

Κεφάλαιο 5

Χάος και Διάκενα στη Ζώνη των Αστεροειδών

Συγκριτική μελέτη των συντονισμών μέσης κίνησης

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε το πρόβλημα της εμφάνισης ευσταθώς χαοτικών τροχιών σε συγκεκριμένους συντονισμούς μέσης κίνησης, τόσο στην εξωτερική όσο και στην εσωτερική ζώνη των αστεροειδών. Όπως δείξαμε, αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση αυτού του φαινομένου είναι η μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών με τον αντίστοιχο λόγο συντονισμού, για ελλειπτική τροχιά του Δία. Η συνθήκη αυτή δεν είναι όμως ικανή, αφού για την εμφάνιση αυτού του φαινομένου θα πρέπει η επικάλυψη των υπο-συντονισμών του (ΕΠ) να μην είναι πλήρης. Επιπλέον, σε μοντέλα με περισσότερους του ενός πλανήτες, η διεύρυνση της επικάλυψης των υπο-συντονισμών θα πρέπει να είναι αμελητέα και δε θα πρέπει να εμφανίζονται αιώνιοι συντονισμοί σε αυτήν την περιοχή. Στο κεφάλαιο αυτό θα προχωρήσουμε στη συστηματική μελέτη των συντονισμών μέσης κίνησης με το Δία οι οποίοι βρίσκονται στη ζώνη των αστεροειδών.

Το πλήθος των συντονισμών μέσης κίνησης είναι θεωρητικά άπειρο, αλλά η ‘ισχύς’ κάθε συντονισμού είναι ταχέως φθίνουσα συνάρτηση της τάξης του. Για το λόγο αυτό αποφασίσαμε να περιοριστούμε στη μελέτη των συντονισμών μέχρι τάξης $q = 9$ στην εσωτερική κύρια ζώνη ($1.9\text{AU} \leq a \leq 3.3\text{AU}$). Στην εξωτερική ζώνη ($3.3\text{AU} \leq a \leq 4.0\text{AU}$), όπου η χαοτική κίνηση είναι εντονώτερη, θα μελετήσουμε τους συντονισμούς τάξης $q \leq 7$. Σκοπός της δικής μας μελέτης είναι να καταγράψουμε ποιοι συντονισμοί (και μέσω ποιας διαδικασίας) μπορούν να οδηγήσουν σε διαφυγή τους αστεροειδείς μέσα σε ρεαλιστικά χρονικά διαστήματα, απαντώντας έτσι στο ερώτημα: αν η χαοτική κίνηση είναι ο κανόνας και όχι η εξαίρεση στους συντονισμούς μέσης κίνησης, γιατί παρατηρούμε μόνο τα συγκεκριμένα 5 διάκενα Kirkwood στην κατανομή των αστεροειδών και όχι περισσότερα; Όπως θα δείξουμε παρακάτω, παρά την παρουσία χαοτικής κίνησης σε ολόκληρη τη ζώνη, ελάχιστοι είναι οι συντονισμοί που μπορούν, σε σύντομα χρονικά διαστήματα, να οδηγήσουν τις τροχιές των αστεροειδών σε μεγάλου πλάτους μεταβολές της εκκεντρότητας. Ο λόγος δεν είναι απλά η εξάρτηση του χρόνου διαφυγής από την τάξη του συντονισμού, αλλά και η διαφορετική διαδικασία μεταφοράς που ακολουθούν οι

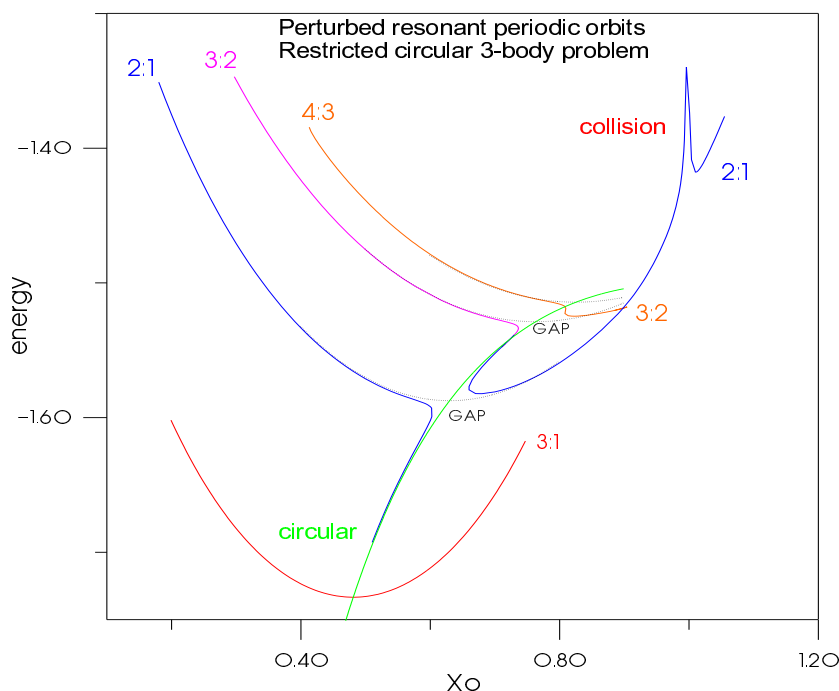
τροχιές σε διαφορετικούς συντονισμούς. Έτσι, ο διαρκής εμπλουτισμός τα τελευταία χρόνια του καταλόγου των πραγματικών αστεροειδών που ακολουθούν χαοτικές τροχιές δεν αποτελεί παράδοξο, δεδομένου ότι η μεταφορά χαοτικών τροχιών μέσω των περισσότερων συντονισμών μέσης κίνησης είναι μια εξαιρετικά αργή διαδικασία.

5.1 Αναζήτηση Περιοδικών Τροχιών

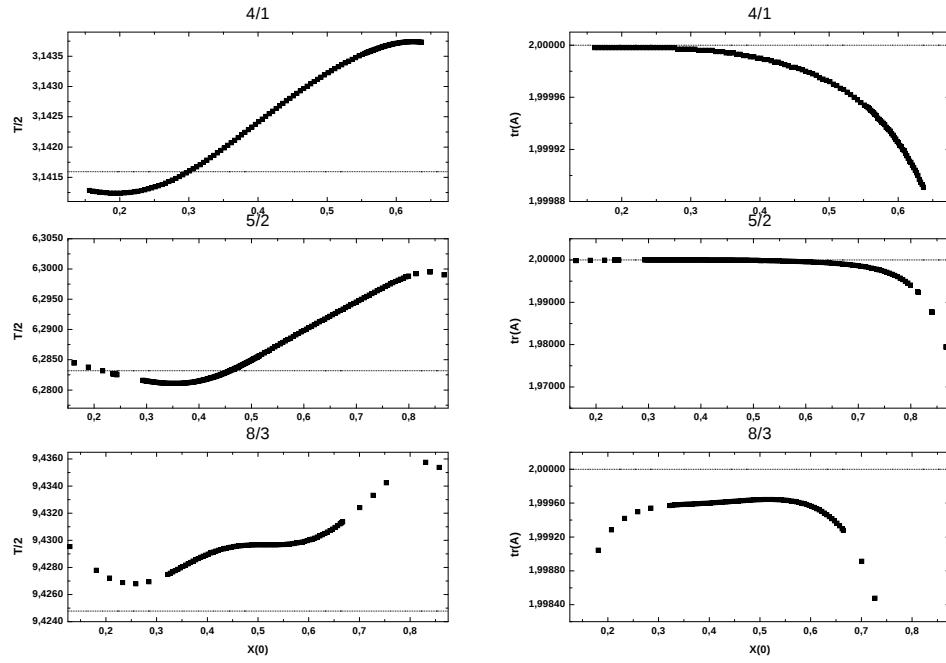
Στο πλαίσιο αυτής της μελέτης θα θεωρήσουμε ότι η ζώνη των αστεροειδών αποτελείται από δύο, διακριτά από δυναμικής απόψεως, τμήματα. Αυτό άλλωστε συμπίπτει και με τις παρατηρήσεις, σύμφωνα με τις οποίες ο αριθμός των αστεροειδών με $a \geq 3.3\text{AU}$ (δηλαδή πέραν του συντονισμού $2/1$) είναι πολύ μικρός. Έτσι ορίζουμε την εσωτερική ζώνη ως την περιοχή με $1.9\text{AU} \leq a \leq 3.3\text{AU}$, δηλαδή ανάμεσα στους συντονισμούς $9/2$ και $2/1$. Μέσα σε αυτήν την περιοχή τιμών του a υπάρχουν 21 συντονισμοί μέσης κίνησης με το Δία, με $q \leq 9$. Η εξωτερική ζώνη αντιστοιχεί στην περιοχή $3.3\text{AU} \leq a \leq 3.9\text{AU}$. Για αυτές τις τιμές του a υπάρχουν 12 συντονισμοί τάξης $q \leq 7$. Προσθέτοντας στη μελέτη μας και τον συντονισμό $3/2$ ($a_{res} \simeq 3.97\text{AU}$), όπου παρατηρείται η ομάδα των αστεροειδών Hildas (144 σώματα), το πλήθος των συντονισμών που θα μελετήσουμε είναι 34.

Στο μοντέλο (ΚΠ) οι συντονισμοί με λόγο $n/n' = (p+q)/p$ χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη δύο κλάδων ελλειπτικών περιοδικών τροχιών, συμμετρικών ως προς τον άξονα Ox του συνοδικού συστήματος αναφοράς, που διακλαδίζονται από την κυκλική οικογένεια των περιοδικών τροχιών (εκτός των περιπτώσεων με $q = 1$, βλ. Σχ. 5.1). Όπως και στα προηγούμενα κεφάλαια, μας ενδιαφέρει αν κάποιες από αυτές τις περιοδικές τροχιές συνεχίζονται (i) για τρι-διάστατο χώρο μορφής (3ΚΠ) και, κατά μείζονα λόγο, (ii) για ελλειπτική τροχιά του Δία (ΕΠ). Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι συνθήκες που πρέπει να πληρούνται για να υπάρχουν σημεία διακλάδωσης (περιοδικές τροχιές του ΚΠ) και να έχουμε συνέχιση των περιοδικών τροχιών είναι, αντίστοιχα, (i) το ίχνος του μονόδρομου πίνακα για μια τροχιά του (ΚΠ) να έχει τιμή $\text{tr}(A) = \pm 2$ (κρίσιμη κατακόρυφη ευστάθεια), και (ii) η περίοδος της ελλειπτικής περιοδικής τροχιάς του (ΚΠ) να είναι ίση με την αδιατάρακτη τιμή, $T = pT' = p2\pi$.

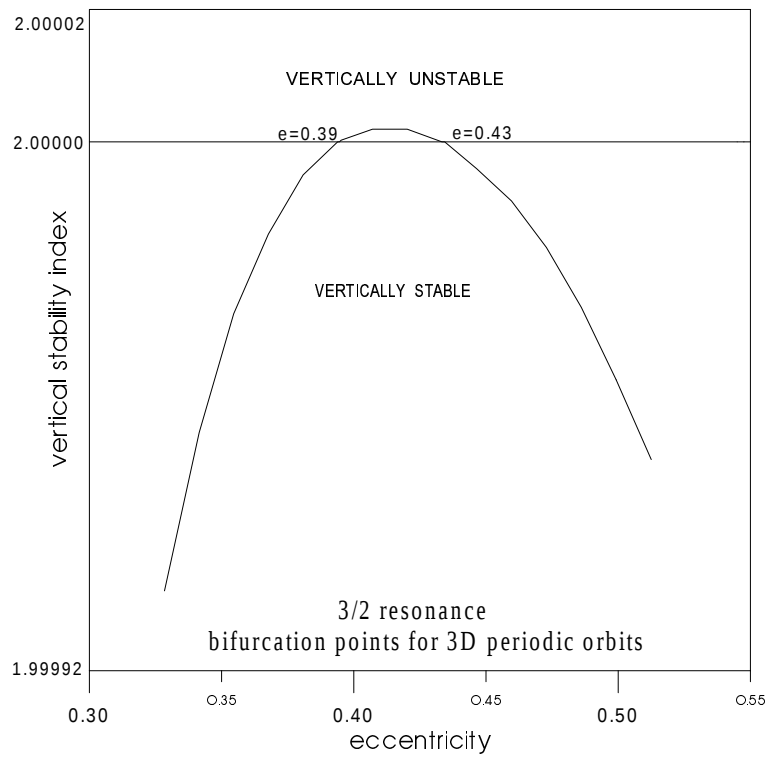
Τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι οι συνθήκες συνέχισης των περιοδικών τροχιών δεν πληρούνται για τη μεγάλη πλειοψηφία των υπό μελέτη συντονισμών. Συγκεκριμένα, από τους 21 συντονισμούς της εσωτερικής ζώνης μόνο 4 έχουν περιοδικές τροχιές στο (ΕΠ): οι $2/1$, $3/1$, $4/1$ και $5/2$. Από αυτούς μόνο οι $2/1$ και $3/1$ έχουν και 3-διάστατες περιοδικές τροχιές. Στην εξωτερική ζώνη οι συντονισμοί που έχουν περιοδικές τροχιές στο (ΕΠ) είναι οι $5/3$, $3/2$, $7/4$, και $11/7$ (4 από τους 13), ενώ 3-διάστατες περιοδικές τροχιές υπάρχουν στους $5/3$, $3/2$ και $9/5$. Παρατηρούμε ότι η συνέχιση των περιοδικών τροχιών εμφανίζεται μόνο για συντονισμούς με $q \leq 3$ στην εσωτερική και $q \leq 4$ στην εξωτερική ζώνη. Η πιο σημαντική όμως παρατήρηση είναι ότι οι συντονισμοί της εσωτερικής ζώνης που έχουν περιοδικές τροχιές στο (ΕΠ) αντιστοιχούν στη θέση των γνωστών διάκενων Kirkwood, με εξαίρεση το διάκενο της περιοχής του συντονισμού $7/3$. Η μελέτη του συντονισμού $7/3$ θα μας απασχολήσει σε επόμενη παράγραφο. Επίσης, οι συντονισμοί που έχουν περιοδικές τροχιές στην εξωτερική ζώνη αντιστοιχούν στα σημαντικότερα 'διάκενα' της κατανομής του ημιιάξονα των αστεροειδών της εξωτερικής ζώνης (με εξαίρεση την περιοχή του συντονισμού $8/5$), τα οποία παρατήρησαν



Σχήμα 5.1: Οικογένειες περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) στο χώρο $(x(0), C)$. Φαίνεται η κυκλική οικογένεια, καθώς και οι ελλειπτικοί κλάδοι των συντονισμών $3/1$, $2/1$, $3/2$ και $4/3$. Επίσης δίνεται και το σημείο σύγκρουσης με το Δία, για την οικογένεια του $2/1$. Οι στικτές καμπύλες παριστάνουν τις οικογένειες του αδιατάρακτου προβλήματος ($\mu = 0$). Προσέξτε ότι, για τους συντονισμούς 1ης τάξης, οι ελλειπτικοί κλάδοι δεν ενώνονται ομαλά στην κυκλική οικογένεια, με αποτέλεσμα να εμφανίζονται ‘κενά’ ελλειπτικών περιοδικών τροχιών. Ανταυτού, για συντονισμούς της μορφής $p/(p+1)$, ο περικεντρικός κλάδος του συντονισμού $p = k+1$ (π.χ. $4/3$) ενώνεται με τον αποκεντρικό κλάδο του συντονισμού $p = k$ (αντίστοιχα $3/2$), μέσω ενός κλάδου κυκλικών περιοδικών τροχιών.



Σχήμα 5.2: (α) Οικογένειες περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) στο χώρο $(x(0), T/2)$, για τους συντονισμούς 4/1, 5/2 και 8/3. Για το (ΕΠ) εμφανίζονται ένα (4/1), δύο (5/2) και κανένα (8/3) σημείο διακλάδωσης, αντίστοιχα. Κανένα σημείο διακλάδωσης για το (3ΚΠ) δεν υπάρχει, για αυτές τις τιμές του λόγου συντονισμού.



Σχήμα 5.2: (β) Η οικογένεια του συντονισμού 3/2 δίνεται ως παράδειγμα διακλάδωσης στο (3ΚΠ). Στον οριζόντιο άξονα δίνεται η εκκεντρότητα της περιοδικής τροχιάς. Φαίνεται η ύπαρξη δύο περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) με κρίσιμη κατακόρυφη ευστάθεια, για $e = 0.39$ και $e = 0.43$.

οι Holman & Murray (1996). Τα αποτελέσματα αυτά παρουσιάζονται συνοπτικά και στον Πίνακα 5.1, για συντονισμούς της εσωτερικής ζώνης με $q \leq 7$ και της εξωτερικής ζώνης με $q \leq 5$. Μερικά πραδείγματα δίνονται και στα Σχ. 5.2α-β.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν από την παραπάνω μελέτη είναι παρόμοια με αυτά που αναλύσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο πιο αποδοτικός μηχανισμός μεταφοράς κατά μήκος του άξονα της εκκεντρότητας, στο πλαίσιο του ΠΤΣ, είναι απών από τους περισσότερους συντονισμούς μέσης κίνησης. Επιπλέον, έχοντας αναλύσει προηγουμένως (Κεφάλαιο 4) μερικούς συντονισμούς ακόμη υψηλότερης τάξης, είναι δύσκολο να φανταστούμε την ύπαρξη περιοδικών τροχιών σε συντονισμούς τάξης $q \geq 10$. Άρα η χαοτική κίνηση, στο πλαίσιο του προβλήματος των τριών σωμάτων, είναι, κατά κανόνα, συνέπεια της επικάλυψης των υπο-συντονισμών κάθε ρητού λόγου, $pn - (p + q)n' \approx 0$. Χαοτικές τροχιές, που ξεκινούν στη γειτονιά αυτών των συντονισμών, αναμένεται να εξελίσσονται στο χώρο των φάσεων ακολουθώντας μια αργή διαδικασία, τύπου διάχυσης. Ο ρυθμός διάχυσης των χαοτικών τροχιών, αλλά και το ποσοστό των ευσταθώς χαοτικών τροχιών, εξαρτάται βέβαια από το ποσοστό επικάλυψης των υπο-συντονισμών και δεν μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια βάσει αναλυτικών σχέσεων. Αντίθετα, στους συντονισμούς χαμηλής τάξης που έχουν περιοδικές τροχιές, η εξέλιξη των χαοτικών τροχιών αναμένουμε ότι θα χαρακτηρίζεται από μεγάλα, διαλλειπτικά, άλματα της εκκεντρότητας, λόγω της μεταφοράς κατά μήκος της ασταθούς περιοδικής τροχιάς γύρω από τη νησίδα λίκνισης του $\phi = \pi - \pi'$. Οι μεταβολές που επιφέρει, στην περιοχή κάθε συντονισμού, η εισαγωγή περισσότερων πλανητών στο μοντέλο δεν είναι δυνατό να εκτιμηθούν εκ των προτέρων. Με σκοπό να ελέγξουμε την ισχύ των παραπάνω προτάσεων, θα προχωρήσουμε σε αριθμητικά πειράματα, τόσο στο πλαίσιο του μοντέλου (3ΕΠ) όσο και του (4Π).

5.2 Αριθμητικά Πειράματα

Πραγματοποιήσαμε αριθμητική ολοκλήρωση των τροχιών δύο ομάδων αρχικών συνθηκών, με σκοπό τη μελέτη της μακροχρόνιας εξέλιξης χαοτικών τροχιών που ξεκινούν από τη γειτονιά των συντονισμών μέσης κίνησης. Οι αρχικές συνθήκες των πλανητών δόθηκαν για την εποχή 2001 Feb 26.0 (Astronomical Almanac, 2001). Για να διευκολύνουμε την επιλογή των αρχικών συνθηκών για τις τροχιές των ‘αστεροειδών’, ολοκληρώσαμε πρώτα τις τροχιές των πλανητών μέχρι ο Δίας να φτάσει στο περιήλιο της τροχιάς του. Αν κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης η τροχιά κάποιου σωματιδίου πλησίαζε τον Ήλιο σε απόσταση μικρότερη των $0.005 \text{ AU} \approx R_{\odot}$ ή προσέγγιζε το Δία σε απόσταση μικρότερη από 1.5 φορές την ακτίνα Hill, θεωρούσαμε ότι ο ‘αστεροειδής’ έχει διαφύγει από τη ζώνη. Χρησιμοποιήσαμε και πάλι τη συμπλεκτική μέθοδο ολοκλήρωσης MVS (κώδικας SWIFT) με χρονικό βήμα $\delta t = 10^{-2} \cdot T' \approx 43$ ημέρες¹.

¹ Η ακρίβεια της ολοκλήρωσης είναι συγκρίσιμη με αυτήν της μεθόδου μεταβλητού βήματος Bulirsch-Stoer (βλ. Press et al. 1986), αν η παράμετρος ακρίβειας ϵ στην τελευταία τεθεί ίση με $\epsilon = \mathcal{O}(\mu \tau^2) \approx 10^{-7}$, όπου $\tau = \delta t / T'$. Για χρόνους ολοκλήρωσης $t_{int} \geq 10^8$ χρόνια, το βήμα που συνήθως επιλέγεται για τη χρήση της MVS είναι $\delta t = 20 - 80$ μέρες.

5.2.1 Επιλογή Αρχικών Συνθηκών

Στο πρώτο μας πείραμα (στο εξής T1) σαρώσαμε την εσωτερική ‘κύρια ζώνη’ του (3ΕΠ), χρησιμοποιώντας 4 ομάδες 280 σωματιδίων, με ομοιόμορφη κατανομή των αρχικών τιμών του a στην περιοχή $2.0\text{AU} \leq a \leq 3.4\text{AU}$ ($\Delta a = 0.005\text{AU}$). Τα σωματίδια κάθε ομάδας είχαν την ίδια τιμή αρχικής εκκεντρότητας, $e_0 = 0.05, 0.1, 0.15$ και 0.2 αντίστοιχα. Οι αρχικές τιμές των υπόλοιπων στοιχείων της τροχιάς ήταν ίδιες για όλα τα σωματίδια, $i = 5^\circ$, $\Omega = \Omega'$, $\omega = \omega'$ και $M = M'$. Ο σκοπός του πειράματος αυτού ήταν να εντοπίσουμε τις κύριες χαοτικές περιοχές (συντονισμούς) της ‘ζώνης’ και να ελέγξουμε τις ιδιότητες μεταφοράς των χαοτικών τροχιών για κάθε μία από αυτές (διαλλειπτότητα ή διάχυση). Για το λόγο αυτό ολοκληρώσαμε πρώτα τις εξισώσεις μεταβολών για $t = 2 \cdot 10^6$ χρόνια. Για όσες τροχιές βρέθηκε ότι είναι αρκετά χαοτικές ($T_L \leq 2 \cdot 10^5$ χρόνια), οι εξισώσεις κίνησης ολοκληρώθηκαν για $t = 250 \cdot 10^6$ χρόνια.

Το βήμα Δa που χρησιμοποιήσαμε στο πείραμα T1 είναι μεγαλύτερο από το εύρος κάποιων συντονισμών υψηλής τάξης. Υπενθυμίζουμε ότι, στην προσέγγιση του εκκρεμούς (βλ. Κεφάλαιο 2), το εύρος του συντονισμού $p/(p+q)$ είναι ανάλογο του $\Delta J \sim \sqrt{\mu e^q}$, όπου $J = (\sqrt{\mu_1 a} - \sqrt{\mu_1 a_0})/p$ και a_0 η αδιατάρακτη τιμή του συντονισμού, η οποία δίνεται από τον 3ο νόμο του Kepler. Έτσι με σκοπό να μελετήσουμε τη χαοτική κίνηση εντός των ‘στενών’ συντονισμών, καταφύγαμε σε ένα δεύτερο αριθμητικό πείραμα (T2) επιλέγοντας αρχικές συνθήκες εντός των συντονισμών της εσωτερικής (αντίστοιχα εξωτερικής) ζώνης τάξης $q \leq 7$ (αντίστοιχα $q \leq 5$). Τρία σωματίδια τέθηκαν αρχικά σε κάθε συντονισμό, με τρεις διαφορετικές τιμές εκκεντρότητας, $e_0 = 0.05, 0.1$ και 0.15 . Οι αρχικές τιμές των i , Ω και ω ήταν ίδιες με αυτές των σωματιδίων του T1. Η αρχική τιμή της μέσης ανωμαλίας, M , επιλέχθηκε θέτοντας την τιμή της κρίσιμης γωνίας, $\sigma = p\lambda - (p+q)\lambda' + q\varpi$, ίση με την τιμή για την οποία εμφανίζεται, στο (ΚΠ), το κέντρο λίκνισης του συντονισμού ($\sigma = 0$ για περιττό q και $\sigma = \pi$ για άρτιο q). Τέλος, οι αρχικές τιμές του a επιλέχθηκαν μετά από τη διεξαγωγή μιας σειράς ολοκληρώσεων για μικρούς χρόνους ($t_{int} \approx 5 \cdot 10^4$ χρόνια), στις οποίες μεταβάλαμε την τιμή του a κατά $\delta a \sim 10^{-2}\text{AU}$ σε σχέση με την τιμή a_{res} . Με τον τρόπο αυτό καταφέραμε να θέσουμε σχεδόν όλα τα 69 σωματίδια στη χαοτική ζώνη του αντίστοιχου συντονισμού. Οι εξισώσεις μεταβολών ολοκληρώθηκαν για $t = 5 \cdot 10^6$ χρόνια και οι εξισώσεις κίνησης για $t = 250 \cdot 10^6$ χρόνια. Και οι δύο ολοκληρώσεις έγιναν τόσο στο πλαίσιο του (3ΕΠ) όσο και στο πλαίσιο του (4Π), με σκοπό να εκτιμήσουμε το αποτέλεσμα που επιφέρει η εισαγωγή περισσότερων πλανητών στο μοντέλο.

Σημειώνουμε ότι, κατά τη διαδικασία επιλογής της αρχικής τιμής του a , καταφέραμε να εντοπίσουμε αρκετές χαοτικές τροχιές (όπως φάνηκε από τη συμπεριφορά των κρίσιμων γωνιών) στους συντονισμούς υψηλής τάξης. Μάλιστα, στις περισσότερες περιπτώσεις, δεν καταφέραμε να εντοπίσουμε κάποια περιοχή ευσταθούς λίκνισης στο κέντρο του συντονισμού. Αυτό σημαίνει ότι, ακόμη κι αν υπάρχει κάποια μικρού εύρους περιοχή ευστάθειας, η χαοτική κίνηση φαίνεται να είναι προεξάρχουσα στους συντονισμούς υψηλής τάξης. Έτσι, παρότι ένα μεγαλύτερο πλήθος υποθετικών αστεροειδών είναι απαραίτητο για τη λεπτομερέστερη ανάλυση της χαοτικής κίνησης εντός των συντονισμών, αναμένουμε αυτά τα λίγα σωματίδια που ολοκληρώσαμε να αποτελούν ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα, όσον αφορά στη μακροχρόνια εξέλιξη των χαοτικών τροχιών του κάθε συντονισμού.

5.2.2 Υπολογισμός του Χρόνου Lyapunov

Συμβολίζουμε με $v(t)$ τη λύση των εξισώσεων μεταβολών, δηλαδή το μέτρο του διανύσματος μεταβολής τη χρονική στιγμή t . Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 2, αν η τροχιά είναι χαοτική το $v(t)$ αυξάνει εκθετικά με το χρόνο και το όριο

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{v(t)}{v(0)} \quad (5.1)$$

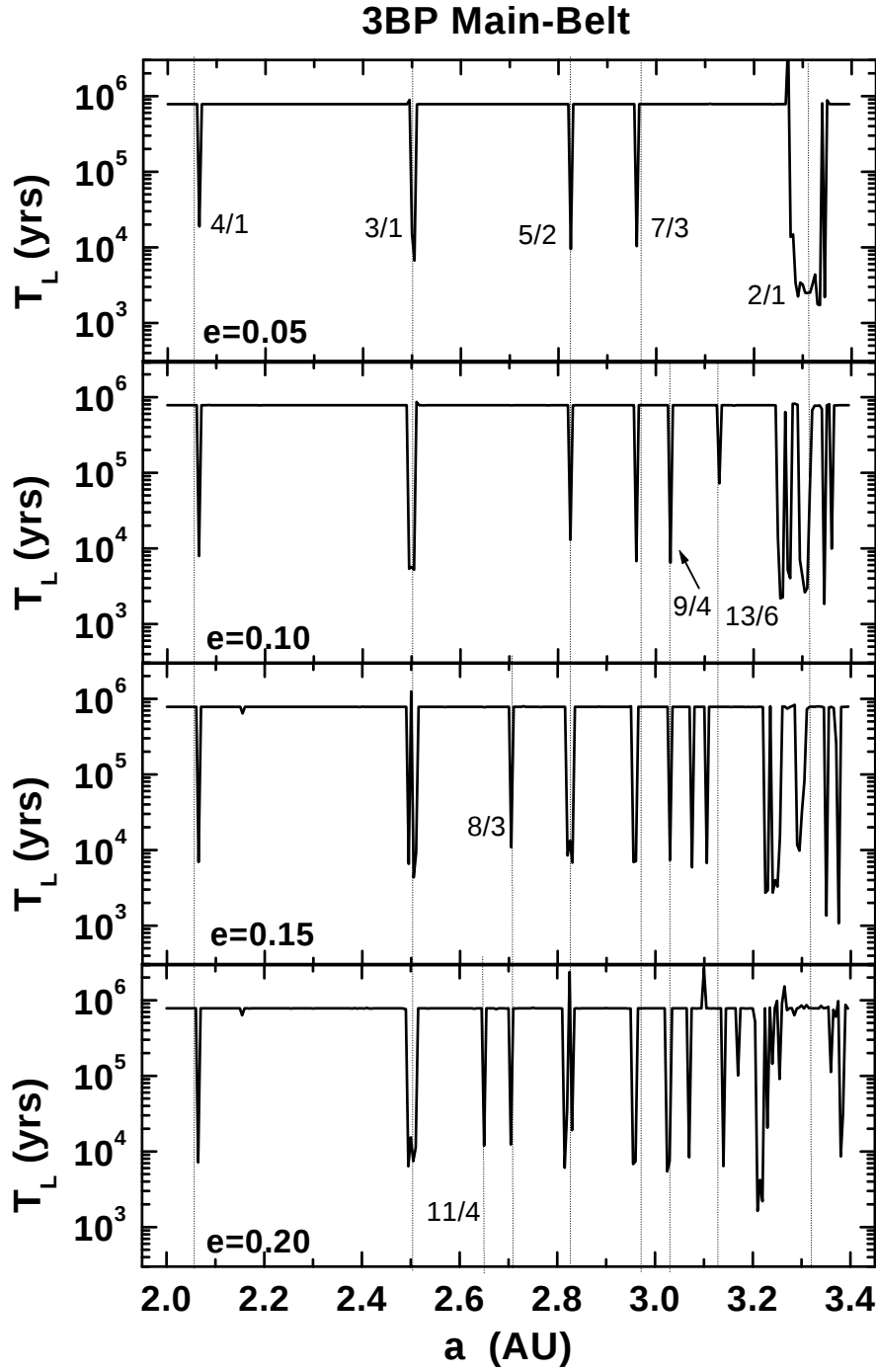
είναι η τιμή του μέγιστου εκθέτη Lyapunov. Το αντίστροφό του, $T_L = 1/\gamma$, είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος Lyapunov. Η τιμή του γ υπολογίζεται, μέσω γραμμικής παλινδρόμησης, ως η κλίση της ευθείας $t - \ln v(t)$.

Στο Σχ. 5.3 δίνονται γραφικά τα αποτελέσματα του πειράματος T1. Ένα μικρό ποσοστό σωματιδίων (από 7% για $e_0 = 0.05$ μέχρι 10% για $e_0 = 0.2$) ακολουθούν χαοτικές τροχιές. Όπως φαίνεται και στο σχήμα, οι αρχικές τιμές του a για αυτά τα σωματίδια συμπίπτουν με τη θέση των κύριων συντονισμών μέσης κίνησης. Για $e_0 = 0.05$ χαοτικές τροχιές εμφανίζονται μόνο στην περιοχή των συντονισμών $2/1$, $3/1$, $4/1$, $5/2$ και $7/3$, δηλαδή τους συντονισμούς που αντιστοιχούν στα διάκενα Kirkwood. Αυξανόμενης της τιμής του e_0 , όλο και περισσότεροι (και ασθενέστεροι) συντονισμοί εμφανίζονται να οδηγούν τα σωματίδια σε χαοτική κίνηση. Για $e_0 = 0.2$ οι περισσότεροι από τους συντονισμούς που δίνονται στον Πίνακα 5.1 παράγουν χαοτικές τροχιές, ενώ στο συντονισμό $2/1$ εμφανίζεται μια μεγάλη νησίδα ευσταθούς λίκνισης.

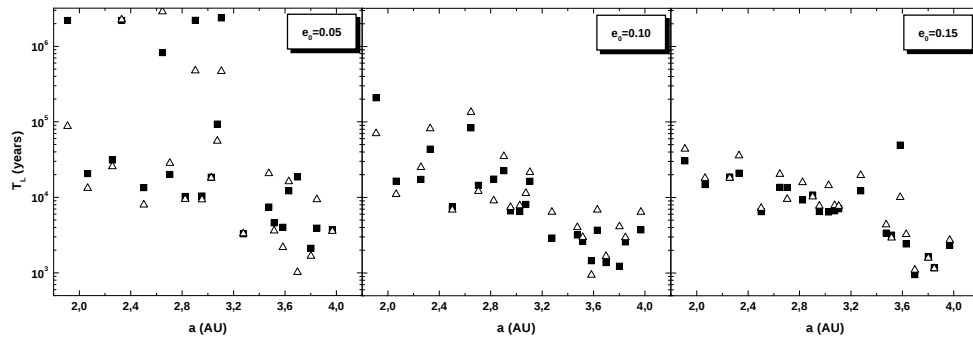
Ας εστιάσουμε τώρα την προσοχή μας στους συντονισμούς υψηλής τάξης. Τα αποτελέσματα του πειράματος T2 δίνονται γραφικά στο Σχ. 5.4 (βλ. επίσης Πίνακα 5.1). Σχεδόν όλα τα σωματίδια ακολουθούν χαοτικές τροχιές, τόσο στο πλαίσιο του μοντέλου (3ΕΠ) όσο και του (4Π). Μόνο 5/69 σωματίδια στο (3ΕΠ) και 2/69 στο (4Π), όλα με $e_0 = 0.05$, φαίνεται να ακολουθούν τακτική τροχιά. Παρατηρήστε ότι, όπως είναι αναμενόμενο, η τιμή του T_L μειώνεται διαρκώς (δηλαδή οι τροχιές έχουν μεγαλύτερο βαθμό στοχαστικότητας) καθώς (α) προσεγγίζουμε το Δία (αύξηση του a) και (β) αυξάνεται η τιμή του e_0 . Σχεδόν όλες οι χαοτικές τροχιές έχουν $T_L \leq 10^5$ χρόνια και περίπου οι μισές από αυτές $T_L \leq 10^4$ χρόνια. Παρατηρήστε επίσης ότι η διαφορά ανάμεσα στα αποτελέσματα του μοντέλου (3ΕΠ) και αυτά του (4Π) είναι αμελητέα, σε στατιστικό επίπεδο. Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει ότι, οι τροχιές που ξεκινούν από τους συντονισμούς μέσης κίνησης με το Δία, έχουν βαθμό στοχαστικότητας (T_L) που καθορίζεται ήδη από το πρόβλημα των τριών σωμάτων. Από την άλλη οι ιδιότητες μεταφοράς των τροχιών δεν είναι απαραίτητο ότι θα διατηρηθούν, αν έχουμε περισσότερους του ενός πλανήτες στο μοντέλο, καθώς η τοπολογία του χώρου των φάσεων στην ευρύτερη περιοχή του συντονισμού είναι πιθανό να μεταβληθεί.

5.2.3 Μακροχρόνια Εξέλιξη των Χαοτικών Τροχιών

Τα αποτελέσματα του πειράματος T1 έδειξαν ότι 8% των σωματιδίων (90/1120) ακολουθούν χαοτικές τροχιές με $T_L \leq 2 \cdot 10^6$ χρόνια. Η πλειοψηφία των σωματιδίων που σχετίζονται με τους συντονισμούς χαμηλής τάξης (πλην μερικών από την περιοχή του $2/1$) διέφυγαν από τη ζώνη πριν το τέλος της ολοκλήρωσης, είτε επειδή πλησίασαν το Δία σε απόσταση μικρότερη της ακτίνας Hill είτε γιατί η περικεντρική τους απόσταση μειώθηκε τόσο ώστε η τροχιά τους



Σχήμα 5.3: Για καθένα από τα 1120 σωματίδια του T1 δίνεται η τιμή του T_L , σε λογαριθμική κλίμακα. Σε κάθε διάγραμμα δίνονται 280 τιμές, που αντιστοιχούν στα 280 σωματίδια της κάθε ομάδας, με e_0 ίση με την τιμή που αναγράφεται στο διάγραμμα. Οι κατακόρυφες στικτές γραμμές δείχνουν τη θέση των αντίστοιχων συντονισμών. Για $e_0 = 0.05$ μόνο οι συντονισμοί 4/1, 3/1, 5/2, 7/3 και 2/1 γίνονται αντιληπτοί, από την ύπαρξη χαοτικών τροχιών. Για μεγαλύτερες τιμές του e_0 μπορούμε να αναγνωρίσουμε όλο και περισσότερους συντονισμούς.



Σχήμα 5.4: Η τιμή του T_L ως συνάρτηση του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς, για τα σωματίδια του T2. Τα τρία διαγράμματα αντιστοιχούν στις τρεις διαφορετικές τιμές της αρχικής εκκεντρότητας. Τα τετράγωνα (μαύρα) σύμβολα αντιστοιχούν στις τροχιές του (3ΕΠ), ενώ τα τρίγωνα στο (4Π). Είναι εμφανές ότι η τιμή του T_L φθίνει καθώς αυξάνουν τόσο το a όσο και η e .

Πίνακας 5.1: Χαρακτηριστικά των συντονισμών μέσης κίνησης στη ζώνη των αστεροειδών. Ο λόγος συντονισμού n/n' δίνεται στην 1η στήλη. Η κατάταξη έχει γίνει κατά αύξουσα τιμή του μεγάλου ημιάξονα της θέσης του συντονισμού, $a = a_0$ (σε AU, 2η στήλη). Η οριζόντια γραμμή διαχωρίζει την εσωτερική από την εξωτερική ζώνη. Στην 3η και 4η στήλη δίνεται η τιμή εκκεντρότητας της περιοδικής τροχιάς του (ΚΠ), η οποία αντιστοιχεί στο σημείο διακλάδωσης (αν αυτό υπάρχει) για το (ΕΠ) ($e' \neq 0$) και το (3ΚΠ) ($i \neq 0$) αντίστοιχα. Οι επόμενες στήλες συνοψίζουν τα αποτελέσματα του αριθμητικού πειράματος T2. Η τιμή του T_L ($\times 10^{-5}$ έτη) αναφέρεται στην τροχιά με $e_0 = 0.1$. Η στήλη Esc δίνει τον αριθμό των σωματιδίων που διέφυγαν πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Η 5η και 6η στήλη αναφέρονται στην ολοκλήρωση των εξισώσεων του (3ΕΠ), ενώ οι δύο τελευταίες στο (4Π).

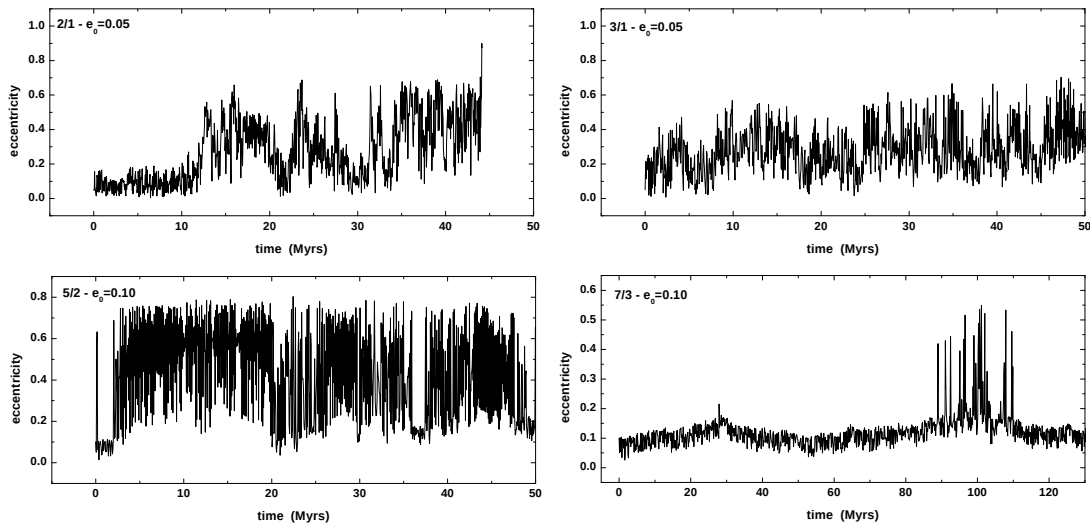
n/n'	a_{res}	$e' \neq 0$	$i \neq 0$	T_L (3ΕΠ)	Esc (3ΕΠ)	T_L (4Π)	Esc (4Π)
9/2	1.91	-	-	2.096	-	0.705	-
4/1	2.06	0.25	-	0.165	3/3	0.110	3/3
7/2	2.26	-	-	0.174	-	0.250	1/3
10/3	2.33	-	-	0.437	-	0.819	-
3/1	2.50	0.00, 0.80	;	0.076	3/3	0.068	3/3
11/4	2.65	-	-	0.835	-	1.345	-
8/3	2.70	-	-	0.145	-	0.121	-
5/2	2.82	0.15, 0.60	-	0.175	3/3	0.090	3/3
12/5	2.90	-	-	0.227	-	0.351	-
7/3	2.96	-	*	0.066	2/3	0.074	3/3
9/4	3.03	-	-	0.065	-	0.078	2/3
11/5	3.08	-	-	0.081	-	0.113	-
13/6	3.11	-	-	0.163	-	0.215	-
2/1	3.28	0.73	0.67, 0.80	0.029	2/3	0.064	3/3
11/6	3.47	-	-	0.032	1/3	0.040	2/3
9/5	3.52	-	0.46;	0.026	3/3	0.030	3/3
7/4	3.58	0.10, 0.36	-	0.015	3/3	0.009	3/3
12/7	3.63	-	-	0.037	-	0.068	-
5/3	3.70	0.00, 0.41	0.30, 0.40	0.014	3/3	0.017	3/3
13/8	3.76	-	-	0.135	-	0.137	-
8/5	3.80	-	-	0.012	3/3	0.041	3/3
11/7	3.85	0.02	-	0.026	1/3	0.029	2/3
3/2	3.97	0.46	0.39, 0.43	0.037	2/3	0.064	3/3

να τέμνει αυτήν του ‘Άρη’ ($q = a(1 - e) \leq 1.5\text{AU}$)². Από την άλλη μεριά, τα σωματίδια που σχετίζονται με τους συντονισμούς υψηλής τάξης, παρέμειναν στη ζώνη για ολόκληρο το χρονικό διάστημα της ολοκλήρωσης. Στα Σχ. 5.5 και 5.6 δίνεται η χρονική εξέλιξη της εκκεντρότητας της τροχιάς μερικών σωματιδίων, που το καθένα σχετίζεται με κάποιον διαφορετικό συντονισμό. Παρατηρούμε ότι, σε συμφωνία με τα αποτελέσματα της παραγράφου 5.2, στους συντονισμούς που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη περιοδικών τροχιών η χρονοσειρά της εκκεντρότητας χαρακτηρίζεται από μεγάλου πλάτους διαλειπτικές μεταβολές, που οδηγούν τους αστεροειδείς σε τροχιές οι οποίες τέμνουν αυτές των μεγάλων πλανητών. Αντίθετα, στους συντονισμούς υψηλής τάξης που δεν έχουν περιοδικές τροχιές, παρατηρούμε μια αργή διάχυση της εκκεντρότητας και ο χρόνος που απαιτείται για να τμήσει η τροχιά κάποια από αυτές των πλανητών είναι, πιθανώς, πολύ μεγαλύτερος από τα $250 \cdot 10^6$ χρόνια της αριθμητικής μας ολοκλήρωσης. Σημειώνουμε ότι, παρά τις μικρές διαφορές στην τιμή του T_L ανάμεσα στα σωματίδια που ολοκλήρωσαμε για $250 \cdot 10^6$ χρόνια, ο χρόνος διαφυγής, T_{esc} , διαφέρει κατά τάξεις μεγέθους, από συντονισμό σε συντονισμό. Έτσι συμπεραίνουμε, από ένα ακόμη πείραμα, ότι ο χρόνος διαφυγής εξαρτάται κατά κύριο λόγο από την τοπολογία του χώρου των φάσεων στην ευρύτερη περιοχή του συντονισμού, παρά από το βαθμό στοχαστικότητας της ίδιας της τροχιάς.

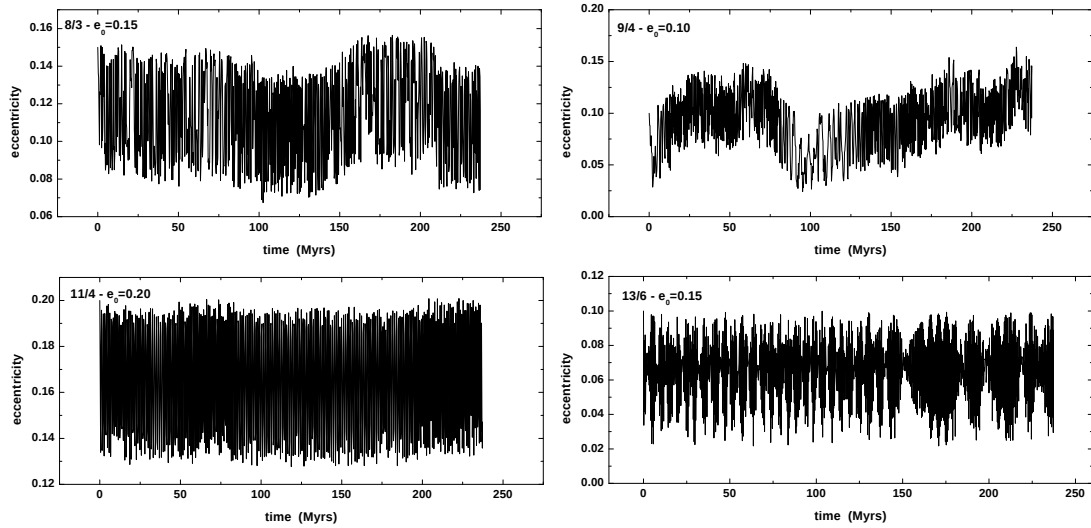
Μία σύνοψη των αποτελεσμάτων του πειράματος T2 (και για τα δύο μοντέλα κίνησης) δίνεται στον Πίνακα 5.1. Στο μοντέλο (3ΕΠ) το 42% των σωματιδίων διαφεύγει από τη ζώνη πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Όλα τα σωματίδια της εξωτερικής ζώνης διαφεύγουν ακολουθώντας ημιπαραβολική τροχιά, αφού προσεγγίσουν το Δία. Αντίθετα τα σωματίδια της εσωτερικής ζώνης έχουν την ίδια εξέλιξη με αυτά που διέφυγαν στο πείραμα T1, δηλαδή οι τροχιές τους κατά κανόνα τέμνουν αυτήν του Άρη. Στο μοντέλο (4Π) το ποσοστό των διαφυγόντων σωματιδίων αυξάνει, όπως ήταν αναμενόμενο, στο 53.6%. Όμως, το υπόλοιπο $\sim 47\%$ των σωματιδίων παραμένει στη ζώνη για $t = 250 \cdot 10^6$ χρόνια, παρά το γεγονός ότι οι τροχιές τους είναι πολύ χαοτικές (μικρό T_L).

Στην ολοκλήρωση των εξισώσεων του (3ΕΠ) τα μόνα σωματίδια που διέφυγαν από την εσωτερική ζώνη ήταν αυτά που ξεκίνησαν από τους συντονισμούς χαμηλής τάξης που αντιστοιχούν στα διάκενα Kirkwood, δηλαδή τους συντονισμούς 2/1, 3/1, 4/1, 5/2 και 7/3. Αυτοί οι συντονισμοί, πλην του 7/3, διακρίνονται για την ύπαρξη περιοδικών τροχιών στο (ΕΠ). Η περίπτωση του 7/3 θα μας απασχολήσει στην παράγραφο 5.4. Στην εξωτερική ζώνη η συσχέτιση μεταξύ περιοδικών τροχιών και διαφυγής δε φαίνεται να υπάρχει, καθώς σωματίδια διαφεύγουν και από συντονισμούς που δεν έχουν περιοδικές τροχιές. Κανένα σωματίδιο όμως δε διαφεύγει από τους συντονισμούς 12/7 και 13/8. Είναι εντυπωσιακό ότι η κατάσταση δεν είναι και πολύ διαφορετική στο πλαίσιο του μοντέλου (4Π). Βέβαια οι συντονισμοί που αντιστοιχούν στα διάκενα Kirkwood ‘αδειάζουν’ πιο γρήγορα. Τρία ακόμη σωματίδια της εσωτερικής ζώνης διαφεύγουν, δύο από τον 9/4 και ένα από τον 7/2. Στην εξωτερική ζώνη τρία ακόμη σωματίδια διαφεύγουν (από ένα για τους 11/6, 11/7 και 3/2), αλλά τα σωματίδια των 12/7 και 13/8 παραμένουν και πάλι στην ίδια περιοχή για $t = 250 \cdot 10^6$ χρόνια. Στους Πίνακες 5.2 και 5.3 παραθέτουμε το χρόνο, T_{esc} , και τον τρόπο διαφυγής κάθε σωματιδίου της εσωτερικής και εξωτερικής ζώνης, αντίστοιχα. Αν για μία τροχιά, που κάποια στιγμή

²Ο ίδιος ο Άρης δεν είχε συμπεριληφθεί στο μοντέλο.



Σχήμα 5.5: Εξέλιξη της $e(t)$ για τέσσερα σωματίδια του T1, τα οποία ξεκινούν από την περιοχή των συντονισμών 2/1, 3/1, 5/2 και 7/3, αντίστοιχα. Η τιμή του e_0 αναγράφεται επίσης σε κάθε διάγραμμα. Για όλες τις περιπτώσεις παρατηρούμε μεγάλου πλάτους διαλλειπτικά άλματα της e , που σχετίζονται με την ύπαρξη συντονισμένων περιοδικών τροχιών.



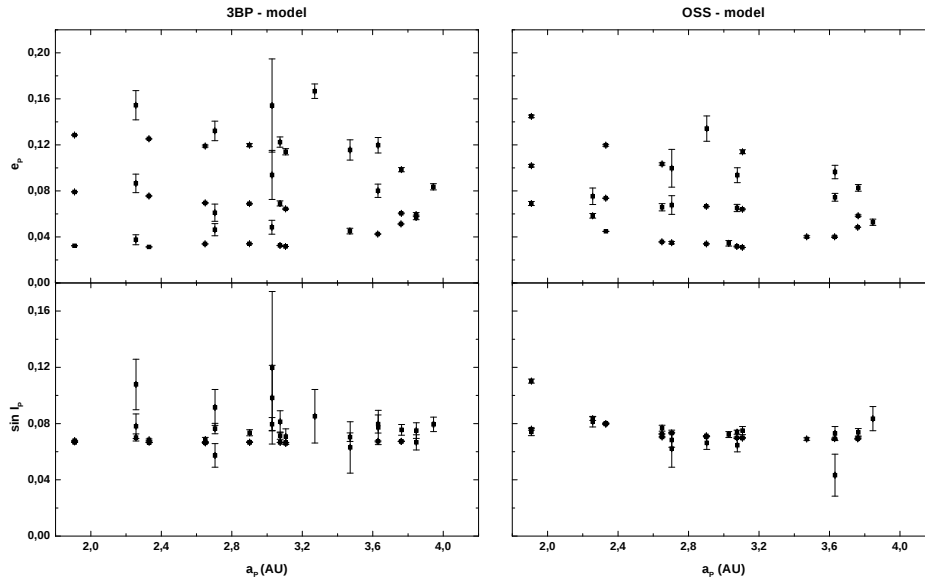
Σχήμα 5.6: Ομοίως με το Σχ. 5.6, αλλά για τέσσερα σωματίδια που αντιστοιχούν στους συντονισμούς $8/3$, $9/4$, $11/4$ και $13/6$. Η μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών οδηγεί σε αργή μεταβολή, τύπου διάχυσης, της e . Η τροχιά του $13/6$ είναι παράδειγμα ευσταθούς χάους, καθώς διατηρεί τις γραμμικές συσχετίσεις σε μεγάλο βαθμό, για χρόνους της τάξης των $50 \cdot 10^6$ ετών.

Πίνακας 5.2: Διαφυγή από την Εσωτερική Ζώνη. Ο λόγος του συντονισμού και η τιμή του e_0 της τροχιάς του σωματιδίου δίνεται στις πρώτες δύο στήλες. Η ‘τελική κατάληξη’ (End) του σωματιδίου φαίνεται στην επόμενη στήλη. *MC* (Mars-crosser) σημαίνει ότι η τροχιά καταλήγει να τέμνει αυτήν του Άρη. Ο χρόνος που απαιτείται για να συμβεί αυτό, T_{MC} , ($\times 10^{-6}$ χρόνια), δίνεται στην επόμενη στήλη. T_{esc} ($\times 10^{-6}$ χρόνια) είναι ο χρόνος που περνάει πριν το σωματίδιο συναντήσει το Δία ή τον Ήλιο ($q < 0.005AU$). Οι τελευταίες τρεις στήλες αναφέρονται στο μοντέλο (4Π). Όλα τα σωματίδια που διαφεύγουν από την εσωτερική ζώνη τέμνουν την τροχιά του Άρη, όποτε ο χαρακτηρισμός *MC* αναγράφεται μόνο για εκείνα που δεν καταλήγουν στον Ήλιο ή τον Δία.

n/n'	e_0	End (3ΕΠ)	T_{MC}	T_{esc}	End (4Π)	T_{MC}	T_{esc}
4/1	0.05	→Sun	40.470	40.541	→Sun	0.283	9.420
	0.10	→Sun	10.130	10.202	→Sun	0.265	1.823
	0.15	→Sun	0.146	0.218	→Sun	0.295	6.728
7/2	0.15	–	–	–	→Sun	65.600	82.960
3/1	0.05	→Sun	7.400	64.035	→Sun	0.820	1.200
	0.10	→Sun	1.900	86.001	→Sun	0.760	3.660
	0.15	→Sun	2.600	85.260	→Sun	0.216	24.487
5/2	0.05	MC	0.246	–	→Jup	0.920	32.332
	0.10	MC	0.312	–	→Jup	0.130	16.503
	0.15	MC	0.042	–	→Jup	0.134	14.647
7/3	0.05	→Jup	86.045	153.068	→Jup	47.772	47.923
	0.10	→Jup	23.300	217.705	→Jup	73.577	74.135
	0.15	MC	19.400	–	→Jup	5.840	6.542
9/4	0.10	–	–	–	→Jup	118.700	118.972
	0.15	–	–	–	→Jup	167.720	169.244
2/1	0.05	→Sun	14.570	183.423	→Sun	63.850	96.485
	0.10	→Sun	205.904	206.399	→Sun	34.860	39.054
	0.15	–	–	–	→Sun	65.503	71.318

Πίνακας 5.3: Διαφυγή από την Εξωτερική Ζώνη. Για κάθε σωματίδιο δίνεται ο λόγος συντονισμού, η τιμή του e_0 της τροχιάς του και ο χρόνος διαφυγής (προσέγγιση με το Δία).

n/n'	e_0	T_{esc} (3ΕΠ)	T_{esc} (4Π)
11/6	0.10	119.856	78.452
	0.15	–	28.256
9/5	0.05	31.929	62.630
	0.10	33.976	14.804
	0.15	94.400	10.543
7/4	0.05	0.172	0.087
	0.10	0.016	0.014
	0.15	8.133	0.188
5/3	0.05	3.182	0.724
	0.10	1.041	1.358
	0.15	0.053	0.028
8/5	0.05	10.115	0.461
	0.10	8.800	2.452
	0.15	3.243	0.325
11/7	0.10	–	192.294
	0.15	39.945	43.666
3/2	0.05	54.221	8.472
	0.10	–	34.699
	0.15	47.910	6.928



Σχήμα 5.7: Τα σωματίδια που δε διέφυγαν κατά τη διάρκεια της ολοκλήρωσης, προβαλόμενα στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς τους. Κάθε σωματίδιο συμβολίζεται με έναν τετράγωνο, οι συντεταγμένες του οποίου είναι οι μέσες τιμές των αντίστοιχων προς τους άξονες μεταβλητών. Το μήκος των γραμμών σφάλματος είναι ίσο προς την τιμή της τυπικής απόκλισης, για κάθε μεταβλητή. Τα διαγράμματα στα αριστερά αναφέρονται στο μοντέλο (3ΕΠ), ενώ τα δεξιά στο μοντέλο (4Π).

τέμνει αυτήν του 'Αρη', η περικεντρική απόσταση μειωθεί μέχρι την τιμή $q \leq 0.005\text{AU}$ μέσα σε χρόνο μικρότερο από τον αιώνιο κύκλο της εκκεντρότητας ($\sim 10^5$ χρόνια), θεωρούμε ότι το σωματίδιο πέφτει πάνω στον Ήλιο. Το γεγονός ότι λίγα παραπάνω σωματίδια διαφεύγουν στην ολοκλήρωση του (4Π), καθώς και το γεγονός ότι ο χρόνος διαφυγής έχει κάπως μικρότερες τιμές, δείχνει ότι η διαδικασία διαφυγής των σωματιδίων είναι 'ταχύτερη' στο (4Π) παρά στο (3ΕΠ). Όμως, γι' αυτές τις τροχιές χαμηλής εκκεντρότητας, δεν παρατηρούμε δραστικές μεταβολές ανάμεσα στα δύο μοντέλα κίνησης. Η τελευταία παρατήρηση έχει γενική ισχύ, τουλάχιστον για τους 'στενούς' συντονισμούς με $q \geq 4$.

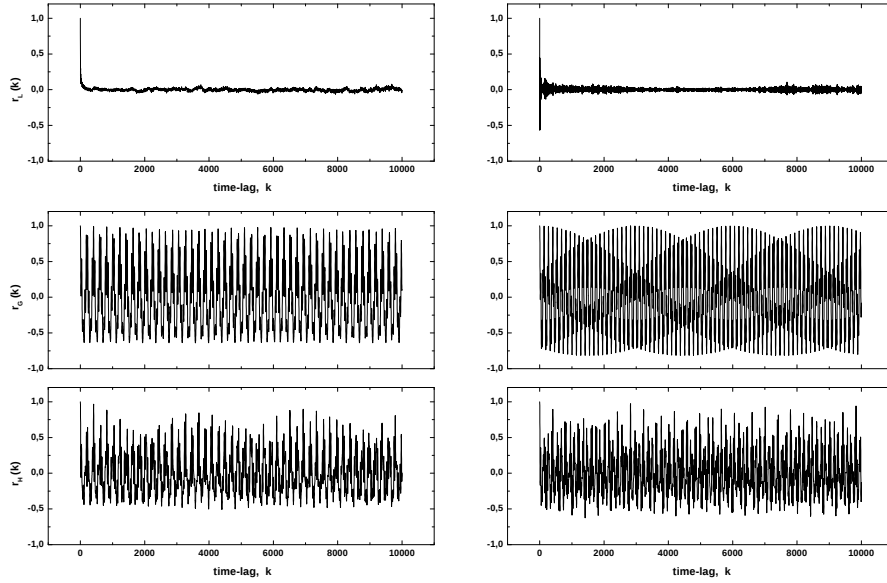
Ας στρέψουμε την προσοχή μας τώρα στο σύνολο των σωματιδίων που δεν καταφέρνουν να διαφύγουν από τη ζώνη, δηλαδή το 58% και 46.4% των σωματιδίων, αντίστοιχα, για τα δύο μοντέλα. Για κάθε τροχιά υπολογίζουμε τις μέσες τιμές των στιγμιαίων στοιχείων, με σκοπό να πάρουμε ποσότητες που προσεγγίζουν τις ελεύθερες τιμές των στοιχείων της τροχιάς, δηλαδή σχεδόν διατηρήσιμες ποσότητες. Με τη μέθοδο του κινούμενου μέσου όρου (βλ. Κεφάλαιο 4) υπολογίζουμε για κάθε χρονοσειρά $X(t)$ τις μέσες τιμές $X_P(t_i)$. Η σταθερότητα

των ελεύθερων στοιχείων X_P εκτιμάται από την τυπική απόκλιση, $\sigma(X_P)$, των τιμών του γύρω από τη μέση τιμή $\langle X_P \rangle$. Τα αποτελέσματα δίνονται γραφικά στο Σχ. 5.7, όπου κάθε σημείο αναπαριστά μία τροχιά και έχει για συντεταγμένες τις μέσες τιμές των ελεύθερων στοιχείων που αναγράφονται σε κάθε άξονα (a_P , e_P ή i_P). Το μήκος κάθε γραμμής σφάλματος είναι ίσο με την αντίστοιχη τυπική απόκλιση ($\sigma(a_P)$, $\sigma(e_P)$ ή $\sigma(\sin i_P)$). Όπως φαίνεται από το μήκος των γραμμών σφάλματος στο Σχ. 5.7, υπάρχουν δύο είδη τροχιών, σε σχέση με τη σταθερότητα των ελεύθερων στοιχείων. Στην ολοκλήρωση του (3ΕΠ) περίπου οι μισές (48%) από τις τροχιές που παραμένουν έχουν πολύ σταθερά στοιχεία, με $\sigma(a_P) \leq 10^{-3} \text{AU}$, $\sigma(e_P) \leq 0.005$ και $\sigma(\sin i_P) \leq 10^{-3}$. Οι υπόλοιπες τροχιές δείχνουν μια τάση προς την αστάθεια και οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων είναι μεγαλύτερες. Μόνο 2 τροχιές όμως έχουν $\sigma(e_P) > 0.01$ ενώ 5 τροχιές έχουν $\sigma(\sin i_P) > 0.01$. Αντίστοιχα, στο μοντέλο (4Π), σχεδόν όλες οι τροχιές έχουν $\sigma(a_P) \leq 10^{-3} \text{AU}$. Το ποσοστό των τροχιών με $\sigma(e_P) \leq 0.005$ παραδόξως αυξάνει στο 81% (26/32). Και σε αυτήν την ολοκλήρωση μόνο 2 τροχιές έχουν $\sigma(e_P) > 0.01$ (μία εκ των οποίων έχει επίσης $\sigma(\sin i_P) > 0.01$) ενώ 2 τροχιές έχουν $\sigma(\sin i_P) > 0.01$. Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο ότι σχεδόν όλες οι τροχιές (και για τα δύο μοντέλα) είναι χαοτικές, με $T_L \leq 10^5$ χρόνια. Σημειώνουμε επίσης ότι οι τιμές της e_P φαίνεται να είναι πιο σταθερές για τις τροχιές του (4Π). Δε θα πρέπει όμως να επιχειρήσουμε σύγκριση των δύο μοντέλων τροχιά προς τροχιά, καθώς οι ίδιες, για τα δύο μοντέλα, αρχικές συνθήκες (στιγμιαία στοιχεία) κάθε σωματιδίου δεν αντιστοιχούν σε ίδιες τιμές των ελεύθερων στοιχείων.

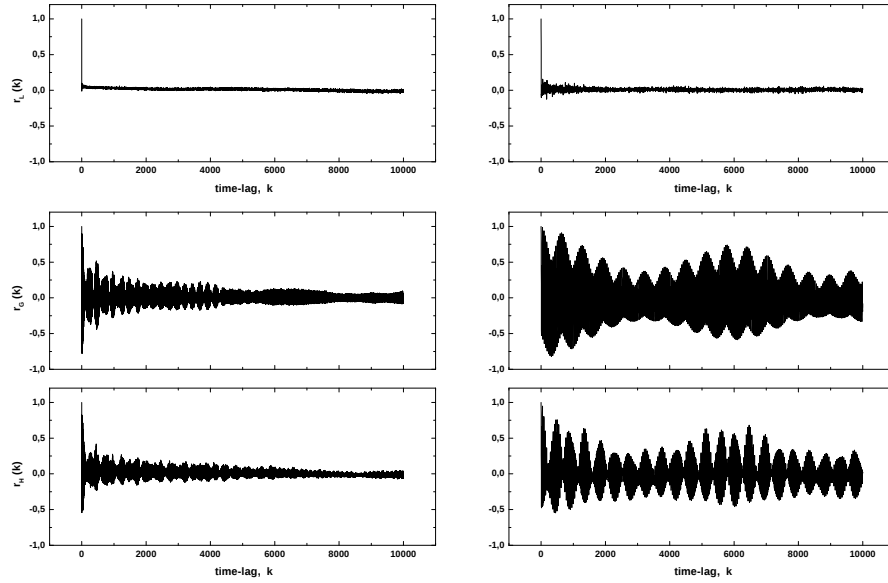
5.3 Γραμμικές Συσχετίσεις και Ευσταθές Χάος

Όπως αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, η πλειοψηφία των σωματιδίων, που δε διαφεύγουν από τη ζώνη κατά τη διάρκεια της αριθμητικής ολοκλήρωσης, ακολουθεί χαοτικές τροχιές. Όμως υπάρχουν, κατά τα φαινόμενα, δύο διαφορετικοί τύποι χαοτικής κίνησης. Η διαφορά τους, όπως περιγράψαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, εντοπίζεται στη συμπεριφορά των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης, $r_I(t)$, των δράσεων Delaunay, $I = L$, G ή H . Οι τροχιές που εμείς αποκαλούμε ευσταθώς χαοτικές χαρακτηρίζονται από τη μείωση των γραμμικών συσχετίσεων μεταξύ των μεταβολών του ημιάξονα (ή της $L = \sqrt{\mu_1 a}$) σε χρόνους της τάξης του T_L και την εξαιρετικά αργή μείωση (μετά από $t \gg 10^3 \cdot T_L$) των γραμμικών συσχετίσεων για τις e και i (ή τις δράσεις G και H). Αυτήν η συμπεριφορά θα πρέπει να διακριθεί από την ‘αργή’ διάχυση των Murray & Holman (1997), στο πλαίσιο της οποίας και οι τρεις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης θα πρέπει να συμπεριφέρονται με παρόμοιο τρόπο.

Ανάμεσα στις τροχιές που δε διαφεύγουν από τη ζώνη (στο πλαίσιο του 4Π) παρατηρούμε τόσο αργή διάχυση όσο και ευσταθές χάος. Στα Σχ. 5.8 και 5.9 δίνονται οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των τριών δράσεων για τέσσερις διαφορετικές τροχιές. Το μήκος κάθε χρονοσειράς που χρησιμοποιήσαμε για τα σχήματα αυτά αντιστοιχεί σε $25 \cdot 10^6$ χρόνια. Στο Σχ. 5.8 φαίνεται η συμπεριφορά δύο ευσταθώς χαοτικών τροχιών, για τις οποίες η $r_L(t)$ φθίνει εκθετικά με το χρόνο ενώ οι $r_G(t)$ και $r_H(t)$ μεταβάλλονται σχεδόν ημιπεριοδικά με το χρόνο. Αντίθετα, στο Σχ. 5.9, φαίνεται η συμπεριφορά μιας αργά διαχεόμενης χαοτικής τροχιάς, για την οποία και οι τρεις συναρτήσεις $r_I(t)$ φθίνουν εκθετικά με το χρόνο και μάλιστα έχουν συγκρίσιμο χρόνο αυτοσυσχέτισης. Τέλος παραθέτουμε μία ενδιάμεση περίπτωση (επίσης



Σχήμα 5.8: Οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των τριών δράσεων Delaunay. Η μονάδα του χρόνου είναι ίση με $k = 100 T' \approx 1,200$ χρόνια. Σε αυτό το διάγραμμα παρουσιάζονται δύο ευσταθώς χαοτικές τροχιές. Η συνάρτηση $r_L(t)$ φθίνει εκθετικά με το χρόνο, έχοντας $\tau_C \sim T_L \approx 10^4$ έτη. Αντίθετα, για τις άλλες δύο δράσεις, οι συναρτήσεις $r_G(k)$ και $r_H(k)$ μεταβάλλονται σχεδόν ημιπεριοδικά με το χρόνο.

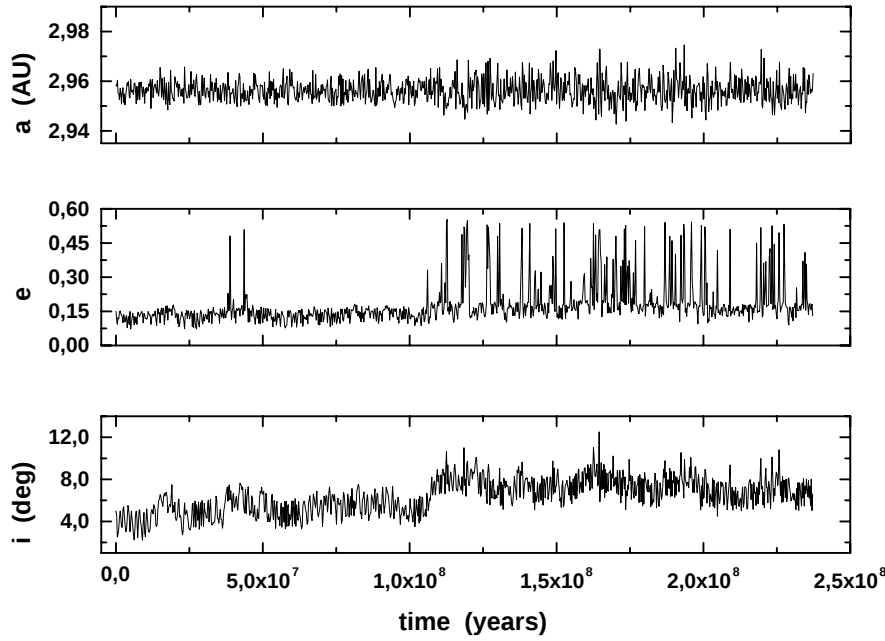


Σχήμα 5.9: Ομοίως με το Σχ. 5.8 αλλά για δύο διαφορετικού τύπου τροχιές. (Αριστερά) Μία ‘αργά χαοτική’ τροχιά, της οποίας και οι τρεις συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης φθίνουν εκθετικά με το χρόνο και μάλιστα με παραπλήσιες τιμές τ_C . (Δεξιά) Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση, με τις $R_G(k)$ και $r_H(k)$ να φθίνουν αργά, διατηρώντας μια ισχυρή ημιπεριοδική συνιστώσα.

Σχ. 5.9), για την οποία το πλάτος των $r_G(t)$ και $r_H(t)$ φθίνει με το χρόνο, διατηρώντας όμως μια ισχυρή ημιπεριοδική συνιστώσα. Τονίζουμε το γεγονός ότι οι τροχιές για τις οποίες το πλάτος και των τριών $r_I(t)$ φθίνει εκθετικά με το χρόνο είναι εκείνες που παρουσιάζουν τις μεγαλύτερες τιμές τυπικών αποκλίσεων για τα ελεύθερα στοιχεία (δηλαδή, οι πιο ασταθείς).

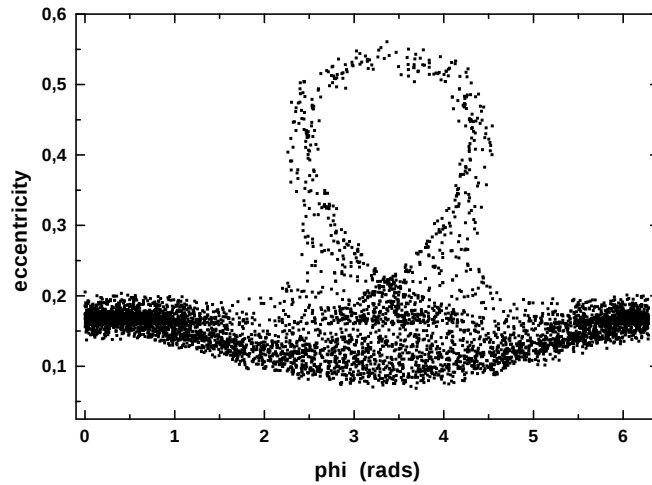
5.4 Η Περίπτωση του Συντονισμού 7/3

Ο συντονισμός 7/3 φαίνεται να αποτελεί ιδιαίζουσα περίπτωση. Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης, για τροχιές που ξεκινούν από τη γειτονιά του συντονισμού 7/3, δε φαίνεται να συμβαδίζουν με τα αποτελέσματα της αναζήτησης περιοδικών τροχιών. Υπευθύνουμε ότι (§ 5.2) δεν υπάρχει σημείο διακλάδωσης της οικογένειας ελλειπτικών περιοδικών τροχιών του (ΚΠ), ούτε για το (ΕΠ) ούτε και για το (3ΚΠ). Έτσι συμπεραίνουμε ότι, στην περιοχή του 7/3, δεν υπάρχει μηχανισμός ‘ταχείας’ μεταφοράς χαοτικών τροχιών προς υψηλές τιμές εκκεντρότητας, στο πλαίσιο του ΠΤΣ. Όμως και οι τρεις τροχιές του πειράματος T2 (στο μοντέλο 3ΕΠ), όπως και οι τροχιές που βρέθηκαν στο πείραμα T1 να σχετίζονται με τον 7/3, απέκτησαν, σχετικά γρήγορα, την τιμή εκκεντρότητας που απαιτείται ώστε να τμήσουν



Σχήμα 5.10: Εξέλιξη των στοιχείων a , e και i της τροχιάς ενός σωματιδίου με $e_0 = 0.15$, στο συντονισμό 7/3 (μοντέλο 3ΕΠ). Προσέξτε τη διαλλειπτική συμπεριφορά της e . Ταυτόχρονα με τα μεγάλα άλματα της e παρατηρούνται και μεγαλύτερες μεταβολές του a . Παρατηρήστε ότι η χρονική περίοδος που χαρακτηρίζεται από πολλά άλματα της e αντιστοιχεί σε μεγαλύτερη μέση τιμή του i , απ' ό,τι η 'ήσυχη' περίοδος εξέλιξης της e .

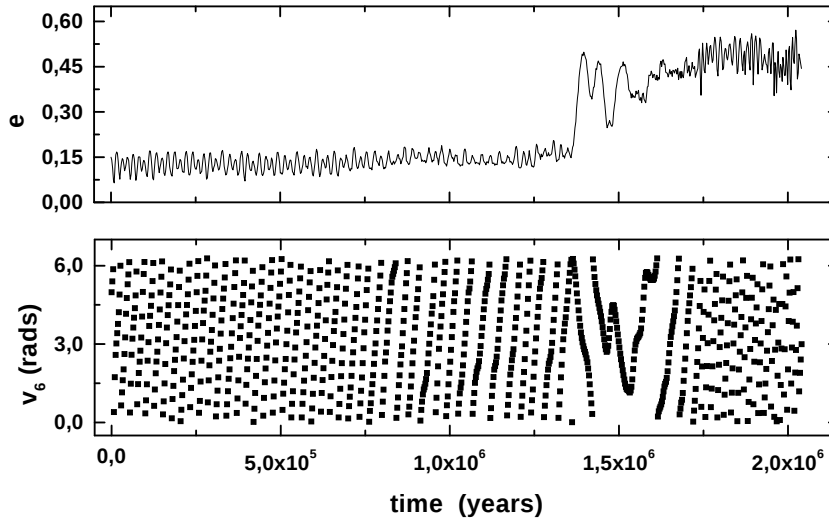
την τροχιά του Άρη. Μάλιστα, όπως φαίνεται και στα Σχ. 5.5 και 5.10, η εκκεντρότητα των τροχιών του 7/3 εμφανίζει διαλλειπτική συμπεριφορά, με άλματα μέχρι την τιμή $e \approx 0.55$. Η συμπεριφορά αυτή είναι συνδεδεμένη με την ύπαρξη συντονισμένων περιοδικών τροχιών. Με σκοπό να εκτιμήσουμε κατά πόσον η συμπεριφορά αυτή μπορεί να είναι ένα 'τεχνητό' φαινόμενο, προερχόμενο από την επιλογή της μεθόδου ολοκλήρωσης, επαναλάβαμε την ολοκλήρωση. Οι ίδιες αρχικές συνθήκες ολοκληρώθηκαν αυτή τη φορά με τη μεγάλης ακρίβειας τεχνική Bulirsch-Stoer (βλ. Press et al. 1986), χωρίς όμως τα αποτελέσματα να αλλάξουν. Για το λόγο αυτό αποφασίσαμε να επιχειρήσουμε ακόμη μία (για κάθε μοντέλο κίνησης) αριθμητική ολοκλήρωση, αυτή τη φορά για ένα σύνολο 24 αρχικών συνθηκών στην περιοχή του συντονισμού 7/3. Οι αρχικές συνθήκες επιλέχθηκαν ώστε να σχηματίζουν ένα πλέγμα 8×3 στο επίπεδο (a, e) , με $2.9515\text{AU} \leq a \leq 2.9605\text{AU}$ και $0.05 \leq e \leq 0.15$. Οι τιμές των υπολοίπων μεταβλητών, αλλά και οι παράμετροι της ολοκλήρωσης, ήταν ίδιες με αυτές του πειράματος T2. Με μια πρώτη βραχυχρόνια ολοκλήρωση ($t = 500,000$ χρόνια) επιβεβαιώσαμε το γεγονός ότι η πλειοψηφία των τροχιών είναι χαοτικές, καθώς η κρίσιμη γωνία $\sigma = 3\lambda - 7\lambda' + 4\varpi$ βρέθηκε να εκτελεί χαοτικές μεταπτώσεις.



Σχήμα 5.11: Προβολή της τροχιάς του Σχ. 5.10 στο επίπεδο $(\phi = \omega - \omega', e)$. Είναι φανερό ότι τα διαλλειπτικά άλματα της e σχετίζονται με την ύπαρξη ενός ομοκλινικού βρόχου (δηλαδή μιας περιοδικής τροχιάς) και τη μεταφορά της τροχιάς γύρω από την αντίστοιχη νησίδα λίκνισης του ϕ . Το κέντρο λίκνισης έχει συντεταγμένες $e \approx 0.4$ και $\phi = \pi$.

Στο πλαίσιο του μοντέλου (3ΕΠ) 13 από τα 24 σωματίδια (54%) βρέθηκαν να ακολουθούν τροχιά που κάποια στιγμή τέμνει αυτήν του Άρη και 6 από αυτά προσέγγισαν το Δία πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Όπως και στα προηγούμενα πειράματα, όλες αυτές οι τροχιές παρουσίαζαν διαλλειπτική συμπεριφορά της e . Η προβολή μιας τέτοιας τροχιάς στο επίπεδο (ϕ, e) φαίνεται στο Σχ. 5.11. Το διάγραμμα αυτό αποκαλύπτει την ύπαρξη μιας νησίδας λίκνισης του ϕ , η οποία περιβάλλει μια ευσταθή περιοδική τροχιά ($\phi = \pi$, $e \approx 0.4$). Στο μοντέλο (4Π) ο αριθμός των τροχιών που τέμνουν την τροχιά του Άρη αυξάνει σε 14 (58.3%) και όλα αυτά τα σωματίδια προσεγγίζουν το Δία πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Η διαδικασία διαφυγής είναι αρκετά πιο γρήγορη απ' ό,τι στο (3ΕΠ), γεγονός αναμενόμενο. Η πιο σημαντική διαφορά όμως ανάμεσα στα δύο μοντέλα έχει να κάνει με την συμπεριφορά των στοιχείων της τροχιάς. Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.12, οι μεταβολές της e καθοδηγούνται πλέον από τους αιώνιους συντονισμούς ν_5 ή ν_6 , που εμφανίζονται εντός της περιοχής λίκνισης του 7/3 (Moons & Morbidelli, 1995). Έτσι η μεταφορά κατά μήκος του άξονα της e είναι πλέον πολύ πιο γρήγορη.

Η προφανής ασυμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων της αριθμητικής ολοκλήρωσης, που υποδεικνύουν την ύπαρξη περιοδικής τροχιάς, και της αναζήτησης του σημείου διακλάδωσης των περιοδικών τροχιών του (ΚΠ) μας οδήγησε στο να εξερευνήσουμε μία ακόμη πιθανή εκδοχή. Προχωρήσαμε σε μία νέα αριθμητική ολοκλήρωση 24 σωματιδίων, με τις ίδιες αρχικές συνθήκες όπως και την τελευταία φορά για τα a , e , ω και σ , αλλά με τις τροχιές να είναι



Σχήμα 5.12: Εξέλιξη των στοιχείων της τροχιάς ενός σωματιδίου με $e_0 = 0.15$, στον συντονισμό 7/3 (μοντέλο 4Π). Δεν παρατηρείται διαλλειπτική συμπεριφορά της e . Τα μεγάλου πλάτους άλματα που οδηγούν την εκκεντρότητα σε τιμές $e \approx 0.6$ συσχετίζονται με τις λιχνίσεις/περιστροφές της κρίσιμης γωνίας του αιώνιου συντονισμού $\nu_6 = \varpi - \varpi_S^*$, όπου $\varpi_S^* = g_6 t + \varpi_{S,0}^*$ η γραμμική προσέγγιση του μήκους του περιηλίου του Κρόνου.

συνεπίπεδες με αυτήν του Δία (μοντέλο ΕΠ). Η διαφορά μεταξύ του 2-διάστατου και του 3-διάστατου χώρου μορφής είναι εντυπωσιακή. Καμία τροχιά του (ΕΠ), αν και σχεδόν όλες ήταν πάλι χαοτικές, δεν έδειξε να υφίσταται σημαντικές μεταβολές εκκεντρότητας μέσα σε $250 \cdot 10^6$ χρόνια, ώστε να τμήσει την τροχιά του Άρη, και η συμπεριφορά της e δεν ήταν διαλλειπτική. Οι τιμές της τυπικής απόκλισης των a_P και e_P ήταν πολύ μικρές ($\sigma(a_P) \leq 10^{-3} \text{ AU}$ και $\sigma(e_P) \leq 5 \cdot 10^{-3}$) για όλες τις τροχιές. Επομένως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η διαλλειπτικότητα της e , στη γειτονιά του συντονισμού 7/3, είναι ένα φαινόμενο που εμφανίζεται μόνο σε 3-διάστατο χώρο μορφής.

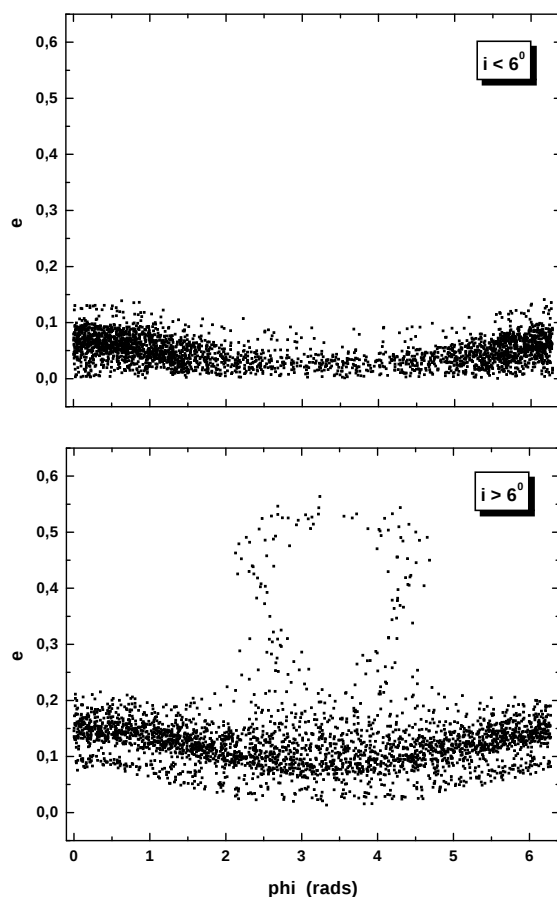
Τα αποτελέσματα της τελευταίας αριθμητικής ολοκλήρωσης είναι συμβατά με τη μη ύπαρξη περιοδικών τροχιών στο επίπεδο ελλειπικό πρόβλημα (ΕΠ). Όμως στον 3-διάστατο χώρο βλέπουμε ότι περιοδικές τροχιές υπάρχουν. Η μόνη λογική εξήγηση για το φαινόμενο αυτό είναι ότι η περιοδική τροχιά που παρατηρούμε στην ολοκλήρωση του (3ΕΠ) ανήκει σε μία ανώμαλη οικογένεια (irregular family) ελλειπτικών περιοδικών τροχιών, με παράμετρο την κλίση του επιπέδου της τροχιάς, η οποία όμως δε διακλαδίζεται από το επίπεδο της τροχιάς του Δία ($i_P = 0$). Το συμπέρασμα αυτό υποστηρίζεται από προσεκτικότερη ανάλυση της

τροχιάς του Σχ. 5.10. Διαχωρίζουμε τα σημεία του διαγράμματος (ϕ, e) ανάλογα με την τιμή του i . Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.13, η τροχιά καλύπτει μία μικρή περιοχή στο επίπεδο (ϕ, e) , όσο η κλίση παραμένει μικρότερη από την τιμή $i = 6^\circ$. Για $i > 6^\circ$ η τροχιά μπορεί πλέον και μεταπηδά γύρω από τη νησίδα λίκνισης του $\phi = \varpi - \varpi'$, μεταβάλλοντας έτσι σημαντικά την τιμή της e .

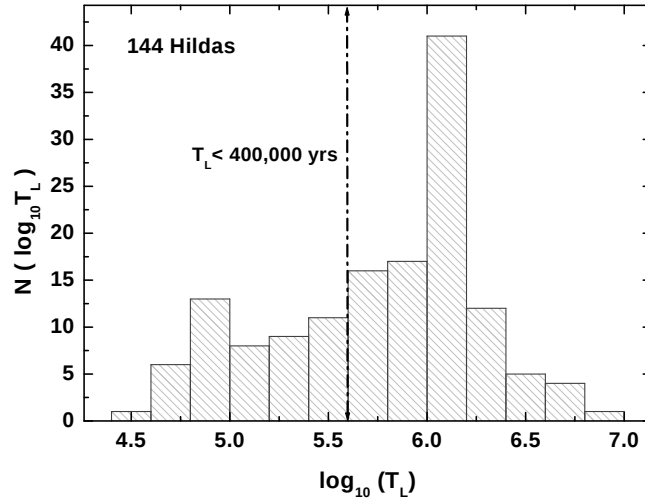
Στην ορολογία της Ουράνιας Μηχανικής η φράση *ανώμαλη οικογένεια περιοδικών τροχιών* διατυπώνεται με τρόπο πιθανώς πιο κατανοητό. Οι περιοδικές τροχιές αντιστοιχούν στον ταυτόχρονο μηδενισμό των συχνοτήτων $\dot{\sigma}$, $\dot{\phi}$ και $\dot{\theta}$ (σε 3-διάστατο χώρο, όπου $\theta = \Omega - \Omega'$). Επομένως η περιοδική τροχιά του ΠΤΣ ταυτίζεται με την συνύπαρξη του διπλού αιώνιου συντονισμού $g = s = 0$ στην περιοχή του συντονισμού μέσης κίνησης. Τα σημεία του χώρου (a, e, i) , στα οποία πληρείται η παραπάνω συνθήκη, αποτελούν κόμβους για όλες τις αρμονικές (υπο-συντονισμούς) του συντονισμού μέσης κίνησης. Αν αγνοήσουμε προς στιγμήν τους συντονισμούς μέσης κίνησης, οι τιμές των g και s είναι μη μηδενικές σε κάθε σημείο του χώρου (a, e, i) , όπως προκύπτει από τα αποτελέσματα της γραμμικής αιώνιας θεωρίας. Επομένως, για να υπάρξει συντονισμένη περιοδική τροχιά, θα πρέπει ο συντονισμός μέσης κίνησης να είναι αρκετά ισχυρός, ώστε να προκαλέσει τον μηδενισμό (και μάλιστα τον ταυτόχρονο μηδενισμό) των g και s , σε κάποιο(α) σημείο(α) του χώρου των (a, e, i) , ή μόνο του g για το (ΕΠ). Όπως είδαμε στην παράγραφο 5.2, η συνθήκη $g = 0$ πληρείται στο (ΕΠ) για τους πιο ισχυρούς συντονισμούς της εσωτερικής ζώνης (2/1, 3/1, 4/1 και 5/2), όχι όμως και για τον 7/3. Η διπλή συνθήκη $g = s = 0$ μπορεί όμως να πληρείται για $i > 0$, όπως παρατηρούμε στην περίπτωση του 7/3. Σε συντονισμούς υψηλότερης τάξης, η συνθήκη $g = s = 0$ είναι επίσης πιθανό να πληρείται για κάποιες τιμές του $i > 0$, αν και δεν παρατηρήσαμε κάτι τέτοιο στα πειράματά μας.

5.5 Η Ομάδα των Hildas - Συντονισμός 3/2

Τα περισσότερα από τα σωματίδια που θέσαμε αρχικά στην περιοχή του συντονισμού 3/2 διέφυγαν πριν το τέλος της ολοκλήρωσης (πείραμα T2, 2/3 στο 3ΕΠ και 3/3 στο 4Π). Το αποτέλεσμα αυτό ίσως φαίνεται παράδοξο, δεδομένου ότι στο συντονισμό 3/2 παρατηρείται ένας πληθυσμός αστεροειδών, γνωστός με το όνομα Hildas. Σημειώνουμε όμως ότι ο συντονισμός 3/2 είναι πρώτης τάξης και το εύρος του Δa είναι αρκετά μεγάλο ($\Delta a \approx 0.4\text{AU}$ για $e \approx 0.1$). Έτσι, ο μικρός αριθμός των τροχιών που ολοκληρώσαμε δεν είναι αντιπροσωπευτικός για ολόκληρη την περιοχή του 3/2, ειδικά αφού οι αρχικές συνθήκες επιλέχθηκαν ώστε να βρίσκονται στη χαοτική ζώνη που εμφανίζεται κοντά στο εσωτερικό σύνορο του συντονισμού. Τα τελευταία χρόνια έχουν δημοσιευτεί αρκετές εργασίες με θέμα τη δυναμική στην περιοχή του 3/2 και την αντίθεση ανάμεσα στην ύπαρξη ενός πληθυσμού συντονισμένων αστεροειδών (Hildas) στο συντονισμό 3/2 και την εμφάνιση διάκενου (Hecuba Gap) στην περιοχή του 2/1, ο οποίος είναι δυναμικά παρόμοιος με τον 3/2 στο ΠΤΣ (βλ. Henrard & Lemaître 1987, Lemaître & Henrard 1988, Michtchenko & Ferraz-Mello 1995, Nesvorný & Ferraz-Mello 1997, Ferraz-Mello et al. 1997a,b, 1998 και Morbidelli & Moons 1993). Οι Hadjidemetriou & Voyatzis (2000) έδειξαν ότι ένα μεγάλο ποσοστό του χώρου των φάσεων στην περιοχή του 3/2, μεγαλύτερο απ' ό,τι στον 2/1, οδηγεί σε χαοτική κίνηση. Όμως, όπως δείχνουν τα



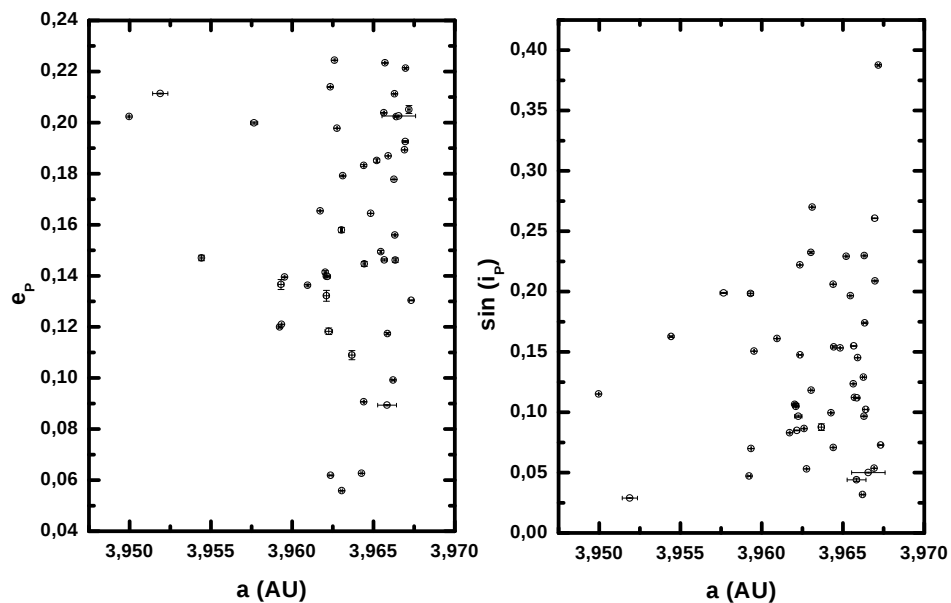
Σχήμα 5.13: Προβολή μίας ακόμη τροχιάς στον συντονισμό 7/3 στο επίπεδο (ϕ, e) (μοντέλο 3ΕΠ). Αν χωρίσουμε τα δεδομένα σε δύο σύνολα, ένα με $i \leq 6^\circ$ κι ένα με $i > 6^\circ$ αντίστοιχα, εμφανίζεται διαφορετική συμπεριφορά. (Πάνω) Για $i \leq 6^\circ$ η τροχιά διαχέεται σε μια στενή ζώνη του επιπέδου (ϕ, e) , με $e < 0.15$. (Κάτω) Όταν $i > 6^\circ$ η νησίδα λίκνισης της περιοδικής τροχιάς οδηγεί την εκκεντρότητα σε τιμές $e \sim 0.6$.



Σχήμα 5.14: Ιστόγραμμα του $\log T_L$ για τις τροχιές των 144 Hildas (μοντέλο 4Π). 49 τροχιές συγκεντρώνονται αριστερά της κατακόρυφης γραμμής, η θέση της οποίας συμπίπτει με την τιμή $T_L = 4 \cdot 10^5$ χρόνια.

αποτελέσματά τους, οι δευτερεύοντες συντονισμοί εντός του 3/2 δεν επικαλύπτονται πλήρως, σε αντίθεση με αυτούς του 2/1, ώστε μεγάλος αριθμός χαοτικών τροχιών να μπορεί να ‘παγιδευτεί’ εντός του συντονισμού για μεγάλους χρόνους. Υπό την έννοια αυτή, πολλοί από τους πραγματικούς Hildas μπορεί να χαρακτηριστούν ως *ευσταθώς χαοτικοί* αστεροειδείς.

Αντί να εξερευνήσουμε τον συντονισμό 3/2 ολοκληρώνοντας τις τροχιές υποθετικών σωμάτων, αποφασίσαμε να μελετήσουμε τον ίδιο τον πληθυσμό των Hildas. Οι αρχικές συνθήκες για τις τροχιές 144 σωμάτων πάρθηκαν από τη βάση δεδομένων AstDys. Στην ίδια βάση δεδομένων μπορεί κανείς να βρει κι έναν κατάλογο με τις τιμές των ελεύθερων στοιχείων και του μέγιστου εκθέτη Lyapunov της τροχιάς, όπως υπολογίστηκαν από τους Knežević & Milani (2000). Από τον κατάλογο αυτό είναι εμφανές ότι αρκετοί από τους πραγματικούς Hildas ακολουθούν χαοτικές τροχιές. Αυτό το αποτέλεσμα επιβεβαιώθηκε κι από ένα δικό μας αριθμητικό πείραμα, κατά το οποίο ολοκληρώσαμε τις εξισώσεις μεταβολών για τις τροχιές αυτών των 144 σωμάτων (στο 4Π) για $t = 4 \cdot 10^6$ χρόνια. Ποσοστό 34% των τροχιών (49/144) βρέθηκε ότι έχουν $T_L \leq 4 \cdot 10^5$ χρόνια $= 0.1 \cdot t_{int}$ (Σχ. 5.14). Για αυτές τις 49 τροχιές ολοκληρώσαμε τις εξισώσεις κίνησης του (4Π) για $t_{int} = 10^8$ χρόνια. Ο αστεροειδής (19752) βρέθηκε να διαφεύγει από την περιοχή του συντονισμού 3/2, προσεγγίζοντας το Δία, προς το τέλος της ολοκλήρωσης ($T_{esc} \approx 96.4 \cdot 10^6$ χρόνια). Εκτός από αυτή την περίπτωση διαφυγής, οι υπολογισμοί των ελεύθερων τιμών των στοιχείων της τροχιάς (κινούμενος μέσος όρος) δείχνουν ότι οι υπόλοιποι αστεροειδείς έχουν πρακτικά σταθερές τροχιές. Οι τιμές των τυπικών αποκλίσεων των ελεύθερων στοιχείων είναι $\sigma(a_P) \sim 10^{-4}$ AU, $\sigma(e_P) \sim 5 \cdot 10^{-4}$ και



Σχήμα 5.15: Κατανομή των 48 (εξαιρώντας το 19752) πιο χαοτικών Hildas, στα επίπεδα (a_P, e_P) (αριστερά) και $(a_P, \sin i_P)$ (δεξιά). Τα στοιχεία υπολογίστηκαν από τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης των 10^8 ετών. Το πολύ μικρό μήκος των γραμμών σφάλματος υποδηλώνει τη σταθερότητα της τροχιάς.

$\sigma(\sin i_P) \sim 5 \cdot 10^{-4}$ αντίστοιχα (βλ. Σχ. 5.15). Τα αποτελέσματα αυτά συνηγορούν στο να θεωρήσει κανείς τους Hildas ως παραδείγματα ευσταθούς χάους. Ο υπολογισμός των συναρτήσεων αυτοσυσχέτισης όμως δείχνει ότι η πλειοψηφία των Hildas ακολουθεί μια πολύ αργή διάχυση. Ας σημειωθεί ότι, η τοπολογία του χώρου των φάσεων στην περιοχή κίνησης των Hildas είναι πολύ διαφορετική από αυτήν που συναντήσαμε στην περίπτωση των συντονισμών υψηλής τάξης, που μελετήσαμε προηγουμένως. Το βασικό χαρακτηριστικό της περιοχής του 3/2 είναι η ύπαρξη μιας μεγάλης νησίδας λίκνισης και οι Hildas είναι ‘παγιδευμένοι’ μέσα στη νησίδα. Επομένως η διαδικασία μεταφοράς που ακολουθούν οι Hildas αναμένεται να είναι επίσης διαφορετική απ’ ό,τι στους συντονισμούς υψηλής τάξης. Στο πλαίσιο αυτής της διατριβής, δε θα ασχοληθούμε περαιτέρω με τη μελέτη της διαδικασίας μεταφοράς των Hildas.

5.6 Διάχυση Αστεροειδών στην Εξωτερική Ζώνη

Εκτός από αριθμητικές ολοκληρώσεις μεγάλου χρόνου για μικρά δείγματα τροχιών, μπορούμε να μελετήσουμε εκτεταμένες περιοχές του χώρου των φάσεων (μεγάλες ομάδες αρχικών συνθηκών) με ολοκληρώσεις μικρού χρόνου και υπολογισμό κάποιων ποσοτήτων, που χαρακτηρίζουν τη συμπεριφορά των τροχιών. Για παράδειγμα, στην § 5.2 υπολογίσαμε την τιμή του T_L , για διάφορες αρχικές τιμές της e , στην ‘εσωτερική ζώνη’ του (3ΕΠ). Αν επιλέγαμε αρχικές συνθήκες από ένα μεγάλο διδιάστατο πλέγμα τιμών για τα (a, e) ο πιο χρήσιμος τρόπος παρουσίασης θα ήταν η κατασκευή ενός *δυναμικού χάρτη* (dynamical map), όπου σε κάθε κόμβο του πλέγματος θα αντιστοιχίζαμε ένα σημείο, το χρώμα του οποίου θα επιλεγόταν ανάλογα με την τιμή του T_L (σε κάποια χρωματική κλίμακα). Ένας τέτοιος χάρτης μας επιτρέπει να έχουμε μια συνολική εικόνα για τη δυναμική της περιοχής που μελετάμε και να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τη μακροχρόνια εξέλιξη των τροχιών. Αντί του T_L χρησιμοποιούνται και άλλα μεγέθη, που σχετίζονται είτε με την εκθετική απομάκρυνση των χαοτικών τροχιών είτε με τη μεταβολή των ιδίων συχνотήτων (βλ. Ferraz-Mello 1999, Robutel & Laskar 2001, Michtchenko & Ferraz-Mello 2001, Froeschlé et al. 1997, 2000). Εμείς θα κατασκευάσουμε ένα *χάρτη διάχυσης*, για τροχιές του (ΕΠ) που αντιστοιχούν στην εξωτερική ζώνη των αστεροειδών, με $3.45 \text{ AU} \leq a \leq 3.90 \text{ AU}$ και $0 \leq e_P \leq 0.3$, βασιζόμενοι σε μια αριθμητική προσέγγιση του τοπικού συντελεστή διάχυσης. Σε ό,τι ακολουθεί, η τροχιά του Δία καθορίζεται από τις τιμές $a' = 5.2 \text{ AU}$, $e' = 0.048$ και $\varpi' = 0$. Επίσης, για $t = 0$, ο Δίας βρίσκεται στο περιήλιο της τροχιάς του ($M' = 0$).

5.6.1 Διάχυση στο Χώρο των Δράσεων

Η εξέλιξη μιας χαοτικής τροχιάς στο χώρο των φάσεων ενός Χαμιλτονιανού συστήματος χαρακτηρίζεται, εν γένει, από δύο χαρακτηριστικές χρονικές κλίμακες, επειδή οι γωνίες θ_i μεταβάλλονται πολύ πιο γρήγορα απ’ ό,τι οι δράσεις I_i . Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια 2-διάστατη διατηρητική απεικόνιση των (I, θ) και επιλέγουμε μια συλλογή αρχικών συνθηκών σε κάποια χαοτική περιοχή, με τις φάσεις θ των τροχιών της συλλογής να κατανέμονται σε μια περιοχή εύρους $\Delta\theta \ll 2\pi$. Μετά από χρόνο τ , που εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύστημα αλλά και την εν λόγω περιοχή του χώρου των φάσεων, οι φάσεις θα έχουν καλύψει

ολόκληρη τη διαθέσιμη περιοχή γωνιών, ενώ οι δράσεις θα έχουν μεταβληθεί κατά πολύ λίγο. Επομένως, για χρόνους $t \gg \tau$, η πιθανότητα $P(I, t|I_0, t_0)$ να βρεθεί μια τροχιά στη θέση I τη χρονική στιγμή t , ενώ αρχικά (t_0) ήταν στη θέση I_0 , μπορεί να θεωρηθεί ανεξάρτητη της γωνίας θ . Αν θεωρήσουμε ότι οι μεταβολές της δράσης ΔI μπορούν να προσομοιωθούν από μια διαδικασία Markov, με την κατανομή των ΔI να είναι κανονική (Gaussian), τότε η μέση τετραγωνική απομάκρυνση της δράσης, $\langle(\Delta I)^2\rangle$ αυξάνει γραμμικά με το χρόνο

$$\langle(\Delta I)^2\rangle = \mathcal{D} t \quad (5.2)$$

και η χρονική εξέλιξη της $P(I, t)$ δίνεται από την εξίσωση Fokker-Planck (βλ. Lichtenberg & Lieberman 1983, Ch. 5). Ο *συντελεστής διάχυσης* (diffusion coefficient) ορίζεται ως ο ασυμπτωτικός ρυθμός αύξησης της δεύτερης ροπής της τυχαίας μεταβλητής ΔI

$$\mathcal{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle(\Delta I)^2\rangle}{t} \quad (5.3)$$

όπου το σύμβολο $\langle \cdot \rangle$ δηλώνει τη μέση τιμή, γύρω από όλες τις πιθανές τιμές της ΔI . Για οποιαδήποτε τιμή της I , το σύνολο των πιθανών τιμών της ΔI αντιστοιχεί στο σύνολο των πιθανών τιμών της θ . Στην απλή περίπτωση που $\mathcal{D} = \text{const}$, η γενική λύση της εξίσωσης Fokker-Planck μπορεί να βρεθεί με τη μέθοδο των χωριζομένων μεταβλητών (βλ. Varvoglis Anastasiadis 1996). Όμως, όταν έχουμε να κάνουμε με το χώρο φάσεων ενός Χαμιλτονιανού συστήματος, ο συντελεστής διάχυσης είναι σταθερός μόνο στην περίπτωση που η διαταραχή είναι τόσο ισχυρή, ώστε να έχουμε πλήρη επικάλυψη συντονισμών. Τότε ο χώρος των φάσεων μοιάζει με ένα ομογενές μέσο, στο οποίο η τροχιά διαχέεται ακολουθώντας κίνηση Brown. Στη γενική περίπτωση ο συντελεστής διάχυσης είναι συνάρτηση της δράσης, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(I)$. Μάλιστα, για έναν ‘τυπικό’ χώρο φάσεων Χαμιλτονιανού συστήματος, όπου κατά μήκος του άξονα της δράσης I υπάρχουν και μικρές νησίδες ευσταθούς κίνησης, η συναρτησιακή μορφή του $\mathcal{D}(I)$ μπορεί να είναι αρκετά περίπλοκη (βλ. Murray et al. 1985, Benkadda et al. 1994, Yannacopoulos & Rowlands 1997). Τότε η αναλυτική επίλυση της εξίσωσης διάχυσης δεν είναι, εν γένει, δυνατή.

5.6.2 Υπολογισμός του Ρυθμού Διάχυσης

Ο χώρος των δράσεων του (ΕΠ) έχει δύο διαστάσεις, που αντιστοιχούν στις $\Psi = \sqrt{\mu_1 a}/p$ και $\Theta = \sqrt{\mu_1 a} e_P^2/2$ (βλ. Κεφάλαιο 2). Για την κατασκευή όμως του χάρτη διάχυσης, θα περιοριστούμε στον υπολογισμό του ρυθμού διάχυσης, D_I , μόνο για τη μία δράση, $I = \Theta$.

Ο υπολογισμός του D_I βασίζεται στην αριθμητική ολοκλήρωση κατάλληλα επιλεγμένων τροχιών και τον υπολογισμό της χρονοσειράς της e_P . Οι τροχιές επιλέχθηκαν από ένα πλέγμα 150×30 αρχικών συνθηκών, με $3.45 \leq a \leq 3.90$ και $0 \leq e_P \leq 0.3$ ($\Delta a = 0.003 \text{ AU}$, $\Delta e_P = 0.01$). Όλες οι τροχιές είχαν αρχικά $\varpi_0 = \varpi' = 0$, $M_0 = 0$ και $e = e_P + e_{for}$. Η τιμή της e_{for} (για κάθε τιμή του a) υπολογίστηκε με βάση τη γραμμική αιώνια θεωρία του (ΕΠ) (Κεφάλαιο 2). Οι εξισώσεις κίνησης ολοκληρώθηκαν με τη μέθοδο MVS και ο χρόνος ολοκλήρωσης ήταν $t_{\text{int}} = 10^5$ χρόνια. Καθώς η περίοδος αιώνιας μεταβολής του ϖ είναι $P_{\text{sec}} = \dot{\varpi}^{-1} < 10^4$ χρόνια στην εξωτερική ζώνη, ο χρόνος ολοκλήρωσης αντιστοιχεί

σε $t > 10 P_{\text{sec}}$. Μετά από την ολοκλήρωση των τροχιών, προχωρήσαμε στην εξάλειψη των υψηλών συχνοτήτων από τις χρονοσειρές των $a(t)$ και $e(t)$, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του κινούμενου μέσου όρου. Στη συνέχεια υπολογίσαμε τη χρονοσειρά της e_P για κάθε τροχιά, παίρνοντας ως τιμή της $e_P(t_i)$ για τη χρονική στιγμή t_i την ποσότητα

$$e_P(t_i) = \frac{1}{2} (k_{j,\text{max}} - k_{j,\text{min}}) \quad (5.4)$$

όπου $k_j = k(t_j) = e_j \sin \varpi_j$, για $i - N/2 \leq j \leq i + N/2$. Το πλήθος N των σημείων της αρχικής χρονοσειράς, που χρησιμοποιούνταν για τον υπολογισμό κάθε τιμής της e_P , αντιστοιχούσε σε χρονικό εύρος 10^4 ετών. Η παραπάνω σχέση βασίζεται στη γραμμική αιώνια θεωρία του (ΕΠ) (βλ. Κεφάλαιο 2).

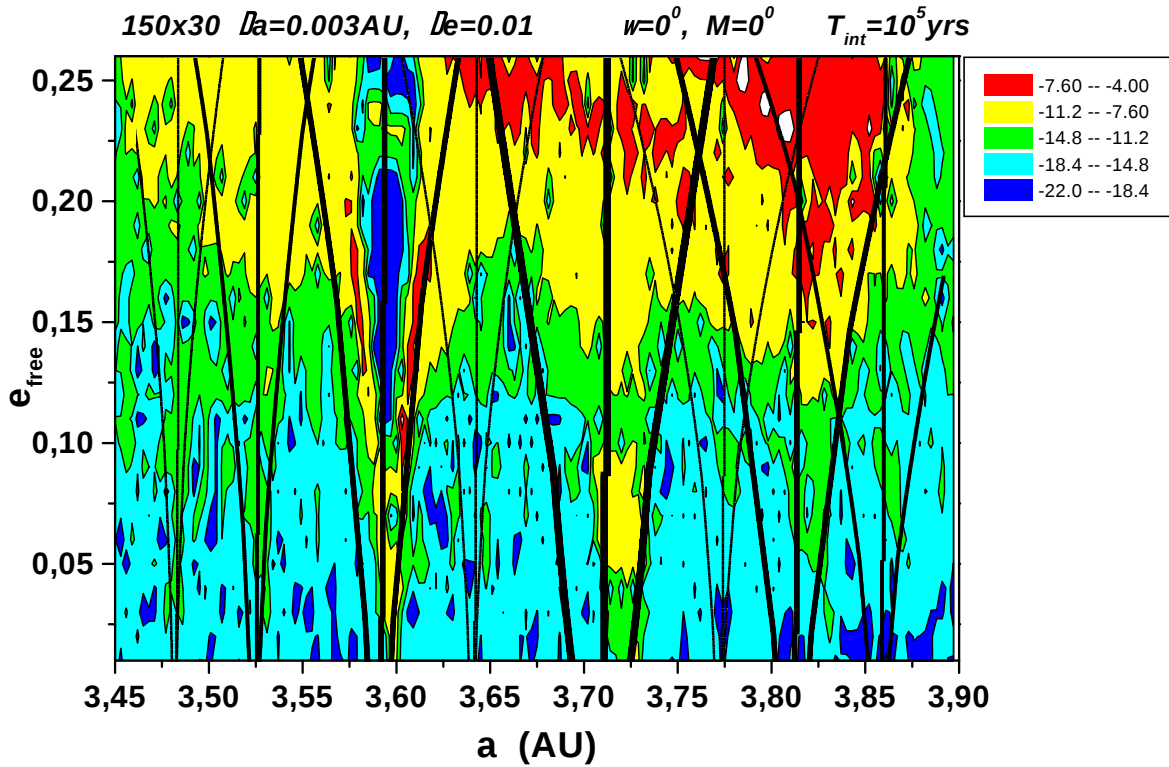
Από τις τιμές των a και e_P , κατασκευάσαμε τη χρονοσειρά της I για κάθε τροχιά. Ο υπολογισμός του ρυθμού διάχυσης $D_I = D_I(a_0, e_{P,0})$ έγινε μέσω της Εξ. 5.3, με τη μέση τετραγωνική απομάκρυνση να υπολογίζεται ως ο χρονικός μέσος (time average) των μετατοπίσεων $\Delta I^2 = [I(t_i + \tau) - I(t_i)]^2$, για τα διαδοχικά σημεία της ίδιας τροχιάς (με αρχικές συνθήκες $a_0, e_{P,0}$)

$$\langle (\Delta I)^2 \rangle = \langle [I(t_i + \tau) - I(t_i)]^2 \rangle_i \quad (5.5)$$

Η αντικατάσταση του χωρικού μέσου όρου (space average, γύρω από τις τιμές των γωνιών) από τον χρονικό μέσο όρο είναι δικαιολογημένη, αν υποθέσουμε ότι η τροχιά καλύπτει εργοδικά το σύνολο των δυνατών τιμών των γωνιών και η μεταβολή της δράσης, ΔI , παραμένει μικρή για το διάστημα $0 \leq t \leq t_{\text{int}}$. Η τελική τιμή του D_I , σε κάθε σημείο του επιπέδου (a, e_P) , δίνεται από την κλίση μιας ευθείας ελαχίστων τετραγώνων, που προσαρμόζεται στο σύνολο των σημείων $\tau - \langle (\Delta I)^2 \rangle(\tau)$. Σημειώνουμε ότι, για μικρές τιμές εκκεντρότητας, η εργοδική κάλυψη του χώρου των γωνιών δεν είναι εξασφαλισμένη, καθώς αναμένουμε να έχουμε διεύρυνση των ευσταθών περιοχών. Επίσης, για μεγάλες τιμές εκκεντρότητας, η μεταβολή ΔI μπορεί να είναι σχετικά μεγάλη μέσα σε $t_{\text{int}} \sim 10^5$ χρόνια. Έτσι, οι μετρούμενες τιμές του D_I είναι εκτιμήσεις του πραγματικού ρυθμού διάχυσης, που δεν αποτελούν ικανοποιητική προσέγγιση, αν θέλουμε να τις χρησιμοποιήσουμε για την επίλυση της εξίσωσης διάχυσης.

5.6.3 Αποτελέσματα

Ο χάρτης διάχυσης της εξωτερικής ζώνης, όπως αυτός προκύπτει από τους παραπάνω υπολογισμούς, δίνεται στο Σχ. 5.16. Η τιμή του $\log D_I$ έχει κωδικοποιηθεί στη χρωματική κλίμακα που δίνεται στα δεξιά του διαγράμματος. Στο ίδιο σχήμα έχουν υπερτεθεί κάποιες καμπύλες σχήματος “V”. Αυτές αντιστοιχούν στις τιμές J^+ και J^- της διαχωριστικής καμπύλης του συντονισμού (βλ. Κεφάλαιο 2), που καθορίζουν το εύρος των δυνατών τιμών του a (για κάθε τιμή της e_P) για την περιοχή λικνίσεων του συντονισμού. Επίσης, μέσα στην καμπύλη σχήματος “V” περιέχεται και η καμπύλη που αντιστοιχεί στη θέση του κέντρου λίκνισης του συντονισμού. Στο Σχ. 5.16 έχουμε σχεδιάσει μόνο τις καμπύλες του ισχυρότερου υποσυντονισμού (για κάθε τιμή της e_P), για συντονισμούς τάξης $q \leq 5$. Το πάχος κάθε καμπύλης είναι αντιστρόφως ανάλογο της τάξης του συντονισμού (και άρα ανάλογο της ‘ισχύος’ του).



Σχήμα 5.16: Χάρτης Διάχυσης της εξωτερικής ζώνης του (ΕΠ). Η τιμή του $\log D_I$ (όπου $I = \sqrt{\mu_1 a} e_P^2/2$) έχει κωδικοποιηθεί με βάση την κλίμακα που δίνεται δεξιά του διαγράμματος. Δίνονται επίσης οι χαρακτηριστικές καμπύλες των βασικών συντονισμών μέσης κίνησης, όπως υπολογίζονται στην προσέγγιση του εκκρεμούς. Κατά αύξουσα σειρά του a διακρίνονται οι συντονισμοί 11/6, 9/5, 7/4, 12/7, 5/3, 13/6, 8/5 και 11/7.

Όπως φαίνεται στο Σχ. 5.16, η περιοχή μικρής εκκεντρότητας ($e_P < 0.1$) χαρακτηρίζεται κατά κανόνα από σχεδόν μηδενική διάχυση. Αυτό σημαίνει ότι οι τροχιές των αστεροειδών είναι, πρακτικά, ευσταθείς. Εξαίρεση αποτελούν κάποιες στενές ‘γλώσσες’ με αυξημένες τιμές του D_I , οι οποίες συμπίπτουν με τις θέσεις των βασικών συντονισμών της περιοχής. Οι συντονισμοί αυτοί είναι οι 11/6, 9/5, 7/4, 12/7, 5/3, 13/8 και 11/7, κατά αύξουσα σειρά του a . Οι μεγαλύτερες τιμές του D_I παρατηρούνται στην περιοχή των συντονισμών 7/4 και 5/3, που είναι και οι ισχυρότεροι στην περιοχή. Τα αποτελέσματα αυτά συμφωνούν με τις παρατηρήσεις, οι οποίες φανερώνουν την ύπαρξη διάκενων στην κατανομή του a , τα οποία σχετίζονται με τους βασικούς συντονισμούς (7/4, 5/3 και 8/5, Holman & Murray (1996)). Επίσης, η εκκεντρότητα της τροχιάς σχεδόν όλων των σωμάτων της εξωτερικής ζώνης είναι μικρότερη του 0.1 (Knežević & Milani 2000). Τέλος, σημειώνουμε ότι, για $e_P < 0.1$, δεν διακρίνονται συντονισμοί τάξης $q > 5$. Αυτό σημαίνει ότι η διάχυση που τυχόν προκαλείται

από αυτούς τους συντονισμούς είναι τόσο ασθενής, ώστε οι συντονισμοί να μην μπορούν να ξεχωρίσουν από το ‘μη-συντονισμένο’ υπόστρωμα.

Για $e_P \sim 0.15$ ο ρυθμός διάχυσης αρχίζει να αυξάνει σημαντικά, σε όλο το εύρος των τιμών του a . Παρατηρώντας κανείς τις διαχωριστικές καμπύλες των συντονισμών, μπορεί να αντιληφθεί ότι οι βασικοί συντονισμοί της εξωτερικής ζώνης αρχίζουν να επικαλύπτονται. Η επικάλυψη είναι μάλιστα πιο έντονη για $a > 3.65$ AU, αφού η απόσταση των διαδοχικών συντονισμών είναι μικρότερη. Για $e_P > 0.2$ η επικάλυψη των συντονισμών είναι σχεδόν πλήρης και ο ρυθμός διάχυσης είναι σημαντικά αυξημένος. Μάλιστα η τιμή του D_I αυξάνει ακόμη περισσότερο καθώς πηγαίνουμε σε μεγαλύτερες τιμές του a , δηλαδή πλησιάζουμε προς το Δία. Εξάιρεση αποτελεί μια νησίδα αμελητέας διάχυσης που περιβάλλει το κέντρο του συντονισμού 7/4, για $a \approx 3.59$ AU και $e_P > 0.1$. Το αποτέλεσμα αυτό συνδέεται άμεσα με την επιλογή των αρχικών τιμών των γωνιών, $\varpi = 0$ και $M = 0$. Για $e_P > 0.1$ ο σημαντικότερος υπο-συντονισμός του 7/4 χαρακτηρίζεται από την κρίσιμη γωνία $\sigma = 7\lambda' - 4\lambda - 3\varpi$. Για $(\varpi, M) = (0, 0)$ (και $\lambda' = 0$) έχουμε $\sigma = 0$, που είναι η θέση του ευσταθούς σημείου του συγκεκριμένου υπο-συντονισμού. Επομένως, για $a \sim 3.59$ AU, θα υπάρχουν τροχιές που είτε είναι ευσταθείς είτε διαχέονται τόσο αργά, ώστε για $t = 10^5$ χρόνια οι μεταβολές ΔI να είναι αμελητέες.

Τα παραπάνω αποτελέσματα οδηγούν σε μια συνολική εκτίμηση για τη μακροχρόνια εξέλιξη των τροχιών των αστεροειδών της εξωτερικής ζώνης, στο πλαίσιο του (ΕΠ). Για $e_P > 0.2$ η επικάλυψη των συντονισμών οδηγεί τους αστεροειδείς σε γρήγορη διαφυγή. Αντίθετα, για μικρότερες τιμές εκκεντρότητας ($e_P < 0.1$) ένα μεγάλο ποσοστό του επιπέδου (a, e_P) καλύπτεται από πρακτικά ευσταθείς τροχιές. Βέβαια, στο πλαίσιο ενός πιο πολύπλοκου μοντέλου κίνησης, το ποσοστό των ευσταθών τροχιών αναμένεται να συρρικνωθεί, καθώς οι συντονισμοί του ΠΤΣ θα διευρυνθούν κι επίσης θα εμφανιστούν τριπλοί συντονισμοί μέσης κίνησης. Η παρατήρηση της ευσταθούς περιοχής του συντονισμού 7/4 δείχνει ότι η πληροφορία που μας δίνει ο συγκεκριμένος χάρτης διάχυσης είναι ελλιπής, αφού είναι γνωστό από προηγούμενες μελέτες (βλ. επίσης Κεφάλαιο 3) ότι ο 7/4 είναι ο πιο χαοτικός συντονισμός της εξωτερικής ζώνης. Είναι επομένως φανερό ότι, για να μπορέσουμε να εξαγάγουμε ασφαλή συμπεράσματα για την συνολική δυναμική στην υπό μελέτη περιοχή, ο χάρτης θα πρέπει να περιέχει πληροφορία για διάφορες αρχικές τιμές των γωνιών. Επομένως, είτε η τιμή του D_I θα πρέπει να υπολογίζεται ως ο χωρικός μέσος μιας συλλογής τροχιών για κάθε σημείο του (a, e_P) (μια εξαιρετικά δαπανηρή ολοκλήρωση), είτε θα πρέπει να κατασκευάσουμε και να μελετήσουμε διάφορους χάρτες για διάφορες αρχικές τιμές των ϖ και M .

5.7 Συμπεράσματα

Θα προσπαθήσουμε τώρα να απαντήσουμε στο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή του κεφαλαίου. Στο πρώτο μας αριθμητικό πείραμα (T1) βρήκαμε ότι ένα ποσοστό $\sim 10\%$ των σωματιδίων της ‘ζώνης’ του (3ΕΠ) ακολουθούν χαοτικές τροχιές, με τυπικές τιμές $T_L < 2 \cdot 10^5$ χρόνια. Στο πείραμα T2 είδαμε ότι οι συντονισμοί υψηλής τάξης επίσης οδηγούν σε χαοτική κίνηση, με $T_L < 10^5$ χρόνια. Συγκεκριμένα, κατά τη διάρκεια των δοκιμαστικών προσομοιώσεων, παρατηρήσαμε ότι το χάος είναι η τυπική συμπεριφορά μιας τροχιάς στους συντονισμούς

τάξης $q \geq 4$, τουλάχιστον για αρχικές τιμές εκκεντρότητας $e_0 \geq 0.1$. Επομένως, ακόμη και στο πλαίσιο του προβλήματος των τριών σωμάτων, το ποσοστό του όγκου του χώρου των φάσεων που οδηγεί σε χαοτική κίνηση είναι σημαντικό. Παραταύτα, για αρκετές από αυτές τις χαοτικές τροχιές, οι τιμές των στοιχείων της τροχιάς είναι εξαιρετικά σταθερές. Θα επιχειρήσουμε να ερμηνεύσουμε αυτή την αντίθεση βάσει των μηχανισμών γένεσης χάους που δρουν σε καθέναν από τους 34 συντονισμούς, τους οποίους μελετήσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Στην εσωτερική ζώνη των αστεροειδών ($1.9\text{AU} \leq a \leq 3.3\text{AU}$) υπάρχουν συνολικά 21 συντονισμοί μέσης κίνησης με το Δία, μέχρι τάξης $q \leq 9$. Εξαιρώντας τους συντονισμούς που αντιστοιχούν στα διάκενα Kirkwood ($2/1$, $3/1$, $4/1$, $5/2$ και $7/3$), κανείς από τους υπόλοιπους δεν έχει περιοδικές τροχιές. Ο συντονισμός $7/3$ είναι και ο μόνος για τον οποίο εντοπίσαμε περιοδικές τροχιές στο (3ΕΠ) για $i > 0$, οι οποίες δεν διακλαδίζονται από την οικογένεια του (ΚΠ). Η πιθανότητα να υπάρχουν περιοδικές τροχιές και σε άλλους συντονισμούς για $i > 0$ δε μπορεί να αποκλειστεί, αν και τα αποτελέσματά μας δε συνηγορούν σε αυτό. Η ύπαρξη περιοδικών τροχιών οδηγεί σε ‘γρήγορη’, διαλλειπτική, μεταφορά κατά μήκος του άξονα της εκκεντρότητας. Η λέξη ‘γρήγορη’ χρησιμοποιείται απλά σε αντιδιαστολή με την ‘αργή’, τύπου διάχυσης, μεταφορά που παρατηρείται σε συντονισμούς οι οποίοι δεν έχουν περιοδικές τροχιές. Ο πραγματικός χρόνος που απαιτείται για τη διαφυγή ενός αστεροειδούς από τους συντονισμούς των διάκενων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος και το ποσοστό των τροχιών που τελικά διαφεύγουν να είναι μικρό, σε σύγκριση με το εύρος του συντονισμού. Ο χρόνος διαφυγής εξαρτάται από την περίοδο της αιώνιας μεταβολής της ϕ στο συντονισμό, καθώς η τιμή της καθορίζει το χρόνο που απαιτείται για την ‘περιφορά’ της τροχιάς γύρω από τη νησίδα λίκνισης. Επιπλέον, ο χρόνος διαφυγής εξαρτάται από την αρχική εκκεντρότητα της τροχιάς του αστεροειδούς, καθώς και από την απόσταση του συντονισμού από τις τροχιές των πλανητών. Υπενθυμίζουμε ότι η τιμή της εκκεντρότητας, e_c , που απαιτείται για να τμήσει η τροχιά του αστεροειδούς (με ημιάξονα a_{res}) την τροχιά ενός πλανήτη (a') δίνεται από τη σχέση $e_c = |a_{res} - a'|/a'$. Φυσικά η επικάλυψη των υπο-συντονισμών του συντονισμού n/n' ενισχύει τη χαοτική μεταφορά και στους συντονισμούς που έχουν περιοδικές τροχιές.

Στις υπόλοιπες 16 περιπτώσεις συντονισμού που μελετήσαμε, οι οποίες δεν εμφανίζουν περιοδικές τροχιές, το χάος οφείλεται αποκλειστικά στην επικάλυψη των υπο-συντονισμών. Καμία τροχιά διαφυγής δεν εντοπίστηκε, για χρόνους της τάξης των $250 \cdot 10^6$ ετών. Επιπλέον οι μέσες τιμές των στοιχείων της τροχιάς είναι, κατά κανόνα, εξαιρετικά σταθερές. Από τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου μπορούμε να αντιληφθούμε ότι αυτή η εικόνα ισχύει και για συντονισμούς υψηλότερης τάξης ($q \geq 10$). Σύμφωνα με την αναλυτική θεωρία των Murray & Holman (1997), η οποία ισχύει για συντονισμούς που δεν έχουν περιοδικές τροχιές, ο χρόνος διαφυγής, για τροχιές που ξεκινούν με $e_0 \sim 0.1$ από τους συντονισμούς $q \geq 5$ της εσωτερικής ζώνης, είναι μεγαλύτερος από την ηλικία του Ηλιακού Συστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που η επικάλυψη των υπο-συντονισμών είναι πλήρης. Αν αυτή η συνθήκη δεν ισχύει, κάτι που αναμένεται να είναι σύννητες, είναι δυνατό να εμφανιστούν ‘παγιδευμένες’ χαοτικές τροχιές (δηλαδή ευσταθές χάος). Στα αποτελέσματά μας εντοπίσαμε αρκετές τροχιές αυτού του τύπου, οι οποίες χαρακτηρίζονται από τη σχεδόν ημιπεριοδική μεταβολή των e και i για πολύ μεγάλους χρόνους.

Κάνοντας μια συνολική εκτίμηση των αποτελεσμάτων μας, σε ό,τι αφορά την εσωτερική

ζώνη, συμπεραίνουμε την ύπαρξη συσχέτισης μεταξύ των διάκενων στην κατανομή του ημιάξονα των τροχιών των αστεροειδών και τους συντονισμούς που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη περιοδικών τροχιών. Ας υποθέσουμε ένα απλοποιημένο μοντέλο του Ηλιακού Συστήματος, στο οποίο συμπεριλαμβάνεται ο Ήλιος, ένας πλανήτης παρόμοιος με το Δία ($\mu \sim 1/1000$) και ένας δίσκος μικρών σωμάτων. Όπως δείχνουν τα αποτελέσματά μας, οι συντονισμοί στην περιοχή των οποίων παρατηρούμε σήμερα τα διάκενα Kirkwood είναι και οι μόνοι συντονισμοί (εσωτερικά του 11/6) που έχουν τη δυνατότητα να 'εκκενώσουν' τη γύρω περιοχή από τους αστεροειδείς, σε χρονικό διάστημα συγκρίσιμο με την ηλικία του δικού μας Ηλιακού Συστήματος. Αυτό συμβαίνει γιατί μόνο οι συντονισμοί 2/1, 3/1, 4/1, 5/2 και 7/3 μπορούν να αυξήσουν την εκκεντρότητα της τροχιάς των αστεροειδών μέχρι την τιμή e_c , σε χρόνους της τάξης των 10^8 ετών. Βέβαια, για να έχουμε πλήρη εκκένωση των συντονισμών, απαιτούνται περισσότεροι του ενός πλανήτες, ώστε να εμφανιστούν αιώνιοι συντονισμοί εντός των συντονισμών μέσης κίνησης. Οι αιώνιοι συντονισμοί καταστρέφουν τις νησίδες ευστάθειας και οδηγούν σε χαοτική κίνηση πολύ μεγαλύτερο ποσοστό συντονισμένων τροχιών. Στο απλοποιημένο μοντέλο των τριών σωμάτων, η πλειοψηφία των συντονισμών μέσης κίνησης δε συντελεί στη δημιουργία επιπλέον διάκενων στην κατανομή του a , τουλάχιστον για μικρές τιμές των e και i . Όμως, ακόμη κι αν λάβουμε υπόψη μας τις παρέλξεις περισσοτέρων πλανητών, το αποτέλεσμα που επιφέρουν οι συντονισμοί τάξης $q \geq 4$ δε διαφέρει σημαντικά, σε σχέση με το μοντέλο (3ΕΠ). Αυτό σημαίνει ότι οι 'αναπάλσεις' των συντονισμών μέσης κίνησης, λόγω των μεταβολών της τροχιάς του Δία, δεν ενισχύουν σημαντικά την επικάλυψη των υπο-συντονισμών. Επίσης, λόγω της σχετικά μεγάλης τιμής του q , οι συντονισμοί αυτοί δεν μπορούν να μεταβάλλουν σημαντικά την τιμή των συχνοτήτων g και s , σε σχέση με τη γραμμική θεωρία, με αποτέλεσμα να μην είναι δυνατή η εμφάνιση αιώνιων συντονισμών. Με βάση τα παραπάνω, η ύπαρξη σημαντικού αριθμού συντονισμένων αστεροειδών που ακολουθούν αργά διαχεόμενες, ή ακόμη και ευσταθώς χαοτικές, τροχιές δεν πρέπει να αποτελεί έκπληξη.

Όσον αφορά στους συντονισμούς της εξωτερικής ζώνης, η εικόνα που σχηματίζουν τα αποτελέσματά μας δεν είναι και τόσο καθαρή, όσον αφορά στο ρόλο των περιοδικών τροχιών. Η θεωρία των Murray & Holman (1997) προβλέπει ότι ο χρόνος διάχυσης, λόγω 'αργής' διάχυσης, μπορεί να είναι αρκετά μικρός. Ο ρυθμός διάχυσης εξαρτάται από την τάξη του συντονισμού και την αρχική τιμή της ελεύθερης εκκεντρότητας. Τροχιές με $e_0 \sim 0.1$ τέμνουν την τροχιά του Δία σε χρόνους μικρότερους των 10^8 ετών, ξεκινώντας από την περιοχή των περισσότερων από τους συντονισμούς που μελετήσαμε. Οι συντονισμοί 7/4, 5/3 και 8/5 είναι οι πιο αποδοτικοί, όσον αφορά στη διάχυση της εκκεντρότητας, όπως δείχνουν και τα δικά μας αποτελέσματα. Στους συντονισμούς 7/4 και 5/3 υπάρχουν και περιοδικές τροχιές. Όμως η επικάλυψη των υπο-συντονισμών είναι ούτως ή άλλως πλήρης, για αυτές τις δύο περιπτώσεις. Αν λάβουμε υπόψη μας το γεγονός ότι, για $e \sim 0.2$, οι δύο αυτοί συντονισμοί αρχίζουν να επικαλύπτονται (βλ. Σχ. 5.16), μπορούμε να κατανοήσουμε γιατί οι περισσότερες δοκιμαστικές τροχιές καταλήγουν να τέμνουν την τροχιά του Δία σε χρόνους μικρότερους των 10^6 ετών. Έτσι η ύπαρξη περιοδικών τροχιών είναι πιθανό να μην έχει ιδιαίτερη σημασία, εκτός ίσως από το να συνηγορεί κατά ένα ποσοστό στην ταχεία διαφυγή των τροχιών. Από την άλλη μεριά συντονισμοί υψηλότερης τάξης, όπως οι 12/7 και 13/8, έχουν χαρακτηριστικούς χρόνους διαφυγής της τάξης των 10^9 ετών (για $e_0 \sim 0.1$), σύμφωνα με τους Murray &

Holman (1997). Καθώς δεν υπάρχει άλλος μηχανισμός μεταφοράς (περιοδικές τροχιές), δεν αναμένεται διαφυγή για χρόνους της τάξης των $250 \cdot 10^6$ ετών. Αυτό ακριβώς είναι και το αποτέλεσμα των δικών μας αριθμητικών πειραμάτων. Αν θεωρήσουμε περισσότερους πλανήτες στο μοντέλο μας, η μεταφορά κατά μήκος του άξονα της εκκεντρότητας ενισχύεται σημαντικά στην εξωτερική ζώνη. Υπάρχουν όμως, ακόμη και σε αυτήν την περιοχή της ζώνης, περιοχές στις οποίες παρατηρούνται ευσταθώς χαοτικές τροχιές (όπως στο συντονισμό 12/7).

Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες A9 και B8, που αναφέρεται στο Παράρτημα Γ (Βιογραφικό Σημείωμα).

