

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ

ΚΛΕΟΜΕΝΟΥΣ Γ. ΤΣΙΓΑΝΗ

Πτυχιούχου του Τμήματος Φυσικής
της Σχολής Θετικών Επιστημών του Α.Π.Θ.

*Διάχυση χαοτικών τροχιών σε Χαμιλτονιανά συστήματα:
Εφαρμογές στην Ουράνια Μηχανική*

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ, ΙΟΥΝΙΟΣ 2002

Περιεχόμενα

Πρόλογος	1
1 Εισαγωγή	5
1.1 Χάος και Ηλιακό Σύστημα	5
1.2 Η Κύρια Ζώνη των Αστεροειδών	7
1.3 Συμβολή της Παρούσας Διατριβής	10
2 Βασικές Έννοιες της Ουράνιας Μηχανικής	13
2.1 Στοιχεία της Τροχιάς	13
2.2 Περιορισμένο Πρόβλημα των N Σωμάτων	15
2.3 Κίνηση εκτός των Συντονισμών	18
2.3.1 Γραμμική Αιώνια Θεωρία του ΠΤΣ	19
2.3.2 Πρόβλημα των N Σωμάτων	21
2.4 Συντονισμοί Μέσης Κίνησης	22
2.4.1 Η Πολύδυμη Ομάδα του Συντονισμού	23
2.4.2 Περιοδικές Τροχιές	31
2.4.3 Συντονισμοί Μέσης Κίνησης για $N > 3$	35
2.5 Χαρακτηρισμός Χαοτικών Τροχιών	36
3 Το Φαινόμενο του Ευσταθούς Χάους	39
3.1 Χαοτική Κίνηση και Διαφυγή	39
3.2 Κίνηση του αστεροειδούς (522) Helga	42
3.2.1 Αριθμητική Ολοκλήρωση της Τροχιάς του (522) Helga	43
3.2.2 Περιοδικές Τροχιές στον Συντονισμό 12/7	44
3.2.3 Αριθμητική Μελέτη Γειτονικών Τροχιών	47
3.2.4 Μακροχρόνια Διατήρηση των Γραμμικών Συσχετίσεων	57
3.3 Συμπεράσματα	59
4 Ευσταθές Χάος στην Εσωτερική Ζώνη	65
4.1 Άλλες Περιπτώσεις Ευσταθούς Χάους	66
4.2 Αριθμητική Ολοκλήρωση των Πραγματικών Σωμάτων	67
4.3 Ανάλυση Περιοδικών Τροχιών	70

4.4	Αριθμητική Μελέτη Δυνητικών Αστεροειδών	73
4.4.1	Σταθερότητα των Τροχιών	76
4.4.2	Ο Ρόλος των Αιωνίων Συντονισμών	79
4.4.3	Διατήρηση (και μη) των Γραμμικών Συσχετίσεων	81
4.5	Συμπεράσματα	85
5	Χάος και Διάκενα στη Ζώνη των Αστεροειδών	93
5.1	Αναζήτηση Περιοδικών Τροχιών	94
5.2	Αριθμητικά Πειράματα	98
5.2.1	Επιλογή Αρχικών Συνθηκών	99
5.2.2	Υπολογισμός του Χρόνου Lyapunov	100
5.2.3	Μακροχρόνια Εξέλιξη των Χαοτικών Τροχιών	100
5.3	Γραμμικές Συσχετίσεις και Ευσταθές Χάος	110
5.4	Η Περίπτωση του Συντονισμού 7/3	112
5.5	Η Ομάδα των Hildas - Συντονισμός 3/2	116
5.6	Διάχυση Αστεροειδών στην Εξωτερική Ζώνη	120
5.6.1	Διάχυση στο Χώρο των Δράσεων	120
5.6.2	Υπολογισμός του Ρυθμού Διάχυσης	121
5.6.3	Αποτελέσματα	122
5.7	Συμπεράσματα	124
6	Χάος στα σμήνη των Τρωικών Αστεροειδών	129
6.1	Δυναμική των Τρωικών Αστεροειδών	129
6.2	Η Ιστορία του (1868) Thersites:	134
6.2.1	Αρχικές Συνθήκες	134
6.2.2	Σταθερότητα των Στοιχείων της Τροχιάς	136
6.2.3	‘Προσκολλητικότητα’ των Σημείων Lagrange	138
6.2.4	Η Αιτία του Χάους	140
6.3	Χάος και Αιώνιοι Συντονισμοί	142
6.3.1	Αρχικές Συνθήκες και Μεθοδολογία Ανάλυσης	142
6.3.2	Αποτελέσματα	144
6.3.3	Συμπεράσματα	151
6.4	Δυναμική Προέλευση του (5144) Achates	152
6.4.1	Ανάλυση Γειτονικών Τροχιών	152
6.4.2	Δυναμική Ηλικία του (5144) Achates	154
6.5	Ο Βαθμός Χάους των Σμηγών	156
6.5.1	Οι Αριθμημένοι Τρωικοί	156
6.5.2	Χαρτογράφηση της Περιοχής του L_5	158
6.5.3	Συμπεράσματα	161

7 Σύνοψη	163
7.1 Ευσταθές Χάος	163
7.2 Μηχανισμοί Μεταφοράς	165
7.3 ‘Ευστάθεια’ των Τρωικών	166
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ	168
Βιβλιογραφία	179

Πρόλογος

Στην παρούσα διδακτορική διατριβή ασχολούμαστε με τη μελέτη της διάχυσης χαοτικών τροχιών στο χώρο φάσεων Χαμιλτονιανών δυναμικών συστημάτων, που αναφέρονται σε προβλήματα Ουράνιας Μηχανικής. Εκπονήθηκε στο Εργαστήριο Αστρονομίας του Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε. / Α.Π.Θ., κατά τή χρονική περίοδο από τον Ιούνιο του 1998 έως τον Ιούνιο του 2002.

Η μελέτη μας εστιάζεται στη χαοτική κίνηση των αστεροειδών και συγκεκριμένα στις ιδιότητες και το χαρακτηριστικό χρόνο μεταφοράς των χαοτικών τροχιών, στις διάφορες περιοχές του εσωτερικού Ηλιακού Συστήματος. Σε ό,τι ακολουθεί οι αστεροειδείς θεωρούνται ως δοκιμαστικά σωματίδια, που κινούνται υπό την επίδραση της Νευτώνειας βαρυτικής δύναμης του Ήλιου και ενός αριθμού πλανητών. Τα Χαμιλτονιανά συστήματα που προκύπτουν είναι οι διάφορες παραλλαγές του περιορισμένου προβλήματος των N σωμάτων, με $3 \leq N \leq 6$. Πρόκειται για μια ειδική κατηγορία μη-ολοκληρώσιμων συντηρητικών δυναμικών συστημάτων, των οποίων η ιδιαιτερότητα πηγάζει από τον εκφυλισμό του προβλήματος του Kepler (βλ. Κεφάλαιο 2). Άμεση συνέπεια του εκφυλισμού είναι η ιδιάζουσα τοπολογία των *συντονισμών μέσης κίνησης*, οι οποίοι αποτελούν και την κύρια πηγή χαοτικής διάχυσης. Βασικός σκοπός της παρούσας διατριβής είναι η συγκριτική μελέτη των μηχανισμών γένεσης χάους (κυρίως των συντονισμών μέσης κίνησης) και η εξαγωγή συμπερασμάτων σχετικά με τις ιδιότητες της μεταφοράς στο χώρο φάσεων. Λόγω της μη ολοκληρωσιμότητας του συστήματος των κανονικών εξισώσεων, ο κύριος όγκος της εργασίας μας έγκειται σε αριθμητική ολοκλήρωση τροχιών και στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων. Σημειώνουμε ότι ο όρος *χαοτική διάχυση* (chaotic diffusion) χρησιμοποιείται στην Ουράνια Μηχανική για το χαρακτηρισμό της μακροχρόνιας μεταβολής των στοιχείων της τροχιάς, τα οποία αποτελούν, στην ολοκληρώσιμη προσέγγιση, ολοκληρώματα της κίνησης. Έτσι, δεν θα πρέπει να συγχέεται με τον όρο 'διάχυση' της Στατιστικής Μηχανικής, ο οποίος αναφέρεται σε μια συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία μεταφοράς.

Το Κεφάλαιο 1 αποτελεί εισαγωγή στη δυναμική των αστεροειδών, στην οποία παρουσιάζουμε μια σύνοψη των σημαντικότερων, μέχρι σήμερα, αποτελεσμάτων και περιγράφουμε τη συμβολή της παρούσας διατριβής. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε τη βασική ορολογία της Ουράνιας Μηχανικής, τα διάφορα πρότυπα κίνησης που μελετάμε και τις βασικές μεθόδους ανάλυσης που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια. Σημειώνουμε ότι τα αναλυτικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε στις παραγράφους 2.3 (γραμμική αιώνια θεωρία) και 2.4 (κίνηση σε απλό συντονισμό) είναι κατά βάση γνωστά από προηγούμενες μελέτες. Η πρω-

τότυπη συνεισφορά του κεφαλαίου συνίσταται στην εξαγωγή αυτών των αποτελεσμάτων με τη χρήση του φορμαλισμού της μηχανικής κατά Hamilton, αντί του πιο διαδεδομένου (στην Ουράνια Μηχανική) φορμαλισμού του Lagrange, και ενός συγκεκριμένου σχήματος της κανονικής θεωρίας διαταραχών.

Τα Κεφάλαια 3-7 αποτελούν πρωτότυπη συμβολή της παρούσας διατριβής. Στο Κεφάλαιο 3 ξεκινούμε τη μελέτη του φαινομένου του ευσταθούς χάους, αναλύοντας τα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά αυτού του παράδοξου τύπου κίνησης, με οδηγό τον αστεροειδή (522) Helga. Στο Κεφάλαιο 4 εξετάζουμε την κίνηση άλλων αστεροειδών της εσωτερικής ζώνης, που παρουσιάζουν κοινά δυναμικά χαρακτηριστικά με τον (522) Helga. Όπως δείχνουν τα αποτελέσματά μας, η εμφάνιση του ευσταθούς χάους οφείλεται στην τοπολογία των μεσαίας και υψηλής τάξης συντονισμών μέσης κίνησης και συγκεκριμένα στην απουσία ενός μηχανισμού *αιώνιας αστάθειας* (secular instability), ο οποίος εμφανίζεται σε συντονισμούς χαμηλής τάξης. Έτσι, όπως αναλύουμε στο Κεφάλαιο 5, όπου παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μιας συγκριτικής μελέτης των συντονισμών μέσης κίνησης, η χαοτική κίνηση έχει τελείως διαφορετικά χαρακτηριστικά για συντονισμούς διαφορετικής τοπολογίας. Με αυτόν τον τρόπο εξηγείται η ύπαρξη ενός μικρού αριθμού διάκενων στην κατανομή του ημιιάξονα της τροχιάς των αστεροειδών της κύριας ζώνης (διάκενα Kirkwood) και παράλληλα η παρατήρηση πληθώρας πραγματικών αστεροειδών που, παρότι ακολουθούν χαοτικές τροχιές, δεν έχουν διαφύγει ακόμη από τη ζώνη. Στο Κεφάλαιο 6 εγκαταλείπουμε την κύρια ζώνη και μεταφερόμαστε στην περιοχή των Τρωικών αστεροειδών. Η πρώτη παράγραφος περιγράφει τη γενική δυναμική των Τρωικών, με βάση ήδη γνωστά αποτελέσματα. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η εμφάνιση χαοτικής συμπεριφοράς στα σμήνη των Τρωικών οφείλεται, εν μέρει, στην ύπαρξη *αιώνιων συντονισμών*, οι οποίοι μπορούν να οδηγήσουν κάποιους Τρωικούς στη διαφυγή. Τέλος, στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζουμε μια σύνοψη των συμπερασμάτων μας και παραθέτουμε τις σκέψεις μας, σχετικά με τις πιθανές 'οδούς' επέκτασης αυτών των αποτελεσμάτων.

Μου είναι δύσκολο να βρω τα κατάλληλα λόγια για να εκφράσω τις θερμές ευχαριστίες και το σεβασμό μου προς τον επιβλέποντα αυτής της διατριβής, Αν. Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Βάρβογλη. Πιστεύω ότι η καθημερινή μας επαφή, καθόλη τη διάρκεια της πενταετούς συνεργασίας μας, οι πολύωρες συζητήσεις μας, όχι μόνο σε επιστημονικά θέματα, αλλά και οι συνεχείς διαφωνίες μας συνέβαλαν ουσιαστικά, όχι μόνο στην πορεία αυτής της διατριβής, αλλά και στη γενικότερη διαμόρφωση της προσωπικότητάς μου. Τον ευχαριστώ θερμά γιατί πίστεψε σε μένα αλλά και γιατί διαρκώς επεδείκνυε αυτή του την πίστη σε όποια ευκαιρία του δίνονταν. Του είμαι ευγνώμων για τις προσπάθειες που κατέβαλε, ώστε να με φέρει σε επαφή με άλλους ερευνητές του εξωτερικού. Τον ευχαριστώ επίσης για την υπομονή του και τη συμπαράστασή του, σε κάποιες περιόδους κατά τις οποίες δεν ήμουν και τόσο συνεπής όσο θα ήθελα. Πάνω απ' όλα όμως τον ευχαριστώ για τη φιλία του και το ειλικρινές ενδιαφέρον που δείχνει, όχι μόνο για την επιστημονική μου εξέλιξη αλλά και για την προσωπική μου ευτυχία.

Ευχαριστώ θερμά τα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής επιτροπής μου, τον Καθηγητή κ. Ιωάννη Χατζηδημητρίου και τον Αν. Καθηγητή κ. Συμεών Ιχτιάρογλου. Πιστεύω ότι η συμπληρωματικότητα των τριών μελών της επιτροπής μου, ως προς το γνωστικό τους αντικείμενο, δημιούργησε για μένα ένα ιδανικό μαθησιακό περιβάλλον. Αισθάνομαι τυχερός για το επίπεδο συνεργασίας που είχαμε και τους είμαι ευγνώμων για το χρόνο που μου διέθεσα

ν. Ευχαριστώ ιδιαίτερα τον κ. Χατζηδημητρίου για τις συμβουλές του σε θέματα Ουράνιας Μηχανικής αλλά και την πολύτιμη συμβολή του στη μελέτη του προβλήματος του ευσταθούς χάους. Επίσης, ευχαριστώ τον κ. Ιχτιάρογλου για τις συμβουλές του πάνω σε γενικότερα θέματα της μηχανικής Hamilton.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά το συνεργάτη και φίλο μου Δρα. Α. Αναστασιάδη, Ερευνητή Β' στο Ινστιτούτο Διαστημικών Εφαρμογών και Τηλεπισκόπησης του Εθνικού Αστεροσκοπείου Αθηνών. Η βοήθειά του κατά τα πρώτα στάδια της ερευνητικής μου πορείας υπήρξε, πιστεύω, καθοριστική.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ) για την οικονομική υποστήριξη που μου παρείχε, μέσω του προγράμματος υποτροφιών εσωτερικού, αλλά και για την άριστη συνεργασία μας, καθόλη τη διάρκεια εκπόνησης της διατριβής.

Ευχαριστώ θερμά τους Rudolf Dvorak, Alessandro Morbidelli, Carl Murray, Matthew Holman, Hal Levison, Martin Duncan, Zoran Knežević και Andrea Milani. Οι συζητήσεις, υποδείξεις, παρατηρήσεις αλλά και αντιπαραθέσεις μας συνέβαλαν, όχι μόνο στην τελική παρουσίαση αυτής της διατριβής, αλλά και στη διαμόρφωση από μέρους μου μιας ευρύτερης εικόνας του ερευνητικού αντικειμένου. Νοιώθω υποχρεωμένος να αναφερθώ ιδιαίτερα στη συμβολή του Καθηγητή Rudolf Dvorak (Institut für Astronomie, Universität Wien). Πρώτα απ' όλα τον ευχαριστώ για τη συμβολή του στη μελέτη των Τρωικών αστεροειδών. Κυρίως όμως τον ευχαριστώ για τη φιλία του, την πίστη του στις δυνατότητές μου και τις ευκαιρίες που μου έδωσε, τόσο φιλοξενώντας με στη Βιέννη τρεις φορές όσο και προσκαλώντας με σε συνέδρια που ο ίδιος διοργάνωσε. Η ηθική αλλά και υλική συμπαράστασή του σε κάποιες δύσκολες στιγμές υπήρξε για μένα παραπάνω από πολύτιμη.

Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Αστρονομίας του Τμήματος Φυσικής Σ.Θ.Ε. / Α.Π.Θ. για τη γόνιμη συνεργασία μας και τη συμπαράστασή τους, από την εποχή κιόλας των προπτυχιακών μου σπουδών. Τους ευχαριστώ ιδιαίτερα για τις φιλικές και επιστημονικές συμβουλές που μου προσέφεραν κατά τη διάρκεια αυτής της επίπονης περιόδου.

Αφιερώνω αυτήν την προσπάθειά μου σε όλους εκείνους που πίστεψαν σε μένα και περιέβαλαν με αγάπη αυτό το εγχείρημα. Ιδιαίτερα δε στους γονείς μου, Γεώργιο και Βασιλική Τσιγάνη, στα αδέρφια μου, Σμαράγδα και Δημήτριο και στη θεία μου Άννα Χατζησοφιά. Είναι βέβαιο ότι, χωρίς την ηθική και υλική συμπαράστασή τους, η διατριβή αυτή δε θα είχε περατωθεί. Τους είμαι ευγνώμων για την αγάπη τους, την κατανόησή τους, τη συμπαράστασή τους στις δύσκολες στιγμές, αλλά και την υπομονή που επέδειξαν όλα αυτά τα χρόνια. Ελπίζω ότι το αποτέλεσμα είναι αντάξιο των προσδοκιών τους.

Κλεομένης Τσιγάνης

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2002.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Χάος και Ηλιακό Σύστημα

Την τελευταία εικοσαετία, από τότε που οι ερευνητές συνειδητοποίησαν τη σημασία της χαοτικής συμπεριφοράς στα Χαμιλτονιανά δυναμικά συστήματα, ο κλάδος της Ουράνιας Μηχανικής ‘ξαναγεννήθηκε’. Αν πρέπει κανείς να σημειώσει μερικά γεγονότα σταθμούς, που οδήγησαν σε αυτήν την εξέλιξη, θα πρέπει να αναφερθεί πρώτα στη διατύπωση του θεωρήματος KAM (Kolmogorov 1954, Moser 1962, Arnold 1963), το οποίο αποδεικνύει τη διατήρηση των ημιπεριοδικών κινήσεων σε διαταραγμένα συστήματα, για ‘αρκετά’ άρρητους λόγους συχνότητων (μακριά από τους ρητούς συντονισμούς). Αντίθετα, στη γειτονιά κάθε συντονισμού του αδιατάρακτου προβλήματος δημιουργείται ένα ομοκλινικό πλέγμα, κάτι το οποίο είχε αντιληφθεί και ο Poincaré (1892), εντός του οποίου η κίνηση είναι χαοτική (Smale 1963). Η διατύπωση του κριτηρίου επικάλυψης των συντονισμών από τον Chirikov (1979) έδωσε για πρώτη φορά τη δυνατότητα να εκτιμήσει κανείς τις τιμές των παραμέτρων που οδηγούν σε εκτεταμένη στοχαστική συμπεριφορά (ετεροκλινικό χάος), στον χώρο των φάσεων ενός μη ολοκληρώσιμου συστήματος. Μια εκτίμηση του χρόνου που απαιτείται ώστε μια τροχιά να απομακρυνθεί από τη γειτονιά ενός τόρου KAM, ως συνάρτηση της διαταραχής, δίνεται από το θεώρημα του Nekhoroshev (1977, 1979, βλ. επίσης Benettin et al. 1985). Η φύση των προβλημάτων, που δεν επιτρέπει την ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων σε μια ανοιχτή περιοχή του χώρου των φάσεων, αλλά και η ανάγκη εύρεσης αξιόπιστων λύσεων για μεγάλα χρονικά διαστήματα, όπου οι αναλυτικές προσεγγίσεις αποτυγχάνουν, οδήγησε στη χρήση αριθμητικών μεθόδων για την ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων. Τα πρώτα σημαντικά αριθμητικά αποτελέσματα δόθηκαν στην περίφημη εργασία των Hénon & Heiles (1964), οι οποίοι μελέτησαν τη μετάβαση από την τακτική στη στοχαστική συμπεριφορά, των τροχιών ενός 2-διάστατου ‘γαλαξιακού’ δυναμικού.

Η σημασία αυτών των θεωρητικών αποτελεσμάτων έγινε αμέσως εμφανής σε όσους ασχολούνταν με τη Δυναμική του Ηλιακού Συστήματος. Η πίστη ότι οι χαοτικές κινήσεις αποτελούν ένα φαινόμενο μικρής κλίμακας και άνευ ουσιαστικής σημασίας εγκαταλείφθηκε. Η πρώτη εφαρμογή του κριτηρίου του Chirikov (1979) στο πρόβλημα των τριών σωμάτων έγινε από τον Wisdom (1980). Τα αποτελέσματά του έδειξαν ότι οι συντονισμοί μεταξύ της

περιόδου περιφοράς (ή της μέσης κίνησης) ενός μικρού σώματος με αυτήν του Δία, οι οποίοι βρίσκονται ανάμεσα στις 4 AU^1 και 5.2 AU , επικαλύπτονται πλήρως. Έτσι ο Wisdom απέδωσε τη μη ύπαρξη αστεροειδών, για τιμές του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς εντός αυτών των ορίων, στην εκτεταμένη χαοτική συμπεριφορά των τροχιών. Μετά το 1980 η επιτυχής εφαρμογή των μεθόδων της μη γραμμικής δυναμικής στα προβλήματα του Ηλιακού Συστήματος οδήγησε σε μια πληθώρα ευρημάτων. Ανάμεσα στα πιο σημαντικό από αυτά αναφέρουμε την ανακάλυψη της χαοτικής κίνησης των πλανητών (Sussman & Wisdom 1988, 1992, Laskar 1989, 1990, Murray & Holman 1999), της χαοτικής μετάπτωσης του άξονα περιστροφής των πλανητών (Laskar & Robutel 1993) και του ρόλου της Σελήνης στη σταθεροποίηση του άξονα περιστροφής της Γης (Laskar et al. 1993).

Ένα από τα πιο αγαπημένα θέματα των ερευνητών της Ουράνιας Μηχανικής είναι η δυναμική των αστεροειδών. Ο βασικός λόγος που κάνει ελκυστικές τις θεωρητικές μελέτες πάνω στην κίνηση των αστεροειδών είναι το πολύ μεγάλο πλήθος τους, το οποίο αποτελεί εγγύηση πως, για κάθε παράδοξη δυναμική συμπεριφορά, θα υπάρχει τουλάχιστον ένας αστεροειδής που την επιδεικνύει. Η πλειοψηφία των αστεροειδών ακολουθεί τροχιές ανάμεσα σε αυτές των Άρη και Δία (κύρια ζώνη, βλ. επόμενη παράγραφο). Αστεροειδείς επίσης παρατηρούνται στην περιοχή των εσωτερικών πλανητών (Mars-crossers και Near Earth Asteroids), όπως και στην περιοχή της τροχιάς του Δία (Trojans, βλ. Κεφ. 6). Τέλος, αστεροειδείς συναντάμε και στις εξωτερικές περιοχές του Ηλιακού Συστήματος, στη ζώνη Edgeworth-Kuiper, με τροχιές που βρίσκονται εξωτερικά της τροχιάς του Ποσειδώνα.²

Εκτός της δυναμικής τους συμπεριφοράς οι αστεροειδείς, που αποτελούνται από υλικό κοσμογονικής προέλευσης, αποτελούν, μαζί με τους κομήτες, την πιο χρήσιμη πηγή πληροφορίας για τη δημιουργία και τα αρχικά στάδια εξέλιξης του Ηλιακού Συστήματος. Η πληροφορία αυτή συλλέγεται στη Γη κυρίως με τη μορφή μετεωριτών (αλλά και από φασματοσκοπικές παρατηρήσεις). Οι μετεωρίτες είναι θραύσματα αστεροειδών, τα οποία παράγονται από συγχρούσεις στην κύρια ζώνη και στη συνέχεια εξωθούνται σε τροχιές σύγκρουσης με τη Γη (Wetherill 1985). Ο ακριβής μηχανισμός μεταφοράς των μετεωριτών προς τη Γη έχει μόλις αρχίσει να γίνεται κατανοητός και συνίσταται σε ένα συνδυασμό βαρυτικών παρέλξεων και δυνάμεων θερμικής φύσεως (Bottke et al. 2000b). Με παρόμοιο μηχανισμό, πιστεύουμε, έχει δημιουργηθεί και ο πληθυσμός των *Παραγήνων Αστεροειδών* (Near Earth Asteroids = NEAs), αντικειμένων που πλησιάζουν τον Ήλιο σε απόσταση μικρότερη από $q = 1.3 \text{ AU}$. Τα τελευταία χρόνια η έρευνα πάνω στη δυναμική συμπεριφορά των NEAs, μια πολύπλοκη αλληλεπίδραση φαινομένων συντονισμού και βαρυτικής σκέδασης (Michel 1997, Morbidelli 1999), έχει εντατικοποιηθεί, κάτω από το φόβο μιας πιθανής μελλοντικής σύγκρουσης ενός NEA με τη Γη. Αριθμητικά πειράματα δείχνουν ότι η ο χρόνος που μπορεί να δαπανήσει ένας αστεροειδής, ακολουθώντας τροχιά παρόμοια με αυτήν των NEAs, είναι μικρότερος από 10 εκατομμύρια χρόνια, γεγονός που υποδεικνύει ότι ο πληθυσμός τους αναπληρώνεται διαρκώς από την κύρια ζώνη (Menichela et al. 1996, Migliorini et al. 1998, Bottke et al. 2000a, βλ. επίσης Michel et al. 2000, για τον πληθυσμό των Mars-crossers).

¹1 AU=η μέση απόσταση της Γης από τον Ήλιο.

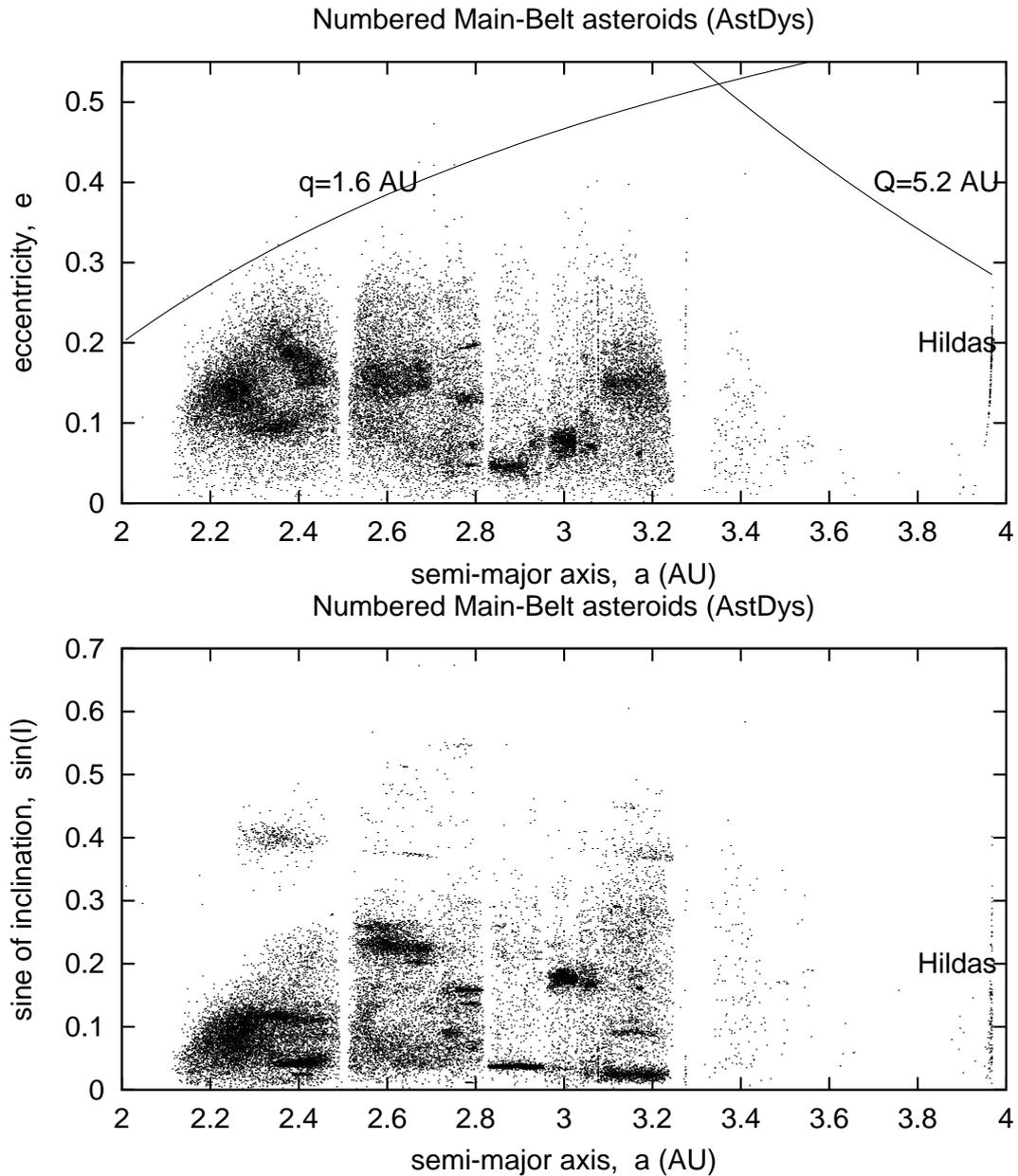
²Ο Πλούτωνας θεωρείται πλέον ως το μεγαλύτερο αντικείμενο της ζώνης Edgeworth-Kuiper που έχει παρατηρηθεί. Όμως, για ιστορικούς λόγους, συνεχίζουμε να αναφερόμαστε σε αυτόν ως τον '9ο πλανήτη', σύμφωνα και με απόφαση της IAU.

1.2 Η Κύρια Ζώνη των Αστεροειδών

Οι αστεροειδείς της κύριας ζώνης ακολουθούν ελλειπτικές τροχιές (σε πρώτη προσέγγιση), με το μεγάλο ημιάξονα, a , να παίρνει τιμές στο διάστημα $1.9\text{AU} \leq a \leq 4.0\text{AU}$. Έτσι οι τροχιές τους βρίσκονται ανάμεσα σε αυτές των πλανητών Άρη ($a \approx 1.5\text{AU}$) και Δία ($a \approx 5.2\text{AU}$). Συνήθως ξεχωρίζουμε την εσωτερική κύρια ζώνη ($1.9\text{AU} \leq a \leq 3.4\text{AU}$) από την εξωτερική κύρια ζώνη ($3.4\text{AU} \leq a \leq 4.0\text{AU}$), στην οποία η πυκνότητα των αστεροειδών είναι σημαντικά μικρότερη. Η συνολική μάζα των αστεροειδών της κύριας ζώνης εκτιμάται ότι ανέρχεται στο 1/1000 της μάζας της Γης. Ο κατάλογος των γνωστών αστεροειδών της κύριας ζώνης συνεχώς μεγαλώνει. Σήμερα γνωρίζουμε με μεγάλη βεβαιότητα τις τροχιές περίπου 30,000 σωμάτων (έχουν λάβει μόνιμο αύξοντα αριθμό - numbered objects) και με σχετική βεβαιότητα τις τροχιές άλλων 50,000 σωμάτων (έχουν παρατηρηθεί σε αντίθεση πάνω από δύο φορές - multi-oppositioned objects). Οι τροχιές των αστεροειδών της κύριας ζώνης έχουν σχετικά μικρές τιμές εκκεντρότητας, e , και κλίσης, i (ως προς το επίπεδο της Εκλειπτικής). Για τους αριθμημένους αστεροειδείς, οι μέσες τιμές αυτών των παραμέτρων είναι $\langle e \rangle = 0.13$ και $\langle \sin i \rangle = 0.12$.

Η κατανομή των αριθμημένων αστεροειδών της κύριας ζώνης στα επίπεδα (a, e) και $(a, \sin i)$ δίνεται στο Σχ. 1.1³ Το πιο εμφανές χαρακτηριστικό αυτών των κατανομών είναι η ύπαρξη διακένων, δηλαδή περιοχών όπου η αριθμητική πυκνότητα των αστεροειδών σχεδόν μηδενίζεται. Στο επίπεδο (a, e) είναι εύκολο να εντοπίσει κανείς τα πέντε περίφημα διάκενα του Kirkwood (1866), για $a \approx 2.05, 2.50, 2.82, 2.96$ και 3.29AU . Ήδη από τον προηγούμενο αιώνα η παρατήρηση ότι τα διάκενα Kirkwood αντιστοιχούν στους κύριους συντονισμούς της περιόδου περιφοράς ενός σώματος με την περίοδο περιφοράς του Δία (με λόγο συχνοτήτων αντίστοιχα 4/1, 3/1, 5/2, 7/3 και 2/1) έδωσε το έναυσμα για τη μελέτη της κίνησης στη γειτονιά των συντονισμών του προβλήματος των τριών σωμάτων. Διάφορα σενάρια προτάθηκαν για την ερμηνεία του σχηματισμού των διακένων, ανάμεσα στα οποία συμπεριλαμβάνονται σενάρια κοσμογονικών υποθέσεων, παρατηρησιακών φαινομένων επιλογής κ.α. (βλ. Ferraz-Mello 1999 και Moons 1997). Όλα αυτά μέχρι τις αρχές της δεκαετίας του '80, όταν η σωστή απάντηση στο πρόβλημα άρχισε να γίνεται αντιληπτή. Ο Wisdom (1982, 1983) μελέτησε αριθμητικά την κίνηση στη γειτονιά του συντονισμού 3/1, δείχνοντας ότι ένα σημαντικό ποσοστό υποθετικών αστεροειδών, οι αρχικές τροχιές των οποίων αντιστοιχούσαν στην περιοχή του διακένου, εκτελούν χαοτική κίνηση. Παρατήρησε ότι η μέση τιμή του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς δεν μεταβαλλόταν, κάτι το οποίο οφείλεται στον εκφυλισμό του προβλήματος των δύο σωμάτων (βλ. Κεφάλαιο 2). Όμως η εκκεντρότητα παρουσίαζε μεγάλα άλματα, μέχρι $e \approx 0.4$, μέσα σε λίγα εκατομμύρια χρόνια, με αποτέλεσμα η τροχιά του αστεροειδούς να τέμνει αυτήν του Άρη αρκετά συχνά. Μοιραία, μετά από διαδοχικές προσεγγίσεις στον πλανήτη, ο αστεροειδής απομακρύνεται από το συντονισμό, είτε συγκρουόμενος με τον Άρη ή εκτινασσόμενος σε ημι-παραβολική τροχιά. Νεώτερες μελέτες έδειξαν ότι σώματα (αστεροειδείς ή μετεωρίτες), που ξεκινούν από την περιοχή του 3/1, μπορεί να πέσουν ακόμη και πάνω στον Ήλιο (Sun-grazers, Farinella et al. 1994), αποφεύγοντας τις προσεγγίσεις με τον Άρη.

³Ο κατάλογος μπορεί να βρεθεί στη βάση δεδομένων AstDyS, (<http://hamilton.dm.unipi.it>) του Πανεπιστημίου της Πίζα.



Σχήμα 1.1: Η κατανομή των αριθμημένων αστεροειδών της κύριας ζώνης. (Πάνω) Προβολή στο επίπεδο (a, e) . Οι δύο καμπύλες αντιστοιχούν στο γεωμετρικό τόπο των τροχιών, οι οποίες εφάπτονται στην τροχιά του Άρη (περίκεντρο σε απόσταση $q = 1.6$ AU) ή του Δία (απόκεντρο σε απόσταση $Q = 5.2$ AU). (Κάτω) Προβολή στο επίπεδο $(a, \sin i)$. Παρατηρήστε τα διάκενα Kirkwood (πάνω) και το διάκενο του αιώνιου συντονισμού (κάτω). Επίσης παρατηρήστε την πτώση της πυκνότητας των αστεροειδών για $a > 3.4$ AU αλλά και τη συγκέντρωση της ομάδας των Hildas στο κέντρο λίκνισης του συντονισμού $3/2$ ($a \approx 3.96$ AU).

Το φαινόμενο αυτό είχε προβλεφθεί από τους Ferraz-Mello & Klafke (1991) και Hadjidemetriou (1993b), οι οποίοι μελέτησαν το συντονισμό 3/1 με πιο λεπτομερή μοντέλα από αυτό του Wisdom (1982, 1983).

Ο μηχανισμός μεταφοράς (transport mechanism) των τροχιών, κατά τη φορά αύξησης της εκκεντρότητας, που ανακαλύφθηκε από τον Wisdom (1982, 1983), για την περιοχή του 3/1, εμφανίζεται και στους συντονισμούς που σχετίζονται με τα υπόλοιπα διάκενα Kirkwood. Βέβαια υπάρχουν σημαντικές διαφορές, όσον αφορά στον χρόνο διαφυγής αλλά και στο ποσοστό του χώρου των φάσεων που μπορεί να 'αδειάσει'. Οι Dermott & Murray (1983) έδειξαν, κάνοντας χρήση ενός ημι-αναλυτικού μοντέλου, ότι το εύρος των διακένων είναι συγκρίσιμο με το εύρος των συντονισμών μέσης κίνησης. Όμως διάφοροι ερευνητές, οι οποίοι μελέτησαν τους συντονισμούς των διακένων τα επόμενα χρόνια, έδειξαν ότι το πλήρες 'άδειασμά' τους δεν μπορεί να επιτευχθεί στο πλαίσιο του προβλήματος των τριών σωμάτων (Murray 1986, Henrard Lemaitre 1987, Lemaitre & Henrard 1988, 1990, Yoshikawa 1990, 1991, Moons & Morbidelli 1993, Varvoglis 1993, Ferraz-Mello 1994, Ferraz-Mello et al. 1997, 1998a, 1998b, Hadjidemetriou 1993a, 1993b, Hadjidemetriou & Lemaitre 1997). Αυτό οδήγησε στη μελέτη πιο σύνθετων μοντέλων κίνησης, στα οποία περιλαμβάνονται περισσότεροι πλανήτες. Σε τέτοια συστήματα εμφανίζονται αιώνιοι συντονισμοί, μεταξύ της συχνότητας μετάθεσης του περιηλίου (ή του αναβιβάζοντος συνδέσμου) της τροχιάς του αστεροειδούς και των αντίστοιχων συχνοτήτων μετάθεσης των πλανητικών τροχιών. Οι Morbidelli & Moons (1993, Moons & Morbidelli 1995) έδειξαν ότι αιώνιοι συντονισμοί μπορούν να εμφανιστούν και μέσα στην περιοχή των βασικών συντονισμών μέσης κίνησης. Αυτό έχει ως συνέπεια τη διάλυση της περιοχής ευσταθών λικνίσεων και την περαιτέρω επιτάχυνση της διαδικασίας διαφυγής. Έτσι, η επικάλυψη των αιώνιων συντονισμών στην περιοχή των βασικών συντονισμών μέσης κίνησης, θεωρείται σήμερα ως η αιτία σχηματισμού των διακένων Kirkwood (βλ. Moons 1997, για μια επισκόπηση της δυναμικής των αστεροειδών στα διάκενα Kirkwood).

Η κατανομή των αστεροειδών στο επίπεδο ($a, \sin i$) αποκαλύπτει την ύπαρξη και άλλων διακένων, με πιο χαρακτηριστικό αυτό που ξεκινά από $a = 2 \text{ AU}$, $\sin i = 0$ και φτάνει μέχρι $a = 2.5 \text{ AU}$, $\sin i = 0.35$. Η καμπύλη αυτή αντιστοιχεί στη θέση ενός αιώνιου συντονισμού, μεταξύ της συχνότητας μετάθεσης του περιηλίου της τροχιάς του αστεροειδούς και της μέσης συχνότητας μετάθεσης του περιηλίου του Κρόνου (Morbidelli & Henrard 1991b), η ύπαρξη του οποίου δεν σχετίζεται με την ύπαρξη συντονισμών μέσης κίνησης. Οι αιώνιοι συντονισμοί είναι πολύ ισχυροί και μπορούν να οδηγήσουν την τροχιά του αστεροειδούς σε ταχεία αύξηση της εκκεντρότητας, μέχρι και $e \approx 1$ (βλ. Froeschlé & Scholl 1986, Yoshikawa 1987, Scholl & Froeschlé 1990, Gladman et al. 1997). Η θέση των αιώνιων συντονισμών στη ζώνη έχει υπολογιστεί από διάφορους ερευνητές, με βάση αναλυτικές και ημι-αναλυτικές μεθόδους (Milani & Knežević 1990, 1992, Morbidelli & Henrard 1991b, Knežević et al. 1991, Michel & Froeschlé 1997). Πρόσφατα έγινε αντιληπτό ότι, ακόμη και υψηλής τάξης αιώνιοι συντονισμοί, επιφέρουν δραστικές μεταβολές στα στοιχεία της τροχιάς, οι οποίες όμως γίνονται αντιληπτές μετά από αρκετά μεγάλα χρονικά διαστήματα ($\sim 10^8$ χρόνια, βλ. Knežević & Milani 2000).

Στην κατανομή των αστεροειδών μπορεί κανείς να παρατηρήσει, εκτός από διάκενα, εμφανείς συμπυκνώσεις, οι οποίες έγιναν αντιληπτές για πρώτη φορά από τον Hirayama (1918). Η πιο πιθανή εξήγηση για την ύπαρξη αυτών των οικογενειών (asteroid families) είναι ότι

πρόκειται για θραύσματα που δημιουργήθηκαν από τη σύγκρουση δύο μεγαλύτερων σωμάτων (Marzari et al. 1995, 1999). Επομένως, η μελέτη των οικογενειών δίνει πληροφορίες τόσο για τη φυσική των συγκρούσεων, όσο και για τις ιδιότητες της εσωτερικής δομής των αστεροειδών (Cellino et al. 1993). Η ταυτοποίηση των οικογενειών βασίζεται στον υπολογισμό των *ελεύθερων στοιχείων* της τροχιάς (free ή proper elements, βλ. Milani & Knežević 1994, Knežević et al. 1995, Zappalà et al. 1990, 1995) και την χρήση στατιστικών μεθόδων. Η παρατηρούμενη έκταση των οικογενειών, στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων, υπονοεί ότι οι οικογένειες 'εξαπλώνονται' με αργό ρυθμό. Πρόσφατα αριθμητικά πειράματα (βλ. Knežević & Milani 2000) δείχνουν ότι αρκετοί συντονισμοί οδηγούν τις τροχιές των μελών των οικογενειών σε βραδεία μεταβολή των e και i . Αντίθετα, οι μεταβολές του a οφείλονται στο φαινόμενο Yarkovsky (βλ. Vokrouhlický & Farinella 1998, Hartman et al. 1999), δηλαδή στην ώθηση που δέχεται ένας αστεροειδής, ο οποίος περιστρέφεται, λόγω της διαφοράς ανάμεσα στη διεύθυνση απορρόφησης και τη διεύθυνση επανεκπομπής της ηλιακής ακτινοβολίας. Το ασύμμετρο σχήμα κάποιων οικογενειών μπορεί να εξηγηθεί, αν συνδυάσει κανείς τις χαοτικές μεταβολές των e και i , λόγω συντονισμών, με τις μεταβολές του a , λόγω του φαινομένου Yarkovsky (Bottke et al. 2001, Nesvorný et al. 2001).

1.3 Συμβολή της Παρούσας Διατριβής

Όπως γίνεται εύκολα αντιληπτό, χαοτικές τροχιές αστεροειδών δεν εμφανίζονται μόνο στην περιοχή των ισχυρών συντονισμών μέσης κίνησης με το Δία (ή των ισχυρών αιώνιων συντονισμών), αλλά και σε ευρύτερες περιοχές του χώρου των φάσεων. Αριθμητικές λύσεις των κανονικών εξισώσεων δείχνουν ότι ένα μεγάλο ποσοστό των αστεροειδών, τόσο πραγματικών όσο και υποθετικών, ακολουθούν χαοτικές τροχιές. Τα ερωτήματα που προκύπτουν είναι (α) ποιοι μηχανισμοί είναι υπεύθυνοι για την εμφάνιση χάους, (β) ποιες είναι οι ιδιότητες μεταφοράς των χαοτικών τροχιών και (γ) ποιος ο χαρακτηριστικός χρόνος διαφυγής, για αστεροειδείς που ακολουθούν χαοτικές τροχιές, στις διάφορες περιοχές της ζώνης;

Αν εξαιρέσει κανείς τις προσεγγίσεις των αστεροειδών στους πλανήτες⁴, η χαοτική κίνηση οφείλεται στην ύπαρξη και αλληλεπίδραση διαφόρων συντονισμών. Στην κύρια ζώνη τα τρία βασικά είδη συντονισμών είναι (α) οι συντονισμοί μέσης κίνησης με το Δία (οι μόνοι που εμφανίζονται στο πλαίσιο του προβλήματος των τριών σωμάτων), (β) οι αιώνιοι συντονισμοί και (γ) οι τριπλοί συντονισμοί μέσης κίνησης μεταξύ Δία, Κρόνου και αστεροειδούς. Όπως έδειξαν πρόσφατα αποτελέσματα, η ζώνη καλύπτεται πυκνά από μια πληθώρα 'ασθενών' συντονισμών μέσης κίνησης (κατά κύριο λόγο). Κύριο χαρακτηριστικό των συντονισμών μέσης κίνησης (απλών και τριπλών) είναι ότι, λόγω του εκφυλισμού του προβλήματος των δύο σωμάτων, καθένας από αυτούς αποτελείται από μια πλειάδα πολύ κοντινών αρμονικών, στο χώρο των συχνοτήτων (που αναφέρονται και ως υπο-συντονισμοί), αποτελεί δηλαδή μία *πολύδυμη ομάδα συντονισμών* (resonant multiplet). Αυτός ο εκφυλισμός των συντονισμών, μεταξύ των

⁴Το φαινόμενο της βαρυτικής σκέδασης (βλ. Öpik 1976) των μικρών σωμάτων είναι η κύρια πηγή χάους για τους κομήτες, ενώ για τους αστεροειδείς είναι δευτερεύουσας σημασίας, καθώς εμφανίζεται αφότου η τροχιά του αστεροειδούς τμήσει την τροχιά του πλανήτη. Αυτό όμως είναι το τελικό στάδιο της 'δυναμικής ζωής' ενός αστεροειδούς, ο οποίος ήδη έχει διαφύγει από την κύρια ζώνη.

‘γρήγορων’ βαθμών ελευθερίας, είναι χαρακτηριστικό των περιοδικά διαταρασόμενων εκφυλισμένων Χαμιλτονιανών συστημάτων. Τα μακροχρόνια αποτελέσματα της χαοτικής κίνησης εξαρτώνται από την τοπολογία του χώρου των φάσεων, στη γειτονιά κάθε συντονισμού, η οποία με τη σειρά της εξαρτάται από (α) την αλληλεπίδραση μεταξύ των αρμονικών της ομάδας και (β) την αλληλεπίδραση μεταξύ γειτνιαζόντων συντονισμών (με διαφορετικό λόγο γρήγορων συχνοτήτων). Η κατανοήση του μηχανισμού αλληλεπίδρασης και των αντίστοιχων ‘στοχαστικών καναλιών’ στο χώρο των φάσεων αποτελεί πρόκληση για την Ουράνια Μηχανική. Στην περίπτωση που η αλληλεπίδραση των συντονισμών είναι ασθενής, οι χαοτικές τροχιές μπορεί να παραμείνουν στην ίδια περιοχή του χώρου των φάσεων για πολύ μεγάλα χρονικά διαστήματα (βλ. Morbidelli & Giorgilli 1995a,b). Παρά τα πρόσφατα βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση, η εκτίμηση του εύρους της περιοχής ενεργού ευστάθειας ενός συντονισμού παραμένει ανοιχτό πρόβλημα (βλ. Guzzo & Morbidelli 1997, Morbidelli & Guzzo 1997). Στην περίπτωση που η αλληλεπίδραση των συντονισμών είναι ισχυρή, εμφανίζεται ένα πολύπλοκο δίκτυο συνδεδεμένων στοχαστικών ζωνών στο χώρο των φάσεων, το οποίο οδηγεί στο φαινόμενο της χαοτικής διάχυσης (βλ. Ferraz-Mello 1999). Όπως αποδείχτηκε πρόσφατα, η χαοτική διάχυση ευθύνεται για την αργή αύξηση των εκκεντρότητας, η οποία οδηγεί στη μεταφορά αστεροειδών και μετεωριτών από την κύρια ζώνη προς την περιοχή των εσωτερικών πλανητών (Morbidelli & Nesvorný 1999).

Στα Κεφάλαια 3-5 ασχολούμαστε με τις ιδιότητες της χαοτικής κίνησης των αστεροειδών, στη γειτονιά των συντονισμών μέσης κίνησης με το Δία. Κάνοντας χρήση αριθμητικών μεθόδων, μελετάμε τις τροχιές πραγματικών και υποθετικών αστεροειδών, αλλά και την τοπολογία των συντονισμών. Για κάθε συντονισμό, η μελέτη της κίνησης γίνεται στο πλαίσιο τεσσάρων προτύπων αυξανόμενης πολυπλοκότητας, ξεκινώντας από το διδιάστατο κυκλικό πρόβλημα των τριών σωμάτων και καταλήγοντας στο τριδιάστατο μοντέλο των τεσσάρων πλανητών του εξωτερικού Ηλιακού Συστήματος. Το έναυσμα για αυτήν τη μελέτη ήταν η παρατήρηση ενός παράδοξου τύπου κίνησης, που έχει ονομαστεί *ευσταθές χάος* (Milani & Nobili 1992). Πρόκειται για αστεροειδείς που ακολουθούν χαοτικές τροχιές, των οποίων όμως τα στοιχεία (a , e και i) έχουν σχεδόν σταθερές μέσες τιμές για χρόνους της τάξης των 10^9 ετών. Στο Κεφάλαιο 3 αναλύουμε την τροχιά του αστεροειδούς (522)-Helga, το πρώτο παράδειγμα ευσταθούς χάους που ανακαλύφθηκε. Δείχνουμε, για πρώτη φορά, ότι η χαοτική του τροχιά εμφανίζει το περίεργο χαρακτηριστικό της μακροχρόνιας διατήρησης των γραμμικών συσχετίσεων της χρονοσειράς των e και i . Επίσης δείχνουμε ότι η τοπολογία του συντονισμού 12/7, που ευθύνεται για τη χαοτική κίνηση, είναι πολύ διαφορετική από την τοπολογία των συντονισμών που σχετίζονται με τα διάκενα Kirkwood. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που ο Δίας υποθεθεί ότι κινείται σε ελλειπτική τροχιά, δεν υπάρχουν περιοδικές τροχιές με λόγο υψηλών συχνοτήτων 12/7. Στο Κεφάλαιο 4 ακολουθούμε την ίδια τακτική για να μελετήσουμε την κίνηση τεσσάρων ακόμη αστεροειδών της εσωτερικής ζώνης, των οποίων οι τροχιές έχουν παρόμοια χαρακτηριστικά με του (522)-Helga. Και σε αυτές τις περιπτώσεις, όπως δείχνουν τα αποτελέσματά μας, οι τροχιές διατηρούν τις γραμμικές συσχετίσεις και οι συντονισμοί έχουν τοπολογία ίδια με αυτήν του 12/7. Έτσι, ερμηνεύουμε την εμφάνιση ευσταθούς χάους βάσει της απουσίας περιοδικών τροχιών, δεδομένου ότι η ύπαρξη περιοδικών τροχιών οδηγεί σε μια αστάθεια αιώνιας φύσης (βλ. Κεφάλαιο 2). Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα

μιας συγκριτικής μελέτης των συντονισμών μέσης κίνησης της κύριας ζώνης (τάξης $q \leq 9$), τα οποία οδηγούν σε μια ολοκληρωμένη εικόνα των μηχανισμών μεταφοράς και των αντίστοιχων χρόνων διαφυγής. Δείχνουμε ότι η μεγάλη πλειοψηφία των συντονισμών μέσης κίνησης έχει την τοπολογία του 12/7, δηλαδή δεν έχει περιοδικές τροχιές στο ελλειπτικό πρόβλημα, σε αντίθεση με ό,τι πιστεύαμε μέχρι σήμερα. Αυτό που είχε χαρακτηριστεί ως βασικό πορτραίτο φάσης του συντονισμού, από μελέτες των συντονισμών των διακένων, αποτελεί, τελικά, χαρακτηριστικό μόνο για τους συντονισμούς 2/1, 3/1, 4/1, 5/2 και 7/3 (στην εσωτερική ζώνη). Μάλιστα ο 7/3 παρουσιάζει και μία επιπλέον ιδιαιτερότητα, όσον αφορά στη συνέχιση των περιοδικών τροχιών. Έτσι, στους συντονισμούς των διακένων, ο μηχανισμός μεταφοράς που ανακαλύφθηκε από τον Wisdom (1982, 1983) οδηγεί σε μεγάλα άλματα της εκκεντρότητας, η οποία εμφανίζει μια χαρακτηριστική διαλλειπτική (intermittent) συμπεριφορά. Οι συντονισμοί αυτοί είναι οι μόνοι που μπορούν να οδηγήσουν την εκκεντρότητα της τροχιάς των αστεροειδών σε μεγάλες τιμές, άρα σε διαφυγή από τη ζώνη, μέσα σε χρόνους της τάξης των $10^7 - 10^8$ ετών. Αντίθετα, στη μεγάλη πλειοψηφία των συντονισμών, η μεταβολή της εκκεντρότητας μοιάζει να ακολουθεί μια αργή διαδικασία διάχυσης. Ο χρόνος που απαιτείται για διαφυγή είναι συγκρίσιμος, ή και μεγαλύτερος, από την ηλικία του Ηλιακού Συστήματος, ακόμη κι αν λάβουμε υπόψη μας τις παρέλξεις των τεσσάρων εξωτερικών πλανητών. Έτσι εξηγείται η ύπαρξη ενός μεγάλου αριθμού αστεροειδών οι οποίοι, αν και ακολουθούν χαοτικές τροχιές, δεν έχουν ακόμη διαφύγει από την κύρια ζώνη.

Στο τελευταίο τμήμα της παρούσας διατριβής ασχολούμαστε με την κίνηση των Τρωικών αστεροειδών (Κεφάλαιο 6). Η πρόσφατη ανακάλυψη χαοτικής κίνησης μέσα στον συντονισμό 1/1 με το Δία οδηγεί στο συμπέρασμα ότι σε αυτήν την περιοχή συνυπάρχουν με τον 1/1 και επιπλέον συντονισμοί. Επίσης, είναι εύλογο να αναρωτηθεί κανείς για το ποια είναι η πιθανότητα διαφυγής ενός Τρωικού. Με μια σειρά από αριθμητικά πειράματα δείχνουμε ότι ένας από τους μηχανισμούς που ευθύνονται για τη χαοτική κίνηση των Τρωικών είναι οι αιώνιοι συντονισμοί του αναβιβάζοντος συνδέσμου. Η δράση αυτών των συντονισμών μπορεί να οδηγήσει κάποιους Τρωικούς αστεροειδείς εκτός των σημών, σε χρόνους αρκετά μικρότερους από την ηλικία του Ηλιακού Συστήματος, εισάγοντας έτσι περιορισμούς στη δυναμική ηλικία της τροχιάς συγκεκριμένων σωμάτων (όπως του 5144 - Achates). Δείχνουμε ότι η ευρύτερη περιοχή των Τρωικών σημών είναι κατεξοχήν χαοτική, κάτι που πιθανώς οφείλεται και στην ύπαρξη τριπλών συντονισμών μέσης κίνησης. Παραταύτα, η μεγάλη πλειοψηφία των αριθμημένων Τρωικών ακολουθεί τροχιές, οι οποίες φαίνεται να είναι πρακτικά ευσταθείς, για χρόνους της τάξης των $5 \cdot 10^9$ ετών.

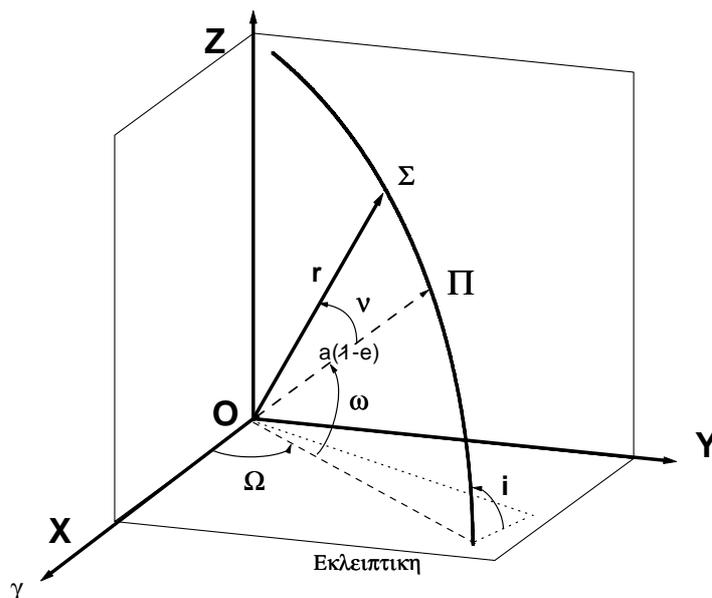
Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες της Ουράνιας Μηχανικής

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε βασικά στοιχεία της Ουράνιας και Κλασικής Μηχανικής. Χρησιμοποιώντας το φορμαλισμό της μηχανικής κατά Hamilton, θα αναπτύξουμε τα βασικά χαρακτηριστικά της κίνησης των αστεροειδών, στο πλαίσιο των διαφόρων παραλλαγών του περιορισμένου προβλήματος των N σωμάτων ($3 \leq N \leq 6$). Η βασική θεωρία και μεθοδολογία της Ουράνιας Μηχανικής μπορεί να βρεθεί στα κλασικά βιβλία των Brouwer & Clemence (1961), Danby (1962), Szebehely (1967), Roy (1988) και Marschal (1990). Όμως, σε αυτά τα βιβλία δεν γίνεται λόγος για χαοτικές κινήσεις των σωμάτων, ούτε και για τις νέες αναλυτικές και αριθμητικές μεθόδους, που αναπτύχθηκαν την τελευταία 20ετία. Αντίθετα, στα πολύ πρόσφατα βιβλία των Murray & Dermott (2000) και Morbidelli (2002), γίνεται εκτενής αναφορά σε όλες τις νέες μεθόδους της Ουράνιας Μηχανικής και δίνεται έμφαση στη χαοτική κίνηση. Για τη βασική θεωρία και μεθοδολογία της δυναμικής μη γραμμικών Χαμιλτονιανών συστημάτων βλέπε Lichtenberg & Lieberman (1983), Wiggins (1988) και Arnold (1989).

2.1 Στοιχεία της Τροχιάς

Στο πρόβλημα των δύο σωμάτων (ή πρόβλημα Kepler) η εξίσωση τροχιάς της σχετικής κίνησης είναι μια κωνική τομή. Για αρνητικές τιμές της (τροχιακής) ενέργειας, η κίνηση είναι εν γένει ελλειπτική (βλ. Σχ. 2.1), με τον Ήλιο να βρίσκεται στη μία εστία. Για το λόγο αυτό το σύστημα αναφοράς, που συνήθως επιλέγουμε για να μελετήσουμε την κίνηση ενός σώματος στο Ηλιακό Σύστημα, είναι το ηλιοκεντρικό ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς. Το επίπεδο (x, y) συνήθως ταυτίζεται με το μέσο επίπεδο της εκλειπτικής για κάποια εποχή και ο άξονας των x δείχνει προς τη διεύθυνση του μέσου εαρινού σημείου γ . Η ελλειπτική τροχιά ενός σώματος καθορίζεται από 6 σταθερές, οι οποίες ονομάζονται *στοιχεία της τροχιάς* (orbital elements). Αυτές είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης, a , η εκκεντρότητα e , η κλίση ως προς την εκλειπτική, i , το μήκος του αναβιβάζοντος συνδέσμου Ω , η γωνία του περιηλίου ω και η χρονική στιγμή (εποχή) διάβασης από το περιήλιο της τροχιάς, τ . Οι γωνίες Ω και ω καθορίζουν τον προσανατολισμό της έλλειψης στο διάστημα. Η απόσταση του περιηλίου της



Σχήμα 2.1: Τα στοιχεία μιας ελλειπτικής τροχιάς στον τριδιάστατο χώρο. Το επίπεδο (x, y) συμπίπτει με την Εκλειπτική. Ο Ήλιος είναι στο κέντρο του συστήματος αναφοράς και ταυτόχρονα στη μία εστία της ελλειπτικής τροχιάς του Σ .

τροχιάς δίνεται από τη σχέση $q = a(1 - e)$ και του αψηλίου από τη σχέση $Q = a(1 + e)$. Η θέση του σώματος πάνω στην τροχιά για κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από την αληθή ανωμαλία, ν , τη γωνία μεταξύ της γραμμής των αφίδων (ΟΠ) και του διανύσματος θέσης \vec{r} . Επειδή η κίνηση γίνεται με σταθερή εμβαδική ταχύτητα (διατήρηση της στροφορμής), η γωνία ν είναι μη γραμμική συνάρτηση του χρόνου. Έτσι, αντί της ν , χρησιμοποιούμε συνήθως τη μέση ανωμαλία, $M = n(t - \tau)$, όπου n η μέση κίνηση (μέση συχνότητα περιφοράς) του σώματος. Η τιμή της μέσης ανωμαλίας αντιστοιχεί στο ποσοστό του εμβαδού της έλλειψης που διαγράφει το σώμα, κατά το χρονικό διάστημα $t - \tau$.

Για να περιγράψουμε την κίνηση ενός δοκιμαστικού σωματιδίου αμελητέας μάζας (π.χ. ενός αστεροειδούς) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τις Καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) και τις συζυγείς τους ορμές (p_x, p_y, p_z) ή τα στοιχεία της τροχιάς. Είναι φανερό ότι προτιμούμε τα στοιχεία της τροχιάς, αφού, στο πλαίσιο το προβλήματος των δύο σωμάτων, δεν μεταβάλλονται με το χρόνο. Παρότι τα στοιχεία της τροχιάς δεν αποτελούν σύνολο κανονικών μεταβλητών, είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι αυτό ισχύει για τα στοιχεία του Delaunay

$$\begin{aligned} l &= M \quad , \quad L = \sqrt{GM_{\odot}a} \\ g &= \omega \quad , \quad G = \sqrt{GM_{\odot}a(1 - e^2)} \\ h &= \Omega \quad , \quad H = \sqrt{GM_{\odot}a(1 - e^2)} \cos i \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου \mathcal{G} η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας και M_{\odot} η μάζα του Ήλιου. Τα στοιχεία του Delaunay αποτελούν μεταβλητές δράσης-γωνίας (action-angle, βλ. Arnold 1989) για το πρόβλημα των δύο σωμάτων. Επειδή οι γωνίες ω και M δεν ορίζονται για μηδενικές τιμές των i και e αντίστοιχα, ορίζουμε νέες γωνίες, τις $\varpi = \Omega + \omega$ και $\lambda = \varpi + M$. Οι γωνίες αυτές, που αναφέρονται ως προς τον ίδιο σταθερό άξονα (τον Ox), ονομάζονται *μήκη* (μήκος του περιηλίου και μέσο μήκος, αντίστοιχα) αντί για *ανωμαλίες*. Έτσι οι κανονικές μεταβλητές που συνήθως χρησιμοποιούμε είναι οι *τροποποιημένες μεταβλητές Delaunay*

$$\begin{aligned}\lambda &= \varpi + M & , & \quad \Lambda = \sqrt{\mathcal{G}M_{\odot}a} \\ \gamma &= -\varpi & , & \quad \Gamma = \Lambda(1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ \zeta &= -\Omega & , & \quad Z = \Lambda\sqrt{1 - e^2}(1 - \cos i)\end{aligned}\quad (2.2)$$

Σε ό,τι ακολουθεί, θα χρησιμοποιούμε τον όρο ‘στοιχεία της τροχιάς’ αναφερόμενοι στο σύνολο των a, e, i, λ, ϖ και Ω .

Η συνάρτηση Hamilton, που περιγράφει την κίνηση του δοκιμαστικού σωματιδίου στο ηλιοκεντρικό σύστημα αναφοράς, είναι

$$\mathcal{H}_{\text{Kepler}} = \frac{v^2}{2} - \frac{\mathcal{G}M_{\odot}}{r}\quad (2.3)$$

και η τιμή της ταυτίζεται, σε αυτή την περίπτωση, με την τιμή της ολικής τροχιακής ενέργειας. Στο σύστημα των τροποποιημένων μεταβλητών Delaunay, η συνάρτηση Hamilton παίρνει την απλή μορφή

$$\mathcal{H}_{\text{Kepler}} = -\frac{\mathcal{G}^2 M_{\odot}^2}{2\Lambda^2}\quad (2.4)$$

Στην σχέση (2.4) η $\mathcal{H}_{\text{Kepler}}$ εξαρτάται πλέον μόνο από μία από τις τρεις δράσεις. Κατά συνέπεια, εκτός των τριών δράσεων, υπάρχουν ακόμη δύο ολοκληρώματα της κίνησης: οι γωνίες προσανατολισμού της έλλειψης, ϖ και Ω . Το σύστημα είναι επομένως υπερ-ολοκληρώσιμο (over-integrable) ή εκφυλισμένο (degenerate). Οι συχνότητες $\dot{\varpi}$ και $\dot{\Omega}$ είναι ίσες με μηδέν και η συχνότητα $\dot{\lambda}$ είναι ανεξάρτητη της τιμής των Γ και Z (για δεδομένη τιμή του Λ). Αυτό αποτελεί μια διαφορετική έκφραση ενός γνωστού αποτελέσματος της Κλασικής Μηχανικής, ότι δηλαδή οι τροχίες αρνητικής ενέργειας στο δυναμικό $-k/r$ ($k > 0$) είναι όλες περιοδικές (κλειστές) και η περίοδος της τροχιάς δεν εξαρτάται από τις τιμές της εκκεντρότητας και της κλίσης. Ο εκφυλισμός του αδιατάραχτου προβλήματος του Kepler έχει σημαντικές συνέπειες στην τοπολογία του χώρου των φάσεων, στη γειτονιά των συντονισμών του διαταραγμένου προβλήματος.

2.2 Περιορισμένο Πρόβλημα των N Σωμάτων

Ο όρος *περιορισμένο πρόβλημα* (restricted problem) αναφέρεται στο πρόβλημα της κίνησης ενός δοκιμαστικού σωματιδίου, το οποίο υπόκειται στη Νευτώνεια βαρυτική έλξη του πρωτεύοντος σώματος (για μας ο Ήλιος) και ακόμη $N - 2$ σωμάτων (οι πλανήτες) με αρκετά

μικρότερη μάζα, συνήθως, σε σύγκριση με το πρωτεύον. Η συνάρτηση Hamilton, σε Καρτεσιανές συντεταγμένες, παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{H} = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{r} \right) - \mathcal{G} \sum_{j=1}^{N-2} m_j \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}_j\|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_j}{r_j^3} \right) = \mathcal{H}_{\text{Kepler}} + \sum_{j=1}^{N-2} m_j \mathcal{R}_j \quad (2.5)$$

όπου οι θέσεις των πλανητών θεωρούνται γνωστές συναρτήσεις του χρόνου ($\vec{r}_j = \vec{r}_j(t)$) και ο όρος $\sum_{j=1}^{N-2} m_j \mathcal{R}_j$ παριστάνει μια μικρή διαταραχή της συνάρτησης $\mathcal{H}_{\text{Kepler}}$ (καθώς $m_j \ll M_{\odot}$ και οι τροχίες των σωμάτων είναι, εν γένει, απομονωμένες). Το περίφημο *περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων* (στο εξής ΠΤΣ) περιγράφεται από τη Χαμιλτονιανή

$$\mathcal{H} = \left(\frac{v^2}{2} - \frac{\mathcal{G} M_{\odot}}{r} \right) - \mathcal{G} m' \left(\frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) = \mathcal{H}_{\text{Kepler}} - \mathcal{G} m' \mathcal{R} \quad (2.6)$$

όπου m' η μάζα του πλανήτη και \mathcal{R} η *παρελκτική συνάρτηση* (disturbing function). Σημειώνουμε εδώ ότι η συνάρτηση Hamilton ενός μηχανικού συστήματος έχει διαστάσεις ενέργειας, χωρίς όμως η τιμή της να ταυτίζεται απαραίτητα με την ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος¹. Οι Εξ. 2.5 και 2.6 περιγράφουν την σχετική ως προς τον Ήλιο κίνηση του δοκιμαστικού σωματιδίου, καθώς από τις εξισώσεις του Hamilton μπορεί κανείς να πάρει με απλές πράξεις τις εξισώσεις σχετικής κίνησης που προκύπτουν από την εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα, χωρίς όμως η τιμή τους να ταυτίζεται με την αντίστοιχη τιμή της μηχανικής ενέργειας. Αν θέλαμε να ταυτίσουμε την τιμή της \mathcal{H} με την μηχανική ενέργεια του συστήματος, θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε την έννοια του κέντρου μάζας και του συνδεδεμένου με αυτό αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Αυτό όμως δεν είναι βολικό για τους σκοπούς της παρούσας διατριβής, δεδομένου ότι μας ενδιαφέρει να επιχειρήσουμε σύγκριση μεταξύ διαφόρων προτύπων κίνησης ($N = 3 - 6$), όσον αφορά στη μακροχρόνια εξέλιξη των τροχιών. Έτσι επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε το Ηλιοκεντρικό σύστημα αναφοράς και τις συναρτήσεις 2.5 και 2.6 καθώς, σε αντίθετη περίπτωση, θα έπρεπε να λάβουμε υπόψη μας και την σχετική κίνηση των κέντρων μάζας, στη σύγκριση μεταξύ των διαφόρων προτύπων κίνησης.

Στο ΠΤΣ, ανάλογα με το είδος της τροχιάς που υποθέτουμε ότι ακολουθεί ο πλανήτης, παίρνουμε διάφορα πρότυπα-παραλλαγές του αρχικού προβλήματος. Αυτά που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα Κεφάλαια είναι τα εξής:

- *Κυκλικό Επίπεδο Πρόβλημα* (ΚΠ). Ο πλανήτης κινείται σε κυκλική τροχιά και ο αστεροειδής κινείται στο ίδιο επίπεδο με τον πλανήτη. Οι μεταβλητές (i, Ω, i', Ω') δεν ορίζονται και $e' = 0$. Το σύστημα τότε έχει 2 βαθμούς ελευθερίας. Μάλιστα, επειδή $r' = a' = \text{const}$, το σύστημα είναι αυτόνομο (η \mathcal{H} δεν εξαρτάται άμεσα από το χρόνο, t).
- *Ελλειπτικό Επίπεδο Πρόβλημα* (ΕΠ). Η κίνηση του αστεροειδούς και του πλανήτη γίνεται στο ίδιο επίπεδο, αλλά ο πλανήτης ακολουθεί ελλειπτική τροχιά. Το σύστημα έχει 2 βαθμούς ελευθερίας, αλλά είναι μη-αυτόνομο.

¹Υπενθυμίζουμε ότι η συνάρτηση Hamilton ενός συστήματος δεν είναι μοναδική (βλ. Morbidelli 2002, Ch. 1)

- *Τριδιάστατο Κυκλικό Πρόβλημα (3ΚΠ)*. Ο πλανήτης κινείται σε κυκλική τροχιά επάνω στο επίπεδο (x, y) αλλά ο αστεροειδής μπορεί να κινείται σε όλο το χώρο (x, y, z) . Το σύστημα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας και είναι αυτόνομο.
- *Τριδιάστατο Ελλειπτικό Πρόβλημα (3ΕΠ)*. Το πιο πλήρες μοντέλο κίνησης του αστεροειδούς, στο πλαίσιο του ΠΤΣ. Ο πλανήτης ακολουθεί ελλειπτική τροχιά, με τυχαίο προσανατολισμό στο χώρο. Το σύστημα έχει 3 βαθμούς ελευθερίας και είναι μη-αυτόνομο.

Στα αριθμητικά μας πειράματα (Κεφάλαια 3-5) θα χρησιμοποιήσουμε όλες τις προαναφερθείσες παραλλαγές του ΠΤΣ. Εκτός όμως του ΠΤΣ θα μελετήσουμε την κίνηση των αστεροειδών και στο πλαίσιο του προβλήματος των τεσσάρων πλανητών (4Π) του εξωτερικού Ηλιακού Συστήματος (άρα $N = 6$, Κεφάλαια 3-6).

Το πιο συνηθισμένο σύστημα μονάδων που υιοθετείται στη μελέτη του ΠΤΣ, έχει ως μονάδα μάζας τη συνολική μάζα του συστήματος ($M_{\odot} + m' = 1$) και μονάδα μήκους τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς του πλανήτη, a' . Θέτοντας $\mathcal{G} = 1$, η μονάδα του χρόνου γίνεται τέτοια ώστε η περίοδος περιφοράς του πλανήτη γύρω από τον Ήλιο να είναι ίση με $T' = 2\pi$. Αν ορίσουμε το λόγο μαζών $\mu = m'/(M_{\odot} + m')$ και επίσης $\mu_1 = 1 - \mu$, οι τροποποιημένες μεταβλητές του Delaunay δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned}\lambda &= \varpi + M & , & & \Lambda &= \sqrt{\mu_1 a} \\ \gamma &= -\varpi & , & & \Gamma &= \Lambda (1 - \sqrt{1 - e^2}) \\ \zeta &= -\Omega & , & & Z &= \Lambda \sqrt{1 - e^2} (1 - \cos i)\end{aligned}\quad (2.7)$$

και η συνάρτηση Hamilton του ΠΤΣ παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_1^2}{2\Lambda^2} - \mu \mathcal{R}(\lambda, \gamma, \zeta, \Lambda, \Gamma, Z; \lambda'(t)) \quad (2.8)$$

όπου $\lambda' = n't + \lambda'_0$ το μέσο μήκος και $n' = 1$ η μέση συχνότητα περιφοράς (μέση κίνηση) του πλανήτη. Οι εξισώσεις κίνησης είναι

$$\begin{aligned}\dot{\Lambda} &= \mu \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda} & , & & \dot{\lambda} &= \frac{\mu_1^2}{\Lambda^3} - \mu \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Lambda} \\ \dot{\Gamma} &= \mu \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \gamma} & , & & \dot{\gamma} &= -\mu \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Gamma} \\ \dot{Z} &= \mu \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \zeta} & , & & \dot{\zeta} &= -\mu \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial Z}\end{aligned}\quad (2.9)$$

Είναι εμφανές ότι τα στοιχεία της τροχιάς δεν είναι πια σταθερά. Οι μεταβολές των (Λ, Γ, Z) είναι τάξης $\mathcal{O}(\mu) \approx 0.001$ (για μάζα m' ίση με αυτήν του Δία), σε πρώτη προσέγγιση. Συνεχίζουμε όμως να χρησιμοποιούμε τα λεγόμενα *στιγμαία στοιχεία της τροχιάς* (osculating elements) για την περιγραφή της κίνησης, που ορίζονται ως τα στοιχεία μιας ελλειπτικής τροχιάς που εφάπτεται, τη δεδομένη χρονική στιγμή, στην πραγματική τροχιά του σώματος

και την οποία (έλλειψη) θα ακολουθούσε το σώμα αν ξαφνικά ‘χανόταν’ οι παρέλξεις των πλανητών.

Όπως είναι γνωστό ήδη από την εποχή του Poincaré, το ΠΤΣ είναι μη ολοκληρώσιμο. Ο λόγος είναι η εμφάνιση των *μικρών διαιρετών* (small divisors) στον παρονομαστή του δεξιού μέλους των λύσεων των κανονικών εξισώσεων, στη γειτονιά των *συντονισμών*. Οι γραμμικοί συνδυασμοί των γωνιών, που αντιστοιχούν στους συντονισμούς του προβλήματος, εμφανίζονται αν αναπτύξουμε την παρελκτική συνάρτηση σε σειρά Fourier ως προς τις γωνίες². Αν συμβολίσουμε με \vec{n} το διάνυσμα των συχνοτήτων και \vec{k} ένα διάνυσμα ακεραίων, η συνθήκη ύπαρξης συντονισμού δίνεται από τη σχέση

$$\vec{k} \cdot \vec{n} = k_1 n_1 + \dots + k_\nu n_\nu = 0 \quad (2.10)$$

όπου ν το πλήθος των βαθμών ελευθερίας³. Για ένα σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας η συνθήκη συντονισμού έχει την απλή μορφή, $n_1 = (k_1/k_2) n_2 = p n_2$, όπου p ρητός αριθμός. Για κάθε μη εκφυλισμένο σύστημα, οι συντονισμοί είναι αναγκαστικά πυκνοί στο χώρο των φάσεων, διότι οι ρητοί αριθμοί είναι πυκνοί στο σύνολο των πραγματικών. Έτσι, δεν μπορεί να οριστεί ανοιχτή περιοχή του χώρου των φάσεων, στην οποία να είναι δυνατή η ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων. Υπό την επίδραση κανονικών διαταραχών, οι συντονισμοί είναι πυκνοί και για τα εκφυλισμένα συστήματα (π.χ. το ΠΤΣ). Παραταύτα, με τη χρήση αναλυτικών μεθόδων (κανονική θεωρία διαταραχών) μπορούμε να κατασκευάσουμε απλά πρότυπα, που αποτελούν προσεγγίσεις του πραγματικού προβλήματος, τα οποία επιδέχονται αναλυτική επίλυση. Βέβαια η όποια προσεγγιστική αναλυτική λύση δεν μπορεί να συγκλίνει στην πραγματική για αυθαίρετα μεγάλα χρονικά διαστήματα. Έτσι οι μόνες λύσεις (τροχίες) που προσεγγίζουν αρκετά καλά την ‘πραγματικότητα’ είναι αυτές που προκύπτουν από την αριθμητική ολοκλήρωση των κανονικών εξισώσεων.

2.3 Κίνηση εκτός των Συντονισμών

Από τις εξισώσεις κίνησης του ΠΤΣ (2.9) προκύπτει ότι οι γενικευμένες συντεταγμένες του δοκιμαστικού σωματιδίου διαχωρίζονται σε μια ‘γρήγορη’ γωνία (λ) και δυο ‘αργές’ (γ και ζ). Αυτό συμβαίνει, γιατί το πρόβλημα του Kepler είναι εκφυλισμένο, καθώς η $\mathcal{H}_{\text{Kepler}}$ εξαρτάται μόνο από τη μία δράση. Έτσι οι γωνίες γ και ζ είναι σταθερές και η έλλειψη έχει σταθερό προσανατολισμό στο χώρο. Ας θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές του ολοκληρώσιμου προβλήματος είναι μεγέθη τάξης $\mathcal{O}(1)$ (σε κάποιο σύστημα μονάδων). Προσθέτοντας τον όρο διαταραχής του ΠΤΣ, οι συχνότητες $g = \dot{\gamma}$ και $s = \dot{\zeta}$ παίρνουν μη μηδενικές τιμές, τάξης $\mathcal{O}(\mu)$, ώστε το περιήλιο και ο αναβιβάζων σύνδεσμος της τροχιάς να εκτελούν βραδεία

²Πρόκειται για την πιο διαδεδομένη μέθοδο αναπτύγματος της \mathcal{R} . Σε άλλες περιπτώσεις χρησιμοποιείται και το ανάπτυγμα ως προς τη γωνία ψ , μεταξύ των διανυσμάτων \vec{r} και \vec{r}' . Οι όροι αυτού του αναπτύγματος είναι τα πολώνυμα Legendre του ψ (βλ. Murray & Dermott 2000).

³Για κάθε μη αυτόνομο σύστημα $\nu - 1$ βαθμών ελευθερίας, όπως το ΠΤΣ, μπορούμε να επεκτείνουμε το χώρο των φάσεων κατά δύο διαστάσεις, θεωρώντας ως επιπλέον μεταβλητή τον χρόνο. Αν η διαταραχή είναι περιοδική συνάρτηση του χρόνου με συχνότητα n' (όπως στο ΠΤΣ) είναι πιο βολικό να θεωρήσουμε ως νέα μεταβλητή τη γωνία $\lambda' = n' t$, ώστε η νέα συνάρτηση Hamilton να είναι περιοδική συνάρτηση της γωνίας (βλ. Lichtenber & Leiberman 1983, Morbidelli 2002).

μετάπτωση (precession). Αντίθετα η συχνότητα $n = \dot{\lambda}$ μεταβάλλεται κατά μια ποσότητα $\mathcal{O}(\mu)$, έχοντας όμως ακόμη τιμή τάξης μεγέθους $\mathcal{O}(1)$.

Για τιμές των (a, e, i) που αντιστοιχούν στη ζώνη των αστεροειδών και για $\mu \approx 0.001$ (περίπου η μάζα του Δία), η περίοδος περιφοράς του σώματος έχει τιμές $1/n \sim 3 - 10$ χρόνια, ενώ οι περίοδοι μετάπτωσης $1/g$ και $1/s$ έχουν τιμές της τάξης των $10^3 - 10^5$ ετών. Αν κανείς θέλει να μελετήσει την μακροχρόνια μετάπτωση της έλλειψης, χωρίς να ενδιαφέρεται για την ακριβή θέση του σώματος επί της έλλειψης, μπορεί να κατασκευάσει ένα απλούστερο μοντέλο, ‘αγνοώντας’ το γρήγορο βαθμό ελευθερίας. Αυτό επιτυγχάνεται αναπτύσσοντας την παρελκτική συνάρτηση σε σειρά Fourier και παίρνοντας τη μέση Χαμιλτονιανή (averaged Hamiltonian, βλ. Lichtenberg & Lieberman 1983, Arnold 1989) ως προς τις γωνίες λ και λ' , $\langle \mathcal{H} \rangle_{\lambda, \lambda'}$. Το νέο πρότυπο ονομάζεται *πρόβλημα της αιώνιας κίνησης* (secular problem) και η λύση του ονομάζεται *αιώνια θεωρία κίνησης* (secular theory, βλ. Murray & Dermott 2000). Σημειώνουμε ότι, εκ κατασκευής, η $\langle \mathcal{H} \rangle_{\lambda, \lambda'}$ δεν περιέχει συντονισμούς μεταξύ των λ και λ' . Επομένως η αιώνια θεωρία δεν αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση, τουλάχιστον στην περιοχή των βασικών συντονισμών.

2.3.1 Γραμμική Αιώνια Θεωρία του ΠΤΣ

Το ανάπτυγμα της \mathcal{R} , ως προς τα στοιχεία της τροχιάς, έχει τη γενική μορφή⁴

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \sum_{p, q, k_i} A_{p, q, k_i}(a, e, i, a', e', i') \cos(p\lambda + q\lambda' + k_1\varpi + k_2\varpi' + k_3\Omega + k_4\Omega') \\ &= \sum_{p, q, k_i} A_{p, q, k_i}(a, e, i, a', e', i') \cos \psi_{p, q, k_i} \end{aligned} \quad (2.11)$$

όπου κάθε συντελεστής A_{p, q, k_i} είναι μια δυναμοσειρά των $(a/a', e, e', sn, sn')$, με $sn = \sin(i/2)$ (τα τονούμενα στοιχεία αναφέρονται στον πλανήτη). Λόγω των συμμετριών του προβλήματος (βλ. Murray & Dermot 2000, Morbidelli 2002) η σειρά Fourier αποτελείται μόνο από όρους συννημιτόνων και οι ακέραιοι συντελεστές των γωνιών ικανοποιούν τις συνθήκες του D'Alembert, η πιο βασική από τις οποίες αναφέρει ότι το άθροισμά τους είναι μηδέν

$$p + q + \sum_i k_i = 0 \quad (2.12)$$

Για κάθε επιτρεπτό συνδυασμό γωνιών, ο συντελεστής του πιο σημαντικού όρου της αντίστοιχης σειράς Taylor έχει τη μορφή

$$A_{p, q, k_i}^{\max} = f_{p, q, k_i} \left(\frac{a}{a'} \right) e^{|k_1|} e'^{|k_2|} sn^{|k_3|} sn'^{|k_4|} \quad (2.13)$$

⁴Πρόκειται για ένα από τα πιο ιστορικά προβλήματα της Ουράνιας Μηχανικής. Το 1ο άρθρο που δημοσιεύτηκε στο *Astronomical Journal* είχε ως θέμα το ανάπτυγμα της \mathcal{R} , μέχρι 6ο βαθμό ως προς τα e και sn (Peirce 1849). Σημειώνουμε επίσης την κλασική εργασία του Le Verrier (1885). Τα πιο πρόσφατα αποτελέσματα (καθώς και μια εκτενής επισκόπηση του θέματος) δίνονται στην εργασία των Ellis & Murray (2000).

οπότε, κρατώντας μόνο τους όρους A_{p,q,k_i}^{\max} , η \mathcal{R} παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{R} = \sum_{p,q,k_i} f_{p,q,k_i} \left(\frac{a}{a'}\right) e^{|k_1|} e'^{|k_2|} s n^{|k_3|} s n'^{|k_4|} \cos \psi_{p,q,k_i} \quad (2.14)$$

Η μέση συνάρτηση Hamilton του αιώνιου προβλήματος είναι

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H} \rangle_{\lambda, \lambda'} &= \mathcal{H}_{\text{Kepler}} - \frac{\mu}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{p,q,k_i} A_{p,q,k_i}^{\max} \cos \psi_{p,q,k_i} \right) d\lambda d\lambda' \\ &= -\frac{\mu_1^2}{2\Lambda^2} - \mu \sum_{0,0,k_i} A_{0,0,k_i}^{\max} \cos(k_1\varpi + k_2\varpi' + k_3\Omega + k_4\Omega') \end{aligned} \quad (2.15)$$

και περιέχει πλέον μόνο συνδυασμούς των γωνιών προσανατολισμού, από τις οποίες τα Ω' και ϖ' είναι σταθερά και μπορούμε, χάριν απλότητας, να τα θεωρήσουμε ίσα με μηδέν. Επιπλέον, αφού η λ είναι αγνοήσιμη, η Λ (δηλαδή ο a) είναι σταθερά της κίνησης και ο πρώτος όρος της συνάρτησης Hamilton μπορεί να αγνοηθεί, αφού δεν συνεισφέρει στις εξισώσεις κίνησης. Έτσι καταλήγουμε, τελικά, στη συνάρτηση Hamilton του αιώνιου προβλήματος

$$\mathcal{H}_{\text{sec}} = -\mu \sum_{k_i} A_{k_i}^{\max} \cos(k_1\varpi + k_3\Omega) \quad (2.16)$$

Αν κρατήσουμε μόνο όρους A_{k_i} μέχρι 2ου βαθμού ως προς τις μικρές ποσότητες, η νέα συνάρτηση \mathcal{H}_{sec} ορίζει ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων. Η λύση αυτού του συστήματος, την οποία θα αναλύσουμε στην παράγραφο 2.4, περιγράφει τις μεταβολές των (e, ϖ) και (i, Ω) συναρτήσει του χρόνου και ταυτίζεται με τη γραμμική αιώνια θεωρία των Laplace-Lagrange (βλ. Murray & Dermott 2000, Ch. 7), όπου

$$\begin{aligned} e \cos \varpi &= e_{for} + e_P \cos(gt + \beta) \\ e \sin \varpi &= e_P \sin(gt + \beta) \\ i \cos \Omega &= i_{for} + i_P \cos(st + \delta) \\ i \sin \Omega &= i_P \sin(st + \delta) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Οι ποσότητες e_{for} και i_{for} ονομάζονται *εξαναγκασμένα στοιχεία* της τροχιάς (forced elements) και οι τιμές τους εξαρτώνται από την τιμή του a και είναι ανάλογες των e' και i' , αντίστοιχα. Έτσι, στο πλαίσιο του (3ΚΠ), θα έχουμε $e_{for} = i_{for} = 0$. Η γραφική παράσταση της λύσης (2.17) για τα (e, ϖ) δίνεται στο Σχ. 2.2 (είναι παρόμοια και για τα (i, Ω)). Η στιγμιαία εκκεντρότητα μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο και η τροχιά διαγράφει κύκλο στο επίπεδο ($h = e \cos \varpi, k = e \sin \varpi$), γύρω από το σημείο $(e_{for}, 0)$, με ακτίνα ίση με την τιμή του e_P . Αντίστοιχα η τροχιά διαγράφει κύκλο στο επίπεδο ($p = i \cos \Omega, q = i \sin \Omega$) με ακτίνα ίση με i_P , γύρω από το σημείο $(i_{for}, 0)$. Τα στοιχεία e_P και i_P είναι ολοκληρώματα της κίνησης και ονομάζονται ελεύθερα στοιχεία της τροχιάς (free ή proper elements). Είναι

$$\begin{aligned}
e \sin(\varpi) &= e_P \sin(gt + \beta) + \sum_{j=1}^{N-2} B_j e_j \sin(g_j t + \beta_j) \\
i \cos(\Omega) &= i_P \cos(st + \delta) + \sum_{j=1}^{N-2} \Delta_j i_j \cos(s_j t + \delta_j) \\
i \sin(\Omega) &= i_P \sin(st + \delta) + \sum_{j=1}^{N-2} \Delta_j i_j \sin(s_j t + \delta_j)
\end{aligned} \tag{2.19}$$

όπου οι (B_j, Δ_j) εξαρτώνται από την τιμή του a και οι σταθερές (e_j, i_j) αποτελούν τις ‘συνιστώσες’ της εκκεντρότητας και της κλίσης των πλανητικών τροχιών (που μεταβάλλονται με το χρόνο). Οι συχνότητες g_j και s_j αποτελούν τις *θεμελιώδεις συχνότητες* του πλανητικού συστήματος και περιγράφουν, προσεγγιστικά, την μετάπτωση των πλανητικών τροχιών. Η εύρεση των σταθερών g_j, s_j, e_j και i_j ανάγεται στην κατασκευή του μοντέλου αιώνιας κίνησης για το πρόβλημα των $N - 1$ σωμάτων και της αντίστοιχης πλανητικής αιώνιας θεωρίας⁵ (βλ. Brouwer & van Woerkom 1950, Bretagnon 1974, Laskar 1990, Nobili et al. 1989). Στο Παράρτημα δίνουμε τις τιμές αυτών των παραμέτρων, όπως προκύπτουν από την αναλυτική θεωρία του Bretagnon (1974) και την συνθετική (αριθμητική) θεωρία των Nobili et al. (1989).

Η πιο ουσιαστική διαφορά του αιώνιου προβλήματος των N σωμάτων, ως προς αυτό που προκύπτει από το ΠΤΣ, είναι ότι μπορεί να έχουμε συντονισμό ανάμεσα στις (g, s) και σε κάποιο γραμμικό συνδυασμό των (g_j, s_j) . Οι συντονισμοί αυτού του τύπου ονομάζονται *αιώνιοι συντονισμοί* (secular resonances) και χωρίζονται σε συντονισμούς του *περιηλίου* (μόνο των (g, g_j)), του *συνδέσμου* (μόνο των (s, s_j)) και *μικτού τύπου*. Οι συντονισμοί του περιηλίου προκαλούν μεταβολές μόνο στην εκκεντρότητα, ενώ οι συντονισμοί του συνδέσμου μόνο στην κλίση. Οι αντίστοιχοι συνδυασμοί των βραδέως μεταβαλλόμενων γωνιών ονομάζονται *κρίσιμες γωνίες των συντονισμών* (critical arguments) και έχουν τη μορφή

$$p\varpi_P + q\Omega_P + \sum_j (k_j\varpi_j + l_j\Omega_j) \tag{2.20}$$

Ειδικότερα οι συντονισμοί πρώτης τάξης ($g = g_k$ ή $s = s_k$) ονομάζονται *γραμμικοί αιώνιοι συντονισμοί* και συμβολίζονται ως ν_k (του περιηλίου) ή ν_{1k} (του συνδέσμου). Οι αιώνιοι συντονισμοί οδηγούν σε χαοτική κίνηση και μεγάλες μεταβολές των (e_P, i_P) μέσα σε μικρά χρονικά διαστήματα (της τάξης των μερικών 10^6 ετών, βλ. Nakai & Kinoshita 1985, Yoshikawa 1987).

2.4 Συντονισμοί Μέσης Κίνησης

Ας επιστρέψουμε τώρα στη μελέτη του ΠΤΣ, αυτή τη φορά χωρίς να αγνοούμε τους ταχείς βαθμούς ελευθερίας. Για λόγους απλότητας θα περιοριστούμε στη μελέτη των (ΚΠ) και (ΕΠ).

⁵Στο πρότυπο αυτό προφανώς αγνοείται η ασθενώς χαοτική κίνηση των πλανητών

Η μελέτη στο πλαίσιο των (3ΚΠ) ή (3ΕΠ) δεν έχει ουσιαστικές διαφορές, όσον αφορά στη διαδικασία κατασκευής της αντίστοιχης μέσης Χαμιλτονιανής.

2.4.1 Η Πολύδυμη Ομάδα του Συντονισμού

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός αστεροειδούς στη γειτονιά του συντονισμού μέσης κίνησης $p/(p+q)$, για τον οποίο ισχύει

$$p\dot{\lambda} - (p+q)\dot{\lambda}' \approx 0 \quad (2.21)$$

Στο αδιατάρακτο πρόβλημα ($\mu = 0$) η θέση του συντονισμού μέσης κίνησης δίνεται από τον τρίτο νόμο του Kepler

$$a_0 = a' \left(\frac{p}{p+q} \right)^{2/3} \quad (2.22)$$

και είναι η ίδια τιμή a_0 για κάθε τιμή του e . Αυτό σημαίνει ότι το ίχνος του συντονισμού, για διάφορες τιμές της e , βρίσκεται σε μια κατακόρυφη γραμμή στο επίπεδο (a, e) και οι διάφοροι συντονισμοί διατάσσονται σε παράλληλες γραμμές. Η διάταξη αυτή είναι συνέπεια του εκφυλισμού του προβλήματος του Kepler.

Προχωρούμε αναπτύσσοντας την παρελκτική συνάρτηση σε σειρά Fourier και κρατώντας τους πιο σημαντικούς όρους, στη γειτονιά του συντονισμού $p/(p+q)$. Από τους αιώνιους όρους του αναπτύγματος (που δεν περιέχουν τα λ, λ') κρατάμε μόνο όρους μέχρι δεύτερου βαθμού ως προς τα (e, e') , προκειμένου να διατηρήσουμε στη λύση την περιοδική συνιστώσα της e που προβλέπεται από τη γραμμική αιώνια θεωρία. Όσοι από τους μη-αιώνιους όρους περιέχουν το συνδυασμό $p\lambda - (p+q)\lambda'$ θα μεταβάλλονται 'αργά' στη γειτονιά του συντονισμού, σε σχέση με τους υπόλοιπους. Για το λόγο αυτό διατηρούμε στο ανάπτυγμά μας μόνο τους συνδυασμούς της παραπάνω μορφής και μάλιστα μόνο τον πιο σημαντικό όρο κάθε συνδυασμού, απαλείφοντας τους ταχέως μεταβαλλόμενους όρους⁶. Αν γράψουμε το ανάπτυγμα της \mathcal{R} ως συνάρτηση των στοιχείων της τροχιάς, η συνάρτηση Hamilton παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & -\frac{\mu_1^2}{2\Lambda^2} \\ & -\mu \left[\frac{\alpha b_{3/2}^{(1)} e^2}{8a'} - \frac{\alpha b_{3/2}^{(2)}}{4a'} e' e \cos(\varpi' - \varpi) \right] \\ & -\mu \sum_{k=0}^q \frac{f_{\alpha,k}}{a'} e^k e'^{q-k} \cos[p\lambda - (p+q)\lambda' + k\varpi + (q-k)\varpi'] \end{aligned} \quad (2.23)$$

όπου $\alpha = a/a'$ και $b_s^{(j)}(\alpha)$ είναι γνωστές σειρές του α που ονομάζονται συντελεστές Laplace. Οι $f_{\alpha,k}$ είναι συναρτήσεις των $b_s^{(j)}(\alpha)$. Ο πρώτος όρος της \mathcal{H} είναι η $\mathcal{H}_{\text{Kepler}}$, οι δύο επόμενοι

⁶Κατασκευάζουμε έτσι τη μέση Χαμιλτονιανή τάξης q στη γειτονιά του συντονισμού. Κανονικά θα έπρεπε να ορίσουμε νέες μεταβλητές (την βραδεία γωνία του συντονισμού) και να πάρουμε πάλι την $(\mathcal{H})_{\lambda, \lambda'}$. Το αποτέλεσμα όμως θα ήταν ακριβώς το ίδιο.

όροι είναι οι αιώνιοι όροι και το άθροισμα στην τρίτη γραμμή περιέχει τους όρους της πολύδυμης ομάδας του συντονισμού (resonant multiplet), οι οποίοι αντιστοιχούν στους διαφόρους συνδυασμούς γωνιών που καθορίζονται από τους κανόνες του D'Alembert. Δεδομένου ότι $\lambda \sim \lambda' \sim \mathcal{O}(1)$ και $\varpi \sim \mathcal{O}(\mu)$ (σύμφωνα με τη γραμμική αιώνια θεωρία), οι αρμονικές της ομάδας του συντονισμού (ή υπο-συντονισμοί) βρίσκονται πολύ κοντά η μια στην άλλη, στο χώρο των συχνοτήτων. Οι πρώτοι 3 όροι της \mathcal{H} δίνουν την \mathcal{H}_{sec} του αιώνιου προβλήματος και η λύση των εξισώσεων κίνησης είναι η γραμμική αιώνια θεωρία, με $\Lambda \Rightarrow a = \text{const}$. Με σκοπό να απλοποιήσουμε τη συνάρτηση Hamilton του προβλήματος του συντονισμού, εκμεταλλευόμαστε τη λύση της \mathcal{H}_{sec} . Έτσι, γράφοντας την \mathcal{H} στις τροποποιημένες μεταβλητές Delaunay, θεωρούμε όλες τις συναρτήσεις του a , εκτός του μη γραμμικού όρου της $\mathcal{H}_{\text{Kepler}}$, ως σταθερές και ίσες με τις τιμές που προκύπτουν από την αντικατάσταση $a \leftarrow a_0$ ⁷. Επιπλέον, αν γράψουμε την προσεγγιστική μορφή της εξάρτησης των μεταβλητών Delaunay από τα στοιχεία της τροχιάς για μικρά e

$$\begin{aligned} \lambda &= \varpi + M \quad , \quad \Lambda = \sqrt{\mu_1 a} \\ \gamma &= -\varpi \quad , \quad \Gamma = \sqrt{\mu_1 a} (1 - \sqrt{1 - e^2}) \approx \frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 a} e^2 \end{aligned} \quad (2.24)$$

η συνάρτηση Hamilton παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{\mu_1^2}{2\Lambda^2} + \mu \tilde{A} \Gamma + \mu \tilde{B} e' \sqrt{2\Gamma} \cos(\gamma - \gamma') \\ &\quad - \mu \sum_{k=0}^q f_k e'^{q-k} \Gamma^{k/2} \cos[p\lambda - (p+q)\lambda' - q\gamma' - k(\gamma - \gamma')] \end{aligned} \quad (2.25)$$

όπου

$$\tilde{A} = -\frac{b_{3/2}^{(1)} \sqrt{a_0}}{4\sqrt{\mu_1}} \quad , \quad \tilde{B} = \frac{b_{3/2}^{(2)}}{4} \left(\frac{a_0^3}{\mu_1} \right)^{1/4} \quad , \quad f_k = \frac{2^{k/2} f_{\alpha,k}}{(\mu_1 a_0)^{k/4}} \quad (2.26)$$

Κυκλικό Πρόβλημα (ΚΠ)

Αν υποθέσουμε ότι ο Δίας κινείται σε κυκλική τροχιά ($e' = 0$), η μέση συνάρτηση Hamilton του (ΚΠ) γράφεται

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_1^2}{2\Lambda^2} + \mu \tilde{A} \Gamma - \mu f_q \Gamma^{q/2} \cos[p\lambda - (p+q)\lambda' - q\gamma] \quad (2.27)$$

Η κρίσιμη γωνία του συντονισμού ορίζεται από τη σχέση $\sigma = p\lambda - (p+q)\lambda' - q\gamma$. Αν κάνουμε έναν κανονικό μετασχηματισμό, χρησιμοποιώντας τη γενέτειρα συνάρτηση

⁷Οι τιμές αυτών των συντελεστών, για τους βασικούς συντονισμούς του ΠΤΣ, δίνονται στην εργασία του Šidlichovský (1990).

$$F_2 = \Sigma [p \lambda - (p+q) \lambda' - q \gamma] + \Phi \gamma \quad (2.28)$$

οι νέες μεταβλητές, που ονομάζονται *τοπικές μεταβλητές του συντονισμού* (local resonant variables), δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \Sigma &= \Lambda/p \quad , \quad \sigma = p \lambda - (p+q) \lambda' - q \gamma \\ \Phi &= \Gamma + \frac{q}{p} \Lambda \quad , \quad \phi = \gamma \end{aligned} \quad (2.29)$$

Επειδή η F_2 εξαρτάται από το χρόνο, με $\frac{\partial F_2}{\partial t} = -(p+q)n' \Sigma = -(p+q) \Sigma$, η νέα συνάρτηση Hamilton θα δίνεται από τη σχέση $\mathcal{H}(\Sigma, \sigma, \Phi, \phi) = \mathcal{H}(\Lambda, \lambda, \Gamma, \gamma, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$, ώστε τελικά

$$\mathcal{H} = -\frac{\mu_1^2}{2p^2 \Sigma^2} - (p+q) \Sigma + \mu \tilde{A} (\Phi - q \Sigma) - \mu f_q (\Phi - q \Sigma)^{q/2} \cos \sigma \quad (2.30)$$

Το πρόβλημα έχει αναχθεί πλέον σε ένα ολοκληρώσιμο προσεγγιστικό πρότυπο, αφού η \mathcal{H} εξαρτάται μόνο από τη γωνία σ , με τη Φ να είναι το δεύτερο ολοκληρώμα.

Ελλειπτικό Πρόβλημα (ΕΠ)

Στην περίπτωση που ο Δίας υποτεθεί ότι ακολουθεί ελλειπτική τροχιά, κάθε συντονισμός τάξης q χαρακτηρίζεται από $q+1$ κρίσιμες γωνίες (σε αυτήν την προσέγγιση). Η ομάδα των βασικών αυτών υποσυντονισμών εμφανίζεται στη συνάρτηση Hamilton της Εξ. (2.25). Θα προχωρήσουμε τώρα σε μια σειρά κανονικών μετασχηματισμών, με σκοπό τη μελέτη της μεταβολής των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς, στη γειτονιά του συντονισμού μέσης κίνησης. Χρησιμοποιώντας τη γενέτερια συνάρτηση

$$F_2 = \Psi [p \lambda - (p+q) \lambda' - q \gamma'] + \Phi (\gamma - \gamma') \quad (2.31)$$

ορίζουμε νέες μεταβλητές, μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} \Psi &= \Lambda/p \quad \psi = p \lambda - (p+q) \lambda' - q \gamma' \\ \Phi &= \Gamma \quad \phi = \gamma - \gamma' \end{aligned} \quad (2.32)$$

και επειδή $\frac{\partial F_2}{\partial t} = -(p+q) \Psi$, η συνάρτηση Hamilton γράφεται

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -\frac{\mu_1^2}{2p^2 \Psi^2} - (p+q) \Psi + \mu \tilde{A} \Phi + \mu \tilde{B} e' \sqrt{2 \Phi} \cos \phi \\ &\quad - \mu \sum_{k=0}^q f_k e^{iq-k} \Phi^{k/2} \cos(\psi - k \phi) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Το αδιατάρακτο πρόβλημα ($\mu = 0$) περιγράφεται από τους πρώτους δύο όρους της \mathcal{H} , τα σημεία ισορροπίας του οποίου δίνονται από τη σχέση

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Psi} = 0 \Rightarrow \frac{\mu_1^2}{p^2 \Psi_0^3} - (p + q) = 0 \quad (2.34)$$

η οποία συμπίπτει με τον 3ο νόμο του Kepler και η τιμή Ψ_0 αντιστοιχεί στην τιμή του ημιάξονα a_0 του συντονισμού. Αν κρατήσουμε και τους επόμενους δύο όρους της \mathcal{H} , προκύπτει η Χαμιλτονιανή του αιώσιου προβλήματος στο πλαίσιο του (ΕΠ)

$$\mathcal{H}_{\text{sec}} = -\frac{\mu_1^2}{2p^2 \Psi^2} - (p + q) \Psi + \mu \tilde{A} \Phi + \mu \tilde{B} e' \sqrt{2\Phi} \cos \phi \quad (2.35)$$

Η συνάρτηση αυτή έχει ένα σημείο ισορροπίας που αντιστοιχεί στη λύση ισορροπίας ($e = e_{for}$, $\varpi = \varpi'$) της γραμμικής αιώσιας θεωρίας. Αν ορίσουμε νέες μεταβλητές, μέσω της γενέτειρας συνάρτησης $F_1 = -\frac{1}{2}y^2 \cot \phi$, ώστε

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2\Phi} \cos \phi \\ y &= \sqrt{2\Phi} \sin \phi \end{aligned} \quad (2.36)$$

η συνάρτηση \mathcal{H}_{sec} παίρνει τη μορφή

$$\mathcal{H}_{\text{sec}} = -\frac{\mu_1^2}{2p^2 \Psi^2} - (p + q) \Psi + \mu \tilde{A} \frac{x^2 + y^2}{2} + \mu \tilde{B} e' x \quad (2.37)$$

και το σημείο ισορροπίας της \mathcal{H}_{sec} έχει συντεταγμένες

$$\begin{aligned} x_0 &= -\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} e' \\ y_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

που αντιστοιχούν σε

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{1}{2} \sqrt{\mu_1 a_0} e_{for}^2 \\ \phi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2.39)$$

όπου $e_{for} = -\frac{\tilde{B}}{\tilde{A}(\mu_1 a)^{1/4}} e' < e'$. Ορίζοντας τοπικές μεταβλητές ($z = x - x_0$, $w = y$) γύρω από το σημείο ισορροπίας, μέσω της $F_2 = (z + x_0) y$, η \mathcal{H}_{sec} γράφεται

$$\mathcal{H}_{\text{sec}} = -\frac{\mu_1^2}{2p^2 \Psi^2} - (p + q) \Psi + \mu \tilde{A} \frac{z^2 + y^2}{2} \quad (2.40)$$

όπου έχουμε αγνοήσει σταθερούς όρους, διότι δεν συνεισφέρουν στις εξισώσεις κίνησης. Τέλος, χρησιμοποιώντας τη γενέτειρα συνάρτηση $F_2 = -\frac{1}{2}w^2 \cot \theta$, ορίζουμε τις μεταβλητές (Θ, θ) , μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{2\Theta} \cos \theta \\ w &= \sqrt{2\Theta} \sin \theta \end{aligned} \quad (2.41)$$

και καταλήγουμε στην τελική μορφή της \mathcal{H}_{sec}

$$\mathcal{H}_{\text{sec}} = -\frac{\mu_1^2}{2p^2\Psi^2} - (p+q)\Psi + \mu\tilde{A}\Theta \quad (2.42)$$

Με απλή αντιστροφή των σχέσεων ορισμού των παραπάνω μεταβλητών μπορούμε να δείξουμε ότι $\Theta = \frac{1}{2}\sqrt{\mu_1 a} e_P^2$, όπου e_P η ελεύθερη εκκεντρότητα και θ το αντίθετο του ελεύθερου μήκος του περιηλίου. Οι κανονικές εξισώσεις για την \mathcal{H}_{sec} έχουν τη μορφή

$$\begin{aligned} \dot{\Psi} &= 0 \quad , \quad \dot{\psi} = f_\psi = \frac{\mu_1^2}{p^2\Psi^3} - (p+q) \\ \dot{\Theta} &= 0 \quad , \quad \dot{\theta} = g = \mu\tilde{A} \end{aligned} \quad (2.43)$$

και οι λύσεις αντιστοιχούν σε $a = \text{const}$, $e_P = \text{const}$ και γραμμική μεταβολή των (ψ, θ) με σταθερές συχνότητες (f_ψ, g) αντιστοιχα.

Στις νέες μεταβλητές η μέση συνάρτηση Hamilton της Εξ. 2.33 παίρνει την προσεγγιστική μορφή

$$\mathcal{H}_{\text{res}} = -\frac{\mu_1^2}{2p^2\Psi^2} - (p+q)\Psi + \mu\tilde{A}\Theta - \mu \sum_{k=0}^q f_k e^{iq-k} \Theta^{k/2} \cos(\psi - k\theta) \quad (2.44)$$

αν, κατά την αντικατάσταση των (Φ, ϕ) (στους όρους του αθροίσματος) από τις (Θ, θ) , οι οποίες συνδέονται μέσω μη γραμμικών σχέσεων, κρατήσουμε μόνο όρους της μορφής $e_P^k \cos(\psi - k\theta)$.

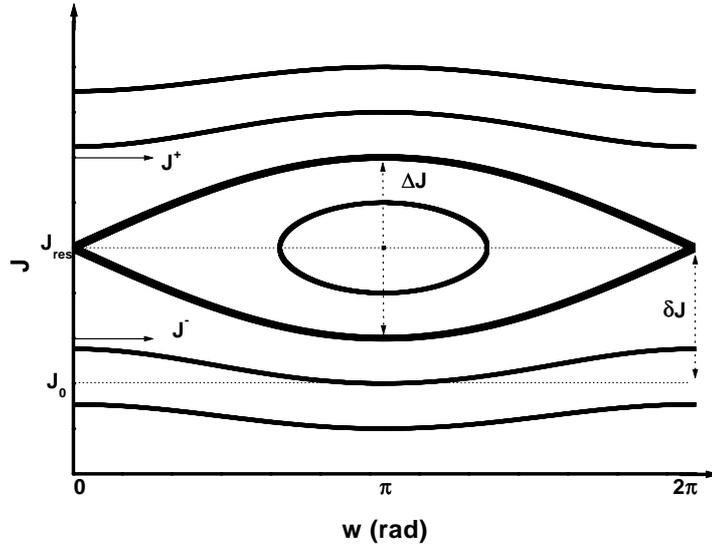
Μοντέλο Απλού Συντονισμού (single-resonance domain)

Αναλόγως της τιμής του Θ (δηλαδή της e_P), ένας από τους υποσυντονισμούς είναι πιο ισχυρός, σε σύγκριση με τους υπόλοιπους. Απομονώνοντας έτσι έναν από τους όρους της ομάδας του συντονισμού, παίρνουμε τη συνάρτηση Hamilton

$$\mathcal{H}_I = -\frac{\mu_1^2}{2p^2\Psi^2} - (p+q)\Psi + c_2\Theta + c_3\Theta^{k/2} \cos(\psi - k\theta) \quad (2.45)$$

όπου $c_2 = \mu\tilde{A}$ και $c_3 = -\mu f_k e^{iq-k}$. Όπως και στην περίπτωση του (ΚΠ), το σύστημα είναι πλέον ολοκληρώσιμο, αφού η \mathcal{H}_I εξαρτάται μόνο από το συνδυασμό $(\psi - k\theta)$. Ορίζουμε νέες μεταβλητές $(J_1, w_1; J_2, w_2)$ μέσω της γενέτειρας συνάρτησης

$$F_2 = J_1(\psi - k\theta) + J_2\theta \quad (2.46)$$



Σχήμα 2.3: Το πορτραίτο φάσης (J, w) ενός συντονισμού, στην προσέγγιση του εκκρεμούς.

οι οποίες συνδέονται με τις $(\Psi, \psi; \Theta, \theta)$ μέσω των σχέσεων

$$\begin{aligned} \Psi &= J_1 \quad , \quad w_1 = \psi - k\theta \\ \Theta &= J_2 - k J_1 \quad , \quad w_2 = \theta \end{aligned} \quad (2.47)$$

και έτσι η \mathcal{H}_I μετασχηματίζεται στην

$$\mathcal{H}_I = -\frac{\mu_1^2}{2p^2 J_1^2} - (p+q) J_1 + c_2 (J_2 - k J_1) + c_3 (J_2 - k J_1)^{k/2} \cos w_1 \quad (2.48)$$

Η w_2 είναι πλέον αγνοήσιμη και η $J_2 = \sqrt{\mu_1 a} (1 + e_p^2/2)$ είναι το 2ο ολοκλήρωμα της κίνησης. Για δεδομένη τιμή της J_2 , η συνάρτηση \mathcal{H}_I περιγράφει ένα σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας (w_1, J_1) .

Προχωρούμε στη μελέτη του συντονισμού εφαρμόζοντας τη μέθοδο που είναι γνωστή ως προσέγγιση του εκκρεμούς (pendulum approximation, βλ. Lichtenberg & Lieberman 1983, Morbidelli 2002). Οι τιμές των (J_1, J_2) , που αντιστοιχούν στον συντονισμό του αδιατάρακτου προβλήματος, είναι $J_1^* = \sqrt{\mu_1 a_0}/p$ και $J_2^* = \sqrt{\mu_1 a_0} (1 + e_p^2/2)$ ($\forall e_p$). Θέτουμε $J_2 = J_2^*$ και ορίζουμε τις $(J = J_1 - J_1^*, w = w_1)$. Στη συνέχεια παίρνουμε το ανάπτυγμα Taylor των μη γραμμικών όρων ως προς J_1 , κρατώντας όρους μέχρι δεύτερης τάξης ως προς J για την

$\mathcal{H}_{\text{Kepler}}$ και μόνο τον σταθερό όρο μηδενικής τάξης για τον συντελεστή του συνημιτόνου. Έτσι, η συνάρτηση Hamilton γράφεται (αν αγνοήσουμε τους σταθερούς όρους)

$$\mathcal{H} = c_1 J^2 - k c_2 J + c_3 (J_2^* - k J_1^*)^{k/2} \cos w \quad (2.49)$$

με $c_1 = -\frac{3p^2}{2a_0^3}$. Η συνάρτηση \mathcal{H} έχει πλέον μορφή παραπλήσια με τη συνάρτηση Hamilton του εκκρεμούς και τα σημεία ισορροπίας της δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \dot{J} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial w} = 0 &\Rightarrow w_{res} = 0, \pi \\ \dot{w} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial J} = 0 &\Rightarrow J_{res} = \frac{k c_2}{2 c_1} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Η δεύτερη από τις παραπάνω σχέσεις δίνει τη μετατόπιση της θέσης του συντονισμού, a_{res} , για κάθε υποσυντονισμό, σε σχέση με την τιμή a_0 του αδιατάραχτου προβλήματος. Το πρόσημο του c_3 καθορίζει την ευστάθεια του σημείου ισορροπίας, η οποία εναλλάσσεται για τις δύο τιμές του w_{res} . Ο χώρος των φάσεων (J, w) έχει τη μορφή του Σχ. 2.3, όπου οι διάφορες τροχιές αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της \mathcal{H} . Η διαχωριστική καμπύλη (separatrix) διαμερίζει το επίπεδο (J, w) στις περιοχές λίκνισης (libration) και περιστροφής (circulation) της w . Το εύρος του συντονισμού ΔJ υπολογίζεται ως εξής. Θέτοντας $w = w_{uns}$ (η θέση του ασταθούς σημείου ισορροπίας) και $J = J_{res}$, υπολογίζουμε την τιμή $\mathcal{H} = h_{sx}$ της διαχωριστικής καμπύλης. Για $\mathcal{H} = h_{sx}$ και $w = w_{stb}$ (η θέση του ευσταθούς σημείου) η Εξ. 2.49 δίνει τις τιμές των J^\pm και το εύρος του συντονισμού είναι

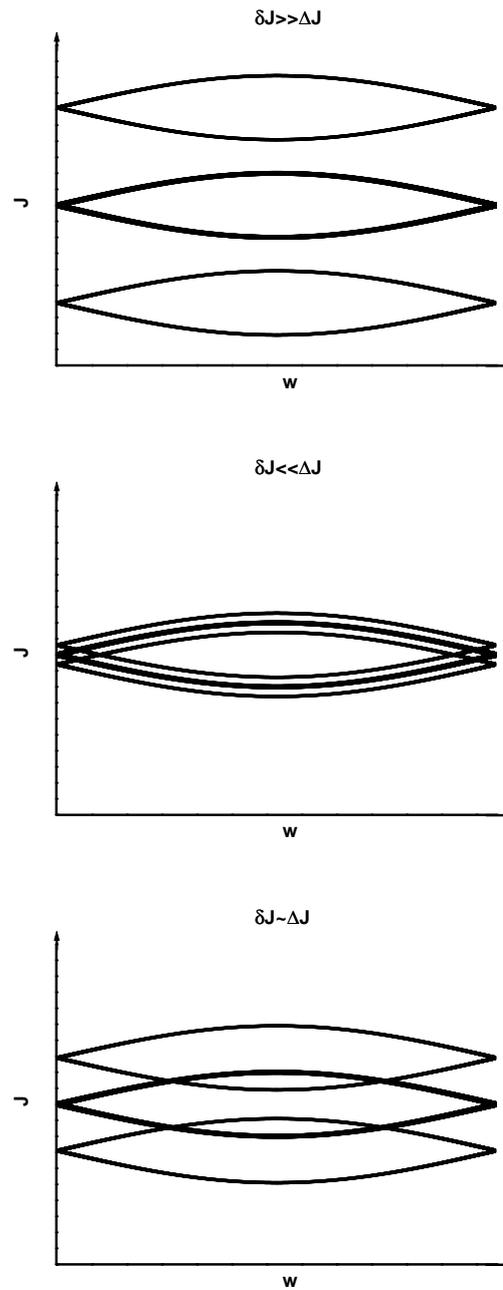
$$\Delta J = J^+ - J^- = 2 (J^+ - J_{res}) = \left| \frac{c_3 (J_1^* - k J_2^*)^{k/2}}{2 c_1} \right|^{1/2} \propto \sqrt{\mu e_P^k e^{lq-k}} \quad (2.51)$$

Επικάλυψη Συντονισμών και Χαστική Κίνηση

Αν στην \mathcal{H} προσθέσουμε κάποιους επιπλέον όρους της παρελκτικής συνάρτησης, όχι με τον ίδιο λόγο συντονισμού, το πρόβλημα δεν είναι πλέον ολοκληρώσιμο. Στη θέση της διαχωριστικής καμπύλης του υποσυντονισμού εμφανίζεται μια *στοχαστική ζώνη* (stochastic layer), μέσα στην οποία οι τροχιές είναι χαστικές. Αν οι συντελεστές των πρόσθετων όρων είναι μικροί σε σχέση με τον συντελεστή του $\cos w$, το εύρος της στοχαστικής ζώνης είναι επίσης μικρό, σε σχέση με το εύρος της περιοχής ευσταθών λικνίσεων της w (βλ. Wiggins 1988, Arnold 1989). Αν όμως προσθέσουμε όρους της ίδιας συντονισμένης ομάδας (με λόγο συντονισμού $p/(p+q)$), η κατάσταση μπορεί να αλλάξει κατά πολύ, σε σχέση με την ολοκληρώσιμη προσέγγιση.

Η απόσταση των κέντρων δύο γειτονικών υποσυντονισμών στον άξονα J δίνεται από τη σχέση

$$\delta J = \frac{c_2}{2 c_1} \quad (2.52)$$



Σχήμα 2.4: Οι τρεις διαφορετικές περιπτώσεις επικάλυψης των υπο-συντονισμών. (Πάνω) $\delta J \gg \Delta J$ και οι υπο-συντονισμοί είναι απομονωμένοι. (Μέση) $\delta J \ll \Delta J$ και ο χώρος των φάσεων μοιάζει με αυτόν του διαταραγμένου εκκρεμούς. (Κάτω) Η μερική επικάλυψη των υπο-συντονισμών, για $\delta J \sim \Delta J$, οδηγεί σε εκτεταμένη χαοτική διάχυση της J .

Ο λόγος της απόστασης δύο υποσυντονισμών προς το εύρος τους, $\delta J/\Delta J$, καθορίζει το ποσοστό επικάλυψής τους, σύμφωνα με το κριτήριο του Chirikov (1979). Αν οι υποσυντονισμοί είναι αρκετά απομακρυσμένοι, μεγάλο ποσοστό του χώρου των φάσεων, τόσο μέσα σε κάθε υποσυντονισμό όσο και ανάμεσά τους, καλύπτεται από ευσταθείς τροχιές. Αν η απόσταση των κέντρων τους είναι πολύ μικρή, ο χώρος των φάσεων μοιάζει με αυτόν του διαταραγμένου εκκρεμούς, όπου διατηρείται ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό ευσταθών λικνίσεων. Αντίθετα με τις παραπάνω δύο περιπτώσεις, αν η απόσταση των συντονισμών είναι συγκρίσιμη με το εύρος τους, οι χαοτικές μεταβολές της J καλύπτουν μια μεγάλη περιοχή των τιμών της. Αν το εύρος της στοχαστικής ζώνης κάθε υποσυντονισμού είναι επίσης μεγάλο, τότε έχουμε εκτεταμένη χαοτική κίνηση στον συντονισμό $p/(p+q)$. Οι τρεις περιπτώσεις δείχνονται σχηματικά στο Σχ. 2.4 (βλ. Morbidelli & Guzzo 1997, Guzzo & Morbidelli 1997, για μια εκτενέστερη ανάλυση των τριών περιπτώσεων). Σημειώνουμε ότι, καθώς το εύρος των συντονισμών είναι συνάρτηση της e_p , η εικόνα του Σχ. 2.4 αλλάζει με την τιμή του e_p , ώστε ο χώρος των φάσεων στη γειτονιά του συντονισμού $p/(p+q)$ είναι δυνατόν να εμφανίζει και τις τρεις εικόνες, για διάφορες τιμές της e_p . Επίσης, για συγκεκριμένη τιμή της e_p , η εικόνα είναι διαφορετική για συντονισμούς διαφορετικού λόγου συχνοτήτων $p/(p+q)$.

2.4.2 Περιοδικές Τροχιές

Η συνθήκη συντονισμού, για το (ΕΠ), έχει τη μορφή

$$\dot{\sigma}_k = (p+q)\dot{\lambda}' - p\dot{\lambda} - q\dot{\omega} + k(\dot{\omega} - \dot{\omega}') = \dot{\sigma}_c - k\dot{\phi} = 0 \quad (2.53)$$

όπου σ_c η κρίσιμη γωνία για το συντονισμό του (ΚΠ). Αν η παραπάνω συνθήκη ικανοποιείται χωρίς να μηδενίζονται ταυτόχρονα οι συχνότητες των σ_c και ϕ , τότε η τροχιά του πλήρους προβλήματος (όταν επανεισάγουμε τη λ), που αντιστοιχεί στο συντονισμό μεταξύ των σ_c και ϕ , είναι ημιπεριοδική. Αν όμως ισχύει

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_c &= 0 \Rightarrow p\dot{\lambda} - (p+q)\dot{\lambda}' = 0 \\ \dot{\phi} &= 0 \Rightarrow \dot{\omega} = 0 \end{aligned} \quad (2.54)$$

τότε έχουμε ένα ζεύγος σημείων ισορροπίας της μέσης Χαμιλτονιανής 2.44 (ευσταθές και ασταθές), που αντιστοιχεί σε ένα ζεύγος περιοδικών τροχιών του πλήρους προβλήματος⁸. Το σημείο του επιπέδου (a, e) που αντιστοιχεί στα σταθερά σημεία, αποτελεί τον *αιώνιο κόμβο* (secular node, Morbidelli & Guzzo 1997) στο χώρο των φάσεων για όλες τις αρμονικές, σ_k , του συντονισμού.

Η ύπαρξη συντονισμένων περιοδικών τροχιών έχει πολύ σημαντικές συνέπειες στην εξέλιξη της τροχιάς ενός αστεροειδούς. Ο λόγος είναι ότι τα σταθερά σημεία καθορίζουν την

⁸Κατά κανόνα, τα σταθερά σημεία του μέσου προβλήματος δεν συμπίπτουν με τις περιοδικές τροχιές του πλήρους προβλήματος. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι, κατά τη διαδικασία κατασκευής της μέσης Χαμιλτονιανής, διατηρούμε μόνο λίγους όρους (χαμηλής τάξης) από το ανάπτυγμα Fourier. Το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί, είτε παίρνοντας περισσότερους όρους στο ανάπτυγμα, είτε εισάγοντας έναν κατάλληλα επιλεγμένο διορθωτικό όρο.

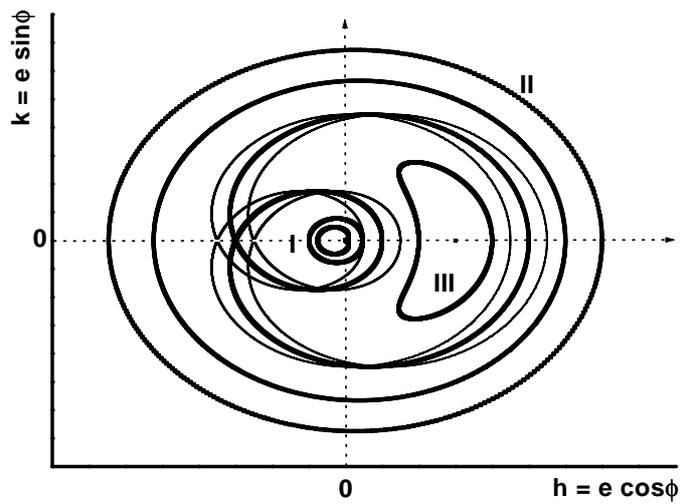
τοπολογία του χώρου των φάσεων και 'καθοδηγούν' τις τροχιές στη γειτονιά του συντονισμού (βλ. Hadjidemetriou 1993a). Στο Σχ. 2.5 έχουμε σχεδιάσει την προβολή μερικών τροχιών στο επίπεδο (h, k) . Η συνάρτηση \mathcal{H} που μελετάμε περιέχει μόνο έναν συντονισμό, που αντιστοιχεί σε μια απλή περιοδική τροχιά, και άρα είναι ολοκληρώσιμη. Οι τροχιές αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της \mathcal{H} . Είναι φανερό ότι η τοπολογία του επιπέδου (h, k) είναι τελείως διαφορετική από αυτήν που προβλέπει η αιώνια γραμμική θεωρία. Ο ομοκλινικός βρόχος που ενώνει την ασταθή με την ευσταθή πολλαπλότητα του ασταθούς σημείου και περιβάλλει το ευσταθές σημείο διαμερίζει το επίπεδο (h, k) σε τρεις περιοχές που, στην ολοκληρώσιμη προσέγγιση, δεν επικοινωνούν: (I) εσωτερικής περιστροφής της ϕ , (II) εξωτερικής περιστροφής της ϕ και (III) τη νησίδα λίκνισης της ϕ . Η ανάπτυξη χαοτικής κίνησης γύρω από την ομοκλινική τροχιά έχει ως συνέπεια τη σύνδεση των τριών περιοχών. Συγκεκριμένα, μια τροχιά που κινείται αρχικά στην περιοχή (I) και έχει μικρή τιμή εκκεντρότητας μπορεί να μεταπηδήσει στις περιοχές μεγάλης εκκεντρότητας, περιφερόμενη με χαοτικό τρόπο γύρω από τη νησίδα λίκνισης της ϕ . Οι μεταβολές της e είναι της τάξης του 0.5 (ανάλογα με το συντονισμό) και συμβαίνουν σε χρονικά διαστήματα της τάξης των 10^5 ετών. Έτσι, η ύπαρξη συντονισμένων περιοδικών τροχιών συνεπάγεται την εμφάνιση ενός μηχανισμού αιώνιας αστάθειας (secular instability) των (e, ϖ) , στην περιοχή του συντονισμού. Αυτή η διαλλειπτική (intermittent) συμπεριφορά της εκκεντρότητας παρατηρήθηκε από τον Wisdom (1982) στην περιοχή του συντονισμού 3/1. Τονίζουμε ότι παρόμοια είναι και η τοπολογία του (h, k) στη γειτονιά ενός αιώνιου συντονισμού του προβλήματος των N σωμάτων (βλ. Yoshikawa 1987).

Η ύπαρξη ή όχι συντονισμένων περιοδικών τροχιών μπορεί να εξεταστεί αριθμητικά. Συγκεκριμένα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις οικογένειες περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) και να εξετάσουμε αν κάποιες από αυτές τις περιοδικές τροχιές συνεχίζουν να υπάρχουν στο (ΕΠ) (ή στο 3ΚΠ). Για μια εκτενή επισκόπηση της θεωρίας και αριθμητικής μελέτης των περιοδικών τροχιών στο ΠΤΣ βλέπε Broucke 1968, 1969, Hadjidemetriou 1981, 1988, 1993a.

Περιοδικές Τροχιές του (ΚΠ)

Θεωρούμε το αδρανειακό σύστημα αναφοράς $\xi\Omega\eta$, του οποίου το κέντρο Ω συμπίπτει με το κέντρο μάζας του συστήματος Ήλιος-Δίας και η διεύθυνση του άξονα $\Omega\xi$ συμπίπτει αρχικά ($t = 0$) με την ευθεία που ενώνει τα κέντρα των δύο σωμάτων. Ας θεωρήσουμε τώρα ένα συνοδικό σύστημα αναφοράς xOy , με τον Ox να συμπίπτει αρχικά με τον $\Omega\xi$ του αδρανειακού συστήματος. Το συνοδικό σύστημα περιστρέφεται περί το O με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $n' = 1$. Έτσι ο Δίας και ο Ήλιος βρίσκονται σε δύο σταθερά σημεία του άξονα Ox και απέχουν σταθερή απόσταση $r' = a' = 1$.

Μπορεί να αποδειχτεί ότι, στο συνοδικό σύστημα αναφοράς xOy , υπάρχουν οικογένειες περιοδικών τροχιών του δοκιμαστικού σωματιδίου, συμμετρικές ως προς τον άξονα Ox . Οι αρχικές τιμές του $x(0)$, που οδηγούν σε περιοδική κίνηση με σχεδόν μηδενική εκκεντρότητα (ακριβώς ίση με μηδέν για $\mu = 0$), ορίζουν την οικογένεια των κυκλικών περιοδικών τροχιών. Κατά μήκος αυτής της οικογένειας ο a (και άρα ο λόγος n/n') μεταβάλλεται συνεχώς. Για ρητές τιμές του λόγου συχνοτήτων, $n/n' = (p + q)/p$ (εκτός των περιπτώσεων $q = 1$), εμφανίζεται διακλάδωση της κυκλικής οικογένειας περιοδικών τροχιών προς δύο κλάδους περιοδικών τροχιών που αντιστοιχούν σε ελλειπτική κίνηση του αστεροειδούς. Κατά μήκος



Σχήμα 2.5: Ο ομοκλινικός βρόχος που περνάει από το ασταθές σημείο ισορροπίας, διαμερίζει το επίπεδο (h, k) σε τρεις περιοχές διαφορετικής συμπεριφοράς της ϕ (βλ. κείμενο). Εκτός από την ‘πραγματική’ διαχωριστική καμπύλη, έχουμε σχεδιάσει και δύο ακόμη ψευδο-διαχωριστικές, μετατοπισμένες ως προς την πρώτη. Έτσι, δείχνουμε, σχηματικά, τη δημιουργία της χαοτικής ζώνης, στο διαταραγμένο σύστημα.)

αυτής της ελλειπτικής οικογένειας περιοδικών τροχιών η εκκεντρότητα της τροχιάς αυξάνει, ενώ ο λόγος συντονισμού n/n' παραμένει σχεδόν σταθερός (σταθερός για $\mu = 0$). Οι δύο κλάδοι της ελλειπτικής οικογένειας αντιστοιχούν σε δύο διαφορετικές αρχικές συνθήκες για τον αστεροειδή: (α) ο *περικεντρικός* κλάδος αντιστοιχεί σε $\varpi_0 = 0$ (δηλαδή το περιήλιο της τροχιάς του βρίσκεται ανάμεσα στον Ήλιο και το Δία στο xOy) ενώ (β) ο *αποκεντρικός* κλάδος αντιστοιχεί σε $\varpi_0 = \pi$. Αριθμητικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι οι οικογένειες των περιοδικών τροχιών συνεχίζονται για κάθε τιμή $\mu \neq 0$ της μάζας του Δία.

Οι αρχικές συνθήκες μιας περιοδικής τροχιάς είναι $x(0) = a(1 \pm e) \geq 0$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ και $\dot{y}(0) \neq 0$, ώστε το διάνυσμα της ταχύτητας, στο συνοδικό σύστημα, να είναι αρχικά κάθετο στον άξονα Ox . Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις κίνησης του (ΚΠ) ελέγχουμε αν η τροχιά τέμνει ξανά τον άξονα Ox κάθετα. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η τροχιά αυτή είναι περιοδική. Η αρχική τιμή του ημιάξονα καθορίζει την περίοδο της τροχιάς (στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς) μέσω του 3ου νόμου του Kepler. Στο συνοδικό σύστημα αναφοράς μια περιοδική τροχιά που αντιστοιχεί στον συντονισμό $(p+q)/q$ θα έχει περίοδο περίπου ίση προς $T = pT' = p2\pi$ (ακριβώς ίση για $\mu = 0$).

Η ευστάθεια μιας περιοδικής τροχιάς καθορίζεται από την τιμή του ίχνους του *μονόδρομου πίνακα*, \mathbf{A} , των εξισώσεων του γραμμικοποιημένου συστήματος. Αν το ίχνος του μονόδρομου πίνακα έχει τιμή $|\text{tr}(\mathbf{A})| < 2$, τότε η περιοδική τροχιά είναι ευσταθής, ενώ αν $|\text{tr}(\mathbf{A})| > 2$ η τροχιά είναι ασταθής. Κατά κανόνα τόσο ευσταθείς όσο και ασταθείς περιοδικές τροχιές μπορεί να βρεθούν και στους δύο κλάδους της ελλειπτικής οικογένειας.

Συνέχιση των Περιοδικών Τροχιών

Έχοντας βρει τις αρχικές συνθήκες που οδηγούν σε περιοδική κίνηση στο (ΚΠ), ζητάμε να προσδιορίσουμε ποιες από αυτές συνεχίζουν να υπάρχουν στο πλαίσιο του (3ΚΠ) ή του (ΕΠ).

Στο (3ΚΠ) αποδεικνύεται ότι, αν για κάποιο συντονισμό υπάρχει οικογένεια τριδιάστατων περιοδικών τροχιών (με παράμετρο την κλίση της τροχιάς), τότε αυτή διακλαδίζεται από την επίπεδη οικογένεια του (ΚΠ). Η διακλάδωση συμβαίνει, όταν η περιοδική τροχιά του (ΚΠ) χαρακτηρίζεται από *κρίσιμη κατακόρυφη ευστάθεια*. Αν στις εξισώσεις κίνησης του (ΚΠ) προσθέσουμε την z -συνιστώσα και υπολογίσουμε το ίχνος του νέου μονόδρομου πίνακα, για την περιοδική τροχιά του (ΚΠ), τότε η τροχιά θα έχει κρίσιμη κατακόρυφη ευστάθεια, αν $|\text{tr}(\mathbf{A})| = 2$. Η συνθήκη αυτή, άρα και η ύπαρξη τριδιάστατων περιοδικών τροχιών, δεν είναι απαραίτητο να πληρείται σε κάθε συντονισμό.

Στο (ΕΠ) η περιγραφή της κίνησης στο συνοδικό σύστημα που χρησιμοποιούμε δεν είναι τόσο απλή. Ο λόγος είναι ότι οι Ήλιος και Δίας δε βρίσκονται πλέον σε σταθερή απόσταση μεταξύ τους. Αντίθετα, η απόστασή τους μεταβάλλεται μη γραμμικά με το χρόνο, με περίοδο $T' = 2\pi$. Είναι προφανές ότι μια τροχιά του (ΕΠ) θα είναι περιοδική, αν η περιόδός της είναι ρητό πολλαπλάσιο του 2π . Εάν θεωρήσουμε τις τροχιές του (ΚΠ) ως τροχιές του (ΕΠ), στο όριο $e' \rightarrow 0$, τότε αποδεικνύεται ότι οι οικογένειες περιοδικών τροχιών του (ΕΠ) (με παράμετρο την e') διακλαδίζονται από τις περιοδικές τροχιές του (ΚΠ). Για λόγο συντονισμού $(p+q)/p$, η περίοδος της τροχιάς, που αντιστοιχεί στο σημείο διακλάδωσης, θα πρέπει να είναι ίση με την αδιατάρακτη τιμή, $T = p2\pi$. Επομένως, απ' όλες τις περιοδικές τροχιές μιας οικογένειας του (ΚΠ) με λόγο συντονισμού $(p+q)/p$, συνεχίζονται στο (ΕΠ) μόνο εκείνες

που έχουν περίοδο $T = p2\pi$. Η συνθήκη αυτή δεν είναι απαραίτητο να πληρείται σε κάθε συντονισμό. Μάλιστα, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια, οι περισσότεροι συντονισμοί του (ΕΠ) δεν έχουν περιοδικές τροχιές.

2.4.3 Συντονισμοί Μέσης Κίνησης για $N > 3$

Στο περιορισμένο πρόβλημα των N σωμάτων ($N > 3$), η θέση αλλά και το εύρος των συντονισμών μέσης κίνησης είναι συναρτήσεις του χρόνου (πολλαπλά περιοδικές σε πρώτη προσέγγιση). Αυτό σημαίνει ότι οι συντονισμοί 'πάλλονται', με αποτέλεσμα η τοπολογία του χώρου των φάσεων, στη γειτονιά κάθε συντονισμού, να αλλάζει με το χρόνο. Έτσι τροχιές οι οποίες είναι αρχικά εκτός του συντονισμού, μπορεί κάποια στιγμή να βρεθούν εντός του συντονισμού (και το αντίθετο). Είναι προφανές ότι η αλληλεπίδραση των αρμονικών κάθε συντονισμένης ομάδας είναι διαφορετική, σε σχέση με το ΠΤΣ. Αν και αναμένουμε, κατά κανόνα, να έχουμε διεύρυνση της περιοχής 'δράσης' του συντονισμού και περισσότερες τροχιές να διασχίζουν τις διαχωριστικές καμπύλες των αρμονικών, αυτό δεν σημαίνει απαραίτητα ότι θα έχουμε περισσότερες τροχιές που οδηγούν σε διαφυγή. Αυτό εξαρτάται από το χρόνο που η τροχιά ξοδεύει εντός ή εκτός της χαοτικής ζώνης και είναι καθαρά τοπικό χαρακτηριστικό (εξαρτάται από τον κάθε συντονισμό και τις τιμές των e_P και i_P).

Εκτός όμως των συντονισμών μέσης κίνησης με το Δία, σημαντικό ρόλο παίζουν οι *τριπλοί συντονισμοί μέσης κίνησης* (three-body mean motion resonances), κυρίως μεταξύ των συχνοτήτων περιφοράς του Δία, του Κρόνου και του αστεροειδούς (βλ. Nesvorný & Morbidelli 1998a; 1998b, Murray et al. 1998b). Καθένας από αυτούς τους συντονισμούς απαρτίζεται επίσης από μια σειρά κοντινών αρμονικών στο χώρο των συχνοτήτων, για τις οποίες ισχύει

$$\dot{\sigma} \approx k\dot{\lambda}_J + l\dot{\lambda}_S + m\dot{\lambda} = 0 \quad (2.55)$$

όπου οι δείκτες J και S αναφέρονται στους Δία και Κρόνο, αντίστοιχα. Φυσικά κάθε κρίσιμη γωνία του συντονισμού, σ , συμπληρώνεται από ένα γραμμικό συνδυασμό των βραδέως μεταβαλλόμενων γωνιών, ώστε να πληρεί τους κανόνες του D'Alembert. Οι συντονισμοί εμφανίζονται στο ανάπτυγμα Fourier της παρελκτικής συνάρτησης του περιορισμένου προβλήματος των τεσσάρων σωμάτων, αν προηγουμένως αναπτύξουμε το 2ο όρο της Εξ. (2.5) μέχρι δεύτερη τάξη ως προς τα m_j (Nesvorný & Morbidelli 1998b). Ο συντελεστής του τμήματος του αναπτύγματος που περιέχει τους τριπλούς συντονισμούς είναι $m_J m_S$. Για δεδομένη τάξη του αναπτύγματος ως προς την εκκεντρότητα, οι τριπλοί συντονισμοί είναι ασθενέστεροι, αλλά και πολυπληθέστεροι των απλών συντονισμών μέσης κίνησης ίδιας τάξης. Επίσης, οι τριπλοί συντονισμοί χαμηλού βαθμού είναι, εν γένει, ισχυρότεροι από απλούς συντονισμούς τάξης $q \geq 5$. Για τους λόγους αυτούς η συνεισφορά των τριπλών συντονισμών μέσης κίνησης στη χαοτικότητα της ζώνης των αστεροειδών είναι πολύ σημαντική, όπως απέδειξαν πρόσφατα αριθμητικά πειράματα (Nesvorný & Morbidelli 1998a, Morbidelli & Nesvorný 1999, Froeschlé et al. 2000).

Στα επόμενα κεφάλαια δεν θα ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τους τριπλούς συντονισμούς μέσης κίνησης. Όμως τονίζουμε ότι τα βασικά χαρακτηριστικά της κίνησης εντός των τριπλών συντονισμών δεν αναμένεται να είναι πολύ διαφορετικά από ό,τι στους απλούς συντονισμούς

μέσης κίνησης. Ο λόγος είναι ότι η τοπολογία του χώρου των φάσεων, στη γειτονιά ενός τριπλού συντονισμού, καθορίζεται και πάλι από την αλληλεπίδραση των αρμονικών της συντονισμένης ομάδας, οι οποίες έχουν την ίδια μορφή με τις αρμονικές του ΠΤΣ.

2.5 Χαρακτηρισμός Χαοτικών Τροχιών

Το βασικό χαρακτηριστικό της χαοτικής κίνησης είναι η εκθετική εν χρόνω απομάκρυνση (exponential divergence) αρχικά γειτονικών τροχιών, στο χώρο των φάσεων. Ο ρυθμός απομάκρυνσης είναι ένα μέτρο του ρυθμού ‘απώλειας μνήμης’ των αρχικών συνθηκών. Έτσι αν δύο τροχιές βρίσκονται σε μια χαοτική περιοχή του χώρου των φάσεων και απέχουν αρχικά απόσταση $v(0)$, η απόστασή τους μετά από χρόνο t θα ακολουθεί προσεγγιστικά τη σχέση

$$v(t) \sim v(0) e^{\gamma t} \quad (2.56)$$

Ο μέσος ρυθμός απομάκρυνσης, γ , που υπολογίζεται αριθμητικά, ονομάζεται χαρακτηριστικός αριθμός Lyapunov και είναι μια προσέγγιση του μέγιστου εκθέτη Lyapunov (Lyapunov 1907, Oseledec 1968), που ορίζεται από τη σχέση

$$\gamma_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{D(t)}{D(0)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) \quad (2.57)$$

όπου D το μέτρο του διανύσματος απόκλισης (deviation vector). Οι συνιστώσες του \vec{D} είναι οι λύσεις των εξισώσεων μεταβολών (variational equations), που περιγράφουν την κίνηση στο τοπικά εφαπτόμενο στην τροχιά επίπεδο. Οι εξισώσεις μεταβολών προκύπτουν από τη γραμμικοποίηση του συστήματος των εξισώσεων κίνησης, γύρω από τυχαίο σημείο του χώρου των φάσεων. Ο εκθέτης γ είναι επομένως ο τοπικός βαθμός στοχαστικότητας και έχει διαστάσεις συχνότητας. Ο αντίστροφός του

$$T_L = \frac{1}{\gamma} \quad (2.58)$$

ονομάζεται χρόνος Lyapunov της τροχιάς. Η τιμή του T_L παριστάνει ένα όριο για τον μέγιστο χρόνο, μέχρι τον οποίο η αριθμητική λύση των εξισώσεων κίνησης αποτελεί ικανοποιητική προσέγγιση της ‘πραγματικής’ τροχιάς. Αυτό δεν σημαίνει ότι τα αποτελέσματα της λύσης των εξισώσεων κίνησης για $t > T_L$ δεν έχουν νόημα. Απλά, με δεδομένη την αρχική ακρίβεια με την οποία γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες (π.χ. μια σφαίρα αβεβαιότητας με ακτίνα $v(0)$), οποιαδήποτε τροχιά με αρχικές συνθήκες εντός της σφαίρας αβεβαιότητας αποτελεί μια εξίσου πιθανή με αυτήν που υπολογίζουμε εξέλιξη του συστήματος (για $t > T_L$).

Ο υπολογισμός του γ γίνεται είτε μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων μεταβολών (που είναι θεωρητικά η σωστότερη μέθοδος, βλ. Benettin et al. 1980a,b) ή μέσω της ταυτόχρονης ολοκλήρωσης δύο αρχικά γειτονικών τροχιών (βλ. Tancredi et al. 2001, για μια σύγκριση των δύο μεθόδων). Με δεδομένη τη λύση των εξισώσεων μεταβολών, $v(t)$, ο εκθέτης γ δίνεται από την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων (βλ. Milani 1993)

$$\ln v(t)/v(0) = \gamma t + \text{const} \quad (2.59)$$

Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια τιμές του T_L που είναι μικρότερες από $\sim 20\% t_{int}$, όπου t_{int} ο χρόνος ολοκλήρωσης. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι, για τροχιές με $T_L > 20\% t_{int}$, οι διακυμάνσεις του $\ln v(t)$ είναι πολύ μεγάλες σε σύγκριση με τη μεταβολή (αν υπάρχει) της μέσης τιμής, ώστε η γραμμική παλινδρόμηση να μην αποτελεί καλή προσέγγιση (ο συντελεστή συσχέτισης της παλινδρόμησης πέφτει κάτω από την τιμή $r^2 = 0.4$, βλ. το παράδειγμα στο Κεφάλαιο 6).

Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι, λόγω του πολύ μεγάλου χρόνου ολοκλήρωσης που απαιτεί ο υπολογισμός του γ , έχουν αναπτυχθεί διάφορες εναλλακτικές τεχνικές για τη μέτρηση του βαθμού στοχαστικότητας μιας τροχιάς, που βασίζονται στην εκθετική απομάκρυνση των τροχιών (Contopoulos & Voglis 1996, Contopoulos et al. 1997, Froeschlé et al. 1997, Froeschlé & Lega 1998, Voglis et al. 1999, Vozikis et al. 2000). Πολλά από αυτά είναι πολύ πιο αποδοτικά από τη μέτρηση του γ , όσον αφορά στο χρόνο που απαιτούν για το χαρακτηρισμό της τροχιάς. Όμως καμία από τις μετρούμενες ποσότητες δεν έχει αποδειχτεί ότι έχει σχέση 1-1 με την τιμή του εκθέτη Lyapunov.

Εκτός των παραπάνω μεθόδων, που βασίζονται στην εκθετική απομάκρυνση των τροχιών, υπάρχουν και άλλοι τρόποι χαρακτηρισμού των τροχιών, με ιδιαίτερη χρησιμότητα για την Ουράνια Μηχανική. Αυτοί στηρίζονται σε παραλλαγές της ανάλυσης του φάσματος Fourier των στιγμιαίων στοιχείων της τροχιάς (βλ. Laskar et al. 1992, Laskar 1993, Varvoglis et al. 1995, Šidlichovský & Nesvorný 1997, Nesvorný & Ferraz-Mello 1997). Στόχος είναι ο υπολογισμός των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς ή των ελεύθερων συχνοτήτων της κίνησης που, για τακτικές τροχιές, είναι σταθερά ή μεταβάλλονται ημιπεριοδικά με το χρόνο. Αντίθετα, για χαοτικές τροχιές, οι ποσότητες που υπολογίζονται με αυτές τις μεθόδους μεταβάλλονται μη περιοδικά με το χρόνο και η διασπορά των τιμών συνήθως αυξάνει με βραδύ ρυθμό (χαοτική διάχυση). Στα Κεφάλαια 3-5 θα εφαρμόσουμε επίσης μια απλή τεχνική για τον υπολογισμό ποσοτήτων που προσεγγίζουν τα ελεύθερα στοιχεία της τροχιάς.

Τέλος αξίζει να αναφέρουμε μια απλή τεχνική, που χρησιμοποιείται για την αναγνώριση της χαοτικής κίνησης στη γειτονιά ενός συντονισμού. Αν μια τροχιά βρίσκεται εντός του συντονισμού (κάποιος από τις αρμονικές), η αντίστοιχη κρίσιμη γωνία λικνίζεται, σύμφωνα με το μοντέλο του απλού συντονισμού (§2.4). Αντίθετα, αν η τροχιά είναι έξω από τον συντονισμό, η κρίσιμη γωνία διατρέχει όλο το διάστημα $(0, 2\pi)$ (περιστροφή). Σχεδιάζουμε, λοιπόν, το διάγραμμα που δίνει την εξέλιξη του σ ως συνάρτησης του χρόνου. Αν παρατηρούμε διαδοχικές περιόδους περιστροφής να διακόπτονται, κατά μη κανονικό τρόπο, από περιόδους λικνίσεων, αυτό σημαίνει ότι η τροχιά διασχίζει τη διαχωριστική καμπύλη του συντονισμού και άρα είναι χαοτική. Βέβαια, για να είμαστε σίγουροι ότι ο συντονισμός είναι ο κύριος υπεύθυνος της εμφάνισης του χάους, θα πρέπει οι μέγιστες μεταβολές της συζυγούς δράσης (του a) να είναι σε πλήρη αντιστοιχία με τις περιόδους λίκνισης του σ . Αν οι κρίσιμες γωνίες πολλών αρμονικών εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά κατά το ίδιο χρονικό διάστημα, τότε έχουμε μια ισχυρή ένδειξη ότι οι αντίστοιχοι συντονισμοί επικαλύπτονται.

Κεφάλαιο 3

Το Φαινόμενο του Ευσταθούς Χάους

Στο κεφάλαιο αυτό θα ξεκινήσουμε τη μελέτη ενός από τα πιο ενδιαφέροντα, πρόσφατα παρατηρηθέντα, φαινόμενα της δυναμικής των αστεροειδών. Τα τελευταία χρόνια είχε εμπεδωθεί η αντίληψη, μεταξύ των ερευνητών της Ουράνιας Μηχανικής, ότι η χαοτική κίνηση ενός αστεροειδούς οδηγεί σε σύντομη διαφυγή από τη ζώνη, ανάλογα με την τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov της τροχιάς του. Η παρατήρηση πραγματικών αστεροειδών σε εξαιρετικά χαοτικές τροχιές ($T_L \sim 10^4$ χρόνια), αλλά με σχεδόν σταθερές μέσες τιμές των a , e και i , κλόνησε την παραπάνω αντίληψη. Η ερμηνεία αυτού του τύπου χαοτικής κίνησης, του ευσταθούς χάους (stable chaos), θα μας απασχολήσει τόσο σε αυτό όσο και στο επόμενο κεφάλαιο. Σημειώνουμε ότι το φαινόμενο αυτό εμφανίζεται σε διάφορες περιοχές της ζώνης των αστεροειδών, αλλά η χαοτική συμπεριφορά δεν οφείλεται πάντα στον ίδιο μηχανισμό. Όσον αφορά όμως στους συντονισμούς μέσης κίνησης με το Δία, θα δούμε ότι το φαινόμενο έχει κοινή προέλευση και άρα επιδέχεται συνεπούς ερμηνείας.

Στην επόμενη παράγραφο θα αναφερθούμε σε αποτελέσματα άλλων ερευνητών, οι οποίοι προσπάθησαν να συνδέσουν το χρόνο διαφυγής ενός αστεροειδούς από τη ζώνη με το χρόνο Lyapunov της τροχιάς του. Το πρώτο, ιστορικά, παράδειγμα ευσταθούς χάους είναι η τροχιά του αστεροειδούς (522)-Helga. Οι ιδιότητες της κίνησης αυτού του σώματος θα μας απασχολήσουν στο υπόλοιπο του κεφαλαίου. Θα δείξουμε για πρώτη φορά ότι τα στοιχεία της τροχιάς του έχουν εξαιρετικά σταθερές τιμές, σε αντίθεση με την πλειοψηφία κάποιων υποθετικών ‘αστεροειδών’ στη γειτονιά του. Ο συντονισμός που είναι υπεύθυνος για τη χαοτική κίνηση έχει πολύ διαφορετική τοπολογία από αυτήν των χαμηλής τάξης συντονισμών (π.χ. $2/1$, $3/1$), οι οποίοι χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη συντονισμένων περιοδικών τροχιών. Αυτό το τοπολογικό ελάττωμα φαίνεται να είναι και η αιτία εμφάνισης του ευσταθούς χάους.

3.1 Χαοτική Κίνηση και Διαφυγή

Παρά τη γενική πεποίθηση ότι η τακτική κίνηση των αστεροειδών αποτελεί κανόνα, τα αποτελέσματα όλο και περισσότερων ερευνητών τα τελευταία χρόνια δείχνουν ακριβώς το αντίθετο.

Το φαινόμενο μάλιστα γίνεται εντονότερο καθώς πηγαίνουμε σε όλο και μεγαλύτερες τιμές του a , πλησιάζοντας δηλαδή τον Δία. Το ερώτημα που τίθεται είναι αν μέσα από αυτήν την εικόνα του χάους μπορεί να εμφανιστεί κάποιο είδος κανονικότητας, που θα μας επιτρέψει να ‘προβλέψουμε’, σε επίπεδο στατιστικής βέβαια, τη χρονική εξέλιξη μιας ομάδας τροχιών που ξεκινούν από κάποια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου των φάσεων. Σε μια σειρά δημοσιεύσεων οι Lecar et al. (1992, βλ. επίσης Murison et al. 1994) παρουσίασαν αποτελέσματα αριθμητικών πειραμάτων, σύμφωνα με τα οποία υποστηρίζεται η ύπαρξη ενός στατιστικού νόμου που συνδέει το χαρακτηριστικό χρόνο Lyapunov της τροχιάς ενός αστεροειδούς με το χρόνο ‘διαφυγής’ (συνήθως αναφέρεται ως δυναμικός χρόνος ζωής = dynamical lifetime), T_E . Στις εργασίες τους το T_E ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται ώστε η τροχιά ενός αστεροειδούς, τα στοιχεία της οποίας μεταβάλλονται λόγω χαοτικής κίνησης, να τμήσει την τροχιά του Δία. Η συναρτησιακή μορφή του ‘νόμου’ αυτού είναι

$$\frac{T_E}{T_0} = a \left(\frac{T_L}{T_0} \right)^b \quad (3.1)$$

όπου $a = 1.53 \pm 0.34$, $b = 1.73 \pm 0.19$ και $T_0 \approx 11.86$ χρόνια είναι η περίοδος περιφοράς του Δία. Η σημασία ενός τέτοιου αποτελέσματος είναι εμφανής, καθώς σημαίνει ότι με αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών για μικρούς, σχετικά, χρόνους (όσον απαιτεί ένας ακριβής υπολογισμός του T_L), είναι δυνατή η ‘πρόβλεψη’ του χρόνου διαφυγής ενός αστεροειδούς που εκτελεί χαοτική κίνηση. Όμως, όπως δείχτηκε στη συνέχεια από άλλους συγγραφείς, η ισχύς της σχέσης αυτής είναι εξαιρετικά περιορισμένη.

Η εμφάνιση ενός στατιστικού νόμου που συνδέει τους δύο προαναφερθέντες χαρακτηριστικούς δυναμικούς χρόνους μπορεί να προκύψει, όπως δείχτηκε αργότερα, σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Οι Varvoglis & Anastasiadis (1996) έδειξαν ότι, αν η διαταραχή είναι τόσο ισχυρή ώστε η εν λόγω χαοτική περιοχή του χώρου των φάσεων να μπορεί να χαρακτηριστεί από ένα σχεδόν ομογενές αναλλοίωτο μέτρο (uniform invariant measure), τότε ο νόμος των Lecar et al. (1992) προκύπτει ως η γενική λύση μιας τροποποιημένης εξίσωσης διάχυσης. Στην εργασία αυτή ο συντελεστής διάχυσης θεωρήθηκε σταθερός και ίσος με $D = a\gamma^b$. Η μορφή αυτή του D είχε βρεθεί από τον Konishi (1989) με μια σειρά αριθμητικών πειραμάτων σε διάφορες διατηρητικές απεικονίσεις, για μεγάλες τιμές της παραμέτρου διαταραχής. Πρέπει να τονιστεί ότι, στην προσέγγιση αυτή, ο χώρος των φάσεων είναι ‘ομογενής’, δηλαδή ο εκθέτης Lyapunov έχει παντού την ίδια τιμή. Στην περίπτωση που η φασιική ροή λαμβάνει χώρα σε μια περιοχή που οι συντονισμοί επικαλύπτονται μερικώς, τότε ο εκθέτης Lyapunov συνεχίζει να είναι ένα τοπικό μέτρο χαοτικότητας, του οποίου η τιμή εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες και, συγκεκριμένα, από τον συντονισμό από τον οποίο ξεκινάει η τροχιά. Και σε αυτήν την περίπτωση όμως, όπως έδειξαν οι Morbidelli & Froeschlé (1996) μελετώντας απλά μοντέλα διατηρητικών απεικονίσεων, η σχέση μεταξύ του δυναμικού χρόνου ζωής και του χρόνου Lyapunov είναι πολυωνυμική. Ο Shevchenko (1998) έδειξε ότι η ύπαρξη νόμου δύναμης, που συνδέει τους T_L και T_E , είναι εγγενής ιδιότητα των Χαμιλτονιανών συστημάτων, όσον αφορά στην κίνηση στη γειτονιά μιας διαχωριστικής καμπύλης. Μάλιστα, τα αποτελέσματά του δείχνουν ότι ο εκθέτης του νόμου δύναμης έχει παγκόσμια (universal) τιμή, $\alpha = 2$.

Το ερώτημα βέβαια είναι πώς προέκυψε η σχέση των Lecar et al. (1992), δεδομένου ότι

καμία από τις προαναφερθείσες καταστάσεις δεν ισχύει στην περιοχή του χώρου των φάσεων του προβλήματος των τριών σωμάτων που αυτοί μελετούσαν (αντίστοιχη της εξωτερικής κύριας ζώνης, $3.4\text{AU} \leq a \leq 3.8\text{AU}$). Η απάντηση, κατά πάσα πιθανότητα, σχετίζεται με το γεγονός ότι, με σκοπό να επιταχύνουν τις χρονοβόρες αριθμητικές ολοκληρώσεις που απαιτούνταν γι' αυτή τη μελέτη, οι Lecar et al. (1992) χρησιμοποίησαν στα πειράματά τους δεκαπλάσια τιμή από την πραγματική για τη μάζα του Δία, $\mu = 10 \mu_J$. Αυτό όμως είχε ως συνέπεια την περαιτέρω επικάλυψη των συντονισμών στην εξωτερική ζώνη, με συνέπεια ο χώρος των φάσεων να έχει (i) τη δομή που οι Morbidelli & Froeschlé (1996) υπέθεσαν, για αρκετά χαμηλές τιμές εκκεντρότητας και (ii) τη δομή που οι Varvoglis & Anastasiadis (1996) υπέθεσαν, για μεγαλύτερες τιμές εκκεντρότητας. Μάλιστα, όπως παρατήρησαν οι Holman & Wisdom (1996), για $\mu = 10 \mu_J$, οι συντονισμοί 2/1 και 3/2 επικαλύπτονται ακόμη και για $e < 0.1$, γεγονός που σημαίνει ότι ολόκληρη η εξωτερική ζώνη είναι πλήρως χαοτική. Εξάλλου η εφαρμογή του κριτηρίου του Chirikov στο επίπεδο κυκλικό πρόβλημα των τριών σωμάτων (Wisdom 1980) δίνει ως αποτέλεσμα μια περιοχή τιμών για τον μεγάλο ημιάξονα, εύρους

$$\Delta a = 1.49 a' \mu^{2/7} \quad (3.2)$$

γύρω από την τιμή του ημιάξονα του Δία ($a' = 5.2\text{AU}$), εντός της οποίας σχεδόν όλες οι τροχιές είναι χαοτικές. Για $\mu = \mu_J \approx 10^{-3}$, παίρνουμε $\Delta a \approx 1.1\text{AU}$ ενώ, για $\mu = 10 \mu_J$, παίρνουμε $\Delta a \approx 2.1\text{AU}$. Έτσι η περιοχή ημιαξόνων $3.1\text{AU} < a < 7.3\text{AU}$, συμπεριλαμβανομένης δηλαδή της εξωτερικής κύριας ζώνης, είναι πλήρως χαοτική. Υπενθυμίζουμε ότι για τον συντονισμό 2/1 είναι $a_{2/1} = 3.29\text{AU}$ ενώ για τον 3/2 είναι $a_{3/2} = 3.96\text{AU}$ (για $\mu \approx 10^{-3}$).

Το πιο προφανές αντιπαράδειγμα για την ισχύ του 'νόμου' των Lecar et al. (1992) είχε δοθεί ήδη από τους Milani & Nobili (1992), οι οποίοι μελέτησαν την κίνηση του αστεροειδούς (522) Helga. Η τροχιά του σώματος αυτού έχει εξαιρετικά σταθερά ελεύθερα στοιχεία, με τιμές $a_P \approx 3.69\text{AU}$ και $e_P \approx 0.05$, παρότι είναι εμφανώς χαοτική με $T_L \approx 6900$ χρόνια. Η χαοτική του κίνηση οφείλεται στον συντονισμό 12/7 με τον Δία. Το γεγονός ότι πρόκειται για ένα πραγματικό σώμα που, πιθανότατα, βρίσκεται στην ίδια περίπου τροχιά από την εποχή της γένεσης του Ηλιακού Συστήματος, δημιουργεί ένα μεγάλο ερωτηματικό. Η παράδοξη αυτή συμπεριφορά ονομάστηκε από τους Milani & Nobili *ευσταθές χάος* (stable chaos). Στα επόμενα χρόνια ο αριθμός των αστεροειδών που παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά αυξήθηκε κατά πολύ. Ο Milani (1993) έδειξε ότι ανάμεσα στους (μόλις 174 αριθμημένους, τότε) Τρωικούς αστεροειδείς υπάρχουν αρκετοί των οποίων οι τροχιές έχουν $T_L \leq 10^5$ έτη. Επίσης, οι Milani et al. (1997) ανακάλυψαν πολλούς αστεροειδείς της εσωτερικής κύριας ζώνης με παρόμοια συμπεριφορά και, ειδικότερα, αρκετά μέλη της οικογένειας του (490) Veritas. Όμως το φαινόμενο του ευσταθούς χάους δεν σχετίζεται πάντα με κάποιον συντονισμό μέσης κίνησης με το Δία. Οι Nesvorný & Morbidelli (1998a) έδειξαν ότι, αντίθετα με τους ισχυρισμούς των Milani et al., η χαοτική συμπεριφορά του (490) Veritas δεν σχετίζεται με κάποιον συντονισμό μέσης κίνησης με το Δία, αλλά με τον τριπλό συντονισμό μέσης κίνησης 5-2-2 μεταξύ των Δία-Κρόνου-Veritas. Στη συνέχεια ο Šidlichovský (1999), μελετώντας τους πρώτους 100 αριθμημένους αστεροειδείς, βρήκε ότι αρκετοί από αυτούς ακολουθούν χαοτικές τροχιές. Ο μηχανισμός που οδηγεί σε χαοτική κίνηση βρέθηκε τις περισσότερες φορές να

είναι κάποιος τριπλός συντονισμός μέσης κίνησης, ενώ ένα μικρό ποσοστό από αυτούς τους 100 αστεροειδείς είναι σε κάποιον απλό συντονισμό μέσης κίνησης με το Δία. Το αποτέλεσμα αυτό είναι αναμενόμενο, δεδομένου ότι οι τριπλοί συντονισμοί μέσης κίνησης είναι, για μια δεδομένη τάξη, πολυπληθέστεροι των απλών συντονισμών μέσης κίνησης. Επίσης, στα σμήνη των Τρωικών, όπως θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 6, το χάος φαίνεται να οφείλεται κατά κύριο λόγο σε αιώνιους συντονισμούς του ρυθμού μετάθεσης του αναβιβάζοντος συνδέσμου (Ω) με τις θεμελιώδεις συχνότητες του Ηλιακού Συστήματος.

Όπως αποδείχτηκε, η ερμηνεία του φαινομένου του ευσταθούς χάους δεν ήταν και τόσο απλή υπόθεση. Η εξήγηση που οι Milani & Nobili (1992) έδωσαν για τον (522) Helga ήταν ότι η μακροσκοπική σταθερότητα της τροχιάς δεν σχετίζεται με το συντονισμό που παράγει τη χαοτική κίνηση (όπως π.χ. στη συντονισμένη κίνηση Ποσειδώνα-Πλούτωνα), αλλά οφείλεται σε έναν αιώνιο μηχανισμό προστασίας που δρα σε ολόκληρη την εξωτερική ζώνη. Συγκεκριμένα, μελετώντας τη χρονική εξέλιξη της εκκεντρότητας, e , και του μήκους του περιηλίου, ϖ , της τροχιάς του (522) Helga, παρατήρησαν ότι η μέγιστη τιμή του e εμφανίζεται για $\varpi = 0$, ενώ ταυτόχρονα η τροχιά του Δία έχει την ελάχιστη τιμή εκκεντρότητας e' (στο μοντέλο τους η τροχιά του Δία μεταβάλλεται). Το αποτέλεσμα είναι ότι η συζυγία μεταξύ του Δία και του αστεροειδούς συμβαίνει, όταν ο δεύτερος βρίσκεται στο περιήλιο της τροχιάς του και ταυτόχρονα η απόσταση μεταξύ τους είναι η μεγαλύτερη δυνατή. Έτσι οι διαδοχικές προσεγγίσεις των δύο σωμάτων δεν μπορούν να οδηγήσουν σε δραστική μεταβολή των στοιχείων της τροχιάς του (522) Helga. Η ερμηνεία αυτή, αν και αρκετά ικανοποιητική εκ πρώτης όψεως, σίγουρα δεν είναι αρκετή για να εξηγήσει την παρόμοια συμπεριφορά άλλων αστεροειδών της εσωτερικής κύριας ζώνης. Επίσης δεν μπορεί να εξηγήσει, γιατί ο πληθυσμός των αστεροειδών της εξωτερικής ζώνης είναι τόσο μικρός, αν και στην περιοχή δρα ένας τόσο ισχυρός μηχανισμός προστασίας, ανεξαρτήτως μάλιστα των συντονισμών μέσης κίνησης. Η Lemaître (1997) προσπάθησε να ερμηνεύσει την εμφάνιση ευσταθούς χάους στην περιοχή του (490) Veritas, κατασκευάζοντας ένα ολοκληρώσιμο πρότυπο κίνησης (μέση συνάρτηση Hamilton), χωρίς όμως να μπορέσει να εξαγάγει γενικά συμπεράσματα. Για τους λόγους αυτούς αποφασίσαμε να μελετήσουμε εκ νέου την κίνηση του (522) Helga καθώς και άλλων, υποθετικών, σωμάτων σε γειτονικές τροχιές, ώστε να ερμηνεύσουμε το φαινόμενο με πιο ικανοποιητικό τρόπο.

3.2 Κίνηση του αστεροειδούς (522) Helga

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε διεξοδικά την κίνηση στη γειτονιά του αστεροειδούς (522) Helga. Τα πρότυπα κίνησης που χρησιμοποιούμε, τόσο σε αυτήν όσο και στις επόμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου, είναι τα εξής: (i) το επίπεδο κυκλικό περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων (ΚΠ), (ii) το τριδιάστατο ελλειπτικό περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων (3ΕΠ) και (iii) το μοντέλο των τεσσάρων πλανητών (4Π) του εξωτερικού Ηλιακού Συστήματος (βλ. Κεφάλαιο 2). Η μελέτη γίνεται με τη χρήση αριθμητικών μεθόδων. Το (ΚΠ), που είναι το απλούστερο πρότυπο κίνησης των αστεροειδών, χρησιμοποιείται ως πρότυπο-οδηγός για τη μελέτη των συντονισμών μέσης κίνησης του προβλήματος και συγκεκριμένα για την ανίχνευση ύπαρξης ή όχι περιοδικών τροχιών. Η σημασία της ύπαρξης

περιοδικών τροχιών, οι οποίες καθορίζουν την τοπολογία του χώρου των φάσεων, έχει αναλυθεί στο Κεφάλαιο 2. Τα δύο πιο σύνθετα πρότυπα χρησιμοποιούνται για την μακροχρόνια μελέτη της κίνησης των αστεροειδών, μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης των εξισώσεων κίνησης. Ο λόγος χρησιμοποίησης και των δύο μοντέλων είναι ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε τη συνεισφορά των άλλων πλανητών (εκτός του Δία) στην εξέλιξη της τροχιάς των αστεροειδών της υπό μελέτη περιοχής. Έτσι θα μπορέσουμε να εκτιμήσουμε την ισχύ των συμπερασμάτων που θα εξαγάγουμε βάσει του μοντέλου των τριών σωμάτων, έναντι του πιο ρεαλιστικού μοντέλου των τεσσάρων πλανητών.

Η μέθοδος αριθμητικής ολοκλήρωσης που χρησιμοποιήσαμε για τα πειράματα που παρουσιάζονται σε αυτό το Κεφάλαιο είναι ο συμπλεκτικός αλγόριθμος των Wisdom & Holman (1991, βλ. Παράρτημα), ο οποίος συμπεριλαμβάνεται στο προγραμματιστικό πακέτο SWIFT¹ των Levison & Duncan (1994). Ο υπολογισμός των χαρακτηριστικών εκθετών Lyapunov έχει γίνει επίσης μέσω της αντίστοιχης υπορουτίνας (`swift_lyap2`) του SWIFT. Τις αρχικές συνθήκες των πλανητών καθώς και του (522) Helga τις πήραμε από την εργασία των Murison et al. (1994)².

Τέλος θα πρέπει να αναφέρουμε ότι ο υπολογισμός της θέσης των περιοδικών τροχιών στους συντονισμούς του (ΚΠ) δεν αποτελούν προσωπική εργασία του συγγραφέα, αλλά έχουν γίνει σε συνεργασία με τον Καθηγητή Ι. Χατζηδημητρίου, ο οποίος έγραψε και χειρίστηκε τον αντίστοιχο αριθμητικό κώδικα.

3.2.1 Αριθμητική Ολοκλήρωση της Τροχιάς του (522) Helga

Η αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς του (522) Helga, για $t = 50 \cdot 10^6$ χρόνια στο μοντέλο (4Π), κατέδειξε τη σταθερότητα των στοιχείων της. Όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.1, η μέση τιμή του ημιάξονα είναι περίπου σταθερή και ίση με $a = 3.63 \text{ AU}$, ενώ και η εκκεντρότητα εκτελεί ταλαντώσεις σταθερού πλάτους γύρω από την τιμή $e = 0.06$. Στο Σχ. 3.1c φαίνεται η χρονική εξέλιξη της γωνίας του συντονισμού, $\theta = 7\lambda - 12\lambda'$. Η διαρκής εναλλαγή περιόδων λίκνισης της γωνίας θ με περιόδους περιστροφής (τόσο με $\dot{\theta} > 0$ όσο και με $\dot{\theta} < 0$) είναι αδιάφυστος μάρτυρας χαοτικής κίνησης, καθώς σημαίνει ότι η τροχιά διασχίζει τη διαχωριστική καμπύλη (separatrix) του συντονισμού 12/7. Η εκτίμηση του χαρακτηριστικού χρόνου Lyapunov έδωσε $T_L \approx 6,000$ χρόνια, τιμή που συμφωνεί με αυτήν των Milani & Nobili (1992).

Επεκτείνοντας την ολοκλήρωση για $t_{int} = 5 \cdot 10^9$ χρόνια, η σταθερότητα της τροχιάς διατηρήθηκε για περίπου $1.6 \cdot 10^9$ χρόνια, όταν και το σωματίδιο πλησίασε το Δία σε απόσταση μικρότερη των 0.35 AU . Η χαρακτηριστική αυτή τιμή απόστασης είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας Hill³ του Δία. Η είσοδος ενός δοκιμαστικού σωματιδίου εντός της σφαίρας Hill ενός

¹Ο κώδικας (σε γλώσσα Fortran-77) διατίθεται ελεύθερα στο ερευνητικό κοινό μέσω της Ιστοσελίδας του Hal Levison: <http://www.boulder.swri.edu/~hal>

²Για αρχικές συνθήκες αλλά και βασικές σταθερές του Ηλιακού Συστήματος χρειάστηκε να ανατρέξουμε, ανάλογα με την περίπτωση, στους καταλόγους του Minor Planet Center της IAU, τη βάση δεδομένων AstDys του Πανεπιστημίου της Pisa και την αστρονομική εφημερίδα The Astronomical Almanac (2000, 2001). Στο Παράρτημα παραθέτουμε μερικά χρήσιμα δεδομένα του Ηλιακού Συστήματος.

³Υπενθυμίζουμε ότι η σφαίρα Hill είναι η πρώτη προσέγγιση του λοβού Roche του 'πλανήτη' στο ΠΤΣ και ορίζει τη 'σφαίρα επιρροής' του. Η χρονική στιγμή που το σωματίδιο εισέρχεται στη σφαίρα Hill συμβολίζεται

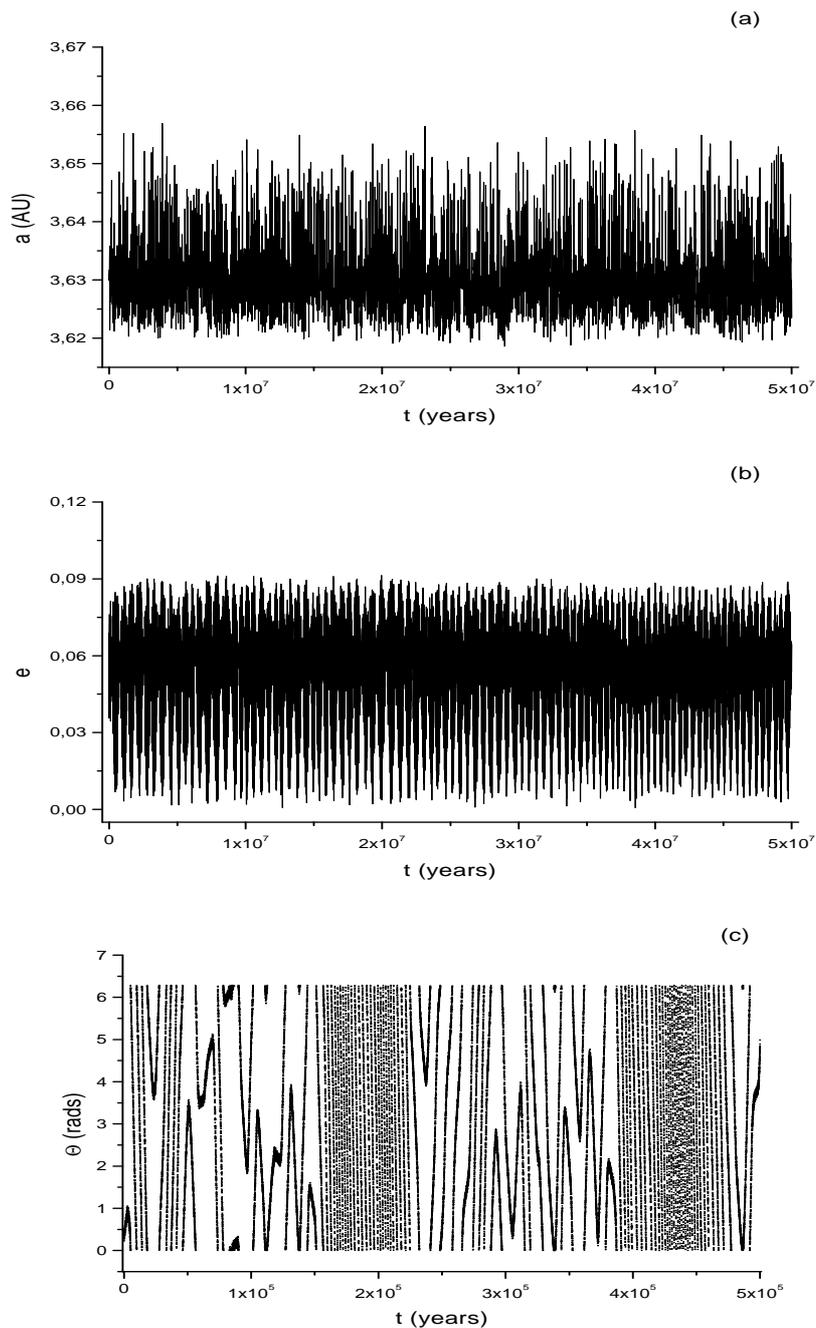
πλανήτη έχει ως αποτέλεσμα τη γρήγορη ‘εκτίναξη’ του σωματιδίου σε ημιπαραβολική τροχιά. Για το λόγο αυτό, και δεδομένου ότι ο χρόνος που απαιτείται εν συνεχεία για τη διαφυγή του σώματος από το εσωτερικό Ηλιακό Σύστημα είναι πολύ μικρότερος του t_{Hill} , μπορούμε να ορίσουμε σα χρόνο διαφυγής την τιμή $T_E = t_{Hill}$. Ο ορισμός αυτός χρησιμοποιείται εξάλλου ευρέως στη βιβλιογραφία. Το αποτέλεσμα αυτής της μεγάλου-χρόνου (long-time) αριθμητικής ολοκλήρωσης συμφωνεί και με την ολοκλήρωση των Holman & Murray (1996). Από αυτό το σημείο και σε ό,τι ακολουθεί θα χρησιμοποιούμε τη λέξη ‘σταθερότητα’ αντί της λέξης ‘ευστάθεια’ για το χαρακτηρισμό των ευσταθώς χαοτικών τροχιών. Ο λόγος είναι, προφανώς, ότι μια τροχιά με $\gamma > 0$ δεν μπορεί να χαρακτηριστεί (γραμμικά) ευσταθής. Αρκετές φορές χρησιμοποιείται και ο όρος ‘τροχιακή ευστάθεια’ (orbital stability), ως συνώνυμο της σταθερότητας των στοιχείων της τροχιάς.

Στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε ποιοτικά την κίνηση ενός δοκιμαστικού σωματιδίου στη γειτονιά του συντονισμού μέσης κίνησης 12/7 με το Δία στο μοντέλο (ΚΠ). Συγκεκριμένα θα παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα της αναζήτησης περιοδικών τροχιών με λόγο συντονισμού 12/7 και θα προσπαθήσουμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για την κίνηση ενός αστεροειδούς, στη γειτονιά αυτού του συντονισμού, σε πιο πολύπλοκα δυναμικά μοντέλα. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τη χρονική εξέλιξη μιας κατανομής υποθετικών αστεροειδών (fictitious asteroids) στη γειτονιά του (522) Helga. Σκοπός αυτού του πειράματος είναι να εξετάσουμε κατά πόσο μια αρχική διαφορά φάσης ενός υποθετικού αστεροειδούς με τον (522) Helga μπορεί να οδηγήσει σε τακτική, εμφανώς χαοτική (διαφυγή) ή ευσταθώς χαοτική κίνηση του υποθετικού σώματος. Αν παρατηρούνται και οι τρεις τύποι κίνησης και επιπλέον οι ευσταθώς χαοτικές τροχιές βρίσκονται στα σύνορα μεταξύ διαφυγής και οργανωμένης κίνησης, τότε θα έχουμε μια ισχυρή ένδειξη ότι η τροχιά του (522) Helga είναι όμοια με τις ‘προσκολλητικές’ τροχιές (sticky orbits) που εμφανίζονται στο χώρο των φάσεων Χαμιλτονιανών συστημάτων (βλ. Dvorak et al. 1998, Efthymiopoulos et al. 1999). Ο στόχος μας είναι να δούμε αν η ορολογία *ευσταθές χάος* είναι απλά ένα επιτυχημένο οξύμωρο σχήμα που περιγράφει ένα γνωστό φαινόμενο της μηχανικής Hamilton, αυτό της *προσκολλητικότητας* (stickiness).

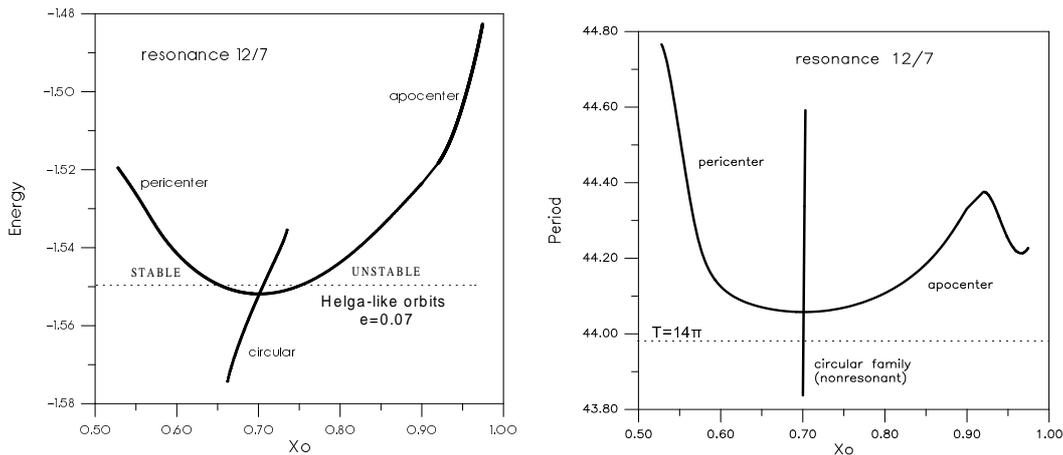
3.2.2 Περιοδικές Τροχιές στον Συντονισμό 12/7

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2 για την εύρεση των περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) που έχουν λόγο συχνοτήτων $n/n' = 12/7$. Η περίοδος μιας περιοδικής τροχιάς αυτού του συντονισμού θα έχει τιμή πολύ κοντά σε αυτήν του αδιατάρακτου προβλήματος, $T = 7 \cdot 2\pi = 14\pi$. Η χαρακτηριστική καμπύλη της ελλειπτικής οικογένειας περιοδικών τροχιών του συντονισμού 12/7 αναπαρίσταται γραφικά στο Σχ. 3.2, μαζί με ένα τμήμα της κυκλικής οικογένειας. Η τετμημένη του διαγράμματος είναι η αρχική συνθήκη $x(0)$, ενώ η τεταγμένη είναι η τιμή της σταθεράς του Jacobi, C (Σχ. 3.2α), ή η περίοδος T της τροχιάς (Σχ. 3.2β). Η τιμή του μεγάλου ημιάξονα κάθε περιοδικής τροχιάς είναι σταθερή και σχεδόν ίση προς $a = 0.698 a' \approx 3.63\text{AU}$. Περιοδικές τροχιές όμοιες με την τροχιά του (522) Helga,

με t_{Hill} . Αν ένα δοκιμαστικό σωματίδιο τεθεί εντός της σφαίρας Hill με μηδενική σχετική ταχύτητα, θα παραμείνει για πάντα δορυφόρος του βαρέως σώματος (βλ. Murray & Dermott 2000, Ch. 3).



Σχήμα 3.1: Χρονική εξέλιξη του a (πάνω) και του e (μέση) της τροχιάς του (522) Helga για $t = 50 \cdot 10^6$ χρόνια. Στο τελευταίο (κάτω) γράφημα δίνεται η χρονοσειρά του $\theta = 7\lambda - 12\lambda'$ για $t = 5 \cdot 10^5$ χρόνια. Οι χαοτικές μεταβολές του θ είναι εμφανείς.

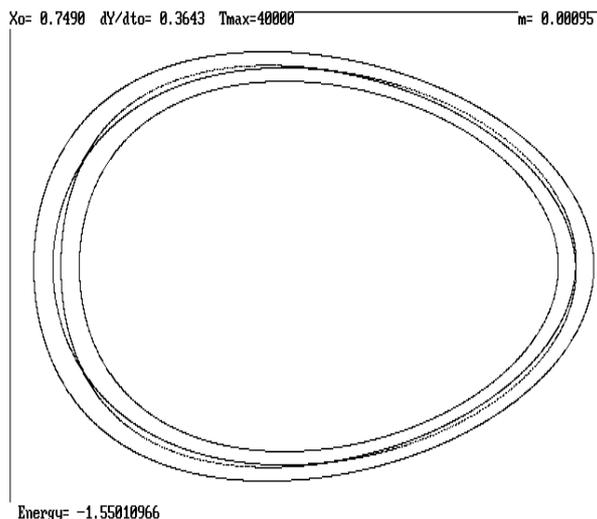


Σχήμα 3.2: Η οικεγένεια των συντονισμένων περιοδικών τροχιών 12/7 του (ΚΠ). Αριστερά (α) δίνεται το διάγραμμα $x(0) - C$. Η τιμή $C = -1.55010966$ αντιστοιχεί σε εκκεντρότητα παραπλήσια με αυτήν του (522) Helga. Δεξιά (β) δίνεται η χαρακτηριστική καμπύλη της οικογένειας στο διάγραμμα $x(0) - T$. Καμία περιοδική τροχιά δεν έχει περίοδο ίση με $T = 14\pi$.

με $e_0 \approx 0.08$, υπάρχουν και στους δύο κλάδους ελλειπτικής κίνησης. Οι τροχιές του περικεντρικού κλάδου είναι ευσταθείς, ενώ οι τροχιές του αποκεντρικού κλάδου είναι ασταθείς.

Μία τομή Poincaré για τροχιές του (ΚΠ) στη γειτονιά του συντονισμού 12/7, με ενέργεια ίση με αυτήν που αντιστοιχεί στην εκκεντρότητα του Helga, δίνεται στο Σχ. 3.3. Στην τομή εμφανίζονται δύο πολλαπλά σταθερά σημεία με διαφορετική ευστάθεια, που αντιστοιχούν στην τομή της επιφάνειας $C = -1.55010966$ με τους δύο κλάδους ελλειπτικών περιοδικών τροχιών του Σχ. 3.2α. Ο χαρακτηριστικός εκθέτης, γ , της ασταθούς περιοδικής τροχιάς έχει τιμή που αντιστοιχεί σε $\gamma^{-1} = 8000$ χρόνια. Όπως φαίνεται στο σχήμα, το εύρος της ζώνης λίκνισης (νησίδα ευστάθειας) είναι πολύ μικρό, ώστε μικρές μεταβολές των αρχικών συνθηκών μπορούν να οδηγήσουν από ευσταθή σε χαοτική κίνηση. Το εύρος της χαοτικής ζώνης, που αναπτύσσεται γύρω από την ασταθή περιοδική τροχιά του συντονισμού, είναι επίσης πολύ μικρό, για τη συγκεκριμένη τιμή ενέργειας. Η χαοτική ζώνη περικλείεται από ημιπεριοδικές τροχιές (τις διαταραγμένες ελλείψεις του Σχ. 3.3), οι οποίες περιορίζουν τη χαοτική κίνηση σε μια στενή περιοχή του χώρου των φάσεων. Έτσι το φαινόμενο του ευσταθούς χάους εμφανίζεται με φυσικό τρόπο σε αυτό το απλό μοντέλο κίνησης των αστεροειδών.

Είναι εύκολα αντιληπτό από το Σχ. 3.2β ότι καμία από τις περιοδικές τροχιές του (ΚΠ) δεν μπορεί να αποτελέσει σημείο απλής διακλάδωσης για το (ΕΠ), αφού δεν υπάρχει περιοδική τροχιά στο (ΚΠ) που η περίοδός της να είναι ακέραιο πολλαπλάσιο της περιόδου της τροχιάς του Δία, $T = 14\pi = 43.982297$. Επομένως στο (ΕΠ) δεν υπάρχουν απλές περιοδικές τροχιές που να αντιστοιχούν στον συντονισμό 12/7. Συνέπεια του γεγονότος αυτού είναι ότι, σε συμφωνία με όσα αναπτύξαμε στο Κεφάλαιο 2, δεν είναι εφικτές βραχυχρόνιες και μεγάλου πλάτους μεταβολές της εκκεντρότητας της τροχιάς ενός αστεροειδούς που εκτελεί χαοτική κίνηση, εκτός κι αν οι υπο-συντονισμοί του (ΕΠ) επικαλύπτονται πλήρως. Πρέπει να



Σχήμα 3.3: Τομή Poincaré του (ΚΠ) για τροχιές με $e \sim 0.08$ (τύπου Helga).

σημειώσουμε βέβαια ότι στην άμεση γειτονιά του συντονισμού $12/7$ βρίσκονται δύο ισχυροί συντονισμοί μέσης κίνησης, οι $5/3$ και $7/4$, η ύπαρξη των οποίων μπορεί να έχει σημαντικές συνέπειες για την εξέλιξη της τροχιάς ενός σώματος, ειδικά αν η αρχική εκκεντρότητα έχει τιμή $e \geq 0.15$.

Αν θέλουμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για την κίνηση του αστεροειδούς σε πιο πολύπλοκα δυναμικά μοντέλα (π.χ. το μοντέλο 4Π), θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας την πιθανή συνύπαρξη αιώνιων συντονισμών στη γειτονιά του συντονισμού μέσης κίνησης. Για τιμές του ημιάξονα $a \simeq 3.63\text{AU}$ οι αιώνιοι συντονισμοί εμφανίζονται για τιμές της κλίσης $i > 15^\circ$ (Knežević et al. 1991), ενώ η τροχιά του (522) Helga έχει κλίση μόλις $i \approx 4^\circ$. Βέβαια, δεν μπορεί να γνωρίζει κανείς εκ των προτέρων αν ο συντονισμός μέσης κίνησης μπορεί να μεταβάλλει τη συχνότητα μετάπτωσης του περιηλίου (ή του συνδέσμου) της τροχιάς τόσο δραστηκά, σε σχέση με την τιμή που προβλέπει η γραμμική θεωρία αιώνιας κίνησης, ώστε να εμφανιστεί κάποιος αιώνιος συντονισμός εντός του συντονισμού μέσης κίνησης. Όμως, στη συγκεκριμένη περίπτωση που η τάξη του συντονισμού είναι μεγάλη ($q = 5$) και άρα η 'ισχύς' του μικρή, αυτό το φαινόμενο είναι πολύ δύσκολο να συμβεί. Άλλωστε και τα αποτελέσματα των αριθμητικών μας προσομοιώσεων (βλ. επόμενες παραγράφους) δείχνουν ότι κάτι τέτοιο δε συμβαίνει στον συντονισμό $12/7$.

3.2.3 Αριθμητική Μελέτη Γειτονικών Τροχιών

Ολοκληρώσαμε αριθμητικά τις τροχιές που αντιστοιχούν σε δύο ομάδες αρχικών συνθηκών, τόσο στο μοντέλο (3ΕΠ) όσο και στο μοντέλο (4Π). Η πρώτη ομάδα (G1) αποτελείται από 128 υποθετικούς αστεροειδείς, με αρχικές συνθήκες $a = a_{12/7} = a' \cdot (7/12)^{(2/3)}\text{AU}$, $e = 0.07$, $i = 4^\circ$ και $\Omega = 0$, ενώ οι άλλες δύο γωνίες, ω και M , έπαιρναν τιμές σε ένα πλέγμα 16×8

στο διάστημα $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Η δεύτερη ομάδα (G2) είχε αρχικές συνθήκες ίδιες με αυτές του πραγματικού (522) Helga (εποχή JD2448601.0=Dec. 10, 1991) για τα στοιχεία a , e , i και Ω , αλλά με τις άλλες δύο γωνίες να κατανέμονται όπως και στην G1.

Αρχικά, οι τροχιές των δύο ομάδων 'αστεροειδών' ολοκληρώθηκαν για $20 \cdot 10^6$ χρόνια. Όταν ένα σωματίδιο εισερχόταν στη σφαίρα επιρροής του Δία, θεωρούσαμε ότι είχε πλέον διαφύγει από τη ζώνη. Στη συνέχεια η ολοκλήρωση επεκτάθηκε για το G2 μέχρι τα $50 \cdot 10^6$ χρόνια. Παράλληλα, δύο μικρότερες ομάδες από 50 αρχικές συνθήκες τέθηκαν, για λόγους σύγκρισης, εντός των συντονισμών $7/4$ και $5/3$. Οι δύο αυτοί συντονισμοί χαμηλής τάξης βρίσκονται εκατέρωθεν του $12/7$ και είναι γνωστό (βλ. π.χ. Murray & Holman 1997) ότι οι περισσότερες τροχιές που ξεκινούν μέσα σε αυτούς οδηγούνται σε διαφυγή σε σύντομο χρονικό διάστημα ($t < 10^6$ χρόνια).

Εξέλιξη στο Μοντέλο (3EΠ)

Η ευστάθεια των στοιχείων της τροχιάς που παρατηρήθηκε για τον (522) Helga δεν αποτελεί χαρακτηριστικό της πλειοψηφία των τροχιών των δύο ομάδων. Αντίθετα, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.4, περίπου το 60% των σωματιδίων και των δύο ομάδων διαφεύγουν μέσα στα πρώτα $20 \cdot 10^6$ χρόνια (βλ. Πίνακα 3.1). Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση του G2 μέχρι τα $t = 50 \cdot 10^6$ χρόνια, το ποσοστό διαφυγής αυξήθηκε στο 71.3%. Η χρονική εξέλιξη του αριθμού των σωματιδίων που παραμένουν στη ζώνη, $N(t)$, μοιάζει να ακολουθεί έναν εκθετικό νόμο μείωσης της μορφής

$$N(t) = N(0) e^{-\gamma t} \quad . \quad (3.3)$$

Η προσαρμογή μιας καμπύλης αυτής της μορφής στα δεδομένα του Σχ. 3.4β δίνει $\gamma^{-1} = (16.3 \pm 0.8) \cdot 10^6$ χρόνια αλλά, όπως φαίνεται και στο σχήμα, μία σχεδόν γραμμική 'ουρά' από σωματίδια που διαφεύγουν εξαιρετικά αργά ($T_E > 15 \cdot 10^6$ χρόνια) δεν ανταποκρίνεται σ' αυτόν το νόμο. Η προσαρμογή των αριθμητικών δεδομένων είναι πολύ καλύτερη αν χρησιμοποιήσουμε μία τροποποιημένη εκθετική μείωση, της μορφής

$$N(t) = N_0 + N_1 e^{-\gamma t} \quad , \quad (3.4)$$

με $\gamma^{-1} = (8.9 \pm 0.6) \cdot 10^6$ χρόνια. Προφανώς ο τροποποιημένος εκθετικός νόμος υποδηλώνει ότι ένα ποσοστό του αρχικού πληθυσμού $N_0 \approx 30\% N(0)$ δε διαφεύγει.

Το ιστόγραμμα των χρόνων διαφυγής για την ομάδα G2 φαίνεται στο Σχ. 3.5. Ο μέσος χρόνος διαφυγής είναι $6.5 \cdot 10^6$ χρόνια και η τυπική απόκλιση περίπου $3.5 \cdot 10^6$ χρόνια. Αν ο χρόνος διαφυγής δεν εξαρτώνταν από τις αρχικές συνθήκες, το ιστόγραμμα θα έπρεπε να προσεγγίζει την κατανομή του Gauss, με μικρή διασπορά. Αντίθετα, η καλύτερη προσέγγιση στα δεδομένα του Σχ. 3.5 δίνεται από μια κατανομή τύπου log-normal, της οποίας χαρακτηριστικό είναι η μεγάλη 'ουρά'. Προφανώς ο χρόνος διαφυγής του πραγματικού (522) Helga αντιστοιχεί στο τέρμα της ουράς της κατανομής. Σημειώνουμε ότι ένα ιστόγραμμα διαφυγής αυτού του τύπου μπορεί να παραχθεί από δύο διαδικασίες: (i) έναν τυχαίο βηματισμό τύπου Lévy (Shlesinger et al. 1993) ή (ii) έναν τοπικά κανονικό τυχαίο βηματισμό (η κατανομή

‘αλμάτων’ είναι αυτή του Gauss), αλλά με τις παράμετρους της κανονικής κατανομής να είναι συναρτήσεις των δράσεων (βλ. Κεφάλαιο 6).

Πίνακας 3.1: Στατιστική διαφυγών στο (3ΕΠ)

Ομάδα	Διαφυγές (%)	$\langle T_E \rangle$ (έτη)
7/4	93.75	$7.2 \cdot 10^4$
5/3	81.25	$6.3 \cdot 10^5$
G1	57.81	$6.6 \cdot 10^6$
G2	71.30	$6.4 \cdot 10^6$

Τα προαναφερθέντα αποτελέσματα εξαρτώνται, προφανώς, από την επιλογή των αρχικών συνθηκών. Μπορεί κανείς, επομένως, να φανταστεί ότι πρέπει να υπάρχει κάποια σχέση ανάμεσα στο χρόνο διαφυγής και την αρχική φάση, η οποία θα εξηγεί γιατί μερικά σωματίδια διαφεύγουν μέσα σε 10^7 χρόνια, ενώ άλλα χρειάζονται μέχρι και $2 \cdot 10^9$ χρόνια για να διαφύγουν. Στο Σχ. 3.6, όπου οι αρχικές συνθήκες του G2 αναπαρίστανται στο διάγραμμα των συντονισμένων γωνιών

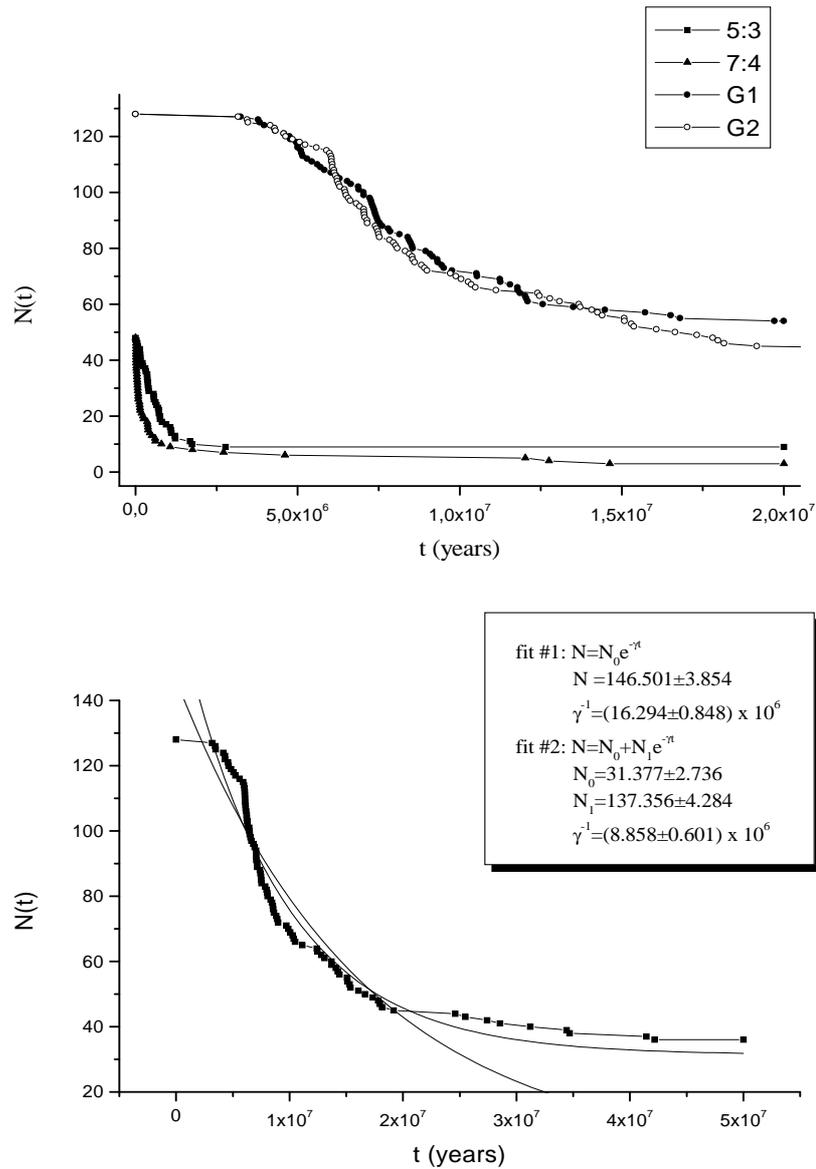
$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{12}{5}\lambda' - \frac{7}{5}\lambda - \varpi \\ \nu &= -\frac{12}{5}\lambda' + \frac{7}{5}\lambda + \varpi'\end{aligned}\quad (3.5)$$

φαίνεται ακριβώς αυτή η σχέση. Τα σωματίδια που παραμένουν σε σταθερές τροχιές δεν κατανέμονται τυχαία στο επίπεδο (σ, ν) αλλά, αντίθετα, συγκεντρώνονται γύρω από τη διαγώνιο $\varpi - \varpi' = 0$, με τις τιμές του μήκους του περιηλίου να ικανοποιούν τη σχέση

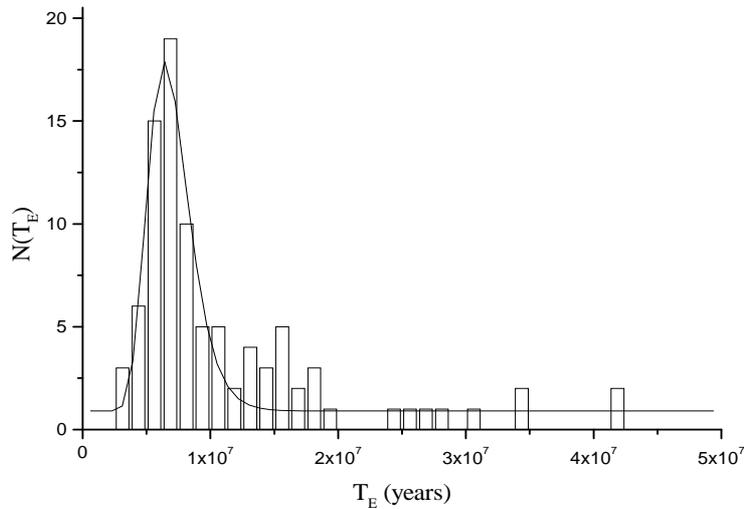
$$-\frac{\pi}{3} \leq (\varpi - \varpi')_0 \leq \frac{\pi}{3} \quad . \quad (3.6)$$

Η εξέλιξη μερικών χαρακτηριστικών τροχιών στο επίπεδο $(e, \varpi - \varpi')$ φαίνεται στο Σχ. 3.7. Οι τρεις τροχιές για τις οποίες η γωνία ϖ περιστρέφεται τελικά διαφεύγουν. Η εκκεντρότητα μπορεί να φτάσει σε τιμές μέχρι και $e = 0.19$ πριν το σωματίδιο διαφύγει και η αρχική τιμή $e_0 = 0.0761$ είναι κοντά στο ελάχιστο της $e(t)$. Αντίθετα, για όλες τις τροχιές που δε διαφεύγουν, η γωνία ϖ είτε λικνίζεται συνεχώς (όπως στο Σχ. 3.7β) ή μόλις που περιστρέφεται γύρω από την μικρή περιοχή λίκνισης. Για αυτές τις τροχιές η e_0 είναι κοντά στο μέγιστο της $e(t)$ και η ελεύθερη τιμή της εκκεντρότητας είναι της τάξης της εξαναγκασμένης τιμής ($e_{for} < e' = 0.048$).

Για τα σωματίδια που δε διέφυγαν υπολογίσαμε επίσης την τιμή του χαρακτηριστικού εκθέτη Lyapunov, μέσω μιας νέας ολοκλήρωσης των εξισώσεων μεταβολών για $t = 10^7$ χρόνια. Συνοπτικά τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:



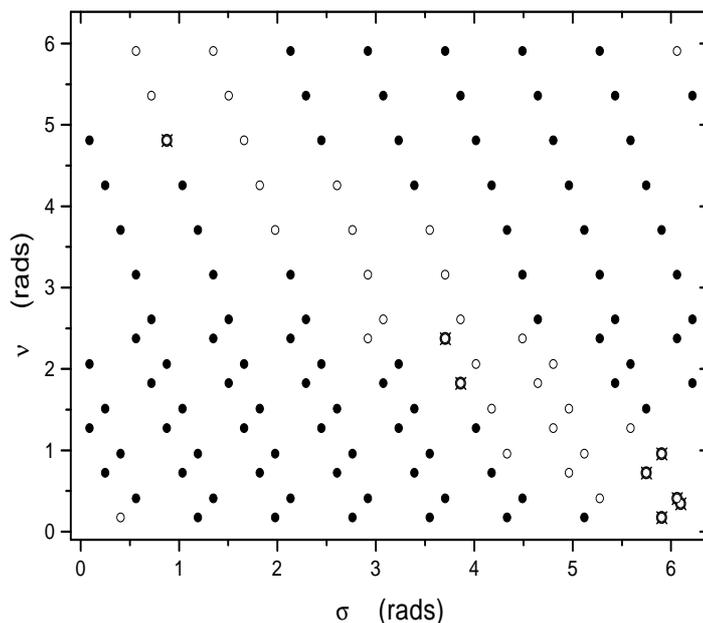
Σχήμα 3.4: (Πάνω) Ο αριθμός των σωματιδίων που παραμένουν στη ζώνη, $N(t)$, συναρτήσει του χρόνου, για τις τέσσερις ομάδες που αναφέρονται στο κείμενο. (Κάτω) Το ίδιο γράφημα αλλά για την G2 και για $t = 50 \cdot 10^6$ χρόνια. Οι δύο συνεχείς καμπύλες αντιστοιχούν στους δύο νόμους εκθετικής μείωσης (βλ. κείμενο).



Σχήμα 3.5: Ιστόγραμμα των χρόνων διαφυγής της G2. Το εύρος κάθε κλάσης αντιστοιχεί σε $1.25 \cdot 10^6$ χρόνια. Η συνεχής καμπύλη είναι η προσαρμοζόμενη κατανομή log-normal.

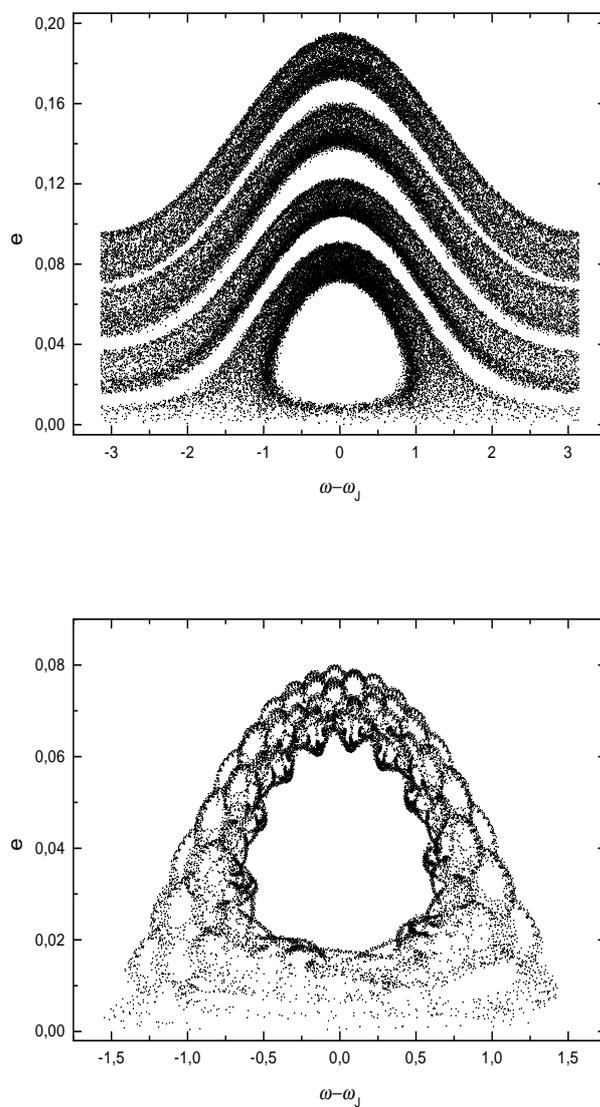
- (α) Επτά τροχιές, οι αρχικές συνθήκες των οποίων δείχνονται με ξεχωριστό σύμβολο στο Σχ. 3.6 (βλ. επίσης Πίνακα 3.2), δείχνουν σχεδόν ταυτόσημη συμπεριφορά με αυτήν του (522) Helga όσον αφορά τόσο στην τιμή του T_L , όσο και στη σταθερότητα των a , e , i και στη συμπεριφορά του $\theta = 7\lambda - 12\lambda'$. Ο υπολογισμός του T_L φαίνεται γραφικά στο Σχ. 3.8, ενώ τα στοιχεία της τροχιάς για ένα από αυτά τα παραδείγματα ευσταθούς χάους φαίνονται στο Σχ. 3.9. Παρατηρήστε στο Σχ. 3.6 ότι οι ευσταθώς χαοτικές τροχιές βρίσκονται στα σύνορα μεταξύ διαφυγής και 'ευσταθούς' κίνησης.
- (β) Ανάμεσα στα εναπομείναντα σωματίδια, βρέθηκαν μερικές χαοτικές τροχιές με $T_L > 10^5$ χρόνια. Αυτές όμως δεν τις τοποθετούμε στην κατηγορία των ευσταθώς χαοτικών, αφού η συμπεριφορά τους δεν είναι ίδια με αυτήν της τροχιάς του (522) Helga.
- (γ) Η πλειοψηφία των σωματιδίων που δε διαφεύγουν φαίνεται να ακολουθεί τακτικές τροχιές, μιας και η συνάρτηση $\chi(t)$, της οποίας το όριο είναι η τιμή του εκθέτη Lyapunov (βλ. Κεφάλαιο 2), φθίνει γραμμικά με το χρόνο σε ένα log-log διάγραμμα. Επίσης, η γωνία θ περιστρέφεται ταχέως, δείγμα ότι η κίνηση γίνεται εκτός της ζώνης λίκνισης του συντονισμού. Τα αποτελέσματα αυτά αποτελούν ενδείξεις⁴ ότι υπάρχουν ημιπεριοδικές τροχιές στη γειτονιά του συντονισμού 12/7. Για τις περισσότερες από αυτές τις τροχιές, το μήκος του περιηλίου λικνίζεται συνεχώς (βλ. Σχ. 3.7β).

⁴Δεν υπάρχει αριθμητικό εργαλείο που να μπορεί να δείξει την ευστάθεια μιας τροχιάς - μόνο τη μη ευστάθεια.

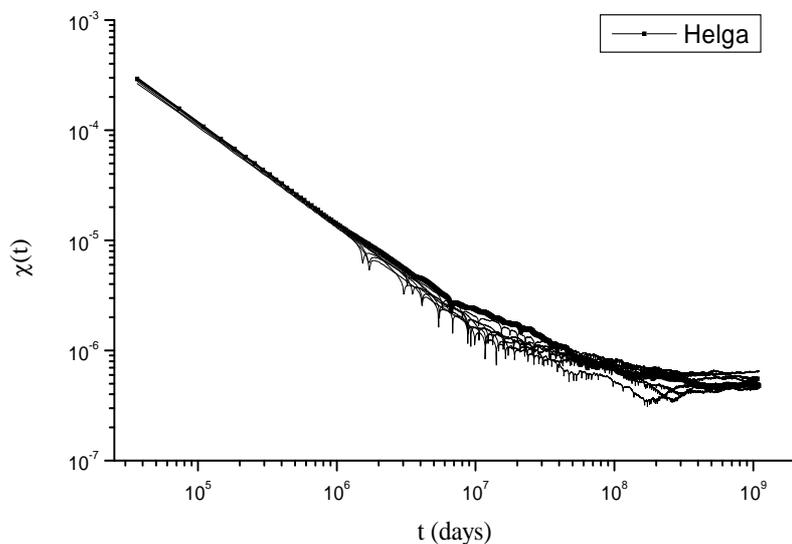


Σχήμα 3.6: Οι αρχικές συνθήκες στο επίπεδο (σ, ν) . Τα μαύρα σύμβολα αντιστοιχούν σε σωματίδια που διέφυγαν πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Οι άδειοι κύκλοι αντιστοιχούν στα σωματίδια που παρέμειναν στην περιοχή του συντονισμού $12/7$. Τέλος οι κύκλοι με σταυρό δείχνουν τα σωματίδια που έχουν ταυτόσημη συμπεριφορά με τον (522) Helga.

Όσον αφορά στις τροχιές των διαφυγόντων σωματιδίων, ένα τυπικό παράδειγμα φαίνεται στο Σχ. 3.10. Μπορεί κανείς να διακρίνει ότι η μέση τιμή του ημιάξονα μετακινείται αργά προς μεγαλύτερες τιμές, ενώ το πλάτος μεταβολής αυξάνει επίσης. Η μέση τιμή της εκκεντρότητας δεν αυξάνει, αλλά το πλάτος μεταβολής, που είναι πρακτικά η τιμή της ελεύθερης συνιστώσας της e , αυξάνει συνεχώς. Μετά από $t \approx 3.2 \cdot 10^6$ χρόνια ένα ξαφνικό άλμα της εκκεντρότητας οδηγεί την τροχιά κοντά στο Δία. Η συμπεριφορά αυτή ερμηνεύεται ως εξής. Για τιμές εκκεντρότητας $e > 0.15$ αναμένουμε η κίνηση να επηρεάζεται σημαντικά και από άλλους γειτονικούς συντονισμούς (βλ. Dermott & Murray 1983). Για $a \approx 3.7\text{AU}$ ο ισχυρότερος συντονισμός είναι ο $5/3$. Στο Σχ. 3.10γ φαίνεται η κρίσιμη γωνία $\theta = 3\lambda - 5\lambda'$. Η θ περιστρέφεται με γρήγορο ρυθμό αρχικά, αλλά μετά από τη στιγμή $t \approx 3.15 \cdot 10^6$ χρόνια αλλάζει συμπεριφορά, εκτελώντας λίκνιση γύρω από την τιμή $\theta = \pi$. Έτσι, η είσοδος της τροχιάς στη ζώνη λίκνισης του συντονισμού $5/3$ οδηγεί σε ταχεία αύξηση της εκκεντρότητας και, στη συνέχεια, σε διαφυγή του σωματιδίου.



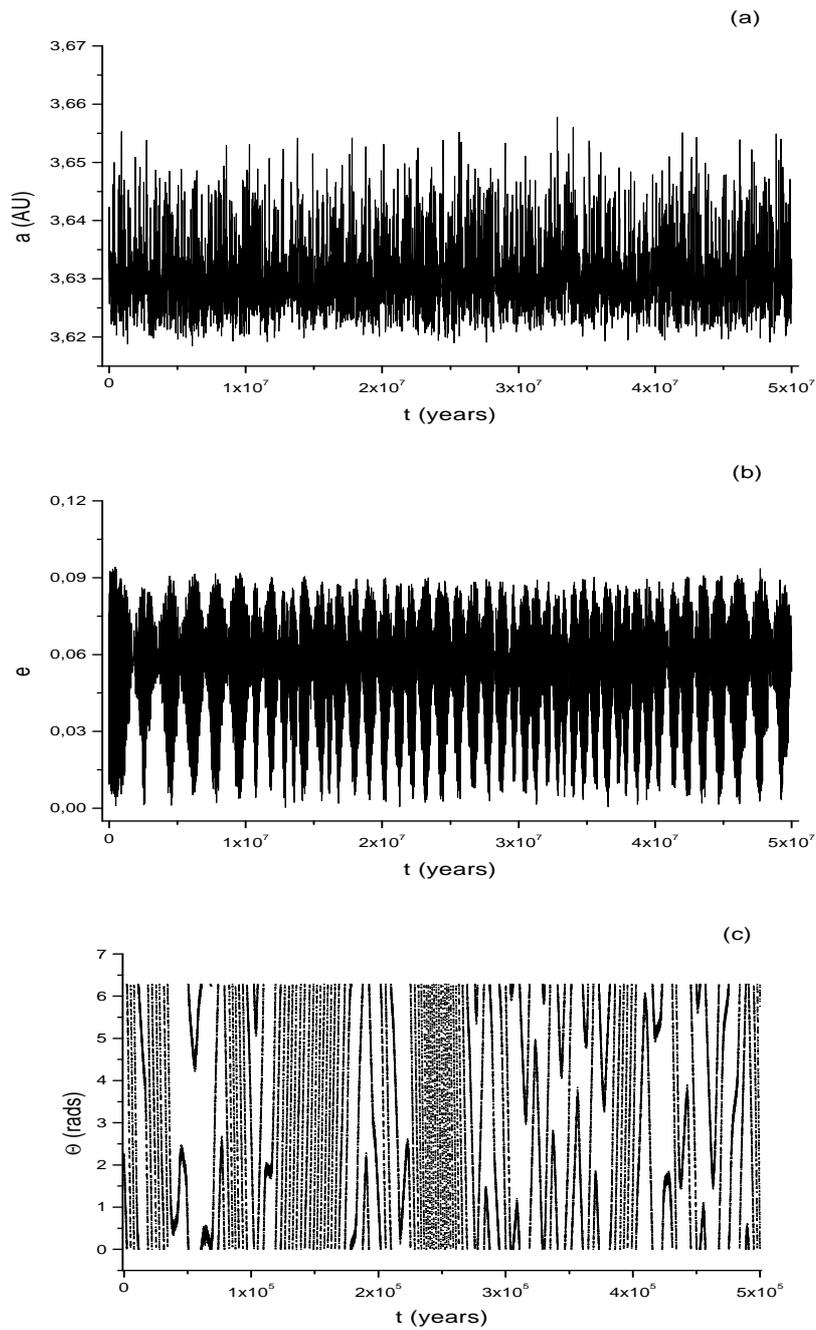
Σχήμα 3.7: Προβολή των τροχιών στο επίπεδο $(e, \varpi - \varpi')$. (Πάνω) Τρεις τροχιές για τις οποίες η γωνία $\phi = \varpi - \varpi'$ περιστρέφεται διαρκώς και η εκκεντρότητα παίρνει τιμές μέχρι και $e = 0.19$. Η τέταρτη (από πάνω) τροχιά μόλις που περιστρέφεται γύρω από μια μικρή περιοχή λίκνισης του ϕ (τύπου Helga). (Κάτω) Άλλη τροχιά για την οποία η ϕ λικνίζεται διαρκώς και η κίνηση φαίνεται να είναι ημιπεριοδική.



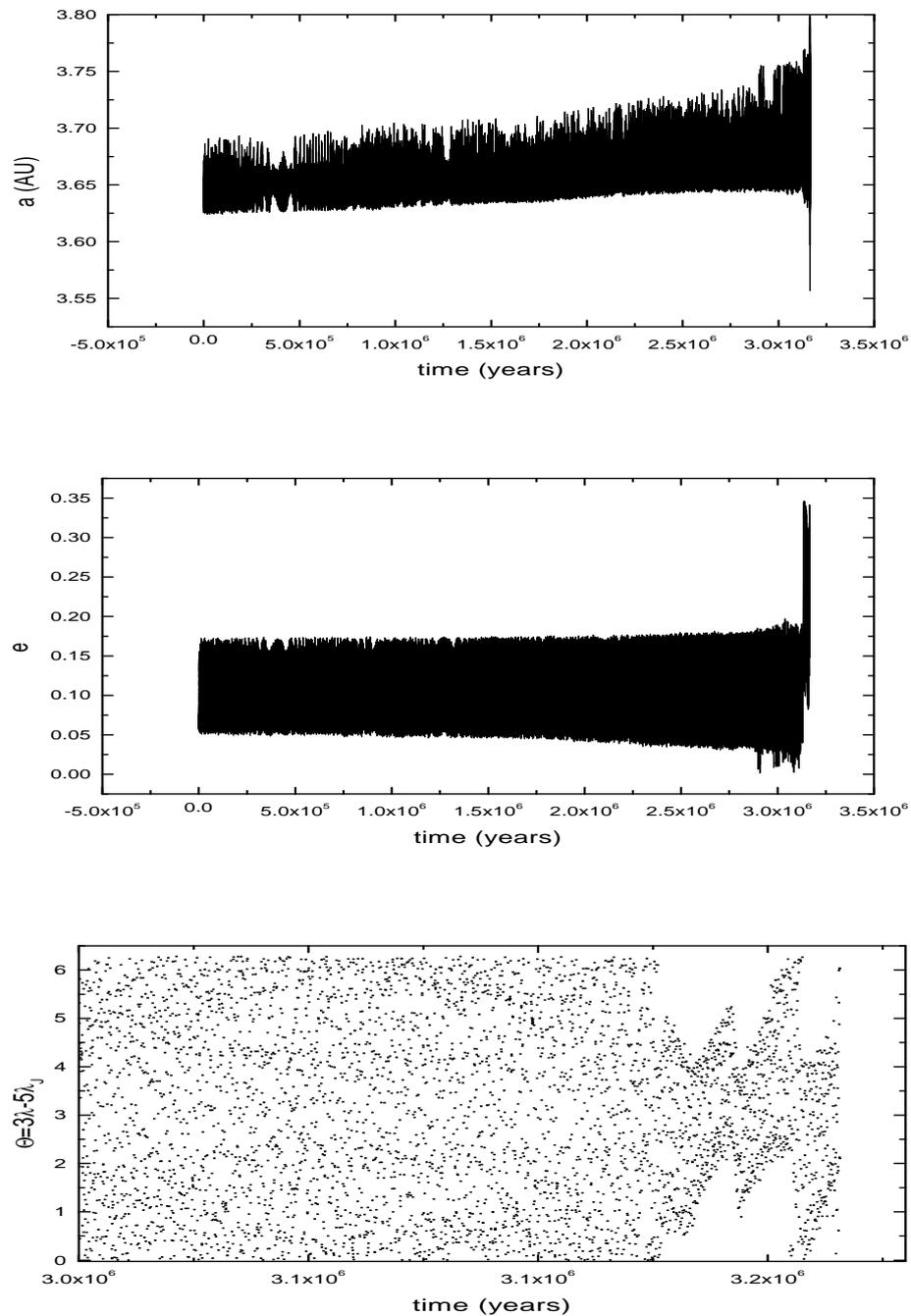
Σχήμα 3.8: Υπολογισμός του εκθέτη Lyapunov για τις ευσταθώς χαοτικές τροχιές (βλ. Πίνακα 3.2). Όλα τα σωματίδια έχουν $T_L \sim 6,000$ χρόνια.

Εξέλιξη στο μοντέλο (4Π)

Η χρονική εξέλιξη της κατανομής G2 στο μοντέλο των τεσσάρων πλανητών αναπαρίσταται γραφικά στα Σχ. 3.11, 3.12 και 3.13, τα αντίστοιχα των 3.4β, 3.5 και 3.6 για το (3ΕΠ). Όπως φαίνεται με μια πρώτη ματιά, τα βασικά χαρακτηριστικά των προηγούμενων εικόνων διατηρούνται και σε αυτήν την περίπτωση. Και στο μοντέλο (4Π) η πλειοψηφία των σωματιδίων διαφεύγει μέσα σε $20 \cdot 10^6$ χρόνια και το ιστόγραμμα των χρόνων διαφυγής έχει επίσης τη μορφή της κατανομής log-normal. Έτσι, παρότι η ακριβής τιμή του χρόνου διαφυγής για κάθε σωματίδιο δεν είναι πλέον η ίδια, μπορούμε να πούμε ότι η στατιστική συμπεριφορά του G2 είναι ίδια και για τα δύο μοντέλα. Όπως δείχνεται και στον Πίνακα 3.1, το ποσοστό των σωματιδίων που διαφεύγουν δεν αλλάζει σημαντικά, αλλά ο μέσος χρόνος διαφυγής μειώνεται ($\langle T_E \rangle \approx 5.4 \cdot 10^6$ χρόνια) και η τυπική απόκλιση των χρόνων διαφυγής αυξάνει. Το αποτέλεσμα αυτό είναι μάλλον αναμενόμενο, δεδομένου ότι οι πρόσθετες παρέλξεις των υπόλοιπων πλανητών αυξάνουν τη χαοτικότητα της συγκεκριμένης περιοχής του χώρου των φάσεων, διευκολύνοντας έτσι τη διαδικασία μεταφοράς. Όμως δραματικές μεταβολές λόγω της προσθήκης στο μοντέλο των υπολοίπων μεγάλων πλανητών δεν αναμένονταν, αφού νέοι μηχανισμοί, όπως αιώνιοι συντονισμοί, δεν υπάρχουν για $a \sim 3.96\text{AU}$ και $i \sim 4^\circ$. Για το λόγο αυτό η στατιστική συμπεριφορά του G2 δεν αλλάζει στο (4Π).



Σχήμα 3.9: Ένα άλλο παράδειγμα ευσταθούς χάους. Παρατηρείται η ίδια συμπεριφορά με τον Helga (Σχ. 3.1).



Σχήμα 3.10: Χρονική εξέλιξη των a (πάνω) και e της τροχιάς του ταχύτερα διαφεύγοντος σωματιδίου (G2). Στο τελευταίο γράφημα φαίνεται η μεταβολή της συμπεριφοράς του $\theta = 3\lambda - 5\lambda_j$, που αλλάζει από περιστροφή σε λίκνιση μετά από $t \approx 3.15 \cdot 10^6$ χρόνια.

Πίνακας 3.2: Αρχικές συνθήκες ευσταθώς χαοτικών τροχιών του G2

α/α	Ω_0 (rads)	M_0 (rads)	T_L ($\cdot 10^3$ χρόνια)
1	$10\pi/8$	$2\pi/8$	5.1
2	$11\pi/8$	0	5.9
3	$11\pi/8$	$12\pi/8$	5.1
4	$12\pi/8$	$10\pi/8$	4.8
5	$12\pi/8$	$14\pi/8$	6.1
6	$13\pi/8$	$6\pi/8$	4.2
7	$13\pi/8$	$12\pi/8$	4.9

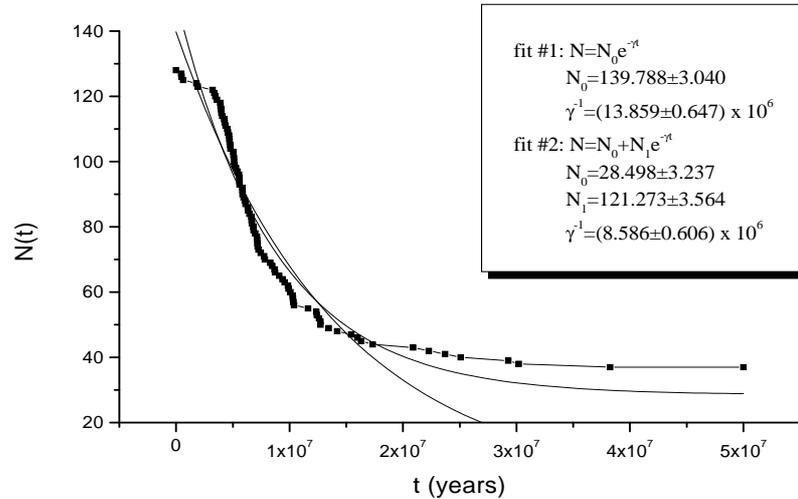
3.2.4 Μακροχρόνια Διατήρηση των Γραμμικών Συσχετίσεων

Όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, οι χρονοσειρές των στιγμιαίων στοιχείων της τροχιάς του (522) Helga, καθώς και των υπόλοιπων παρόμοιων τροχιών που βρήκαμε, χαρακτηρίζονται από στατιστική στατικότητα (stationarity, βλ. Kantz & Schreiber 1997), αντίθετα από τις τροχιές που διαφεύγουν. Το γεγονός αυτό φαίνεται και στα αποτελέσματα των Milani et al. (1997), οι οποίοι υπολόγισαν τα ελεύθερα στοιχεία της τροχιάς ευσταθώς χαοτικών αστεροειδών σε διάφορα χρονικά 'παράθυρα' και την αντίστοιχη διασπορά τιμών, παρατηρώντας ότι η διάχυση είναι σχεδόν μηδενική. Το γεγονός αυτό σίγουρα δεν είναι αναμενόμενο για μια τυπική χαοτική τροχιά.

Ένα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην ανάλυση χρονοσειρών, με σκοπό το διαχωρισμό ανάμεσα σε περιοδικά και 'τυχαία' σήματα, είναι ο υπολογισμός της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (autocorrelation function). Για μία διακριτή χρονοσειρά X_i χρονικού 'μήκους' N σημείων, η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης υπολογίζεται μέσω του τύπου (Tsonis 1990)

$$r(k) = \frac{\sum_{i=1}^{N-k} X_i X_{i+k} - \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} X_{i+k} \sum_{j=1}^{N-k} X_j}{\left\{ \left[\sum_{i=1}^{N-k} X_i^2 - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{i=1}^{N-k} X_i \right)^2 \right] \cdot \left[\sum_{i=1}^{N-k} X_{i+k}^2 - \frac{1}{N-k} \left(\sum_{i=1}^{N-k} X_{i+k} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}} \quad (3.7)$$

όπου το k ονομάζεται παράμετρος χρονικής υστέρησης (time-lag). Η συνάρτηση $r(k)$ παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$. Αν $|r(k)| = 1$, τότε τα ζεύγη σημείων της X_i που απέχουν k χρονικές μονάδες έχουν πλήρη γραμμική συσχέτιση μεταξύ τους. Αντίθετα, αν $|r(k)| = 0$, οι τιμές των ζευγών που απέχουν k χρονικές μονάδες δε συσχετίζονται γραμμικά. Έτσι, αν η χρονοσειρά X_i είναι ημιπεριοδική συνάρτηση του t , η $r(k)$ είναι και αυτή ημιπεριοδική συνάρτηση του k με τις ίδιες περιοδικότητες και το πλάτος της μεταβάλλεται ανάμεσα στις τιμές -1 και 1 . Αντίθετα, αν η X_i είναι ένα τυχαίο σήμα (θόρυβος), το πλάτος της $r(k)$ φθίνει εκθετικά με το k και προσεγγίζει ασυμπτωτικά το μηδέν. Ο χρόνος που απαιτείται ώστε το πλάτος της $r(k)$ να μειωθεί κάτω από την τιμή $1/e \approx 0.368$ (χωρίς να αυξηθεί ξανά)



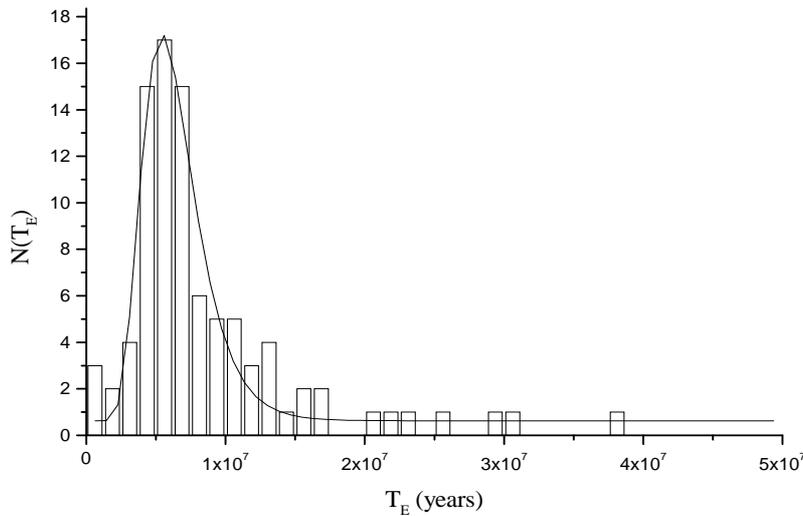
Σχήμα 3.11: Ο αριθμός των σωματιδίων που παραμένουν στη ζώνη, $N(t)$, συναρτήσει του χρόνου, για την G2 ($t = 50 \cdot 10^6$ χρόνια) στο μοντέλο (4Π). Οι δύο συνεχείς καμπύλες αντιστοιχούν στους δύο νόμους εκθετικής μείωσης (βλ. κείμενο).

ονομάζεται χρόνος αυτοσυσχέτισης (autocorrelation time, τ_C) της X_i . Αν η X_i παριστάνει τη χρονική εξέλιξη μιας συνάρτησης των κανονικών μεταβλητών και οι αρχικές συνθήκες αντιστοιχούν σε χαοτική τροχιά, η συμπεριφορά της $r(k)$ αναμένουμε να μοιάζει με αυτήν του θορύβου και ο χρόνος αυτοσυσχέτισης να έχει τιμή παραπλήσια με αυτήν του T_L .

Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των τριών 'δράσεων' Delaunay⁵ ($L = \sqrt{\mu_1 a}$, $G = L(1 - e^2)$ και $H = G \cos i$) υπολογίστηκαν για όλες τις τροχιές του G2. Επιλέξαμε το μήκος κάθε χρονοσειράς να αντιστοιχεί στα πρώτα $3 \cdot 10^6$ χρόνια της αριθμητικής ολοκλήρωσης στο μοντέλο (4Π). Ο λόγος είναι ότι μετά από αυτό το χρονικό διάστημα ο αριθμός των σωματιδίων που παραμένουν στη ζώνη αρχίζει να μειώνεται. Δεδομένης της μικρής μεταβολής της κλίσης, i , αυτών των τροχιών, τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ταυτόσημα για τις δύο 'αιώνιες' δράσεις (G και H). Τα αποτελέσματα μπορούν να συνοψισθούν ως εξής:

- (α) Για τροχιές που εμφανίζονται ως ημιπεριοδικές, και οι τρεις συναρτήσεις $r_I(k)$ (όπου $I = L, G$ ή H) είναι σχεδόν ημιπεριοδικές συναρτήσεις του k και το πλάτος τους μεταβάλλεται ανάμεσα στις οριακές τιμές -1 και 1 .
- (β) Για τροχιές που εν τέλει διαφεύγουν, το πλάτος και των τριών συναρτήσεων $r_I(k)$ φθίνει εκθετικά με το χρόνο και

⁵Τα στοιχεία του Delaunay δεν αποτελούν φυσικά δράσεις (=σταθερές) για το μη ολοκληρώσιμο πρόβλημα των N σωμάτων, αλλά μόνο για το ολοκληρώσιμο τμήμα της συνάρτησης Hamilton που αντιστοιχεί στο πρόβλημα των δύο σωμάτων.



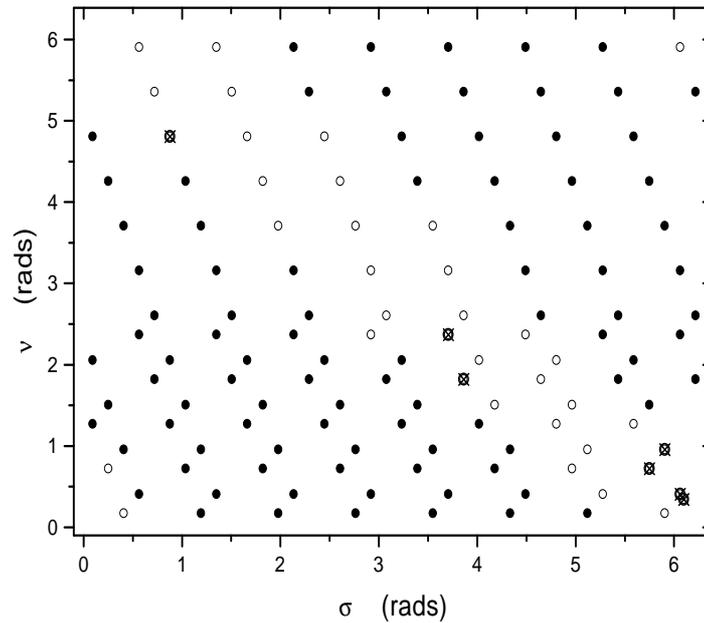
Σχήμα 3.12: Ιστόγραμμα των χρόνων διαφυγής της G2, στο μοντέλο (4Π). Ο μέσος χρόνος διαφυγής είναι τώρα $\langle T_E \rangle \simeq 5.5 \cdot 10^6$ χρόνια. Η συνεχής καμπύλη είναι η προσαρμοζόμενη κατανομή log-normal.

- (γ) Οι ευσταθώς χαοτικές τροχιές εμφανίζουν μία παράδοξη συμπεριφορά: το πλάτος της $r_L(k)$ φθίνει όντως εκθετικά με το χρόνο, ενώ οι υπόλοιπες δύο συναρτήσεις $r_I(k)$ ($I = G, H$) μοιάζουν να είναι σχεδόν ημιπεριοδικές συναρτήσεις του k .

Η ποιοτικά διαφορετική συμπεριφορά των $r_I(k)$ για ευσταθώς χαοτικές τροχιές, σε σχέση με τις τροχιές που τελικά διαφεύγουν, είναι ένα στοιχείο της μορφολογίας του ευσταθούς χάους που δεν είχε γίνει αντιληπτό αρχικά. Το αν η συμπεριφορά αυτή είναι κοινή για όλους τους ευσταθώς χαοτικούς αστεροειδείς της κύριας ζώνης ή είναι κάτι που εμφανίζεται μόνο στην περιοχή του (522) Helga θα μελετηθεί στο επόμενο κεφάλαιο (4).

3.3 Συμπεράσματα

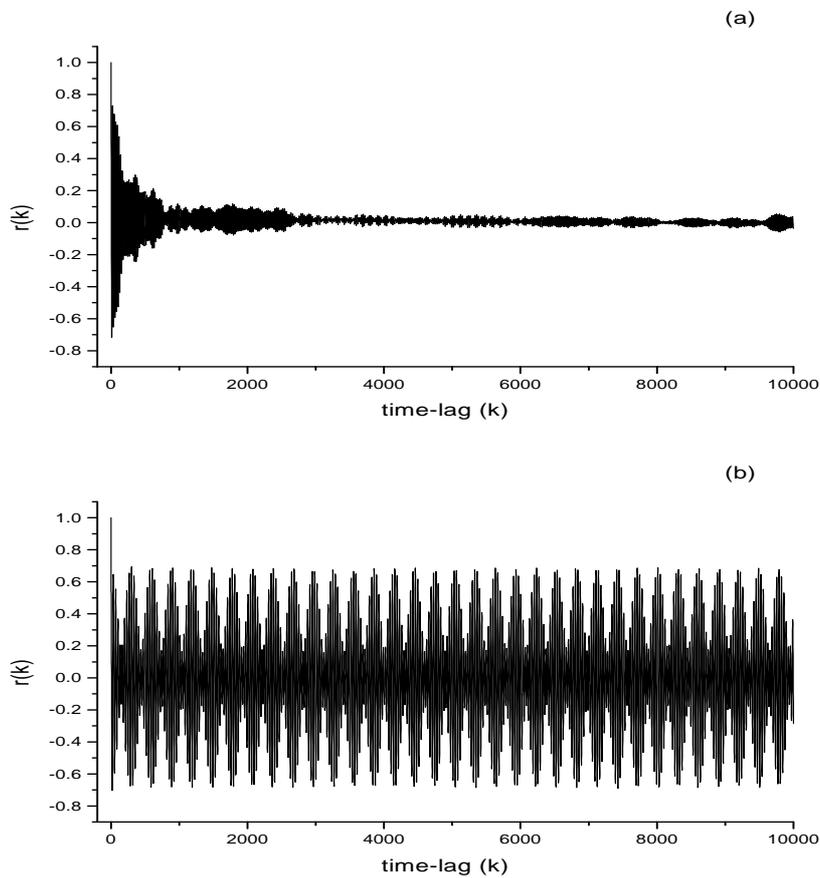
Τα αποτελέσματα της αριθμητικής μελέτης, τόσο της τροχιάς του (522) Helga όσο και αυτών που αντιστοιχούν σε γειτονικές αρχικές συνθήκες, συμφωνούν εν μέρει με τα αποτελέσματα των Murison et al. (1994) και εν μέρει με αυτά των Murray & Holman (1997). Συγκεκριμένα, βρήκαμε ότι τα περισσότερα σωματίδια που ξεκινούν σε τροχιές χαμηλής εκκεντρότητας στη γειτονιά του συντονισμού 12/7 διαφεύγουν σε χρόνους της τάξης των 10^7 ετών. Έτσι, παρότι ο στατιστικός νόμος των Lecar et al. (1992) δεν ισχύει, η υπόθεση των Murison et al. (1994) ότι ο (522) Helga είναι ό,τι απέμεινε από μια αρκετά μεγαλύτερη κατανομή αστεροειδών, η μεγάλη πλειοψηφία των οποίων ήδη έχει διαφύγει από τη ζώνη, μπορεί όντως να ευσταθεί.



Σχήμα 3.13: Οι αρχικές συνθήκες της G2 (μοντέλο 4Π) στο επίπεδο (σ, ν) . Τα διαφορετικά σύμβολα παριστάνουν τις ίδιες κατηγορίες τροχιών όπως και στο Σχ. 3.6.

Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα του αναλυτικού μοντέλου των Murray & Holman (1997), οι οποίοι υποστηρίζουν ότι ο μέσος χρόνος διαφυγής από την συγκεκριμένη περιοχή του χώρου των φάσεων είναι της τάξης των 10^9 ετών. Βέβαια και στη δική μας προσομοίωση ένα μεγάλο ποσοστό των τροχιών που ολοκληρώσαμε δεν οδηγεί σε διαφυγή μέσα στα $50 \cdot 10^6$ χρόνια.

Το κλειδί για την κατανόηση των προαναφερθέντων αντικρουόμενων αποτελεσμάτων είναι η σχέση μεταξύ του χρόνου διαφυγής των τροχιών και της αρχικής τιμής του ορίσματος $\varpi - \varpi'$. Όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, τροχιές που ξεκινούν με τις ίδιες αρχικές τιμές των δράσεων, αλλά διαφορετικές τιμές γωνιών, οδηγούνται σε δραστικά διαφορετική εξέλιξη. Για $-\pi/3 \leq (\varpi - \varpi')_0 \leq \pi/3$ ο χρόνος διαφυγής είναι πολύ μεγαλύτερος από $50 \cdot 10^6$ χρόνια, ενώ για το υπόλοιπο διάστημα τιμών του $(\varpi - \varpi')_0$ ο χρόνος διαφυγής είναι της τάξης των 10^7 ετών. Όταν $-\pi/3 \leq (\varpi - \varpi')_0 \leq \pi/3$, η τιμή $e_0 \approx 0.08$ αντιστοιχεί στο μέγιστο της στιγμιαίας εκκεντρότητας και η τιμή της ελεύθερης εκκεντρότητας είναι της τάξης του $e_p = 0.05$. Για τις τροχιές αυτές το μήκος του περιηλίου (ως προς αυτό του Δία) είτε λικνίζεται συνεχώς είτε μόλις που καταφέρνει να περιστρέφεται. Για τις τροχιές που διαφεύγουν, αντίθετα, η τιμή $e = 0.08$ αντιστοιχεί στο ελάχιστο της στιγμιαίας εκκεντρότητας



Σχήμα 3.14: Εξέλιξη της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης $r(k)$ της χρονοσειράς του $G = L\sqrt{1 - e^2}$. Για σωματίδια που διαφεύγουν (πάνω) παρατηρείται εκθετική μείωση του πλάτους της $r(k)$. Αντίθετα για την τροχιά του (522) Helga (κάτω) η $r(k)$ είναι σχεδόν ημιπεριοδική συνάρτηση του χρόνου (k).

και η τιμή της ελεύθερης εκκεντρότητας είναι μεγαλύτερη του $e_p = 0.1$. Αντίστοιχα το μήκος του περιηλίου περιστρέφεται συνεχώς. Έτσι, σε συμφωνία με το μοντέλο των Murray & Holman (1997), τροχιές με μικρές τιμές του e_p έχουν χρόνο διαφυγής πολύ μεγαλύτερο των $50 \cdot 10^6$ ετών, ενώ τροχιές με $e_p > 0.1$ έχουν χρόνο διαφυγής $T_E \approx 10^7$ χρόνια. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε δύο βασικές διαφορές των αποτελεσμάτων μας από αυτά των Murray & Holman (1997). Το πρώτο είναι ότι η ύπαρξη ημιπεριοδικών τροχιών, που τα αποτελέσματά μας υποστηρίζουν, έρχεται σε αντίθεση με τις προσεγγίσεις των Murray & Holman (1997), οι οποίοι υποθέτουν πλήρη επικάλυψη των υποσυντονισμών. Ακόμη, οι παρατηρούμενες τιμές του T_E δε φαίνεται να καλύπτουν ολόκληρο το φάσμα ανάμεσα σε 10^7 και 10^9 χρόνια για τις διάφορες τιμές της e_p , όπως προβλέπει η θεωρία των Murray & Holman (1997). Αντίθετα για $e_p \approx 0.06$, που αντιστοιχεί σε $(\varpi - \varpi')_0 = \pm\pi/3$, εμφανίζεται μία απότομη αύξηση της τιμής του T_E κατά δύο τάξεις μεγέθους.

Η περιγραφή της εξέλιξης των στοιχείων της τροχιάς e και ϖ φαίνεται να υποστηρίζει την ερμηνεία των Milani & Nobili (1992) για το φαινόμενο του ευσταθούς χάους, την ύπαρξη δηλαδή ενός αιώνιου μηχανισμού προστασίας. Όμως, η παρατήρησή τους ότι ο μηχανισμός προστασίας δεν σχετίζεται με τον συντονισμό $12/7$ δεν είναι αληθής. Η μελέτη των περιοδικών τροχιών στη γειτονιά του συντονισμού έδειξε ότι, όταν η τροχιά του Δία θεωρηθεί ελλειπτική, περιοδικές τροχιές με λόγο συντονισμού $12/7$ δεν υπάρχουν. Κατά συνέπεια το διάγραμμα $(h, k) = (e \cos \phi, e \sin \phi)$, δε διαμερίζεται σε τρεις, τοπολογικά διαφορετικές, περιοχές κίνησης του $\phi = \varpi - \varpi'$. Αντίθετα μόνο δύο τύποι κίνησης του ϕ είναι δυνατοί: λίκνιση και περιστροφή. Η εικόνα του επιπέδου (h, k) , για μικρές τιμές εκκεντρότητας, μοιάζει με αυτήν που προβλέπει η γραμμική θεωρία αιώνιας κίνησης, με εξαίρεση στενούς δακτυλίου χαοτικής κίνησης που, κατά κανόνα, δεν επικοινωνούν μεταξύ τους (βλ. Κεφάλαιο 2). Επομένως, φαινομενολογικά, η εικόνα που περιέγραψαν οι Milani & Nobili (1992) είναι σωστή, η φύση όμως του μηχανισμού είναι απόλυτα συνδεδεμένη με τον εν λόγω συντονισμό μέσης κίνησης. Εξάλλου, όπως θα δείξουμε στο Κεφάλαιο 5, αν ο μηχανισμός προστασίας δεν σχετιζόταν με τον συντονισμό μέσης κίνησης, τότε οι συντονισμοί $5/3$ και $7/4$ που βρίσκονται εκατέρωθεν του $12/7$ θα μπορούσαν να έχουν συντηρήσει κάποιους αστεροειδείς στη δική τους ζώνη λίκνισης. Αυτό δεν συμβαίνει, γιατί και οι δύο αυτοί συντονισμοί έχουν περιοδικές τροχιές. Κατά συνέπεια η εξέλιξη της τροχιάς ενός αστεροειδούς σε αυτούς τους δύο συντονισμούς είναι πολύ διαφορετική απ' ό,τι στον συντονισμό $12/7$.

Η πιθανή ταυτοποίηση του φαινομένου του ευσταθούς χάους με το γνωστό φαινόμενο της 'προσκολλητικότητας' των χαοτικών τροχιών στη γειτονιά των ευσταθών περιοχών του χώρου των φάσεων προσκρούει σε αντιφατικές παρατηρήσεις. Η ύπαρξη ευσταθών ημιπεριοδικών τροχιών στον συντονισμό $12/7$ φαίνεται να υποστηρίζεται από τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων που παρουσιάσαμε. Επίσης το γεγονός ότι οι ευσταθώς χαοτικές τροχιές που εντοπίσαμε στα πειράματά μας συγκεντρώνονται στα σύνορα μεταξύ των ασταθών τροχιών που διαφεύγουν και των ημιπεριοδικών τροχιών, είναι μια ισχυρή ένδειξη για την προσκολλητικότητα των ευσταθώς χαοτικών τροχιών. Όμως, παρά τη σχεδόν ημιπεριοδική μεταβολή των στοιχείων μιας ευσταθώς χαοτικής τροχιάς, όπως αυτή φαίνεται και από τη μακροχρόνια διατήρηση των γραμμικών συσχετίσεων στις χρονοσειρές των δράσεων Delaunay, η εμφανώς χαοτική συμπεριφορά της κρίσιμης γωνίας του συντονισμού $\theta = 7\lambda - 12\lambda'$ έρχεται σε άμεση

αντίθεση με την υπόθεση της προσκολλητικής χαοτικής τροχιάς. Θα περίμενε κανείς ότι η γωνία του συντονισμού θα έπρεπε να χαρακτηρίζεται επίσης από διαρκή περιστροφή, με μικρές μεταβολές της συχνότητας περιστροφής που δύσκολα θα μπορούσαν να διακριθούν. Έτσι, με μια πρώτη ανάγνωση των αποτελεσμάτων μας, φαίνεται ότι το σενάριο της προσκολλητικότητας θα πρέπει να εγκαταλειφθεί. Όπως θα δούμε όμως στο επόμενο Κεφάλαιο, τα αποτελέσματά μας είναι συμβατά με την υπόθεση της προσκολλητικότητας, αρκεί κανείς να επεκτείνει την έννοια αυτή κατάλληλα για εκφυλισμένα συστήματα με περισσότερους από δύο βαθμούς ελευθερίας.

Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες A3 και B2, που αναφέρονται στο Παράρτημα Γ (Βιογραφικό Σημείωμα).

