quad (\text{B'.20})$$

$$\begin{aligned} A_{lm}^{(rr)} &= \dot{H}_{1,lm} - \frac{\Lambda e^{2\lambda}}{2r} \dot{h}_{0e,lm} + \frac{\Lambda e^{2\nu}}{2r} \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) h_{1p,lm} \\ &- 4\pi r e^{2\nu+2\lambda} (p + \epsilon) H_{lm} - \frac{e^{2\nu}}{2} \left(2\nu' + \frac{1}{r} \right) H_{2,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.21})$$

$$\tilde{A}_{lm}^{(rr)} = 0 \quad (\text{B'.22})$$

$$B_{lm}^{(rr)} = \omega h'_{0,lm} + \frac{\omega'}{2} h_{0,lm} - \left(\omega + \frac{r\omega'}{4} \right) Z_{lm} \quad (\text{B'.23})$$

$$\begin{aligned} C_{lm}^{(rr)} &= \omega h'_{0p,lm} - \left(\omega + \frac{r\omega'}{4} \right) Z_{e,lm} \\ &+ \frac{1}{2} \left(\omega' - \frac{\Lambda\omega e^{2\lambda}}{r} \right) h_{0p,lm} + \left(\omega + \frac{r\omega'}{4} \right) H_{1,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.24})$$

$$A_{lm}^{(\theta\theta+\phi\phi)} = -\ddot{H}_{2,lm} + 2e^{-2\lambda} \dot{H}'_{1,lm} + 2e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) \dot{H}_{1,lm} \quad (\text{B'.25})$$

$$\begin{aligned} &- e^{2\nu-2\lambda} \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) H'_{2,lm} - \frac{\Lambda}{r^2} \left(\dot{h}_{0e,lm} - e^{2\nu-2\lambda} h'_{1p,lm} \right) \\ &- 16\pi e^{2\nu} (p + \epsilon) H_{lm} - e^{2\nu} \left(\frac{\Lambda}{2r^2} + 16\pi p \right) H_{2,lm} \\ &+ \frac{\Lambda}{r^2} e^{2\nu-2\lambda} \left(\nu' - \lambda' \right) h_{1p,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.26})$$

$$\tilde{A}_{lm}^{(\theta\theta+\phi\phi)} = 0 \quad (\text{B'.27})$$

$$\begin{aligned} B_{lm}^{(\theta\theta+\phi\phi)} &= 2\omega e^{-2\lambda} \left(h''_{0,lm} - Z'_{lm} \right) - 2\omega e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) Z_{lm} - \frac{4}{r} \omega' e^{-2\lambda} h_{0,lm} \\ &+ 2e^{-2\lambda} \left(\omega' + \omega \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) \right) h'_{0,lm} - 16\pi e^{2\nu} \varpi (p + \epsilon) U_{lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.28})$$

$$\begin{aligned} C_{lm}^{(\theta\theta+\phi\phi)} &= -4k\varpi e^{2\nu} (p + \epsilon) V_{lm} \\ &+ 2\omega e^{-2\lambda} \left(h''_{0p,lm} - Z'_{e,lm} + H'_{1,lm} - e^{2\lambda} \dot{H}_{2,lm} \right) \\ &+ 2\omega e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) \dot{h}_{1e,lm} + e^{-2\lambda} \left(\omega' + 2\omega \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) \right) H_{1,lm} \\ &+ 2\omega' e^{-2\lambda} h'_{0p,lm} - e^{-2\lambda} \left(\frac{4}{r} \omega' + e^{2\lambda} \frac{\omega\Lambda}{2r^2} \right) h_{0p,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.29})$$

$$\eta_{lm}^{(t\theta)} = -\Lambda\omega e^{-2\lambda} [h'_{1,lm} + (\nu' - \lambda') h_{1,lm}] \quad (\text{B'.30})$$

$$\eta_{lm}^{(r\theta)} = \Lambda [\omega(h'_{0,lm} - Z_{lm}) + \omega' h_{0,lm}] \quad (\text{B'.31})$$

$$\begin{aligned} a_{lm}^{(t\theta)} &= -\dot{H}_{2,lm} + e^{-2\lambda} \left(\frac{2}{r} - \lambda' - \nu' \right) Z_{e,lm} \\ &+ e^{-2\lambda} \left(H'_{1,lm} - Z'_{e,lm} + \frac{2}{r} h'_{0p,lm} \right) \\ &+ e^{-2\lambda} (\nu' - \lambda') H_{1,lm} + 16\pi e^{2\nu} (p + \epsilon) V_{lm} \\ &+ \frac{2}{r^2} \left[e^{-2\lambda} (1 - r(\lambda' - \nu')) - 1 \right] h_{0p,lm} \\ &+ im e^{-2\lambda} \left[2\omega h'_{1p,lm} - \omega e^{2\lambda} H_{2,lm} \right. \\ &\quad \left. + \left(\omega' + 2\omega \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) \right) h_{1p,lm} \right] \end{aligned} \quad (\text{B'.32})$$

$$\tilde{a}_{lm}^{(t\theta)} = 2\omega' e^{-2\lambda} h_{1,lm} \quad (\text{B'.33})$$

$$\begin{aligned} b_{lm}^{(t\theta)} &= -e^{-2\lambda} Z'_{lm} + e^{-2\lambda} \left(\nu' + \lambda' - \frac{2}{r} \right) Z_{lm} \\ &+ \frac{2}{r} e^{-2\lambda} h'_{0,lm} + 16\pi e^{2\nu} (p + \epsilon) U_{lm} \\ &- \left[\frac{2}{r} e^{-2\lambda} \left(\nu' + \lambda' - \frac{1}{r} \right) - \frac{\Lambda - 2}{r^2} \right] h_{0,lm} \\ &- im e^{-2\lambda} \left[2\omega h'_{1,lm} + \left(\omega' + 2\omega \left(\frac{1}{r} - \lambda' \right) \right) h_{1,lm} \right] \end{aligned} \quad (\text{B'.34})$$

$$\tilde{b}_{lm}^{(t\theta)} = -2e^{-2\lambda} \omega' h_{1p,lm} \quad (\text{B'.35})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{lm}^{(t\phi)} &= -\frac{1}{2} r^2 \omega' H'_{2,lm} + \Lambda [\omega' + 2\omega(\nu' - \lambda')] h_{1p,lm} \\ &+ 16\pi r^2 e^{2\lambda} \varpi (p + \epsilon) (1 + C_s^{-2}) H_{lm} \\ &+ [4\varpi r (\nu' + \lambda') - \Lambda \omega e^{2\lambda}] H_{2,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.36})$$

$$\begin{aligned} \zeta_{lm}^{(r\phi)} &= -\frac{1}{2} \omega' r^2 \dot{H}_{2,lm} + \Lambda \omega' h_{0p,lm} - 4kr^2 e^{2\nu} \varpi (p + \epsilon) R_{lm} \\ &- 4r \varpi e^{-2\lambda} (\nu' + \lambda') H_{1,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.37})$$

$$\begin{aligned} a_{lm}^{(r\theta)} &= -\dot{Z}_{e,lm} + \frac{2}{r} \dot{h}_{0e,lm} - \dot{H}_{1,lm} - \frac{2e^{2\nu}}{r^2} h_{1p,lm} + e^{2\nu} (\nu' + \frac{1}{r}) H_{2,lm} \\ &- im e^{-2\nu} \left[\omega (Z_{e,lm} + H_{1,lm}) + \left(\omega' - \frac{2\omega}{r} \right) h_{0p,lm} \right] \end{aligned} \quad (\text{B'.38})$$

$$\tilde{a}_{lm}^{(r\theta)} = 2\omega' e^{-2\nu} h_{0,lm} \quad (\text{B'.39})$$

$$\begin{aligned} b_{lm}^{(r\theta)} &= e^{-2\nu} \left(\dot{Z}_{lm} - \frac{2}{r} \dot{h}_{0,lm} \right) - \frac{\Lambda - 2}{r^2} h_{1,lm} \\ &+ im e^{-2\nu} \left[-\omega Z_{lm} + (\omega' - \frac{2\omega}{r}) h_{0,lm} \right] \end{aligned} \quad (\text{B'.40})$$

$$\tilde{b}_{lm}^{(r\theta)} = 2\omega' e^{-2\nu} h_{0p,lm} \quad (\text{B'.41})$$

$$f_{lm} = \omega' r^2 e^{-2\lambda} \left(Z_{e,lm} - \frac{2}{r} h_{0p,lm} \right) - 4kr^2 \varpi e^{2\nu} (p + \epsilon) V_{lm} \quad (\text{B'.42})$$

$$g_{lm} = r^2 \omega' e^{-2\lambda} \left(-Z_{lm} + \frac{2}{r} h_{0,lm} \right) + 4kr^2 \varpi e^{2\nu} (p + \epsilon) U_{lm} \quad (\text{B'.43})$$

$$\begin{aligned} s_{lm} &= -\dot{h}_{0e,lm} + e^{2\nu-2\lambda} h'_{1p,lm} + e^{2\nu-2\lambda} (\nu' - \lambda') h_{1p,lm} \\ &\quad - \frac{e^{2\nu}}{2} H_{2,lm} - \text{i}m\omega h_{0p,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.44})$$

$$t_{lm} = -\dot{h}_{0,lm} + e^{2\nu-2\lambda} h'_{1,lm} + e^{2\nu-2\lambda} (\nu' - \lambda') h_{1,lm} - \text{i}m\omega h_{0,lm} \quad (\text{B'.45})$$

$$\begin{aligned} P_{lm}^{(t)} &= -\dot{H}_{lm} - C_s^2 e^{2\nu-2\lambda} R'_{lm} + e^{2\nu-2\lambda} \left[C_s^2 \left(\lambda' - 2\nu' - \frac{2}{r} \right) + \nu' \right] R_{lm} \\ &\quad - \frac{C_s^2}{2} \dot{H}_{2,lm} + C_s^2 e^{-2\lambda} H'_{1,lm} + C_s^2 e^{2\nu} \frac{\Lambda}{r^2} V_{lm} - C_s^2 \frac{\Lambda}{r^2} h_{0p,lm} \\ &\quad - e^{-2\lambda} \left[C_s^2 \left(\lambda' - \frac{2}{r} \right) + \nu' \right] H_{1,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.46})$$

$$\begin{aligned} J_{lm}^{(t)} &= C_s^2 (\omega - 2\Omega) \dot{U}_{lm} + \Omega C_s^2 e^{-2\lambda} h'_{1,lm} \\ &\quad - \Omega e^{-2\lambda} \left[C_s^2 \left(\lambda' - \frac{2}{r} \right) + \nu' \right] h_{1,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.47})$$

$$\begin{aligned} S_{lm}^{(t)} &= \Omega C_s^2 e^{-2\lambda} h'_{1p,lm} - (\varpi C_s^2 - \Omega) H_{lm} - \Omega \frac{C_s^2}{2} H_{2,lm} \\ &\quad - \Omega e^{-2\lambda} \left[C_s^2 \left(\lambda' - \frac{2}{r} \right) + \nu' \right] h_{1p,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.48})$$

$$P_{lm}^{(r)} = \dot{R}_{lm} + H'_{lm} \quad (\text{B'.49})$$

$$J_{lm}^{(r)} = \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] U_{lm} + e^{-2\nu} \frac{2\varpi}{r} h_{0,lm} - \varpi e^{-2\nu} h'_{0,lm} \quad (\text{B'.50})$$

$$\begin{aligned} S_{lm}^{(r)} &= \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] V_{lm} \\ &\quad + e^{-2\nu} \frac{2\varpi}{r} h_{0p,lm} + \Omega R_{lm} - \varpi e^{-2\nu} h'_{0p,lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.51})$$

$$Q_{lm} = \Lambda \varpi e^{-2\nu} h_{0,lm} \quad (\text{B'.52})$$

$$\begin{aligned} R_{lm} &= \varpi C_s^2 r^2 \left[-\frac{1}{2} e^{-2\nu} \dot{H}_{2,lm} + e^{-2\nu-2\lambda} H'_{1,lm} \right. \\ &\quad \left. - e^{-2\lambda} R'_{lm} + \frac{\Lambda}{r^2} V_{lm} - e^{-2\nu} \frac{\Lambda}{r^2} h_{0p,lm} \right] \\ &\quad + r^2 e^{-2\nu-2\lambda} \left[\varpi \left(C_s^2 \left(\frac{2}{r} - \lambda' \right) + \nu' - \frac{2}{r} \right) + \omega' \right] H_{1,lm} \\ &\quad - r^2 e^{-2\lambda} \left[\varpi \left(C_s^2 \left(\frac{2}{r} - \lambda' + 2\nu' \right) + \nu' - \frac{2}{r} \right) + \omega' \right] R_{lm} \end{aligned} \quad (\text{B'.53})$$

$$L_{lm} = \dot{V}_{lm} + \text{i}m\Omega V_{lm} + H_{lm} - \text{i}m\varpi e^{-2\nu} h_{0p,lm} \quad (\text{B'.54})$$

$$\tilde{L}_{lm} = 2\varpi e^{-2\nu} h_{0,lm} - 2\varpi U_{lm} \quad (\text{B'.55})$$

$$M_{lm} = \dot{U}_{lm} + im\Omega U_{lm} - im\varpi e^{-2\nu} h_{0,lm} \quad (\text{B'.56})$$

$$\tilde{M}_{lm} = 2\varpi V_{lm} - 2e^{-2\nu} \varpi h_{0p,lm} \quad (\text{B'.57})$$

Παράρτημα Γ'

Συνιστώσες εξισώσεων κίνησης τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$

Στο παράρτημα αυτό, δίνουμε τις αναλυτικές εκφράσεις του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας ορμής που προκύπτουν με βάση τους ορισμούς του Κεφαλαίου 4, καθώς επίσης και των συντελεστών που περιέχονται στις διαταραγμένες εξισώσεις του ρευστού στην δεύτερη τάξη προσέγγισης ως προς την περιστροφή.

Έτσι, οι συνιστώσες του διαταραγμένου τανυστή ενέργειας ορμής είναι οι ακόλουθες :

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta T_{tt}}{p + \epsilon} &= -2\varepsilon\Omega e^{2\nu} (V\partial_\phi - \sin\theta\partial_\theta) Y_{lm} \\
 &+ C_s^{-2} \left[1 + \varepsilon^2 (f_0 + 2h_0 + (f_2 + 2h_2)P_2(\cos\theta)) \right. \\
 &+ \frac{C_s^{2'}}{C_s^2\nu'} (p_0 + p_2 P_2(\cos\theta)) \Big] \\
 &+ \left. \{(\Omega^2 - \omega^2) + \Omega^2 C_s^2\} e^{-2\nu} r^2 \sin^2\theta \right] e^{2\nu} H Y_{lm} \quad (\Gamma'.1) \\
 \frac{\delta T_{tr}}{(p + \epsilon)} &= \left[e^{2\nu} + \varepsilon^2 \left(\frac{r^2}{2}(\Omega^2 - \omega^2) \sin^2\theta + e^{2\nu} (f_0 + f_2 P_2(\cos\theta)) \right) \right] R Y_{lm} \\
 \frac{\delta T_{t\theta}}{(p + \epsilon)} &= \left[e^{2\nu} + \varepsilon^2 \left(f_0 + f_2 P_2(\cos\theta) + \frac{r^2}{2}(\Omega^2 - \omega^2) \sin^2\theta \right) \right] V \partial_\theta Y_{lm} \\
 &- \left[e^{2\nu} + \varepsilon^2 \left(f_0 + f_2 P_2(\cos\theta) + \frac{r^2}{2}(\Omega^2 - \omega^2) \sin^2\theta \right) \right] U \frac{\partial_\phi Y_{lm}}{\sin\theta} \quad (\Gamma'.3) \\
 \frac{\delta T_{t\phi}}{(p + \epsilon)} &= -(\varpi C_s^2 + \Omega)\varepsilon r^2 \sin^2\theta Y_{lm} \\
 &+ \left[e^{2\nu} (1 + \varepsilon^2 (f_0 + f_2 P_2(\cos\theta))) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 r^2 \left(\frac{3}{2} \Omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 - \Omega \omega \right) \sin^2 \theta \Big] V \partial_\phi Y_{lm} \\
& + \left[e^{2\nu} (1 + \varepsilon^2 (f_0 + f_2 P_2(\cos \theta))) \right. \\
& \left. + \varepsilon^2 r^2 \left(\frac{3}{2} \Omega^2 - \frac{1}{2} \omega^2 - \Omega \omega \right) \sin^2 \theta \right] U \sin \theta \partial_\theta Y_{lm} \quad (\Gamma'.4)
\end{aligned}$$

$$\frac{\delta T_{rr}}{(p + \epsilon)} = \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{e^{2\lambda}}{r} [m_0 + m_2 P_2(\cos \theta)] + f_0 + f_2 P_2(\cos \theta) \right) \right] e^{2\lambda} H Y_{lm} \quad (\Gamma'.6)$$

$$\delta T_{r\theta} = 0 \quad (\Gamma'.6)$$

$$\delta T_{r\phi} = -(p + \epsilon) \varepsilon \varpi r^2 R \sin^2 \theta Y_{lm} \quad (\Gamma'.7)$$

$$\delta T_{\theta\theta} = (p + \epsilon) r^2 \left[1 + \varepsilon^2 (f_0 + f_2 P_2(\cos \theta)) \right] H Y_{lm} \quad (\Gamma'.8)$$

$$\delta T_{\theta\phi} = r^2 (p + \epsilon) \varepsilon \varpi \left(U \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{lm} - V \partial_\theta Y_{lm} \right) \quad (\Gamma'.9)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\delta T_{\phi\phi}}{p + \epsilon} &= -r^2 \varpi \varepsilon (U \sin \theta \partial_\theta Y_{lm} + V \partial_\phi Y_{lm}) \\
&+ \left[1 + \varepsilon^2 \{ \varpi^2 (1 + C_s^{-2}) r^2 e^{-2\nu} \sin^2 \theta \right. \\
&\left. + f_0 + (f_2 + 2k_2) P_2(\cos \theta) \} \right] H r^2 Y_{lm} \quad (\Gamma'.10)
\end{aligned}$$

όπου

$$f_0(r) = p_0(r) + \epsilon_0(r) + h_0(r) \quad (\Gamma'.11)$$

$$f_2(r) = p_2(r) + \epsilon_2(r) + h_2(r) \quad (\Gamma'.12)$$

Οι συντελεστές που εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης στη δεύτερη τάξη $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$, ως προς την περιστροφή είναι :

$$\begin{aligned}
A_{lm}^{(t)} &= -\dot{H} + e^{2\nu-2\lambda} C_s^2 \left[1 - \frac{2\hat{m}e^{2\lambda}}{r} - C \right] R' \\
&- \frac{\Lambda}{r^2} e^{2\nu} C_s^2 (1 - 2k_2 - C) V \\
&- e^{2\nu-2\lambda} \left\{ C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) (1 - C) + \hat{h}' + 2k'_2 \right\} \\
&- \nu' - \hat{h}' + \frac{e^{2\lambda}}{r^2} (2r\nu' \hat{m} - C_s^2 (r\hat{m}' + (4r\nu' + 3)\hat{m})) \Big\} R \quad (\Gamma'.13)
\end{aligned}$$

$$B_{lm}^{(t)} = -imC_s^2 \varpi^2 U \quad (\Gamma'.14)$$

$$\bar{B}_{lm}^{(t)} = -3C_s^2 \left[\varpi^2 + \frac{e^{2\nu}}{r^2} \left(\frac{e^{2\lambda} m_2}{r} + 2h_2 + p_2 + \epsilon_2 \right) \right] V \quad (\Gamma'.15)$$

$$C_{lm}^{(t)} = -imC_s^2 \varpi^2 V + (\varpi C_s^2 - \Omega) H \quad (\Gamma'.16)$$

$$\bar{C}_{lm}^{(t)} = 3C_s^2 \left[\varpi^2 + \frac{e^{2\nu}}{r^2} \left(\frac{e^{2\lambda} m_2}{r} + 2h_2 + p_2 + \epsilon_2 \right) \right] U \quad (\Gamma'.17)$$

$$\begin{aligned} \bar{D}_{lm}^{(t)} &= \frac{1}{2} C_s^2 e^{2\nu-2\lambda} \left[D + \frac{6m_2 e^{2\lambda}}{r} \right] R' \\ &+ \frac{\Lambda}{2} C_s^2 \left[-2C_s^2 \varpi^2 + \frac{3e^{2\nu}}{r^2} (\epsilon_2 - 2k_2) \right] V \\ &+ \frac{1}{2} e^{2\nu-2\lambda} \left\{ \left(\lambda' - 2\nu' - \frac{2}{r} \right) D \right. \\ &+ \varpi r^2 e^{-2\nu} \left(\varpi \left(\nu' - \frac{2}{r} \right) (2C_s^2 - 1) + 2\omega' (C_s^2 - 1) \right) \\ &- 3C_s^2 (h'_2 + 2k'_2) + 3h'_2 \\ &\left. + \frac{3e^{2\lambda}}{r^2} (C_s^2 (rm'_2 + (4r\nu' + 3)m_2) - 2r\nu' m_2) \right\} R \end{aligned} \quad (\Gamma'.18)$$

$$A_{lm}^{(r)} = -\dot{u}_1 + (1 + 2\hat{h}) H \quad (\Gamma'.19)$$

$$B_{lm}^{(r)} = - \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] U \quad (\Gamma'.20)$$

$$C_{lm}^{(r)} = - \left[\omega' + 2\varpi \left(\nu' - \frac{1}{r} \right) \right] V - \Omega R \quad (\Gamma'.21)$$

$$\bar{D}_{lm}^{(r)} = -\frac{3}{2} h'_2 H - \frac{3}{2} (p_2 - h_2) H' \quad (\Gamma'.22)$$

$$a_{lm} = -\dot{u}_2 - i m \Omega V + (1 + 2\hat{h}) H \quad (\Gamma'.23)$$

$$\tilde{a}_{lm} = 2\varpi U \quad (\Gamma'.24)$$

$$\bar{a}_{lm}^{(\theta)} = \frac{3}{2} (p_2 - h_2) H \quad (\Gamma'.25)$$

$$\bar{a}_{lm}^{(\phi)} = \frac{3}{2} [p_2 - h_2 - 2C_s^2 (p_2 + h_2)] H \quad (\Gamma'.26)$$

$$b_m = -\dot{u}_3 - i m \Omega U \quad (\Gamma'.27)$$

$$\tilde{b}_{lm} = -2\varpi V \quad (\Gamma'.28)$$

$$\bar{b}_{lm}^{(\theta)} = -\frac{1}{2} (r^2 e^{-2\nu} \varpi^2 + 3(h_2 - p_2 - \epsilon_2)) \dot{u}_3 = 0 \quad (\Gamma'.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_{lm}^{(\phi)} &= \left[r^2 e^{-2\nu} \left(\Omega^2 \left(\frac{1}{2} + 2C_s^2 \right) - 3\Omega\omega C_s^2 + \omega^2 (C_s^2 - \frac{1}{2}) \right) \right. \\ &\left. + \frac{3}{2} (p_2 + \epsilon_2 - h_2) \right] \dot{u}_3 = 0 \end{aligned} \quad (\Gamma'.30)$$

$$\bar{c}_{lm} = -3h_2 H \quad (\Gamma'.31)$$

$$\begin{aligned} d_{lm} &= r^2 \varpi^2 e^{-2\nu} (1 + C_s^2) \dot{H} + \Lambda \varpi V \\ &- \varpi r^2 e^{-2\lambda} R' + r^2 e^{-2\lambda} \left[\varpi C_s^{-2} \nu' + \omega' + \varpi \left(\lambda' - \frac{4}{r} \right) \right] R \\ &= \varpi r^2 C_s^2 e^{-2\lambda} R' - \Lambda C_s^2 \varpi V \end{aligned}$$

$$+ r^2 e^{-2\lambda} \left[\omega' + \varpi \left(C_s^2 \left(2\nu' - \lambda' + \frac{2}{r} \right) + \nu' - \frac{2}{r} \right) \right] R \quad (\Gamma'.32)$$

όπου έχουμε ορίσει τις ακτινικές συναρτήσεις του στατικού αστρικού μοντέλου,

$$\hat{m}(r) = m_0(r) + m_2(r), \quad (\Gamma'.33)$$

$$\hat{p}(r) = p_0(r) + p_2(r), \quad (\Gamma'.34)$$

$$\hat{\epsilon}(r) = \epsilon_0(r) + \epsilon_2(r), \quad (\Gamma'.35)$$

$$\hat{h}(r) = h_0(r) + h_2(r). \quad (\Gamma'.36)$$

Παράρτημα Δ'

Συνιστώσες εξισώσεων στη βαθμίδα Regge-Wheeler τάξης $\mathcal{O}(\varepsilon)$

Στους παρακάτω συντελεστές έχουμε χρησιμοποιήσει τους ακόλουθους ορισμούς,

$$\alpha \equiv M + kr^3 p \quad \beta \equiv - (M - kr^3 \rho) \quad (\Delta'.1)$$

Συντελεστές για την εξίσωση εξέλιξης (6.12) της μεταβλητής F_1 ,

$$a_{01} = \frac{e^\nu}{r^3} [3\beta + \alpha + 4M - \Lambda r] \quad (\Delta'.2)$$

$$a_{02} = \frac{2}{r} (\alpha + \beta - re^{-\lambda}) \quad (\Delta'.3)$$

$$a_{03} = \frac{2}{r^2} e^\nu (\alpha + \beta) (C_s^{-2} - 1) \quad (\Delta'.4)$$

$$a_{04} = \frac{e^\nu}{r^2} (\alpha - \beta) \quad (\Delta'.5)$$

$$a_{10} = \frac{8im}{\Lambda} e^{\nu-\lambda} r^2 \varpi \quad (\Delta'.6)$$

$$a_{11} = 4imre^\nu \omega + \frac{16im}{\Lambda} e^\nu \varpi (\beta - re^{-\lambda}) - \frac{8im}{\Lambda} e^{\nu-\lambda} r^2 \varpi' \quad (\Delta'.7)$$

$$a_{12} = \frac{im}{r} (\alpha - \beta) \omega \quad (\Delta'.8)$$

$$a_{13} = -\frac{8im}{\Lambda} e^{\nu-\lambda} r^2 \varpi := -a_{10} \quad (\Delta'.9)$$

$$a_{14} = imr \omega e^{-\lambda} \quad (\Delta'.10)$$

$$a_{15} = \frac{4im}{r\Lambda} [(\alpha + \beta - r\Lambda - re^{-\lambda}) \omega - r^2 e^{-\lambda} \omega'] \quad (\Delta'.11)$$

$$a_{16} = -imr^2 e^{-\nu} \omega \quad (\Delta'.12)$$

$$a_{20} = \frac{4}{r^2} [\alpha \Omega + \beta \varpi] \mathcal{L}_1^\pm + \frac{2}{\Lambda r^2} (3r^2 e^{-\lambda} \omega' - 2\alpha \omega) \mathcal{L}_3^\pm$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{2}{\Lambda r} e^{-\lambda} \omega' \left[8re^{-\lambda} + 4(2\alpha + 3\beta) + r(\Lambda^\pm - \Lambda - 1) \right] \mathcal{L}_2^\pm \\
 &+ \frac{4}{\Lambda r^3} (\alpha + \beta) \left[2\alpha C_s^{-2} - \Lambda r + 2(3\alpha + 2\beta) \right] \varpi \mathcal{L}_2^\pm \\
 &+ \frac{4}{\Lambda r^2} \left[\Lambda^\pm (re^{-\lambda} - \beta) - \alpha \right] \omega \mathcal{L}_2^\pm
 \end{aligned} \tag{\Delta'.13}$$

$$a_{21} = \frac{\omega e^{\nu-\lambda}}{r^2} (\alpha - \beta) \left(2\mathcal{L}_1^\pm + 3\frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} \mathcal{L}_2^\pm \right) \tag{\Delta'.14}$$

$$a_{22} = 4re^\nu \varpi \mathcal{L}_1^\pm + \frac{4e^\nu}{\Lambda} \left[(4\beta - 4re^{-\lambda} - r\Lambda) \varpi + 4e^{-\lambda} r^2 \omega' \right] \mathcal{L}_2^\pm \tag{\Delta'.15}$$

$$\begin{aligned}
 a_{23} &= -\frac{e^{-\lambda}}{r\Lambda} \left[2r(1 - \Lambda^\pm) \omega - 16\varpi(\alpha + \beta) - (8re^{-\lambda} - r\Lambda + 4\beta)r\omega' \right] \mathcal{L}_2^\pm \\
 &- 2e^{-\lambda} (\omega + r\omega') \mathcal{L}_1^\pm + \frac{2}{\Lambda} e^{-\lambda} \omega \mathcal{L}_3^\pm
 \end{aligned} \tag{\Delta'.16}$$

$$a_{24} = \omega e^{\nu-2\lambda} \left(2\mathcal{L}_1^\pm + 3\frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} \mathcal{L}_2^\pm \right) \tag{\Delta'.17}$$

$$a_{25} = -8e^{\nu-\lambda} r^2 \varpi \frac{\mathcal{L}_2^\pm}{\Lambda} \tag{\Delta'.18}$$

$$\begin{aligned}
 a_{26} &= re^{-\lambda} \omega' \mathcal{L}_1^\pm + \frac{2}{\Lambda} e^{-\lambda} \omega \mathcal{L}_3^\pm \\
 &+ \frac{e^{-\lambda}}{r\Lambda} \left[8(\alpha + \beta) \varpi + r(8re^{-\lambda} - r\Lambda + 4\beta) \omega' - r(\Lambda^\pm - 2)\omega \right] \mathcal{L}_2^\pm
 \end{aligned} \tag{\Delta'.19}$$

Συντελεστές για την εξισωση εξέλιξης (6.13) για τη μεταβλητή S_1 ,

$$b_{01} = \frac{e^\nu}{r^3} (3\alpha + \beta - r\Lambda) \tag{\Delta'.20}$$

$$b_{02} = \frac{4e^{2\nu}}{r^6} \left(e^\lambda \alpha^2 - 2Mr + r\beta \right) \tag{\Delta'.21}$$

$$b_{03} = \frac{e^\nu}{r^2} (\alpha - \beta) \tag{\Delta'.22}$$

$$\begin{aligned}
 b_{10} &= -\frac{4im}{r\Lambda} e^{2\nu} (\omega + 2\varpi)(3\alpha - \beta + 2re^{-\lambda}) C_s^2 + \frac{8im}{\Lambda} re^{2\nu-\lambda} \varpi' \\
 &+ \frac{4im}{r\Lambda} e^{2\nu} \left[2\varpi(2\alpha + re^{-\lambda} - \beta) + (3\alpha - \beta + 2re^{-\lambda}) \omega \right]
 \end{aligned} \tag{\Delta'.23}$$

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= \frac{8im}{r^3 \Lambda} e^{2\nu} \left[(2\alpha^2 e^\lambda + 6r\alpha - \Lambda r^2) \varpi + r^2 (\alpha + re^{-\lambda}) \varpi' \right] \\
 &+ \frac{4im}{r} e^{2\nu} [(C_s^2 - 1)\omega + 2\varpi C_s^2]
 \end{aligned} \tag{\Delta'.24}$$

$$\begin{aligned}
 b_{12} &= \frac{4im}{r^4 \Lambda} e^\nu C_s^2 (2\varpi + \omega) \left[(\alpha - \beta - 2M) (2re^{-\lambda} - \beta) - 2\alpha(\beta + M) \right] \\
 &+ \frac{4im}{r^4 \Lambda} e^\nu \alpha(\alpha + \beta) (2\varpi - C_s^{-2} \omega) - \frac{2im}{r} e^{\nu-\lambda} \omega' \\
 &- \frac{4im}{r^4 \Lambda} e^\nu \left[2(\alpha - \beta)(r - 3M - 2\beta) - \alpha^2 - 3\beta^2 - 4Mre^{-\lambda} \right] \omega
 \end{aligned} \tag{\Delta'.25}$$

$$b_{13} = \frac{4im}{\Lambda} e^{2\nu-\lambda} r(\omega + 2\varpi)(1 - C_s^2) \quad (\Delta'.26)$$

$$b_{14} = \frac{8ime^{2\nu}}{r\Lambda} \varpi \left(re^{-\lambda} + \alpha \right) \quad (\Delta'.27)$$

$$b_{15} = \frac{4im}{r^2\Lambda} e^{\nu-\lambda} (\alpha - 2M - \beta) [2\varpi C_s^2 + (C_s^2 - 1)\omega] \quad (\Delta'.28)$$

$$\begin{aligned} b_{16} &= \frac{8im}{r\Lambda} e^{\nu-\lambda} \omega' + \frac{2im}{r^3\Lambda} e^\nu (2\varpi + \omega)(4M + \beta - 3\alpha) \\ &+ \frac{2im}{r^3\Lambda} e^\nu [2(\beta + 5\alpha - 4M)\varpi - (3\beta - 5\alpha + 8M)\omega] \end{aligned} \quad (\Delta'.29)$$

$$\begin{aligned} b_{17} &= \frac{2im}{r\Lambda} (2\varpi + \omega)(4M + 3\beta - \alpha)C_s^2 - \frac{4im}{r\Lambda} (\alpha + \beta)\varpi \\ &- \frac{2im}{r\Lambda} (r\Lambda + \alpha + 5\beta + 8M - 2r)\omega \end{aligned} \quad (\Delta'.30)$$

$$\begin{aligned} b_{20} &= \frac{e^\nu}{r^5} \left\{ 4r(\alpha + \beta)\varpi + 2r^2(\alpha + 2re^{-\lambda})\omega' - 2 \left[2\alpha(r + \alpha e^\lambda) + r^2\Lambda \right] \omega \right\} \mathcal{L}_1^\pm \\ &+ \frac{2e^\nu}{r^4\Lambda} \omega' \left[4\alpha^2 + r(1 - \Lambda)\alpha - 2r^2\Lambda e^{-\lambda} - 3r^2 e^{-\lambda} (1 + 4e^{-\lambda} - 2\Lambda^\pm) \right] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{2e^\nu}{r^4\Lambda} \left[\left(r\Lambda + \frac{2}{r}\alpha^2 e^\lambda + 2\alpha \right) \omega - 12(\alpha + \beta)\varpi + r(\alpha - 15re^{-\lambda})\omega' \right] \mathcal{L}_3^\pm \\ &+ \frac{4e^\nu}{r^5\Lambda} (\alpha + \beta) [2\alpha - 6r + 8M + (\Lambda - 2\Lambda^\pm)r] \varpi \mathcal{L}_2^\pm \\ &- \frac{2e^\nu}{r^5\Lambda} \left[(2\alpha^2 e^\lambda + r^2\Lambda + 2r\alpha)(\Lambda^\pm - 1) + 2r\Lambda^\pm(r - 4M + 2\alpha + 2\beta) \right] \omega \mathcal{L}_2^\pm \\ &- \frac{8}{r^6\Lambda} e^{\nu+\lambda} \alpha(\alpha + \beta) \left[\alpha + (\alpha + re^\lambda)C_S^{-2} \right] \varpi \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.31)$$

$$\begin{aligned} b_{21} &= \frac{3e^{(2\nu-\lambda)}}{r^3} \frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} (\alpha - \beta)\omega' \mathcal{L}_2^\pm + \frac{3e^{2\nu}}{r^5} \frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} \alpha(\alpha + \beta)C_s^{-2}\omega \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{3e^{2\nu}}{r^5} \frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} \left[r^2 e^{-\lambda} (\Lambda^\pm - \Lambda) - 4rM e^{-\lambda} + 2\beta(r - \alpha - 2M) \right] \omega \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{22} &= -\frac{4}{r} e^{2\nu} \left[(\varpi + 2\omega)\mathcal{L}_1^\pm - \frac{2}{\Lambda}\omega \mathcal{L}_3^\pm \right] \\ &+ \frac{4e^{2\nu}}{\Lambda r^3} \left[2(1 - 2\Lambda^\pm)r^2\omega + (4e^\lambda\alpha^2 + 12r\alpha - r^2\Lambda)\varpi \right] \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.33)$$

$$\begin{aligned} b_{23} &= \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^3} \left[2(r + \alpha e^\lambda)\omega - r^2\omega' \right] \mathcal{L}_1^\pm + \frac{8}{r\Lambda} e^{\nu-\lambda} \omega' \mathcal{L}_3^\pm \\ &+ \frac{16e^\nu}{r^4\Lambda} (\alpha + \beta)(\alpha + re^{-\lambda})\varpi \mathcal{L}_2^\pm \\ &- \frac{2e^\nu}{r^3\Lambda} \omega \left[\alpha + re^{-\lambda} + \Lambda^\pm(\alpha - 3re^{-\lambda}) \right] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^3\Lambda} \left[r^2(\Lambda + 4 - 6\Lambda^\pm + 12e^{-\lambda}) - 4\alpha^2 e^\lambda \right] \omega' \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.34)$$

$$b_{24} = \frac{3}{r^3} \frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} e^{2\nu-\lambda} \left[r^2 e^{-\lambda} \omega' + (3\alpha - 4\beta - re^{-\lambda})\omega \right] \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.35)$$

$$b_{25} = \frac{8e^{2\nu}}{r\Lambda} (\alpha + re^{-\lambda}) \varpi \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.36)$$

$$\begin{aligned} b_{26} &= \frac{e^\nu}{r^3} [2(\alpha - 3re^{-\lambda})\omega - r^2 e^{-\lambda}\omega'] \mathcal{L}_1^\pm \\ &+ \frac{2e^\nu}{r^3\Lambda} [(re^{-\lambda} - \alpha - 2\beta)\omega - r^2 e^{-\lambda}\omega'] \mathcal{L}_3^\pm \\ &+ \frac{e^\nu}{r^3\Lambda} \omega [(6\alpha + 3\beta - 7re^{-\lambda})\Lambda^\pm - 2(\alpha + \beta - re^{-\lambda})] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^3\Lambda} \omega' [4\alpha^2 e^\lambda + r^2(\Lambda - \Lambda^\pm - 2 - 12e^{-\lambda})] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{8e^\nu}{r^4\Lambda} \varpi(\alpha + \beta) [(\alpha - \beta)e^{2\nu} - 2\alpha + \beta - re^{-\lambda}] \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.37)$$

$$\begin{aligned} b_{27} &= \frac{e^{\nu-\lambda}}{r^2\Lambda} [8(\alpha + \beta)(e^{2\nu} - 1)\varpi + (4 - 3\Lambda^\pm)r\omega] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{4e^{\nu-\lambda}}{r\Lambda} \omega \mathcal{L}_3^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.38)$$

$$b_{28} = \frac{3\omega}{r\Lambda} e^{2(\nu-\lambda)} \omega \Lambda^\pm \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.39)$$

Συντελεστές για την εξισωση εξέλιξης (6.14) για τη μεταβλητή H_1 ,

$$c_{00} = \frac{2\alpha}{r^3} e^{\nu+\lambda} \quad (\Delta'.40)$$

$$c_{01} = 1 \quad (\Delta'.41)$$

$$c_{02} = r \quad (\Delta'.42)$$

$$c_{10} = -im\omega \quad (\Delta'.43)$$

$$c_{11} = \frac{8im}{\Lambda} e^{\nu+\lambda} (re^{-\lambda} + \alpha) \varpi \quad (\Delta'.44)$$

$$c_{12} = \frac{4im}{\Lambda} e^\nu r^2 \varpi \quad (\Delta'.45)$$

$$c_{13} = \frac{im}{r\Lambda} [(2\alpha e^\lambda + r)\omega - r^2 \omega'] \quad (\Delta'.46)$$

$$c_{14} = \frac{im}{\Lambda} r\omega \quad (\Delta'.47)$$

$$\begin{aligned} c_{20} &= \frac{2}{\Lambda r^3} e^\lambda [4(\alpha + \beta)(\alpha + re^{-\lambda})\varpi - r\alpha\omega] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{1}{r\Lambda} (4re^{-\lambda} + r(1 - \Lambda^\pm) + 4\alpha) \omega' \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{1}{\Lambda r^2} (3r^2 \omega' - 2\alpha e^\lambda \omega) \mathcal{L}_3^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.48)$$

$$c_{21} = \frac{8\varpi}{\Lambda} e^{\nu+\lambda} (re^{-\lambda} + \alpha) \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.49)$$

$$c_{22} = \frac{1}{\Lambda} [(1 - 2\Lambda^\pm)\omega - 2(\alpha + re^{-\lambda})\omega'] \mathcal{L}_2^\pm + \frac{1}{\Lambda} \omega \mathcal{L}_3^\pm \quad (\Delta'.50)$$

$$c_{23} = \frac{1}{2\Lambda} [(2 - \Lambda^\pm)\omega + 4(\alpha + re^{-\lambda})\omega'] \mathcal{L}_2^\pm + \frac{1}{\Lambda} \omega \mathcal{L}_3^\pm \quad (\Delta'.51)$$

$$c_{24} = \frac{3\Lambda^\pm}{2\Lambda} e^{\lambda-\nu} \omega \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.52)$$

$$c_{25} = \frac{3\Lambda^\pm}{2\Lambda r^2} e^\nu \omega (\alpha - \beta) \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.53)$$

Συντελεστές για την εξίσωση εξέλιξης (6.15) για τη μεταβλητή T_1 ,

$$\begin{aligned} d_{01} &= \frac{e^{\nu+\lambda}}{r^4} \left[(\alpha - 3\beta)(a - re^{-\lambda}) + C_s^{-2} \alpha(\alpha + \beta) \right] \\ &+ \frac{e^\nu}{r^2} (2e^{-\lambda} - \Lambda) \end{aligned} \quad (\Delta'.54)$$

$$d_{02} = -\frac{e^\nu}{r^2} \left[2re^{-\lambda} + 3(\beta - \alpha) \right] \quad (\Delta'.55)$$

$$\begin{aligned} d_{10} &= -\frac{2im}{r\Lambda} \left[r\Lambda + 2\alpha + 4\beta + 6re^{-\lambda} \right] \omega' \\ &- \frac{4im}{r^3\Lambda} (\alpha + \beta) e^\lambda \left[C_s^{-2} \alpha + (\alpha + 2re^{-\lambda}) \right] \varpi \end{aligned} \quad (\Delta'.56)$$

$$d_{11} = \frac{3im}{2r^2} e^\nu \omega (\beta - \alpha) \quad (\Delta'.57)$$

$$d_{12} = \frac{8im}{\Lambda} e^\nu \left(\alpha e^\lambda \varpi - r^2 \omega' \right) \quad (\Delta'.58)$$

$$d_{13} = \frac{2im}{r\Lambda} \left[4(\alpha + \beta) \varpi - r(\alpha - 3re^{-\lambda}) \omega' \right] \quad (\Delta'.59)$$

$$d_{14} = -\frac{3}{2} im e^{\nu-\lambda} \omega \quad (\Delta'.60)$$

$$d_{15} = \frac{4im}{\Lambda} r^2 \varpi e^\nu \quad (\Delta'.61)$$

$$d_{16} = \frac{2im}{r\Lambda} \left[r(\alpha - 3re^{-\lambda}) \omega' - 2(\alpha + \beta) \varpi \right] - \frac{1}{2} im \omega \quad (\Delta'.62)$$

$$d_{20} = -\frac{1}{\Lambda} \omega (\mathcal{L}_2^\pm + \mathcal{L}_3^\pm) \quad (\Delta'.63)$$

$$d_{21} = -\frac{4}{\Lambda} e^\nu \left(2e^\lambda \alpha \varpi + r^2 \omega' \right) \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.64)$$

$$d_{22} = \frac{4}{\Lambda} e^\nu r^2 \varpi \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.65)$$

$$d_{23} = -d_{22} \quad (\Delta'.66)$$

$$d_{24} = -\frac{2}{\Lambda} r \omega' \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.67)$$

Συντελεστές για την εξίσωση εξέλιξης (6.16) για τη μεταβλητή h_0 ,

$$e_{00} = \frac{e^\nu}{r^2} (\alpha - \beta) \quad (\Delta'.68)$$

$$e_{01} = e^{\nu-\lambda} \quad (\Delta'.69)$$

$$e_{10} = -im\omega + \frac{im}{r\Lambda} \left[4(\alpha + \beta) \varpi + 2r^2 e^{-\lambda} \omega' - r\Lambda\omega \right] \quad (\Delta'.70)$$

$$e_{11} = \frac{4im}{\Lambda} e^\nu r^2 \varpi \quad (\Delta'.71)$$

$$e_{12} = -\frac{im}{\Lambda} r^2 e^{-\lambda} \omega' \quad (\Delta'.72)$$

$$e_{13} = -e_{12} \quad (\Delta'.73)$$

$$e_{20} = -\frac{4}{\Lambda} e^\nu r^2 \varpi \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.74)$$

$$e_{21} = -\frac{\omega r}{\Lambda} \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.75)$$

Συντελεστές για την εξισωση εξέλιξης (6.17) για τη μεταβλητή H ,

$$k_{01} = \frac{rC_s^2}{\alpha + \beta} e^\nu \left(\beta - 3\alpha - 2re^{-\lambda} \right) \quad (\Delta'.76)$$

$$k_{02} = \frac{rC_s^2}{\alpha + \beta} \Lambda e^\nu \quad (\Delta'.77)$$

$$k_{03} = \frac{C_s^2}{2r(\alpha + \beta)} (\beta - 3\alpha + 4M) \quad (\Delta'.78)$$

$$k_{04} = \frac{rC_s^2}{2(\alpha + \beta)} e^{-\nu} (3\beta - \alpha + 4M) \quad (\Delta'.79)$$

$$k_{05} = -\frac{C_s^2}{\alpha + \beta} e^{-\lambda} (\beta - \alpha + 2M) \quad (\Delta'.80)$$

$$k_{06} = -\frac{C_s^2}{\alpha + \beta} r^3 e^{\nu - \lambda} \quad (\Delta'.81)$$

$$\begin{aligned} k_{07} = & \frac{\alpha}{r^2} + \frac{C_s^2}{r^2(\alpha + \beta)} [(\alpha - \beta)(2r - 6M - \beta) \\ & - 2\alpha\beta - 4rMe^{-\lambda}] \end{aligned} \quad (\Delta'.82)$$

$$k_{10} = \frac{2im}{r\Lambda} (\alpha + \beta) [(C_s^2 - 1)\omega + 2\varpi C_s^2] + im (C_s^2 \varpi - \Omega) \quad (\Delta'.83)$$

$$\begin{aligned} k_{11} = & \frac{2im}{\Lambda} e^{-\nu} C_s^2 \left[\frac{\Lambda r(\beta + M)}{\alpha + \beta} + (\alpha + \beta - re^{-\lambda}) \right] \omega \\ & + \frac{im}{2\Lambda} e^{-\nu} C_s^2 + [r\Lambda - 4(\alpha + \beta)] \varpi \end{aligned} \quad (\Delta'.84)$$

$$\begin{aligned} k_{12} = & \frac{im}{r^2\Lambda} C_s^2 \left[r\Lambda(1 - 4e^{-\lambda}) - 3\beta - \alpha - 4M \right] \omega \\ & - \frac{im}{r^2\Lambda} C_s^2 \left[2(4M - 3\alpha + \beta) + \frac{r\Lambda(8M + 3\beta - 5\alpha)}{2(\alpha + \beta)} \right] \varpi \end{aligned} \quad (\Delta'.85)$$

$$k_{13} = \frac{im}{r\Lambda} C_s^2 (\beta - \alpha) \omega \quad (\Delta'.86)$$

$$k_{14} = -\frac{im}{\Lambda} C_s^2 r e^{-\lambda} \omega \quad (\Delta'.87)$$

$$k_{21} = \frac{\omega}{r^2\Lambda} [\Lambda\alpha\mathcal{L}_1^\pm - (\alpha - \beta)\Lambda^\pm C_s^2 \mathcal{L}_2^\pm] + \frac{\Lambda - 2}{\Lambda} e^{-\lambda} C_s^2 \omega' \mathcal{L}_2^\pm$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{C_s^2}{r^3 \Lambda} \left[r(\alpha - M)e^{-\lambda} - 4(\alpha + \beta)^2 \right] \varpi \mathcal{L}_2^\pm \\
& + \left\{ \frac{2(\alpha - \beta)}{r^2(\alpha + \beta)}(r - 3M - \beta) + \frac{\beta}{r^2} - 4rMe^{-\lambda} \right\} C_s^2 \omega \mathcal{L}_1^\pm \\
& + \left[\frac{\alpha}{r^2} - \frac{3\beta}{r^2} C_s^2 - \frac{2(\beta - 3\alpha + 4M)}{r(\alpha + \beta)} e^{-\lambda} C_s^2 \right] \varpi \mathcal{L}_1^\pm \quad (\Delta'.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{22} &= \left[3\mathcal{L}_1^\pm + \frac{4}{r\Lambda}(\alpha + \beta)\mathcal{L}_2^\pm \right] C_s^2 e^{-\lambda} \varpi \\
&+ \left[\frac{\alpha + 3\beta + 2M}{\alpha + \beta} \mathcal{L}_1^\pm + \frac{\Lambda^\pm}{\Lambda} \mathcal{L}_2^\pm \right] C_s^2 e^{-\lambda} \omega \quad (\Delta'.89)
\end{aligned}$$

Συντελεστές για την εξίσωση εξέλιξης (6.18) για τη μεταβλητή R ,

$$f_{00} = \frac{1}{2r^4}(\beta - 3\alpha + 4M) \quad (\Delta'.90)$$

$$f_{01} = -\frac{3}{2r^2}e^{-\nu}(\alpha + \beta) \quad (\Delta'.91)$$

$$f_{02} = -\frac{\alpha + \beta}{r^3} \quad (\Delta'.92)$$

$$f_{03} = -\frac{1}{2r^5}(\beta - 3\alpha + 4M) \quad (\Delta'.93)$$

$$f_{04} = -\frac{1}{2r^4}e^\nu \left[(11\alpha + 3\beta - 8M)r - 6\alpha e^\lambda(\alpha + \beta) \right] \quad (\Delta'.94)$$

$$f_{10} = -\frac{2im}{r^3}e^{-\nu}\varpi(\alpha + \beta) \quad (\Delta'.95)$$

$$\begin{aligned}
f_{11} &= -\frac{im}{r\Lambda}(16M - 16\alpha - \Lambda r)\omega' \\
&- \frac{2im}{r^2\Lambda} \left[\Lambda(\alpha e^{-\lambda} - r) + 8(\beta - 3M + 4\alpha) \right] \varpi \quad (\Delta'.96)
\end{aligned}$$

$$f_{12} = -\frac{im}{r\Lambda}[r\Lambda\Omega + 8\varpi(\beta + M)] \quad (\Delta'.97)$$

$$\begin{aligned}
f_{13} &= \frac{2im}{r^2\Lambda}e^{-\nu}(\beta - 2\alpha + 3M)\omega' \\
&+ \frac{2im}{r^4\Lambda}e^{-\nu} \left[5Mr + 2\alpha e^\lambda(2\alpha - r) - r(\beta + 4\alpha) \right] \omega \quad (\Delta'.98)
\end{aligned}$$

$$f_{14} = -\frac{2im}{r^2\Lambda}e^{-\nu}(\beta - M + 2\alpha)\omega \quad (\Delta'.99)$$

$$f_{15} = \frac{16im}{r\Lambda}(M - \alpha)\varpi \quad (\Delta'.100)$$

$$\begin{aligned}
f_{20} &= \frac{e^{-\nu}}{r^4\Lambda}(\alpha + \beta) \left[32(M - \alpha)\mathcal{L}_2^\pm + r\Lambda\mathcal{L}_1^\pm \right] \Omega \\
&+ \frac{4}{r^2\Lambda}e^{-\nu-\lambda}(\beta - \alpha + 3M)\omega'\mathcal{L}_2^\pm \\
&- \frac{2}{r^3\Lambda}e^{-\nu}(M + \beta)\omega\mathcal{L}_2^\pm
\end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{r^4 \Lambda} e^{-\nu} [2(\alpha + \beta)(r\Lambda^\pm + 8\alpha - 8\beta) - r(M + \beta)] \omega \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.101)$$

$$\begin{aligned} f_{21} = & \frac{1}{r^5} e^{-\nu} (\beta - \alpha + 2M) [2e^\lambda \alpha \Omega - r^2 \omega'] \mathcal{L}_1^\pm \\ & + \frac{32}{r^5 \Lambda} e^{-\nu} (\alpha + \beta)(\alpha - M) \Omega \mathcal{L}_2^\pm \\ & - \frac{2}{r^5 \Lambda} e^{-\nu} (\beta + M) (3r^2 \omega' + 2e^\lambda \alpha \omega) \mathcal{L}_3^\pm \\ & - \frac{4}{r^5 \Lambda} e^{-\nu} [\alpha(M + \beta)e^\lambda + 8(\alpha + \beta)(M - \alpha)] \omega \mathcal{L}_2^\pm \\ & - \frac{4\Lambda^\pm}{r^5 \Lambda} e^{-\nu} [(2\alpha^2 + \beta\alpha - M\alpha)e^\lambda - 2r(\alpha - M)] \omega \mathcal{L}_2^\pm \\ & + \frac{2}{r^3 \Lambda} e^{-\nu} [(4\alpha - \beta + 3M)\Lambda^\pm + 4\alpha - 5\beta - 9M] \omega' \mathcal{L}_2^\pm \\ & + \frac{16}{r^4 \Lambda} e^{-\nu} [2(\alpha - M)^2 + M^2 - \beta M + 2\beta\alpha] \omega' \mathcal{L}_2^\pm \\ & + \frac{16}{r^6 \Lambda} e^{-\nu-\lambda} \varpi(\alpha + \beta) [3rM e^{-\lambda} + \beta(2M - r) + \alpha(3\alpha - 4r + 5M)] \mathcal{L}_2^\pm \\ & - \frac{16}{r^6 \Lambda} e^{-\nu-\lambda} \varpi\alpha(\alpha + \beta)(M - \alpha) C_s^{-2} \mathcal{L}_2^\pm \\ & - \frac{2}{r^5} e^{-\nu-\lambda} \varpi [\beta(\alpha - r) - \alpha(\alpha + r) + 2M(\beta + 2\alpha)] \mathcal{L}_1^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.102)$$

$$\begin{aligned} f_{22} = & \frac{2}{r^2} (r - 2\alpha e^\lambda) \varpi \mathcal{L}_1^\pm + \left[\frac{32}{\Lambda r} (\alpha - M) \mathcal{L}_2^\pm - \mathcal{L}_1^\pm \right] \varpi' \\ & - \frac{16}{r^2 \Lambda} (4\alpha + \beta - 3M) \omega \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.103)$$

$$f_{23} = \frac{16}{r \Lambda} \varpi(M - \alpha) \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.104)$$

$$f_{24} = \frac{3\Lambda^\pm}{r^5 \Lambda} (\beta + M)(\beta - \alpha) \omega \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.105)$$

$$f_{25} = -\frac{3\Lambda^\pm}{r^3 \Lambda} e^{-\lambda} (\beta + M) \omega \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.106)$$

$$\begin{aligned} f_{26} = & \frac{1}{r^3 \Lambda} e^{-\nu} (\beta + M) [(\Lambda^\pm - 2) \mathcal{L}_2^\pm - 2\Lambda \mathcal{L}_1^\pm - 2\mathcal{L}_3^\pm] \omega \\ & - \frac{2}{r^3} e^{-\nu} (\alpha + \beta) \varpi \mathcal{L}_1^\pm - \frac{16}{r^4 \Lambda} e^{-\nu} (\alpha + \beta)(M - \alpha) \varpi \mathcal{L}_2^\pm \\ & - \frac{4}{r^3 \Lambda} e^{-\nu-\lambda} (\beta - 2\alpha + 3M) \omega' \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.107)$$

Συντελεστές για την εξισώση εξέλιξης (6.19) για τη μεταβλητή V ,

$$q_{00} = -\frac{\alpha + \beta}{r^3} \quad (\Delta'.108)$$

$$q_{01} = \frac{1}{r^2} (\alpha + \beta) e^{-\nu} \quad (\Delta'.109)$$

$$q_{02} = \frac{1}{r^4} (\beta - 3\alpha + 4M) \quad (\Delta'.110)$$

$$\begin{aligned}
q_{10} &= \frac{im}{r^3\Lambda} \left[2\beta(r-M) - 2r(2M-3\alpha)e^{-\lambda} - \alpha(2M+5\beta) - \alpha^2 \right] e^{-\nu}\varpi \\
&+ \frac{im}{r^3\Lambda} \left[\beta(\beta-3M) - 2(re^{-\lambda}-M)(\beta-\alpha) - 4rMe^{-\lambda} \right] e^{-\nu}\varpi \\
&+ \frac{im}{r\Lambda} e^{-\nu-\lambda}\varpi' \tag{\Delta'.111} \\
q_{11} &= \frac{im}{r\Lambda} e^{-\nu-\lambda} [2(M-\alpha) + (\alpha-\beta-2M)C_S^2] \varpi \tag{\Delta'.112} \\
q_{12} &= \frac{im}{\Lambda} (2\varpi - \Lambda\Omega + \Lambda C_s^2 \varpi) \tag{\Delta'.113} \\
q_{13} &= \frac{im}{\Lambda} e^{-\lambda} r^2 \varpi' \\
&- \frac{im}{\Lambda} \left[C_s^2(3\alpha-\beta+2re^{-\lambda}) + 2(\alpha-re^{-\lambda}) \right] \varpi \tag{\Delta'.114} \\
q_{14} &= \frac{im}{2\Lambda r^2} e^{-\nu} \varpi [(\beta-3\alpha+4M)C_s^2 + 2(\alpha+3\beta+2M)] \\
&+ \frac{im}{2\Lambda r^2} e^{-\nu} (3\beta-\alpha+4M)\omega \tag{\Delta'.115} \\
q_{15} &= \frac{im}{2\Lambda} e^{-2\nu} [(3\beta-\alpha+4M)C_s^2 + 2(\beta-\alpha+2M)] \varpi \\
&- \frac{im}{2\Lambda} e^{-2\nu} (\alpha+\beta)\omega \tag{\Delta'.116} \\
q_{16} &= -\frac{im}{\Lambda} e^{-\lambda} C_s^2 r^2 \varpi \tag{\Delta'.117} \\
q_{20} &= -\frac{\Omega}{\Lambda} \mathcal{L}_2^\pm + \frac{\Omega-2\omega}{\Lambda} \mathcal{L}_2^\pm \tag{\Delta'.118} \\
q_{21} &= \frac{\varpi}{r^3\Lambda} e^{-\nu} (\alpha+\beta) [\mathcal{L}_3^\pm - (1+\Lambda^\pm)\mathcal{L}_2^\pm] \\
&- \frac{\omega}{r^3\Lambda} e^{-\nu} [(\alpha+\beta)\Lambda^\pm \mathcal{L}_2^\pm + (\beta-\alpha+2M)(\mathcal{L}_2^\pm + \mathcal{L}_3^\pm)] \tag{\Delta'.119}
\end{aligned}$$

Συντελεστές για την εξίσωση εξέλιξης (6.20) για τη μεταβλητή U ,

$$\begin{aligned}
s_{00} &= \frac{2}{r^5} [\beta(\alpha+\beta) + 2re^{-\lambda}(M-\alpha)] \tag{\Delta'.120} \\
s_{01} &= -\frac{2}{r^3} e^{-\lambda} (\alpha+\beta) \tag{\Delta'.121} \\
s_{10} &= -im\Omega - \frac{2im}{r\Lambda} (4\beta-r+4M) \varpi \tag{\Delta'.122} \\
s_{11} &= -\frac{2im}{r^4\Lambda} e^{-\nu} (\alpha+\beta) \left(4\beta+r\Lambda+r-2re^{-\lambda} \right) \varpi \\
&- \frac{4im}{r^2\Lambda} e^{-\nu-\lambda} r^2 (\beta+M)\omega' \tag{\Delta'.123} \\
s_{12} &= \frac{2im}{r\Lambda} e^{-\nu-\lambda} (M+\beta)\omega' \tag{\Delta'.124} \\
s_{13} &= -s_{12} \tag{\Delta'.125}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_{20} &= \frac{1}{r\Lambda} [(r + 8M + 8\beta - rC_s^\pm\Lambda^\pm)\varpi + r\omega] \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{\omega - \varpi}{\Lambda} \mathcal{L}_3^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.126)$$

$$\begin{aligned} s_{21} &= \frac{1}{\Lambda} [r^2 e^{-\lambda} \varpi' + 2(\alpha e^{-\lambda} - r)\varpi] \\ &+ C_s^2 (3\alpha - \beta + 2r e^{-\lambda}) \varpi \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.127)$$

$$\begin{aligned} s_{22} &= \frac{\varpi e^{-\nu}}{r^3 \Lambda} [(3\beta - 2r + 6M)\alpha - \beta^2 + 2\beta(r - 3M) + 4rMe^{-\lambda}] C_s^2 \mathcal{L}_2^\pm \\ &+ \frac{\varpi e^{-\nu}}{r^3 \Lambda} [(5\beta - 6r + 14M)\alpha + \alpha^2 - 2(r - M)\beta + 4rMe^{-\lambda}] \mathcal{L}_2^\pm \\ &- \frac{e^{-\nu-\lambda}}{r\Lambda} (\alpha + \beta) \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.128)$$

$$s_{23} = \frac{e^{-\nu-\lambda}}{r\Lambda} \varpi [(\beta - \alpha + 2M) C_s^2 + 2(M - \alpha)] \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.129)$$

$$s_{24} = \frac{C_s^2}{\Lambda} r^2 e^{-\lambda} \varpi \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.130)$$

$$\begin{aligned} s_{25} &= \frac{e^{-\nu}}{2r^2 \Lambda} (\alpha + \beta) \Omega \mathcal{L}_2^\pm \\ &- \frac{e^{-\nu}}{2r^2 \Lambda} [(\beta - 3\alpha + 4M) C_s^2 + (7\beta + 3\alpha + 4M)] \varpi \mathcal{L}_2^\pm \end{aligned} \quad (\Delta'.131)$$

$$s_{26} = \frac{e^{-2\nu}}{2\Lambda} [(\alpha + \beta) \Omega - (C_s^2 + 1)(3\beta - \alpha + 4M) \varpi] \mathcal{L}_2^\pm \quad (\Delta'.132)$$

Βιβλιογραφία

Βιβλία

- [1] *Gravitation*, Charles W. Misner, Kip Thorne, John Wheeler, W.H. Freeman and Company, 1973.
- [2] *Lectures on General Relativity*, A. Papapetrou, Springer-Verlag, 1971.
- [3] *Sources of Gravitational Radiation*, L. Smarr, Cambridge University Press, 1979.
- [4] *General Relativity: An introduction to the theory of the Gravitational Field*, H. Stefani, Cambridge University Press, 1982.
- [5] *General Relativity and Gravitation*, J. Weber, 1961.
- [6] *A First Course in General Relativity* B.F. Schutz, Cambridge University Press, 1985.
- [7] *Stellar Structure and Evolution*, R. Kippenhahn, A. Weigert, Springer-Verlag, 1990.
- [8] *General Relativity*, Robert M. Wald, The University of Chicago Press, 1984.
- [9] *Nonradial Oscillations of stars*, W. Unno, Y. Osaki, H. Ando, H. Saio, H. Shibahashi, 2nd ed., University of Tokyo Press, 1989.
- [10] *Relativistic Astrophysics*, M. Demiański, Pergamon Press, 1985.
- [11] *Theory of rotating stars*, J. Tassoul, Princeton University Press, 1978.

- [12] *Black holes, White Dwarfs and Neutron stars*, S.L. Shapiro, S.A. Teukolsky, J. Wiley & Sons, 1983.
- [13] *Numerical Partial Differential Equations*, J.W. Thomas, Springer, 1998.
- [14] *Numerical recipies in Fortran*, W.H Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, 2nd ed., Cambridge University Press, 1992.
- [15] *Numerical methods for conservation laws*, Randall J. Leveque, 2nd edition, 1992.
- [16] *Εισαγωγή στη μηχανική των συνεχών μέσων*, Ι.Δ. Χατζηδημητρίου, Γ.Δ. Μπόζης, Εκδόσεις Τζιόλα, 1997.
- [17] *Εισαγωγή στη Γενική Θεωρία Σχετικότητας*, Ν.Κ. Σπύρου, Α.Π.Θ, 1985.
- [18] *Εισαγωγή στη διαφορική γεωμετρία με εφαρμογές στη Φυσική*, Γ. Τσάγκας, Δ. Παπαδόπουλος, 1999.

Μη ακτινικές ταλαντώσεις αστέρων

- [19] *The non-radial oscillations of polytropic stars*, T.G. Cowling, Mon. Not. R. Astr. Soc. **101**, 367 (1941).
- [20] *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. V. Analytic analysis for $l = 1$* , A. Campolattaro & K.S. Thorne, Astrophys. J. **159**, 847 (1970).
- [21] *Non-radial pulsations of general relativistic stellar models. I. Analytic analysis for $l \geq 2$* , K.S. Thorne & A. Campolattaro, Astrophys. J. **147**, 591 (1967) + Erratum: Astrophys. J. **152**, 673 (1968).
- [22] *Gravitational radiation damping*, K.S. Thorne, Phys. Rev. Lett. **21**, 320 (1968).
- [23] *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. II. Properties of the gravitational waves*, R. Price & K.S. Thorne, Astrophys. J. **155**, 163 (1969).
- [24] *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. III. Analytic and numerical results for neutron stars*, K.S. Thorne, Astrophys. J. **158**, 1 (1969).

- [25] *Non-radial pulsations of general-relativistic stellar models. IV. The weak-field limit*, K.S. Thorne, *Astrophys. J.* **158**, 997 (1969).
- [26] *Stability of a Schwarzschild singularity*, T. Regge & J.A. Wheeler, *Phys. Rev.* **108**, 1063 (1957).
- [27] *Non-radial pulsations of general relativistic stellar models. VI. Corrections*, J. Ipser & K. Thorne, *Astrophys. J.* **181**, 181 (1973).
- [28] *On the non radial pulsations of general relativistic stellar models*, S. Detweiler & L. Lindblom, *Astrophys. J.* **292**, 12 (1985).
- [29] *On the non-radial oscillations of a star*, S. Chandrasekhar & V. Ferrari, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **A432**, 247 (1991).
- [30] *On the non-radial oscillations of slowly rotating stars induced by the Lense-Thirring effect*, S. Chandrasekhar & V. Ferrari, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **A433**, 423 (1991).
- [31] *On the non-radial oscillations of a star III. A reconsideration of the axial modes*, S. Chandrasekhar & V. Ferrari, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **A434**, 434 (1991).
- [32] *Rotational and tidal perturbations of nonradial oscillations in a polytropic star*, H. Saio, *Astrophys. J.* **244**, 299 (1981).
- [33] *R-mode oscillations in uniformly rotating stars*, H. Saio, *Astrophys. J.* **256**, 717 (1982).
- [34] *Relation of gauge formalisms for pulsations of general-relativistic stellar models*, J.R. Ipser and R.H. Price, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 307 (1991).
- [35] *Equations governing the nonradial oscillations of a slowly rotating relativistic star*, Y. Kojima, 1992, *Phys. Rev. D* **46**, 4289 (1992).
- [36] *Nonradial g-mode oscillations of warm neutron stars*, P.N. McDermott, M. Van Horn, J.F. Scholl, *Astrophys. J.* **268**, 837 (1983).

- [37] *Accuracy of the relativistic Cowling approximation in slowly rotating stars*, S. Yoshida, Y. Kojima, Mon. Not. R. Astr. Soc. **289**, 117 (1997).
- [38] *Discovery of a pulsar in a binary system*, R.A. Hulse & J.H. Taylor, Astrophys. J. **195**, L51 (1975).
- [39] *Rapidly Rotating Relativistic Stars*, J.L. Friedman, J.R. Ipser, Phil. Trans. R. Soc. London, Ser. A, **340**, 391-422, 1992.
- [40] *Rapid Differential Rotation of Protoneutron Stars and Constraints on Radio Pulsars Periods*, J.O. Goussard, P. Haensel, J.L. Zdunik, Astron. Astrophys. **330**, 1005-1016 (1998).
- [41] *General Relativistic Polytropic Fluid Spheres*, R.F. Tooper, Astrophys. J. **140**, 434 (1964).
- [42] *Adiabatic Fluid Spheres in General Relativity*, R.F. Tooper, Astrophys. J. **142**, 1541 (1965).
- [43] *An overview of Gravitational-Wave Sources*, C. Cutler & K.S. Thorne, World Scientific, 2002.
- [44] *Gravitational waves from hot young rapidly rotating neutron stars*, B.J. Owen, L. Lindblom, C. Cutler, B.F. Schutz, A. Vecchio, N. Andersson, Phys. Rev. D **58**, 084020 (1998).
- [45] *Stability of non-radial oscillations of cold nonrotating neutron stars*, L. Battiston, P. Cazzola, L. Lucaroni, Nuova Cimento, **3B**, 2, 1971.
- [46] *Stability of nonradial vibrational modes of relativistic neutron stars*, P. Cazzola, L. Lucaroni, Phys. Rev. D **6**, 950 (1972).
- [47] *Stability of nonradial vibrational modes of relativistic neutron stars. II*, P. Cazzola, L. Lucaroni, Phys. Rev. D **10**, 2038 (1974).
- [48] *Integral equations for even parity perturbations of hot perfect fluid nonrotating neutron stars*, P. Cazzola, L. Lucaroni, R. Semezato, J. Math. Phys. **19**, 237 (1978).

- [49] *Asymptotic eigenfrequency distribution for even parity perturbations of hot perfect fluid relativistic neutron stars*, P. Cazzola, L. Lucaroni, R. Semezato, J. Math. Phys. **19**, 901 (1978).
- [50] *Neutron stars : Analytical continuation of the ingoing gravitational wave amplitudes and asymptotic eigenfrequencies distribution for even modes*, P. Cazzola & L. Lucaroni, J. Math. Phys. **19**, 2628 (1978).
- [51] *Gravitational waves from pulsating stars: Evolving the perturbation equations for a relativistic star*, G. Allen, N. Andersson, K.D Kokkotas & B.F Schutz, Phys. Rev. D **58**, 124012 (1998).
- [52] *Quasinormal modes: the characteristic “sound” of black holes and neutron stars*, Hans Peter Nollert, Class. Quantum Grav. **16**, R159 (1999).
- [53] *Relativistic stellar oscillations treated as an initial value problem*, S. Kind, J. Ehlers, and B. Schmidt, Class. Quantum Grav. **10**, 2123 (1993).
- [54] *Axial modes for relativistic stars*, K.D. Kokkotas, Mon. Not. R. Astr. Soc. **268**, 1015 (1994) + Erratum: Mon. Not. R. Astr. Soc. **277**, 599 (1995).
- [55] *W-modes: A new family of normal modes of pulsating relativistic stars*, K.D. Kokkotas & B.F. Schutz, Mon. Not. R. Astr. Soc. **255**, 199 (1992).
- [56] *On the oscillation spectra of ultracompact stars: An extensive survey of gravitational-wave modes*, N. Andersson, Y. Kojima, K.D. Kokkotas, Astrophys. J. **462**, 855 (1996).
- [57] *Space-time modes of relativistic stars*, N. Andersson, K.D. Kokkotas, B.F. Schutz, Mon. Not. R. Astr. Soc. **280**, 1230 (1996).
- [58] *Quasi-normal modes of stars and black holes*, K.D. Kokkotas and B.G. Schmidt, [Article in Online Living reviews in relativity], <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume2/1999-2kokkotas>.

- [59] *Rotating stars in relativity*, Nikolaos Stergioulas, [Article in Online Living reviews in relativity], <http://www.livingreviews.org/Articles/Volume1/1998-8stergio>.
- [60] *New approach to the evolution of neutron star oscillations*, Johannes Ruoff, Phys. Rev. D **63**, 064018 (2001).
- [61] *Solutions of Two Problems in the Theory of Gravitational Radiation*, S. Chandrasekhar, Phys. Rev. Lett. **24**, 611 (1970).
- [62] *The effect of gravitational radiation on the secular stability of the Maclaurin spheroid*, S. Chandrasekhar, Astrophys. J. **161**, 561 (1970).
- [63] *Secular instability of rotating Newtonian stars*, J.L. Friedman & B.F. Schutz Astrophys. J. **222**, 281 (1978).
- [64] *Damping times for neutron star oscillations*, C. Cutler, L. Lindblom, R.J. Splinter Astrophys. J. **363**, 603 (1990).
- [65] *The oscillation of rapidly rotating Newtonian stellar models*, J.R. Ipser & L. Lindblom Astrophys. J. **373**, 213 (1991).
- [66] *Post-Newtonian frequencies for the pulsations of rapidly rotating neutron stars*, C. Cutler & L. Lindblom Astrophys. J. **385**, 630 (1992).
- [67] *Critical angular velocities of rotating neutron stars*, L. Lindblom Astrophys. J. **438**, 265 (1995).
- [68] *Bulk viscosity of hot-neutron star matter and the maximum rotation rates of neutron stars*, R.F. Saywer, Phys. Rev. D **39**, 3804 (1989).
- [69] *Axial Instability of Rotating Relativistic Stars*, J.L. Friedman & S.M. Morsink, Astrophys. J. **502**, 714 (1998).
- [70] *R-mode runaway and rapidly rotating neutron stars*, N. Andersson, D.I. Jones, K.D. Kokkotas & N. Stergioulas, Astrophys. J. **534**, L75 (2000).

- [71] *On the relevance of the r-mode instability for accreting neutron stars and white dwarfs*, N. Andersson, K.D. Kokkotas & N. Stergioulas, *Astrophys. J.* **516**, 307 (1999).
- [72] *Runaway Heating By R-modes of Neutron Stars in Low Mass X-ray Binaries*, Y. Levin, *Astrophys. J.* **517**, 328 (1999)
- [73] *The dynamics of general relativity*, R. Arnowitt, S. Deser, C.W. Misner, “Gravitation: an introduction to current research”, Louis Witten ed. (Wiley 1962), chapter 7, pp 227–265.
- [74] *Gravitational Radiation from pairs of realistic nonaccreting compact stars*, N.K. Spyrou & K.D. Kokkotas, *Astrophys. J.* **431**, 254 (1994).
- [75] *Spin-down of Relativistic Stars with Phase Transitions and PSR J0537-6910*, N.K. Spyrou & N. Stergioulas, *Astron. Astrophys.* **395**, 151 (2002).
- [76] *Evolutionary Self-Energy-Loss Effects in Compact Binary Systems: Importance of Rapid Rotation and of Equation of State*, N.K. Spyrou & N. Stergioulas, *Astron. Astrophys.* **366**, 598 (2001).
- [77] *Nonlinear hydrodynamical evolution of rotating relativistic stars: Numerical methods and code tests*, J.A. Font, N. Stergioulas & K.D. Kokkotas *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **313**, 678 (2000).
- [78] *Three-Dimensional General Relativistic Hydrodynamics II: Long-Term Dynamics of Single Relativistic Stars*, J. Font, T. Goodale, S. Iyer, M. Miller, L. Rezzolla, E. Seidel, N. Stergioulas, W. Suen, M. Tobias, *Phys. Rev. D* **65**, 084024 (2002).
- [79] *Towards a Stable Numerical Evolution of Strongly Gravitating Systems in General Relativity: The Conformal Treatments*, M. Alcubierre, B. Bruegmann, T. Dramlitsch, J.A. Font, P. Papadopoulos, E. Seidel, N. Stergioulas & R. Takahashi *Phys. Rev. D* **62**, 044034 (2000).
- [80] *Relativistic r-modes in Slowly Rotating Neutron Stars: Numerical Analysis in the Cowling Approximation*, S. Yoshida, & U. Lee, *Astrophys. J.* **567**, 1112 (2002).

- [81] *Quasi-radial modes of rotating stars in general relativity*, S. Yoshida, & Y. Eriguchi, Mon. Not. R. Astr. Soc. **322**, 389 (2001).
- [82] *Slowly rotating relativistic stars, I. Equations of structure*, J. Hartle, Astrophys. J. **150**, 1005 (1967).
- [83] *Slowly rotating relativistic stars, II. Models for neutron stars and supermassive stars*, J. Hartle & K. Thorne Astrophys. J. **153**, 807 (1968).
- [84] *On slowly rotating homogeneous masses in general relativity*, S. Chandrasekhar & J. Miller, Mon. Not. R. Astr. Soc. **167**, 63 (1974).
- [85] *The structure equations of a slowly rotating fully relativistic solid star*, H. Quintana, Astrophys. J. **207**, 279 (1976).
- [86] *Theory for the distorted dipole modes of the rapidly oscillating Ap stars: A refinement of the oblique pulsator model*, H. Shibahashi and M. Takata, Publ. Astron. Soc. Japan **45**, 617, 1993.
- [87] *Axisymmetric Modes of Rotating Relativistic Stars in the Cowling Approximation*, J. A. Font, H. Dimmelmeier, A. Gupta, N. Stergioulas, Mon. Not. R. Astr. Soc. **325**, 1463 (2001).
- [88] *Where are the r-modes of isentropic stars?*, K. H. Lockitch, J. L. Friedman, Astrophys. J. **521**, 764 (1999).
- [89] *The rotational modes of relativistic stars, I: Analytic results*, K. H. Lockitch, N. Andresson, J. L. Friedman, Phys. Rev. D **63**, 024019 (2001).
- [90] *A new class of unstable modes in rotating relativistic stars*, N. Andersson, Astrophys. J. **502**, 708 (1998).
- [91] *Gravitational radiation limit on the spin of young neutron stars*, N. Andersson, K.D. Kokkotas & B.F. Schutz, Astrophys. J. **510**, 846 (1999).
- [92] *Multipole expansions of gravitational radiation*, K.S. Thorne, Rev. Mod. Phys. **52**, 299, 1980.
- [93] *Gravitational Radiation Instability in Hot Young Neutron Stars*, L. Lindblom, B. Owen, S. Morsink, Phys. Rev. Lett. **80**, 4843 (1998).

- [94] *The R-mode oscillations in relativistic rotating stars*, Y. Kojima, M. Hosonuma, astro-ph/9903055.
- [95] *On the r-mode spectrum of relativistic stars in the low frequency approximation*, J. Ruoff & K.D. Kokkotas, Mon. Not. R. Astr. Soc. **328**, 678 (2001).
- [96] *On the r-mode spectrum of relativistic stars: Inclusion of the radiation reaction*, J. Ruoff, K.D. Kokkotas, Mon. Not. R. Astr. Soc. **330**, 1027 (2002).
- [97] *On the r-mode spectrum of relativistic stars*, H.R. Beier, K.D. Kokkotas, Mon. Not. R. Astr. Soc. **308**, 745 (1999).
- [98] *Normal modes of Bardeen disks - II. A sequence of $n = 2$ polytropes*, B.F. Schutz & E. Verdaguer, Mon. Not. R. Astr. Soc. **202**, 881 (1983).
- [99] *Normal modes of Bardeen disks - III. Short wavelength analysis and classification*, E. Verdaguer, Mon. Not. R. Astr. Soc. **202**, 901 (1983).
- [100] *The continuous spectrum in differentially rotating perfect fluids - A model with an analytic solution*, E. Balbinski, Mon. Not. R. Astr. Soc. **209**, 145 (1984).
- [101] *The continuous spectrum in differentially rotating perfect fluids. II - The effect of gravitational radiation reaction*, E. Balbinski, Mon. Not. R. Astr. Soc. **209**, 712 (1984).
- [102] *Quasi-toroidal oscillations in rotating relativistic stars*, Y. Kojima, Mon. Not. R. Astr. Soc. **293**, 49 (1998).
- [103] *Towards gravitational-wave asteroseismology*, N. Andersson, K.D. Kokkotas, Mon. Not. R. Astr. Soc. **299**, 1059 (1998).
- [104] *The inverse problem for pulsating neutron stars: A “fingerprint analysis” for the supranuclear equation of state*, K.D. Kokkotas, T.A. Apostolatos & N. Andersson, Mon. Not. R. Astr. Soc. **320**, 307 (2001).
- [105] *Gravitational waves and pulsating stars: What can we learn from future observations?*, N. Andersson, K.D. Kokkotas, Phys. Rev. Lett. **77**, 4134 (1996).
- [106] *Observational Constraints on the Neutron Stars Mass Distribution*, L.S. Finn, Phys. Rev. Lett. **73**, 1878 (1994).

- [107] *On the masses of Neutron Stars*, M.H. van Kerkwijk, J. van Paradijs & E.J. Zuiderwijk, Astron. Astrophys. **303**, 497 (1995).
- [108] *Oscillation and Instabilities of Relativistic Stars*, K.D. Kokkotas, N. Andersson, Proceedings of XIV Conference of General Relativity and Gravitational Physics, SIGREV-2000, Genoa, Springer-Verlag (2001).

Διάφορα

- [109] *The numerical evolution of Neutron star oscillations*, J. Ruoff, PhD thesis 2000, University of Tübingen.
- [110] *Sources and detection of gravitational waves*, A. Stavridis, Diploma Thesis, 1996, unpublished.
- [111] Latest version of GRTensorII available from: <http://astro.queensu.ca/~grtensor/>, Developed by Peter Musgrave, Denis Pollney and Kayll Lake.

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Προσωπικά στοιχεία

Επίθετο :	Σταυρίδης
Όνομα :	Αδαμάντιος
Ημερομηνία γέννησης:	22 Αυγούστου 1973
Τόπος γέννησης :	Θεσσαλονίκη
Οικογενειακή κατάσταση :	Άγαμος
Διεύθυνση κατοικίας :	Δοϊράνης 10, 54639 Θεσσαλονίκη
Tηλ :	+30 231 836466
e-mail :	astavrid@astro.auth.gr
web-page :	http://www.astro.auth.gr/~astavrid

Εκπαίδευση

Προπτυχιακές σπουδές

- 1991-1996 Τμήμα Φυσικής, Σ.Θ.Ε. / A.Π.Θ
- Διπλωματική εργασία: Πηγές και ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων. Επιβλέπων: Επ. Καθ. Κων/νος Κόκκοτας.

Μεταπτυχιακές σπουδές

- 01/1997 - 06/1998 Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Γενικής Φυσικής, Τμήμα Φυσικής, Σ.Θ.Ε. /A.Π.Θ
- 06/1998 - 09/2004 Υπ. Διδάκτωρ στο Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής του τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε. / A.Π.Θ

Τίτλος Διδακτορικής Διατριβής

- Περιστρεφόμενοι Σχετικιστικοί Αστέρες
- (Επιβλέπων: Αν. Καθ. Κων/νος Κόκκοτας)

Ερευνητικά ενδιαφέροντα

- Μη ακτινικές ταλαντώσεις αστέρων
- Πηγές και μέθοδοι ανίχνευσης βαρυτικών κυμάτων
- Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης συστημάτων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

Τίτλοι

- Πτυχίο Φυσικής, Νοέμβριος 1996, Βαθμός 8.43 (Λίαν καλώς)

Γλώσσες

- Ελληνικά (Μητρική γλώσσα)
- Αγγλικά (επίπεδο Proficiency)
- Ιταλικά (επίπεδο diploma)
- Γερμανικά (επίπεδο αρχαρίου)

Συμμετοχή σε Επιστημονικές Ενώσεις

- 1997, Μέλος της Ελληνικής Αστρονομικής εταιρείας (ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ)

Επισκέψεις-Ερευνητική εμπειρία

- Από τον Φεβρουάριο του 1996 μέχρι τον Ιούλιο του ίδιου έτους στο Max Planck Institut for Gravitation στην Jena της Γερμανίας
- Από τον Ιούνιο 2002 έως τον Ιανουάριο 2004 στο Πανεπιστήμιο La Sapienza της Ρώμης ως μεταδιδακτορικός ερευνητής μέσω του ευρωπαϊκού προγράμματος "Sources of Gravitational waves" (Contract Number HPRN-CT-2000-00137)
- Από τον Φεβρουάριο του 2004 έως τον Ιούνιο του ίδιου έτους στο Πανεπιστήμιο La Sapienza της Ρώμης ως μεταδιδακτορικός ερευνητής μέσω του Ιταλικού προγράμματος έρευνας COFIN-2003
- Απρίλιος 2004, Ερευνητικός επισκέπτης, Πανεπιστήμιο Πάρμας, Ιταλία

Υποτροφίες

- Σεπτέμβριος 1991 - Χρηματική αμοιβή από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφίων (Ι.Κ.Υ) για σειρά εισαγωγής στο Τμήμα Φυσικής της Σχολής Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ.
- Φεβρουάριος 1996 - Ιούλιος 1996, Υποτροφία Erasmus κινητικότητας φοιτητών.
- Νοέμβριος 1997 - Αύγουστος 2000, Υποτροφία διδακτορικού, πρόγραμμα εσωτερικού από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφίων (Ι.Κ.Υ), Αρ. σύμβασης 2541, 1997.

Χρήση υπολογιστών

Κατά τη διάρκεια εκπόνησης της διδακτορικής μου διατριβής έχω χρησιμοποιήσει και έχω εμπειρία στα ακόλουθα πακέτα,

- Γραφικά πακέτα : *Grapher, Origin, Xgraph, Gnuplot for Windows/X-Windows, Pgplot*
- Μαθηματικά πακέτα : *Mathematica, MapleV, Mathcad, MatLab*
- Επεξεργαστές κειμένου : *Word , LATEX*
- Διάφορα προγράμματα : *Excel, Access, PowerPoint, Ghostview*
- Internet : *Netscape Communicator, Microsoft Internet Explorer, HTML language, Lyx, TCP-IP protocols*
- Εγκατάσταση Λειτ./Συστημ. : Άριστος γνώστης εγκατάστασης Λ.Σ. Windows και Linux.
- Ανάπτυξη λογισμικού : Κώδικες επίλυσης συστημάτων Δ.Ε και Δ.Ε.Μ.Π με γραφική αναπαράσταση των λύσεων. Αριθμητικός υπολογισμός ολοκληρωμάτων και μετασχηματισμών Fourier.

Επιπλέον έχω παρακολουθήσει σεμινάριο για την εγκατάσταση και συντήρηση δικτύου υπολογιστών σε λειτουργικό σύστημα Windows NT από το Κέντρο Λειτουργίας και Διαχείρησης Δικτύου του Α.Π.Θ.

Συμμετοχή σε ερευνητικά προγράμματα

- ‘Παλλόμενοι Σχετικιστικοί Αστέρες’, Γενική Γραμματεία Ερευνας και Τεχνολογίας, Επ. Υπεύθυνος: Κώστας Κόκκοτας, 1997-1998.
- ‘Δυναμική, Δομή και ευστάθεια γαλαξιακών προτύπων στη Σχετικιστική και στη Νευτώνεια Δυναμική’, Γενική Γραμματεία Ερευνας και Τεχνολογίας, Επ. Υπεύθυνος: Νίκολαος Κ. Σπύρου, 1997-1998.
- ‘Ευρωπαϊκό πρόγραμμα για τις πηγές βαρυτικών κυμάτων : Θεωρητικό υπόβαθρο των πηγών βαρυτικών κυμάτων του επόμενου αιώνα : Συσχέτιση προσομοιώσεων υπερ-υπολογιστών και προσεγγιστικών τεχνικών’ , Ευρωπαϊκή ένωση , Επ. Υπεύθυνος Ed. Seidel , 2000-2003.
- COFIN 2003, Ερευνητικό πρόγραμμα βασικής έρευνας χρηματοδότησης Ιταλικού χράτους.

Κριτής σε επιστημονικά περιοδικά

Είμαι κριτής στο περιοδικό Classical and Quantum Gravity

Συμμετοχή σε οργάνωση συνεδρίων

Συμμετείχα ως βοηθός της Τοπικής Οργανωτικής Επιτροπής, στην οργάνωση των ακόλουθων συνεδρίων,

- 2^o Συνέδριο της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ, Θεσσαλονίκη
- JENAM 97 - New Trends in Astronomy & Astrophysics, Θεσσαλονίκη
- 2^o Συνέδριο του Ευρωπαϊκού δικτύου για τη βαρύτητα, Θεσσαλονίκη

Σεμινάρια- Διαλέξεις

Παρουσιάσεις σε σεμινάρια/διαλέξεις

- ‘Combinations and Arrangements’, Δεκέμβριος 1991, Εργαστήριο αστρονομίας, προφορική παρουσίαση για το μάθημα της Ανάλυσης I
- ‘Experiments for the equality of Gravitational and Inertial Mass’, Μάρτιος 1995, Εργαστήριο αστρονομίας, προφορική παρουσίαση για το μάθημα της Γενικής Θεωρίας Σχετικότητας
- ‘Πηγές και ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων’, Σεπτέμβριος 1996, Εργαστήριο Αστρονομίας, Παρουσίαση διπλωματικής εργασίας (στα αγγλικά)
- Κριτήρια σύγκλισης και σταθερότητας για παραβολικές διαφορικές εξισώσεις, Σεπτέμβριος 1997, στα πλαίσια του μεταπτυχιακού μαθήματος ‘Αριθμητικές μέθοδοι για διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους’
- “The relativistic Cowling approximation for slowly rotating neutron stars”, Ιούνιος 2001, 2^o Συνέδριο του Ευρωπαϊκού δικτύου για τη βαρύτητα
- “A new gauge for the polar perturbations of slowly rotating relativistic stars”, Σεπτέμβριος 2001, 5^o Πανελλήνιο Αστρονομικό Συνέδριο
- “Secular g-modes instabilities of hot proto-neutron stars”, Μάιος 2003, Joint BURST 2003/5th E.U. Network Meeting, Παρίσι, Γαλλία

Συμμετοχή σε συνέδρια και σχολεία

1. ‘2ο Πανελλήνιο Αστρονομικό Συνέδριο’, Ιούλιος 1995, Περαία, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
2. ‘JENAM - 97’, 2-5 Ιουλίου 1997, Καλλιθέα, Χαλκιδική, Ελλάδα
3. ‘Current issues of Astronomical and Planetary Environmental Concern’, Απρίλιος 1998, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα

4. 'NEB-8, Νεώτερες εξελίξεις στην Βαρύτητα', 26-29 Αυγούστου 1998, Σάμος, Ελλάδα (*)
 5. "2nd Samos Meeting on Cosmology Geometry and Relativity", 31 Αυγούστου - 4 Σεπτεμβρίου 1998, Σάμος, Ελλάδα
 6. "The third Euro-Conference on Parallel and Distributed Computing for Computational Mechanics" 20-25 Μαρτίου 1999, Weimar, Γερμανία
 7. "The Neutron Star, Black Hole Connection", 7-18 Ιουνίου 1999, Ελούντα, Κρήτη, Ελλάδα
 8. "12th EADN predoctoral school, Selected topics on binary stars, Observations and physical processes", 6-17 Σεπτεμβρίου 1999, La Laguna, Tenerife, Canary Islands, Ισπανία
 9. "2^o Ευρωπαϊκό συνέδριο για τη βαρύτητα", 6-10 Ιουλίου 2001, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα (*)
 10. 'Conference on Applied Differential Geometry - Lie Algebra, General Relativity', 27 Ιουνίου - 1 Ιουλίου 2001, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα (*)
 11. '5^o Πανελλήνιο Αστρονομικό Συνέδριο', 20-22 Σεπτεμβρίου 2001, Ηράκλειο Κρήτη, Ελλάδα (*)
 12. 'NEB-10, New developments in Gravity', 30 Μαΐου - 3 Ιουνίου 2002, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα (*)
 13. '4th E.U. network meeting', 26-28 Σεπτεμβρίου 2002, Μαγιόρκα, Ισπανία
 14. 'Joint BURST 2003/5th E.U. Network Meeting', 19-22 Μάιου 2003, Παρίσι, Γαλλία (*)
 15. 'Advanced School and Conference on Sources of Gravitational Waves', 15-26 Σεπτεμβρίου 2003, Τεργέστη, Ιταλία
 16. 'Problemi Attuali di Fisica Teorica', 2-7 Απριλίου 2004, Vietri sul Mare, Ιταλία (*)
- (*), με παρουσίαση

Δημοσιεύσεις

Διεθνή περιοδικά με κριτές

- A1 *Evolution equations for the perturbations of slowly rotating relativistic stars.*
 Johannes Ruoff, Adamantios Stavridis, Kostas D. Kokkotas, MNRAS, 332, 676, 2002

A2 *Inertial modes of slowly rotating relativistic stars in the Cowling approximation.* Johannes Ruoff, Adamantios Stavridis, Kostas D. Kokkotas, MNRAS, 339, 1170, 2003

A3 *Rotational effects on the oscillation frequencies of newly born proto-neutron stars.* V. Ferrari, L. Gualtieri, J. Pons, A. Stavridis, MNRAS, 350, 763, 2004

A4 *Evolution equations for slowly rotating stars.* Adamantios Stavridis, Kostas D. Kokkotas, International Journal of Modern Physics D, accepted

Στο στάδιο της συγγραφής

A5 *Perturbation equations in the Cowling approximation for slowly rotating relativistic stars : 2nd order in Ω .* Adamantios Stavridis, Johannes Ruoff, Kostas D. Kokkotas

Πρακτικά συνεδρίων

B1 *A new gauge for the polar perturbations of slowly relativistic stars,* A. Stavridis, J. Ruoff, K.D. Kokkotas, στο “Conference on Applied Differential Geometry, Lie Algebra and General Relativity”, 27 Ιουνίου - 1 Ιουλίου 2001, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.

B2 *Perturbations of slowly rotating relativistic stars,* A. Stavridis, J. Ruoff, K.D. Kokkotas στο NEBX, New Developments in Gravity, 30 Μαΐου - 3 Ιουνίου 2002, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα.

B3 *Gravitational Waves from hot proto-neutron stars,* V. Ferrari, L. Gualtieri, J. Pons, A. Stavridis στο 5th Amaldi conference on Gravitational Waves, 6-11 Ιουλίου, 2003, Πιζά, Ιταλία.

Αναφορές από άλλους ερευνητές

- A1 • Horst R. Beyer, gr-qc/0203040, 2002,
• M. Bruni, L. Gualtieri, C.F. Sopuerta, gr-qc/0207105, 2002,
• L. Villain PhD Thesis, Paris VII, 2002,
• N. Stergioulas Liv. Reviews, gr-qc/0302034, 2003,
• C. Clarkson, M. Marklund, G. Betschart, P. Dunsby, astro-ph/0310323, 2003, to appear in ApJ,
• Andrea Pasamonti, Marco Bruni, Leonardo Gualtieri Carlos Sopuerta, gr-qc/0407108, 2004.
- A2 • K.H. Lockitch, J.L. Friedman, N. Andersson, Phys.Rev. D 68, 124010, 2003,
• N. Andresson, Clas. Quan. Grav. 20, R105, 2003,
• L. Villain PhD Thesis, Paris VII, 2002,
• N. Stergioulas Liv. Reviews, gr-qc/0302034, 2003,
• C. Clarkson, M. Marklund, G. Betschart, P. Dunsby, astro-ph/0310323, 2003, to appear in ApJ,

- *Shijun Yoshida, Shinichirou Yoshida, Yoshiharu Eriguchi, astro-ph/0406283,*
- *K.H. Lockitch, N. Andersson, A.L. Watts, gr-qc/0106088.*
- *L. Villain, S. Bonazzola, P. Haensel, gr-qc/0407081.*

A3

Summary

This PhD thesis is devoted to the study of the non-radial oscillations of slowly rotating neutron stars, in the framework of General Relativity. We studied these oscillations using the linear perturbation theory. At first we constructed the background stellar model. Then we introduced small perturbations, linearized the Einstein equations and studied the response of the perturbed system by solving the equations describing it, as an initial value problem or as it is usually said by many authors, in the time domain. The basic assumptions that we made in this study are the following,

- The star is a perfect fluid and has zero temperature,
- The star is rotating uniformly with angular velocity Ω and this rotation is a considered as perturbation of the non-rotating stellar model,
- The magnetic field of the star is negligible.

All the above assumptions follow from observational facts.

Subsequently we introduced small perturbations on this stellar model both on the fluid of the star and the spacetime around it. The perturbation functions are assumed to be of small order δ and in general are function of all the variables of the problem, i.e. t, r, θ, ϕ . We then splitted the perturbation functions into radial and angular parts using spherical harmonics. This is allowed because of the spherical symmetry of the background. We also introduced a dimensionless parameter $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$, that is the ratio of the angular velocity of the star, over the angular velocity at the mass shedding limit. By assuming that this parameter is small $\varepsilon \ll 1$, i.e. the star is rotating slowly, we calculated the Einstein equations (3.33) and the equations of motion of the fluid (3.38) and linearized them to both parameters ε and δ . By integrating the above equations over solid angles we eliminated the angular dependence of the perturbation functions. This way we arrived to a system of partial differential equations (PDEs) of time t and space r that describes the small non-radial perturbations of a slowly rotating neutron star.

Having the above system of equations in hand, we tried to solve it numerically and calculate the eigenfrequencies of the system. In order to understand them better we have splitted them into two basic parts, as is common in the bibliography. The part that describes the fluid perturbations and the part that describes the spacetime perturbations. In the literature is common to use the term “Cowling Approximation” when the spacetime perturbations are neglected, and the term “Inverse Cowling Approximation (ICA)” when the perturbations of the stellar fluid are neglected.

The first step was to study the part that describes the fluid perturbations, and extract the stellar oscillation modes. By studying this part of the problem we

have gained useful information about f , p and r modes of slowly rotating neutron stars. We also studied a interesting phenomenon that appears in this level of approximation, i.e. existence of a continuous spectrum. The continuous spectrum has significant influence on the appearance and the life of the normal modes of the star, for different spherical harmonic indices l .

As a second step we have re-written the equations that describe the perturbations of a slowly rotating neutron star, in a new gauge, that has been used up to now only for non-rotating stars. The motivation was that the already existing equations were not very well posed for numerical evolution, due to the existence of mixed second order spatial and temporal derivatives of the perturbation functions. Indeed the equations that we produced in the new gauge seemed more appropriate for numerical evolutions, and they could be rather easily transformed into a first order system.

Subsequently we have turned to the old system of equations in the widely used Regge-Wheeler gauge. By redefinition of new variables and lengthy calculations we have managed to re-write it in first order form of evolution equations. As a test for the numerical stability of this system we evolved the part that describes the spacetime perturbations and showed that is numerically stable. For the first time we also calculated frequencies of w-modes for both polytropic and uniform density equations of state.

Finally, in order to check the limits of our linear slow rotation approximation for the fluid modes, we added to the perturbed equations of motion of the fluid (3.38) the second order terms in rotation $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. We then studied the improvement of the accuracy in the calculation of the background model i.e. the mass and the radius. We concluded our study by examining the way the eigenfrequencies of the various oscillation modes is influenced by the inclusion of the second order terms.