

Κεφάλαιο 4

Ευσταθές Χάος στην Εσωτερική Ζώνη

Η ερμηνεία, που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για το φαινόμενο του ευσταθούς χάους, βασίστηκε στα αποτελέσματά μας για τη μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών με λόγο συντονισμού 12/7 στο (ΕΠ). Βέβαια θα πρέπει να παραδεχτούμε ότι η ερμηνεία μας έχει ουσιαστικές ομοιότητες με αυτήν των Milani & Nobili (1992), καθώς και οι δύο αναφέρονται στη συμπεριφορά των μεταβλητών e και ω με αναφορά στην ισχύ της γραμμικής αιώνιας θεωρίας έναντι της συντονισμένης κίνησης. Από αυτήν την άποψη η διαφορά μεταξύ των δύο ερμηνειών ίσως να μη φαίνεται και τόσο σημαντική. Όμως μια θεωρία για την ευσταθώς χαοτική κίνηση θα πρέπει να εξηγήει το φαινόμενο σε όποιες περιοχές του χώρου των φάσεων κι αν εμφανίζεται, αρκεί να μιλάμε για ίδιας φύσεως δυναμικό μηχανισμό. Οι Milani et al. (1997) έδειξαν ότι αρκετοί αστεροειδείς της εσωτερικής κύριας ζώνης εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά. Η απουσία του 'αιώνιου μηχανισμού', τον οποίο επικαλέστηκαν για την εξήγηση της συμπεριφοράς του (522)-Helga, τους οδήγησε στο να αναθεωρήσουν τις απόψεις τους. Έτσι, στην εν λόγω δημοσίευση, επικαλούνται πολύ υψηλής τάξης (και άρα πολύ ασθενείς) συντονισμούς μέσης κίνησης, στους οποίους ο αστεροειδής 'μπαινοβγαίνει' με σταθερό ρυθμό, αν η τροχιά του Δία μεταβάλλεται υπό την επίδραση των υπόλοιπων πλανητών. Το γενικό τους συμπέρασμα επομένως είναι ότι το ευσταθές χάος είναι ένα φαινόμενο που δεν μπορεί να εξηγηθεί με μια γενική θεωρία κίνησης αλλά, ως ένα καθαρά τοπικό φαινόμενο, θα πρέπει να προσπαθούμε να το εξηγήσουμε μελετώντας κάθε φορά τη λεπτομερή δομή της συγκεκριμένης περιοχής του χώρου των φάσεων.

Αν και η τελευταία παρατήρηση των Milani et al. (1997), ότι δηλαδή η μελέτη της ευσταθώς χαοτικής κίνησης εκάστου σώματος απαιτεί λεπτομερή ανάλυση της δομής του χώρου των φάσεων, είναι σωστή, θα δείξουμε ότι το φαινόμενο του ευσταθούς χάους έχει κοινή προέλευση, και άρα κοινή ερμηνεία, τόσο στην εσωτερική όσο και στην εξωτερική ζώνη των αστεροειδών. Αυτό συμβαίνει βέβαια αν ο μηχανισμός που ευθύνεται για το χάος είναι ίδιος. Συγκεκριμένα αναφερόμαστε στους απλούς συντονισμούς μέσης κίνησης με το Δία. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την κίνηση τεσσάρων ακόμη πραγματικών αστεροειδών των οποίων οι τροχιές εμφανίζουν τα ίδια χαρακτηριστικά με αυτήν του (522)-Helga, όπως έδειξε

Πίνακας 4.1: Οι ευσταθώς χαοτικοί αστεροειδείς της εσωτερικής ζώνης

Αστεροειδής	Συντονισμός	T_L (έτη, Sidlichovsky 1999)
(50)-Virginia	11/4	12,000
(2)-Pallas	18/7	23,000
(33)-Polyhymnia	22/9	14,000
(86)-Semele	13/6	6,000

ο Šidlichovský (1999). Θα δείξουμε ότι οι αντίστοιχοι συντονισμοί μέσης κίνησης έχουν το ίδιο 'τοπολογικό ελάττωμα' με τον συντονισμό 12/7, καθώς επίσης και ότι η συμπεριφορά των χρονοσειρών των δράσεων Delaunay είναι η ίδια με αυτήν που παρατηρήσαμε για την τροχιά του (522)-Helga.

4.1 Άλλες Περιπτώσεις Ευσταθούς Χάους

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει, η χαοτική κίνηση φαίνεται να είναι ο κανόνας για τους αστεροειδείς, και όχι η εξαίρεση, σε μοντέλα του Ηλιακού Συστήματος πιο ρεαλιστικά από το (ΚΠ). Αυτό έδειξαν και τα αριθμητικά πειράματα του Šidlichovský (1999), ο οποίος μελέτησε την κίνηση των πρώτων 100 αριθμημένων αστεροειδών, στο πλαίσιο τόσο του μοντέλου (4Π) όσο και ενός πλήρους Νευτώνειου βαρυτικού μοντέλου του Ηλιακού Συστήματος (Ήλιος και 9 πλανήτες). Τα αποτελέσματά του έδειξαν ότι η πλειοψηφία αυτών των 100 σωμάτων ακολουθεί χαοτικές τροχιές. Μάλιστα 20 από αυτά ακολουθούν τροχιές με $T_L < 32,000$ χρόνια. Οι περισσότεροι από αυτούς τους 20 αστεροειδείς φαίνεται να βρίσκονται σε κάποιον τριπλό συντονισμό μέσης κίνησης (Δίας-Κρόνος-αστεροειδής), ενώ τέσσερις από αυτούς βρίσκονται σε κάποιον απλό συντονισμό μέσης κίνησης με το Δία. Αυτά ακριβώς τα τέσσερα σώματα θα μας απασχολήσουν στις επόμενες παραγράφους, καθώς είναι πιθανόν να έχουν παρόμοια συμπεριφορά με τον (522)-Helga. Στη μελέτη αυτή θα μπορούσαμε να είχαμε συμπεριλάβει και τον αστεροειδή (490)-Veritas που, όπως έδειξαν οι Milani et al. (1997), ακολουθεί χαοτική κίνηση. Όμως ο μηχανισμός που κυρίως ευθύνεται για τη χαοτική τροχιά του (490)-Veritas δεν είναι ο συντονισμός 21/10 με το Δία, όπως ισχυρίστηκαν οι Milani et al., αλλά ο τριπλός συντονισμός μέσης κίνησης 5-2-2 (Nesvorný & Morbidelli 1998a), όπως φάνηκε από τη μελέτη της χρονικής εξέλιξης των αντίστοιχων κρίσιμων γωνιών.

Στον Πίνακα 4.1 δίνονται μερικά στοιχεία για τις τροχιές των αστεροειδών (2)-Pallas, (33)-Polyhymnia, (50)-Virginia και (86)-Semele, η κίνηση των οποίων γίνεται υπό την επίδραση των συντονισμών 18/7, 22/9, 11/4 και 13/6 αντίστοιχα. Η τάξη των συντονισμών είναι αρκετά υψηλή (από $q = 7$ μέχρι $q = 13$) και οι αντίστοιχες βραχυχρόνιες μεταβολές των στοιχείων της τροχιάς τους αναμένονται δυσδιάκριτες. Το μακροχρόνιο όμως αποτέλεσμα της χαοτικής κίνησης είναι αυτό που μας απασχολεί, δεδομένης της ηλικίας του Ηλιακού Συστήματος ($T_{SS} = 4.5 \cdot 10^9$ χρόνια). Όπως παρουσιάσαμε και κατά τη μελέτη της κίνησης του (522)-Helga, η δράση των συντονισμών μπορεί να αναγνωριστεί από τη γραφική παράσταση

της χρονικής εξέλιξης της κρίσιμης γωνίας του συντονισμού, $\sigma \approx p\lambda - (p+q)\lambda'$. Σημειώνουμε ότι (βλ. Κεφάλαιο 2) ένας συντονισμός τάξης q χαρακτηρίζεται από τουλάχιστον $q+1$ κρίσιμες γωνίες (για τροχίες συνεπίπεδες με του Δία), όταν η τροχιά του Δία θεωρείται ελλειπτική. Αν η συμπεριφορά κάποιας κρίσιμης γωνίας χαρακτηρίζεται από εναλλαγές περιόδων λίκνισης και περιστροφής, τότε η κίνηση είναι χαοτική και ο αντίστοιχος υποσυντονισμός φέρει (τουλάχιστον κατά ένα μέρος) την ευθύνη για την εμφάνιση του χάους.

Η στρατηγική μας για τη μελέτη της κίνησης στην περιοχή των σωμάτων αυτών ήταν η ίδια όπως και στη μελέτη του (522)-Helga. Αρχικά ολοκληρώσαμε αριθμητικά τις τροχίες τους, με σκοπό να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα του Šidlichovský (1999). Η ολοκλήρωση έγινε τόσο στο μοντέλο (3ΕΠ) όσο και στο μοντέλο (4Π). Στη συνέχεια εξετάσαμε την ύπαρξη περιοδικών τροχιών στους αντίστοιχους συντονισμούς του (ΚΠ) και την πιθανή συνέχισή τους στο (3ΚΠ) και το (ΕΠ). Τέλος, προσομοιώσαμε, μέσω αριθμητικής ολοκλήρωσης, τη μακροχρόνια εξέλιξη των τροχιών μιας κατανομής υποθετικών σωμάτων, τόσο στο μοντέλο (3ΕΠ) όσο και στο (4Π), με σκοπό να μελετήσουμε τη μακροχρόνια σταθερότητα των στοιχείων της τροχιάς, για σώματα που κινούνται στη γειτονιά αυτών των συντονισμών μέσης κίνησης.

4.2 Αριθμητική Ολοκλήρωση των Πραγματικών Σωμάτων

Ξεκινώντας τα πειράματά μας ολοκληρώσαμε αριθμητικά τις τροχίες των τεσσάρων αστεροειδών για $t = 10^6$ χρόνια, με σκοπό να επιβεβαιώσουμε τα αποτελέσματα του Šidlichovský (1999), στο μοντέλο (4Π). Βρήκαμε ότι οι τροχίες τους είναι όντως χαοτικές με χρόνους Lyapunov μεταξύ 5,000 και 20,000 ετών. Ελέγξαμε την συμπεριφορά των αντίστοιχων κρίσιμων γωνιών κάθε συντονισμού και τα αποτελέσματά μας είναι επίσης σε συμφωνία με αυτά του Šidlichovský (1999). Επαναλάβουμε τους ίδιους υπολογισμούς και στο μοντέλο (3ΕΠ). Οι τροχίες των (2)-Pallas, (50)-Virginia και (86)-Semele εμφανίζονται παρόμοιες με προηγούμενως, καθώς η τιμή του T_L δεν μεταβάλλεται σημαντικά και οι αντίστοιχες κρίσιμες γωνίες συνεχίζουν να συμπεριφέρονται με τον ίδιο, χαοτικό, τρόπο. Αντίθετα ο αστεροειδής (33)-Polyhymnia βρέθηκε εκτός του συντονισμού 22/9. Συνεχίζοντας την ολοκλήρωση της τροχιάς του για $t = 10^7$ χρόνια, διαπιστώσαμε ότι η τιμή του εκθέτη Lyapunov έτεινε συνεχώς προς το μηδέν, ενώ και οι κρίσιμες γωνίες του συντονισμού εκτελούσαν ταχεία περιστροφή. Πρέπει να τονιστεί ότι η χρονική εξέλιξη της τροχιάς των δοκιμαστικών σωματιδίων, στα πλαίσια ενός τόσο απλοποιημένου μοντέλου κίνησης, δεν μπορεί να αντιστοιχεί σε αυτήν των πραγματικών σωμάτων.

Προκειμένου να παρατηρήσουμε αξιοσημείωτες μεταβολές των στοιχείων της τροχιάς αυτών των σωμάτων απαιτείται πολύ μεγάλος χρόνος ολοκλήρωσης. Αυτό έγινε αντιληπτό μετά από την αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς τους, τόσο στο πλαίσιο του (3ΕΠ) όσο και του (4Π), για $t \approx 1.2 \cdot 10^9$ χρόνια (ή $10^8 T'$, όπου $T' \approx 12$ χρόνια η περίοδος περιφοράς του Δία). Η σταθερότητα της τροχιάς μπορεί να εκφραστεί ποσοτικά από το πλάτος μεταβολής των ελεύθερων τιμών των στοιχείων της τροχιάς, ή άλλων μεταβλητών που ορίζονται με παραπλήσιο τρόπο, π.χ. οι μέσες τιμές των στοιχείων της τροχιάς που προκύπτουν με απαλοιφή των γνωστών αιώνιων περιοδικών μεταβολών. Μια απλή μέθοδος υπολογισμού τέτοιων μετα-

Πίνακας 4.2: Ελεύθερα Στοιχεία της Τροχιάς των τεσσάρων πραγματικών αστεροειδών

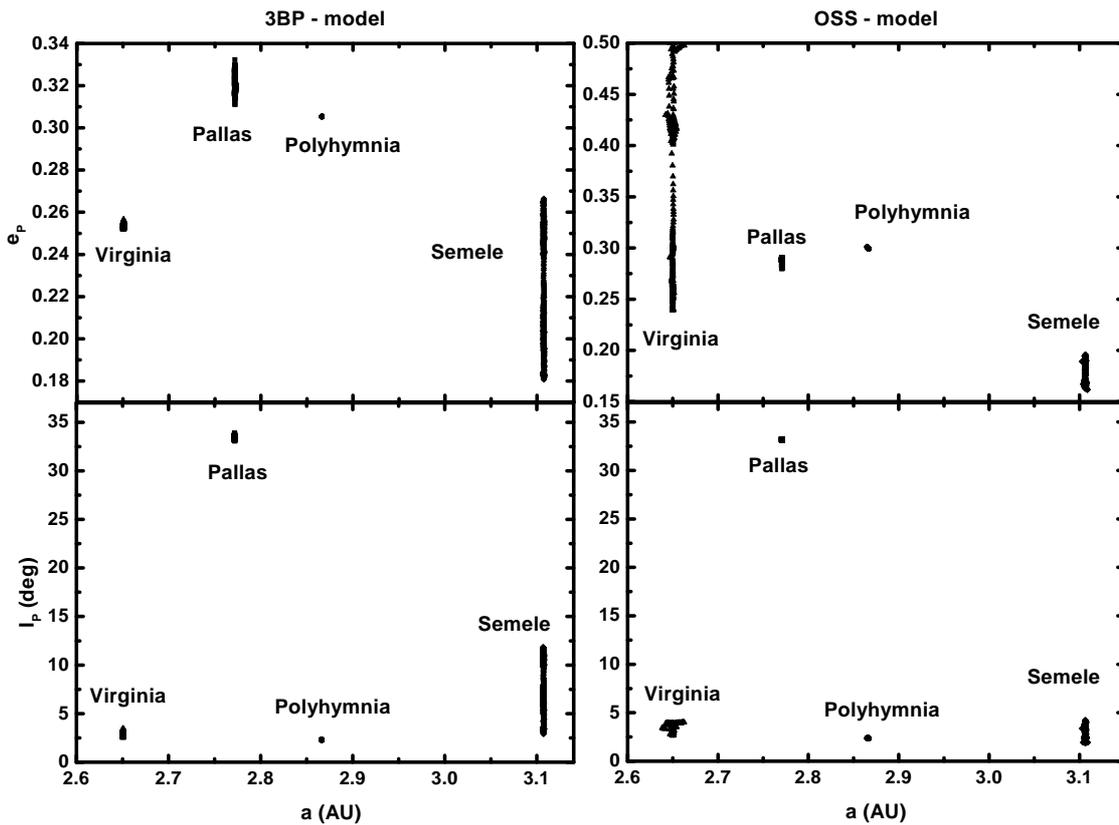
Μοντέλο (3ΕΠ)			
Αστεροειδής	$a_P \pm \sigma(a)$	$e_P \pm \sigma(e)$	$\sin(I_P) \pm \sigma(\sin I)$
Virginia	2.6506 ± 0.0001	0.2540 ± 0.0010	0.0522 ± 0.0042
Pallas	2.7718 ± 0.0003	0.3198 ± 0.0036	0.5497 ± 0.0016
Polyhymnia	2.8664 ± 0.0000	0.3053 ± 0.0000	0.0399 ± 0.0003
Semele	3.1072 ± 0.0003	0.2173 ± 0.0275	0.1288 ± 0.0491
Μοντέλο (4Π)			
Αστεροειδής	$a_P \pm \sigma(a)$	$e_P \pm \sigma(e)$	$\sin(I_P) \pm \sigma(\sin I)$
Virginia	--	--	--
Pallas	2.7701 ± 0.0003	0.2854 ± 0.0030	0.5475 ± 0.0003
Polyhymnia	2.8662 ± 0.0004	0.2998 ± 0.0005	0.0410 ± 0.0004
Semele	3.1062 ± 0.0009	0.1767 ± 0.0101	0.0490 ± 0.0108

βλητών είναι και αυτή του κινούμενου μέσου όρου (βλ. επίσης Morbidelli & Nesvorný 1999), που ορίζεται από τη σχέση

$$X_P(t_i) = \frac{1}{N} \sum_{j=i-N/2}^{i+N/2} X(t_j) \quad (4.1)$$

όπου $X(t)$ η χρονοσειρά οποιουδήποτε στιγμιαίου στοιχείου της τροχιάς (a , e ή i), N ο συνολικός αριθμός σημείων του χρονικού παραθύρου που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του μέσου όρου και $X_P(t_i)$ η ελεύθερη τιμή του στοιχείου (free element) που αντιστοιχούμε στη χρονική στιγμή t_i . Ο υπολογισμός του μέσου όρου επαναλαμβάνεται, μετακινώντας κάθε φορά την αρχή του χρονικού παραθύρου κατά 10^5 χρόνια. Έτσι κατασκευάζουμε μία νέα χρονοσειρά με τις ελεύθερες τιμές του στοιχείου X . Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στα στοιχεία αυτά ως ελεύθερα στοιχεία της τροχιάς, έχοντας όμως στη σκέψη μας ότι δεν αντιστοιχούν στον ακριβή θεωρητικό ορισμό των ελεύθερων στοιχείων (βλ. Κεφάλαιο 2). Αν η τροχιά είναι τακτική και το εύρος του παραθύρου αρκετά μεγάλο, ώστε να αντιστοιχεί σε χρονικό διάστημα τουλάχιστον διπλάσιο της μεγαλύτερης βασικής περιόδου, η συνάρτηση $X_P(t)$ έχει σταθερή τιμή. Φυσικά πάντα θα εμφανίζεται μια μικρή διασπορά τιμών, λόγω της περιορισμένης ακρίβειας των αριθμητικών μεθόδων. Στους υπολογισμούς μας το εύρος του παραθύρου ήταν $12 \cdot 10^6$ χρόνια ($10^6 T'$), τιμή υπερδιπλάσια της μεγαλύτερης βασικής περιόδου του Ηλιακού Συστήματος¹. Η σταθερότητα των μεταβλητών a_P , e_P και i_P για τις τροχιές των τεσσάρων υπό μελέτη αστεροειδών φαίνεται στην προβολή των διαδοχικών σημείων της αντίστοιχης χρονοσειράς στα επίπεδα (a_P, e_P) και (a_P, i_P) (Σχ. 4.1). Οι μέσες τιμές των X_P και οι αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις δίνονται στον Πίνακα 4.2.

¹ $P_{\max} = 1/s_8 \approx 2 \cdot 10^6$ χρόνια, η μέση τιμή της συχνότητας μετάπτωσης του αναβιβάζοντος συνδέσμου του Ποσειδώνα.



Σχήμα 4.1: Προβολή της χρονοσειράς των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς για τους τέσσερις αστεροειδείς (πάνω) στο επίπεδο (a_P, e_P) και (κάτω) στο επίπεδο (a_P, i_P) . Αριστερά δίνονται τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης στο μοντέλο (3BP), ενώ δεξιά τα αποτελέσματα του (4P). Τα ονόματα των σωμάτων φαίνονται πάνω στα σχήματα.

Στο πλαίσιο του μοντέλου (3BP) τα ελεύθερα στοιχεία της τροχιάς του (33)-Polyhymnia έχουν εξαιρετικά σταθερές τιμές, σε συμφωνία με την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου για κίνηση του σώματος εκτός του πλησιέστερου συντονισμού (22/9). Η τροχιά του (50)-Virginia (στον 11/4) έχει επίσης πολύ σταθερά στοιχεία, με ανεπαίσθητη διάχυση στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων. Η κατάσταση είναι λίγο διαφορετική για την τροχιά του (2)-Pallas, καθώς παρατηρείται διάχυση της εκκεντρότητας για χρόνους μεγαλύτερους από 200 εκατομμύρια χρόνια. Οι μεταβολές του ημιάξονα ($\Delta a \simeq 10^{-3} \text{AU}$) και της κλίσης ($\Delta i \simeq 0^{\circ}.5$) παραμένουν όμως αμελητέες. Η πιο ασταθής τροχιά είναι αυτήν του (86)-Semele (στον 13/6) με μέγιστη μεταβολή εκκεντρότητας $\Delta e \simeq 0.1$ και κλίσης $\Delta i \simeq 8^{\circ}.5$. Σημειώνουμε όμως ότι η αστάθεια εμφανίζεται και πάλι μετά την παρέλευση 200 εκατομμυρίων ετών.

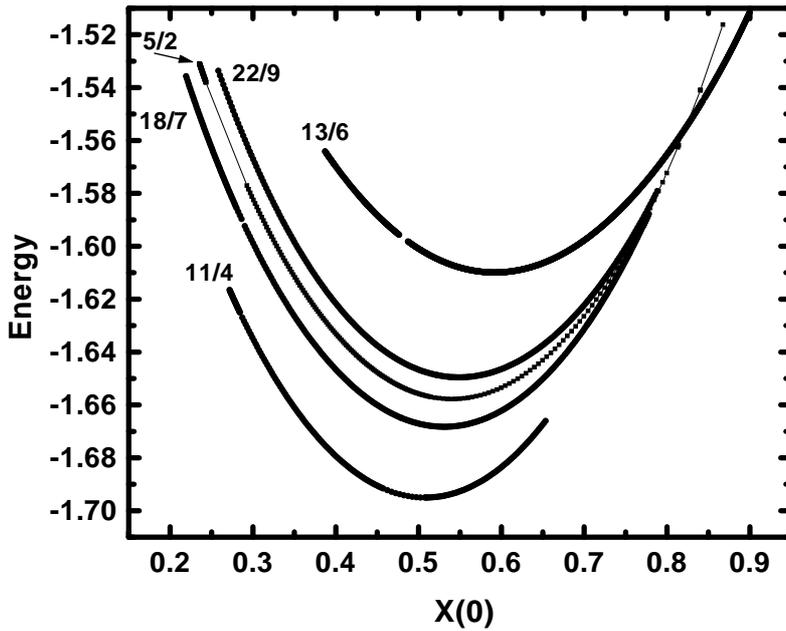
Αν και η χαοτική κίνηση αναμένεται να οδηγήσει, τελικά, σε δραστική μεταβολή των στοιχείων της τροχιάς (διαφυγή), η χρονική κλίμακα που απαιτείται για την παρατήρηση αυτού του φαινομένου δεν φαίνεται να έχει μονότονη σχέση με την τιμή του χαρακτηριστικού

χρόνου Lyapunov. Σε ένα ακόμη πείραμα ο στατιστικός ‘νόμος’ των Lecar et al. (1992) φαίνεται να μην ισχύει. Στη ‘χειρότερη’ των περιπτώσεων (Semele) ο χρόνος που απαιτείται για να παρατηρηθεί μια αξιοσημείωτη μεταβολή των στοιχείων της τροχιάς είναι της τάξης των $10^4 T_L$. Σημειώνουμε ότι οι τροχιές και των τεσσάρων σωμάτων έχουν αρχικά μεγάλες τιμές εκκεντρότητας ($e \sim 0.2$), σε σχέση με τη μέση εκκεντρότητα των σωμάτων της Κύριας Ζώνης. Άρα, χαοτικές τροχιές που ξεκινούν με μικρότερη τιμή εκκεντρότητας σε αυτούς τους συντονισμούς αναμένεται να είναι ακόμη πιο σταθερές. Μάλιστα για τον Semele αυτή η τιμή της εκκεντρότητας καθιστά τον συντονισμό 2/1, που βρίσκεται στην άμεση γειτονιά του 13/6, ως έναν αρκετά σημαντικό παράγοντα επηρεασμού της κίνησης. Είναι πιθανό ο 2/1 να οδηγεί τις παρατηρούμενες μεταβολές εκκεντρότητας.

Στο μοντέλο (4Π) τα αποτελέσματα είναι σχεδόν ταυτόσημα όσον αφορά στους (2)-Pallas και (33)-Polyhymnia, με τις μέσες τιμές των ελεύθερων στοιχείων να είναι λίγο διαφορετικές σε σχέση με αυτές του (3ΕΠ), λόγω των διαφορετικών εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που υφίστανται τα στιγμιαία στοιχεία της τροχιάς στο πλαίσιο του (4Π). Τα στοιχεία της τροχιάς του (2)-Pallas είναι πιο σταθερά από προηγουμένως, γεγονός μάλλον απροσδόκητο. Το ίδιο φαίνεται να συμβαίνει και για τον (86)-Semele, με τις μεταβολές της εκκεντρότητας και της κλίσης να έχουν μέγιστες τιμές $\Delta e \simeq 0.03$ και $\Delta i \simeq 2^0.5$ αντίστοιχα. Η παρατήρηση αυτή δείχνει ότι η αλληλεπίδραση των υποσυντονισμών είναι διαφορετική στο μοντέλο (4Π). Η σημαντικότερη διαφορά βέβαια, σε σχέση με το μοντέλο (3ΕΠ), παρατηρείται στον (50)-Virginia, του οποίου η τροχιά καταλήγει να τέμνει αυτήν του Δία μετά από $750 \cdot 10^6$ χρόνια. Τελικά, ο αστεροειδής πλησιάζει τον Δία σε απόσταση μικρότερη της ακτίνας Hill και εκτοξεύεται σε υπερβολική τροχιά. Κατά την εξέλιξη της τροχιάς του οι μεταβολές του i είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις μεταβολές της εκκεντρότητας. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει και τη φύση του μηχανισμού που καθοδηγεί την κίνηση. Η δράση κάποιου αιώνιου συντονισμού χαμηλής τάξης που σχετίζεται με το ρυθμό μετάθεσης του Ω πρέπει να αποκλειστεί, καθώς αυτό θα οδηγούσε σε μεγάλες μεταβολές του i , κάτι που δεν παρατηρούμε. Το ερώτημα είναι αν ο μηχανισμός που οδηγεί τελικά τον (50)-Virginia στη διαφυγή είναι ο συντονισμός μέσης κίνησης 11/4 (καθώς κανένας ισχυρότερος συντονισμός μέσης κίνησης δεν υπάρχει στη γειτονιά των 2.65AU) ή κάποιος αιώνιος συντονισμός του $\dot{\omega}$.

4.3 Ανάλυση Περιοδικών Τροχιών

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε τις οικογένειες περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) για λόγο συντονισμού n/n' ίσο με 11/4, 18/7, 22/9 και 13/6. Χρησιμοποιούμε και πάλι τη μέθοδο που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2 και εφαρμόσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τη μελέτη του συντονισμού 12/7. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες στο χώρο $x(0) - C$ (όπου $x(0)$ η αρχική συνθήκη και C η τιμή της σταθεράς του Jacobi) των τεσσάρων υπό μελέτη συντονισμών φαίνονται στο Σχ. 4.2. Δίνεται επίσης η χαρακτηριστική καμπύλη του συντονισμού 5/2, ο οποίος θα μας χρησιμεύσει για λόγους σύγκρισης. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, παρατηρούμε την ύπαρξη δύο κλάδων ελλειπτικών περιοδικών τροχιών (του περικέντρου και του αποκέντρου), για κάθε τιμή του λόγου n/n' . Η τιμή της περιόδου κάθε περιοδικής τροχιάς είναι λίγο διαφορετική από την τιμή που αντιστοιχεί στην αδιατάρακτη κίνηση ($\mu = 0$), δηλαδή,

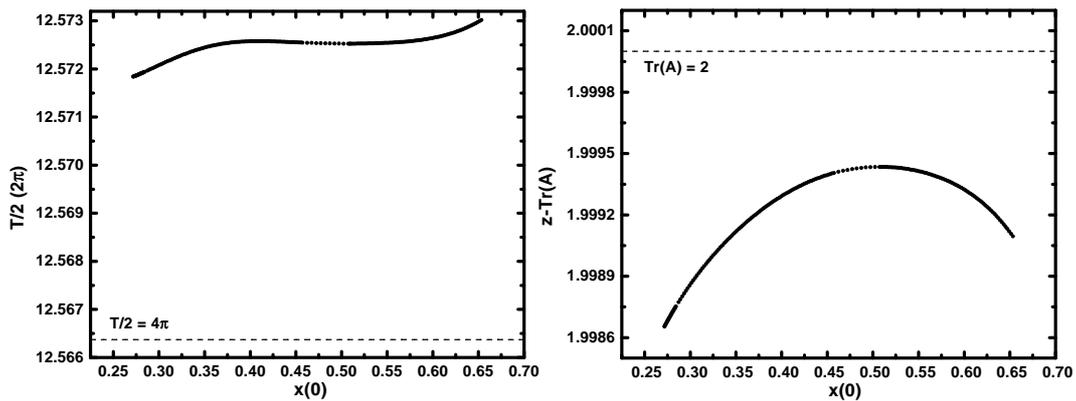


Σχήμα 4.2: Οι χαρακτηριστικές καμπύλες για τις οικογένειες περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) στο επίπεδο $x(0) - C$. Ο λόγος συντονισμού κάθε οικογένειας φαίνεται στο σχήμα.

την τιμή $T = pT' = p2\pi$. Το ερώτημα που τίθεται είναι κατά πόσον είναι δυνατή η συνέχιση της οικογένειας των περιοδικών τροχιών, όταν η τροχιά του αστεροειδούς γίνεται σε τρεις διαστάσεις (μοντέλο 3ΚΠ) ή αν ο Δίας υποθεθεί ότι ακολουθεί ελλειπτική τροχιά (μοντέλο ΕΠ).

Στα Σχ. 4.3-4.7 αναπαρίστανται οι οικογένειες των περιοδικών τροχιών του προηγούμενου σχήματος (i) στο επίπεδο $x(0) - T/2$, όπου $T/2$ η ημιπερίοδος της περιοδικής τροχιάς και (ii) στο επίπεδο $x(0) - \text{tr}(A)$, όπου $\text{tr}(A)$ το ίχνος του μονόδρομου πίνακα για το γραμμικοποιημένο σύστημα εξισώσεων του (3ΚΠ). Είναι εμφανές ότι, όσον αφορά στους τέσσερις υπό μελέτη συντονισμούς (Σχ. 4.3-4.6), δεν υπάρχει διακλάδωση της οικογένειας των περιοδικών τροχιών στο (ΕΠ), αφού καμιά περιοδική τροχιά δεν έχει περίοδο ίση με την αδιατάρακτη τιμή $T = p2\pi$. Επίσης, δεν υπάρχει διακλάδωση ούτε κατά την z -διάσταση, αφού καμιά περιοδική τροχιά δεν έχει κρίσιμη κατακόρυφη ευστάθεια ($\text{tr}(A) = \pm 2$). Αντίθετα, στον συντονισμό $5/2$ (Σχ. 4.7) υπάρχουν δύο σημεία διακλάδωσης για το (ΕΠ), χωρίς πάλι να υπάρχουν τριδιάστατες περιοδικές τροχιές. Έτσι, είναι φανερό ότι η κίνηση στη γειτονιά των συντονισμών $11/4$, $18/7$, $22/9$ και $13/6$ έχει κοινά χαρακτηριστικά με την κίνηση στη γειτονιά του συντονισμού $12/7$. Συγκεκριμένα το επίπεδο (h, k) έχει το ίδιο τοπολογικό 'ελάττωμα' με τον συντονισμό $12/7$ (τη μη ύπαρξη περιοχής εσωτερικής περιστροφής του $\phi = \varpi - \varpi'$) και η κίνηση μοιάζει με αυτήν που περιγράφει η γραμμική αιώνια θεωρία. Επομένως η ύπαρξη τροχιών με τα ίδια χαρακτηριστικά όπως αυτά του (522)-Helga, δηλαδή ευσταθώς χαοτικών τροχιών, είναι αναμενόμενη.

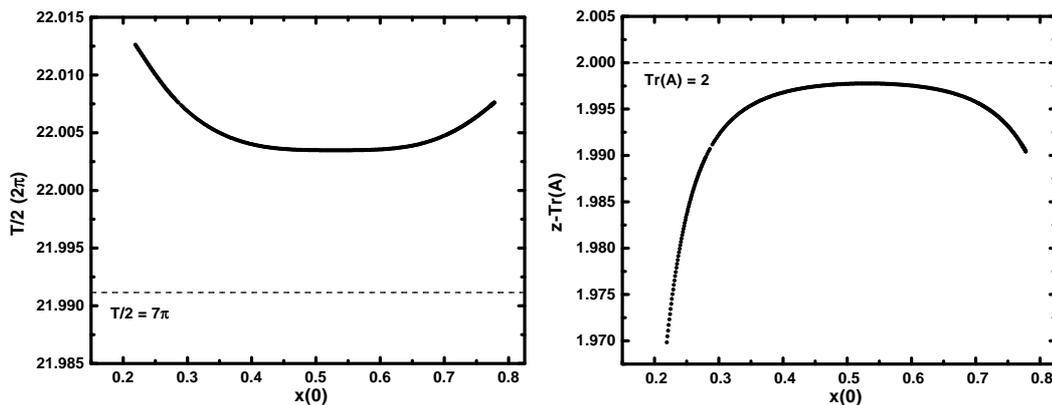
11/4 Resonance



Σχήμα 4.3: (Αριστερά) Η οικογένεια περιοδικών τροχιών του συντονισμού 11/4 στο επίπεδο $x(0) - T/2$. Καμία τροχιά δεν τέμνει την ευθεία $T/2 = 4\pi$ και επομένως δεν υπάρχει σημείο διακλάδωσης για το (ΕΠ). (Δεξιά) Το ίχνος του μονόδρομου πίνακα των περιοδικών τροχιών παίρνει τιμές $\text{tr}(A) < 2$ για όλες τις περιοδικές τροχιές του (ΚΠ). Επομένως δεν υπάρχει διακλάδωση ούτε για το (3ΚΠ).

Στο πλαίσιο ενός πιο πολύπλοκου προτύπου κίνησης των αστεροειδών, όπως το (4Π), οι ‘αναπάσεις’ των συντονισμών μέσης κίνησης με τον Δία είναι δυνατό να προκαλέσουν σημαντικές διαφορές, όσον αφορά στην αλληλεπίδραση των υποσυντονισμών. Το αποτέλεσμα είναι η διεύρυνση των στενών χαοτικών ζωνών που εμφανίζονται στο επίπεδο (h, k) , καθώς και η περαιτέρω αλληλεπικάλυψή τους. Η χαοτική κίνηση που δημιουργείται, ως αποτέλεσμα της αλληλεπίδρασης των υποσυντονισμών, μπορεί να οδηγήσει τον αστεροειδή στο να εκτελεί αργή διάχυση στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς, ακόμη και στο απλό μοντέλο (ΕΠ), σε συμφωνία με τη θεωρία των Murray & Holman (1997). Αυτός ο τύπος κίνησης είναι ένα είδος αργού χάους και η χαρακτηριστική χρονική κλίμακα της διάχυσης εξαρτάται από την τάξη του συντονισμού, την απόστασή του από τον Δία και την αρχική τιμή της ελεύθερης εκκεντρότητας. Αν όμως η επικάλυψη των υπο-συντονισμών δεν είναι το ίδιο δραστήρια για όλες τις δυνατές τιμές της ελεύθερης εκκεντρότητας, θα διατηρηθούν στενές χαοτικές ζώνες οι οποίες δεν επικοινωνούν άμεσα μεταξύ τους. Τότε, ο μόνος τρόπος διαφυγής (στο πλαίσιο του ΕΠ) για χαοτικές τροχιές που είναι ‘εγκλωβισμένες’ σε αυτές τις περιοχές είναι η διάχυση τύπου Arnold (βλ. Arnold 1989). Ο όρος ‘ευσταθές χάος’ αρμόζει, κατά τη γνώμη μας, σε κίνηση αυτού του τύπου. Είναι όμως γνωστό ότι η διάχυση Arnold είναι εξαιρετικά αργή, με χαρακτηριστικούς χρόνους πιθανώς μεγαλύτερους από την ηλικία του Σύμπαντος. Ακόμη κι αν εισαγάγουμε περισσότερους βαθμούς ελευθερίας στο μοντέλο μας (3ΕΠ ή 4Π), η εικόνα αυτή δεν πρόκειται να μεταβληθεί σημαντικά, εκτός κι αν (i) οδηγηθούμε σε πλήρη επικάλυψη των ‘διευρυμένων’ υποσυντονισμών του ίδιου συντονισμού μέσης κίνησης, (ii) επικαλυφθούν διπλανοί συντονισμοί μέσης κίνησης, ή (iii) εμφανιστούν αιώνιοι συντονισμοί στη γειτονιά (ή ακόμη και μέσα στη ζώνη λίκνισης) του συντονισμού μέσης κίνησης. Το να προβλέψουμε εκ των προτέρων ποιο ακριβώς θα είναι το αποτέλεσμα της εισαγωγής των επιπλέον βαθμών

18/7 Resonance



Σχήμα 4.4: Το ίδιο όπως και στο προηγούμενο σχήμα, αλλά για την οικογένεια του συντονισμού 18/7. Κανένα σημείο διακλάδωσης δεν υπάρχει και σε αυτήν την περίπτωση.

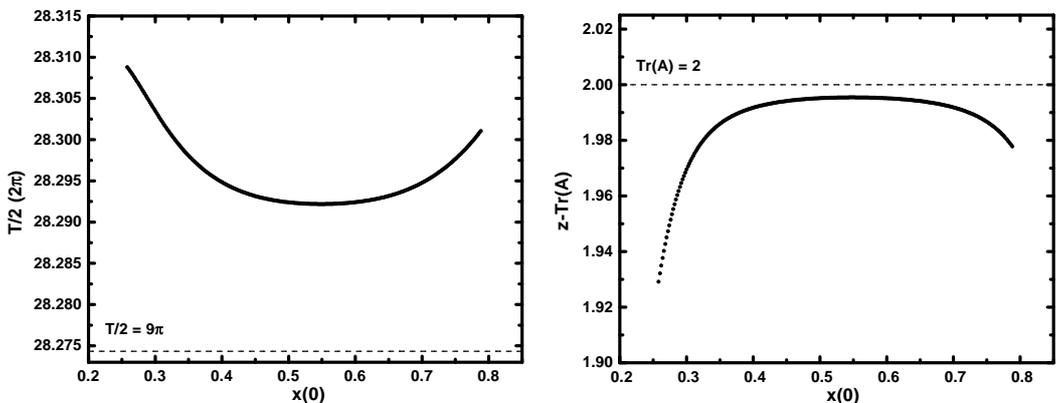
ελευθερίας δεν είναι εφικτό. Για το λόγο αυτό θα προχωρήσουμε σε αριθμητικές προσομοιώσεις αρκετών τροχιών, στο πλαίσιο διαφορετικών προτύπων κίνησης, με σκοπό να εκτιμήσουμε τη φύση των παρατηρούμενων διαφορών.

4.4 Αριθμητική Μελέτη Δυνητικών Αστεροειδών

Εξετάζουμε τη σταθερότητα της τροχιάς για 80 αρχικές συνθήκες που τίθενται αρχικά στη γειτονιά των υπό μελέτη συντονισμών (4 ομάδες των 20 σωματίδιων/συντονισμό). Σε κάθε συντονισμό η αρχική τιμή του a καθώς και των τριών γωνιών (Ω , ω και M) για κάθε σωματίδιο δίνονται ίσες με τις αρχικές τιμές του αντίστοιχου πραγματικού αστεροειδούς. Με τον τρόπο αυτόν οι τροχιές που υπολογίζουμε αντιστοιχούν στην ίδια αρχική φάση, τόσο της αιώνιας μεταβολής των e και i όσο και της συντονισμένης κίνησης του a , με τους αντίστοιχους πραγματικούς αστεροειδείς. Αντίθετα οι αρχικές τιμές της εκκεντρότητας και της κλίσης σχηματίζουν ένα πλέγμα (5×4) στο επίπεδο (e, i) , με $0.05 \leq e \leq 0.25$ και $5^\circ \leq i \leq 20^\circ$. Η ολοκλήρωση γίνεται στο πλαίσιο και των δύο βασικών μοντέλων κίνησης (3ΕΠ και 4Π). Ο συνολικός χρόνος ολοκλήρωσης είναι ίσος με $10^7 T' \approx 120 \cdot 10^6$ χρόνια. Αν κάποιο σωματίδιο πλησιάσει το Δία σε απόσταση μικρότερη της ακτίνας Hill, θεωρούμε ότι έχει πλέον διαφύγει από τη ζώνη των αστεροειδών.

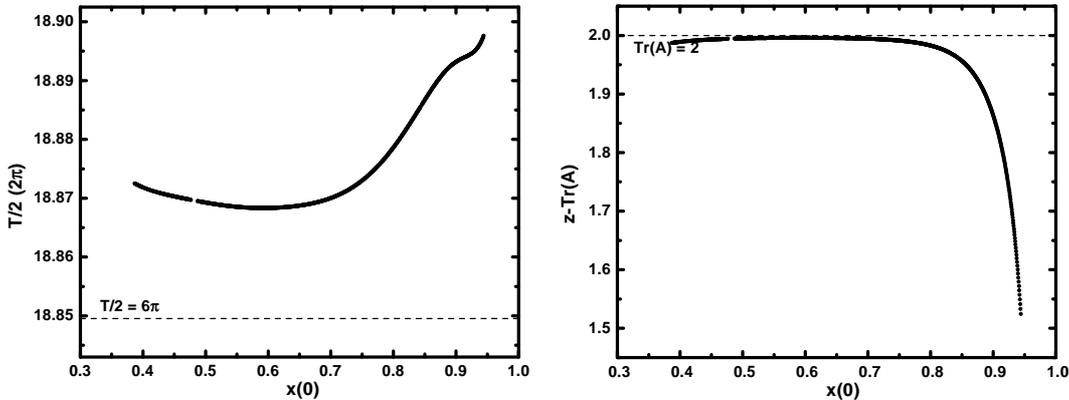
Σημειώνουμε ότι η συγκεκριμένη επιλογή των αρχικών συνθηκών δε σημαίνει απαραίτητα ότι όλες οι τροχιές βρίσκονται εντός της ζώνης λίκνισης του συντονισμού. Χρησιμοποιήσαμε δύο κριτήρια για το χαρακτηρισμό εκείνων των σωματιδίων των οποίων η κίνηση επηρεάζεται σημαντικά από τον αντίστοιχο συντονισμό. Πρώτον, με μια ολοκλήρωση για 250,000 χρόνια καθορίσαμε το ποσοστό των τροχιών για τις οποίες η κύρια κρίσιμη γωνία του συντονισμού,

22/9 Resonance



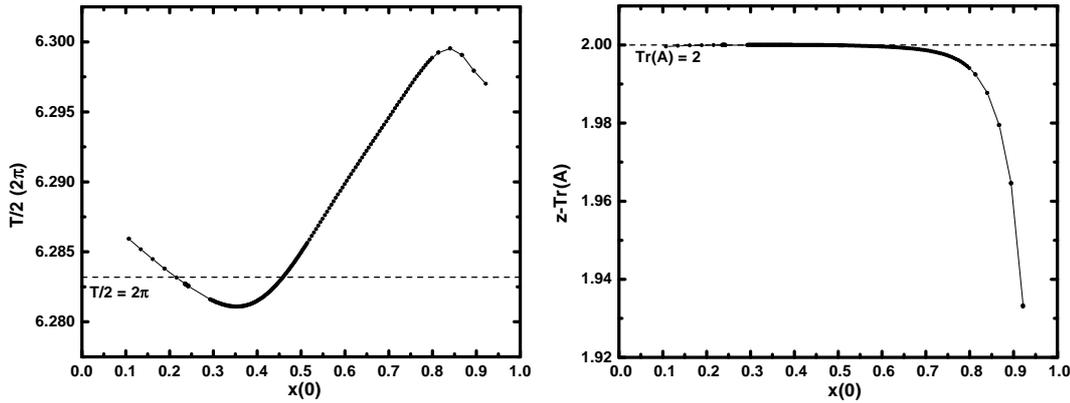
Σχήμα 4.5: Το ίδιο όπως και στα Σχ. 4.3 και 4.4 αλλά για την οικογένεια του 22/9. Όπως και στα προηγούμενα, δεν υπάρχει κανένα σημείο διακλάδωσης για το (ΕΠ) ή το (3ΚΠ).

13/6 Resonance



Σχήμα 4.6: Το ίδιο σχήμα όπως και στα Σχ. 4.3-4.5 αλλά για την οικογένεια του 13/6. Ούτε και σε αυτήν την περίπτωση υπάρχει κάποιο σημείο διακλάδωσης. Η τιμή του $tr(A)$ προσεγγίζει, αλλά δεν φτάνει, την τιμή 2. Οι υπολογισμοί έχουν γίνει με ακρίβεια 10^{-14} .

5/2 Resonance

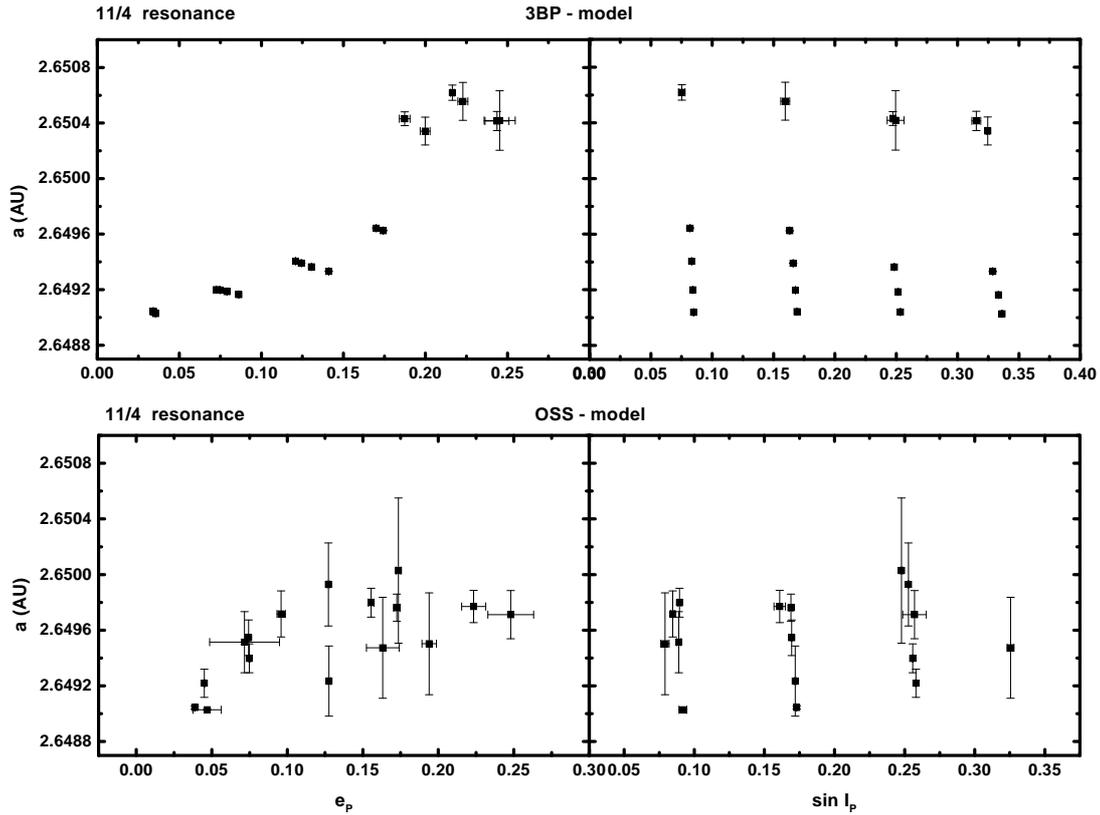


Σχήμα 4.7: Το ίδιο όπως και τα Σχ. 4.3-4.6 αλλά για το συντονισμό 5/2. Αντίθετα με πριν, υπάρχουν δύο σημεία διακλάδωσης για το (ΕΠ), αφού η χαρακτηριστική καμπύλη τέμνει την ευθεία $T/2 = 2\pi$ σε δύο σημεία.

Πίνακας 4.3: Ποσοστό συντονισμένων τροχιών στο (4Π)

Ομάδα	Τύπου-A (%)	Τύπου-B (%)	$r_L(t)$ (%) φθίνουσα
18/7	10	65	65
22/9	0	25	60
11/4	70	30	100
13/6	30	15	85

$\sigma = p\lambda - (p+q)\lambda' + q\omega$, υφίσταται χαοτικές μεταβολές (τροχιές Τύπου-A) ή περιστρέφεται αργά (Τύπου-B). Το ποσοστό του κάθε είδους τροχιών είναι διαφορετικό για κάθε συντονισμό, καθώς επίσης και για καθένα από τα δύο μοντέλα κίνησης. Για το μοντέλο (4Π) τα ποσοστά δίνονται στον Πίνακα 4.3. Βλέπουμε ότι μεγάλο μέρος των αρχικών συνθηκών που αντιστοιχούν στους συντονισμούς 11/4 και 13/6 επηρεάζεται όντως από τον συντονισμό, ενώ δε συμβαίνει το ίδιο για τους συντονισμούς 18/7 και 22/9. Η υψηλή τάξη, και άρα το μικρό εύρος σε τιμές του a , των δύο αυτών συντονισμών καθιστά δύσκολο το να θέσουμε μια ομάδα σωματιδίων εντός του συντονισμού. Η κατάσταση δεν είναι βέβαια απελπιστική, αν σκεφτούμε ότι στο μοντέλο (4Π) μια τροχιά που αρχικά βρίσκεται εκτός συντονισμού μπορεί να διασχίσει τη διαχωριστική του καμπύλη, αφού η τελευταία μετατίθεται με το χρόνο στο επίπεδο (a, e) . Αναλύοντας τα αποτελέσματα της μακροχρόνιας αριθμητικής ολοκλήρωσης, και χρησιμοποιώντας ως δεύτερο κριτήριο τη χρονική εξέλιξη της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης για τη χρονοσειρά του $a(t)$, βρήκαμε ότι το ποσοστό των χαοτικών τροχιών είναι τελικά αρκετά μεγαλύτερο από το αρχικώς υπολογιζόμενο (βλ. Πίνακα 4.3).

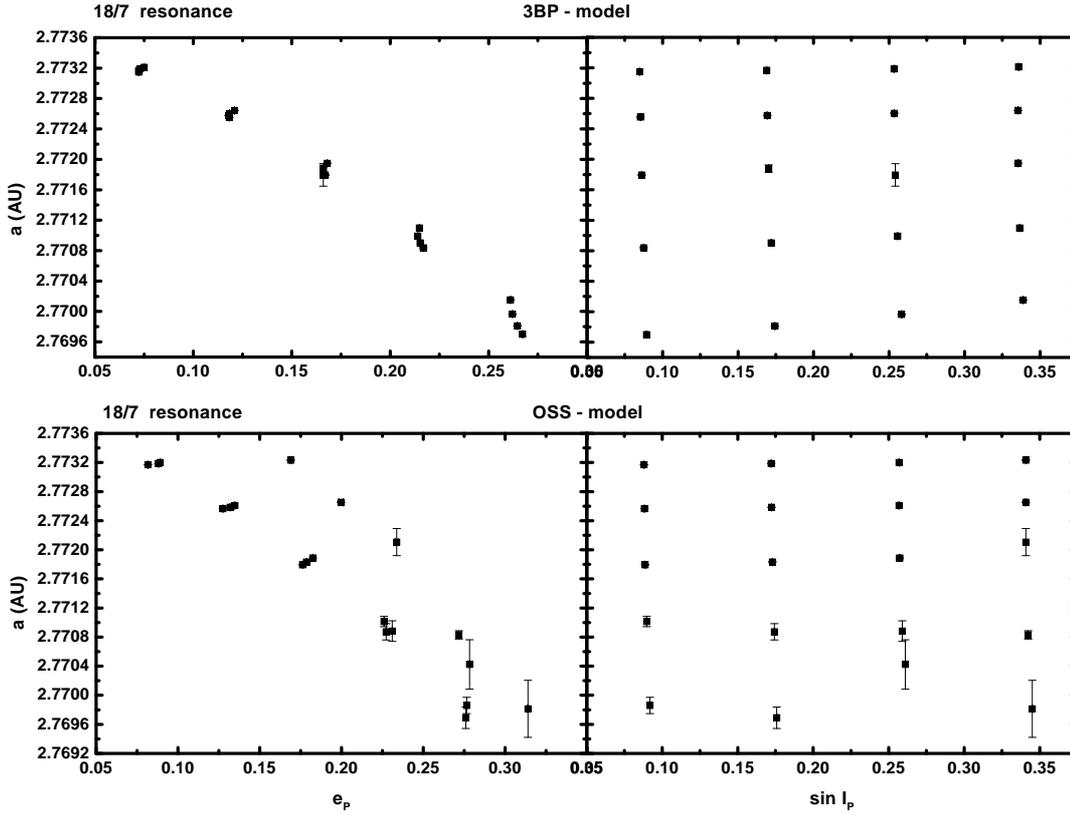


Σχήμα 4.8: Κάθε σωματίδιο της ομάδας του συντονισμού 11/4 απεικονίζεται με ένα τετράγωνο σύμβολο, οι συντεταγμένες του οποίου συμπίπτουν με τις μέσες τιμές των αντίστοιχων προς τους άξονες ελεύθερων στοιχείων. Οι γραμμές σφάλματος αντιστοιχούν στην τυπική απόκλιση των τιμών του κάθε ελεύθερου στοιχείου. Όπως και στα σχήματα που ακολουθούν, τα δύο πάνω διαγράμματα αναφέρονται στην ολοκλήρωση του μοντέλου (3ΕΠ), ενώ τα κάτω διαγράμματα στο μοντέλο (4Π).

4.4.1 Σταθερότητα των Τροχιών

Η μακροσκοπική σταθερότητα των τροχιών που ολοκληρώσαμε είναι αξιοσημείωτη, για την πλειοψηφία των 80 υποθετικών σωματιδίων. Όπως και προηγουμένως μπορούμε να εκτιμήσουμε ποσοτικά τη σταθερότητα της τροχιάς, υπολογίζοντας τα ελεύθερα στοιχεία $X_P(t_i)$ και τις αντίστοιχες τυπικές αποκλίσεις, $\sigma(X_P)$. Τα αποτελέσματά μας παριστάνονται γραφικά στα Σχ. 4.8-4.11, όπου κάθε σημείο αντιστοιχεί σε μία από τις 80 τροχιές και έχει για συντεταγμένες τις μέσες τιμές των στοιχείων που αναφέρονται στους δύο άξονες. Το μήκος των γραμμών σφάλματος (error-bars), που υπερτίθενται στα σημεία κάθε διαγράμματος, είναι ίσο προς την αντίστοιχη τιμή του $\sigma(X_P)$. Ας εξετάσουμε τη δυναμική συμπεριφορά κάθε ομάδας σωματιδίων (συντονισμού) ξεχωριστά.

11/4: Στο πλαίσιο του μοντέλου (3ΕΠ) το 80% των σωματιδίων έχει εξαιρετικά σταθερά στοι-

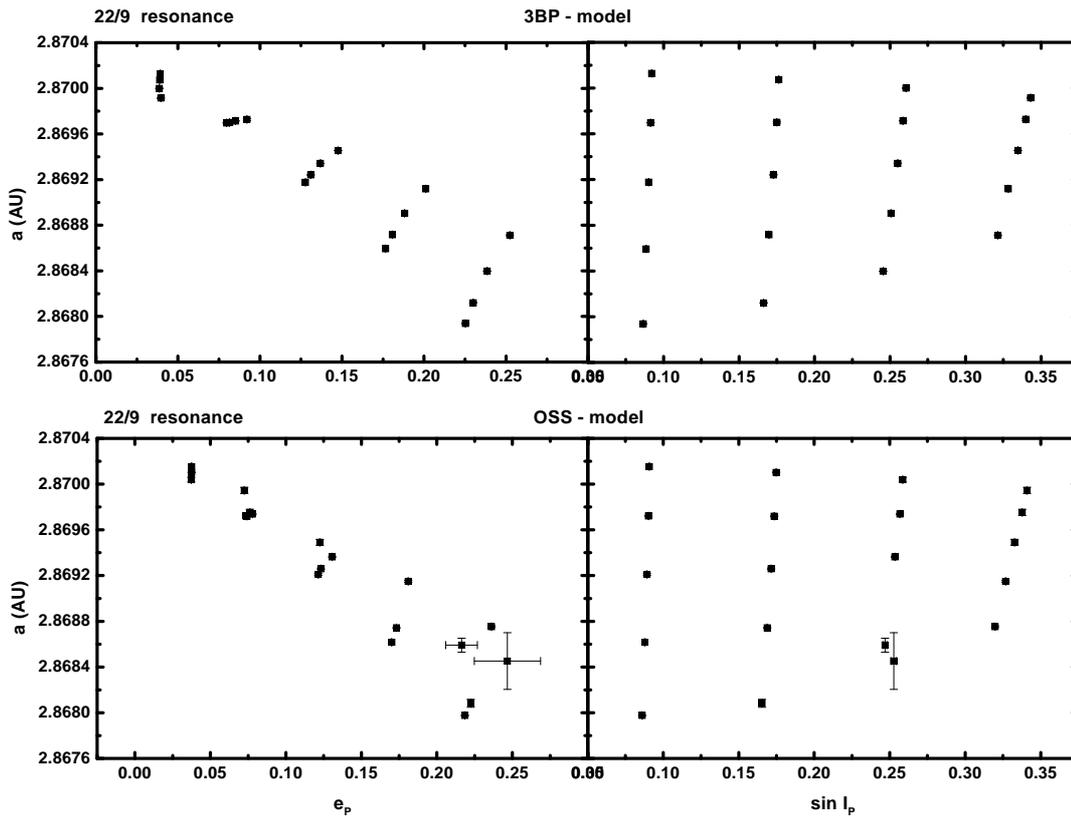


Σχήμα 4.9: Ομοίως με το Σχ. 4.8, αλλά για την ομάδα σωματιδίων του συντονισμού 18/7.

χεία τροχιάς. Οι τιμές των αντίστοιχων τυπικών αποκλίσεων είναι $\sigma(a_P) \sim 10^{-6}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 2 \cdot 10^{-5}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 5 \cdot 10^{-6}$. Για τα υπόλοιπα σωματίδια, τα οποία ως σημειωθεί έχουν αρχική εκκεντρότητα $e_0 \geq 0.2$, οι μεταβολές είναι μεγαλύτερες, με $\sigma(a_P) \sim 0.002$ AU, $\sigma(e_P) \sim 0.01$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 0.07$. Τα αποτελέσματα είναι αρκετά διαφορετικά για τις τροχίες που ολοκληρώσαμε στο (4Π). Περίπου το 70% των σωματιδίων, ανεξαρτήτως της αρχικής τους εκκεντρότητας, ακολουθεί τροχίες με μεγαλύτερες μεταβολές απ' ό,τι στο (3ΕΠ). Οι τυπικές αποκλίσεις παίρνουν τιμές $\sigma(a_P) \sim 0.0003$ AU, $0.005 \leq \sigma(e_P) \leq 0.02$ και $0.001 \leq \sigma(\sin i_P) \leq 0.008$. Δύο σωματίδια έχουν τιμές τυπικών αποκλίσεων που είναι μία τάξη μεγέθους χαμηλότερες από αυτές. Η πιο σημαντική διαφορά όμως είναι ότι 4 σωματίδια, όλα με αρχική κλίση $i = 20^\circ$ και αρχικές εκκεντρότητες 0.05, 0.01, 0.15 και 0.25, οδηγούνται σε διαφυγή (δεν απεικονίζονται στο Σχ. 4.8). Ο χρόνος διαφυγής έχει σχετικά μικρή τιμή, συγκεκριμένα 12.4, 22.9, 105.8 και 55.9 εκατομμύρια χρόνια, αντίστοιχα. Το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με αυτά της προηγούμενης παραγράφου, σχετικά με την μη-ύπαρξη περιοδικών τροχιών στον συντονισμό 11/4. Όπως θα δείξουμε παρακάτω, όμως, ο μηχανισμός που οδηγεί σε διαφυγή αυτά τα σωματίδια δεν είναι ο συντονισμός 11/4.

- 18/7: Στο μοντέλο (3ΕΠ) το 90% των σωματιδίων έχει εξαιρετικά σταθερά στοιχεία τροχιάς, όπως φαίνεται και στο Σχ. 4.9, με τυπικές αποκλίσεις $\sigma(a_P) \sim 3 \cdot 10^{-6}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 2 \cdot 10^{-5}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 8 \cdot 10^{-6}$. Το υπόλοιπο 10% έχει $\sigma(a_P) \sim 10^{-4}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 10^{-4}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 10^{-5}$. Στο μοντέλο (4Π) οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων παρουσιάζονται αυξημένες, παραμένοντας όμως απόλυτα πολύ μικρές. Για αρχικές τιμές εκκεντρότητας $e \leq 0.15$ και κλίσης $i \leq 15^0$ παίρνουμε $\sigma(a_P) \sim 5 \cdot 10^{-6}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 10^{-4}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 2 \cdot 10^{-5}$. Για μεγαλύτερες τιμές εκκεντρότητας οι τυπικές αποκλίσεις αυξάνουν ($\sigma(a_P) \sim 2 \cdot 10^{-4}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 4 \cdot 10^{-4}$), δείχνοντας μάλιστα και περαιτέρω αυξητική τάση για μεγάλες τιμές της κλίσης. Για $e_0 = 0.25$ έχουμε δύο περιπτώσεις με $\sigma(e_P) \approx 0.0013$ και $\sigma(\sin i_P) \approx 2 \cdot 10^{-4}$.
- 22/9: Η συγκεκριμένη ομάδα αρχικών συνθηκών έχει τη λιγότερο συναρπαστική δυναμική εξέλιξη. Στο πλαίσιο του (3ΕΠ) όλα τα σωματίδια έχουν εξαιρετικά σταθερές τροχιές, με $\sigma(a_P) \sim 10^{-6}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 10^{-5}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 5 \cdot 10^{-6}$. Ομοίως, για το 90% των σωματιδίων στο μοντέλο (4Π), οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων είναι εξαιρετικά μικρές ($\sigma(a_P) \sim 2 \cdot 10^{-5}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 4 \cdot 10^{-5}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 3 \cdot 10^{-5}$). Μόνο δύο σωματίδια ($i_0 = 15^0$ και $e_0 = 0.2, 0.25$) εμφανίζουν σχετικά σημαντικές μεταβολές εκκεντρότητας και κλίσης, με $\sigma(e_P) \approx 0.01$ και $\sigma(\sin i_P) \approx 0.001$.
- 13/6: Η συμπεριφορά των σωματιδίων αυτών δείχνει να συσχετίζεται με την αρχική τιμή εκκεντρότητας και στα δύο μοντέλα. Στο πλαίσιο του (3ΕΠ) τα σωματίδια που έχουν αρχικά $e \leq 0.15$ (ανεξαρτήτως της αρχικής τους κλίσης), έχουν $\sigma(a_P) \sim 2 \cdot 10^{-6}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 8 \cdot 10^{-6}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 5 \cdot 10^{-6}$. Για μεγαλύτερες αρχικές τιμές εκκεντρότητας, οι τυπικές αποκλίσεις παίρνουν τιμές $\sigma(a_P) \sim 2 \cdot 10^{-4}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 0.004$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 0.005$. Οι διαφορές ανάμεσα στα σωματίδια με μικρή, αρχικά, εκκεντρότητα ($e_0 \leq 0.15$) και σε αυτά με μεγάλη αρχικά εκκεντρότητα είναι εμφανείς και στο μοντέλο (4Π). Η πρώτη υπο-ομάδα έχει τυπικές αποκλίσεις 10^{-5} AU $\leq \sigma(a_P) \leq 10^{-4}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 3 \cdot 10^{-4}$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 5 \cdot 10^{-5}$. Αντίθετα, για $e_0 \geq 0.2$, παίρνουμε $\sigma(a_P) \geq 0.001$ AU, $\sigma(e_P) \sim 0.01$ και $\sigma(\sin i_P) \sim 0.008$. Αυτή η τιμή του $\sigma(a_P)$ είναι και η μεγαλύτερη που παρατηρήσαμε ανάμεσα σε όλες τις ομάδες αρχικών συνθηκών. Επίσης οι τελευταίες τιμές των $\sigma(e_P)$ και $\sigma(\sin i_P)$ είναι, μαζί με της ομάδας του συντονισμού 11/4 στο (4Π), οι μεγαλύτερες που παρατηρήσαμε.

Παρά τις διαφορές που παρατηρούνται ανάμεσα στις διάφορες ομάδες αρχικών συνθηκών, τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι, κατά κανόνα, οι τροχιές που ξεκινούν από τη γειτονιά των τεσσάρων αυτών συντονισμών μέσης κίνησης είναι μακροσκοπικά σταθερές, τουλάχιστον για χρόνους της τάξης των $120 \cdot 10^6$ ετών. Το αποτέλεσμα μάλιστα δεν επηρεάζεται σημαντικά από την πολυπλοκότητα του μοντέλου που χρησιμοποιούμε στην αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών. Η σταθερότητα των τροχιών είναι πιο έντονη για εκκεντρότητες $e_0 \leq 0.15$, τιμή που αντιστοιχεί στη διάμεσο της κατανομής της εκκεντρότητας των αριθμημένων αστεροειδών της κύριας ζώνης. Αν και η σταθερότητα της τροχιάς είναι κάτι το φυσιολογικό για μη χαοτικές τροχιές, εντούτοις βλέπουμε ότι ισχύει ακόμη και για εξαιρετικά χαοτικές τροχιές, με $T_L \sim 10^4$ χρόνια. Οι μόνες τροχιές που σίγουρα αποτελούν εξαίρεση αυτού του 'κανόνα' είναι αυτές που ξεκινούν στη γειτονιά του συντονισμού 11/4, αλλά με μεγάλη αρχική τιμή κλίσης ($i \geq 20^0$),

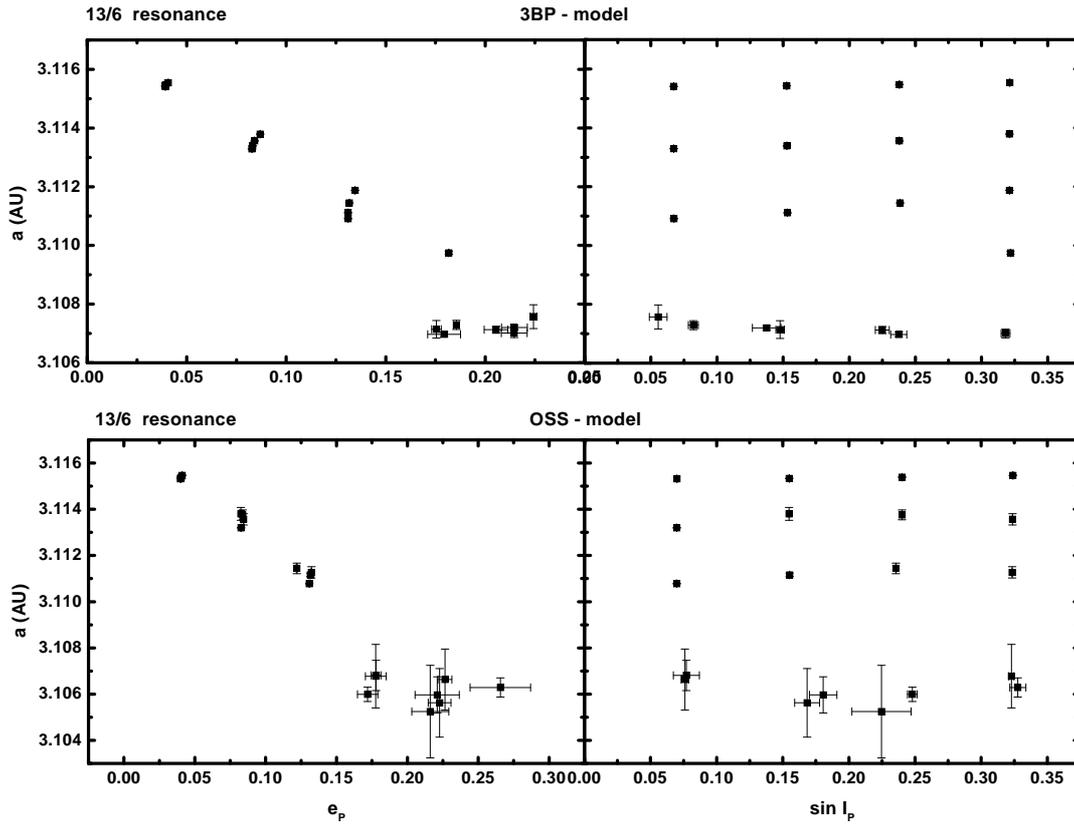


Σχήμα 4.10: Ομοίως με τα Σχ. 4.8-4.9, αλλά για την ομάδα σωματιδίων του συντονισμού 22/9.

στο μοντέλο (4Π). Επίσης η περιοχή υψηλής εκκεντρότητας του συντονισμού 13/6 παρουσιάζει αρκετά μεγάλες μεταβολές του a . Αυτό το γεγονός είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι υπάρχει επικάλυψη συντονισμών μέσης κίνησης. Μάλιστα δεν μπορεί να αποκλειστεί η επικάλυψη του 13/6 ακόμη και με κάποιον τριπλό συντονισμό μέσης κίνησης, καθώς οι τελευταίοι είναι αρκετά πυκνοί (για δεδομένη τάξη εκκεντρότητας) στην περιοχή των $a \sim 3.1\text{AU}$.

4.4.2 Ο Ρόλος των Αιωνίων Συντονισμών

Επανερχόμαστε τώρα στο ερώτημα που θέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, σχετικά με το μηχανισμό που οδηγεί σε διαφυγή τα 4 σωματίδια του συντονισμού 11/4. Στην αριθμητική ολοκλήρωση των 250,000 ετών, που χρησιμοποιήσαμε για να διαχωρίσουμε τις συντονισμένες από τις μη συντονισμένες τροχιές, οι τροχιές και των τεσσάρων σωματιδίων χαρακτηρίστηκαν ως Τύπου-A και η κρίσιμη γωνία του συντονισμού βρέθηκε να εναλλάσσεται ανάμεσα σε λικνίσεις και περιστροφές. Έτσι ο συντονισμός 11/4 μπορεί να θεωρηθεί όντως υπεύθυνος για τη χαοτική κίνηση. Το αποτέλεσμα ήταν το ίδιο και για τα δύο μοντέλα, αλλά η διαφυγή παρατηρήθηκε μόνο στο μοντέλο (4Π), γεγονός που υποδεικνύει τη συμμετοχή ενός επιπλέον



Σχήμα 4.11: Ομοίως με τα Σχ. 4.8-4.10, αλλά για την ομάδα σωματιδίων του συντονισμού 13/6.

μηχανισμού που δεν υπάρχει στο ΠΤΣ. Όντως, όπως φαίνεται και στα Σχ. 4.12-4.13, η διαφυγή ερμηνεύεται από την εμφάνιση αιώνιων συντονισμών στην περιοχή των 2.65 AU για $i > 15^\circ$.

Για τον εντοπισμό των αιώνιων συντονισμών, που πιθανώς επηρεάζουν την κίνηση του αστεροειδούς, χρησιμοποιείται η ίδια τεχνική όπως και για τους συντονισμούς μέσης κίνησης, δηλαδή η μελέτη του διαγράμματος της αντίστοιχης κρίσιμης γωνίας. Το πλήθος των υποψήφιων συντονισμών περιορίζεται σε μερικές δεκάδες, αν λάβει κανείς υπόψη του ότι το πλάτος των εξαναγκασμένων ταλαντώσεων που υφίστανται οι αστεροειδείς σχετίζεται με το πλάτος της ταλάντωσης της τροχιάς των ίδιων των πλανητών. Για το λόγο αυτό εξετάσαμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς που παρατίθενται στους Πίνακες IV και V της εργασίας των Nobili et al. (1989), όπου και παρουσιάστηκε η ‘συνθετική’ θεωρία κίνησης των εξωτερικών πλανητών. Η ημι-αριθμητική αυτή θεωρία ήταν το αποτέλεσμα του προγράμματος *LONGSTOP1B*, της πιο λεπτομερούς αριθμητικής ολοκλήρωσης της τροχιάς των τεσσάρων εξωτερικών πλανητών του Ηλιακού Συστήματος που έχει πραγματοποιηθεί. Λόγω του ελαφρώς διαφορετικού μοντέλου που εμείς έχουμε υιοθετήσει, οι τιμές των βασικών συχνοτήτων

που χρησιμοποιήσαμε είναι αυτές που υπολόγισε ο Laskar (1990). Για τις αρχικές φάσεις (ελεύθερες τιμές) των πλανητών χρησιμοποιήσαμε, όπως και ο Laskar (1990), τα αποτελέσματα του Bretagnon (1974).

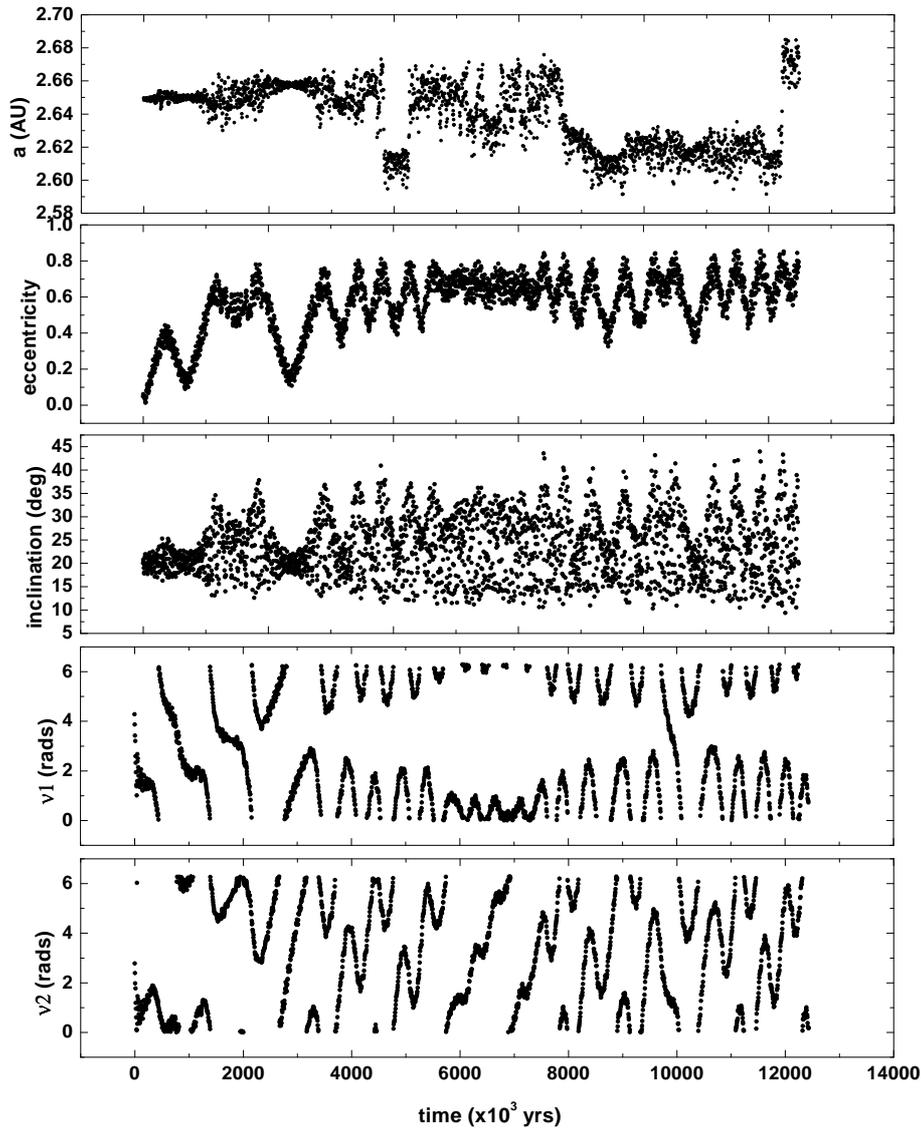
Εφαρμόζοντας αυτήν την τεχνική, εντοπίσαμε ένα σημαντικό πλήθος αιώνιων συντονισμών του περικέντρου (κυρίως) οι οποίοι επηρεάζουν την κίνηση των τεσσάρων διαφυγόντων σωματιδίων. Σχεδόν όλοι οι συντονισμοί είναι *μη γραμμικοί*, δηλαδή συντονισμοί ανώτερης τάξης των οποίων η κρίσιμη γωνία περιέχει περισσότερες από μία πλανητικές φάσεις. Οι περίοδοι όλων αυτών των συντονισμών είναι της τάξης των 40,000-52,000 ετών. Ο πιο σημαντικός όμως συντονισμός που εντοπίσαμε είναι ο ν_6 , ο οποίος είναι εν τέλει και ο κύριος υπεύθυνος για τη διαφυγή των σωματιδίων. Η συμπεριφορά της αντίστοιχης κρίσιμης γωνίας, $\varpi - \varpi_S$, εναλλάσσεται ανάμεσα σε λικνίσεις και περιστροφές, σε συμφωνία με τις μεταβολές της εκκεντρότητας. Το φαινόμενο αυτό παριστάνεται στα Σχ. 4.12-4.13, για δύο από τις τέσσερις περιπτώσεις που εξετάζουμε. Επιπλέον, σε κάθε σχήμα, φαίνεται και η εξέλιξη της κρίσιμης γωνίας ενός μη-γραμμικού συντονισμού. Το γεγονός ότι διάφοροι συνδυασμοί γωνιών μεταβάλλονται αργά κατά το ίδιο χρονικό διάστημα είναι μια ισχυρή ένδειξη ότι οι αντίστοιχοι συντονισμοί επικαλύπτονται.

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι, σε ρεαλιστικά μοντέλα κίνησης των αστεροειδών, η συμπεριφορά των ευσταθώς χαοτικών τροχιών ενός απλού μοντέλου μπορεί να αλλάξει δραστικά, λόγω της παρουσίας αιώνιων συντονισμών. Πρέπει όμως να τονίσουμε ότι χαμηλής τάξης αιώνιοι συντονισμοί εμφανίζονται σε συγκεκριμένες περιοχές τιμών των (a, i) και, κατά κανόνα, εκτός της ζώνης λίκνισης των συντονισμών μέσης κίνησης (εξαίρεση αποτελούν οι συντονισμοί μέσης κίνησης με τάξη $q \leq 3$).

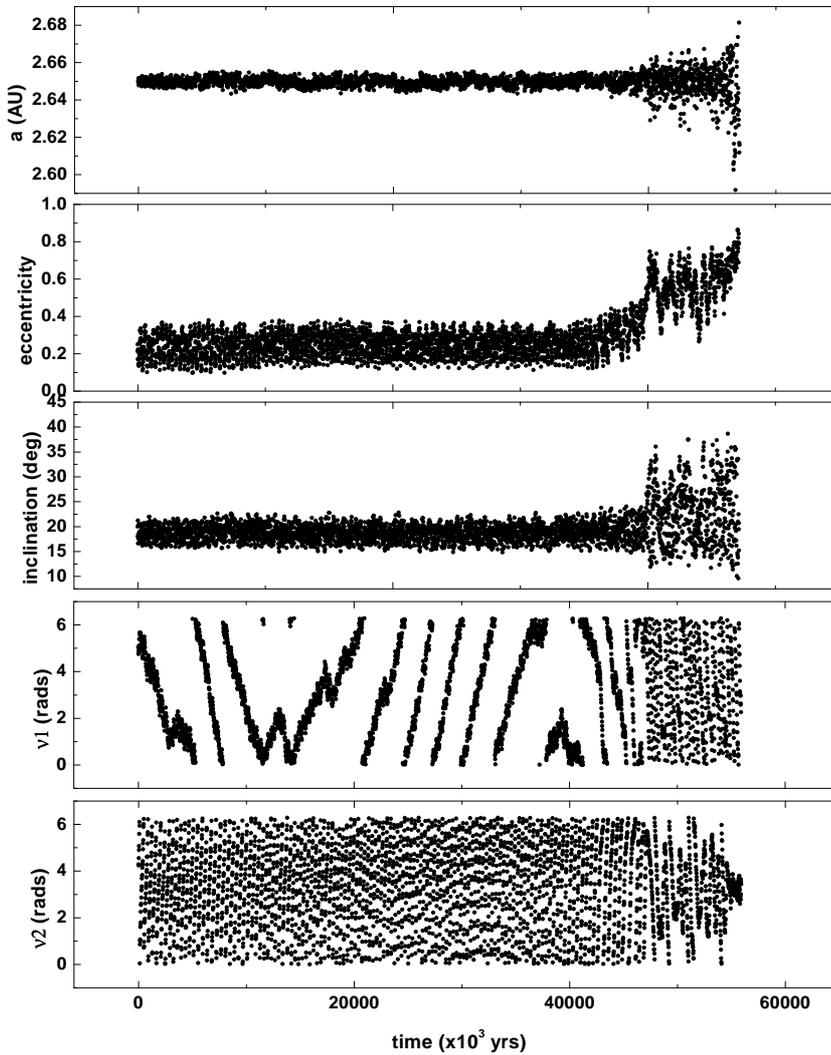
4.4.3 Διατήρηση (και μη) των Γραμμικών Συσχετίσεων

Στη μελέτη της τροχιάς του (522)-Helga παρατηρήσαμε για πρώτη φορά τη διατήρηση των γραμμικών συσχετίσεων στις χρονοσειρές των δράσεων Delaunay που σχετίζονται με τις μεταβλητές e και i . Για να ισχυριστούμε ότι η παραπάνω ιδιότητα αποτελεί κοινό χαρακτηριστικό των ευσταθώς χαοτικών τροχιών, θα πρέπει και οι τροχιές που μελετήσαμε σε αυτήν την παράγραφο να έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό. Αν αυτή η ιδιότητα ισχύει, τότε θα μπορούσαμε να εξαγάγουμε γενικά συμπεράσματα για τη γεωμετρία των ευσταθώς χαοτικών τροχιών στο χώρο των φάσεων.

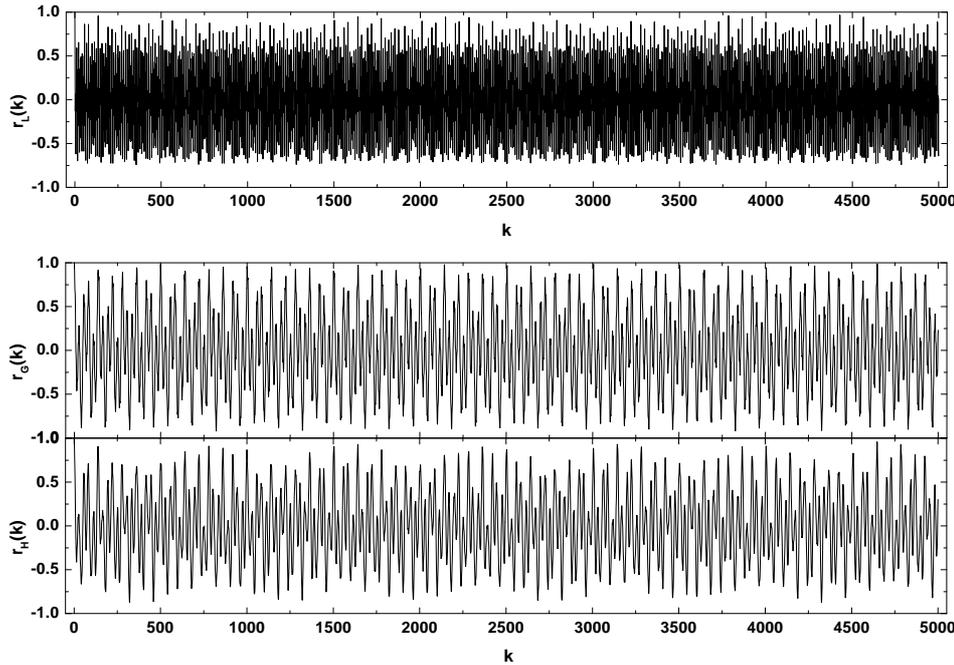
Υπολογίσαμε τις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης, $r_I(t)$, των τριών δράσεων ($I = L, G$ και H) για καθεμιά από τις 80 τροχιές του μοντέλου (4Π), χρησιμοποιώντας το τμήμα της κάθε χρονοσειράς που αντιστοιχεί στα πρώτα $12 \cdot 10^6$ χρόνια της αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η συμπεριφορά των $r_I(t)$ για κάποιες χαρακτηριστικές τροχιές φαίνεται στα Σχ. 4.14 (a-e). Θα περιοριστούμε στη λεπτομερή ανάλυση μόνο εκείνων των τροχιών για τις οποίες η συνάρτηση αυτοσυσχέτισης του L φθίνει εκθετικά με το χρόνο, καθώς αυτές αντιστοιχούν σαφώς σε χαοτικές μεταβολές του μεγάλου ημιάξονα. Η πλειοψηφία αυτών των τροχιών έχει το ακόλουθα χαρακτηριστικά: η $r_L(t)$ φθίνει εκθετικά με το χρόνο και ο χρόνος αυτοσυσχέτισης είναι της τάξης των μερικών χιλιάδων ετών, ενώ οι $r_G(t)$ και $r_H(t)$ δείχνουν μία σχεδόν ημιπεριοδική μεταβολή με το χρόνο και η μέγιστη τιμή του πλάτους παραμένει σχεδόν σταθερή με το χρόνο. Επομένως παρατηρούμε ακριβώς την ίδια συμπεριφορά, όπως και στην περίπτωση της τροχιάς



Σχήμα 4.12: Εξέλιξη των στοιχείων της τροχιάς ενός από τα σωματίδια του 11/4 που διαφεύγουν ($e_0 = 0.05$, $i = 20^0$). Δίνονται κατά σειρά (από πάνω) οι χρονοσειρές των a , e , i και οι κρίσιμες γωνίες δύο αιώνιων συντονισμών. Η ν_1 αντιστοιχεί στον συντονισμό ν_6 , ο οποίος εμφανίζεται όταν $\langle \dot{\omega} \rangle \approx g_6$. Η γωνία ν_2 αντιστοιχεί στον μη γραμμικό συντονισμό $\langle \dot{\omega} \rangle \approx -g_5 + g_6 + g_7$. Οι συντονισμοί επικαλύπτονται αλλά το αποτέλεσμα του ν_6 (πρώτης τάξης) είναι πολύ πιο εμφανές. Παρατηρήστε τη συσχέτιση των μεταβολών της e με τις λιχνίσεις της κρίσιμης γωνίας του ν_6 .



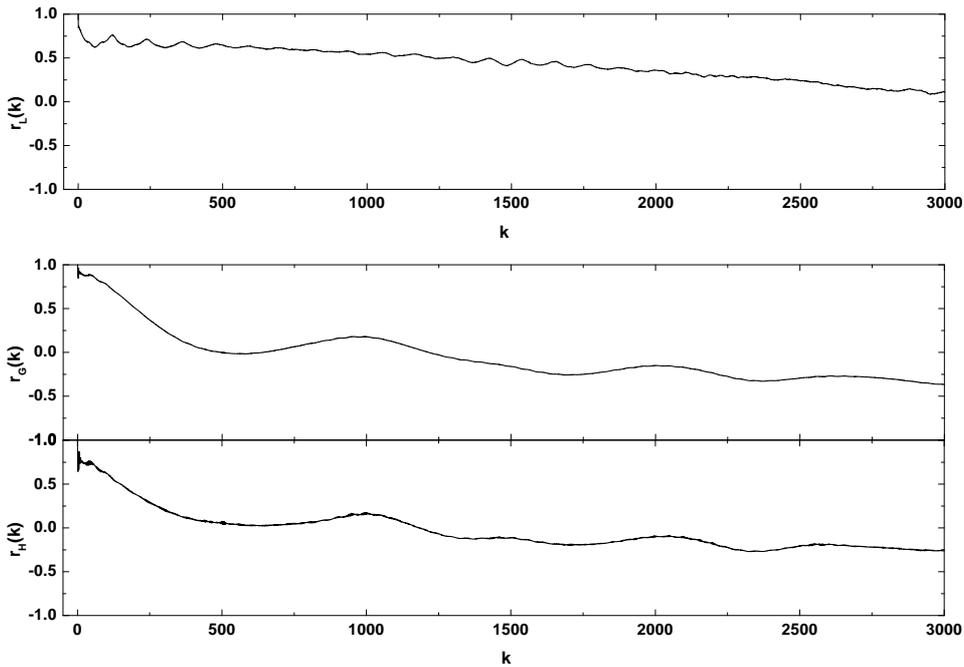
Σχήμα 4.13: Ομοίως με το Σχ. 4.12 αλλά για το σωματίδιο του 11/4 με $e_0 = 0.25$ και $i_0 = 20^\circ$. Η γωνία ν_1 αυτού του διαγράμματος αντιστοιχεί στο συντονισμό $(\dot{\omega}) \approx g_5 + g_6 - g_8$. Η γωνία ν_2 αντιστοιχεί στον ισχυρό συντονισμό ν_6 . Αρχικά η τροχιά είναι εντός του ν_1 και οι μεταβολές των e και i είναι πολύ μικρού πλάτους. Όμως, ο συντονισμός αυτός λειτουργεί ως ‘μεσάζων’, οδηγώντας το σωματίδιο στην περιοχή λίκνισης του ν_6 . Μετά από έναν μικρό αριθμό λικνίσεων, η εκκεντρότητα πλησιάζει την τιμή 1 και το σωματίδιο διαφεύγει.



Σχήμα 4.14: Χρονική εξέλιξη της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης, $r_I(k)$, για τις τρεις δράσεις Delaunay ($I=L, G, H$). Η μονάδα του χρόνου αντιστοιχεί σε $k = 10^2 T'$. (a) Για μία τακτική τροχιά και οι τρεις συναρτήσεις $r_I(k)$ μεταβάλλονται ημιπεριοδικά με το χρόνο.

του (522)-Helga. Αντίθετα, όσον αφορά στις τέσσερις τροχιές που καταλήγουν σε διαφυγή, και οι τρεις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης φθίνουν εκθετικά με το χρόνο και οι αντίστοιχοι χρόνοι αυτοσυσχέτισης είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Κάποιες τροχιές διατηρούν ισχυρή ημιπεριοδική συνιστώσα στις r_G και r_H αλλά το πλάτος τους φθίνει αργά με το χρόνο, ώστε οι r_G και r_H να έχουν συμπεριφορά παρόμοια με αυτήν του πλάτους της φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης. Εξαιρέσεις από τη γενική αυτή εικόνα παρατηρούνται για μερικές τροχιές στον συντονισμό $13/6$ με $e_0 \geq 0.2$, εκείνες δηλαδή τις τροχιές που παρουσιάζουν και τις μεγαλύτερες μεταβολές των a και e .

Υπολογίζοντας την περιβάλλουσα καθεμιάς από τις συναρτήσεις $r_I(t)$ και προσαρμόζοντας έναν νόμο εκθετικής μείωσης στα δεδομένα, μπορούμε να εκτιμήσουμε το χρόνο αυτοσυσχέτισης, $\tau_C(I)$. Σημειώνουμε ότι, για χρονοσειρές που είναι σχεδόν ημιπεριοδικές συναρτήσεις του χρόνου και το πλάτος τους φθίνει εξαιρετικά αργά με το χρόνο, η διαδικασία αυτή οδηγεί σε υποεκτίμηση του πραγματικού χρόνου αυτοσυσχέτισης. Παρόλα αυτά μπορούμε να εξαγάγουμε σαφή συμπεράσματα για τη διαφορετική χρονική κλίμακα μείωσης των γραμμικών συσχετίσεων που παρατηρείται μεταξύ των τριών δράσεων. Στο Σχ. 4.15 δίνονται οι κατανομές του χρόνου αυτοσυσχέτισης για τις τρεις διαφορετικές δράσεις. Η κατανομή του $\tau_C(L)$ είναι αρκετά ασύμμετρη, με μία ουρά που απαρτίζεται από το 20% των τροχιών και έχει $\tau_C(L) > 2 \cdot 10^5$ χρόνια. Η διάμεσος της κατανομής, όμως, είναι περίπου ίση με 20,000



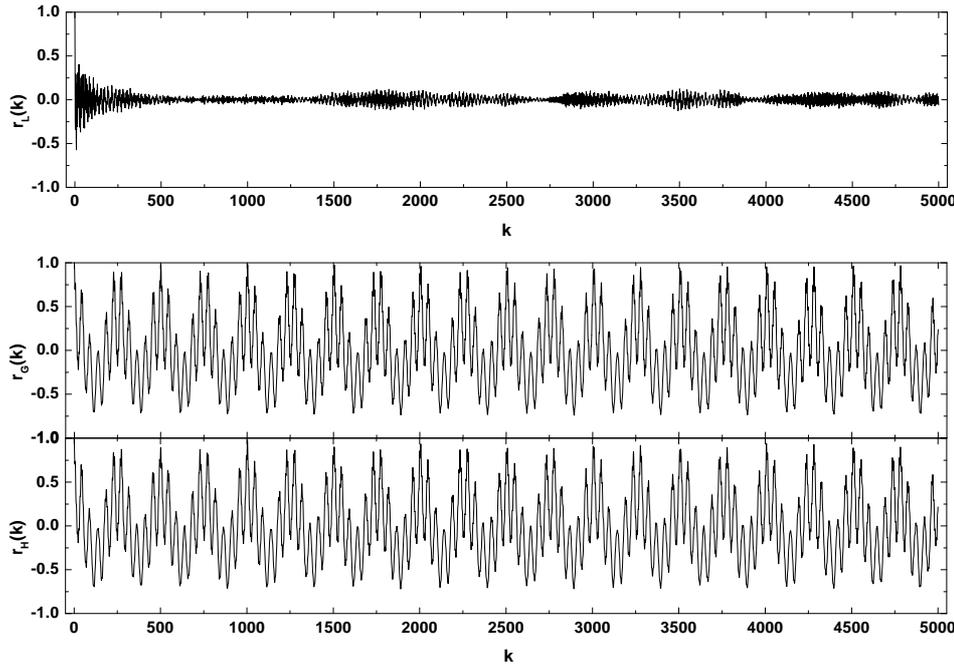
Σχήμα 4.14: (b) Για τα σωματίδια που διαφεύγουν και οι τρεις $r_I(t)$ φθίνουν εκθετικά με το χρόνο, έχοντας παραπλήσιες τιμές του τ_C .

χρόνια. Η τιμή αυτή συμπίπτει σχεδόν με την τυπική τιμή του χρόνου Lyapunov για αυτές τις τροχιές. Το αποτέλεσμα αυτό είναι και το αναμενόμενο για χαοτικές τροχιές. Για τις άλλες δύο δράσεις αναγκαστήκαμε να χρησιμοποιήσουμε μεγαλύτερες χρονοσειρές ($t \approx 50 \cdot 10^6$ χρόνια) ώστε να εκτιμήσουμε καλύτερα τις τιμές των $\tau_C(I)$. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η διάμεσος των αντίστοιχων κατανομών έχει τιμή $\tau_C(G) = 21 \cdot 10^6$ χρόνια και $\tau_C(H) = 15 \cdot 10^6$ χρόνια, δηλαδή $\tau_C \sim 10^3 \cdot T_L$.

4.5 Συμπεράσματα

Η μελέτη που παρουσιάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο είχε ως στόχο τον εντοπισμό κοινών φαινομενολογικών χαρακτηριστικών ανάμεσα στα παραδείγματα ευσταθούς χάους που παρατηρούνται σε διαφορετικές περιοχές της ζώνης των αστεροειδών. Ο λόγος είναι ότι αυτά θα οδηγούσαν πιθανώς και σε μια κοινή ερμηνεία του φαινομένου, σε αντίθεση με τους ισχυρισμούς των Milani et al. (1997). Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι, όντως, υπάρχουν κοινά κινηματικά χαρακτηριστικά των τροχιών, καθώς και κοινά δυναμικά χαρακτηριστικά των αντίστοιχων συντονισμών μέσης κίνησης.

Όσον αφορά στα φαινομενολογικά χαρακτηριστικά αυτού του τύπου χαοτικής κίνησης, τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου είναι σε πλήρη συμφωνία με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 για την περίπτωση του αστεροειδούς (522)-Helga. Οι ευσταθώς χαοτικές

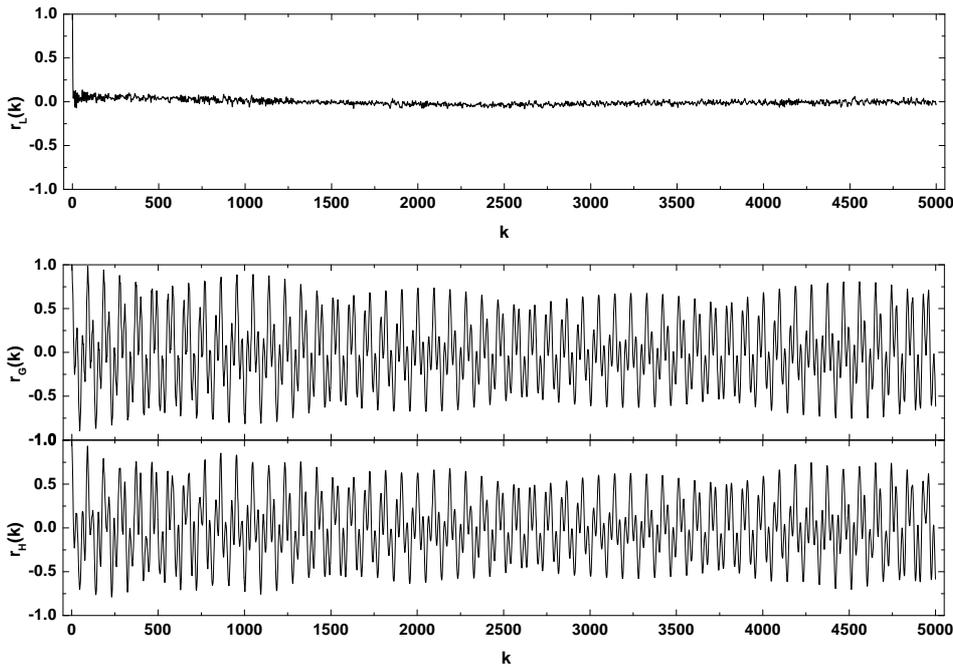


Σχήμα 4.14: (c) Η τυπική συμπεριφορά των ευσταθώς χαοτικών τροχιών. Η $r_L(k)$ φθίνει εκθετικά με το χρόνο, ενώ οι $r_G(k)$ και $r_H(k)$ μεταβάλλονται σχεδόν ημιπεριοδικά με το χρόνο, διατηρώντας σχεδόν σταθερό πλάτος.

τροχιές χαρακτηρίζονται επομένως από

- (α) Χαοτικές μεταβολές της γωνίας του συντονισμού και μικρούς χρόνους Lyapunov, $T_L \sim 10^4 - 10^5$ χρόνια
- (β) Μακροσκοπική σταθερότητα των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς για χρόνους μεγαλύτερους από $10^4 T_L$
- (γ) Ένα χαρακτηριστικό φάσμα τιμών των χρόνων αυτοσυσχέτισης, $\tau_C(I)$, για τις χρονοσειρές των τριών δράσεων Delaunay. Συγκεκριμένα η δράση που σχετίζεται με τον μεγάλο ημιάξονα της τροχιάς έχει εμφανώς στοχαστική συμπεριφορά με $\tau_C(L) \sim T_L$. Αντίθετα, οι δράσεις που σχετίζονται με τα στοιχεία e και i διατηρούν τις γραμμικές συσχετίσεις για χρόνους, κατά κανόνα, μεγαλύτερους των $10^3 T_L$.

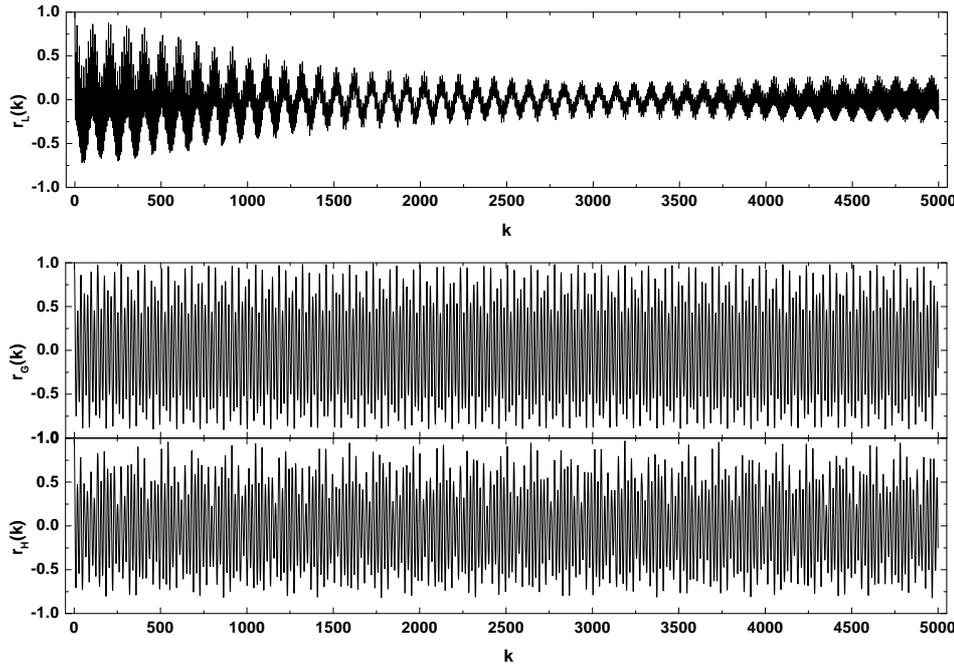
Το τελευταίο χαρακτηριστικό της κίνησης εντοπίστηκε για πρώτη φορά στην τροχιά του (522)-Helga (Κεφάλαιο 3). Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι, όχι μόνο οι χαοτικές μεταβολές των e και i είναι αμελητέου πλάτους σε σχέση με το πλάτος της αιώνιας ημιπεριοδικής ταλάντωσης, αλλά και ότι οι ελεύθερες συχνότητες $g = \dot{\omega}$ και $s = \Omega$ παραμένουν σχεδόν σταθερές, παρά τη συντονισμένη κίνηση. Αυτός είναι και ο λόγος της ισχυρής ημιπεριοδικής συνιστώσας των G και H . Θα πρέπει να τονίσουμε εδώ ότι, στην περίπτωση κάποιου πολύ ισχυρού συντονισμού, ο οποίος πιθανώς έχει και περιοδικές τροχιές (βλ. Κεφάλαιο 5 για τον συντονισμό 3/2),



Σχήμα 4.14: (d) Ακόμη μία ευσταθώς χαοτική τροχιά. Η συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης είναι ίδια με την προηγούμενη περίπτωση, 4.14(c)

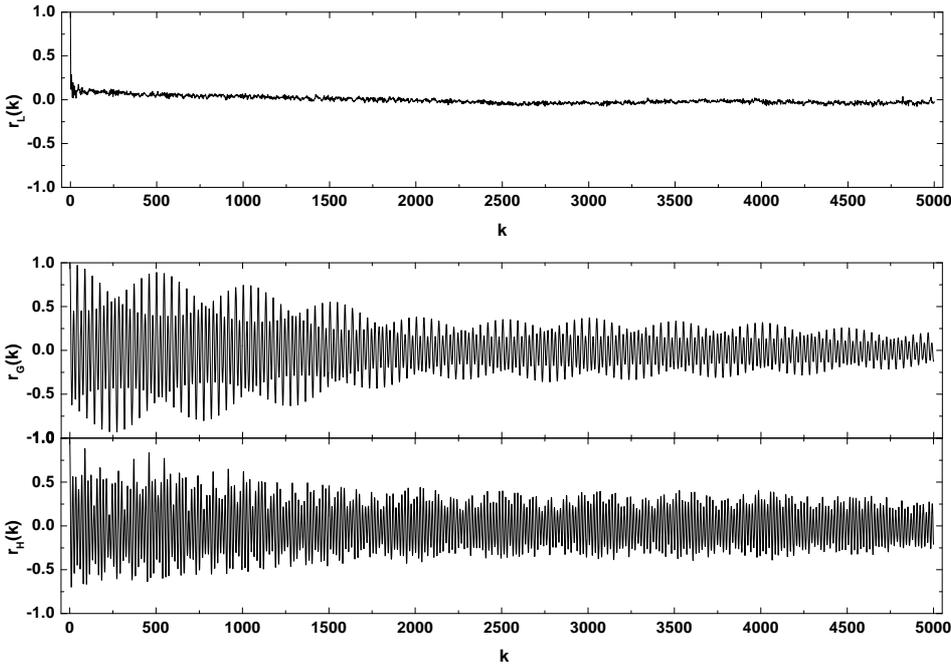
η συμπεριφορά των $r_I(t)$ αναμένεται να αλλάξει. Ακόμη όμως και για τις περιπτώσεις συντονισμών που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο υπάρχουν κάποια προβλήματα, που σχετίζονται με τον τρόπο υπολογισμού των $r_I(t)$, τα οποία δεν έχουμε παρουσιάσει διεξοδικά. Η μορφή της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης κάθε διακριτής χρονοσειράς είναι αναλλοίωτη, ως προς τη μεταβολή του 'μήκους' της χρονοσειράς, μόνο αν η διαδικασία που παράγει τη χρονοσειρά έχει αναλλοίωτες στατιστικές ιδιότητες με το χρόνο (stationarity, βλ. Kantz & Schreiber 1997). Αυτό συμβαίνει για τυχαίες διαδικασίες (θόρυβος) ή τακτικές τροχιές σε δυναμικά συστήματα, αλλά όχι για τις χαοτικές τροχιές. Ο λόγος είναι ότι, στην τελευταία περίπτωση, η μεταπήδηση της τροχιάς σε διαφορετική περιοχή του χώρου των φάσεων αλλάζει τις ιδιότητες της κίνησης. Έτσι, αν το επιλεγμένο μήκος της χρονοσειράς αντιστοιχεί σε χρόνο μικρότερο από αυτόν που απαιτείται για τη μεταπήδηση της τροχιάς σε μία διαφορετική περιοχή του χώρου των φάσεων, η μορφή της $r(t)$ θα είναι η ίδια, ανεξάρτητα από το πλήθος των σημείων. Αν όμως το μέγεθος της χρονοσειράς είναι μεγαλύτερο από αυτό το χρονικό διάστημα, τότε το αποτέλεσμα θα είναι η φαινομενικά γρήγορη μείωση των συσχετίσεων. Αυτό θα συμβεί γιατί το τελευταίο κομμάτι της σειράς δε θα συσχετίζεται με το υπόλοιπο. Αυτός είναι πιθανότατα και ο λόγος εμφάνισης 'ενδιάμεσων' περιπτώσεων στα αποτελέσματά μας. Γίνεται επομένως αντιληπτό ότι η χρήση της $r(t)$ πρέπει να γίνεται με προσοχή. Είναι προφανές ότι απαιτείται λεπτομερέστερη ανάλυση των ιδιοτήτων αυτού του διαγνωστικού εργαλείου, για κάθε τύπο κίνησης.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να εξαγάγουμε κάποια σημαντικά συμπεράσματα για το



Σχήμα 4.14: (e) Για μερικές τροχιές η $r_L(k)$ έχει σχετικά μεγάλη τιμή $r_C(L)$.

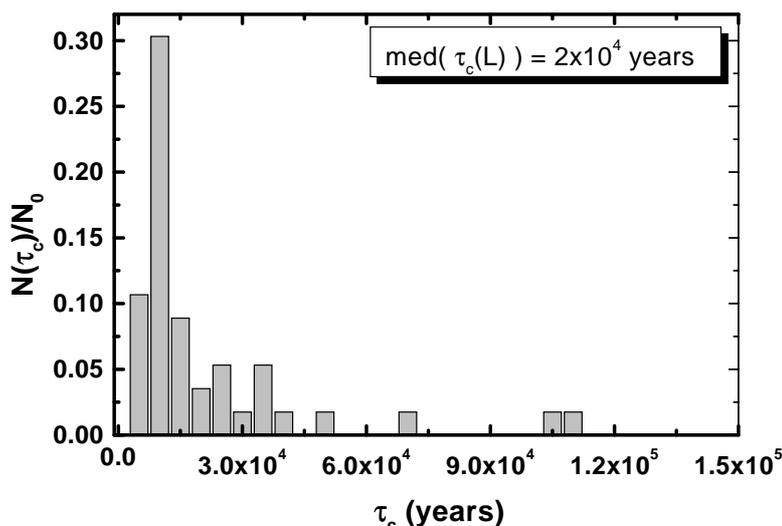
γεωμετρικό σχήμα που το σύνολο των διαδοχικών σημείων μιας ευσταθώς χαοτικής τροχιάς φαίνεται να διαγράφει στο χώρο των φάσεων. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η συμπεριφορά της γωνίας σ του συντονισμού ήταν που μας απέτρεψε από το να ερμηνεύσουμε, από άποψης κινηματικής, το φαινόμενο του ευσταθούς χάους ως προσκολλητικότητα (stickiness) των χαοτικών τροχιών. Βέβαια η εικόνα που έχουμε για την προσκολλητικότητα έρχεται από συντηρητικά συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας και την άμεση παρατήρηση του φαινομένου πάνω σε μία τομή Poincaré. Σε τέτοια συστήματα οι τιμές των δράσεων παραμένουν σχεδόν σταθερές για μεγάλα χρονικά διαστήματα, με τις συζυγείς γωνίες να μεταβάλλονται σχεδόν γραμμικά με το χρόνο (με σταθερές περίπου συχνότητες). Αν επιχειρήσουμε να επεκτείνουμε αυτόν τον, μάλλον ασαφή, ορισμό της προσκολλητικότητας σε συστήματα με περισσότερους από δύο βαθμούς ελευθερίας, δεν είναι απαραίτητο να απαιτήσουμε ότι όλα τα ζεύγη συζυγών μεταβλητών θα εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο. Στο πρόβλημά μας, για παράδειγμα, τα ζεύγη (ω, G) και (Ω, H) παρουσιάζουν προσκολλητική συμπεριφορά, ενώ το ζεύγος των M, L (ή w, J , βλ. § 2.4) όχι. Παραταύτα ο εκφυλισμός του προβλήματος των δύο σωμάτων εξασφαλίζει τη μακροσκοπική σταθερότητα του a εκτός συντονισμών και τις φραγμένες χαοτικές μεταβολές του a εντός των συντονισμών μέσης κίνησης (αν δεν υπάρχει επικάλυψη διαφορετικών συντονισμών μέσης κίνησης). Ας δούμε επομένως, υπό αυτές τις συνθήκες, ποια είναι η γεωμετρική εικόνα της τροχιάς σε ένα αυτόνομο σύστημα τριών βαθμών ελευθερίας, όπως π.χ. το 3-διάστατο ελλειπτικό περιορισμένο πρόβλημα των τριών σωμάτων, στο οποίο έχουμε απαλείψει (με τη μέθοδο του averaging) τη ‘γρήγορη’ γωνία (λ) . Σε ένα τέτοιο σύστημα ο χώρος των φάσεων είναι 6-διάστατος και η ‘ισο-ενεργειακή’



Σχήμα 4.14: (f) Η τυπική συμπεριφορά της $r_L(k)$ για χαοτικές τροχιές, συνοδευόμενη από αργή μείωση του πλάτους των $r_G(k)$ και $r_H(k)$, οι οποίες διατηρούν ισχυρή ημιπεριοδική συνιστώσα.

επιφάνεια, στην οποία η τροχιά εξελίσσεται, έχει διάσταση 5. Η ευσταθώς χαοτική τροχιά φαίνεται ότι περιγράφει μία 4-διάστατη υπο-πολλαπλότητα \mathcal{M} , της οποίας η τοπολογία είναι αυτή του Καρτεσιανού γινομένου ενός 2-τόρου με έναν δακτύλιο, $\mathcal{M} = \mathbf{T}^2 \otimes \{\mathbf{S}^1 \otimes \Delta\}$, $\Delta \subset \mathbf{R}$. Ο \mathbf{T}^2 έχει ακτίνες που αντιστοιχούν στις σταθερές ελεύθερες τιμές των e και i , και η κίνηση είναι ευσταθής κατά μήκος του τόρου, ενώ το πάχος Δ του δακτυλίου, εντός του οποίου εμφανίζεται το χάος, σχετίζεται με το εύρος Δa του συντονισμού. Η παρουσία περισσοτέρων του ενός πλανητών στο μοντέλο μας (π.χ. 4Π), αλλάζει αυτήν την εικόνα αλλά, όπως δείχνουν τα αποτελέσματά μας, ο 2-τόρος μάλλον διαταράσσεται παρά καταστρέφεται. Η χρονική διάρκεια της προσκολλητικής φάσης αναμένεται βέβαια να είναι διαφορετική από τροχιά σε τροχιά και από συντονισμό σε συντονισμό. Τα αποτελέσματά μας δεν επιτρέπουν την εκτίμηση της διασποράς της χρονικής διάρκειας της προσκολλητικής φάσης, καθώς αυτή είναι προφανώς μεγαλύτερη από το συνολικό χρόνο ολοκλήρωσης ($120 \cdot 10^6$ χρόνια).

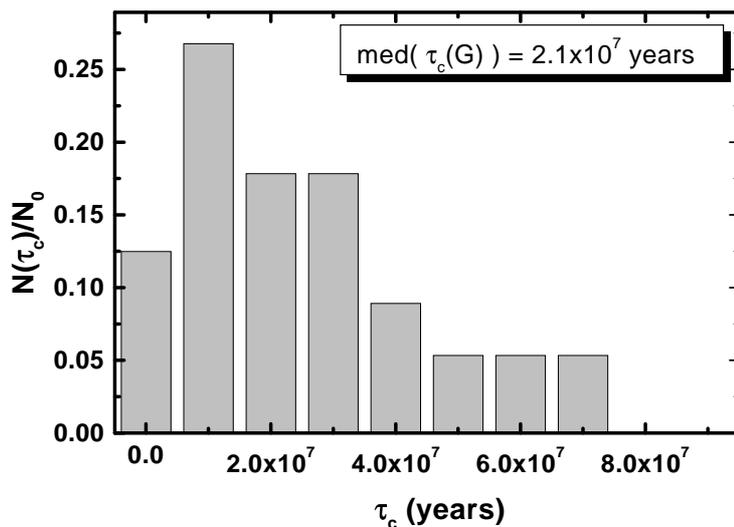
Η εμφάνιση ευσταθούς χάους στους συντονισμούς μέσης κίνησης με το Δ δείχνει να έχει, τελικά, ενιαία ερμηνεία. Η μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών για τον αντίστοιχο λόγο συντονισμού $p/(p+q)$ συνεπάγεται την απουσία ενός ισχυρού, αιώνιας φύσης, μηχανισμού αστάθειας. Συγκεκριμένα, όπως αναλύσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο χαοτικός βρόχος που σε άλλους συντονισμούς συνδέει τις περιοχές λίκνισης και εσωτερικής περιστροφής του $\phi = \varpi - \varpi'$ δεν υπάρχει, αφού δεν υφίσταται η αντίστοιχη ασταθής περιοδική τροχιά που θα διαμέριζε το επίπεδο (h, k) σε τρεις περιοχές. Κατά συνέπεια δεν υπάρχει μηχανισμός



Σχήμα 4.15: (a) Το ιστόγραμμα του χρόνου αυτοσυσχέτισης της δράσης L . Η διάμεσος της κατανομής του $\tau_c(L)$ είναι της τάξης του T_L .

ικανός να μεταβάλει σημαντικά την τιμή της ελεύθερης εκκεντρότητας σε χρόνους της τάξης της περιόδου λίκνισης ($\phi \sim 10^5$ έτη). Τονίζουμε ότι, πηγαινόντας από το μοντέλο (3EΠ) στο (4Π), η τοπολογία του επιπέδου (h, k) στη γειτονιά του συντονισμού θα μεταβληθεί μόνο αν πληρείται η συνθήκη ύπαρξης αιώνιου συντονισμού (για κάποιες τιμές των a και i).

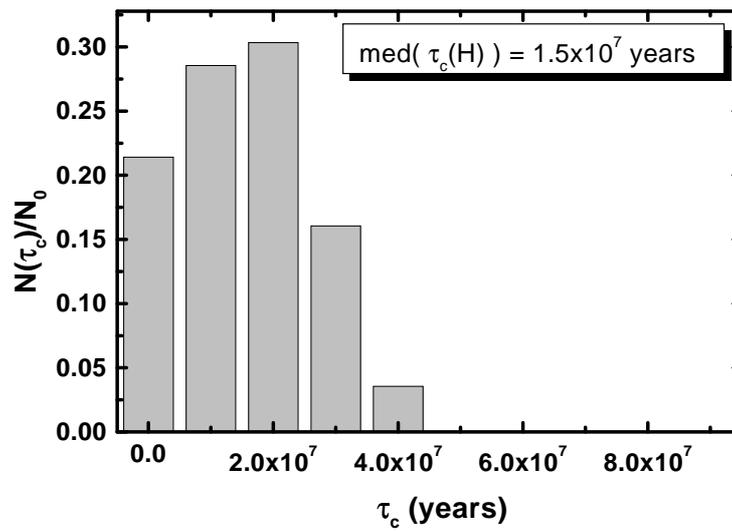
Η χαοτική κίνηση που εμφανίζεται στους συντονισμούς 11/4, 18/7, 22/9 και 13/6 οφείλεται, κατά κύριο λόγο, στην επικάλυψη των υπο-συντονισμών, δηλαδή των αρμονικών που απαρτίζουν τον συντονισμό μέσης κίνησης στο αναπτύγμα της παρελκτικής συνάρτησης. Το αποτέλεσμα της πλήρους επικάλυψης είναι η εμφάνιση ενός ‘αργού’ χάους (τύπου διάχυσης), σε συμφωνία με τη θεωρία των Murray & Holman (1997) για το 2-διάστατο (EΠ). Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών είναι αναγκαία συνθήκη, όχι όμως και ικανή, για την ισχύ του μοντέλου των Murray & Holman (1997). Η επικάλυψη των υπο-συντονισμών, τα κέντρα των οποίων αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του a , εξαναγκάζει τον ημιάξονα σε χαοτικές μεταβολές. Το να συσχετίσει όμως κανείς τις μεταβολές του a με έναν αντίστοιχο ‘τυχαίο βηματισμό’ του e (όπως οι Murray & Holman 1997) δεν είναι ένα απλό βήμα. Στην εξωτερική ζώνη, όπου αυτοί οι συγγραφείς εφάρμοσαν τη θεωρία τους, η επικάλυψη των υπο-συντονισμών είναι σχεδόν πλήρης για κάθε τιμή της e και επομένως η χαοτική εξέλιξη της e εξασφαλισμένη. Αυτό όμως δεν αποτελεί και τον κανόνα για τους συντονισμούς της εσωτερικής ζώνης. Η εκκεντρότητα των τροχιών που εμείς χαρακτηρίζουμε ως ευσταθώς χαοτικές σίγουρα δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι ακολουθεί τυχαίο βηματισμό. Αυτή η παρατήρηση έχει να κάνει με τη μακροχρόνια διατήρηση των γραμμικών συσχετίσεων, κάτι που δεν συμβαίνει στον τυχαίο βηματισμό. Αν η κίνηση είναι η τυπική χαοτική, τότε τα ‘άλματα’ της εκκεντρότητας θα έπρεπε (ανεξαρτήτως αν είναι μικρού πλάτους) να μη συσχετίζονται γραμμικά για $t > T_L$. Για το λόγο αυτό εμείς διαχωρίζουμε την αργή διάχυση των Murray & Holman (1997) από το ευσταθές χάος. Προκειμένου να εμφανιστεί το φαινόμενο



Σχήμα 4.15: (b) Ομοίως με το Σχ. 4.14a, αλλά για τη δράση G . Η διάμεσος της κατανομής έχει τιμή της τάξης των $10^3 T_L$.

του ευσταθούς χάους, θα πρέπει η επικάλυψη των υπο-συντονισμών να μην είναι πλήρης, έτσι ώστε να μη δημιουργηθεί μία συνεκτική χαοτική ζώνη κατά μήκος του άξονα της ελεύθερης εκκεντρότητας. Επομένως θα υπάρχουν υποσύνολα του χώρου των φάσεων στα οποία μία δεύτερη ποσότητα, εκτός της 'ενέργειας', παραμένει σχεδόν σταθερή, δηλαδή θα υπάρχει ένα δεύτερο μη-μονωτικό (τοπικό) ολοκλήρωμα της κίνησης. Είναι βέβαια φανερό ότι αυτή η εικόνα μπορεί να υπάρξει μόνο σε συστήματα με $n \geq 3$ βαθμούς ελευθερίας και όχι στο μοντέλο των Murray & Holman (1997). Αν υπάρχει ένα δεύτερο τοπικό ολοκλήρωμα, η τροχιά στο χώρο των φάσεων αναμένεται να εξελίσσεται με τον τρόπο που περιγράψαμε προηγουμένως, δηλαδή να είναι προσκολλητική γύρω από μία πολλαπλότητα μικρότερης διάστασης από αυτήν της ισο-ενεργειακής επιφάνειας.

Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες A8 και B9, που αναφέρονται στο Παράρτημα Γ (Βιογραφικό Σημείωμα).



Σχήμα 4.15: c Ομοίως με τα Σχ. 4.14a και 4.14b, αλλά για τη δράση H . Η διάμεσος της κατανομής έχει τιμή της τάξης των $10^3 T_L$.