

Κεφάλαιο 6

Χάος στα συμήνη των Τρωικών Αστεροειδών

Στο Κεφάλαιο αυτό αφήνουμε την κύρια ζώνη των αστεροειδών και μεταφερόμαστε στην περιοχή της τροχιάς του Δία ($a \sim 5.2\text{AU}$), για να μελετήσουμε τη δυναμική των Τρωικών Αστεροειδών (Trojans). Τα σώματα αυτά εκτελούν λίκνιση γύρω από δύο σημεία ευσταθούς ισορροπίας του (ΚΠ), τα σημεία Lagrange. Για το λόγο αυτό, οι τροχιές των Τρωικών θεωρούνται για πολλά χρόνια ως παράδειγμα ευστάθειας. Σύγχρονες μελέτες έδειξαν ότι, στο πλαίσιο πιο πολύπλοκων μοντέλων κίνησης, η ευστάθεια των Τρωικών αμφισβητείται. Όπως θα δούμε η χαοτική κίνηση είναι έντονη στην περιοχή των Τρωικών και η πιθανότητα διαφυγής ενός αστεροειδούς είναι μη αμελητέα. Ένας από τους κύριους μηχανισμούς γένεσης του χάους είναι η συνύπαρξη αιώνιων συντονισμών του αναβιβάζοντος συνδέσμου εντός της ζώνης λίκνισης του συντονισμού μέσης κίνησης 1/1 με το Δία.

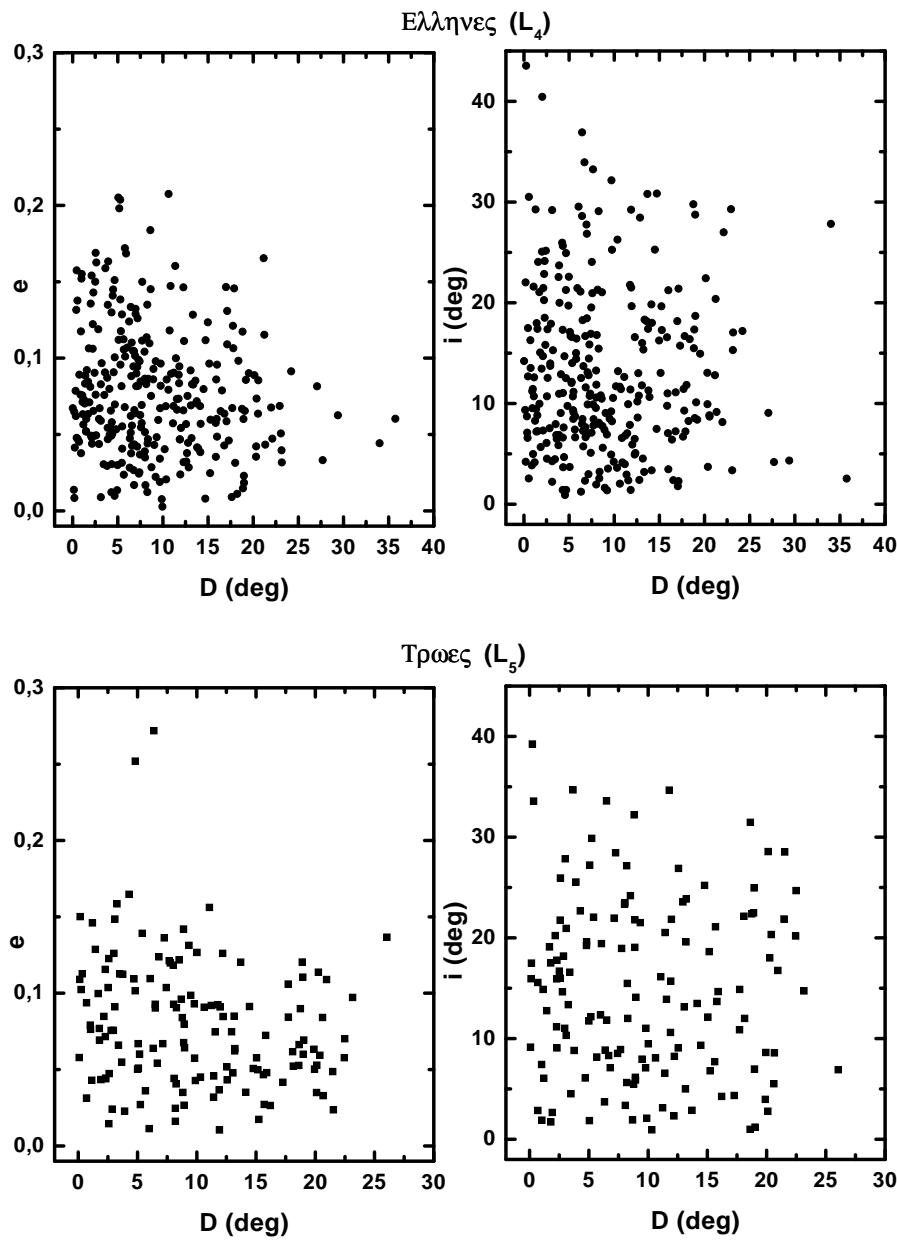
6.1 Δυναμική των Τρωικών Αστεροειδών

To 1906 ανακαλύφθηκε από τον Max Wolf ο πρώτος Τρωικός αστεροειδής, μετέπειτα (588)-Achilles. Η παρατήρηση αυτή απετέλεσε υρίαμβο για την Ουράνια Μηχανική, καθώς η πιθανή ύπαρξη σωμάτων σε ευσταθείς τροχιές στην περιοχή του Δία είχε ήδη προβλεφθεί από τον Lagrange έναν αιώνα και πλέον νωρίτερα. Συγκεκριμένα ο Lagrange είχε μελετήσει την κίνηση ενός δοκιμαστικού σωματιδίου στο πλαίσιο του (ΚΠ), ανακαλύπτοντας 5 ειδικές λύσεις. Τρεις από αυτές, τα σημεία L_1 , L_2 και L_3 βρίσκονται στην ευθεία που ενώνει (στο συνοδικό σύστημα αναφοράς) τον Ήλιο με το Δία (colinear points) και αποτελούν σημεία ασταθούς ισορροπίας για κάθε τιμή του λόγου των μαζών, μ . Τα σημεία L_4 και L_5 βρίσκονται στην ίδια απόσταση με το Δία από τον Ήλιο, έτσι ώστε το τρίγωνο Ήλιος-Δίας- L_4 (ή L_5) να είναι ισόπλευρο. Για $\mu \sim 10^{-3}$, όπως στην περίπτωση του Δία, τα δύο σημεία ισορροπίας είναι ευσταθή. Έτσι η τροχιά που διαγράφει στον ουρανό ένα σώμα που βρίσκεται σε κάποιο από τα δύο ευσταθή σημεία Lagrange είναι ίδια με αυτήν του Δία, αλλά με μία διαφορά φάσης $\delta\lambda = \pm 60^\circ$. Συγκεκριμένα ένα αντικείμενο που βρίσκεται στο σημείο L_4 προηγείται του Δία κατά $\lambda = 60^\circ$, ενώ στο L_5 έπεται του Δία κατά την ίδια τιμή λ . Οι Τρωικοί βρίσκονται στη

γειτονιά των ευσταθών σημείων ισορροπίας του (ΚΠ) (L_4 και L_5) και εκτελούν λίκνιση γύρω από αυτά. Λεπτομερής ανάλυση της κίνησης στη γειτονιά των σημείων ισορροπίας του (ΚΠ) μπορεί να βρεθεί στα βιβλία των Szebehely (1967) και Murray & Dermott (2000).

Σήμερα (28 Feb. 2002, IAU-Minor Planet Center) τα δύο ‘σμήνη των Τρωικών’ αριθμούν συνολικά 1215 μέλη, 696 στην περιοχή του L_4 και 519 στην περιοχή του L_5 . Η ονοματολογία αυτών των αστεροειδών είναι αρκετά ενδιαφέρουσα. Κατά παράβαση του μέχρι πρότινος γενικού κανόνα, σύμφωνα με τον οποίο οι αστεροειδείς έπαιρναν ονόματα υθλυκού γένους, οι αστεροειδείς αυτοί ονοματοδοτούνται από τους άνδρες ήρωες της Ιλιάδος. Το σμήνος του L_4 αποτελείται από τους Έλληνες, ενώ το σμήνος του L_5 από τους Τρώες, με την εξαίρεση ένος ‘κατασκόπου’ σε κάθε στρατόπεδο. Από τα 1084 σώματα 433 έχουν λάβει μόνιμο αριθμό (permanent designation), ενώ από τους υπόλοιπους αρκετοί έχουν παρατηρηθεί σε αποχή πάνω από δύο φορές (multi-oppositioned objects). Στο Σχ. 6.1 δίνεται η κατανομή των σωμάτων των δύο σμηνών, στα επίπεδα (D, e) και (D, i), όπου D το εύρος λίκνισης γύρω από το σημείο ισορροπίας. Οι μέσες τιμές αυτών των παραμέτρων είναι $\langle D \rangle = 9^0.3$, $\langle e \rangle = 0.08$ (μικρότερη από την αντίστοιχη τιμή για την κύρια ζώνη) και $\langle i \rangle = 13^0.6$ (μεγαλύτερη απ' ό, τι στην κύρια ζώνη). Ο αριθμός των παρατηρηθέντων Τρωικών αυξάνει με γρήγορους ρυθμούς τα τελευταία χρόνια. Αρκεί κανείς να σκεφτεί ότι το 1993 ήταν γνωστοί μόλις 174 Τρωικοί (αριθμημένοι + multi-oppositioned). Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η διαφορά ανάμεσα στο πλήθος των Ελλήνων και των Τρώων δεν έχει εξηγηθεί ικανοποιητικά μέχρι σήμερα. Ο Barber (1986) υποστήριζε ότι η διαφορά αυτή είναι όντως πραγματική και οφείλεται στην ασυμμετρία των αιώνιων διαταραχών που προκαλεί ο Κρόνος στα δύο σμήνη. Η άποψη ότι ο διαφορετικός αριθμός των παρατηρούμενων σωμάτων είναι αποτέλεσμα φαινομένων επιλογής (selection effects) κατά την παρατήρηση, είναι επίσης μια πιθανή εκδοχή (βλ. Shoemaker et al. 1989). Τελευταία συζητείται η πιθανότητα μιας σημαντικής διαφοροποίησης των δύο σημείων Lagrange, όσον αφορά στο μηχανισμό σύλληψης των Τρωικών στο συντονισμό 1/1, προτού ακόμη διαφύγει το αέριο του πρωτοπλανητικού νέφους. Δεν έχουν δημοσιευτεί όμως κάποια σημαντικά αποτελέσματα που να υποστηρίζουν αυτήν την άποψη.

Το πρόβλημα της κίνησης στο συντονισμό 1/1 του προβλήματος των τριών σωμάτων (co-orbital motion) απασχόλησε πάρα πολλούς ερευνητές τον τελευταίο αιώνα, έτσι ώστε ένας πλήρης κατάλογος των εργασιών που έχουν δημοσιευτεί σε αυτό το θέμα να είναι αδύνατο να παρουσιαστεί. Το πρόβλημα αφορά στην ευστάθεια των τροχιών λίκνισης, δηλαδή στον προσδιορισμό του εύρους της περιοχής ευστάθειας γύρω από τα σημεία ισορροπίας $L_{4,5}$. Οι πρώτοι αναλυτικοί υπολογισμοί έγιναν από τον Thüring (1931), όταν μόνο 7 Τρωικοί ήταν γνωστοί. Τα αποτελέσματά του έδειξαν ότι τροχιές των οποίων ο ημιάξονας παίρνει τιμές σε ένα δίαστημα εύρους $\delta a = \pm 0.05a'$ γύρω από την τιμή a' (του Δία) είναι ευσταθείς. Αυτή η περιοχή τιμών του a είναι πολύ μεγαλύτερη από την περιοχή ευσταθούς λίκνισης, όπως αυτήν υπολογίζεται με σύγχρονες μεθόδους, γεγονός που οφείλεται στο απλοϊκό μοντέλο του Thüring. Πιο ακριβείς υπολογισμοί έγιναν στη συνέχεια από τον Rabe (1965), ο οποίος μελέτησε αρχικά το σύστημα των γραμμικοποιημένων εξισώσεων στη γειτονιά της περιοδικής τροχιάς. Το αποτέλεσμα ήταν ο προσδιορισμός μιας οριακής καμπύλης ευσταθών λικνίσεων, η οποία είναι συνάρτηση τόσο του εύρους λίκνισης, D , γύρω από το σημείο ισορροπίας όσο και της εκκεντρότητας, e . Η καμπύλη αυτή είναι περίπου η ίδια τόσο για το (ΚΠ) όσο και



Σχήμα 6.1: Κατανομή των 433 αριθμημένων Τρωικών στα επίπεδα (D, e) (αριστερά) και (D, i) (δεξιά). Τα σώματα των δύο συμηνών δείχνονται σε χωριστά διαγράμματα (πάνω=Έλληνες και κάτω=Τρώες).

για το (ΕΠ).

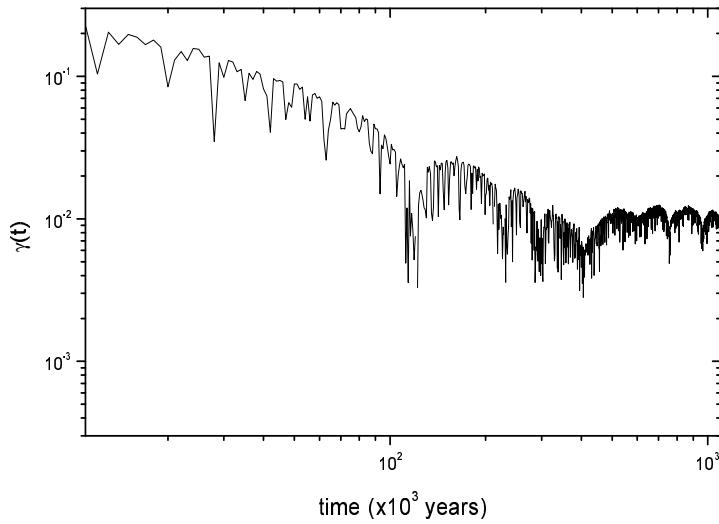
Η πιο πλήρης αναλυτική θεωρία της κίνησης των Τρωικών έχει δημοσιευτεί από τον Érdi (1988, 1997). Η θεωρία αυτή προβλέπει με αρκετή ακρίβεια τη χρονική εξέλιξη του εύρους λίκνισης, D , αλλά και της εκκεντρότητας e και της κλίσης i των Τρωικών στα πλαίσια του (3ΕΠ). Επίσης μπορεί να επεκταθεί και για την περίπτωση που τα στοιχεία e' , w' και Ω' της τροχιάς του Δία μεταβάλλονται σύμφωνα με τη γραμμική αιώνια θεωρία. Φυσικά, όπως κάθε αναλυτική θεωρία κίνησης, αποτελεί πολύ καλή προσέγγιση για ευσταθείς τροχιές αλλά έχει περιορισμένη χρονική ισχύ ($t \sim 1/\sqrt{\mu}$) για μη ευσταθείς τροχιές. Παραβλέποντας το είδος της τροχιάς που ακολουθούν οι Τρωικοί (τακτική ή χαοτική) οι Giorgilli & Skokos (1997) απέδειξαν την ενεργό ευστάθεια (effective stability) μιας μικρής περιοχής γύρω από τα σημεία Lagrange του (ΚΠ), δηλαδή τη σταθερότητα των τροχιών για χρόνους ίσους με την ηλικία του Σύμπαντος, κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Nekhoroshev (1977, 1979). Η επιλογή κατάλληλων μεταβλητών έδωσε, για πρώτη φορά, ένα ρεαλιστικό αποτέλεσμα για το εύρος της 'ευσταθούς' περιοχής, αν και ακόμη πολύ μικρό σε σύγκριση με την περιοχή κίνησης των Τρωικών. Η επέκταση σε 3-διάστατο χώρο μορφής έγινε από τους Skokos & Dokoumetzidis (2000). Η πιο πρόσφατη αιώνια θεωρία κίνησης των Τρωικών δημοσιεύτηκε από την Morais (1999, 2001). Η θεωρία αυτή βασίζεται σε ένα ανάπτυγμα της παρελκτικής συνάρτησης του προβλήματος των 5+1 σωμάτων (δηλαδή του 4Π), 4ου βαθμού ως προς e , i . Στο ανάπτυγμα αυτό συμπεριλαμβάνεται ο συντονισμός $1/1$ με το Δία αλλά και οι όροι αιώνιας μεταβολής της τροχιάς του Δία. Έτσι κατέστη δυνατός, για πρώτη φορά, ο προσεγγιστικός υπολογισμός της θέσης των αιώνιων συντονισμών εντός της ζώνης λίκνισης του $\lambda - \lambda'$.

Η μακροχρόνια εξέλιξη της τροχιάς των Τρωικών μπορεί να μελετηθεί μόνο μέσω αριθμητικής προσομοίωσης, στο πλαίσιο ενός ρεαλιστικού μοντέλου κίνησης του Ηλιακού Συστήματος (όπως το 4Π). Τα πιο σημαντικά αριθμητικά αποτελέσματα μέχρι σήμερα έχουν δημοσιευτεί από τον Milani (1993, 1994) και τους Levison et al. (1997). Ο Milani (1993, 1994) ανέλυσε τα αποτελέσματα μιας αριθμητικής ολοκλήρωσης των τροχιών των 174 γνωστών τότε Τρωικών, για $t = 1 \cdot 10^6 - 5 \cdot 10^6$ χρόνια (μοντέλο 4Π). Βασιζόμενος στη θεωρία του Érdi (1988), εφήρμοσε μια μέθοδο ανάλυσης συχνοτήτων, η οποία του επέτρεψε να προσδιορίσει τις ελεύθερες τιμές των στοιχείων της τροχιάς (D_P , e_P και $\sin i_P$) κάθε Τρωικού, καθώς και τις αντίστοιχες συχνότητες (f_σ , g και s). Επαναλαμβάνοντας τους υπολογισμούς για διάφορα τμήματα της τροχιάς, εύρους 200,000 ετών, κατάφερε να εκτιμήσει τη διασπορά των D_P , e_P και $\sin i_P$, η οποία και αποτελεί μέτρο της σταθερότητας της τροχιάς. Υπολογίζοντας ταυτόχρονα το μέγιστο εκθέτη Lyapunov, μέσω της επίλυσης των εξισώσεων μεταβολών, ο Milani έδειξε ότι αρκετοί Τρωικοί ακολουθούν χαοτικές τροχιές, 13 από αυτούς μάλιστα με $T_L \leq 10^5$ χρόνια. Έτσι εξήγαγε το συμπέρασμα ότι το φαινόμενο του 'ευσταθούς χάους' εμφανίζεται και στη ζώνη των Τρωικών. Θα δούμε βέβαια παρακάτω ότι οι χαοτικές τροχιές των Τρωικών δε μοιάζουν με τις ευσταθώς χαοτικές τροχιές της κύριας ζώνης, καθώς ο μηχανισμός που ευθύνεται για το χάος είναι τελείως διαφορετικός. Η πιο εκτεταμένη αριθμητική προσομοίωση των Τρωικών έγινε από τους Levison et al. (1997), οι οποίοι ολοκλήρωσαν τις εξισώσεις του (4Π) για 270 υποθετικούς και 36 πραγματικούς Τρωικούς. Ο χρόνος ολοκλήρωσης αντιστοιχούσε σε $4 \cdot 10^9$ χρόνια. Τα αποτελέσματά τους έδειξαν ότι τα σμήνη των Τρωικών 'αδειάζουν' με την πάροδο του χρόνου και η περιοχή ενεργού ευστάθειας (για $t \approx T_{SS}$), στο

επίπεδο (D, e), είναι μικρότερη από την περιοχή των παρατηρούμενων Τρωικών. Άρα, σήμερα, παρατηρούμε τους Τρωικούς καθώς αυτοί διαχέονται εκτός των σμηνών. Μάλιστα, όπως έδειξαν οι Levison et al. (1997), οι τροχιές των διαφυγόντων Τρωικών μοιάζουν με αυτές των κομητών βραχείας περιόδου (Jupiter-family comets).

Οι μηχανισμοί γένεσης χαοτικής κίνησης στη ζώνη των Τρωικών δεν έχουν μελετηθεί επαρκώς μέχρι σήμερα. Οι Levison et al. (1997) δεν πρότειναν κάποιους υποψήφιους μηχανισμούς για να εξηγήσουν την παρατηρούμενη διάχυση. Αντίθετα ο Milani (1993, 1994) είχε παρατηρήσει ότι το σμήνος των παρατηρούμενων Τρωικών φαίνεται να περικλείεται, στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων, από τις χαρακτηριστικές καμπύλες των αιώνιων συντονισμών ν_{16} και ν_{17} , χωρίς όμως να προσπαθήσει να συσχετίσει τις παρατηρούμενες μεταβολές των στοιχείων της τροχιάς με τη δράση αυτών των συντονισμών. Ο ρόλος των αιώνιων συντονισμών είναι όντως σημαντικός, όπως θα γίνει εμφανές στη συνέχεια. Στην αναζήτηση των συντονισμών που πιθανώς είναι υπεύθυνοι για την εμφάνιση χάους θα πρέπει κανείς να λάβει υπόψη του τις βασικές συχνότητες του συστήματος. Οι τροχιές των Τρωικών χαρακτηρίζονται από τις εξής περιοδικότητες (Erdei 1997): (α) την περίοδο περιφοράς των ~ 12 ετών περί τον Ήλιο, (β) την περίοδο λίκνισης του $\sigma = \lambda - \lambda'$ γύρω από το σημείο Lagrange (~ 150 χρόνια), (γ) την περίοδο περιστροφής του ϖ ($\sim 3,000 - 5,000$ χρόνια) και (δ) την περίοδο περιστροφής του Ω ($\sim 30,000 - 150,000$ χρόνια). Είναι φανερό ότι δεν μπορεί να επιτευχθεί συντονισμός χαμηλής τάξης μεταξύ των βασικών συχνοτήτων των Τρωικών. Επίσης η τιμή του $P_g = 1/\dot{\omega}$ είναι πολύ μεγάλη και δεν εμφανίζονται αιώνιοι συντονισμοί του περικέντρου (ν_5 ή ν_6). Αντίθετα, αιώνιοι συντονισμοί του αναβιβάζοντος συνδέσμου είναι δυνατό να επηρεάσουν την κίνηση των Τρωικών, καθώς η συχνότητα $\dot{\Omega}$ μπορεί να πάρει τιμές κόντα στις βασικές συχνότητες s_6 και s_7 . Σημαντικό ρόλο παίζει πιθανώς και η συχνότητα της μεγάλης ανισότητας, δηλαδή η βασική συχνότητα μεταβολής του ημιάξονα του Δία λόγω του σχεδόν-5/2 συντονισμού με τον Κρόνο, με περίοδο $1/f_{5/2} \approx 880$ χρόνια. Η παρατήρηση αυτή ενισχύεται κι από τα πρόσφατα αποτελέσματα των Michtchenko & Ferraz-Mello (2001), οι οποίοι έδειξαν ότι, αν κατά την πρωταρχική φάση μετανάστευσης των πλανητών (βλ. Murray et al. 1998a) οι Δίας και Κρόνος πέρασαν από τον ακριβή συντονισμό 5/2, το σμήνος των Τρωικών (αλλά και η ομάδα των Hildas) πιθανόν θα είχε διαλυθεί λόγω της επαγόμενης χαοτικής κίνησης. Από τις παραπάνω τιμές βλέπουμε ότι θα μπορούσε να επιτευχθεί κάποιος συντονισμός, χαμηλής τάξης, μεταξύ των $f_{5/2}$ και $g = \dot{\omega}$ ή f_σ .

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση των 13 πιο χαοτικών Τρωικών ($T_L \leq 10^5$ χρόνια) από τους 174 που είχε μελετήσει ο Milani (1993). Θα δείξουμε ότι η χαοτική τους κίνηση οφείλεται στην ύπαρξη αιώνιων συντονισμών του αναβιβάζοντος συνδέσμου, με προεξάρχοντα τον συντονισμό ν_{16} . Σημαντικός όμως φάνεται ότι είναι και ο ρόλος των υψηλότερης τάξης, μη-γραμμικών, αιώνιων συντονισμών. Αριθμητικές προσομοιώσεις, για χρόνους της τάξης των 10^8 ετών, δείχνουν ότι αυτοί οι Τρωικοί υφίστανται σημαντικές μεταβολές της κλίσης της τροχιάς τους, οι οποίες είναι δυνατό να τους οδηγήσουν εκτός του συντονισμού 1/1. Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε, με τη βοήθεια μιας μαζικής αριθμητικής προσομοίωσης, το ποσοστό των χαοτικών τροχιών στην ευρύτερη περιοχή των σμηνών.



Σχήμα 6.2: Σύγκλιση της $\gamma(t) = \chi(t)$ στην τιμή του χαρακτηριστικού εκθέτη Lyapunov, γ , για την τροχιά του (1868) Thersites.

6.2 Η Ιστορία του (1868) Thersites:

Ο αστεροειδής (1868) Thersites εκτελεί λίκνιση γύρω από το σημείο L_4 . Ανήκει στην ομάδα των 13 χαοτικών Τρωικών που είχε εντοπίσει ο Milani (1993) και η τιμή του χρόνου Lyapunov της τροχιάς του είναι $T_L \approx 91,000$ χρόνια. Οι Pilat-Lohinger et al. (1999) προχώρησαν στην αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς των 13 αυτών αστεροειδών για 10^8 χρόνια, με σκοπό τον υπολογισμό της διασποράς των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς και την εκτίμηση της σταθερότητάς της. Ο (1868) Thersites βρέθηκε να διαφεύγει μετά από $26 \cdot 10^6$ χρόνια. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την εξέλιξη της τροχιάς του (1868) Thersites, μαζί με μια ομάδα γειτονικών αρχικών συνθηκών, με σκοπό να εκτιμήσουμε την πιθανότητα διαφυγής και να προσδιορίσουμε τον μηχανισμό που είναι υπεύθυνος για τη χαοτική κίνηση.

6.2.1 Αρχικές Συνθήκες

Το μοντέλο κίνησης που θα χρησιμοποιήσουμε σε όλοκληρο το κεφάλαιο είναι αυτό του εξωτερικού Ήλιακού Συστήματος (4Π). Οι αρχικές συνθήκες της τροχιάς του (1868) Thersites είναι $a = 5.290\text{AU}$, $e = 0.11$, $i = 16^0.8$, $\Omega = 197^0.8$, $\omega = 169^0.0$ και $M = 41^0.07$ (Bowell et al. 1994). Δεδομένης της χαοτικής κίνησης, η μακροχρόνια ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης με διαφορετικές μεθόδους, όπως και σε διαφορετικούς υπολογιστές, αναμένεται να δίνει διαφορετικά αποτελέσματα. Αποφασίσαμε να ολοκληρώσουμε την τροχιά του (1868) Thersites σε 5 διαφορετικούς υπολογιστές, σχηματίζοντας έτσι μια ομάδα ‘κλώνων’ ($C1 - C5$) του

Πίνακας 6.1: Κατηγοριοποίηση των τροχιών. Στην πρώτη στήλη δίνεται ένα συμβολικό ‘όνομα’ για κάθε τροχιά, σύμφωνα με όσα αναφέρονται στο κείμενο. Η αρχική απόκλιση από την τροχιά του (1868) Thersites δίνεται στη δεύτερη στήλη. Στην τρίτη στήλη αναφέρεται η κατηγορία στην οποία εμπίπτει η κάθε τροχιά, σύμφωνα με τη σταθερότητα των στοιχείων της. Για τις ESC τροχιές δίνεται και ο χρόνος διαφυγής, T_{esc} ($\times 10^6$ χρόνια).

Τροχιά	Απόκλιση δX	Κατηγορία	T_{esc}
$C1$	–	ESC	26.0
$C2$	–	UNS	–
$C3$	–	UNS	–
$C4$	–	UNS	–
$C5$	–	STB	–
$N1$	$\delta a = +0.01 AU$	ESC	42.5
$N2$	$\delta a = -0.01 AU$	STB	–
$N3$	$\delta e = +0.01$	STB	–
$N4$	$\delta e = -0.01$	STB	–
$N5$	$\delta M = +0^\circ.01$	STB	–
$N6$	$\delta M = -0^\circ.01$	ESC	38.2
$N7$	$\delta \omega = +0^\circ.5$	STB	–
$N8$	$\delta \omega = -0^\circ.5$	ESC	22.6
$N9$	$\delta \Omega = +0^\circ.5$	UNS	–
$N10$	$\delta \Omega = -0^\circ.5$	STB	–
$N11$	$\delta M = +0^\circ.5$	UNS	–
$N12$	$\delta M = -0^\circ.5$	UNS	–
$N13$	$\delta \omega = -0^\circ.5 = \delta \Omega$	STB	–
$N14$	$\delta \omega = +0^\circ.5 = \delta \Omega$	UNS	–
$N15$	$\delta \omega = -0^\circ.5 = \delta M$	STB	–
$N16$	$\delta \omega = +0^\circ.5 = \delta M$	UNS	–

αστεροειδούς. Επίσης, επιλέξαμε μια ομάδα 16 ‘γειτόνων’ ($N1 - N16$) του (1868) Thersites, προσθέτοντας μικρές μεταβολές στα στοιχεία της ονομαστικής τροχιάς (nominal orbit). Οι μεταβολές δX που θεωρήσαμε δίνονται στον Πίνακα 6.1. Ο χρόνος ολοκλήρωσης τέθηκε ίσος με $50 \cdot 10^6$ χρόνια και η μέθοδος ολοκλήρωσης που επιλέξαμε είναι αυτή των σειρών Lie, (Hanslmeier & Dvorak 1984).

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις μεταβολών επιβεβαιώσαμε το αποτέλεσμα του Milani (1993), όσον αφορα στην τιμή του T_L της τροχιάς του (1868) Thersites. Το αποτέλεσμα δίνεται γραφικά στο Σχ. 6.2., όπου φαίνεται η σύγκλιση του $\gamma(t) = \chi(t)$ στην ασυμπτωτική τιμή του γ . Χαοτικές τροχιές που βρίσκονται στην ίδια περιοχή του χώρου των φάσεων (όπως στο πείραμά μας) αναμένεται να έχουν παραπλήσια τιμή του T_L .

6.2.2 Σταθερότητα των Στοιχείων της Τροχιάς

Τα αποτελέσματα της αριθμητικής ολοκλήρωσης έδειξαν ότι μπορούμε να διαχωρίσουμε τις τροχιές των 21 σωματιδίων σε τρεις βασικές κατηγορίες:

- (α) τροχιές των οποίων τα στοιχεία υφίστανται μεγάλες μεταβολές και οδηγούνται σε διαφυγή πριν τα $50 \cdot 10^6$ χρόνια (τις συμβολίζουμε με ESC)
- (β) τροχιές των οποίων τα στοιχεία επίσης μεταβάλλονται κατά μεγάλα ποσά, χωρίς όμως να διαφεύγουν (UNS) και
- (γ) τροχιές των οποίων τα στοιχεία εμφανίζουν μεγάλη σταθερότητα (STB)

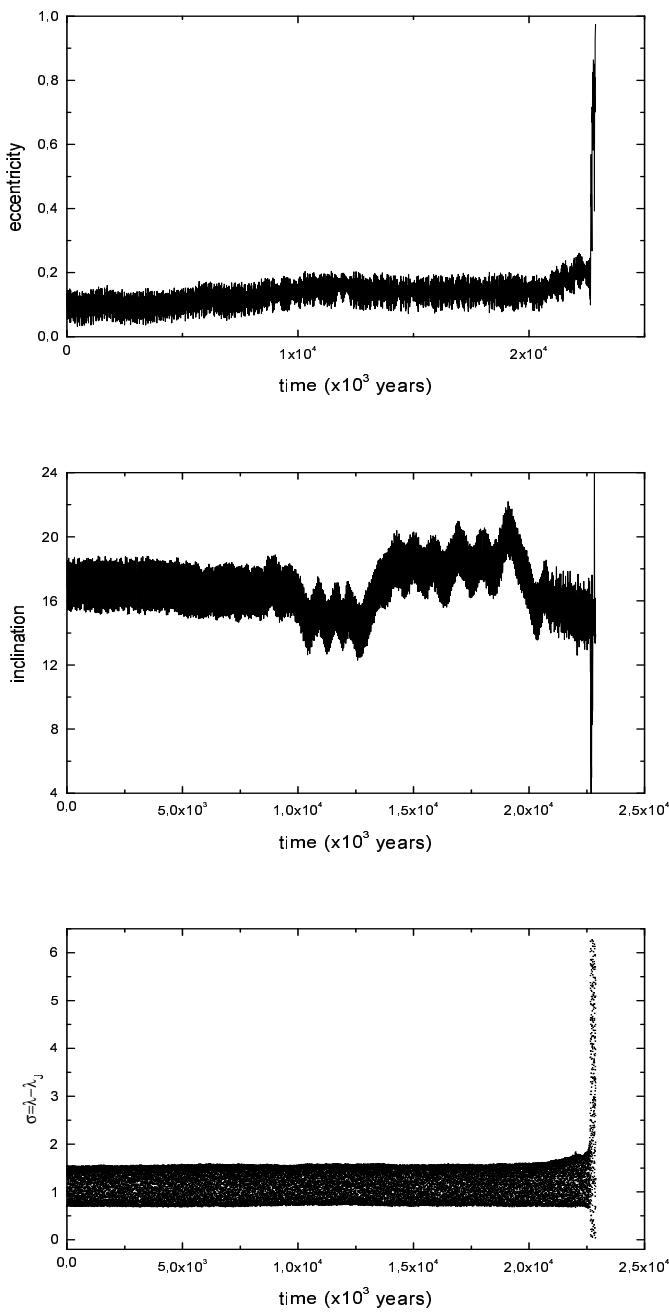
Η κατηγοριοποίηση των τροχιών, σύμφωνα με τη συμπεριφορά των στοιχείων τους, δίνεται επίσης στον Πίνακα 6.1. Για τις τροχιές που διαφεύγουν δίνεται επίσης και ο χρόνος διαφυγής, T_{esc} . Οι μέσες τιμές $\langle e \rangle$ και $\langle i \rangle$ υπολογίζονται με τη μέθοδο του κινούμενου μέσου, για διάφορα χρονικά παράθυρα με εύρος $\Delta t = 1.2 \cdot 10^6$ χρόνια. Είναι φανερό ότι σταθερές τροχιές αντιστοιχούν σε σχεδόν σταθερές τιμές $\langle e \rangle$ και $\langle i \rangle$. Αντίθετα, στις ασταθείς τροχιές, οι μέσες τιμές μεταβάλλονται σημαντικά από παράθυρο σε παράθυρο. Επομένως, για το χαρακτηρισμό της σταθερότητας των τροχιών, ορίζουμε ένα δείκτη μεταβλητότητας ως τη διαφορά ανάμεσα στη μεταβολή της μέσης τιμής $\langle X \rangle_{max} - \langle X \rangle_{min}$ του στοιχείου X και την τυπική απόκλιση $\sigma(X)$. Η τυπική απόκλιση των e και i είναι περίπου σταθερή σε κάθε παράθυρο. Έτσι, αν για μια τροχιά ισχύει

$$\begin{aligned}\Delta\langle e \rangle - \sigma(e) &= (\langle e \rangle_{max} - \langle e \rangle_{min}) - \sigma(e) < 0 \\ \Delta\langle i \rangle - \sigma(i) &= (\langle i \rangle_{max} - \langle i \rangle_{min}) - \sigma(i) < 0\end{aligned}\quad (6.1)$$

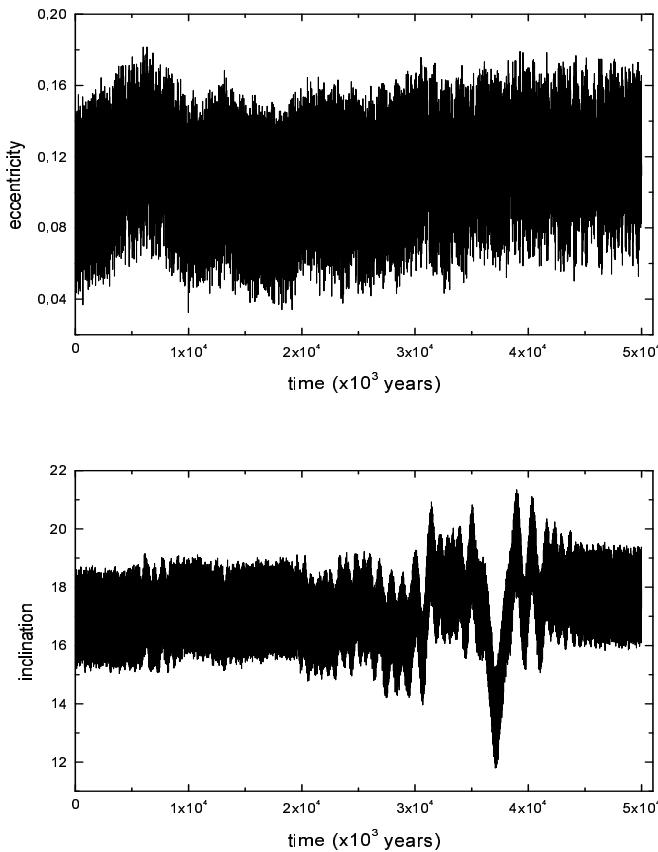
τότε η τροχιά χαρακτηρίζεται ως σταθερή (STB). Αντίθετα, αν μία από τις παραπάνω σχέσεις δεν ισχύει, η τροχιά χαρακτηρίζεται ως ασταθής (UNS).

Όπως φαίνεται και στον Πίνακα 6.1, από τις 21 τροχιές που ολοκληρώσαμε οι 4 οδηγούν σε διαφυγή, 8 είναι ασταθείς αλλά δεν οδηγούν σε σύντομη διαφυγή και οι υπόλοιπες 8 είναι σταθερές. Στα Σχ. 6.3-6.5 φαίνεται η χρονοσειρά της εκκεντρότητας και της κλίσης για τρεις αντιπροσωπευτικές τροχιές. Για την ESC τροχιά δίνεται και η χρονοσειρά της κρίσιμης γωνίας του συντονισμού 1/1, $\sigma = \lambda - \lambda'$. Η διαφυγή αναγνωρίζεται εύκολα στο τελευταίο διάγραμμα. Αρχικά η γωνία λικνίζεται γύρω από την τιμή $\pi/3$ (το σημείο L_4) ενώ, μόλις το σώμα διαφύγει από την περιοχή λίκνισης, η σ μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $(0, 2\pi)$. Το εύρος λίκνισης, D , της κρίσιμης γωνίας χαρακτηρίζει ταυτόχρονα και το εύρος μεταβολής του ημιάξονα της τροχιάς κάθε τροχιού. Στο Σχ. 6.6 αναπαριστούμε κάθε τροχιά, χρησιμοποιώντας ως συντεταγμένες τη μέση τιμή του εύρους λίκνισης, $\langle D \rangle$, και την μέγιστη τιμή της μέσης εκκεντρότητας, $\langle e \rangle_{max}$ ¹. Από το Σχ. 6.6 φαίνεται ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε κάποιες χαρακτηριστικές τιμές αυτών των παραμέτρων, οι οποίες διαχωρίζουν τις STB από

¹Η τιμή της $\langle e \rangle$ μπορεί να μεταβληθεί αρκετά (από παράθυρο σε παράθυρο) για τις UNS τροχιές, ώστε η μέση τιμή να μην έχει ιδιαίτερη σημασία παρά μόνο για STB τροχιές



Σχήμα 6.3: Χρονική εξέλιξη των e (Πάνω), i (Μέση) και $\sigma = \lambda - \lambda'$ (Κάτω) για μια ESC-τροχιά. Στο τελευταίο διάγραμμα φαίνεται η αλλαγή συμπεριφοράς του σ , που υποδηλώνει τη διαφυγή της τροχιάς από την περιοχή του L_4 . Παρατηρήστε ότι, ενώ η $\langle e \rangle$ είναι σχεδόν σταθερή, η i υφίσταται μεταβολές μεγάλου πλάτους.

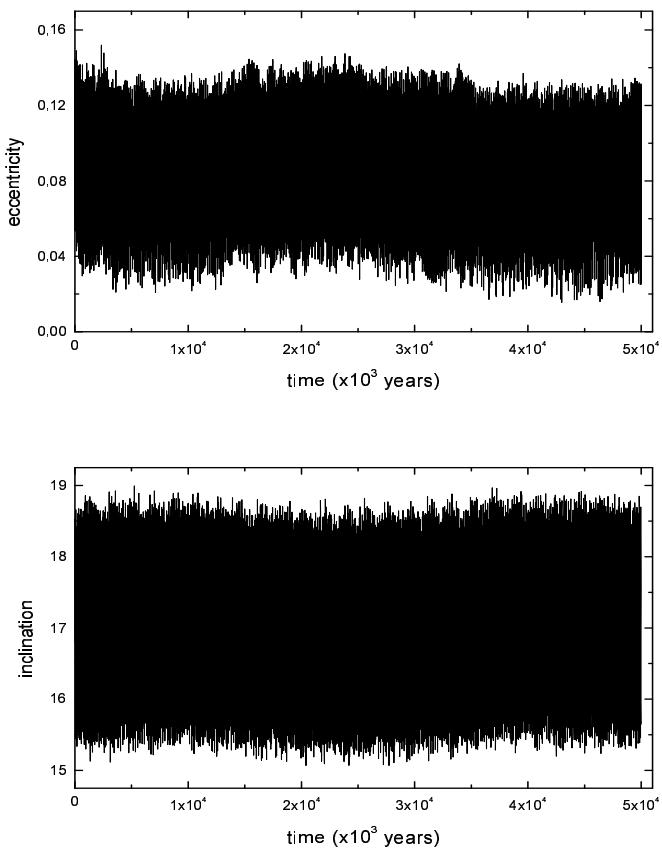


Σχήμα 6.4: Χρονική εξέλιξη των e (Πάνω) και i (Κάτω) για μια UNS-τροχιά. Όπως και στο Σχ. 6.3, η κλίση μεταβάλλεται κατά πολύ, ενώ η $\langle e \rangle$ είναι σχεδόν σταθερή.

τις UNS (ή ESC) τροχιές. Πράγματι, τροχιές που έχουν $\langle D \rangle \leq 48^0.5$ και $\langle e \rangle \leq 0.125$ είναι τύπου STB. Αντίθετα, για μεγαλύτερες τιμές των $\langle D \rangle$ και $\langle e \rangle$, η τροχιές είναι ασταθείς και μπορεί να οδηγήσουν σε σύντομη διαφυγή του Τρωικού.

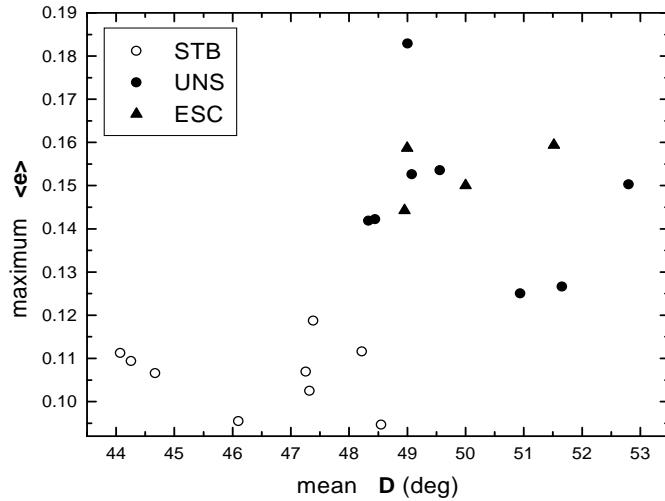
6.2.3 ‘Προσκολλητικότητα’ των Σημείων Lagrange

Η τροχιά διαφυγής N6 παρουσιάζει μια συμπεριφορά που πιθανώς εντοπίζεται για πρώτη φορά σε ένα Χαμιλτονιανό σύστημα τόσο πολλών βαθμών ελευθερίας. Στο Σχ. 6.7 δίνονται οι χρονοσειρές των e , i και σ γι' αυτήν την τροχιά. Παρατηρούμε ότι οι μέσες τιμές των e και i παραμένουν σταθερές για περίπου $25 \cdot 10^6$ χρόνια, ενώ και η σ έχει σχεδόν σταθερό εύρος λίκνισης γύρω από την τιμή $\pi/3$. Στη συνέχεια εμφανίζονται ισχυρές μεταβολές της κλίσης, της τάξης των 10^0 , ακολουθούμενες από μικρή αύξηση της εκκεντρότητας και του



Σχήμα 6.5: Χρονική εξέλιξη των e (Πάνω) και i (Κάτω) για μια STB-τροχιά. Οι μέση τιμή και των δύο στοιχείων είναι σχεδόν σταθερή.

εύρους λίκνισης. Μετά από $t \approx 38.2 \cdot 10^6$ χρόνια παρατηρούμε μια σταθεροποίηση της τιμής των e και i μέχρι τη στιγμή $t \approx 40 \cdot 10^6$ χρόνια, όταν και ο αστεροειδής συναντά το Δία. Αυτή η φάση σταθεροποίησης μπορεί να γίνει κατανοητή αν στρέψουμε την προσοχή μας στο διάγραμμα της κρίσιμης γωνίας. Είναι φανερό ότι τη στιγμή $t \approx 38.2 \cdot 10^6$ χρόνια η τροχιά ξεφεύγει από την περιοχή του L_4 , αφού η γωνία σταματάει να λικνίζεται γύρω από το $\pi/3$. Ο αστεροειδής ακολουθεί πλέον μία ‘πεταλοειδή’ τροχιά (horseshoe orbit), η οποία περιβάλλει τις νησίδες και των δύο σημείων Lagrange. Όμως, σχεδόν αμέσως μετά τη διαφυγή από την περιοχή του L_4 , η τροχιά ‘κολλάει’ γύρω από τη νησίδα του L_5 . Αυτό φαίνεται στο διάγραμμα της κρίσιμης γωνίας, η οποία λικνίζεται γύρω από την τιμή $-\pi/3$ για περίπου $2.5 \cdot 10^6$ χρόνια, πρωτού το σώμα διαφύγει από τον συντονισμό 1/1.

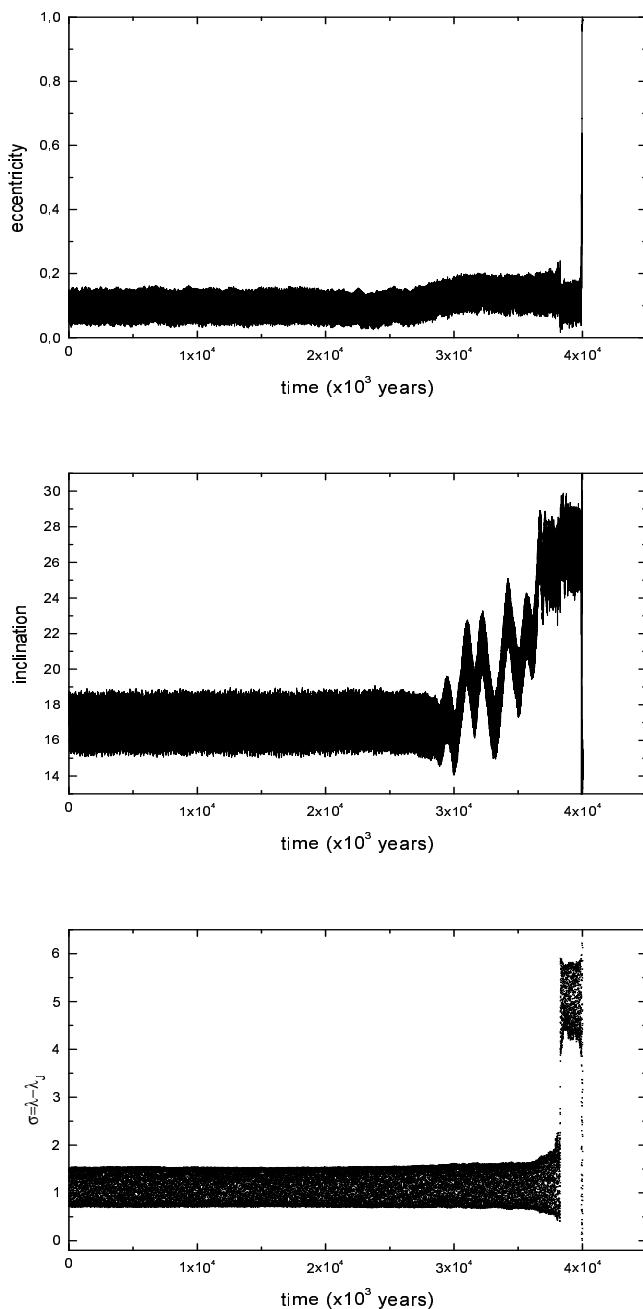


Σχήμα 6.6: Κατανομή των 21 τροχιών στο επίπεδο ($\langle D \rangle$, $\langle e \rangle_{\text{maximum}}$). Παρατηρήστε το διαχωρισμό ανάμεσα στις STB και τις UNS τροχιές.

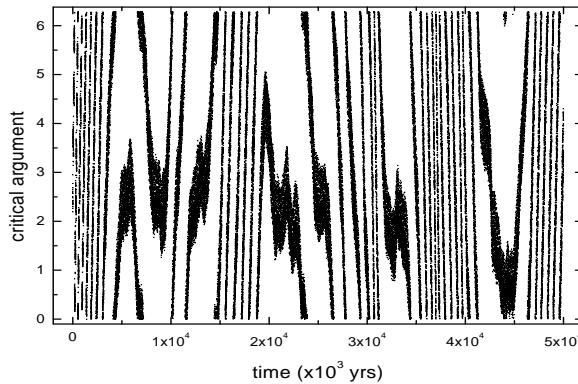
6.2.4 Η Αιτία του Χάους

Οι μεταβολές της κλίσης δείχνουν ότι ο μηχανισμός που ευθύνεται για τη χαοτική κίνηση πρέπει να είναι κάποιος ισχυρός αιώνιος συντονισμός. Το συμπέρασμα αυτό βγαίνει (i) από το μεγάλο πλάτος μεταβολής ($\sim 10^0$) και (ii) από την πολύ μεγάλη περίοδο της μεταβολής ($\sim 10^6$ χρόνια) του i . Με σκοπό τον εντοπισμό του συντονισμού που παράγει το χάος εξετάσαμε τα διαγράμματα των κρίσιμων γωνιών που αντιστοιχούν στους αιώνιους συντονισμούς. Όπως και σε προηγούμενο κεφάλαιο, εξετάσαμε όλους τους συνδυασμούς που δίνονται στους Πίνακες IV και V της εργασίας των Nobili et al. (1989).

Συντονισμοί του περιηλίου δεν παρατηρήθηκαν, σύμφωνα και με όσα έχουμε πει στην εισαγωγή του κεφαλαίου. Αντίθετα ένας μεγάλος αφιθμός συντονισμών του αναβιβάζοντος συνδέσμου, με περιόδους της τάξης των 50,000 ετών, επηρεάζουν την κίνηση του (1868) Thersites. Ο κυρίως υπεύθυνος για τις μεταβολές της κλίσης είναι ο 1ης τάξης (γραμμικός) αιώνιος συντονισμός ν_{16} , ο οποίος εμφανίζεται καθώς η μέση τιμή της συχνότητας μετάθεσης του Ω γίνεται ίση με το μέσο ρυθμό μετάθεσης του συνδέσμου του Κρόνου, $\langle \Omega_S \rangle = s_6$. Τονίζουμε όμως ότι αρκετοί μη-γραμμικοί αιώνιοι συντονισμοί, οι οποίοι επικαλύπτονται μερικώς με τον ν_{16} , συμμετέχουν στη χαοτική κίνηση του (1868) Thersites. Ένα παράδειγμα δίνεται στο Σχ. 6.8, όπου φαίνεται το διάγραμμα της κρίσιμης γωνίας $\Omega - \Omega_8 - \omega_6 + \omega_7$ για μια τροχιά τύπου UNS. Παρατηρήστε ότι η γωνία αυτή αντιστοιχεί σε συντονισμό που εμφανίζεται μόνο αν στο μοντέλο περιλαμβάνονται όλοι οι εξωτερικοί πλανήτες, δεδομένου ότι εξαρτάται τόσο από τον αναβιβάζοντα σύνδεσμο του Ποσειδώνα (κατά κύριο λόγο) όσο



Σχήμα 6.7: Χρονική εξέλιξη των e (Πάνω), i (Μέση) και σ (Κάτω) για την ‘προσκολλητική’ ESC-τροχιά. Στο τελευταίο διάγραμμα φαίνεται η εναλλαγή του σημείου λίκνισης της σ , που υποδηλώνει την προσκόλληση της τροχιάς στο σημείο L_5 .



Σχήμα 6.8: Χρονική εξέλιξη της χρίσιμης γωνίας του μη-γραμμικού αιώνιου συντονισμού $\dot{\Omega} = \dot{\Omega}_8 + \dot{\omega}_6 - \dot{\omega}_7$. Οι χαοτικές μεταπτώσεις της γωνίας είναι εμφανείς.

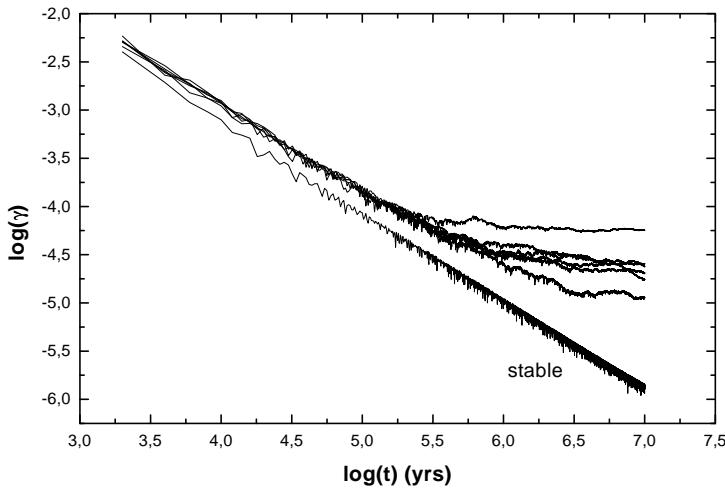
κι από το περίκεντρο του Κρόνου (6) και του Ουρανού (7). Όπως φαίνεται στο Σχ. 6.8 η γωνία εκτελεί χαοτικές μεταπτώσεις. Παρόμοια συμπεριφορά εμφανίζεται για δλες τις UNS και ESC τροχιές. Μάλιστα οι ασταθείς τροχιές δείχνουν να βρίσκονται σε μια χαοτική ζώνη όπου διάφοροι αιώνιοι συντονισμοί επικαλύπτονται με τον ν_{16} , ενώ για τις ευσταθείς τροχιές δεν καταφέραμε να εντοπίσουμε κάποιον συντονισμό, μέχρι την τάξη που εξετάσαμε.

6.3 Χαός και Αιώνιοι Συντονισμοί

Τα αποτελέσματα της μελέτης της τροχιάς του (1868) Thersites έδειξαν ότι μία πιθανή αιτία γένεσης χάους στα σμήνη των Τρωικών είναι οι αιώνιοι συντονισμοί της συχνότητας μετάθεσης του αναβιβάζοντος συνδέσμου. Αν όντως αυτός είναι ο κυρίαρχος μηχανισμός, τότε θα πρέπει και οι υπόλοιποι χαοτικοί Τρωικοί να εμφανίζουν παρόμοια συμπεριφορά. Έτσι αποφασίσαμε να επεκτείνουμε τη μελέτη μας και για τους υπόλοιπους 12 Τρωικούς, για τους οποίους ο Milani (1993) έδειξε ότι ακολουθούν χαοτικές τροχιές με $T_L \leq 10^5$. Από την ομάδα αυτή, 6 σώματα ανήκουν στο σμήνος των Ελλήνων (L_4) και 6 στο σμήνος των Τρώων (L_5). Για την επιλογή των αρχικών συνθηκών της ολοκλήρωσης χρησιμοποιήσαμε και πάλι τον κατάλογο των Bowell et al. (1994).

6.3.1 Αρχικές Συνθήκες και Μεθοδολογία Ανάλυσης

Δεδομένης της χαοτικής κίνησης αυτών των Τρωικών και με σκοπό να αυξήσουμε το στατιστικό μας δείγμα, ολοκληρώσαμε για κάθε σώμα 4 τροχιές επιπλέον της ονομαστικής (συνολικά $5 \times 12 = 60$ τροχιές). Οι τέσσερις γειτονικές τροχιές είχαν παραπλήσιες αρχικές συνθήκες με την ονομαστική τροχιά, οι οποίες προέκυψαν με μικρές μεταβολές $\Delta a = \pm 0.01$ AU (1ος



Σχήμα 6.9: Σύγκλιση του $\log \gamma(t)$ στην τιμή του χαρακτηριστικού εκθέτη Lyapunov, γ , για τις τροχιές των 5 από τους 13 Τρωικούς. Για λόγους σύγκρισης δίνεται και η εξέλιξη του $\log \gamma(t)$ ενός υποθετικού Τρωικού, που ακολουθεί ευσταθή τροχιά.

και 2ος γείτονας) ή $\Delta e = \pm 0.01$ (3ος και 4ος γείτονας) των στοιχείων της. Η ολοκλήρωση των εξισώσεων κίνησης έγινε και πάλι στα πλαίσια του μοντέλου (4Π). Χρησιμοποιήσαμε δύο τεχνικές ολοκλήρωσης, τη μέθοδο των σειρών Lie που χρησιμοποιήσαμε για τον (1868) Thersites και τη συμπλεκτική μέθοδο MVS των Wisdom & Holman (1991). Έτσι το συνολικό πλήθος των τροχιών του δείγματος αυξήθηκε στις 120, αφού διαφορετικές τεχνικές αναμένεται να δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα για χαοτικές τροχιές.

Αρχικά ελέγχαμε τα αποτελέσματα του Milani (1993, βλ. επίσης Milani et al. 1997), όσον αφορά στην τιμή του T_L για κάθε τροχιά. Για την εκτίμηση της σταθερότητας των στοιχείων της τροχιάς χρησιμοποιήσαμε την ίδια μέθοδο όπως και για τον (1868) Thersites, δηλαδή των υπολογισμό των μέσων τιμών των στοιχείων με τη μέθοδο του κινούμενου μέσου όρου και των αντίστοιχων δεικτών μεταβλητότητας (Εξ. 6.1). Τα αποτελέσματα του ελέγχου των δεικτών χρησιμοποιήθηκαν για να κατηγοριοποιήσουμε τις τροχιές με τον ίδιο τρόπο (και συμβολισμό) όπως και προηγουμένως. Τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι το μέσο εύρος λίκισης, $\langle D \rangle$, η μέση εκκεντρότητα, $\langle e \rangle$ και η μέση κλίση $\langle i \rangle$. Τέλος, για τον εντοπισμό των αιώνιων συντονισμών που πιθανώς παράγουν τη χαοτική κίνηση, ελέγχαμε και πάλι τα διαγράμματα των χρίσματων γωνιών για όλους τους συνδυασμούς που δίνονται στην εργασία των Nobili et al. (1989), αλλά χρησιμοποιώντας τις τιμές των θεμελιωδών συχνοτήτων που υπολόγισε ο Laskar (1990).

6.3.2 Αποτελέσματα

Στο Σχ. 6.9 παρουσιάζονται γραφικά τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης των εξισώσεων μεταβολών. Για λόγους σύγχρισης, ολοκληρώσαμε τις εξισώσεις και για έναν υποθετικό Τρωικό που θέσαμε πολύ κοντά στο L_4 . Η τροχιά αυτού του υποθετικού Τρωικού, η οποία δίνεται επίσης στο Σχ. 6.9, είναι ευσταθής. Αντίθετα και οι 12 πραγματικοί Τρωικοί ακολουθούν χαοτικές τροχιές με $10^4 \leq T_L \leq 10^5$ χρόνια, όπως είχε βρει και ο Milani (1993).

Η κατηγοριοποίηση των 120 τροχιών, όπως προκύπτει μετά την ανάλυση των στοιχείων τους, δίνεται στους Πίνακες 6.2 και 6.3. Οι συμβολισμοί LIE και MVS αναφέρονται στη μέθοδο ολοκλήρωσης της τροχιάς. Οι δύο μέθοδοι συμφωνούν, ως προς την κατηγοριοποίηση των τροχιών, σε ποσοστό 85%. Συνοπτικά, τα αποτελέσματα έχουν ως εξής:

- (1) Συνολικά 38.5% των τροχιών είναι ασταθείς (UNS). Τα επιμέρους ποσοστά είναι 25/60 (LIE) και 21/60 (MVS).
- (2) Από τις UNS τροχιές, 29 βρίσκονται στο L_5 και 17 στο L_4 .
- (3) Για τη μέθοδο LIE 4 ‘πραγματικοί’ Τρωικοί ακολουθούν UNS τροχιές (2 στο L_4 και 2 στο L_5): οι 1988-RN11, 1991-HN, 4523-PL και 5144-Achates. Για τη μέθοδο MVS το ποσοστό είναι 5/12 (1 στο L_4 και 4 στο L_5): οι 1988-RN11, 1173-Anchises, 1989-UX5, 4523-PL και 5144-Achates.
- (4) Καμία διαφυγή δεν παρατηρήθηκε στην ολοκλήρωση LIE. Αντίθετα 2 ‘γείτονες’ διέφυγαν στην ολοκλήρωση MVS: ο Phoinix/ $\Delta a = -0.01$ AU ($T_{esc} = 39.2 \cdot 10^6$ χρόνια) και ο 1988-RN11/ $\Delta e = +0.01$ ($T_{esc} = 49.6 \cdot 10^6$ χρόνια).
- (5) Και με δύο μεθόδους οι τροχιές των 1869-Philoctetes, 3451-Mentor, 1988-AK και 5187-T2, αλλά και όλων των γειτόνων τους, απεδείχθησαν εξαιρετικά ευσταθείς. Σε ό,τι ακολουθεί αναφερόμαστε στις τροχιές αυτές ως τις πιο ευσταθείς τροχιές.
- (6) Οι πιο ασταθείς τροχιές, με $\Delta\langle i \rangle \approx 12^\circ$, αντιστοιχούν στον 5144-Achates. Ο συγκεκριμένος Τρωικός είναι γνωστό ότι βρίσκεται έξω από τα όρια ευστάθειας της καμπύλης του Rabe (1965) (βλ. Levison et al. 1997).

Για τις περισσότερες UNS τροχιές $\Delta\langle i \rangle \gg \sigma(i)$, ώστε η αστάθεια να αναγνωρίζεται εύκολα. Αντίθετα η πλειοψηφία των STB τροχιών έχει $\sigma(i) > 3\Delta\langle i \rangle$, οπότε η ευστάθεια είναι και πάλι εμφανής. Στα αποτελέσματά μας υπάρχουν και 6 τροχιές (επισημαίνονται με έναν αστερίσκο στους Πίνακες 6.2 και 6.3) για τις οποίες $\Delta\langle i \rangle \approx \sigma(i)$. Οι τροχιές αυτές τείνουν μάλλον προς την αστάθεια, όπως μπορούμε να αντιληφθούμε με μελετώντας τα αντίστοιχα διαγράμματα. Έτσι το ποσοστό των ασταθών τροχιών τείνει να αυξηθεί στο 44% του συνόλου.

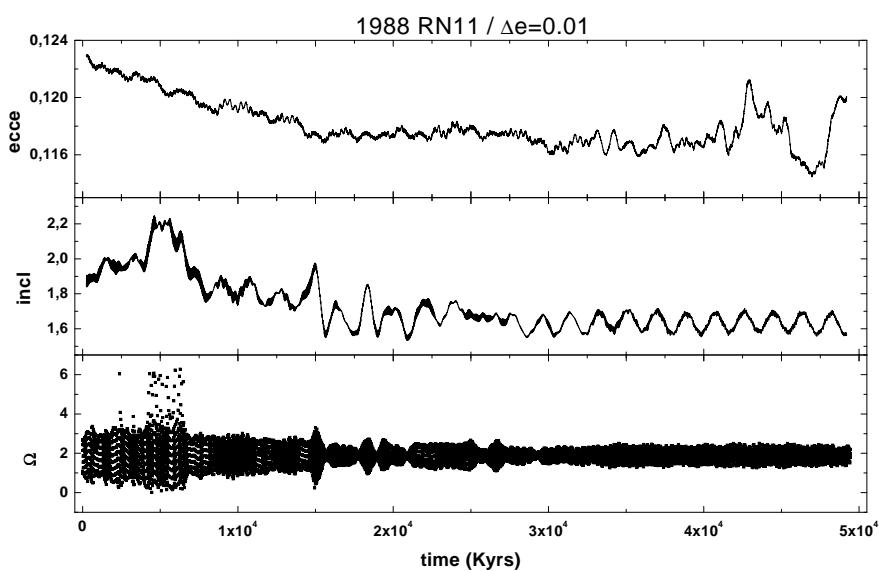
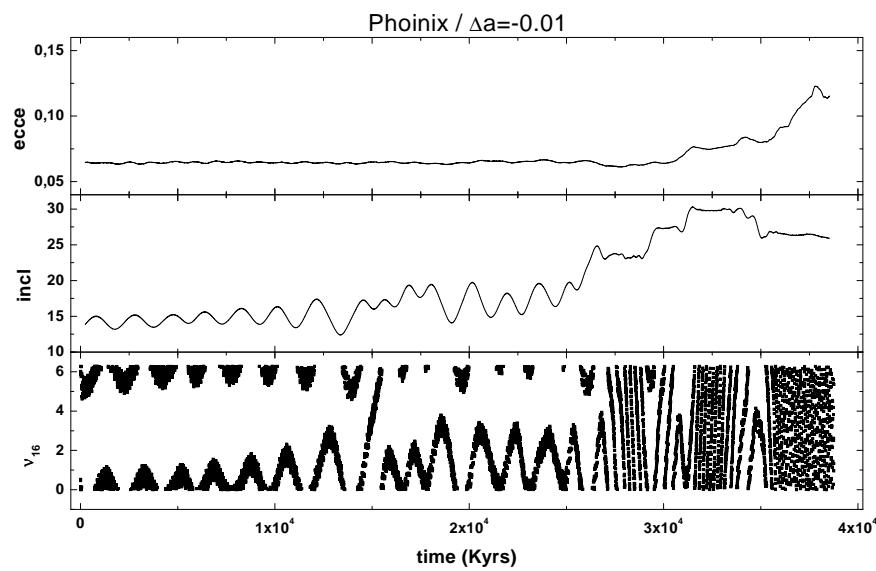
Στο Σχ. 6.10 δείχνουμε τη χρονική εξέλιξη των στοιχείων της τροχιάς για τους δύο διαφεύγοντες ‘Τρωικούς’, για χρόνο $t \leq T_{esc} - 10^6$ χρόνια. Η εκκεντρότητα της τροχιάς του “Phoinix” παραμένει σχεδόν σταθερή μέχρι τα τελευταία στάδια της εξέλιξης, ενώ οι μεταβολές της κλίσης είναι πολύ μεγάλες, ειδικά για χρόνους μεγαλύτερους από $28 \cdot 10^6$ χρόνια. Ο λόγος, όπως φαίνεται στο 3ο διάγραμμα του σχήματος, είναι τα συνεχή περάσματα

Πίνακας 6.2: Κατηγοριοποίηση των τροχιών του συμήνους L_4 , σύμφωνα με τη σταθερότητα των $\langle e \rangle$ και $\langle i \rangle$. Οι τιμές των $\Delta\langle e \rangle$, $\Delta\langle i \rangle$ και $\sigma(i)$ που δίνονται στον πίνακα είχουν υπολογιστεί από τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης με τη μέθοδο LIE. Τροχιές για τις οποίες το τεστ δε δίνει ‘καθαρό’ αποτέλεσμα επισημαίνονται με έναν αστερίσκο. Οι δύο τελευταίες στήλες δίνουν το αποτέλεσμα της κατηγοριοποίησης στην ολοκλήρωση LIE και MVS αντίστοιχα.

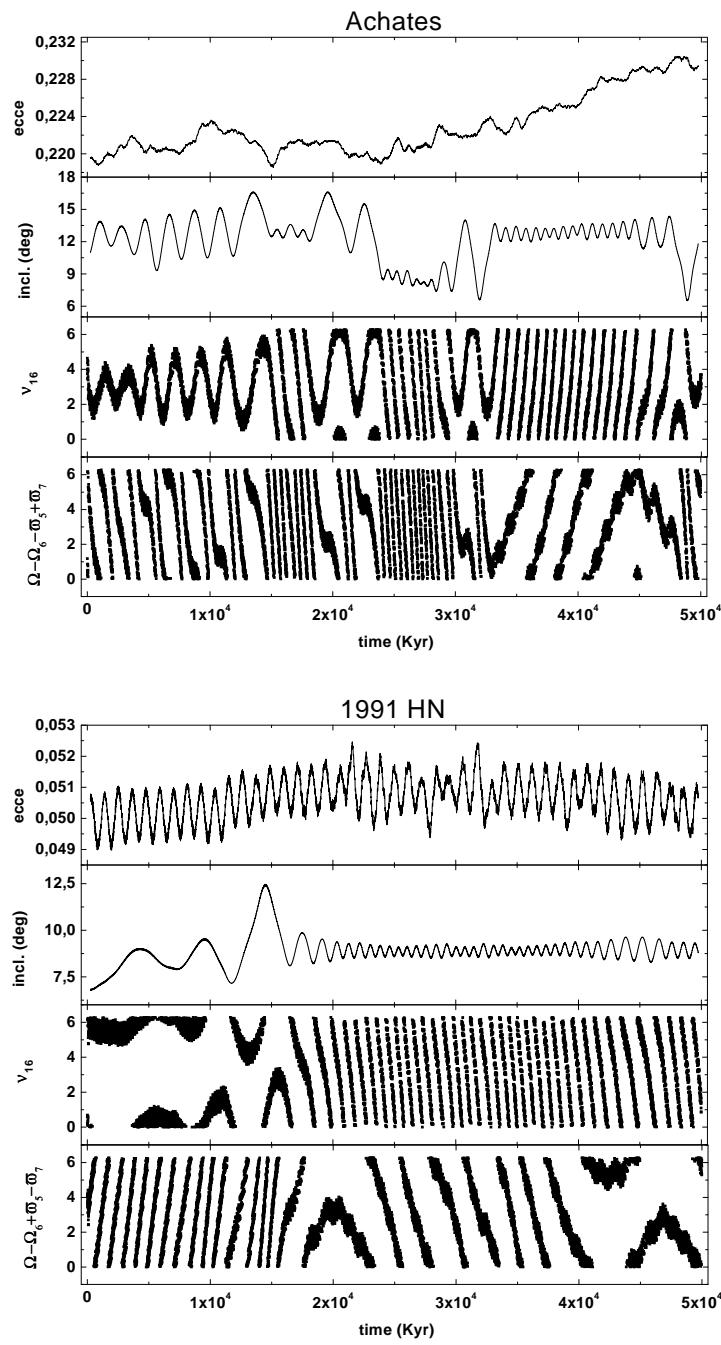
Τροχιά	$\Delta\langle e \rangle$	$\Delta\langle i \rangle$ (deg)	$\sigma(i)$ (deg)	LIE	MVS
Philoctetes	0.002	0.24	1.12	STB	STB
$a + 0.01$	0.002	0.35	1.13	STB	STB
$a - 0.01$	0.002	0.18	1.12	STB	STB
$e + 0.01$	0.002	0.24	1.12	STB	STB
$e - 0.01$	0.002	0.21	1.12	STB	STB
Phoinix	0.006	0.26	1.12	STB	STB
$a + 0.01$	0.005	0.20	1.12	STB	STB
$a - 0.01$	0.003	5.93	1.20	UNS	ESC
$e + 0.01$	0.005	4.90	1.14	UNS	UNS
$e - 0.01$	0.005	0.13	1.12	STB	STB
1991 HN	0.004	5.70	1.16	UNS	*STB
$a + 0.01$	0.002	0.31	1.13	STB	STB
$a - 0.01$	0.003	2.42	1.15	UNS	UNS
$e + 0.01$	0.003	6.35	1.13	UNS	*STB
$e - 0.01$	0.003	2.93	1.12	UNS	STB
4523 PL	0.002	1.90	1.07	UNS	UNS
$a + 0.01$	0.002	1.95	1.05	UNS	*STB
$a - 0.01$	0.002	2.08	1.05	UNS	UNS
$e + 0.01$	0.005	1.90	1.08	UNS	UNS
$e - 0.01$	0.002	0.64	1.00	STB	STB
5187 T2	0.003	0.23	1.13	STB	STB
$a + 0.01$	0.003	0.21	1.13	STB	STB
$a - 0.01$	0.002	0.13	1.13	STB	STB
$e + 0.01$	0.002	0.21	1.13	STB	STB
$e - 0.01$	0.002	0.23	1.13	STB	STB
1988 AK	0.003	0.13	1.13	STB	STB
$a + 0.01$	0.003	0.22	1.12	STB	STB
$a - 0.01$	0.003	0.26	1.13	STB	STB
$e + 0.01$	0.003	0.23	1.12	STB	STB
$e - 0.01$	0.003	0.14	1.14	STB	STB

Πίνακας 6.3: Ομοίως με τον Πίνακα 6.2, αλλά για τις τροχιές του συμήνους L_5 .

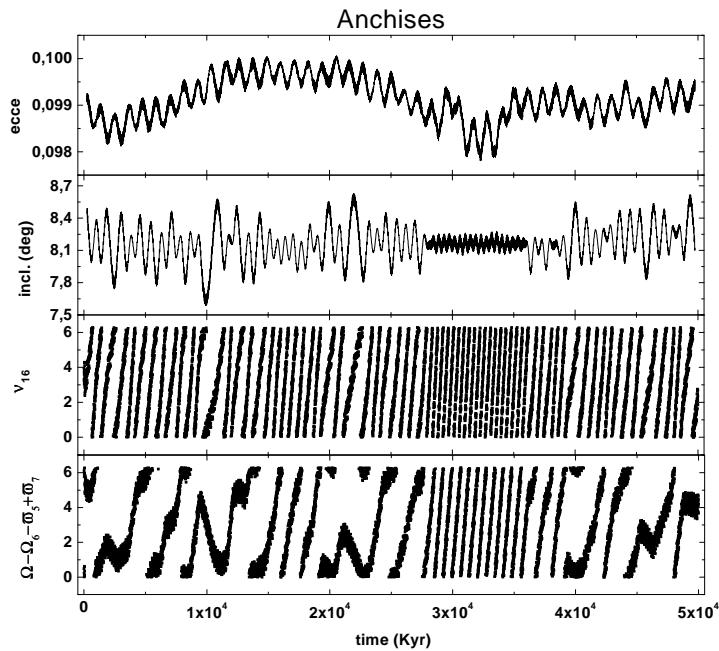
Τροχιά	$\Delta\langle e \rangle$	$\Delta\langle i \rangle$ (deg)	$\sigma(i)$ (deg)	LIE	MVS
1988 RN 11	0.050	9.11	1.15	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$a + 0.01$	0.003	4.85	1.06	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$a - 0.01$	0.011	1.27	1.15	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$e + 0.01$	0.014	7.85	1.11	<i>UNS</i>	<i>ESC</i>
$e - 0.01$	0.005	3.83	1.13	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
1989 UX5	0.003	0.92	1.09	* <i>STB</i>	<i>UNS</i>
$a + 0.01$	0.003	1.98	1.09	<i>UNS</i>	<i>STB</i>
$a - 0.01$	0.004	0.39	1.11	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$e + 0.01$	0.004	1.71	1.11	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$e - 0.01$	0.003	1.35	1.11	<i>UNS</i>	* <i>STB</i>
Acamas	0.004	0.63	1.13	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$a + 0.01$	0.003	2.89	1.12	<i>UNS</i>	<i>STB</i>
$a - 0.01$	0.003	0.16	1.14	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$e + 0.01$	0.004	0.22	1.14	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$e - 0.01$	0.003	0.18	1.14	<i>STB</i>	<i>STB</i>
Anchises	0.002	1.04	1.14	<i>STB</i>	<i>UNS</i>
$a + 0.01$	0.008	0.74	1.14	* <i>STB</i>	<i>STB</i>
$a - 0.01$	0.005	0.30	1.14	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$e + 0.01$	0.020	2.95	1.12	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$e - 0.01$	0.003	0.60	1.14	<i>STB</i>	<i>UNS</i>
Achates	0.012	10.14	1.32	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$a + 0.01$	0.021	11.30	1.25	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$a - 0.01$	0.008	11.63	1.39	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$e + 0.01$	0.009	7.15	1.22	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
$e - 0.01$	0.050	11.59	1.33	<i>UNS</i>	<i>UNS</i>
Mentor	0.004	0.27	1.12	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$a + 0.01$	0.003	0.31	1.13	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$a - 0.01$	0.006	0.26	1.13	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$e + 0.01$	0.004	0.26	1.12	<i>STB</i>	<i>STB</i>
$e - 0.01$	0.004	0.24	1.12	<i>STB</i>	<i>STB</i>



Σχήμα 6.10: Εξέλιξη των στοιχείων της τροχιάς για τους δύο διαφεύγοντες ‘Τρωικούς’, Phoinix (πάνω) και 1988-RN11 (κάτω). Προσέξτε τη συσχέτιση μεταξύ των μεταβολών της i και της χρόνιμης γωνίας του συντονισμού ν_{16} και $s = 0$ αντίστοιχα.



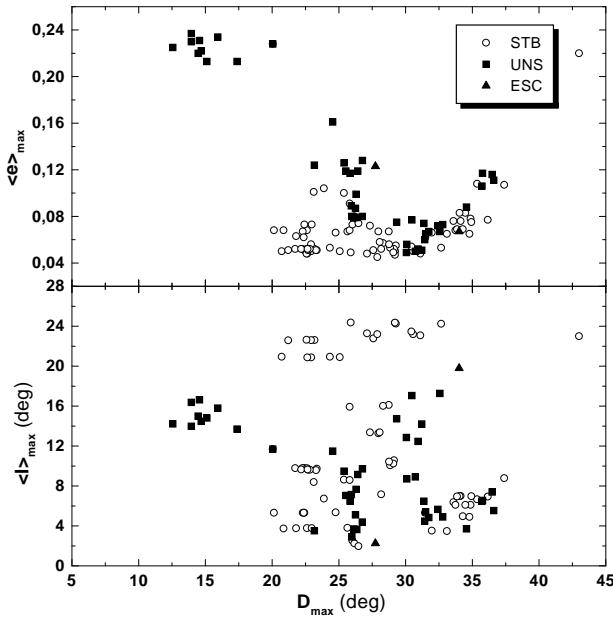
Σχήμα 6.11: Δύο τυπικές UNS τροχιές: 5144-Achates (πάνω) και 1991-HN (κάτω). Και για τις δύο περιπτώσεις δίνεται η εξέλιξη των $\langle e \rangle$, $\langle i \rangle$, $\nu_{16} = \Omega - \Omega_S$ και της κρίσιμης γωνίας ενός μη-γραμμικού αιώνιου συντονισμού.



Σχήμα 6.12: Η τροχιά του Anchises, ως τυπικό παράδειγμα *STB* τροχιάς. Όπως φαίνεται στο διάγραμμα του ν_{16} , η τροχιά δεν εισέρχεται στη ζώνη λίκνισης του ισχυρού συντονισμού.

από τη διαχωριστική καμπύλη του συντονισμού ν_{16} . Για τον “1988-RN11”, η εκκεντρότητα και η κλίση υφίστανται μικρές μεταβολές. Οι μεταβολές της κλίσης μπορούν να αποδοθούν στη δράση του συντονισμού $s = 0$. Όπως φαίνεται στο τελευταίο διάγραμμα του σχήματος, το μήκος του αναβιβάζοντος συνδέσμου αλλάζει συμπεριφορά (από λίκνιση σε περιστροφή) αρκετά συχνά μέσα στα πρώτα 10^7 χρόνια.

Δύο τυπικές UNS τροχιές δίνονται στο Σχ. 6.11. Πρόκειται για τους 5144-Achates και 1991-HN. Για μια ακόμη φορά βλέπουμε ότι η μέση κλίση υφίσταται σημαντικές μεταβολές, οι οποίες συσχετίζονται με τις μεταπτώσεις της κρίσιμης γωνίας του συντονισμού ν_{16} . Μελετώντας τις κρίσιμες γωνίες και άλλων συνδυασμών των αιωνίων συχνοτήτων, βρήκαμε ότι η τροχιά επηρεάζεται ταυτόχρονα από αρκετούς μη-γραμμικούς συντονισμούς. Και πάλι δεν εντοπίσαμε κανέναν συντονισμό που να αφορά στη μετάθεση του περιηλίου της τροχιάς. Οι συντονισμοί ανώτερης τάξης επικαλύπτονται με τον ν_{16} , ώστε η τροχιά να μεταπηδά από τον έναν συντονισμό στον άλλο, όπως φαίνεται και στο Σχ. 6.11. Όταν η τροχιά βρίσκεται εκτός της ζώνης λίκνισης του ν_{16} οι μεταβολές της $\langle i \rangle$ λόγω των υπόλοιπων συντονισμών είναι μικρές, έτσι ώστε τα στοιχεία της τροχιάς να εμφανίζονται σχεδόν σταθερά. Τονίζουμε ότι η συμπεριφορά είναι ίδια για όλες τις UNS τροχιές. Ο ν_{16} είναι ο κύριος μηχανισμός αστάθειας αλλά οι μη-γραμμικοί συντονισμοί δρουν ως ‘μεσάζοντες’, εξαναγκάζοντας την τροχιά να εισέλθει στην ζώνη λίκνισης του ν_{16} .



Σχήμα 6.13: Κατανομή των τροχιών στα επίπεδα ($\langle D \rangle$, $\langle e \rangle$) και ($\langle D \rangle$, $\langle i \rangle$). Οι UNS τροχιές συμβολίζονται με τα γεμάτα τετράγωνα, οι ESC με τα γεμάτα τρίγωνα και οι STB τροχιές με τους άδειους κύκλους.

Η τυπική συμπεριφορά των STB τροχιών είναι παρόμοια με αυτήν της τροχιάς του Anchises (Σχ. 6.12). Το βασικό στοιχείο της δυναμικής τους είναι ότι δεν εισέρχονται καθόλου στη ζώνη λίκνισης του n_{16} . Άλλες κρίσιμες γωνίες φαίνεται να εκτελούν χαοτικές μεταπτώσεις, ενώ η κρίσιμη γωνία $\Omega - \Omega_6$ περιστρέφεται. Έχοντας υπόψη μας ότι οι συντονισμοί επικαλύπτονται, είναι πολύ δύσκολο να φανταστούμε ότι οι τροχιές αυτές μπορούν να παραμείνουν σταυρεές για χρόνους της τάξης των 10^9 ετών. Για τις πιο σταυρεές τροχιές της ολοκλήρωσης δεν καταφέραμε να αντιστοιχήσουμε τη χαοτική τους κίνηση με κάποιον αιώνιο συντονισμό, από αυτούς που μελετήσαμε. Η χαοτική κίνηση αυτών των σωμάτων πρέπει να οφείλεται είτε σε αιώνιους συντονισμούς ακόμη υψηλότερης τάξης, είτε σε κάποιον άλλο μηχανισμό, όχι αιώνιας φύσης.

Οι μέσες τιμές των στοιχείων D , e και i αποτελούν προσεγγίσεις των ελεύθερων τιμών των στοιχείων της τροχιάς, αφετά ικανοποιητικές για τους σκοπούς αυτού του κεφαλαίου. Αυτό μπορεί να γίνει αντιληπτό αν συγκρίνουμε τα διαγράμματα του Σχ. 6.13 με τα αντίστοιχα διαγράμματα της εργασίας των Pilat-Lohinger et al. (1999). Στο Σχ. 6.13 διαφορετικού τύπου τροχιές αναπαρίστανται με διαφορετικό σύμβολο. Αποτελεί μαλλονές έκπληξη το γεγονός ότι UNS τροχιές υπάρχουν ακόμη και για πολύ χαμηλές τιμές εκκεντρότητας ($e \approx 0.05$). Η κατανομή των UNS τροχιών, με εξαίρεση την ‘οικογένεια’ του 5144-Achates (επάνω-αριστερά), φαίνεται ότι διαγράφει μία περιοχή σχήματος “V” στο επίπεδο (D, e), την οποία οι STB τροχιές αποφεύγουν. Αυτό δεν σημαίνει ότι ευσταθείς τροχιές δεν μπορούν να υπάρξουν εντός

αυτής της περιοχής αλλά, απλά, ότι η αστάθεια εμφανίζεται κατά μήκος της καμπύλης που σχηματίζεται από τις θέσεις των UNS τροχιών. Στο επίπεδο (D, i) οι UNS τροχιές φάίνεται επίσης να προσδιορίζουν συγκεκριμένες κατευθύνσεις, κατά μήκος των οποίων εμφανίζεται αστάθεια. Η πιο εμφανής ‘οδός’ είναι αυτή που ξεκινάει από $D \approx 25^0$ και εκτείνεται για $3^0 \leq i \leq 20^0$. Η καμπύλη αυτή αντιστοιχεί στη χαρακτηριστική καμπύλη του συντονισμού ν_{16} , όπως αυτή υπολογίστηκε στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων από τον Milani (1994) με τη χρήση μιας προσεγγιστικής ημιαριθμητικής μεθόδου. Είναι βέβαια εμφανές ότι το πλήνος των τροχιών που μελετήσαμε σε αυτήν την παράγραφο είναι πολύ μικρό, για να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε έναν λεπτομερή ‘χάρτη συντονισμών’ αυτής της περιοχής.

6.3.3 Συμπεράσματα

Στην περιοχή κίνησης των 13 χαοτικών Τρωικών δρα ένα ‘σύμπλεγμα’ αιώνιων συντονισμών του αναβιβάζοντος συνδέσμου. Ο κύριος μηχανισμός αστάθειας είναι ο συντονισμός ν_{16} . Για μικρές τιμές του i , ο συντονισμός $s = 0$ είναι επίσης σημαντικός. Στη γειτονιά του ν_{16} συσσωρεύονται υψηλότερης τάξης (μη-γραμμικοί) συντονισμοί με περιόδους κοντά στα 50,000 χρόνια. Οι περισσότεροι από αυτούς τους συντονισμούς δεν μπορούν να εμφανιστούν σε μοντέλα κίνησης τα οποία δεν συμπεριλαμβάνουν τον Ουρανό και τον Ποσειδώνα. Αποτέλεσμα της δράσης των συντονισμών είναι μεγάλα άλματα της κλίσης τα οποία, αργά ή γρήγορα, οδηγούν τις τροχιές σε διαφυγή από το συντονισμό 1/1 με το Δία. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις οι μεταβολές της εκκεντρότητας είναι πολύ μικρές. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι οι συντονισμοί του αναβιβάζοντος συνδέσμου επηρεάζουν κατά κύριο λόγο την κλίση της τροχιάς (βλ. Κεφάλαιο 2).

Οι χαοτικές ζώνες των μη-γραμμικών συντονισμών επικαλύπτονται με αυτήν του ν_{16} . Αυτό το γεγονός είναι εξαιρετικά σημαντικό για τη σταθερότητα των τροχιών. Εκείνες οι τροχιές που επηρεάζονται από μη-γραμμικούς συντονισμούς, αλλά δεν εισέρχονται στη ζώνη λίκνισης του ν_{16} , εκτελούν ευσταθώς χαοτική κίνηση για χρόνους της τάξης των $50 \cdot 10^6$ ετών (πιθανώς ακόμη μεγαλύτερους). Τονίζουμε όμως ότι αυτή η συμπεριφορά δεν είναι όμοια με το ευσταθές χάος που μελετήσαμε στην κύρια ζώνη. Ο λόγος είναι ότι η χαοτική κίνηση προέρχεται από διαφορετικής φύσεως μηχανισμό, την αλληλεπίδραση του συντονισμού μέσης κίνησης 1/1 με αιώνιους συντονισμούς του Ω . Οι υψηλής τάξης συντονισμοί προκαλούν, αντίστοιχα, πολύ μικρές μεταβολές στα στοιχεία της τροχιάς (κύριως στην κλίση), ώστε αυτή να φαίνεται σταθερή για πολύ μεγάλους χρόνους. Αντίθετα, αν κάποια στιγμή η τροχιά οδηγηθεί στην περιοχή λίκνισης του ν_{16} , η κλίση υφίσταται μεταβολές της τάξης των 10^0 μέσα σε $2 \cdot 10^6 - 3 \cdot 10^6$ χρόνια, με αποτέλεσμα η τροχιά να είναι εξαιρετικά ασταθής.

Στα αποτελέσματά μας καταγράψαμε λίγες διαφυγές, όλες με χρόνο διαφυγής μεγαλύτερο από $20 \cdot 10^6$ χρόνια. Η τιμή αυτή του χρόνου διαφυγής θα πρέπει να εκληφθεί ως το κατώτατο όριο, για τη συγκεκριμένη περιοχή τιμών των D και e . Δεδομένου ότι η εκκεντρότητα της τροχιάς δε μεταβάλλεται ουσιαστικά από τους συντονισμούς, ο τυπικός χρόνος διαφυγής θα πρέπει να είναι μεγαλύτερος από 10^8 χρόνια. Η επικάλυψη των μη-γραμμικών συντονισμών με τον ν_{16} δείχνει ότι όλες αυτές οι τροχιές θα οδηγηθούν, τελικά, σε διαφυγή. Έτσι είναι δύσκολο να κατανοήσουμε πώς οι συγκεκριμένοι Τρωικοί παραμένουν μέχρι σήμερα στα συμήνη. Βέβαια, όπως έδειξαν και τα αποτελέσματά μας, η σταθερότητα της τροχιάς εξαρτάται με

κρίσιμο τρόπο από την ακριβή θέση του σώματος μέσα στο σύμπλεγμα των συντονισμών. Αν λάβουμε υπόψη μας και το γεγονός ότι η πυκνότητα των Τρωικών στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς, για τη συγκεκριμένη περιοχή τιμών του D , είναι σχετικά μικρή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι Τρωικοί που σήμερα παρατηρούμε σε αυτήν τη χαοτική περιοχή είναι τα απομεινάρια μιας πολυπληθέστερης, αρχικά, κατανομής αστεροειδών, οι περισσότεροι εκ των οποίων απομακρύνθηκαν από τα σημήνη λόγω των αιώνιων συντονισμών.

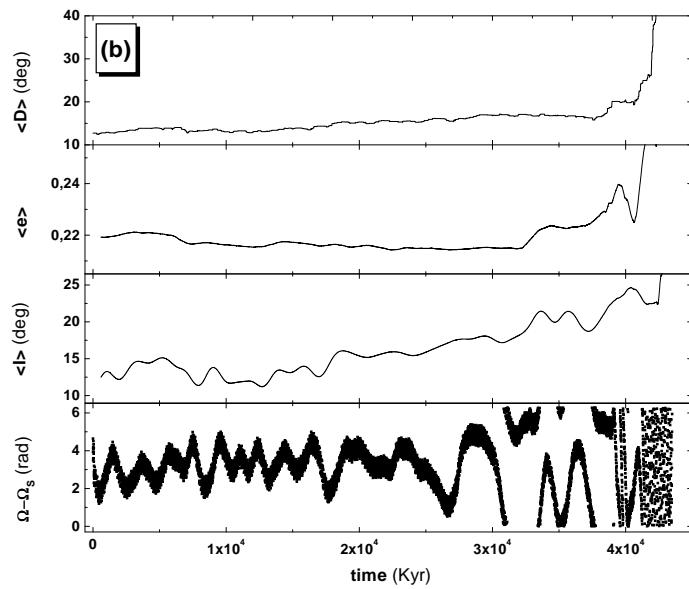
6.4 Δυναμική Προέλευση του (5144) Achates

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι οι πιο ασταθείς τροχιές αντιστοιχούν στον (5144) Achates, χωρίς όμως να παρατηρήσουμε κάποια διαφυγή. Ο (5144) Achates έχει τη μεγαλύτερη ελεύθερη τιμή εκκεντρότητας ($e_P \approx 0.22$) από κάθε Τρωικό του L_5 και βρίσκεται αρκετά πάνω από την καμπύλη ευστάθειας του Rabe. Όπως παρατήρησαν οι Levison et al. (1997), στο πείραμα των οποίων ο (5144) Achates διέφυγε, η ασταθής συμπεριφορά του (5144) Achates θέτει ένα ερώτημα που αφορά στη δυναμική προέλευση αυτού του αντικειμένου. Αν ο χρόνος διαφυγής από την περιοχή κίνησης του (5144) Achates είναι αρκετά μικρότερος από την ηλικία του Ηλιακού Συστήματος, τότε υπάρχουν δύο πιθανές ερμηνείες για τη μεγάλη τιμή της e_P : (α) είτε κάποιος συντονισμός οδηγεί σε διαρκεί αύξηση της εκκεντρότητας του ή (β) κάποιο βίαιο φαινόμενο (σύγκρουση) στο παρελθόν οδήγησε τον (5144) Achates σε αυτή την ασταθή περιοχή.

6.4.1 Ανάλυση Γειτονικών Τροχιών

Όπως και στην περίπτωση του (1868) Thersites, όταν προχωρήσουμε στη μελέτη μιας ομάδας γειτόνων του (5144) Achates, με σκοπό να εκτιμήσουμε το ποσοστό ασταθών τροχιών στην άμεση γειτονιά του (5144) Achates. Επίσης μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής της e , ώστε να προσδιορίσουμε κατά πόσον υπάρχει διαρκής αύξηση της. Ολοκληρώσαμε τις τροχιές μιας ομάδας 28 σωματιδίων (μοντέλο 4Π) για $50 \cdot 10^6$ χρόνια με τη μέθοδο Lie και εφαρμόσαμε την ίδια ανάλυση όπως και στις προηγούμενες παραγράφους. Η ομάδα των 28 σωματιδίων απαρτίζεται από 8 κλώνους του (5144) Achates και 20 γείτονες, οι αρχικές συνθήκες των οποίων ήταν παραπλήσιες με αυτές της ενδεδειγμένης τροχιάς του (5144) Achates. Οι τροχιές των κλώνων ολοκληρώθηκαν σε διαφορετικούς υπολογιστές. Οι μεταβολές των αρχικών συνθηκών για τους γείτονες επιλέχθηκαν τυχαία εντός των διαστημάτων $\Delta a = \pm 0.01$ AU, $\Delta e = \pm 0.01$, $\Delta i = \pm 1^\circ$ και $\Delta \Omega = \Delta \omega = \Delta M = \pm 0^\circ.1$.

Η ανάλυση των στοιχείων της τροχιάς δείχνει ότι όλες οι τροχιές είναι ασταθείς (τύπου UNS), αλλά μόνον τρεις (1 κλώνος και 2 γείτονες) διαφεύγουν πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Οι χρόνοι διαφυγής είναι $T_{esc} = 43 \cdot 10^6$, $37 \cdot 10^6$ και $41 \cdot 10^6$ χρόνια, αντίστοιχα. Τα στοιχεία $\langle D \rangle$, $\langle e \rangle$ και $\langle i \rangle$ μίας από αυτές τις τροχιές δίνονται στο Σχ. 6.14, μαζί με το διάγραμμα της κρίσιμης γωνίας $\Omega - \Omega_S$ του συντονισμού ν_{16} . Σε όλες τις περιπτώσεις η συνολική μεταβολή της κλίσης είναι της τάξης των $\Delta i \approx 8^\circ - 10^\circ$ ενώ η μεταβολή της εκκεντρότητας είναι πολύ μικρή, $\Delta e \sim 0.02$. Θα πρέπει να τονίσουμε ότι δεν εντοπίστηκε κάποιος αιώνιος συντονισμός του περικέντρου, ο οποίος θα μπορούσε να οδηγήσει σε διαρκή αύξηση της $\langle e \rangle$. Σε όλες



Σχήμα 6.14: Εξέλιξη των στοιχείων της τροχιάς $\langle D \rangle$, $\langle e \rangle$ και $\langle i \rangle$ (από πάνω προς τα κάτω) για τον χλόνο του Achates που διέφυγε μετά από $T_{esc} = 43 \cdot 10^6$ χρόνια. Στο τελευταίο διάγραμμα δίνεται η χρίσιμη γωνία $\Omega - \Omega_S$ του συντονισμού ν_{16} .

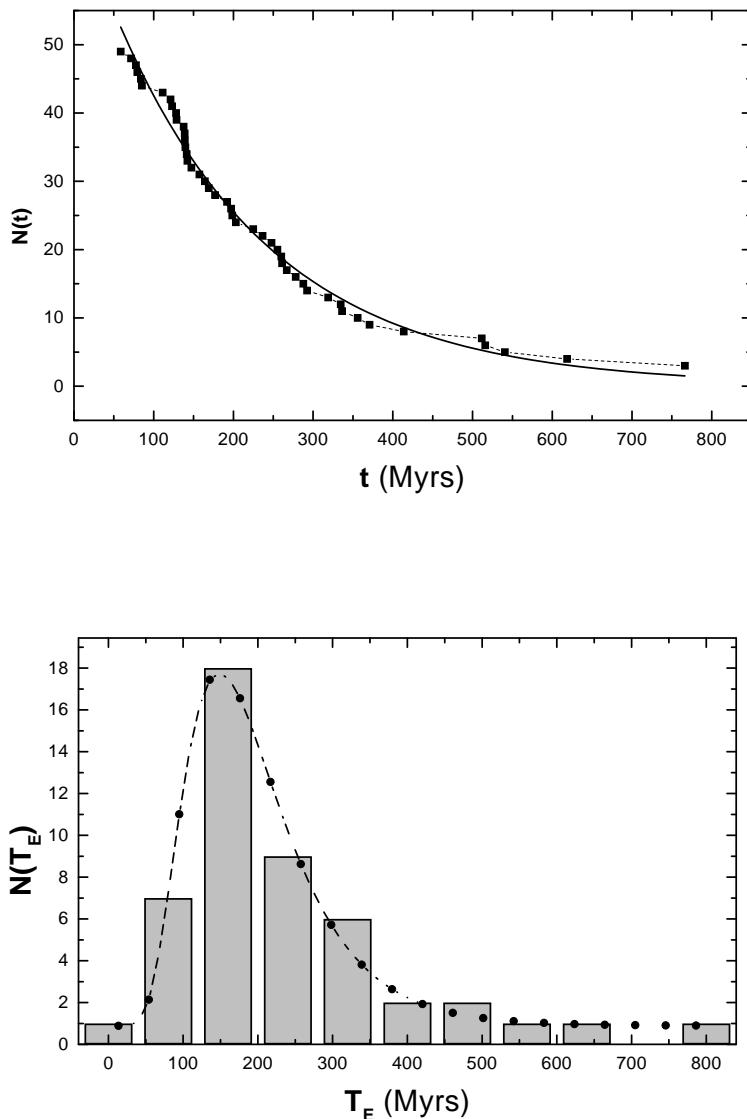
τις περιπτώσεις, η τιμή της $\langle e \rangle$ παραμένει σχεδόν σταθερή, για όσο χρόνο η κλίση παραμένει μικρότερη των $i \approx 20^{\circ}$.

Ο μηχανισμός που ευθύνεται για τη χαοτική κίνηση του (5144) Achates είναι ο συντονισμός ν_{16} . Η κλίση του επιπέδου της τροχιάς του υφίσταται χαοτικές μεταβολές μεγάλου πλάτους, ενώ η εκκεντρότητα παραμένει σχεδόν σταθερή. Αν η κλίση υπερβεί την τιμή $i \approx 20^{\circ}$, το εύρος λίκνισης γύρω από το L_5 αρχίζει να αυξάνεται σημαντικά. Έτσι η τροχιά οδηγείται με αργό ρυθμό εκτός του ν_{16} και εντός της ζώνης αστάθειας που κατέγραψαν οι Levison et al. (1997). Στη συνέχεια διαφεύγει σύντομα μέσω της αύξησης τόσο του $\langle D \rangle$ όσο και της $\langle e \rangle$. Σημειώνουμε όμως ότι, όσο η τροχιά παραμένει στην περιοχή που σήμερα παρατηρούμε τον (5144) Achates, η μέση εκκεντρότητα, πρακτικά, δεν μεταβάλλεται. Επομένως, αν η δυναμική ηλικία του (5144) Achates είναι όντως πολύ μικρότερη της ηλικίας του Ήλιακού Συστήματος ($T_{SS} \approx 4.6 \cdot 10^9$ χρόνια), τότε η πιο πιθανή εξήγηση για τη σημερινή τιμή της e_P είναι ότι ο (5144) Achates συγχρούστηκε στο παρελθόν με κάποιον άλλο Τρωικό, καταλήγοντας έτσι στη ζώνη λίκνισης του ν_{16} .

6.4.2 Δυναμική Ηλικία του (5144) Achates

Τα αποτελέσματα του αριθμητικού πειράματος, που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, υποδεικνύουν ως κατώτατο όριο για το χρόνο διαφυγής από την περιοχή κίνησης του (5144) Achates την τιμή των $40 \cdot 10^6$ ετών. Με σκοπό να προσδιορίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τη μέση τιμή του χρόνου διαφυγής και την πιθανότητα ο (5144) Achates να βρίσκεται στην ίδια τροχιά από την εποχή της Κοσμογονίας, προχωρήσαμε σε ένα ακόμη αριθμητικό πείραμα. Επιλέξαμε μια κατανομή 50 γειτονικών αρχικών συνθηκών, πάλι εντός των ορίων που αναφέραμε στην προηγούμενη παράγραφο, γύρω από την ονομαστική τροχιά του (5144) Achates. Το μοντέλο κίνησης ήταν και πάλι το (4Π) αλλά ο χρόνος ολοκλήρωσης τέθηκε ίσος με $800 \cdot 10^6$ χρόνια. Λόγω του πολύ μεγάλου χρόνου ολοκλήρωσης χρησιμοποιήσαμε για αυτό το πείραμα τη μέθοδο ολοκλήρωσης MVS.

Όπως αναμενόταν, το 94% (47/50) των σωματιδίων διέφυγαν πριν το τέλος της ολοκλήρωσης. Στο Σχ. 6.15 δίνεται το ιστόγραμμα των χρόνων διαφυγής. Η μέση τιμή του χρόνου διαφυγής είναι $\langle T_{esc} \rangle = 238.4 \cdot 10^6$ χρόνια και η τυπική απόκλιση $s = 153.5 \cdot 10^6$ χρόνια. Είναι φανερό ότι η κατανομή των χρόνων διαφυγής είναι ασύμμετρη προς τα δεξιά και μπορεί να προσαρμοστεί αρκετά καλά με μια κατανομή τύπου log-normal. Προκειμένου να εκτιμήσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια το χρόνο διαφυγής, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας και τα 3 σωματίδια που δε διαφεύγουν μέσα στα $800 \cdot 10^6$ χρόνια, παρότι οι τροχιές τους είναι επίσης εξαιρετικά ασταθείς. Από το Σχ. 6.15α φαίνεται ότι ο πληθυσμός των διαφυγόντων σωματιδίων σχηματίζει μια σχεδόν γραμμική ουρά με ρυθμό διαφυγής 1 σωματίδιο ανά $150 \cdot 10^6$ χρόνια. Αν θεωρήσουμε ότι τα 3 εναπομείναντα σωματίδια θα διαφύγουν στα επόμενα $600 \cdot 10^6$ χρόνια, η τροποποιημένη κατανομή των χρόνων διαφυγής δίνει: $\langle T_{esc} \rangle = 298 \cdot 10^6$ χρόνια και $s = 286 \cdot 10^6$ χρόνια. Αν χειριστούμε αυτό το σύνολο τροχιών ως ένα τυχαίο δείγμα (μεγέθους $n = 50$) χαοτικών τροχιών από αυτή την περιοχή του χώρου των φάσεων, η θεωρία δειγματοληψίας μας λέει ότι το 99% διάστημα εμπιστοσύνης για τις τιμές των παραμέτρων της κατανομής (σε χρόνια) είναι



Σχήμα 6.15: (Πάνω) Ο αριθμός των σωματιδίων που παραμένουν στην περιοχή του L_5 σαν συνάρτηση του χρόνου. (Κάτω) Το ιστόγραμμα των χρόνων διαφυγής. Και στα δύο διαγράμματα ο χρόνος μετριέται σε εκατομμύρια χρόνια (Myrs).

$$\begin{aligned} 200 \cdot 10^6 &\leq \mu(T_{esc}) \leq 400 \cdot 10^6 \\ 230 \cdot 10^6 &\leq \sigma_T \leq 370 \cdot 10^6 . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Ακόμη κι αν υιοθετήσουμε τις μεγαλύτερες δυνατές τιμές των παραμέτρων αυτών, η πιθανότητα να βρίσκεται ο (5144) Achates στην ίδια γειτονιά με τη σημερινή του τροχιά για χρόνους μεγαλύτερους από

$$t = \mu(T_{esc})_{\max} + 5(\sigma_T)_{\max} = 2.25 \cdot 10^9 \approx T_{SS}/2 \quad (6.3)$$

είναι πρακτικά μηδέν. Επομένως η σημερινή του τροχιά δεν μπορεί να είναι προαιώνια. Δεδομένου ότι δεν παρατηρούμε διαρκή αύξηση της εκκεντρότητας της τροχιάς, η σημερινή μεγάλη τιμή της e_p πρέπει να είναι το αποτέλεσμα κάποιας πρόσφατης (πιθανώς τα τελευταία 10^9 χρόνια) βίαιας σύγκρουσης.

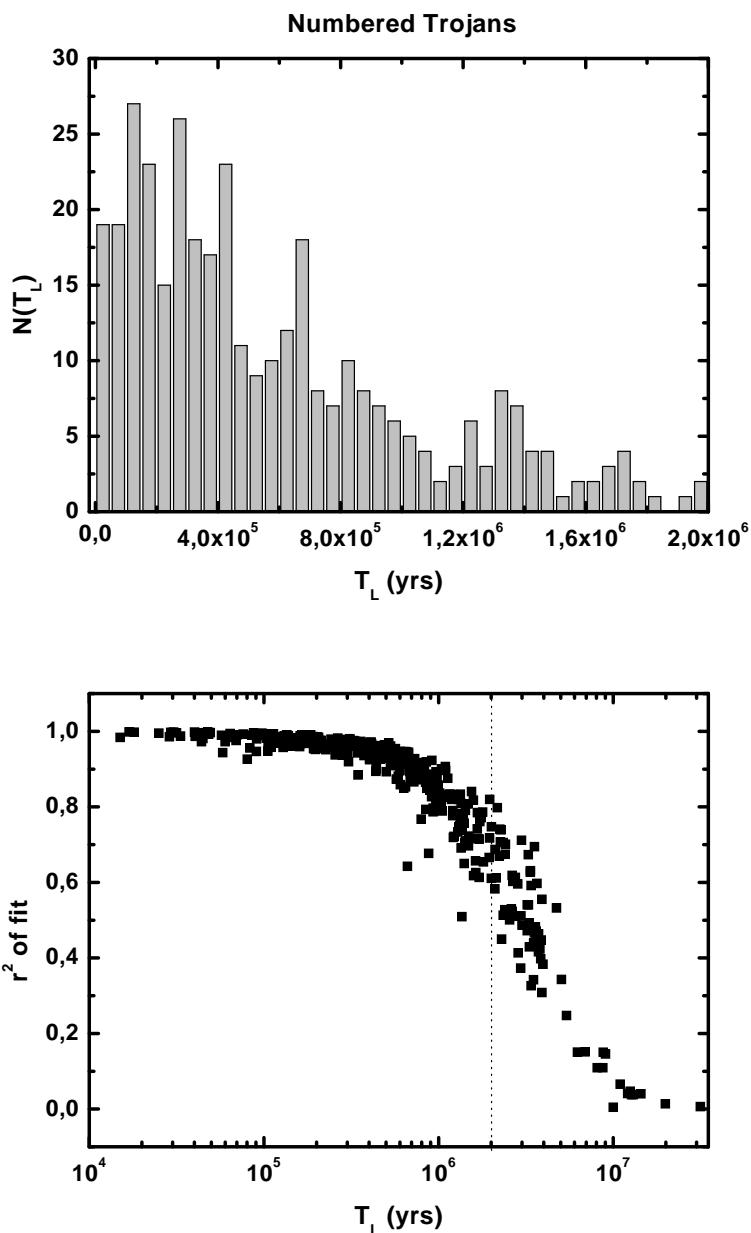
6.5 Ο Βαθμός Χάους των Σμηνών

Όπως είδαμε στις προηγούμενες παραγράφους, η χαοτική κίνηση δεν είναι απαγορευμένη ακόμη και για Τρωικούς αστεροειδείς. Τα ερωτήματα στα οποία θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σε αυτήν την παράγραφο είναι (α) πόσοι από τους πραγματικούς Τρωικούς ακολουθούν χαοτικές τροχιές και με τι βαθμό στοχαστικότητας και (β) ποια είναι τα αντίστοιχα ποσοστά τακτικών και χαοτικών τροχιών στην ευρύτερη περιοχή των σμηνών; Για να απαντήσουμε σε αυτά τα ερωτήματα θα προχωρήσουμε σε μια μαζική αριθμητική ολοκλήρωση, κατάλληλα επιλεγμένων αρχικών συνθηκών, στο πλαίσιο ενός ρεαλιστικού μοντέλου κίνησης (δηλαδή του 4Π).

6.5.1 Οι Αριθμημένοι Τρωικοί

Από τη βάση δεδομένων του Minor Planet Center πήραμε αρχικές συνθήκες για τους 433 αριθμημένους Τρωικούς. Οι εξισώσεις μεταβολών ολοκληρώθηκαν αριθμητικά για $t = 10^7$ χρόνια (μοντέλο 4Π, μέθοδος MVS). Όπως έχουμε αναφέρει και σε προηγούμενο κεφάλαιο, ο υπολογισμός του γ γίνεται μέσω της προσαρμογής μιας ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στα σημεία του διαγράμματος $t_i - \ln v(t_i)$, όπου $v(t_i)$ η τιμή του μέτρου του διανύσματος μεταβολής τη χρονική στιγμή t_i . Η μέθοδος αυτή αναμένεται να είναι ακριβής για τιμές του $T_L = 1/\gamma \leq 0.1 t_{int} = 10^6$ χρόνια, όπου t_{int} ο χρόνος ολοκλήρωσης. Για τιμές του $T_L > 10^6$ χρόνια, οι τροχιές είναι πολύ πιθανό να είναι τακτικές.

Τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης των 433 Τρωικών αναπαρίστανται γραφικά στο Σχ. 6.16, όπου δίνεται το ιστόγραμμα των τιμών του T_L . Επίσης, στο ίδιο σχήμα, δίνεται η τιμή του συντελεστή συσχέτισης, r^2 , της γραμμικής παλινδρόμησης ως συνάρτηση του $\log T_L$. Για $T_L > 2 \cdot 10^6$ χρόνια η τιμή του r^2 πέφτει απότομα προς το μηδέν. Το ιστόγραμμα περιλαμβάνει εκείνες τις τροχιές που έχουν $T_L \leq 2 \cdot 10^6$ χρόνια. Οι μεσοί από τους Τρωικούς έχουν $T_L \leq 6 \cdot 10^6$ χρόνια. Επίσης 38 από αυτούς ακολουθούν έντονα χαοτικές τροχιές



Σχήμα 6.16: (Πάνω) Ιστόγραμμα των τιμών του T_L για τις τροχιές των αριθμημένων Τρωικών με $T_L \leq 2 \cdot 10^6$ χρόνια. (Κάτω) Η τιμή του συντελεστή συσχέτισης r^2 της γραμμικής παλινδρόμησης, ως συνάρτηση του T_L . Η στικτή κατακόρυφη γραμμή αντιστοιχεί σε $T_L = 2 \cdot 10^6$ χρόνια. Στα δεξιά της στικτής γραμμής η τιμή του r^2 πέφτει απότομα προς το μηδέν.

με $T_L \leq 10^5$ χρόνια, τριπλάσιοι από αυτούς που είχε εντοπίσει ο Milani (1993) στο δείγμα των 174. Εύλογα γενάται το ερώτημα γιατί οι χαοτικοί Τρωικοί δεν έχουν διαφύγει. Για να μπορέσουμε να αντιληφθούμε το ‘πόσο’ χαοτικές είναι οι τροχιές των πραγματικών Τρωικών, όταν πρέπει να έχουμε στα χέρια μας ένα ‘χάρτη στοχαστικότητας’ της ευρύτερης περιοχής των σμηνών, που όμως μας επιτρέψει να αναγνωρίσουμε τα όρια της περιοχής ενεργού ευστάθμειας των Τρωικών.

6.5.2 Χαρτογράφηση της Περιοχής του L_5

Για να κατασκευάσει κανείς έναν αντιπροσωπευτικό χάρτη της περιοχής γύρω από τα σημεία Lagrange, όταν πρέπει να δώσει ιδιαίτερη προσοχή στην επιλογή των αρχικών συνθηκών. Το πλήθος των παραμέτρων που προσδιορίζουν μια τροχιά είναι 6 (a, e, i, Ω, ω και M). Είναι προφανές ότι η επαρκής κάλυψη ενός 6-διάστατου πλέγματος αρχικών συνθηκών απαιτεί τεράστιο αριθμό τροχιών. Επιπλέον, διάφοροι συνδυασμοί των στιγμιαίων τιμών των παραπάνω μεταβλητών δίνουν παρόμοιες τροχιές, που διαφέρουν μόνο κατά την αρχική φάση. Έτσι, ο καλύτερος τρόπος για να επιλέξει κανείς ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα τροχιών, είναι να φροντίσει ώστε οι αρχικές συνθήκες να αντιστοιχούν, κατά το δυνατό, σε ένα κανονικό πλέγμα αρχικών τιμών για τα ελεύθερα στοιχεία της τροχιάς, D_P, e_P και i_P .

Αρχικές Συνθήκες

Για την αντιστοίχηση των αρχικών τιμών των ($a, e, i, \Omega, \omega, M$) με τις τιμές των (D_P, e_P, i_P) χρησιμοποιήσαμε, όπως και ο Milani (1993), τη θεωρία του Érdi (1988). Σύμφωνα με τα αποτελέσματά του, η κρίσιμη γωνία του συντονισμού 1/1 δίνεται από τη σχέση

$$\sigma = \lambda - \lambda' = \pm \frac{\pi}{3} + D_P \cos \theta + \mathcal{O}(D_P^2) \quad (6.4)$$

όπου D_P η παράμετρος που χαρακτηρίζει το εύρος λίκνισης γύρω από το $\pm \pi/3$ και θ η φάση της λίκνισης. Αντίστοιχα ο ημίξονας της τροχιάς του Τρωικού εκτελεί λίκνιση γύρω από την τιμή a' του Δία, με διαφορά φάσης $\pi/2$ σε σχέση με τη σ ,

$$a - a' = d_P \sin \theta = \sqrt{3\mu} a' D_P \sin \theta + \mathcal{O}(D_P^2) \approx 0.2783 D_P \sin \theta \quad (6.5)$$

όπου το D_P μετριέται σε ακτίνια και το a σε AU. Όσον αφορά στη μεταβολή των (e, ϖ), η λύση του Érdi για το (ΕΠ) δίνει

$$\begin{aligned} \psi_1 &= e \cos(\varpi - \varpi') = A_1 + c \cos \chi \\ \psi_2 &= e \sin(\varpi - \varpi') = A_2 + c \sin \chi \end{aligned} \quad (6.6)$$

όπου χ το ελεύθερο μήκος του περιηλίου και c μια σταθερά που έχει την έννοια της ελεύθερης εκκεντρότητας. Οι παράμετροι A_1 και A_2 είναι ανάλογες της εκκεντρότητας του Δία και ενός πολυωνύμου του D_P , αλλά ο πρώτος μη-σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι $\mathcal{O}(D_P^2)$ και μπορεί να αγνοηθεί σε αυτήν την προσέγγιση. Αν αρχικά θέσουμε $\varpi - \varpi' = \pm \pi/3$ (αιώνια

λύση ισορροπίας του Lagrange), τότε $\chi = \pm\pi/3$ και η αρχική εκκεντρότητα δίνεται από τη σχέση $e = e' + c$, όπου $c = e_P$. Η λύση αυτή δεν είναι ακριβής στην περίπτωση που το μοντέλο περιλαμβάνει περισσότερους πλανήτες, αλλά είναι μια καλή προσέγγιση, δεδομένου ότι η εξαναγκασμένη συνιστώσα των (e, ω) ενός σωματιδίου ταυτίζεται με τις στιγμιαίες τιμές (e', ω') για $a \rightarrow a'$ (βλ. Murray & Dermott 2000, Ch. 7). Στο 3-διάστατο πρόβλημα η παραπάνω λύση για τα (e, ω) περιέχει διορθωτικούς όρους για μη-μηδενικές τιμές του i . Όμως οι διορθώσεις είναι και πάλι $\mathcal{O}(i^2)$ και μπορούν να αγνοηθούν σε αυτήν την προσέγγιση. Επειδή υποθέσαμε αρχικά ότι $\omega - \omega' = \pm\pi/3$ (που στο επίπεδο πρόβλημα γράφεται $\omega - \omega' = \pm\pi/3$) οι αρχικές τιμές των (i, Ω) δίνονται από τις σχέσεις $\Omega = \Omega' + i = i' + i_P$.

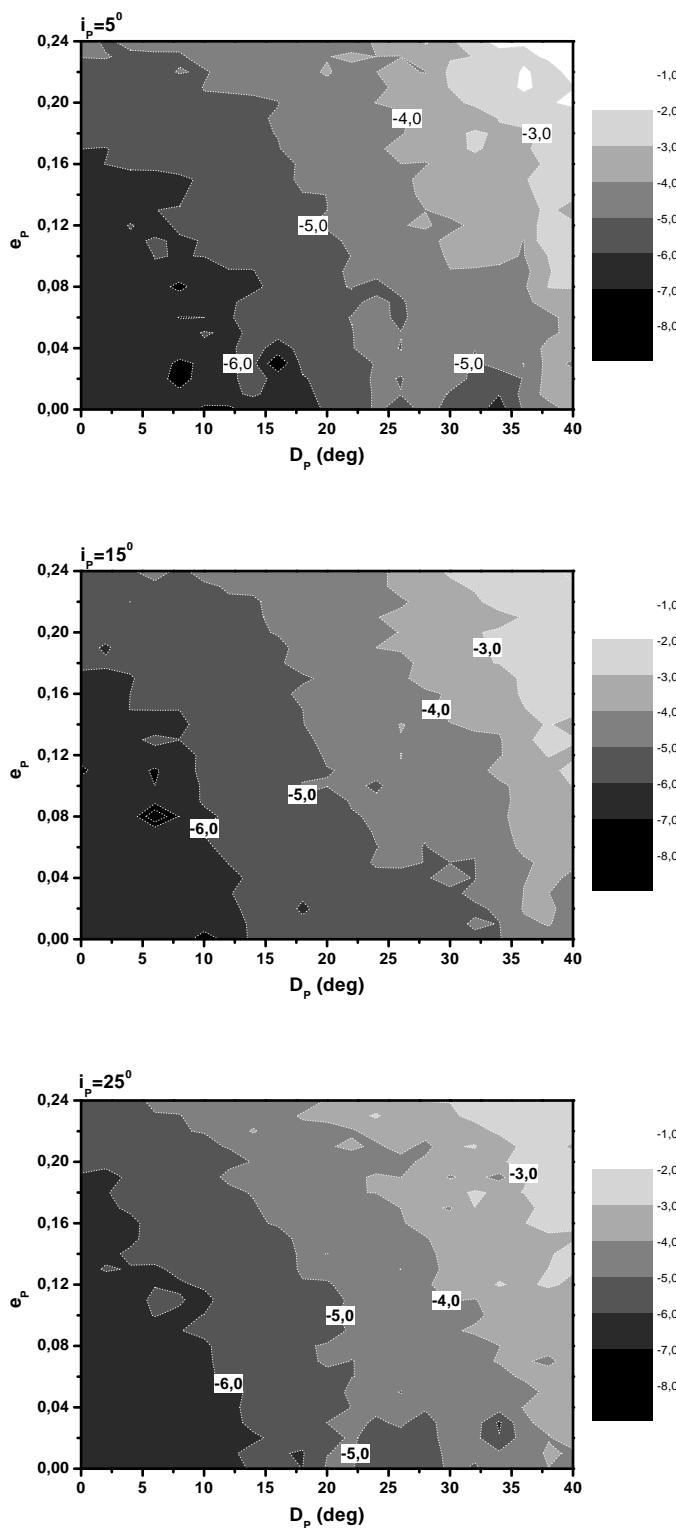
Οι αρχικές συνθήκες της ολοκλήρωσης επιλέχθηκαν με βάση την παραπάνω ανάλυση. Έτσι, θεωρήσαμε ένα ορθογώνιο πλέγμα 525 τροχιών με $0^0 \leq D_P \leq 40^0$ (βήμα 2^0) και $0 \leq e_P \leq 0.24$ (βήμα 0.01). Η ολοκλήρωση έγινε για 12 διαφορετικές τιμές της $0^0 \leq i_P \leq 27^0.5$ (βήμα $2^0.5$). Αν θεωρήσουμε αρχικά $\theta = 90^0$, οι αρχικές συνθήκες αυτού του συνόλου των 6300 τροχιών δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_0 &= a'_0 + 0.2783 D_P & e_0 &= e'_0 + e_P & i_0 &= i'_0 + i_P \\ M_0 &= M'_0 & \omega_0 &= \omega'_0 - \pi/3 & \Omega_0 &= \Omega'_0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Η επιλογή του $\omega - \omega' = -\pi/3$ σημαίνει ότι οι υπολογισμοί έγιναν γύρω από το σημείο L_5 . Για όλες τις τροχιές επιλύσαμε αριθμητικά τις εξισώσεις μεταβολών για χρόνο ίσο με 10^7 χρόνια (μοντέλο 4Π, μέθοδος MVS). Λόγω του πολύ μεγάλου πλήθους των τροχιών αλλά και του μεγάλου χρόνου ολοκλήρωσης, το βήμα ολοκλήρωσης τέθηκε ίσο με 91 μέρες. Για το σύνολο των 525 τροχιών με $i_P = 0$ επαναλάβαμε την ολοκλήρωση, χρησιμοποιώντας τον πιο ακριβή κώδικα ORBIT9 του Milani και τα αποτελέσματα παρέμειναν τα ίδια, σε στατιστικό επίπεδο.

Αποτελέσματα

Τα αποτελέσματα της ολοκλήρωσης δίνονται γραφικά στο Σχ. 6.17, με τη μορφή του ‘χάρτη στοχαστικότητας’ της περιοχής του L_5 . Όπως είναι φανερό η πλειοψηφία των τροχιών που ολοκληρώσαμε είναι χαοτικές, με ένα ποσοστό $\sim 50\%$ των τροχιών να έχουν $T_L \leq 10^5$. Οι ισοσταθμικές καμπύλες του $\log T_L$, που αντιστοιχούν σε διαφορές του T_L κατά μια τάξη μεγέθους, μοιάζουν με διαταραγμένες ελλείψεις και δείχνουν την αύξηση του βαθμού στοχαστικότητας (μείωση του T_L) των τροχιών καθώς απομακρυνόμαστε από το L_5 , αυξανομένου τόσο του D_P όσο και της e_P . Το σχήμα αυτό διατηρείται για όλες τις τιμές της i_P , με το εύρος των περιοχών ανάμεσα σε δύο ισοσταθμικές καμπύλες να μεταβάλλεται ελαφρώς με την τιμή της i_P . Συγχρίνοντας το χάρτη του Σχ. 6.17 με το Σχ. 6.1 και τα αποτελέσματα του Σχ. 6.16, βλέπουμε ότι η πλειοψηφία των πραγματικών Τρωικών συγκεντρώνονται κατά κανόνα στην περιοχή με $D_P \leq 25^0$ και κάτω από την ισοσταθμική καμπύλη $T_L = 10^5$ χρόνια. Αυτή η ισοσταθμική καμπύλη συμπίπτει σχεδόν με την οριακή καμπύλη ενεργούς ευστάθειας των Τρωικών (για $t = 4.5 \cdot 10^9$ χρόνια) που υπολόγισαν οι Levison et al. (1997).



Σχήμα 6.17: Χάρτης στοχαστικότητας της περιοχής του L_5 . Η τιμή του λογάριθμου του T_L παριστάνεται με διαβαθμίσεις του γκρι. Η κλίμακα δίνεται στα δεξιά των διαγραμμάτων και η τιμή των διαφόρων ισοσταθμικών καμπυλών αναγράφεται στα διαγράμματα. Τα τρία διαφορετικά σχήματα αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές αρχικές τιμές της i_p . Οι ισοσταθμικές καμπύλες μοιάζουν με τεταρτημόρια διαταραγμένων ελλείψεων, σχήμα που διατηρείται για όλες τις τιμές της i_p . Το εύρος όμως των διαφόρων περιοχών μεταβάλλεται με την τιμή της i_p .

Η μορφή των ισοσταθμικών καμπυλών του T_L υποδηλώνει την ύπαρξη κάποιας συσχέτισης, έστω σε στατιστικό επίπεδο, μεταξύ της τιμής του T_L και της ‘απόστασης’ από το σημείο Lagrange στο χώρο των ελεύθερων στοιχείων. Ορίζουμε την ακόλουθη μετρική

$$d_L = \cos(i_P) \sqrt{\left(\frac{D}{2\pi/3}\right)^2 + e_P^2} \quad (6.8)$$

όπου $2\pi/3$ το συνολικό εύρος της περιοχής λίκνισης γύρω από το σημείο Lagrange. Το d_L δίνει την προβολή στο επίπεδο της τροχιάς του Δία της απόστασης ενός σημείου από το L_5 , με συντεταγμένες D_P , e_P και i_P . Υπολογίζοντας την τιμή του d_L για καθεμιά από τις 6300 τροχιές και σχεδιάζοντας τις αντίστοιχες τιμές του T_L/T' ως συνάρτηση του d_L , προκύπτει το γράφημα του Σχ. 6.18 (σε λογαριθμική κλίμακα). Η προσαρμογή μιας ευθείας ελαχίστων τετραγώνων στα δεδομένα δίνει τη σχέση

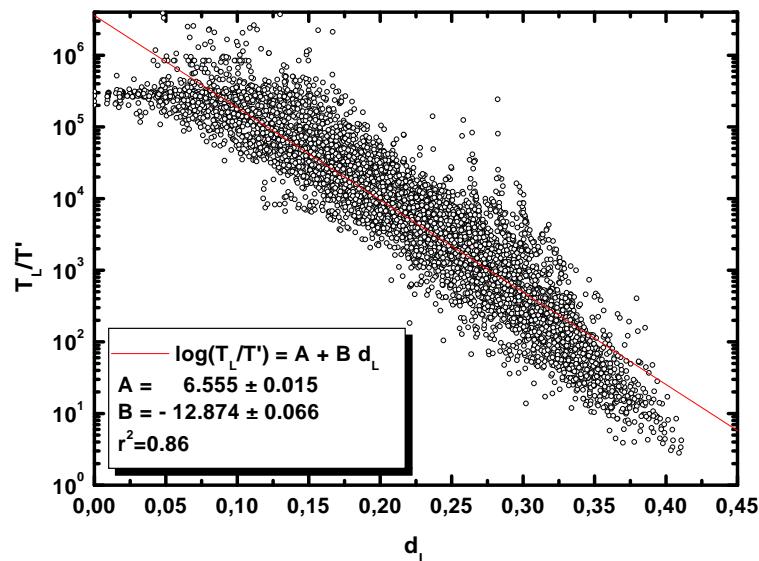
$$\log\left(\frac{T_L}{T'}\right) = A + B d_L \quad (6.9)$$

όπου $A = 6.555 \pm 0.015$ και $B = -12.874 \pm 0.066$. Ο συντελεστής συσχέτισης της παλινδρόμησης είναι $r^2 = 0.86$. Είναι βέβαια φανερό ότι η γραμική παλινδρόμηση δεν προσεγγίζει ικανοποιητικά τα δύο ‘άκρα’ του διαγράμματος ($T_L < 1000$ και $T_L > 2 \cdot 10^6$ χρόνια), αλλά η ακρίβεια υπολογισμού του T_L είναι ούτως ή άλλως μικρή για αυτές τις τιμές. Η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για μια πρώτη εκτίμηση του βαθμού χαοτικότητας της τροχιάς ενός Τρωικού, δεδομένων των τιμών των ελεύθερων στοιχείων. Για $T_L \leq 10^5$ χρόνια, η Εξ. 6.9 δίνει $d_L \leq 0.204$ και οι οριακές τιμές της ισοσταθμικής καμπύλης (για $i_P = 0^\circ$) είναι $(D_P, e_P) = (24^\circ.5, 0)$ και $(D_P, e_P) = (0^\circ, 0.204)$. Όπως φαίνεται από το Σχ. 6.1, οι τιμές αυτές είναι περίπου ίσες με τις οριακές τιμές των (D_P, e_P) της κατανομής των πραγματικών σωμάτων.

6.5.3 Συμπεράσματα

Όπως δείχνουν τα αποτελέσματα της τελευταίας παραγράφου, η ευρύτερη περιοχή των Τρωικών σμηνών είναι κατεξοχήν χαοτική. Η μεγάλη πλειοψηφία των παρατηρηθέντων Τρωικών ακολουθεί τροχιές με $T_L \leq 10^5$ χρόνια και βρίσκεται σε σχετικά μικρή απόσταση από τα σημεία Lagrange, καλύπτοντας μια περιοχή του χώρου των ελεύθερων στοιχείων που αντιστοιχεί σε $d_{L,\max} \approx 0.2$. Η καμπύλη που ορίζεται από την Εξ. 6.9 για $d_L = d_{L,\max}$ φαίνεται ότι ορίζει την περιοχή ενεργού ειστάθμειας των Τρωικών, για χρόνους ίσους με την ηλικία του Ήλιακου Συστήματος. Αυτό το συμπέρασμα βγαίνει (i) από την κατανομή των πραγματικών σωμάτων (Σχ. 6.1) και (ii) από τη σύγκριση με τα αποτελέσματα των Levison et al. (1997). Η ύπαρξη στατιστικής συσχέτισης μεταξύ του T_L και της απόστασης από το σημείο Lagrange, d_L , δίνει τη δυνατότητα εκτίμησης του βαθμού χαοτικότητας της τροχιάς ενός Τρωικού, αν γνωρίζουμε τις τιμές των D_P , e_P και i_P . Βέβαια, όπως φαίνεται και από τα δεδομένα του Σχ. 6.18, η αβεβαιότητα στην εκτίμηση αυτή είναι αρκετά μεγάλη.

Τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου έχουν δημοσιευτεί στις εργασίες A4, A7, B3 και B7, που αναφέρονται στο Παράτημα Γ (Βιογραφικό Σημείωμα).



Σχήμα 6.18: Διάγραμμα των τιμών του T_L/T' ως συνάρτηση της απόστασης d_L από το σημείο Lagrange για τις 6300 τροχιές που ολοκληρώσαμε. Είναι φανερή η ύπαρξη στατιστικής συσχέτισης μεταξύ των δύο ποσοτήτων. Η γραμμική παλινδρόμηση δίνει μια ευθεία ελαχίστων τετραγώνων, η οποία προσαρμόζεται ικανοποιητικά στα δεδομένα ($r^2 = 0.86$.)

Κεφάλαιο 7

Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό συνοψίζουμε τα συμπεράσματα της παρούσας διατριβής και παραθέτουμε τις σκέψεις μας για μελλοντική επέκταση της έρευνας, στα συγκεκριμένα ζητήματα. Θα αναφερθούμε χωριστά σε κάθε θεματική ενότητα της διατριβής, παραθέτοντας τα συμπεράσματα που προκύπτουν, τόσο για τη δυναμική των αστεροειδών, όσο και γενικώτερα για τη δυναμική εκφυλισμένων Χαμιλτονιανών συστημάτων, παρόμοιου τύπου με το διαταραγμένο πρόβλημα του Kepler.

Σε αυτό το σημείο αξίζει να αναφερθούμε στη φυσική πληρότητα των προτύπων κίνησης των αστεροειδών, που υιοθετήσαμε στην παρούσα διατριβή. Είναι γενικώς παραδεκτό ότι τα πρότυπα που βασίζονται στη Νευτώνεια βαρυτική αλληλεπίδαιση δοκιμαστικών σωματιδίων με τον Ήλιο και τους τέσσερις, τουλάχιστον, αέριους πλανήτες (Δία, Κρόνο, Ουρανό και Ποσειδώνα), οδηγούν σε πολύ ικανοποιητική περιγραφή της κίνησης των αστεροειδών. Όμως, ακόμη κι αν αγνοήσει κανείς τις μη βαρυτικές δυνάμεις, που οφείλονται στην πίεση της ακτινοβολίας του Ήλιου (βλ. Κεφ. 1), η μακροχρόνια εξέλιξη της τροχιάς των Παραγήνων αστεροειδών δεν μπορεί να περιγραφεί με μεγάλη ακρίβεια χωρίς Σχετικιστικές διορθώσεις στο βαρυτικό δυναμικό του Ήλιου. Ήδη οι υπολογισμοί των τροχιών των Παραγήνων αστεροειδών, αλλά ακόμη και τεχνητών δορυφόρων, έχουν αρχίσει να γίνονται με τη χρήση της Μετά-Νευτώνειας προσέγγισης (Post-Newtonian approximation) της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Η πρακτική αυτή αναμένεται να διαδοθεί ακόμη περισσότερο τα επόμενα χρόνια. Σημειώνουμε όμως ότι, για τη μελέτη της εξέλιξης της τροχιάς των σωμάτων της Κύριας Ζώνης, η αλλαγή των προτύπων βαρυτικής αλληλεπίδρασης δεν αναμένεται να οδηγήσει σε στατιστικά σημαντικές διαφορές.

7.1 Ευσταθές Χάος

Στα Κεφάλαια 3 και 4 επικεντρώσαμε τη μελέτη μας σε πέντε πραγματικούς αστεροειδείς, οι οποίοι ακολουθούν ευσταθώς χαοτικές τροχιές. Σημειώνουμε ότι οι Milani et al. (1997) απέδωσαν το χαρακτηρισμό ευσταθές χάος στις τροχιές όλων των πραγματικών αστεροειδών με $T_L \sim 10^5$ χρόνια, μη λαμβάνοντας υπόψη το μηχανισμό που ευθύνεται για την εμφάνιση χάους. Αυτός ήταν και ένας από τους λόγους για τους οποίους οι Milani et al. (1997) δεν

μπόρεσαν να δώσουν μια ικανοποιητική ερμηνεία στο φαινόμενο. Εμείς εστιάσαμε την προσοχή μας σε συντονισμούς μέσης κίνησης της κύριας ζώνης, δείχνοντας ότι οι ευσταθώς χαοτικές τροχιές έχουν ίδια φαινομενολογικά χαρακτηριστικά, για συντονισμούς μεσαίας και υψηλής τάξης. Η περίπτωση των χαοτικών Hildas (3/2) και Τρωικών (1/1) είναι διαφορετική. Στην περίπτωση των Hildas, οι χαοτικές τροχιές είναι ‘εγκλωβισμένες’ μέσα στη νησίδα λίκνισης της $\phi = \omega - \omega'$. Στην περιοχή των Τρωικών οι χαοτικές τροχιές εμφανίζονται λόγω της αλληλεπίδρασης αιώνιων συντονισμών με τον συντονισμό 1/1.

Όπως δείχνουν τα αποτελέσματά μας, αναγκαία συνθήκη για την εμφάνιση ευσταθούς χάους σε κάποιον συντονισμό μέσης κίνησης είναι η απουσία περιοδικών τροχιών με το συγκεκριμένο λόγο συχνοτήτων, για ελειπτική κίνηση του Δία. Τότε η χαοτική κίνηση οφείλεται αποκλειστικά στην επικάλυψη των αρμονικών της ομάδας του συντονισμού. Σε αυτήν την περίπτωση, ο ‘σκελετός’ του επιπέδου (h, k) είναι παρόμοιος με αυτόν που καθορίζει η γραμμική αιώνια θεωρία. Φυσικά, ο συντονισμός προκαλεί την εμφάνιση στοχαστικών ζωνών, που οδηγούν σε χαοτικές μεταβολές της e_P . Όμως, για μικρές αρχικά τιμές της e_P , οι μεταβολές της είναι επίσης μικρές. Η επικάλυψη αυτών των ζωνών, που είναι διαφορετική από συντονισμό σε συντονισμό, καθορίζει το χαρακτηριστικό χρόνο διαφυγής και το ποσοστό των ευσταθώς χαοτικών τροχιών. Για να διατηρείται αυτή η εικόνα και σε πιο πολύπλοκα μοντέλα κίνησης (π.χ. το 4Π) από το (3ΕΠ), θα πρέπει οι αναπάλσεις των συντονισμών μέσης κίνησης να μην επηρεάζουν σημαντικά την επικάλυψη των αρμονικών, γεγονός που, όπως δείξαμε, συμβαίνει στους συντονισμούς που μελετήσαμε.

Το ευσταθές χάος έχει κοινά φαινομενολογικά χαρακτηριστικά με το φαινόμενο της προσκολλητικότητας (stickiness). Η μόνη ουσιαστική διαφορά που εντοπίσαμε είναι η εμφανής χαοτική συμπεριφορά της κρίσιμης γωνίας του συντονισμού, $\sigma \approx p\lambda - (p+q)\lambda'$. Αυτή η διαφορά αποτυπώνεται και στη συμπεριφορά της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της συζυγούς δράσης, η οποία μειώνεται εκθετικά με το χρόνο έχοντας $\tau_C \sim T_L$. Αντίθετα οι συναρτήσεις αυτοσυσχέτισης των άλλων δύο δράσεων μεταβάλλονται σχεδόν ημιπεριοδικά με το χρόνο, για $t \gg 10^3 T_L$. Αυτός ο εμφανής διαχωρισμός ανάμεσα στη συμπεριφορά των μεταβλητών (λ, a) και αυτήν των ($\omega, e; \Omega, i$) είναι χαρακτηριστικός για το ΠΤΣ και πηγάζει από τον εκφυλισμό του προβλήματος των δύο σωμάτων. Έτσι, αν κανείς παραβλέψει τις φραγμένες μεταβολές του a και εστιάσει την προσοχή του στο λεγόμενο αιώνιο πρόβλημα (δηλαδή τις μεταβολές των (e, ω) και (i, Ω)), οι ευσταθώς χαοτικές τροχιές συμπεριφέρονται όπως οι προσκολλητικές τροχιές σε συστήματα δύο βαθμών ελευθερίας. Σημειώνουμε ότι η γεωμετρία των ευσταθώς χαοτικών τροχιών υποδηλώνει την ύπαρξη τοπικών ολοκληρωμάτων της κίνησης, πέραν αυτού της ‘ενέργειας’ (βλ. Contopoulos et al. 1978, Magnenat 1985).

Έκτος από τους απλούς συντονισμούς μέσης κίνησης, ευσταθές χάος έχει παρατηρηθεί και σε τριπλούς συντονισμούς μέσης κίνησης (Nesvorný & Morbidelli 1998a, Šidlichovský 1999). Αν και δεν ασχοληθήκαμε με αυτές τις περιπτώσεις, θα πρέπει να πούμε ότι δεν αναμένουμε ουσιαστικές διαφορές από την περίπτωση των απλών, παλλόμενων στο (4Π), συντονισμών μέσης κίνησης. Ο λόγος είναι ότι η τοπολογία των τριπλών συντονισμών είναι παρόμοια με αυτήν των απλών συντονισμών μέσης κίνησης, καθώς και οι τριπλοί συντονισμοί αποτελούν εκφυλισμένες πολύδυμες ομάδες γειτονικών αρμονικών. Επιπλέον, καθώς η ‘ισχύς’ των βασικών τριπλών συντονισμών είναι μικρότερη από αυτή των απλών συντονισμών τάξης $q = 3$,

δεν αναμένουμε την εμφάνιση αιώνιων συντονισμών στην περιοχή ενός τριπλού συντονισμού μέσης κίνησης.

7.2 Μηχανισμοί Μεταφοράς

Οι συντονισμοί μέσης κίνησης με το Δία, μπορούν να χωριστούν σε δύο είδη ανάλογα με την τοπολογία τους και τον αντίστοιχο μηχανισμό μεταφοράς χαοτικών τροχιών. Από τη μια μεριά έχουμε τους λίγους, χαμηλής τάξης, συντονισμούς που χαρακτηρίζονται από την ύπαρξη περιοδικών τροχιών κι από την άλλη την πλειοψηφία των συντονισμών, που δεν έχουν περιοδικές τροχιές, όταν ο Δίας υποτεθεί ότι ακολουθεί ελλειπτική τροχιά.

Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν οι συντονισμοί $4/1, 3/1, 5/2, 7/3$ και $2/1$ της εσωτερικής ζώνης (και οι $5/3, 7/4$ και $11/7$ της εξωτερικής), στους οποίους παρατηρούνται τα διάκενα Kirkwood. Ο κύριος μηχανισμός μεταφοράς των χαοτικών τροχιών είναι μέσω διαλλειπτικών (intermittent) αλμάτων της εκκεντρότητας, σε τιμές που οδηγούν σε συνεχόμενες προσεγγίσεις με τους πλανήτες Άρη και Δία. Ο μηχανισμός αυτός, τον οποίο πρώτοι πρότεινε ο Wisdom (1982, 1983), σχετίζεται με την τοπολογία του επιπέδου (h, k) , ο σκελετός του οποίου είναι η ομοκλινική τροχιά που περιβάλλει τη νησίδα λίκνισης του $\phi = \omega - \omega'$. Οι χαοτικές τροχιές αναγκάζονται να περιφέρονται γύρω από τη νησίδα, δεχόμενες μεγάλες μεταβολές της τιμής της εκκεντρότητας σε μικρά χρονικά διαστήματα ($10^4 - 10^5$ χρόνια). Έτσι, μόνο σε αυτούς τους συντονισμούς, ο χαρακτηριστικός χρόνος διαφυγής είναι σημαντικά μικρότερος από την ηλικία του Ήλιακου Συστήματος, ακόμη και για μικρές, αρχικές, τιμές της e . Βέβαια, η πλήρης εκκένωση της περιοχής των συντονισμών συμβαίνει μόνο όταν στο μοντέλο συμπεριλαμβάνονται και άλλοι πλανήτες, γεγονός που οδηγεί στην εμφάνιση αιώνιων συντονισμών.

Αντίθετα, η πλειοψηφία των συντονισμών μέσης κίνησης δεν έχει περιοδικές τροχιές. Η επικάλυψη των αρμονικών της συντονισμένης ομάδας οδηγεί σε βραδεία χαοτική διάχυση της εκκεντρότητας. Για τους συντονισμούς της εσωτερικής ζώνης, ο χαρακτηριστικός χρόνος διαφυγής είναι σίγουρα μεγαλύτερος από $250 \cdot 10^6$ χρόνια (ο μέγιστος χρόνος ολοκλήρωσης στα πειράματα μας) και πιθανώς συγκρίσιμος με την ηλικία του Ήλιακου Συστήματος. Υπενθυμίζουμε ότι οι μεταβολή των ελεύθερων στοιχείων της τροχιάς είναι ανεπαίσθητη για $t = 250 \cdot 10^6$ χρόνια, τουλάχιστον για αρχικές τιμές εκκεντρότητας $e_0 < 0.15$. Δεδομένης της παρόμοιας τοπολογίας, αλλά και ισχύος, των τριπλών συντονισμών μέσης κίνησης, αναμένουμε παρόμοια αποτελέσματα για το χρόνο διαφυγής. Βάσει αυτών των αποτελεσμάτων μπορεί να ερμηνευτεί η ύπαρξη λίγων μόνο διάκενων στην κατανομή των αστεροειδών και ταυτόχρονα μιας πληθώρας πραγματικών αστεροειδών οι οποίοι, παρότι ακολουθούν χαοτικές τροχιές, δεν έχουν διαφύγει ακόμη από τη ζώνη.

Τα παραπάνω αποτελέσματα, που ισχύουν στο πρόβλημα των τριών σωμάτων, αναμένουμε να έχουν γενική ισχύ για διαταραγμένα Χαμιλτονιανά συστήματα δύο ή τριών βαθμών ελευθερίας, των οποίων η συνάρτηση Hamilton έχει τη μορφή

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(I_1) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{I}_i, \theta_i, \theta'(t)) \quad (7.1)$$

όπου (\mathbf{I}_i, θ_i) μεταβλητές δράσης-γωνίας¹ για το αδιατάρακτο σύστημα, $\mathcal{H}_0(I_1)$ (το ολοκληρώσιμο τυμήμα) μια μη γραμμική συνάρτηση μόνο της μίας δράσης, $\theta'(t) = \omega' t$ μια ‘γωνία’ που μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο και $\epsilon \ll 1$ η παράμετρος της διαταραχής. Το αδιατάρακτο σύστημα είναι πλήρως υπερολογληρώσιμο (=εκφυλισμένο) και όλες οι περατωμένες τροχιές του είναι περιοδικές. Οι συχνότητες της τροχιάς δίνονται από τις κανονικές εξισώσεις

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_1} = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_1} + \mathcal{O}(\epsilon) \\ \omega_{k \neq 1} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial I_k} = \mathcal{O}(\epsilon)\end{aligned}\quad (7.2)$$

Αν υποθέσουμε ότι $\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial I_1} \sim \dot{\theta}' \sim \mathcal{O}(1)$, το σύστημα έχει τα ίδια χαρακτηριστικά με το διαταραχμένο πρόβλημα του Kepler. Μάλιστα, αν το δυναμικό παρουσιάζει συμμετρίες ανάλογες με αυτές του βαρυτικού δυναμικού, το ανάπτυγμα της \mathcal{H}_1 σε σειρά Fourier θα πάρει τη μορφή

$$\mathcal{H}_1 = \sum_{p,q,r_k} A_{p,q,r_k} (\mathbf{I}_i) \cos(p\theta_1 + q\theta' + \sum_{k \neq 1} r_k \theta_k) \quad (7.3)$$

και οι ακέραιοι (p, q, r_k) θα υπακούουν σε κάποιους κανόνες, αντίστοιχους με τους κανόνες του D'Alembert. Τότε, για κάθε λόγο συχνοτήτων p/q θα εμφανίζονται διάφοροι όροι συνημιτόνων, ώστε κάθε συντονισμός μεταξύ των ‘γρήγορων’ βαθμών ελευθερίας (θ, θ') να αποτελεί μία πολύδυμη ομάδα υπο-συντονισμών.

7.3 ‘Ευστάθεια’ των Τρωικών

Όπως δείξαμε στο Κεφάλαιο 6, η εικόνα της ευσταθούς λίκνισης των Τρωικών γύρω από τα σημεία Largange δεν αποτελεί απαράβατο κανόνα. Επεκτείνοντας προηγούμενες μελέτες του Milani (1993, 1994), δείξαμε ότι ένας από τους μηχανισμούς που ευθύνονται για την εμφάνιση χάους στο συντονισμό 1/1 είναι οι αιώνιοι συντονισμοί του αναβιβάζοντος συνδέσμου, με προεξάρχοντα το συντονισμό ν_{16} . Πολύ σημαντικός είναι επίσης ο ρόλος των αιώνιων συντονισμών ανώτερης τάξης, οι οποίοι διευρύνουν τη χαοτική ζώνη γύρω από το ν_{16} και δρουν ως ‘μεσάζοντες’, αναγκάζοντας τις τροχιές να εισέλθουν στην περιοχή του ν_{16} . Η μεγάλη μεταβολή της κλίσης συνεπάγεται την αργή αύξηση του εύρους λίκνισης, που οδηγεί τις τροχιές σε μια περιοχή έντονης αστάθειας και τελικά στη διαφυγή. Η διαδικασία αυτή διαφρεύ χρονικό διάστημα, κατά κανόνα, αρκετά μικρότερο από την ηλικία του Ηλιακού Συστήματος, γεγονός το οποίο συμφωνεί με τα αποτελέσματα των Levison et al. (1997), περί αργής διάλυσης των Τρωικών σμηνών.

Ανάμεσα στους 433 αριθμημένους Τρωικούς, υπάρχουν αρκετοί που ακολουθούν χαοτικές τροχιές. Μάλιστα περίπου 9% από αυτούς έχουν $T_L \leq 10^5$ χρόνια. Το ερώτημα ‘γιατί δεν έχουν διαφύγει ακόμη,’ δεν μπορεί να απαντηθεί χωρίς προηγούμενη ανάλυση των μηχανισμών

¹ Μπορούμε να γράψουμε τη συνάρτηση Hamilton σε μεταβλητές δράσης-γωνιάς, αρκεί να περιοριστούμε στη μελέτη ενός συμπαγούς (compact) υποσυνόλου του χώρου των φάσεων (περατωμένες τροχιές).

μεταφοράς στην περιοχή των σμηνών. Η χαρτογράφηση των σμηνών έδειξε ότι η ευρύτερη περιοχή των σημείων Lagrange είναι κατεξοχήν χαοτική. Μάλιστα παρατηρούμε μια ομαλή μείωση της τιμής του T_L καθώς απομακρυνόμαστε από τα σημεία Largange, όπως φαίνεται από τη μορφή των ισοσταθμικών καμπύλων του T_L . Παρόμοια μορφή έχουν και οι ισοσταθμικές καμπύλες του χρόνου διαφυγής, T_E , στο Σχ. 1 της εργασίας των Levison et al. (1997). Συνδυάζοντας κανείς τα δύο αποτελέσματα, μπορεί να συμπεράνει την ύπαρξη μιας στατιστικής συσχέτισης ανάμεσα στις δύο ποσότητες, παρόμοιας με αυτήν που είχαν βρει οι Lecar et al. (1992), $T_E \sim T_L^\alpha$. Αυτό βέβαια σημαίνει ότι ο χώρος των φάσεων έχει μια συγκεκριμένη δομή, όμοια με αυτήν που μελέτησαν οι Morbidelli & Froeschlé (1996). Η ύπαρξη μιας τέτοια δομής υποστηρίζεται από πρόσφατα αποτελέσματα των Nesvorný & Dones (2001), οι οποίοι έδειξαν την παρουσία και μερική επικάλυψη τριπλών συντονισμών μέσης κίνησης, στις παρυφές των σμηνών. Ο Shevchenko (1998) υποστήριξε ότι η συσχέτιση μεταξύ των T_L και T_E είναι εγγενής ιδιότητα των Χαμιλτονιανών συστημάτων, για τροχιές που ξεκινούν από το ομοκλινικό πλέγμα ενός συντονισμού και διαφένγουν, μέσω ετεροκλινικής τομής, προς τη χαοτική ζώνη ενός γειτονικού συντονισμού. Μάλιστα έδειξε, με αναλυτικές μεθόδους, ότι ο εκθέτης της εν λόγω σχέσης έχει παγκόσμια (universal) τιμή $\alpha = 2$ και υποστήριξε ότι οι όποιες μετρήσεις του $\alpha \neq 2$ είναι αποτέλεσμα κακής δειγματοληψίας τροχιών. Αν δεχτούμε αυτά τα αποτελέσματα, τότε όλες οι τροχιές των Τρωικών με $T_L \geq 10^5$ χρόνια είναι πρακτικά ευσταθείς για χρόνους ίσους με την ηλικία του Ήλιακού Συστήματος. Είναι προφανές ότι η πιθανή επιβεβαίωση ενός τέτοιου αποτελέσματος, η οποία απαιτεί έναν πολύ μεγάλο όγκο αριθμητικών ολοκληρώσεων, θα αποτελούσε πολύ σπουδαίο επίτευγμα για την Ουράνια Μηχανική.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Α. Βασικά Δεδομένα του Ηλιακού Συστήματος

Πίνακας 1: Οι Πλανήτες του Ηλιακού Συστήματος. Δίνονται οι μάζες m_p ($\times 10^{24}$ kg), καθώς και τα στοιχεία της τροχιάς για την εποχή J2000 (JD 2451545.0). Τα στοιχεία αναφέρονται ως προς τη μέση εκλειπτική και το μέσο εαρινό σημείο της εποχής J2000.

Πλανήτης	m_p	a AU	e	i ($^{\circ}$)	ϖ ($^{\circ}$)	Ω ($^{\circ}$)	λ ($^{\circ}$)
Ερμής	0.3302	0.3871	0.2056	7.005	77.456	48.332	252.251
Αφροδίτη	4.8685	0.7233	0.0068	3.395	131.533	76.681	181.979
Γη	5.9736	1.0000	0.0167	0.000	102.947	348.739	100.464
Άρης	0.6419	1.5237	0.0934	1.851	336.041	49.579	355.452
Δίας	1898.6000	5.2037	0.0484	1.305	14.754	100.556	34.404
Κρόνος	568.4600	9.5371	0.0542	2.485	92.432	113.715	49.944
Ουρανός	86.8320	19.1913	0.0472	0.770	170.964	74.230	313.232
Ποσειδώνας	102.4300	30.0690	0.0086	1.769	44.971	131.722	304.880
Πλούτωνας	0.0127	39.4817	0.2488	17.142	224.067	110.303	238.929

Πίνακας 2: Θεμελιώδεις Συχνότητες του Εξωτερικού Πλανητικού Συστήματος (Δίας, Κρόνος, Ουρανός και Ποσειδώνας). Δίνονται οι τιμές των g_i και s_i (σε "/έτος") και των αντίστοιχων φάσεων, β_i και δ_i ($^{\circ}$), όπως προκύπτουν από την αναλυτική αιώνια θεωρία του Bretagnon (1974). Επίσης δίνονται οι τιμές \tilde{g}_i και \tilde{s}_i , που υπολόγισαν αριθμητικά οι Nobili et al. (1989).

i	g_i	s_i	β_i	δ_i	\tilde{g}_i	\tilde{s}_i
5	4.207205	0.000000	28.503220	106.153214	4.257493	-0.010004
6	21.216758	-26.267070	127.715144	125.642842	28.245530	-26.344964
7	3.065181	-2.999837	114.775439	316.293317	3.086756	-2.992661
8	0.667863	-0.691431	72.090286	201.287664	0.672551	-0.692514

B. Συμπλεκτική Ολοκλήρωση - Μέθοδος MVS

Οι μέθοδοι συμπλεκτικής ολοκλήρωσης είναι ειδικά σχεδιασμένοι για την επίλυση διατηρητικών συστημάτων διαφορικών εξισώσεων (βλ. Saha & Tremaine 1992, Yoshida 1993). Πρόκειται ουσιαστικά για απειροστούς κανονικούς μετασχηματισμούς, με παράμετρο το βήμα ολοκλήρωσης τ . Έτσι, εκ κατασκευής, ο αλγόριθμος επίλυσης των κανονικών εξισώσεων διατηρεί τη συμπλεκτική δομή του χώρου των φάσεων. Για ολοκληρώσιμα συστήματα, οι εξισώσεις του Hamilton αποτελούν ένα γραμμικό διαφορικό σύστημα. Η εφαρμογή μιας συμπλεκτικής μεθόδου ολοκλήρωσης οδηγεί σε λύσεις που ταυτίζονται με τις αναλυτικές λύσεις (με ακρίβεια ίση με την ακρίβεια του υπολογιστή) και διατηρούν τόσο τη συμπλεκτική ιδιότητα, όσο και όλα τα αναλλοίωτα μεγέθη του συστήματος (integral invariants, π.χ. την ενέργεια).

Για μη-ολοκληρώσιμα συστήματα η παραπάνω μέθοδος επεκτείνεται, αν χωρίσουμε τη συνάρτηση Hamilton σε δύο ή περισσότερους όρους, ο καθένας εκ των οποίων είναι ολοκληρώσιμος από μόνος του. Η λύση τότε δίνεται ως η σύνθεση δύο (ή περισσότερων) κανονικών μετασχηματισμών. Έτσι η συμπλεκτική δομή διατηρείται, αλλά η λύση δεν ταυτίζεται πια με την πραγματική, οπότε η ενέργεια δεν διατηρείται. Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση Hamilton

$$H = T(p) + V(q) = H_T + H_V$$

όπου T η κινητική και V η δυναμική ενέργεια. Αν συμβολίσουμε με S_T και S_V τους απειροστούς κανονικούς μετασχηματισμούς που δίνουν τις ακριβείς λύσεις των H_T και H_V αντίστοιχα, τότε η λύση που προκύπτει από τη σύνθεση

$$S = S_V(\tau/2) \circ S_T(\tau) \circ S_V(\tau/2) = S_T(\tau/2) \circ S_V(\tau) \circ S_T(\tau/2)$$

(το γνωστό σχήμα leap frog) προσεγγίζει τη λύση της H με ακρίβεια $\mathcal{O}(\tau^2)$. Συγκεκριμένα, η S δίνει την ακριβή λύση των εξισώσεων κίνησης της συνάρτησης \tilde{H} , η οποία δίνεται από τη σχέση

$$\tilde{H} = H + \tau^2 H(2) + \mathcal{O}(\tau^3)$$

Σημειώνουμε ότι η σύγκλιση της παραπάνω σειράς δεν είναι εξασφαλισμένη για κάθε μη γραμμικό σύστημα. Στα περισσότερα αριθμητικά πειράματα όμως, η σειρά φαίνεται πως συγκλίνει για αρκετά μικρές τιμές του τ , ώστε οι μεταβολές (σφάλμα) στην τιμή της ενέργειας να είναι φραγμένες και η λύση S να παραμένει για πάντα κοντά στην αρχική ισοενεργειακή επιφάνεια της H . Αν κανείς εφαρμόσει ένα διαφορετικό σχήμα σύνθεσης, που απαιτεί περισσότερες πράξεις, μπορεί να πάρει λύσεις με καλύτερη ακρίβεια. Η υπεροχή των συμπλεκτικών μεθόδων, έναντι των παραδοσιακών, έχει να κάνει όχι μόνο με τις ιδιότητές τους αλλά και με το γεγονός ότι, για συγκεκριμένη ακρίβεια, απαιτείται πολύ μικρός αριθμός πράξεων (αφού οι αναλυτικές λύσεις των H_T και H_V είναι γνωστές). Έτσι οι συμπλεκτικές μέθοδοι είναι, κατά κανόνα, πολύ πιο γρήγορες από τις παραδοσιακές μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης.

Η παραπάνω μέθοδος χωρισμού της H ονομάζεται ‘T+V ανάλυση’ (“T+V” decomposition). Δεν αποτελεί όμως και το μοναδικό τρόπο ανάλυσης της H . Οι Wisdom & Holman (1991) προχώρησαν στην κατασκευή της συμπλεκτικής μεθόδου μικτών μεταβλητών (Mixed Variables Symplectic = MVS), την οποία εφήρμοσαν για πρώτη φορά στο πρόβλημα των N σωμάτων. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, η συνάρτηση Hamilton χωρίζεται σε δύο επίσης ολοκληρώσιμα κομμάτια

$$H = H_0(q, p) + \epsilon H_1(q, p)$$

όπου $\epsilon \ll 1$ η παράμετρος της διαταραχής (π.χ. η μάζα του Δία). Παρότι η εύρεση των λύσεων S_{H_0} και S_{H_1} δεν είναι τόσο απλή όσο προηγουμένως², το κέρδος που έχουμε είναι ότι η \tilde{H} προσεγγίζει την H με ακρίβεια $\mathcal{O}(\epsilon \tau^2)$ (αντί για $\mathcal{O}(\tau^2)$ με την T+V). Για το Ηλιακό Σύστημα $\epsilon \sim 10^{-3}$ και επομένως το κέρδος σε ακρίβεια είναι σημαντικό. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε σχετικά μεγάλες τιμές για το βήμα ολοκλήρωσης ($\tau \sim 20 - 80$ ημέρες), επιτυγχάνοντας ακρίβεια συγκρίσιμη με πολύ πιο χρονοβόρες μεθόδους.

Η μέθοδος MVS επεκτάθηκε από τους Levison & Duncan (1994, 2000) και Duncan et al. (1998), για την περίπτωση που έχουμε κοντινές προσεγγίσεις μεταξύ των σωμάτων. Ο Chambers (1999) πρότεινε τη χρήση μιας υβριδικής μεθόδου ολοκλήρωσης (ένα ‘μίγμα’ της MVS και της Bulirsch-Stoer), για την αντιμετώπιση του προβλήματος των κοντινών προσεγγίσεων. Τέλος, κάνοντας χρήση της άλγεβρας των σειρών Lie, διάφοροι ερευνητές κατάφεραν να κατασκευάσουν οικογένειες συμπλεκτικών μεθόδων (Chambers & Murray 2000, Laskar & Robutel 2001), οι οποίες βασίζονται στην ανάλυση MVS.

²Για το πρόβλημα των N σωμάτων απαιτείται μια σειρά από μετασχηματισμούς συντεταγμένων, προκειμένου η H να γραφεί στην παραπάνω μορφή. Η λύση της H_0 , που περιγράφει το πρόβλημα του Kepler, δίνεται με τη χρήση των συναρτήσεων f και g του Gauss (βλ. Danby 1962).

Γ. ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Προσωπικά Στοιχεία

Όνομα	Κλεομένης Γ. Τσιγάνης
Χρονολογία Γέννησης	12 Ιανουαρίου 1974
Τόπος Γέννησης	Λάρισα
Οικογενειακή Κατάσταση	Άγαμος
Διεύθυνση Οικίας	Αλ. Συμεωνίδη, 6 54639 Θεσσαλονίκη
Τηλέφωνο Οικίας	0310 837433
e-mail	tsiganis@astro.auth.gr

Εκπαίδευση

Προπτυχιακές σπουδές

- 1992 - 1996: Τμήμα ΦΥΣΙΚΗΣ, Σ.Θ.Ε. / Α.Π.Θ.
- Διπλωματική Εργασία: Αριθμητική Προσομοίωση των YSO Jets - ο ρόλος της αστρα-θειας Kelvin-Helmholtz. Επιβλέποντες: Αν. Καθ. Λ. Βλάχος και Dr. T.P. Ray (DIAS, Ιρλανδία)

Μεταπτυχιακές σπουδές

- 01/1997 - 06/1998: Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Γενικής Φυσικής, Τμήμα ΦΥΣΙΚΗΣ Σ.Θ.Ε. / Α.Π.Θ.
- 06/1998 - 06/2002: Υπ. Διδάκτωρ στον Τομέα Αστροφυσικής, Αστρονομίας και Μηχανικής του Τμήματος ΦΥΣΙΚΗΣ, Σ.Θ.Ε. / Α.Π.Θ.

Τίτλος Διατριβής

- Διάχυση χαοτικών τροχιών σε Χαμιλτονιανά συστήματα: Εφαρμογές στην Ουράνια Μηχανική

(Επιβλέπων: Χ. Βάρβογλης, Αν. Καυγητής)

Ερευνητικά Ενδιαφέροντα

Μη γραμμική δυναμική

- Χάος σε Χαμιλτονιανά συστήματα Δ.Ε. και διατηρητικές απεικονίσεις
- Στατιστική περιγραφή της μεταφοράς στο χώρο των δράσεων συντηρητικών δυναμικών συστημάτων

- Μη γραμμική ανάλυση χρονοσειρών

Oυράνια Μηχανική

- Συντονισμοί και μεταφορά στο περιορισμένο πρόβλημα των N σωμάτων
- Δομή και εξέλιξη της ζώνης των αστεροειδών
- Μεταφορά των αστεροειδών της κύριας ζώνης προς το εσωτερικό Ηλιακό Σύστημα
- Δυναμική των Τρωικών αστεροειδών

Τίτλοι

- Πτυχιούχος του Τμήματος ΦΥΣΙΚΗΣ, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ. (Οκτώβριος 1996)

Υποτροφίες / Διακρίσεις

Προπτυχιακά

- 01/96 - 06/96: Υποτροφία του προγράμματος ανταλλαγής φοιτητών ERASMUS
- Α' Βραβείο επίδοσης, στις εξετάσεις του 8ου Θερινού σχολείου Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής μη γραμμικών συστημάτων, Ιούλιος 1995, Ξάνθη

Μεταπτυχιακά

- 08/97 - 05/2001: Υποτροφία του Ιδρύματος Κρατικών Υποτροφιών (ΙΚΥ), για την εκπόνηση διδακτορικής διατριβής

Συμμετοχή σε Επιστημονικές Ενώσεις

- 1997 - Μέλος της Ελληνικής Αστρονομικής Εταιρείας (ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ.)

Γνώσεις Ξένων Γλωσσών

Αγγλικά

- Πτυχίο F.C. Cambridge
- TOEFL (630/660)

Γνώσεις Η/Υ

Τύποι Η/Υ	PCs, HP-9000/Series 700, Dec-A Workstations
Λειτουργικά Συστήματα	Windows, HP-UNIX, LINUX
Γλώσσες Προγραμματισμού	T-Pascal, Fortran 77 (F95)
Επεξεργαστές Κειμένου	Word for Windows, L ^A T _E X, Scientific Workplace
Πακέτα Γραφικών	Gnuplot, Grapher 2.0, Origin 5.0/6.0, Xmgr
Πακέτα Λογισμού	Mathematica, MatLab 5.0
Άλλα Εργαλεία	Εφαρμογές Διαδικτύου (Netscape, WS-FTP, HTML) Γραφικά και Σχέδιο (Excel, Corel, Xfig, Xgraph), κ.α. Κώδικες επίλυσης συστημάτων Δ.Ε. και Δ.Ε.Μ.Π. Εφαρμογή γραμμικών και μη γραμμικών μεθόδων ανάλυσης χρονοσειρών
Ανάπτυξη Λογισμικού	

Προϋπηρεσία

Διδακτική

- 10/98 - 03/99: Ακουστική II, Τμήμα Μουσικής και Τεχνολογίας, Πολιτιστικό Ι.Ε.Κ. Θεσσαλονίκης
- 10/01 - 06/02: Φυσική Α' Λυκείου, Πειραματικό Λύκειο Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Ερευνητικά Προγράμματα

- 06/97 - 06/98: Τάξη και Χάος σε συντηρητικά δυναμικά συστήματα και εφαρμογές στην Αστρονομία, την Ουράνια Μηχανική και την Ατομική Φυσική, ΠΕΝΕΔ-95, Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας (Επ. Υπεύθυνος: Χ. Βάρβογλης, Αν. Καθηγητής, Τμήμα ΦΥΣΙΚΗΣ, Σ.Θ.Ε. / Α.Π.Θ.)
- 02/99 - 08/99: Trojanerbahnen, Jubiläumsfonds projektnummer 6446, Östereichische Nationalbank (P.I. Dr. R. Dvorak)

Επισκέπτης Ερευνητής

Προπτυχιακά

- 01/96 - 06/96: School of Cosmic Physics, Dublin Institute for Advanced Studies, Δουβλίνο, Ιρλανδία

Μεταπτυχιακά

- 02/99 - 04/99: Institut für Astronomie, Universität Wien, Βιέννη, Αυστρία
- 04/99 - 06/99: Ινστιτούτο Διαστημικών Εφαρμογών και Τηλεπισκόπησης, Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών

- 03/00 - 04/00: Institut für Astronomie, Universität Wien, Βιέννη, Αυστρία
- 04/01 - 05/01: Institut für Astronomie, Universität Wien, Βιέννη, Αυστρία

Σεμινάρια / Διαλέξεις

A.Π.Θ.

- *To διαταραγμένο εκκρεμές, ως παράδειγμα Χαμιλτονιανού χάους*, Μάρτιος 1997
- *Transport in the phase space of Hamiltonian systems and its relation to the maximal LCN's*, Απρίλιος 1998
- *Ευσταθές χάος στη ζώνη των αστεροειδών*, Απρίλιος 1999
- *Χάος, διάχυση και διάκενα στη ζώνη των αστεροειδών*, Δεκέμβριος 2001

Άλλα Ιδρύματα

- *Stable chaos in the asteroid belt and its relation to the stickiness effect*, Μάρτιος 1999, Institut für Astronomie, Universität Wien
- *Thersites: a 'jumping' Trojan?*, Μάρτιος 1999, Institut für Astronomie, Universität Wien
- *Diffusion Channels and Exit Times from an extended Stickiness zone of the Standard Map*, Μάρτιος 1999, Institut für Astronomie, Universität Wien
- *On a Fokker-Planck approach to asteroidal transport*, Μάρτιος 2000, Institut für Astronomie, Universität Wien
- *Δυναμική των Αστεροειδών*, Οκτώβριος 2000, Εθνικό Αστεροσκοπείο Αθηνών
- *Stable Chaos vs. Kirkwood Gaps in the asteroid belt*, Απρίλιος 2001, Institut für Astronomie, Universität Wien

Συμμετοχή σε Συνέδρια / Σχολεία

Εθνικά

- 2ο Συνέδριο της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ., Ιούλιος 1995, Περαία
- 8ο Θερινό σχολείο / 3ο Πανελλήνιο Συνέδριο Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής μη γραμμικών συστημάτων, Ιουλίος 1995, Ξάνθη
- 10ο Θερινό σχολείο / 5ο Πανελλήνιο Συνέδριο Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής μη γραμμικών συστημάτων, Ιούλιος 1997, Περαία (παρουσίαση)

- 11ο Θερινό σχολείο / 6ο Πανελλήνιο Συνέδριο Πολυπλοκότητας και Χαοτικής Δυναμικής μη γραμμικών συστημάτων, Ιούλιος 1998, Λεβαδειά (αφίσα)
- 4ο Συνέδριο της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ., Σεπτέμβριος 1999, Σάμος (παρουσίαση και αφίσα)

Διεθνή

- Annual Meeting of the Irish Astronomical Society, Απρίλιος 1996, Δουβλίνο, Ιρλανδία
- JENAM 97- New trends in Astronomy & Astrophysics, Ιούλιος 1997, Καλλιθέα, Χαλκιδική (παρουσίαση)
- International Winter School on Nonlinear Time Series Analysis, Φεβρουάριος 1998, Max Planck Institute for Physics of Complex Systems, Δρέσδη, Γερμανία (αφίσα)
- IAU Colloquium No 172 - The Impact of Modern Dynamics in Astronomy, Ιούλιος 1998, FUNDP Namur, Βέλγιο (αφίσα)
- 5th Alexander von Humboldt Colloquium for Celestial Mechanics, Μάρτιος 2000, Bad Hofgastein, Αυστρία (παρουσίαση)
- CELMEC III - International meeting on Celestial Mechanics, Ιούνιος 2001, Ρώμη, Ιταλία (παρουσίαση)

Συμμετοχή στην Οργάνωση Συνεδρίων

Συμμετέσχα, ως βοηθός της Τοπικής Οργανωτικής Επιτροπής, στην οργάνωση των

- 2ο Συνέδριο της ΕΛ.ΑΣ.ΕΤ.
- JENAM 97 - New trends in Astronomy & Astrophysics

Δημοσιεύσεις

Διεθνή Περιοδικά με Κριτές

- A1. On the relation between the maximal LCN's and the width of the stochastic layer in a driven pendulum. K. Tsiganis, A. Anastasiadis and H. Varvoglis, (1999), *J. Phys. A* **32**, 431–442
- A2. Dimensionality differences between sticky and non-sticky chaotic trajectory segments in a 3-D Hamiltonian system. K. Tsiganis, A. Anastasiadis and H. Varvoglis, (2000), *Chaos, Solit. & Fractals*, **11**(14), 2281–2292
- A3. Stable chaos in the 12:7 mean motion resonance and its relation to the stickiness effect. K. Tsiganis, H. Varvoglis and J.D. Hadjidemetriou, (2000), *Icarus*, **146**, 240–252 (Κεφάλαιο 3)

- A4. Thersites: a 'jumping' Trojan?. K. Tsiganis, R. Dvorak and E. Pilat-Lohinger, (2000), *Astron. & Astrophys.*, **354**, 1091–1100 (Κεφάλαιο 6)
- A5. The power spectrum of geodesic divergences as an early detector of chaotic motion. Ch.L. Vozikis, H. Varvoglis and K. Tsiganis, (2000), *Astron. & Astrophys.*, **359**, 386–396
- A6. Chaotic evolution of (719) Albert, the recently recovered minor planet. K. Tsiganis and H. Varvoglis, (2000), *Astron. & Astrophys.*, **361**, 766–769
- A7. Why do Trojan ASCs (not) escape?. R. Dvorak and K. Tsiganis, (2000), *Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **78**, 125–136 (Κεφάλαιο 6)
- A8. Stable chaos in high-order Jovian resonances. K. Tsiganis, H. Varvoglis and J.D. Hadjidemetriou, (2002), *Icarus*, **155**, 454–474 (Κεφάλαιο 4)
- A9. Stable chaos vs. Kirkwood Gaps in the Asteroid Belt: a comparative study of mean motion resonances. K. Tsiganis, H. Varvoglis and J.D. Hadjidemetriou, 2001, *Icarus*, in press (Κεφάλαιο 5)

Στο στάδιο της συγγραφής

- A10. On a Fokker-Planck approach to asteroidal transport - Numerical calculation of diffusion coefficients. K. Tsiganis, A. Anastasiadis and H. Varvoglis, 2002
- A11. Effective Stability vs. Chaotic Diffusion of Jupiter Trojans. K. Tsiganis, R. Dvorak and H. Varvoglis, 2002

Πρακτικά Συνδερίων

- B1. Effective Lyapunov Numbers and Correlation Dimensions in a 3-d.o.f. Hamiltonian system. K. Tsiganis, A. Anastasiadis and H. Varvoglis, (1999), *IAU Colloquium No 172 - The Impact of Modern Dynamics in Astronomy*, S. Ferraz-Mello and J. Henrard (eds.), Kluwer Academic Publishers, p. 441
- B2. Stable Chaos and Stickiness in the 12:7 Jovian resonance. K. Tsiganis, H. Varvoglis and J. D. Hadjidemetriou, (2000), in *4th Astronomical Conference of HEL.A.S*, J. Seimenis and N. Soulakelis (eds.), p. 249 (Κεφάλαιο 3)
- B3. Is (1868)-Thersites an escaping Trojan?. K. Tsiganis, R. Dvorak and E. Pilat-Lohinger, (2000), in *4th Astronomical Conference of HEL.A.S*, J. Seimenis and N. Soulakelis (eds.), p. 255 (Κεφάλαιο 6)
- B4. Transport in the outer asteroid belt: Fokker-Planck solutions vs. Numerical Integrations. K. Tsiganis, A. Anastasiadis and H. Varvoglis, (2000), in *4th Astronomical Conference of HEL.A.S*, J. Seimenis and N. Soulakelis (eds.), p. 135

- B5. Power Spectrum of Orbits' Divergence as a stochasticity indicator. Ch. Vozikis, H. Varvoglis and K. Tsiganis, (2000), in *4th Astronomical Conference of HEL.A.S*, J. Seimenis and N. Soulakelis (eds.), p. 151
- B6. On a Fokker-Planck approach to asteroidal transport. K. Tsiganis, A. Anastasiadis and H. Varvoglis, (2000), in *5th Alexander von Humboldt Colloquium for Celestial Mechanics*, R. Dvorak and J. Henrard (eds.), Kluwer Academic Publishers (*Cel. Mech. Dyn. Astron.*, **78**, 337–340)
- B7. Achates: a Trojan on the edge of escape. K. Tsiganis and R. Dvorak, in *Proceedings of the 2nd Austrian Hungarian workshop on Trojans and related topics*, F. Freistetter, R. Dvorak and B. Érdi (eds.), (2001), Eötvös University Press, Budapest, p. 39 (Κεφάλαιο 6)
- B8. Diffusion of asteroids in the outer belt. K. Tsiganis, H. Varvoglis and A. Anastasiadis, 2001, in *CELMEC III: International meeting on Celestial Mechanics*, in press (Κεφάλαιο 5)
- B9. Stable Chaos in mean motion resonances. H. Varvoglis, K. Tsiganis and J.D. Hadjidemetriou, 2001, in *CELMEC III: International meeting on Celestial Mechanics*, in press (Κεφάλαιο 4)

Αναφορές άλλων ερευνητών

A3

- Morbidelli, A. (2001). Chaotic Diffusion in Celestial Mechanics. *Regular and Chaotic Dynamics* **6**, 339 (invited review)

A4

- Trimble, V. and M. Aschwanden (2001). Astrophysics in 2000. *Publ. Astr. Soc. Pac.* **113**, 1025–1114
- Skokos, Ch. and A. Dokoumetzidis (2001). Effective Stability of the Trojan Asteroids. *Astron. & Astrophys.* **367**, 729–736.

A5

- Trimble, V and M. Aschwanden (2001). Astrophysics in 2000. *Publ. Astr. Soc. Pac.* **113**, 1025–1114.

A8

- Morbidelli, A. (2001). Chaotic Diffusion in Celestial Mechanics. *Regular and Chaotic Dynamics* **6**, 339 (invited review)

Βιβλιογραφία

1. Arnold V.I. (1963). Proof of A.N. Kolmogorov's theorem on the conservation of conditionally periodic motions with a small variation in the Hamiltonian. *Russian Math. Surv.* **18**, 9.
2. Arnold V.I. (1989). Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag, New York Inc. N.Y. U.S.A.
3. Barber G. (1986). The Orbits of Trojan Asteroids. In C.I. Lagerkvist, B.A. Lindblad, H. Lundstedt and H. Rickman (eds.) *Asteroids, Comets, Meteors II*, University of Uppsala, p. 161.
4. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A. and J.M. Strelcyn (1980a). Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory. *Meccanica* March, 9.
5. Benettin G., Galgani L., Giorgilli A. and J.M. Strelcyn (1980b). Lyapunov Characteristic Exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 2: Numerical application. *Meccanica* March, 21.
6. Benettin G. Galgani L. and A. Giorgilli (1985). A proof of Nekhoroshev's theorem for the stability times in nearly integrable Hamiltonian systems. *Celest. Mech.* **37**, 1.
7. Benkadda S., Elskens Y., Ragot B. and J.T. Mendonca (1994). Exit times and chaotic transport in Hamiltonian systems. *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2859.
8. Bottke W., Jedicke R., Morbidelli A., Petit J.M. and B. Gladman (2000a). Understanding the distribution of Near Earth Asteroids. *Science* **288**, 2190.
9. Bottke W.F., Rubincam D.P. and Burns J.A. (2000b). Dynamical evolution of main belt meteoroids: numerical simulations incorporating planetary perturbations and Yarkovsky thermal forces. *Icarus* **145**, 301.
10. Bottke W.F., Vokrouhlicky D., Broz M., Nesvorný D. and Morbidelli A. (2001). Dynamical Spreading of Asteroid Families via the Yarkovsky Effect. *Science* **294**, 1693.

11. Bowell E., K. Muinonen, and L.H. Wasserman (1994). A Public-Domain Asteroid Orbit Data Base. In *IAU Symposium 160 - Asteroids, Comets, Meteors III* (A. Milani, M. di Martino and A. Cellino, Eds.), p. 477. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
12. Bretagnon P. (1974). Termes à longues périodes dans le système solaire. *Astron. Astrophys.* **30**, 141.
13. Broucke R. (1968). Periodic Orbits in the Restricted Three Body Problem. *JPL Tech. Rep.* **32**, 1360.
14. Broucke R. (1969). Stability of the Periodic Orbits in the Restricted Three Body Problem. *A.I.A.A.* **7**, 1003.
15. Brouwer D. and G.M. Clemence (1961). Methods of Celestial Mechanics. Academic Press, New York.
16. Brouwer D. and A.J.J. van Woerkom (1950). The secular variations of the orbital elements of the principal planets. *Astron. Papers Amer. Ephem.* **13**, 81.
17. Cellino A., Michel P., Tanga P., Zappala V. Paolicchi P. and A. dell'Oro (1999). The velocity size relationship for members of asteroid families and implications for the physics of catastrophic collisions . *Icarus* **141**, 79.
18. Chambers J.E. (1999). A hybrid symplectic integrator that permits close encounters between massive bodies. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **304**, 793.
19. Chambers J.C. and M. Murison (2000). Pseudo-high order symplectic intergators. *Astron. J.* **119**, 425.
20. Chirikov B.V. (1979). A universal instability of many dimensional oscillator systems. *Phys. Rep.* **52**, 265.
21. Contopoulos G. and N. Voglis (1996). Spectra of Stretching Numbers and Helicity Angles in Dynamical Systems. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **64**, 1.
22. Contopoulos G., Galgani L., and A. Giorgilli (1978). On the number of isolating integrals in Hamiltonian systems, *Phys. Rev. A* **18**, 1183.
23. Contopoulos G., Voglis N., Efthymiopoulos C., Froeschlé C., Gonczi R., Lega E., Dvorak R. and E. Lohinger (1997). Transition spectra of dynamical systems. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **67**, 293.
24. Danby J.M.A. (1962). Fundamentals of Celestial Mechanics. Willman-Bell Inc., Richmond, Virginia, U.S.A.
25. Dermott S.F. and C.D. Murray (1983). Nature of the Kirkwood gaps in the asteroid belt. *Nature* **301**, 201.

26. Duncan M., Levison. H. and M.H. Lee (1998). A multiple time step symplectic algorithm for integrating close encounters. *Astron. J.* **116**, 2067.
27. Dvorak R., Contopoulos G., Efthymiopoulos Ch. and N. Voglis (1998). “Stickiness” in mappings and dynamical systems. *Plan. Space Sci.* **46**, 1567.
28. Efthymiopoulos C., Contopoulos G. and N. Voglis (1999). Cantori, islands and asymptotic curves in the stickiness region. *Cel Mech. Dyn. Astron.* **73**, 221.
29. Ellis K.M. and C.D. Murray (2000). The Disturbing Function in Solar System Dynamics. *Icarus* **147**, 129.
30. Érdi B. (1988). Long periodic perturbations of Trojan asteroids. *Celest. Mech.* **43**, 303.
31. Érdi B. (1997). The Trojan Problem. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **65**, 149.
32. Farinella P., Gonczi R., Froeschlé Ch. and C. Froeschlé (1993). The injection of asteroid fragments into resonance. *Icarus* **101**, 174.
33. Farinella P., Froeschlé Ch., Froeschlé C., Gonczi R., Hahn G., Morbidelli A. and G.B. Valsecchi (1994). Asteroids falling onto the Sun. *Nature* **371**, 315.
34. Ferraz-Mello S. (1994). Dynamics in the asteroid 2/1 resonance. *Astron. J.* **108**, 2330.
35. Ferraz-Mello S. (1999). Slow and Fast Diffusion in Asteroid-Belt Resonances: A Review. *Celest. Mech. Dynam. Astron.* **73**, 25.
36. Ferraz-Mello S. and J.C. Klaafke (1991). A model for the study of very high eccentricity asteroidal motion: the 3:1 resonance. In *Predictability, Stability and Chaos in N-body dynamical systems*, A.E. Roy (ed.), Plenum Press, New York, N.Y. U.S.A., p. 177.
37. Ferraz-Mello S., Michtchenko T.A. and F. Roig (1998a). The determinant role of Jupiter’s great inequality in the depletion of the Hecuba gap. *Astron. J.* **116**, 1491.
38. Ferraz-Mello S., Michtchenko T.A., Nesvorný D., Roig F. and A. Simula (1998b). The depletion of the Hecuba Gap vs. the long-lasting Hilda group. *Plan. & Space Sci.* **46**, 1425.
39. Ferraz-Mello S., Nesvorný D. and T.A. Michtchenko (1997). On the lack of asteroids in the Hecuba gap. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **69**, 171.
40. Froeschlé C. and H. Scholl (1986). The secular resonance ν_6 in the asteroidal belt. *A&A* **166**, 326.

41. Froeschlé C., Gonczi R. and E. Lega (1997). The fast Lyapunov indicator: A simple tool to detect weak chaos. Application to the structure of the main asteroidal belt. *Plan. Space Science* **45**, 881.
42. Froeschlé C. and E. Lega (1998). Twist angles: a method for distinguishing islands, tori and weak chaotic orbits. Comparison with other methods of analysis. *A&A* **334**, 355.
43. Froeschlé C., Guzzo M. and E. Lega E. (2000). Graphical evolution of the Arnold web: from order to chaos. *Science*, **289**, 2108.
44. Giorgilli A. and Ch. Skokos (1997). On the stability of Trojan asteroids. *A&A* **317**, 254.
45. Gladman B, Migliorini F., Morbidelli A., Zappalà V., Michel P., Cellino A., Froeschlé Ch., Levison H.F., Bailey M. and M.J. Duncan (1997). Dynamical lifetimes of objects injected into asteroid main belt resonances. *Science* **277**, 197.
46. Guzzo M. and A. Morbidelli (1997). Construction of a Nekhoroshev like result for the asteroid belt dynamical system. *Celest. Mech. & Dyn. Astron.* **66**, 255.
47. Hadjidemetriou J.D. (1981). The present status of Periodic Orbits. *Celest. Mech.* **23**, 277.
48. Hadjidemetriou J.D. (1988). Periodic Orbits. In *The Few Body Problem*, M.J. Valtonen (ed.), Kluwer Publ., p. 31.
49. Hadjidemetriou J.D. (1993a). Resonant motion in the restricted three-body problem. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **56**, 201.
50. Hadjidemetriou J.D. (1993b). Asteroid motion near the 3:1 resonance. *Cel. Mech. Dy. Astr.* **56**, 563.
51. Hadjidemetriou J.D. and A. Lemaitre (1997). Asteroid motion near the 2:1 resonance: a symplectic mapping approach. In *The Dynamical Behaviour of our Planetary System*, R. Dvorak and J. Henrard (eds.), Kluwer Academic Publishers, p. 277.
52. Hadjidemetriou J.D. and G. Voyatzis (2000). The 2/1 and 3/2 resonant asteroid motion: A symplectic mapping approach. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **78**, 137.
53. Hanslmeier A. and R. Dvorak (1984). Numerical integration with Lie series. *A. & A.* **132**, 203.
54. Hartmann W.K., Farinella P., Vokrouhlický D., Weidenschilling S.J., Morbidelli A., Marzari F., Davis D.R. and E. Ryan (1999). Reviewing the Yarkovsky effect: New light on the delivery of stone and iron meteorites from the asteroid belt. *Met. & Plan. Science* **34**, 161.

55. Henon M. and C. Heiles (1964). The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments. *Astron. J.* **69**, 73.
56. Henrard J. (1998). The Effect of the Great Inequality on the Hecuba Gap. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **69**, 187.
57. Henrard J. and A. Lemaitre (1987). A perturbative treatment of the 2/1 Jovian resonance. *Icarus* **69**, 266.
58. Hirayama K. (1918). Groups of asteroids probably of common origin. *Astron. J.* **31**, 185.
59. Holman M. and N. Murray (1996). Chaos in high-order mean motion resonances in the outer asteroid belt. *Astron. J.* **112**, 1278.
60. Kantz H. and T. Schreiber (1997). Nonlinear time series analysis. Chirikov B., Cvitanović P., Moss F. and H. Swinney (eds.), Cambridge University Press.
61. Kirkwood D. (1866). In *Proceedings of the American Association for the Advancement of Science for 1866*.
62. Knežević Z., Milani A., Farinella P., Froeschlé and C. Froeschlé (1991). Secular resonances from 2 to 50 AU. *Icarus* **93**, 316.
63. Knežević Z., Froeschlé Ch., Lemaitre A., Milani A. and A. Morbidelli (1995). Comparison between two theories of asteroid proper elements. *A&A* **293**, 605.
64. Knežević Z. and A. Milani (2000). Synthetic Proper Elements for Outer Main Belt Asteroids. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **78**, 17.
65. Kolmogorov A.N. (1954). Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamiltonian function. *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **98**, 527. English translation in *Lecture Notes in Physics* **93**, Casati G. and J. Ford (eds.), p. 51.
66. Konishi T. (1989). Relaxation and Diffusion in Hamiltonian systems with many degrees of freedom. *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **98**, 19.
67. Laskar J. (1989). A numerical experiment on the chaotic behavior of the solar system. *Nature* **338**, 237.
68. Laskar J. (1990). The chaotic motion of the Solar System: A numerical estimate of the size of the chaotic zones. *Icarus* **88**, 266.
69. Laskar J., Froeschlé C. and A. Celletti (1992). The measure of chaos by the numerical analysis of the fundamental frequencies. *Phys. D* **56**, 253.
70. Laskar J. (1993). Frequency analysis of multidimensional systems. *Phys. D* **67**, 257.

71. Laskar J. and Ph. Robutel (1993). The chaotic obliquity of the planets. *Nature* **361**, 608.
72. Laskar J. and Ph. Robutel (2001). High order symplectic integrators for perturbed Hamiltonian systems. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **80**, 39.
73. Laskar J., Joutel F. and Ph. Robutel (1993). Stabilization of the Earth's obliquity by the Moon. *Nature* **361**, 615.
74. Lecar M, Franklin F. and M. Murison (1992). On predicting long-term orbital instability: A relation between the Lyapunov time and sudden orbital transitions. *Astron. J.* **104**, 1230.
75. Lemaitre A. (1997). Stable chaos: A first model. In *The dynamical behavior of our planetary system*, R. Dvorak and J.Henrard (eds.), Kluwer, Dordrecht, p. 223.
76. Lemaitre A. and J. Henrard (1988). The 3/2 resonance. *Celest. Mech.* **43**, 91.
77. Lemaitre A. and J. Henrard (1990). On the origin of chaotic behavior in the 2/1 Kirkwood gap. *Icarus* **83**, 391.
78. Le Verrier U.J. (1885). Développement de la fonction qui setr de base au calcul des perturbations des mouvements des planètes. *Ann. Obs. aris. Mém* **1**, 258.
79. Levison H. and M. Duncan (1994). The Long-Term Dynamical Behaviour of Short Period Comets. *Icarus* **108**, 18.
80. Levison H. and M. Duncan (2000). Symplectically integrating close encounters with the Sun. *Astron. J.* **120**, 2117.
81. Levison H.F., Shoemaker E.M. and C.S. Shoemaker (1997). Dynamical Evolution of Jupiter's Trojan asteroids. *Nature* **385**, 42.
82. Lichtenberg A.J. and M.A. Lieberman (1983). *Regular and Stochastic Motion*. Springer-Verlag, New York N.Y. USA.
83. Lyapunov A.M. (1907). Problème général de la stabilité de mouvement. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* **9**, 203. Reproduced in *Ann. Math. Study* **17**, Princeton (1947).
84. Magnenat P. (1985). On the number of effective integrals in galactic models. *Celest. Mech.* **35**, 329.
85. Marchal C. (1990). *The three-body problem*. Elsevier Science, Amsterdam.
86. Marzari F., Davis D and V. Vanzani (1995). Collisional evolution of asteroid families. *Icarus* **113**, 168.
87. Marzari F., Farinella P. and Davis D. (1999). Origin, Aging and Death of asteroid families. *Icarus* **142**, 63.

88. Menichella M., Paolicchi P. and P. Farinella (1996). The main belt as a source of Near-Earth Asteroids. *Earth Moon Plan.* **72**, 133.
89. Michel P. (1997). Effects of linear secular resonances in the region of semimajor axes smaller than 2 A.U. *Icarus* **129**, 348.
90. Michel P. and Ch. Froeschlé (1997). The location of linear secular resonances for semimajor axes smaller than 2 A.U. *Icarus* **128**, 230.
91. Michel P., Migliorini F., Morbidelli A. and V. Zappalà. (2000). The population of Mars-crossers: Classification and Dynamical Evolution. *Icarus* **145**, 332.
92. Michtchenko T.A. and S. Ferraz-Mello (1995). Comparative study of the asteroidal motion in the 3:2 and 2:1 resonances with Jupiter. I. Planar model. *A&A* **303**, 945.
93. Michtchenko T.A. and S. Ferraz-Mello (2001). Resonant Structure of the Outer Solar System in the Neighborhood of the Planets. *Astron. J* **122**, 474.
94. Migliorini F., Michel P., Morbidelli A., Nesvorný D. and V. Zappalà (1998). Origin of Earth-crossing asteroids: a quantitative simulation. *Science* **281**, 2022.
95. Milani A. (1993). The Trojan Asteroid Belt: Proper Elements, Stability, Chaos and Families. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **57**, 59.
96. Milani A. (1994). The dynamics of the Trojan asteroids. In *IAU Symposium 160 - Asteroids, Comets, Meteors III*, A. Milani, M. di Martino and A. Cellino (eds.), p. 159. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
97. Milani A. and Z. Knežević (1990). Secular perturbation theory and computation of asteroid proper elements. *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **49**, 247.
98. Milani A. and Z. Knežević (1992). Asteroid proper elements and secular resonances. *Icarus* **98**, 211.
99. Milani A. and Z. Knežević (1994). Asteroid proper elements and the dynamical structure of the asteroid main belt. *Icarus* **107**, 219.
100. Milani A. and A. M. Nobili (1992). An example of stable chaos in the solar system. *Nature* **357**, 569.
101. Milani A., Nobili A. and Z. Knežević (1997). Stable chaos in the asteroid belt. *Icarus* **125**, 13.
102. Moons M. (1997). Review of the Dynamics in the Kirkwood Gaps. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 175.
103. Moons M. and A. Morbidelli (1993). The main mean motion commensurabilities in the planar circular and elliptic problem. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **57**, 99.

104. Moons M. and A. Morbidelli (1995). Secular resonances inside mean-motion commensurabilities: the 4/1, 3/1, 5/2 and 7/3 cases. *Icarus* **114**, 33.
105. Morais M.H.M. (1999). A secular theory for Trojan-type motion. *A&A* **350**, 318.
106. Morais M.H.M. (2001). Hamiltonian formulation of the secular theory for Trojan-type motion. *A&A* **369**, 677.
107. Morbidelli A. (1999). Origin and evolution of Near Earth Asteroids. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **73**, 39.
108. Morbidelli A. (2002). *Modern Celestial Mechanics: aspects of Solar System Dynamics*. Gordon & Breach, in press.
109. Morbidelli A. and C. Froeschlé (1996). On the relationship between Lyapunov times and macroscopic instability times. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **63**, 227.
110. Morbidelli A. and A. Giorgilli (1995a). Superexponential stability of KAM tori. *J. Stat. Phys.* **78**, 1607.
111. Morbidelli A. and A. Giorgilli (1995b). On a connection between KAM and Nekhoroshev theorems. *Phys. D* **86**, 514.
112. Morbidelli A. and M. Guzzo (1997). The Nekhoroshev Theorem and the Asteroid Belt Dynamical System. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 107.
113. Morbidelli A. and J. Henrard (1991a). Secular resonances in the asteroid belt: theoretical perturbation approach and the problem of their location. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **51**, 131.
114. Morbidelli A. and J. Henrard (1991b). The main secular resonances ν_6 , ν_5 and ν_{16} in the asteroid belt. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **51**, 169.
115. Morbidelli A. and M. Moons (1993). Secular resonances inside mean motion commensurabilities: the 2/1 and 3/2 cases. *Icarus* **103**, 99.
116. Morbidelli A. and D. Nesvorný (1999). Numerous weak resonances drive asteroids towards terrestrial planets orbits. *Icarus* **139**, 295.
117. Moser J. (1962). On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys.* **2**, 1.
118. Murison M., Lecar M. and F. Franklin (1994). Chaotic motion in the outer asteroid belt and its relation to the age of the solar system. *Astron. J.* **108**, 2323.
119. Murray C.D. (1986). The structure of the 2:1 and 3:2 jovian resonances. *Icarus* **65**, 70.

120. Murray C.D. and S.F. Dermott (2000). *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press.
121. Murray N., Hansen B., Holman M. and S. Tremaine (1998a). Migrating Planets. *Science* **279**, 69.
122. Murray N. and M. Holman (1997). Diffusive chaos in the outer asteroid belt. *Astron. J.* **114**, 1246.
123. Murray N., Holman M. and M. Potter (1998b). On the origin of chaos in the asteroid belt. *Astron. J.* **116**, 2583.
124. Murray N. and M. Holman (1999). The origin of chaos in the outer solar system. *Science* **283**, 1877.
125. Murray N.W., Lieberman M.A. and A.J. Lichtenberg (1985). Corrections to quasi-linear diffusion in area-preserving mappings. *Phys. Rev. A* **32**, 2413.
126. Nakai H. and H. Kinoshita (1985). Secular perturbations of asteroids in secular resonances. *Celest. Mech.* **36**, 391.
127. Nautical Almanac Office, U.S. Naval Observatory 2000. *The Astronomical Almanac*. U.S. Government Printing Office, Section E3.
128. Nautical Almanac Office, U.S. Naval Observatory 2001. *The Astronomical Almanac*. U.S. Government Printing Office, Section E3.
129. Nekhoroshev N.N. (1977). Exponential estimates of the stability time of nearly-integrable Hamiltonian systems. *Russ. Math. Surveys* **32**, 1.
130. Nekhoroshev N.N. (1979). Exponential estimates of the stability time of nearly-integrable Hamiltonian systems II. *Trudy Sem. Petrovsk.* **5**, 5.
131. Nesvorný D. and L. Dones (2001). How long-lived are the Hypothetical Trojan Populations of Saturn, Uranus and Neptune? *Icarus*, in press.
132. Nesvorný D. and S. Ferraz-Mello (1997a). Chaotic diffusion in the 2/1 asteoroidal resonance: an application of the frequency map analysis. *A&A* **320**, 672.
133. Nesvorný D. and S. Ferraz-Mello (1997b). On the asteroidal populations of the first order jovian resonances. *Icarus* **130**, 247.
134. Nesvorný D. and A. Morbidelli (1998a). Three-body mean motion resonances and the chaotic structure of the asteroid belt. *Astron. J* **116**, 3029.
135. Nesvorný D. and A. Morbidelli (1998b). An Analytic Model of Three-Body Mean Motion Resonances. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **71**, 243.

136. Nesvorný D., Morbidelli A., Vokrouhlický D., Bottke W. and M. Brož (2001). The Flora Family: a Case of the Dynamically Dispersed Collisional Swarm?. *Icarus*, in press.
137. Nobili A.M., Milani A. and M. Carpino (1989). Fundamental frequencies and small divisors in the orbits of the outer planets. *A. & A.* **210**, 313.
138. Öpik E.J. (1976). *Interplanetary Encounters*. Elsevier Science, New York, N.Y. U.S.A.
139. Oseledec V.I. (1968). The multiplicative ergodic theorem: the Lyapunov characteristic numbers of dynamical systems. *Trudy Mosk. Mat. Obsch.* **19**, 179. English translation in *Trans. Mosc. Soc.* **19**, 179 (1968).
140. Peirce B. (1849). Development of the perturbative function of planetary motion. *Astron. J.* **1**, 1.
141. Pilat-Lohinger E., Dvorak R. and Ch. Burger (1999). Trojans in stable chaotic motion. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **73**, 117.
142. Poincaré H. (1892). *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*. Gautier-Villar, Paris, France.
143. Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T. and B.P. Flannery (1986). *Numerical Recipes*. Cambridge University Press, Cambridge U.K.
144. Rabe E. (1965). Limiting eccentricities for stable Trojan librations. *Astron. J.* **70**, 687.
145. Robutel P. and J. Laskar (2001). Frequency Map and Global Dynamics in the Solar System I. *Icarus* **152**, 4.
146. Roy A.E. (1988). *Orbital motion*. Adam Hilger, Bristol.
147. Saha P. and S. Tremaine (1992). Symplectic integrators for solar system dynamics. *Astron. J.* **104**, 1633.
148. Scholl H. and Ch. Froeschlé (1990). Orbital evolution of known asteroids in the ν_5 resonance region. *A&A* **227**, 255.
149. Shevchenko I.I. (1998). On the recurrence and Lyapunov time scales of the motion near the chaos border. *Phys. Lett. A* **241**, 53.
150. Shoemaker E.M., Shoemaker C.S. and R.F. Wolfe (1989). Trojan asteroids: Population dynamics, structure and origin of the L4 and L5 swarms. In *Asteroids II*, R.P. Binzel, T. Gehrels and M.S. Matthews (eds.), University of Arizona Press, Tuscon, p. 487.

151. Shlezinger M.F., Zaslavsky G.M. and J. Klefater (1993). Strange Kinetics. *Nature* **363**, 31.
152. Šidlichovský M. (1990). Tables of the disturbing function for resonant asteroids, *Czech. Acad. Sci.*, Prague, Czech Republic.
153. Šidlichovský M. (1999). On stable chaos in the asteroid belt. *Celest. Mech. Dyn. Astron.* **73**, 77.
154. Šidlichovský M. and D. Nesvorný (1997). Frequency modified Fourier transform and its application to asteroids. *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **65**, 137.
155. Skokos Ch. and A. Dokoumetzidis (2001). Effective stability of the Trojan asteroids. *A&A* **367**, 729.
156. Smale S. (1963). Diffeomorphisms with many periodic orbits. In *Differential and combinatorial topology*, S.S. Cairns (ed.), Princeton University Press, Princeton, New Jersey U.S.A., p. 63.
157. Sussman G.J. and J. Wisdom (1988). Numerical evidence that the motion of Pluto is chaotic. *Science* **241**, 433.
158. Sussman G.J. and J. Wisdom (1992). Chaotic evolution of the Solar System. *Science* **257**, 56.
159. Szebehely V. (1967). *Theory of Orbits*. Academic Press, New York.
160. Tancredi G., Sánchez A. and F. Roig (2001). A comparison between methods to compute Lyapunov exponents. *Astron. J.* **121**, 1171.
161. Thüring B. (1931). *Astronomische Nachrichten* **238**, 357.
162. Tsonis A. (1992). *Chaos: From Theory to Applications*. Plenum Press, New York.
163. Varvoglis H. (1993). Large orbital eccentricities and close encounters at the 2:1 resonance of a dynamical system modelling asteroidal motion. *A&A* **275**, 301.
164. Varvoglis H. and A. Anastasiadis (1996). Transport in Hamiltonian systems and its relationship to the Lyapunov time. *Astron. J.* **111**, 1718.
165. Varvoglis H., Voyatzis G. and H. Scholl (1995). Spectral analysis of asteroidal trajectories in the 2:1 resonance. *A&A* **300**, 591.
166. Voglis N., Contopoulos G. and C. Efthymiopoulos (1999). Detection of ordered and chaotic motion using the dynamical spectra. *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **73**, 211.
167. Vokrouhlický D. and P. Farinella (1998). Orbital evolution of asteroidal fragments into the ν_6 resonance via Yarkovsky effects. *A&A* **335**, 351.

168. Vozikis Ch.L., Varvoglis H. and K. Tsiganis (2000). The power spectrum of geodesic divergences as an early detector of chaotic motion. *A&A* **359**, 386.
169. Wetherill G.W. (1985). Asteroidal source of ordinary chondrites. *Meteoritics* **18**, 1.
170. Wiggins S. (1988). *Global bifurcations and chaos*. Springer-Verlag, New York, N.Y. U.S.A.
171. Wisdom J. (1980). The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behaviour in the restricted three-body problem. *Astron. J* **85**, 1122.
172. Wisdom J. (1982). The origin of the Kirkwood gaps: a mapping for asteroidal motion near the 3/1 commensurability. *Astron. J.* **87**, 577.
173. Wisdom J. (1983). Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap. *Icarus* **56**, 51.
174. Wisdom J. and M. Holman (1991). Symplectic maps for the n-body problem. *Astron. J.* **102**, 1528.
175. Yannacopoulos A.N. and G. Rowlands (1997). Local transport coefficients for chaotic systems. *J. Phys. A: Math. Gen.* **30**, 1503.
176. Yoshida H. (1993). Recent Progress in the Theory and Application of Symplectic Integrators. *Cel. Mech. Dyn. Astr.* **56**, 27.
177. Yoshikawa M. (1987). A simple analytical model for the ν_6 resonance. *Celest. Mech.* **40**, 233.
178. Yoshikawa M. (1990). Motions of asteroids at the Kirkwood Gaps. I - On the 3:1 resonance with Jupiter. *Icarus* **87**, 78.
179. Yoshikawa M. (1991). Motions of asteroids at the Kirkwood Gaps. II - On the 5:2, 7:3 and 2:1 resonances with Jupiter. *Icarus* **92**, 94.
180. Zappalà V., Cellino A., Farinella P. and Z. Knežević (1990) Asteroid Families. I. Identification by hierarchical clustering and reliability assessment. *Astron. J.* **100**, 2030.
181. Zappalà V., Bendoya Ph, Cellino A., Farinella P. and C. Froeschlé (1995). Asteroid families: Search of a 12,487-asteroid sample using two different clustering techniques. *Icarus* **116**, 291.