

ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ ΜΕ ΠΛΑΣΜΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Χρήστος Σ. Τσιρώνης

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ



Θεσσαλονίκη 2007

Αλληλεπίδραση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με πλάσμα και εφαρμογές

Διδακτορική διατριβή

Χρήστος Σ. Τσιρώνης

Τμήμα Φυσικής, Σχολή Θετικών Επιστημών
Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης

Ημερομηνία Εξέτασης: 14 Δεκεμβρίου 2007

Εξεταστική Επιτροπή:

- Καθ. Βλάχος Λούκας (Α.Π.Θ.), Επιβλέπων
- Καθ. Χιτζανίδης Κυριάκος (Ε.Μ.Π.), Μέλος Συμβ. Επιτροπής
- Επ. Καθ. Σαμαράς Θεόδωρος (Α.Π.Θ.), Μέλος Συμβ. Επιτροπής
- Καθ. Βάρβογλης Χαράλαμπος (Α.Π.Θ.)
- Καθ. Βλάχος Νικόλαος (Π.Θ.)
- Επ. Καθ. Βουγιατζής Γεώργιος (Α.Π.Θ.)
- Επ. Καθ. Μελετιλίδου Ευθυμία (Α.Π.Θ.)

Η διατριβή χρηματοδοτήθηκε από το Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης (Association EURATOM-Hellenic Republic) και τη Γενική Γραμματεία Έρευνας και Τεχνολογίας¹.



¹ Το περιεχόμενο αυτής της διδακτορικής διατριβής αποτελεί ευθύνη μόνο του συγγραφέα και δεν αντιπροσωπεύει κατ' ανάγκη τις θέσεις ή τις απόψεις κανενός από τους χορηγούς. Οι χορηγοί δε φέρουν καμία απολύτως ευθύνη για το περιεχόμενο αυτής της διατριβής.

Στη σύζυγό μου

Στους γονείς μου και την αδελφή μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ολοκληρώνοντας τη διατριβή μου, νιώθω την ανάγκη να ευχαριστήσω ορισμένους ανθρώπους η συμβολή των οποίων ήταν σημαντική. Ξεκινώντας, θέλω να ευχαριστήσω όλα τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής για την απόφαση να δεχθούν αυτό το ρόλο και για τα εποικοδομητικά σχόλια στο αρχικό κείμενο της διατριβής.

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα Καθ. Α. Βλάχο για την άρτια καθοδήγηση, την πολύτιμη βοήθεια σε επιστημονικά (και μη) θέματα, καθώς και για την υπομονή του (ειδικά στο αρχικό διάστημα της εκπόνησης). Επίσης, ευχαριστώ τους συνεργάτες στο Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Καθ. Κ. Χιτζανίδη και Ι. Βομβορίδη, Δρ. Ι. Κομίνη και Κ. Αβραμίδα, και Υπ. Δρ. Γ. Αναστασίου και Ν. Μοσχονά, για τη βοήθεια σε θεωρητικά και υπολογιστικά θέματα, αλλά κυρίως για τη μοναδική ατμόσφαιρα που επικρατεί στο εργαστήριο. Ακόμη, ευχαριστώ θερμά τη Μ. Ξειδιανάκη για τη συνεχή υποστήριξη σε διαδικαστικά θέματα σχετικά με το Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης.

Σχετικά με τα Κεφ. 2 και 4 θέλω καταρχήν να ευχαριστήσω τον αείμνηστο Σ. Ιχτιάρογλου. Ο απροσδόκητος χαμός του αποτελεί μια μεγάλη απώλεια για το χώρο της μη γραμμικής δυναμικής. Ευχαριστώ επίσης τους Επ. Καθ. Γ. Βουγιατζή και Ε. Μελετιδίου για τις συμβουλές και τις προτάσεις τους σχετικά με τις αριθμητικές εφαρμογές, και τους Δρ. Κ. Arzner, Η. Isliker, Α. Αναστασιάδη και Ι. Sandberg για τις διορθώσεις στην αρχική μορφή του κειμένου. Η φιλία και η στήριξή τους, ειδικά των τριών τελευταίων, με βοήθησε πολύ να ανταπεξέλθω στις υποχρεώσεις μου κατά τη διάρκεια της εκπόνησης.

Για το Κεφ. 3 ευχαριστώ τους συνεργάτες στο Max-Planck-Institut für Plasmaphysik, Dr. E. Poli, G. V. Pereverzev και Α. Peeters, για την πολύ καλή συνεργασία, τις συμβουλές τους και τη θέρμη με την οποία με περιέβαλαν κατά τις επισκέψεις μου στη Γερμανία. Ευχαριστώ ακόμη τον Dr. E. Westerhof για την παροχή του κώδικα ECPROP, με τον οποίο πραγματοποιήθηκε έλεγχος των αποτελεσμάτων μας, και τους Dr. F. Leuterer και D. Wagner για τα πειραματικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στην τελευταία ενότητα.

Όσον αφορά το Κεφ. 5, ευχαριστώ θερμά τον Επ. Καθ. Θ. Σαμαρά για τη συνεργασία μας στην ολοκλήρωση του τμήματος αυτού της διατριβής. Η βοήθειά του στην κατανόηση των εννοιών και των μηχανισμών που συνδέονται με την υπολογιστική ηλεκτροδυναμική ήταν πολύτιμη.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω όσους με στήριξαν (και με ανέχτηκαν ταυτόχρονα) κατά την περίοδο της εκπόνησης της διατριβής αυτής. Κυρίως τη σύζυγό μου, τους γονείς μου, την αδελφή μου και τους θείους μου, αλλά και κάποιους στενούς μου φίλους που με βοήθησαν με τον έναν ή τον άλλο τρόπο.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διατριβή αυτή ασχολείται με ορισμένες από τις μορφές αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με πλάσμα και τις εφαρμογές τους. Η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων/ιόντων με ηλεκτροστατικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα εμπλέκεται στην περιγραφή και κατανόηση πολλών φαινομένων σχετικών με επιτάχυνση φορτισμένων σωματιδίων και αστάθειες πλάσματος σε αστροφυσικά συστήματα, επιταχυντές και στη θερμοπυρηνική σύντηξη. Σε περιπτώσεις όπου υπάρχει συντονισμός της (μετατοπισμένης κατά Doppler) συχνότητας κύματος με τις αρμονικές της κυκλοτρονικής συχνότητας, η αλληλεπίδραση χαρακτηρίζεται από σημαντική ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του κύματος και των σωματιδίων. Το φαινόμενο αυτό, εκτός από την Αστροφυσική όπου συνδέεται με παρατηρήσεις ακτινοβολίας από επιταχυνόμενα σωματίδια, π.χ. στην ιονόσφαιρα ή κατά τη διάρκεια ηλιακών εκλάμψεων, έχει σημαντικές πειραματικές εφαρμογές τόσο στην παραγωγή υψίσυχνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, π.χ. από γυροτρόνια και free electron lasers, όσο και στη θέρμανση του πλάσματος και τη δημιουργία μη επαγόμενων ρευμάτων στις σύγχρονες μηχανές θερμοπυρηνικής σύντηξης (tokamaks, stellarators).

Η διατριβή επικεντρώνεται περισσότερο στην περιγραφή της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε πλάσμα μέσα σε θερμοπυρηνικούς αντιδραστήρες. Η μελέτη αυτή γίνεται με στόχο την καλύτερη κατανόηση της εξέλιξης του κύματος και του πλάσματος, και δίνει έμφαση (α) στη μη γραμμική αλληλεπίδραση κύματος-σωματιδίου, (β) στο στατιστικό χαρακτήρα του πλάσματος (κινητικά φαινόμενα), (γ) στην πολυπλοκότητα της γεωμετρίας της κυματικής δέσμης. Η προσέγγιση του ψυχρού πλάσματος για την κυματική διάδοση, η γραμμική θεωρία για την απορρόφηση του κύματος και η ημιγραμμική θεωρία για την εξέλιξη της κατανομής των φορτισμένων σωματιδίων του πλάσματος είναι τα πιο διαδεδομένα εργαλεία για τη μελέτη της εξέλιξης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος κατά την αλληλεπίδραση με το πλάσμα και αντίστροφα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η ισχύς των θεωριών αυτών είναι αμφίβολη, και τότε τα κινητικά ή/και τα μη γραμμικά φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο στη χρονική και χωρική εξέλιξη του συστήματος.

Το περιεχόμενο της διατριβής είναι χωρισμένο σε έξι κεφάλαια. Στο πρώτο κεφάλαιο πραγματοποιείται η απαραίτητη εισαγωγή, όπου παραθέτουμε βασικές πληροφορίες για το πλάσμα και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, καθώς και τις κυριότερες εφαρμογές, ενώ στο τελευταίο κάνουμε μια ανακεφαλαίωση με επίκεντρο τα σημαντικότερα αποτελέσματα, καθώς και μια συζήτηση γύρω από τις πιθανές επεκτάσεις της μελέτης. Στο Κεφ. 2 μελετάμε την επίδραση υψίσυχνων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε αραιό μαγνητισμένο πλάσμα, με κυριότερες εφαρμογές στη μελέτη της ιονόσφαιρας. Η υψηλή συχνότητα, της τάξης μεγέθους της κυκλοτρονικής συχνότη-

τας των ηλεκτρονίων, και η χαμηλή πυκνότητα πλάσματος επιτρέπουν να προσεγγίσουμε το πλάσμα ως σύνολο μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων. Ο βασικός άξονας της ανάλυσης είναι η θεωρία Hamilton για την κίνηση φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Εστιάζουμε στα χαρακτηριστικά της ενεργειακής και χωρικής διάχυσης των ηλεκτρονίων κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, υπό την επίδραση κυμάτων μεγάλου αλλά και ενδιαμέσου πλάτους, εκεί όπου η δυναμική στο χώρο φάσεων είναι αρκετά πολύπλοκη.

Στο Κεφ. 3 μελετάται η αλληλεπίδραση κύματος-πλάσματος απ' τη σκοπιά της επίδρασης του πλάσματος στο κύμα. Οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται εδώ είναι οι ασυμπτωτικές μέθοδοι για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης. Η πρωτοτυπία στη συγκεκριμένη μελέτη έγκειται στη γενίκευση της ασυμπτωτικής μεθόδου εντοπισμού δέσμης, ώστε να είναι δυνατή (α) η περιγραφή κυματικών δεσμών με οποιαδήποτε κατανομή ηλεκτρικού πεδίου, (β) η προσομοίωση της διάδοσης και απορρόφησης non-Gaussian δεσμών σε πλάσμα σύντηξης. Δέσμες με non-Gaussian κατανομή ηλεκτρικού πεδίου μπορούν να προκύψουν λόγω δυσλειτουργίας στη διάταξη εκπομπής, ή κατά τη διάδοση στο πλάσμα, σε πειράματα όπου εμπλέκονται κυκλοτρονικά κύματα. Στο πλαίσιο της μεθόδου εντοπισμού δέσμης, καθορίζεται η διαδικασία για τον υπολογισμό της διάδοσης δεσμών γενικού τύπου, η οποία μεταξύ άλλων περιλαμβάνει τη γενίκευση του ορισμού του εύρους δέσμης. Σαν εφαρμογή, μελετάται η διάδοση non-Gaussian δεσμών (α) σε απλοποιημένη γεωμετρία πλάσματος, (β) σε γραμμές εκπομπής ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας για tokamak.

Στα Κεφ. 4 και 5 επιχειρείται η πληρέστερη περιγραφή του συστήματος πλάσμα-κύμα. Η αυτοσυνεπής ανάλυση της μη γραμμικής αλληλεπίδρασης μαγνητισμένου πλάσματος με ηλεκτρομαγνητικά κύματα αποτελεί το περιεχόμενο του Κεφ. 4. Η ανάλυση γίνεται μέσω ενός κλειστού συστήματος συνήθων διαφορικών εξισώσεων, που αποτελείται από τις σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης και την κυματική εξίσωση για το ανυσματικό δυναμικό. Η περιγραφή αυτή επιτρέπει την ανάδειξη φαινομένων λόγω της επίδρασης των περιστροφικών κινήσεων των ηλεκτρονίων στην απορρόφηση του κύματος, τα οποία δεν είναι δυνατό να προσομοιωθούν από τη γραμμική θεωρία ταλαντώσεων πλάσματος. Σαν εφαρμογή, μελετάμε την απορρόφηση κυκλοτρονικού κύματος σε απλοποιημένη γεωμετρία tokamak, για παραμέτρους πλάσματος σχετικές με τα σύγχρονα πειράματα θερμοπυρηνικής σύντηξης.

Η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα υπολογίζεται κυρίως με τις ασυμπτωτικές μεθόδους στο πεδίο των συχνοτήτων, διότι εκεί η επίλυση της κυματικής εξίσωσης παρουσιάζει μικρότερη δυσκολία. Όμως, σε αρκετές περιπτώσεις με μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον, όπως π.χ. η μετατροπή της πόλωσης του κύματος, οι παραδοχές των ασυμπτωτικών μεθόδων παραβιάζονται και η λύση τίθεται υπό αμφισβήτηση. Στο Κεφ. 5 εφαρμόζουμε μια αριθμητική μέθοδο για την επίλυση των εξισώσεων Maxwell χωρίς προσεγγίσεις, τον αλγόριθμο FDTD. Εν γένει, καθώς η FDTD είναι διατυπωμένη στο πεδίο του χρόνου, απαιτείται η έκφραση της απόκρισης του πλάσματος στο πεδίο του χρόνου. Στην περίπτωση όμως που δεν υπάρχει χρονική εξάρτηση στη συχνότητα κύματος και στις παραμέτρους του πλάσματος, αποδεικνύουμε ότι η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί απευθείας με χρήση της έκφρασης του διηλεκτρικού τανυστή στο πεδίο συχνοτήτων.

ABSTRACT

This thesis deals with some of the forms of interaction of high-frequency electromagnetic waves with plasmas and their applications. The interaction of ions/electrons with electrostatic and electromagnetic waves plays a key role in the description and understanding of many phenomena relevant to charged particle acceleration and plasma instabilities in astrophysical systems, accelerators and controlled thermonuclear fusion devices. In cases where there is a resonance of the Doppler-shifted wave frequency with the cyclotron harmonics, the interaction is stimulated by significant energy exchange between the wave and the particles. This effect, apart from Astrophysics where it is related to the observations of radiation from accelerated particles, as e.g. in the ionosphere or during solar flares, has important experimental applications both in the production of coherent high-frequency electromagnetic radiation, e.g. from gyrotrons or free electron lasers, as well as in plasma heating and non-inductive current drive in modern fusion devices (tokamaks, stellarators).

The research work in this thesis is mostly focused on the description of the propagation and absorption of electromagnetic radiation in the fusion plasma. The study is performed with the goal of better understanding the evolution of the wave-plasma system, taking into account (a) nonlinear wave-particle interaction, (b) kinetic plasma effects, (c) complexity in the geometry of the wave beam profile. The cold plasma approximation for the wave propagation, the linear theory of plasma oscillations for the cyclotron absorption and the quasilinear theory for the evolution of the particle distribution function are the most popular tools for the study of the wave evolution when interacting with the plasma and vice versa. However, there are cases where the validity of these theories becomes questionable, and the kinetic and/or nonlinear effects play an important role in the spatial and temporal evolution of the system.

The content of this thesis is divided in six chapters. In the first chapter a necessary introduction takes place, where we write about the basic aspects of the plasma state and the electromagnetic waves, together with the most important applications, while in the last one we summarize the most significant results and discuss the possible extensions of the current work. In Chap. 2 we consider the effect of high-frequency electromagnetic waves in underdense magnetized plasmas, with the main applications being for the ionospheric plasma. The high frequency, of the order of the electron-cyclotron frequency, in conjunction with the low plasma density allow for approximating the plasma as an ensemble of non-interacting electrons. The basic course of the analysis goes along the Hamiltonian formalism for

charged-particle motion in electromagnetic fields. We focus on the characteristics of the energetic and spatial diffusion of the electrons across the magnetic field, under the effect of electromagnetic waves of both high and moderate amplitude, where the dynamics of the phase-space is extremely complex.

In Chap. 3 we study the wave-plasma interaction from the viewpoint of the effect of the plasma on the wave. The techniques of interest here are the frequency-domain asymptotic methods for the solution of the wave equation. The novelty in this study lies in the generalization of the beam tracing asymptotic method to include (a) the description of beams with arbitrary electric field profile, (b) the analysis of the propagation and absorption of non-Gaussian beams in fusion plasmas. Non-Gaussian beams may arise due to a malfunction of the wave-launching system, or during the propagation in the plasma, in heating and current drive experiments involving cyclotron waves. In terms of the beam tracing method, we specify the sequence for tracing arbitrary beams, which among others involves the generalization of the definition of the beam width. As an application, we study the properties of the propagation of non-Gaussian beams in (a) simplified plasma geometry, (b) the transmission line of electromagnetic radiation in a tokamak.

Chap. 4 and 5 are oriented to the more thorough description of the plasma-wave system. The self-consistent analysis of the nonlinear interaction of electromagnetic waves with magnetized plasmas is the subject of Chap. 4. The analysis is performed in terms of a closed set of ordinary differential equations, which consists of the relativistic equations of motion and the wave equation for the vector potential. This description allows for the effects of electron-cyclotron motions in the wave absorption, which cannot be simulated in terms of the linear theory for the wave absorption. As an application, we investigate the absorption of an electron-cyclotron wave in simplified tokamak geometry, for parameters relevant to current fusion experiments.

The propagation of electromagnetic waves in the plasma is calculated mainly through asymptotic methods in the frequency domain, because, in Fourier space, the solution of the wave equation appears less difficult. However, in many cases of interest, like e.g. mode conversion, the assumptions of the asymptotic methods break down and the solution becomes questionable. In Chap. 5 we apply a full-wave numerical method for the solution of Maxwell's equations, the FDTD algorithm. In general, since FDTD is formulated in time domain, it is obligatory to express the plasma response in time domain. However, in the case of a constant-frequency wave propagating in a stationary plasma, we establish that the FDTD method can be applied directly using the frequency-domain dielectric tensor.

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΔΗΜΟΣΙΕΥΣΕΩΝ

Μέρος από τα Κεφ. 2-5 της διατριβής δημοσιεύθηκε σε επιστημονικά περιοδικά και σε πρακτικά συνεδρίων/σχολείων:

A. Δημοσιεύσεις σε επιστημονικά περιοδικά

1. *Anomalous transport of magnetized electrons interacting with EC waves*
Tsironis C. and Vlahos L.
Plasma Phys. Control. Fusion **47**, 131 (2005)
2. *Effect of nonlinear wave-particle interaction on electron-cyclotron absorption*
Tsironis C. and Vlahos L.
Plasma Phys. Control. Fusion **48**, 1297 (2006)
3. *Beam tracing description of non-Gaussian wave beams*
Tsironis C., Poli E. and Pereverzev G. V.
Phys. Plasmas **13**, 113304 (2006)
4. *Scattered-field FDTD algorithm for hot anisotropic plasma with application to EC heating*
Tsironis C., Samaras T. and Vlahos L.
To appear in *IEEE Trans. Antennas Propagat.* (2007)

B. Δημοσιεύσεις σε πρακτικά συνεδρίων/σχολείων

1. *Ανώμαλη διάχυση σχετικιστικών ηλεκτρονίων στη μη γραμμική αλληλεπίδραση φορτίου-κύματος*
Τσιρώνης Χ. και Βλάχος Λ.
Πρακτ. 2^ο Σχολείου Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2003)
2. *Anomalous particle transport and self-consistent wave evolution of magnetized electrons interacting with EC waves*
Tsironis C. and Vlahos L.
Proc. IAEA TM-2/05, Trieste-Italy (2005)

3. *Nonlinear and self-consistent treatment of ECRH*
Tsironis C. and Vlahos L.
Proc. 32nd EPS Conference, Tarragona-Spain (2005)
4. *Εφαρμογή της μεθόδου εντοπισμού δέσμης στη διάδοση non-Gaussian κυματικών δεσμών*
Τσιρώνης Χ., Poli E. και Pereverzev G. V.
Πρακτ. 5^{ου} Σχολείου Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2006)
5. *Non-Gaussian EC beam tracing in inhomogeneous anisotropic plasmas*
Tsironis C., Poli E. and Pereverzev G. V.
Proc. EC-14, Santorini-Greece (2006)

Οι παραπάνω δημοσιεύσεις σχετίζονται με τα κεφάλαια της διατριβής ως εξής:

- Κεφ. 2: A1, B1, B2
- Κεφ. 3: A3, B4, B5
- Κεφ. 4: A2, B2, B3
- Κεφ. 5: A4

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<i>Ευχαριστίες</i>	vi
<i>Περίληψη</i>	ix
<i>Abstract</i>	xi
<i>Κατάλογος δημοσιεύσεων</i>	xiii
1. <i>Εισαγωγικές έννοιες</i>	1
1.1 <i>Γενικά περί πλάσματος</i>	1
1.1.1 <i>Το πλάσμα στη φύση και το εργαστήριο</i>	2
1.1.2 <i>Χαρακτηριστικές ιδιότητες και παράμετροι</i>	4
1.1.3 <i>Εφαρμογές σχετικές με το πλάσμα</i>	9
1.2 <i>Θεωρητική περιγραφή του πλάσματος</i>	12
1.2.1 <i>Περιγραφή μέσω μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων</i>	13
1.2.2 <i>Μοντέλο ενός ή πολλών ρευστών</i>	18
1.2.3 <i>Κινητική θεωρία</i>	22
1.3 <i>Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο πλάσμα</i>	26
1.3.1 <i>Από τις εξισώσεις Maxwell στην κυματική εξίσωση</i>	27
1.3.2 <i>Υπολογισμός και είδη κυμάτων στο πλάσμα</i>	32
1.3.3 <i>Εφαρμογές</i>	37
2. <i>Το πλάσμα υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων</i>	41
2.1 <i>Γενικά στοιχεία</i>	41
2.2 <i>Θεωρία Hamilton της αλληλεπίδρασης κύματος-φορτίου</i>	44
2.3 <i>Δυναμική του χώρου φάσεων</i>	49
2.3.1 <i>Επιφάνειες τομής Poincaré</i>	50
2.3.2 <i>Κατανομή ενέργειας των ηλεκτρονίων</i>	52
2.4 <i>Ανώμαλη διάχυση</i>	54
2.4.1 <i>Στατιστικός χαρακτήρας της δύναμης Lorentz</i>	54
2.4.2 <i>Υπολογισμός του εκθέτη διάχυσης</i>	56
2.5 <i>Ακτινοβολία cyclotron από τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια</i>	59
2.5.1 <i>Ισχύς της ακτινοβολίας cyclotron</i>	59
2.5.2 <i>Υπολογισμός του φάσματος</i>	61
2.6 <i>Συμπεράσματα</i>	65

3. Διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυματικών δεσμών στο πλάσμα	69
3.1 Εισαγωγή	70
3.2 Ασυμπτωτικές μέθοδοι για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης	72
3.2.1 Εντοπισμός ακτίνας	73
3.2.2 Μέθοδος μιγαδικής φάσης	74
3.2.3 Εντοπισμός δέσμης	76
3.3 Εντοπισμός δέσμων με γενική κατανομή ηλεκτρικού πεδίου	78
3.4 Παραμετροποίηση non-Gaussian δεσμών	84
3.5 Αριθμητικές εφαρμογές	87
3.5.1 Διάδοση non-Gaussian δέσμης σε επίπεδο πλάσμα	88
3.5.2 Non-Gaussian δέσμες και γραμμές εκπομπής ECRH	94
3.6 Περίληψη-Συμπεράσματα	97
4. Αυτοσυνεπής περιγραφή της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος	99
4.1 Εισαγωγή	100
4.2 Αυτοσυνεπές μοντέλο για την αλληλεπίδραση κύματος-φορτίου	103
4.2.1 Εξισώσεις του μοντέλου	103
4.2.2 Εφαρμογή: Ο μηχανισμός electron-cyclotron maser	106
4.3 Μη γραμμική απορρόφηση EC κύματος σε πλάσμα tokamak	108
4.3.1 Χαρακτηριστικές παράμετροι της προσομοίωσης	109
4.3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα	111
4.4 Περίληψη-Συζήτηση	117
5. Υβριδικό μοντέλο για την πλήρη περιγραφή του συστήματος πλάσμα-κύμα	119
5.1 Αλληλεπίδραση πλάσματος-κύματος: Μια σύνοψη	120
5.2 Γενικά χαρακτηριστικά της μεθόδου FDTD	122
5.2.1 Αλγόριθμος Yee	123
5.2.2 Συνοριακές συνθήκες-Ευστάθεια-Ακρίβεια	127
5.3 Η μέθοδος FDTD για διάδοση σε μαγνητισμένο πλάσμα	129
5.3.1 Αλγόριθμος σκεδαζόμενου πεδίου για ανισότροπο πλάσμα	130
5.3.2 Υπολογισμός της διηλεκτρικής απόκρισης	133
5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα	136
5.5 Συμπεράσματα-Συζήτηση	144
6. Ανακεφαλαίωση-Προοπτικές	147
6.1 Ανακεφαλαίωση-Κύρια σημεία	147
6.2 Προοπτικές και μελλοντικές κατευθύνσεις	150
Παράρτημα	153
A. Επίδραση του ορισμού της Θ_{mn} στις εξισώσεις εντοπισμού δέσμης	155
A.1 Αναλλοίωτο των εξισώσεων για τα $s_{\alpha\beta}$, $\phi_{\alpha\beta}$	155
A.2 Διαφοροποίηση των εξισώσεων για τα $\bar{A}_0$, $\bar{E}_{mn}$	157

<i>B. Οι αριθμητικοί κώδικες NGBT και ECFW1D</i>	<i>159</i>
B.1 Ο κώδικας NGBT	159
B.2 Ο κώδικας ECFW1D	163
 <i>Κατάλογος σχημάτων</i>	 <i>167</i>
<i>Κατάλογος πινάκων</i>	<i>171</i>
<i>Κατάλογος συμβόλων</i>	<i>172</i>
<i>Κατάλογος συντομογραφιών</i>	<i>178</i>
<i>Βιβλιογραφία</i>	<i>181</i>
<i>Βιογραφικό σημείωμα</i>	<i>189</i>

1. ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό δίνουμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία απαραίτητα για τα θέματα που πραγματεύεται η διατριβή. Πιό συγκεκριμένα, παραθέτουμε τον ορισμό της κατάστασης πλάσματος, τις μορφές που συναντάται το πλάσμα και τις χαρακτηριστικές παραμέτρους του. Έπειτα, περιγράφουμε το κομμάτι της φυσικής που μελετά το πλάσμα, τη Φυσική Πλάσματος, εστιάζοντας στις βασικές αρχές του καθενός από τα μοντέλα περιγραφής του πλάσματος: Την περιγραφή μέσω μη αλληλεπιδρώντων φορτισμένων σωματιδίων (θεωρία Newton, Lagrange, Hamilton), την περιγραφή σαν ρευστό (υδροδυναμική, μαγνητοϋδροδυναμική) και τη στατιστική περιγραφή (κινητική θεωρία). Τέλος, δίνουμε εισαγωγικά στοιχεία για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο πλάσμα, ειδικότερα για τα είδη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων ανάλογα με το αν το πλάσμα είναι μαγνητισμένο ή όχι και αν προσεγγίζεται σαν ψυχρό, ρευστό ή κινητικό, καθώς και τις κυριότερες εφαρμογές των κυμάτων με έμφαση στην ελεγχόμενη θερμοπυρηνική σύντηξη.

Η περιγραφή σε αυτό το κεφάλαιο έχει περισσότερο πληροφοριακό χαρακτήρα, χωρίς να δίνεται έμφαση σε εξειδικευμένες λεπτομέρειες. Για περισσότερα στοιχεία ο αναγνώστης παραπέμπεται στη γενική βιβλιογραφία της Φυσικής Πλάσματος. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα βιβλία [Boyd and Sanderson 1969, Gill 1981, Chen 1984, Bittencourt 1986, Βομβορίδης 1990, Goldston and Rutherford 1995, Παντής και Θρουμουλόπουλος 1999, Βλάχος 2000, Πολυμίλης 2000], που αποτελούν και τις πηγές στη συγγραφή του κεφαλαίου αυτού.

1.1 Γενικά περί πλάσματος

Ο όρος "πλάσμα" χρησιμοποιείται για το χαρακτηρισμό μιας μεγάλης ποικιλίας αερίων που ένα ποσοστό των ατόμων τους είναι μερικώς ή ολικώς ιονισμένο. Βέβαια, αυτός ο ορισμός δεν κατατάσσει αυτόματα οποιοδήποτε φορτισμένο αέριο στην κατηγορία του πλάσματος. Για να εμφανίζει μια συλλογή φορτισμένων και ουδέτερων σωματιδίων συμπεριφορά πλάσματος πρέπει να ικανοποιεί συγκεκριμένα κριτήρια, τα οποία θα αναλύσουμε παρακάτω. Η ουσία των κριτηρίων αυτών έγκειται στο ότι (α) στο πλάσμα οι δυνάμεις που προσδιορίζουν την κίνηση των σωματιδίων είναι οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις Coulomb (μεγάλης εμβέλειας), ενώ σε ένα συνηθισμένο αέριο τα μόρια αλληλεπιδρούν μόνο κατά τη διάρκεια των συγκρούσεων, δηλ. με δυνάμεις μικρής εμβέλειας, (β) το πλάσμα εμφανίζει "μακροσκοπική ουδετερότητα", δηλ. σε περιοχές με διαστάσεις αρκετά μεγάλες ώστε να περιέχεται επαρκής αριθμός σωματιδίων, αλλά και αρκετά μικρές σε σχέση με τις χωρικές ανομοιογένειες του πλάσματος, το συνολικό φορτίο είναι πρακτικά μηδέν.

Στη φύση, η ύλη συναντάται σε τρεις καταστάσεις: Στερεά, υγρή και αέρια. Η βασική διάκριση μεταξύ των καταστάσεων έχει να κάνει με την ισχύ των εσωτερικών δυνάμεων ανάμεσα στα σωματίδια, η οποία φθίνει από τα στερεά προς τα αέρια. Σε ποιά κατάσταση βρίσκεται κάποια ουσία καθορίζεται από τη σύγκριση της δυναμικής ενέργειας των σωματιδίων (που αντιστοιχεί στις εσωτερικές δυνάμεις) και της κινητικής ενέργειας (που αντιστοιχεί στη θερμοκρασία). Με αυτή τη λογική, το πλάσμα μπορεί να θεωρηθεί ως μια "τέταρτη" κατάσταση της ύλης, μιας και ένα στερεό με συνεχή αύξηση της θερμοκρασίας περνάει διαδοχικά από τις φάσεις υγρού και αερίου και καταλήγει σε κατάσταση πλάσματος¹. Στις υποενότητες που ακολουθούν παραθέτουμε βασικές πληροφορίες για το πλάσμα: Μια ταξινόμηση του πλάσματος στη φύση και το εργαστήριο ανάλογα με την πυκνότητα και τη θερμοκρασία του, τις χαρακτηριστικές φυσικές ιδιότητες με τις αντίστοιχες παραμέτρους, και τέλος τις κυριότερες εφαρμογές στην αστροφυσική και την τεχνολογία.

1.1.1 Το πλάσμα στη φύση και το εργαστήριο

Πλάσμα μπορεί να δημιουργηθεί από αέριο με διάφορους τρόπους. Καταρχήν, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, με αύξηση της θερμοκρασίας έως ότου καταλήξουμε σε σημαντικό βαθμό ιονισμού (θερμικός ιονισμός). Επιπρόσθετα, πλάσμα μπορεί να σχηματιστεί από διεργασίες ιονισμού που δε σχετίζονται με αύξηση της θερμοκρασίας, οι κυριότερες απ' τις οποίες είναι ο φωτοϊονισμός (photoionization) και οι ηλεκτρικές εκκενώσεις (electrical discharges). Οι διεργασίες αυτές συναντώνται ευρέως στη φύση, αλλά είναι δυνατή και η προσομοίωσή τους στο εργαστήριο με σκοπό την παραγωγή και τη συντήρηση πλάσματος.

Στο φωτοϊονισμό προσπίπτει ακτινοβολία και τα άτομα του αερίου απορροφούν όσα φωτόνια έχουν ενέργεια μεγαλύτερη από την ενέργεια ιονισμού. Το πλεόνασμα ενέργειας μετατρέπεται σε κινητική ενέργεια των προκυπτόντων φορτίων, και συνεπώς καθορίζει τη θερμική ενέργεια του πλάσματος. Ανάλογα με τη χημική σύσταση του αερίου, φωτοϊονισμός μπορεί να προκληθεί από ακτινοβολία διαφορετικού μήκους κύματος, π.χ. υπεριώδη, ακτίνες Χ. Στις ηλεκτρικές εκκενώσεις, ένα ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο εφαρμόζεται σε μερικώς ιονισμένο αέριο, με αποτέλεσμα τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και ιόντα να επιταχύνονται σε ενέργειες αρκετά υψηλές και να ιονίζουν και άλλα άτομα μέσω συγκρούσεων. Ένα χαρακτηριστικό της διεργασίας αυτής είναι ότι τα "ελαφρά" ηλεκτρόνια επιταχύνονται πολύ πιο έντονα από τα "βαρέα" ιόντα, οπότε η θερμοκρασία των ηλεκτρονίων είναι αρκετά μεγαλύτερη από αυτή των ιόντων. Όταν το ηλεκτρικό πεδίο απομακρυνθεί, ο ιονισμός μειώνεται σταδιακά λόγω επανασυνδέσεων, ώσπου να φτάσει σε μια τιμή ισορροπίας συμβατή με τη θερμοκρασία του αερίου. Στο εργαστήριο, η επανασύνδεση συνήθως συμβαίνει τόσο γρήγορα που το πλάσμα εξαφανίζεται τελείως σε κλάσματα δευτερολέπτου.

Στο Σύμπαν, περίπου το 95% της ύλης είναι σε κατάσταση πλάσματος. Στις ατμόσφαιρες των πλανητών ο ιονισμός προκαλείται κατά κύριο λόγο από την επίδραση της ακτινοβολίας από άλλους αστέρες, δηλ. μέσω φωτοϊονισμού. Στη Γη, σε ύψος

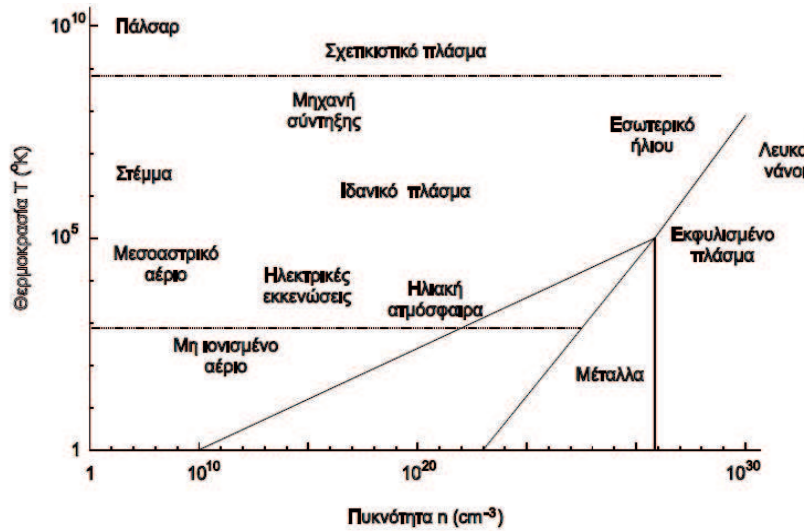
¹ Βέβαια, οι μεταβάσεις στερεό-υγρό-αέριο γίνονται πάνω σε καθορισμένες καμπύλες πίεσης-όγκου, ενώ τέτοια καμπύλη δεν υπάρχει για τη μετάβαση από και προς το πλάσμα.

μεγαλύτερο των 60-70km από την επιφάνεια αρχίζει η ιονόσφαιρα, όπου το ιονισμένο αέριο κυριαρχεί σε περιεκτικότητα. Χαρακτηριστική τιμή της πυκνότητας του πλάσματος στην ιονόσφαιρα είναι $n_p = 10^5 \text{cm}^{-3}$ και της θερμοκρασίας $T_p = 2000\text{K}$. Τα μεγέθη αυτά μεταβάλλονται σημαντικά λόγω της ηλιακής δραστηριότητας, καθώς ο Ήλιος δεν είναι μόνο πηγή ακτινοβολίας αλλά και πλάσματος. Το πλάσμα αυτό ρέει από την επιφάνεια του Ήλιου στο μεσοπλανητικό χώρο και ονομάζεται "ηλιακός άνεμος" (solar wind). Η τυπική τιμή για την ταχύτητα είναι 300km/s, για την πυκνότητα 5cm^{-3} , για τη θερμοκρασία 10^4K και για το μαγνητικό πεδίο 10^{-8}T . Ο ηλιακός άνεμος προσκρούει σε απόσταση περίπου 10^5km από τη Γη στις δυναμικές γραμμές του γεωμαγνητικού πεδίου, οι οποίες συγκρατούν το πλάσμα δημιουργώντας τη λεγόμενη "μαγνητόσφαιρα" (magnetosphere). Εντός της μαγνητόσφαιρας βρίσκονται οι ζώνες ακτινοβολίας Van Allen, εκεί όπου τα παγιδευμένα φορτία εκτελούν πολύπλοκες τροχιές γύρω από το γεωμαγνητικό πεδίο.

Η ατμόσφαιρα του Ήλιου αποτελείται από διάφορα στρώματα. Το πρώτο είναι η χρωμόσφαιρα, με χαρακτηριστική πυκνότητα 10^{10}cm^{-3} και θερμοκρασία 10^4K . Πάνω απ' τη χρωμόσφαιρα βρίσκεται το στέμμα με πυκνότητα 10^8cm^{-3} και θερμοκρασία 10^6K . Το εσωτερικό και οι ατμόσφαιρες πολλών άλλων αστερών βρίσκονται σε κατάσταση πλάσματος. Στο εσωτερικό των κοινών αστερών η πυκνότητα μάζας είναι 10^2gr/cm^3 και η θερμοκρασία 10^7K , ενώ σε αστέρες που βρίσκονται σε πιο προχωρημένο στάδιο εξέλιξης, όπως π.χ. οι λευκοί νάνοι, μπορεί να φτάσει ακόμη και τα 10^7gr/cm^3 (τιμές που αντιστοιχούν σε πυκνότητες ηλεκτρονίων της τάξης των 10^{30}cm^{-3}). Τέλος, ο μεσοαστρικός χώρος αποτελείται από πολύ αραιό πλάσμα, με πυκνότητα μέχρι και 1cm^{-3} και θερμοκρασία 10^4K , ενώ στο Σύμπαν συναντάμε και διάφορα άλλα αστροφυσικά συστήματα όπου υπάρχει πλάσμα, όπως π.χ. υπολείμματα υπερκαινοφανιών (supernovae) και pulsars.

Στο εργαστήριο, το πλάσμα δημιουργείται κύρια από τις ηλεκτρικές εκκενώσεις. Η αρχή αυτή υλοποιείται σε διάφορες διατάξεις, με την πυκνότητα του πλάσματος και τη θερμοκρασία να διαφέρουν από διάταξη σε διάταξη, π.χ. σε λαμπτήρες εκκένωσης η πυκνότητα είναι 10^9cm^{-3} και η θερμοκρασία 10^4K . Ένας εναλλακτικός μηχανισμός είναι αυτός του θερμικού ιονισμού, ο οποίος συναντάται σε πολλά αστροφυσικά συστήματα, π.χ. στο ηλιακό στέμμα όπου η θερμοκρασία του αερίου φτάνει ως και τα 10^7K . Για ουδέτερα μόρια η ενέργεια ιονισμού είναι της τάξεως των μερικών eV, η οποία αντιστοιχεί σε θερμοκρασία ως και 10^5K . Στα μέταλλα και τους ημιαγωγούς το πλάσμα είναι πιο εύκολο να δημιουργηθεί, διότι εκεί περιέχονται ελεύθερα ηλεκτρόνια με πυκνότητες της τάξης των 10^{23}cm^{-3} .

Στο Σχ. 1.1, σε μια συνοπτική απεικόνιση των παραπάνω, παρουσιάζεται μια ταξινόμηση των διαφόρων συστημάτων που αποτελούνται από πλάσμα με βάση την πυκνότητα και τη θερμοκρασία. Όσον αφορά τη χρήση του χαρακτηρισμού "ιδανικό πλάσμα", έτσι συνηθίζεται να αποκαλούμε το μη σχετικιστικό πλάσμα που αποτελείται μόνο από ηλεκτρόνια και ιόντα. Βέβαια, ένα ερώτημα που τίθεται είναι το πότε η μη σχετικιστική προσέγγιση είναι ρεαλιστική. Αυτό συμβαίνει όταν οι θερμικές ταχύτητες είναι αρκετά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός, ή ισοδύναμα όταν $m_s c^2 \approx K_B T_s$ ($s = e, i$ ο αντιστοιχος πληθυσμός). Για τα ηλεκτρόνια προκύπτει ότι πρέπει να είναι $T_e \ll 500\text{MeV}$.



Σχήμα 1.1: Παράμετροι (πυκνότητα και θερμοκρασία) διάφορων φυσικών συστημάτων που αποτελούνται από πλάσμα [Βλάχος 2000].

1.1.2 Χαρακτηριστικές ιδιότητες και παράμετροι

Ορίζοντας το πλάσμα, αναφέραμε ότι η χαρακτηριστική διαφορά από τα κοινά αέρια είναι η ύπαρξη "συλλογικών φαινομένων", δηλ. τον κύριο ρόλο παίζουν οι δυνάμεις Coulomb. Λόγω της μεγάλης εμβέλειας των δυνάμεων αυτών, κάθε φορτίο αλληλεπιδρά συγχρόνως με ένα αρκετά μεγάλο αριθμό άλλων φορτίων, το οποίο, σε συνδυασμό με το ότι τα φορτία ενδέχεται να αλληλεπιδράσουν με εξωτερικά πεδία (αλλά και κινούμενα να παράγουν τα ίδια ηλεκτρομαγνητικό πεδίο), ευθύνεται για την εμφάνιση πληθώρας φυσικών φαινομένων στο πλάσμα σε σχέση με τα συνηθισμένα αέρια. Θα λέγαμε ότι στην περιγραφή του πλάσματος, όπως θα διαπιστώσουμε και παρακάτω, εμπλέκονται όλα σχεδόν τα τμήματα της Κλασικής Φυσικής², ενώ σε μερικές περιπτώσεις εξελίσσονται και σχετικιστικά ή/και κβαντικά φαινόμενα.

Η συλλογικότητα απεικονίζεται στο φαινόμενο της ηλεκτροστατικής θωράχισης Debye. Παρακάτω υιοθετούμε μια στατική περιγραφή, τα αποτελέσματα της οποίας όμως γενικεύονται και για κινούμενα φορτία. Θεωρώντας ότι το πλάσμα βρίσκεται σε ισορροπία, αν εισάγουμε ένα φορτίο $q_T > 0$ αυτό θα έλκει τα ηλεκτρόνια και θα απωθεί τα ιόντα, και τελικά όταν επανέλθει η ισορροπία γύρω από το q_T οι πυκνότητες των πληθυσμών θα δίνονται από την κατανομή Boltzmann

$$n_s(r) = \langle n_p \rangle e^{q_s \Phi(r)/(K_B T_s)},$$

όπου $\langle n_p \rangle$ είναι η μέση πυκνότητα του πλάσματος μακριά απ' το φορτίο q_T και Φ το δυναμικό γύρω από το q_T . Το δυναμικό υπακούει την εξίσωση Poisson

$$\epsilon_0 \nabla^2 \Phi = n_e q_e - \sum_i n_i q_i - q_T \delta(r).$$

² Ενδεικτικά αναφέρουμε τη Μηχανική, τον Ηλεκτρομαγνητισμό και τη Στατιστική Φυσική.

Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις για τις πυκνότητες, με την υπόθεση ότι $|q_e|\Phi \ll K_B T_s$, δηλ. ότι η δυναμική ενέργεια μεταξύ των αντίθετων φορτίων είναι πολύ μικρότερη από την κινητική ενέργεια (οπότε και η επανασύνδεση των ατόμων στο πλάσμα είναι δύσκολη έως αδύνατη), και ορίζοντας το μήκος Debye

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{\langle n_p \rangle}{K_B \epsilon_0} \left(\frac{q_e^2}{T_e} + \sum_i \frac{q_i^2}{T_i} \right), \quad (1.1)$$

η εξίσωση Poisson μακριά από το σημείο $r = 0$ γράφεται σε πολύ απλή μορφή. Η λύση της, αν θεωρήσουμε ότι το δυναμικό μηδενίζεται στο άπειρο, εκφράζεται σε σφαιρικές συντεταγμένες ως ακολούθως

$$\Phi(r) = \frac{q_T}{r} e^{-r/\lambda_D}.$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι η αλληλεπίδραση των φορτίων στο πλάσμα, σαν συνάρτηση της απόστασης, εξασθενεί πιο ραγδαία από ότι στο κενό (όπου $\Phi \sim 1/r$). Όλα τα ηλεκτρικά φορτία κατανέμονται στο χώρο κατά τέτοιο τρόπο ώστε να δημιουργείται ένα μέσο ηλεκτρικό πεδίο που "θωρακίζει" το φορτίο q_T εντός μιας σφαίρας με ακτίνα λ_D , η οποία ονομάζεται σφαίρα Debye. Δηλαδή, ουσιαστικά, το μήκος Debye παρέχει ένα μέτρο της απόστασης μετά την οποία το πεδίο Coulomb ενός φορτίου επιδρά σε άλλα φορτία του πλάσματος, ενώ σε μικρότερες αποστάσεις το πεδίο δε γίνεται αισθητό λόγω της θωράκισης. Το μήκος Debye συνδέεται και με αυτό που ονομάζουμε "μακροσκοπική ουδετερότητα" του πλάσματος. Αν η ουδετερότητα δε διατηρείτο, τότε η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια των φορτίων θα ήταν πολύ μεγάλη σε σχέση με τη θερμική ενέργεια, και συνεπώς (για τις θερμοκρασίες του Σχ. 1.1) το πλάσμα θα κατέρρεε λόγω επανασυνδέσεων. Απουσία εξωτερικών διεγέρσεων, αποκλίσεις από τη μακροσκοπική ουδετερότητα δικαιολογούνται μόνο σε περιοχές με διαστάσεις μικρότερες από λ_D , καθώς σε αυτές ο αριθμός των περιεχόμενων φορτίων δεν είναι αρκετά μεγάλος ώστε στατιστικά να υπάρχει αλληλοεξουδετέρωση. Εν γένει το λ_D είναι πολύ μικρό, πχ. τυπική τιμή στην ιονόσφαιρα τα 10^{-3}m και σε ηλεκτρικές εκκενώσεις τα 10^{-4}m .

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προχωρήσουμε σε ένα ποσοτικό ορισμό του πλάσματος. Εκ των πραγμάτων, ένας τέτοιος ορισμός απαιτεί τη διατύπωση συνθηκών/κριτηρίων για την ύπαρξη πλάσματος. Καταρχήν, είναι αναγκαίο για την ύπαρξη πλάσματος οι χωρικές διαστάσεις να είναι αρκετά μεγαλύτερες από το μήκος Debye, ειδικά δε θα υπάρχει αρκετός χώρος ώστε να αναπτυχθούν συλλογικά φαινόμενα και τα φορτισμένα σωματίδια δε θα εμφανίσουν συμπεριφορά πλάσματος αλλά θα οδηγηθούν στην επανασύνδεση. Αν λοιπόν ℓ_p είναι μια χαρακτηριστική διάσταση του πλάσματος, πρέπει να ισχύει το κριτήριο

$$\ell_p \gg \lambda_D. \quad (1.2)$$

Να σημειώσουμε εδώ ότι συνέπεια του πρώτου κριτηρίου είναι και η μακροσκοπική ουδετερότητα, η οποία αποτυπώνεται μαθηματικά στη σχέση

$$n_e q_e = \sum_i n_i q_i. \quad (1.3)$$

Ένα δεύτερο κριτήριο προκύπτει από το ότι, για να υπάρχουν συλλογικά φαινόμενα, πρέπει ο αριθμός των φορτίων σε μια σφαίρα Debye να είναι αρκετά μεγάλος. Ο αριθμός αυτός είναι ίσος με $4\pi\lambda_D^3\langle n_p \rangle/3$, οπότε το δεύτερο κριτήριο γράφεται

$$K_0 = \langle n_p \rangle \lambda_D^3 \gg 1, \quad (1.4)$$

όπου το K_0 είναι η αποκαλούμενη "παράμετρος πλάσματος". Από μια άλλη οπτική γωνία, το παραπάνω κριτήριο προκύπτει από τη συνθήκη $|q_e|\Phi \ll K_B T_s$ λαμβάνοντας υπόψη ότι (προσεγγιστικά) το δυναμικό είναι $\Phi \approx |q_e|/r$ και η μέση απόσταση μεταξύ των γειτονικών φορτίων είναι $\langle n_p \rangle^{-1/3}$. Με αυτό γίνεται εμφανής η σχέση της παραμέτρου πλάσματος με το λόγο της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια.

Μια άλλη φυσική συμπεριφορά που έμμεσα συνδέεται με τα συλλογικά φαινόμενα είναι οι ηλεκτροστατικές ταλαντώσεις Langmuir. Οι ταλαντώσεις αυτές οφείλονται, όπως θα δούμε, στην εσωτερική δομή του πλάσματος. Με τη βοήθεια ενός απλού μοντέλου μπορούμε να δείξουμε ότι τα φορτία στο πλάσμα εκτελούν περιοδικές κινήσεις και να υπολογίσουμε τη συχνότητά τους. Θεωρούμε ότι το πλάσμα είναι ομογενές και ότι έχει άπειρες διαστάσεις, και επιπρόσθετα ότι μόνο τα ηλεκτρόνια κινούνται ενώ τα ιόντα, επειδή έχουν πολύ μεγαλύτερη μάζα, πρακτικά παραμένουν ακίνητα. Αν ένα στρώμα ηλεκτρονίων μετατοπιστεί κατά $x \ll \ell_p$ (βλ. Σχ. 1.2(α)), θα δημιουργηθεί από το πλάσμα ένα ηλεκτρικό πεδίο επαναφοράς $E(x)$ το οποίο μπορεί να υπολογιστεί από την εξίσωση Poisson

$$E(x) = \frac{n_e |q_e|}{\epsilon_0} x.$$

Η εξίσωση κίνησης των ηλεκτρονίων σε αυτή την περίπτωση είναι

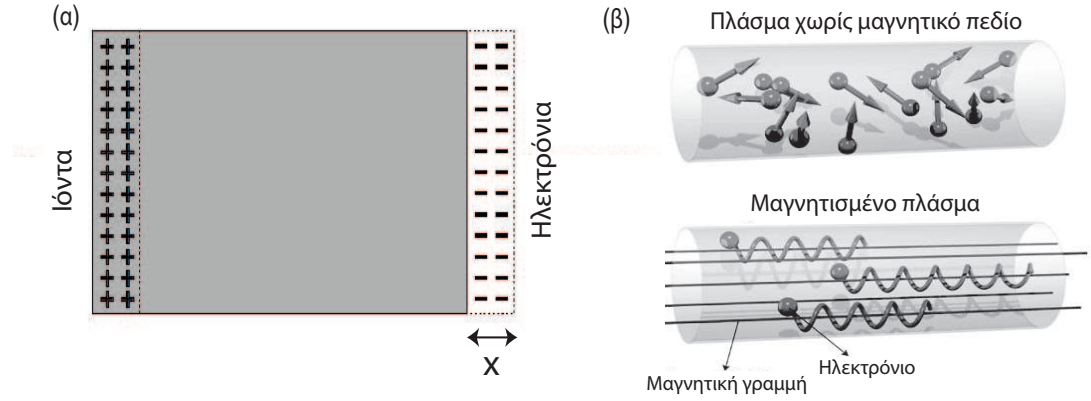
$$m_e \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{n_e q_e^2}{\epsilon_0} x,$$

και περιγράφει μια ταλάντωση του μετατοπισμένου στρώματος ηλεκτρονίων με γωνιακή συχνότητα τη συχνότητα πλάσματος (plasma frequency)

$$\omega_{pe}^2 = \frac{n_e q_e^2}{\epsilon_0 m_e}. \quad (1.5)$$

Με ανάλογα επιχειρήματα μπορεί να βρεθεί και η συχνότητα πλάσματος για τις ηλεκτροστατικές ταλαντώσεις των ιόντων.

Η συχνότητα πλάσματος είναι και αυτή μια αρκετά σημαντική παράμετρος. Θα δούμε σε επόμενη ενότητα ότι, εκτός των άλλων, παίζει πολύ βασικό ρόλο στον καθορισμό του είδους των ηλεκτρομαγνητικών κύματων που μπορούν να διαδοθούν στο πλάσμα. Ακόμη, όπως θα δούμε σε λίγο, η περίοδος των ταλαντώσεων πλάσματος αποτελεί μια χρονική κλίμακα που είναι μικρότερη από εκείνες των μηχανισμών που τείνουν να καταστρέψουν τη συλλογικότητα (π.χ. συγκρούσεις). Συνεπώς, γίνεται αντιληπτό ότι οι ταλαντώσεις αυτές αποτελούν το θεμέλιο λίθο της ευστάθειας της μακροσκοπικής ουδετερότητας του πλάσματος. Με αυτό εννοούμε πως όποτε



Σχήμα 1.2: Σχηματική αναπαράσταση (α) των ταλαντώσεων πλάσματος (κατά Langmuir), (β) των κυκλοτρονικών κινήσεων σε μαγνητισμένο πλάσμα.

το πλάσμα διαταρράσσεται στιγμιαία απ' την ισορροπία, οι συλλογικές δυνάμεις λειτουργούν σαν δυνάμεις επαναφοράς και τείνουν να αποκαταστήσουν την ισορροπία.

Στην περίπτωση όπου το πλάσμα είναι μαγνητισμένο, δηλ. υπάρχει ένα εξωτερικά επιβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, εμφανίζεται ένα νέο είδος περιοδικών κινήσεων. Ενδεικτικά, ας μελετήσουμε την πιό απλή περίπτωση όπου το μαγνητικό πεδίο είναι στατικό και ομογενές στην κατεύθυνση z ($\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$), και δεν υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις. Η κίνηση των φορτισμένων σωματιδίων παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο περιγράφεται απ' τις ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

$$\frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = -\frac{q_s B_0}{m_s} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{v}_{\perp},$$

όπου $\mathbf{v}_{\parallel}$, $\mathbf{v}_{\perp}$ οι αντίστοιχες συνιστώσες της ταχύτητας. Η πρώτη απ' τις παραπάνω εξισώσεις καταδεικνύει ότι η κίνηση κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου είναι ευθύγραμμη ομαλή. Με βάση τη δεύτερη εξίσωση, στο επίπεδο κάθετα του $\mathbf{B}_0$ το φορτίο εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με γωνιακή συχνότητα

$$\omega_{cs} = \frac{q_s B_0}{m_s}, \quad (1.6)$$

η οποία ονομάζεται κυκλοτρονική συχνότητα (cyclotron frequency). Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $r_{Ls} = v_{\perp} / \omega_{cs}$ και ονομάζεται ακτίνα Larmor.

Με βάση τα παραπάνω, η συνολική κίνηση του φορτίου είναι ελικοειδής γύρω από το μαγνητικό πεδίο (βλ. Σχ. 1.2(β)). Η φορά της κίνησης εξαρτάται από το είδος του φορτίου, όπως φαίνεται και απ' την Εξ. (1.6), δηλ. είναι αντίθετη για τα ηλεκτρόνια απ' ότι για τα ιόντα. Και στις δύο περιπτώσεις το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από την κίνηση των φορτίων είναι αντίθετο προς το $\mathbf{B}_0$, οπότε το

πλάσμα συμπεριφέρεται ως διαμαγνητικό υλικό. Δύο βασικές παράμετροι για την περιγραφή της συνολικής κίνησης είναι η θέση του κέντρου της κυκλικής τροχιάς, το οποίο ονομάζεται κέντρο-οδηγός (guiding centre), και η γωνία ελίκωσης (pitch angle) $\vartheta_p = \arctan(v_\perp/v_\parallel)$. Η εξέλιξη των παραμέτρων αυτών καθορίζεται από όλα τα υπόλοιπα πεδία εκτός του $\mathbf{B}_0$. Σε σύγκριση με το μη μαγνητισμένο πλάσμα, οι κινήσεις που εκτελούν τα φορτία είναι πολύ περιορισμένες (γύρω από τις μαγνητικές γραμμές), ενώ επιπρόσθετα, λόγω της κυκλικής κίνησής τους, τα φορτία εκπέμπουν ακτινοβολία cyclotron και επομένως χάνουν ενέργεια (θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο).

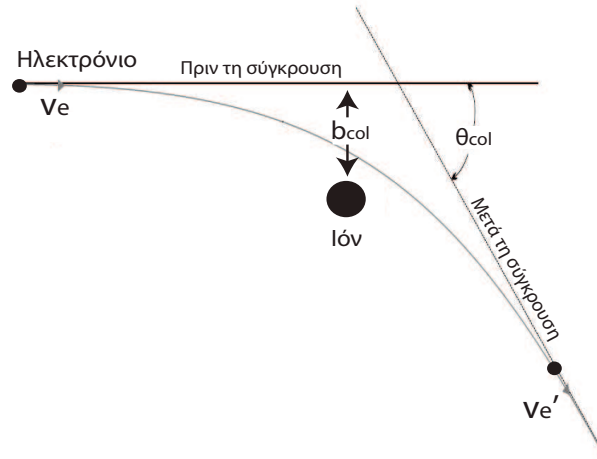
Ας μελετήσουμε τώρα τις συγκρούσεις και το ρόλο τους στο πλάσμα. Τη σημαντικότερη επίδραση έχουν οι συγκρούσεις των "γρήγορων" ηλεκτρονίων με τα "αργά" ιόντα, οι οποίες έχουν συχνότητα που προσδιορίζεται απ' τη σχέση

$$\nu_{ei} = c_{ei} \langle n_p \rangle \langle v_e \rangle,$$

όπου c_{ei} η ενεργός διατομή των συγκρούσεων ηλεκτρονίων-ιόντων και $\langle v_e \rangle$ η μέση ταχύτητα ηλεκτρονίων. Ορίζοντας την παράμετρο κρούσης b_{col} ως την ελάχιστη απόσταση πριν τη σύγκρουση, τα ηλεκτρόνια που συγκρούονται στη μονάδα του χρόνου είναι αυτά που περιέχονται μέσα σε κύλινδρο με όγκο $\pi b_{col}^2 \langle v_e \rangle$, οπότε και η ενεργός διατομή είναι $c_{ei} = \pi b_{col}^2$. Υποθέστε τώρα ότι ένα ηλεκτρόνιο με σταθερή ταχύτητα v_e πλησιάζει ένα ακίνητο ιόν αντίθετου φορτίου (Σχ. 1.3). Χωρίς την επίδραση της δύναμης Coulomb, το ηλεκτρόνιο θα ακολουθούσε ευθύγραμμη τροχιά σε απόσταση b_{col} από το ιόν. Η δύναμη Coulomb $\mathbf{F} = -q_e^2 \hat{\mathbf{r}}/r^2$ ($\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση ηλεκτρονίου-ιόντος) αναγκάζει το ηλεκτρόνιο να εκτραπεί κατά γωνία ϑ_{col} . Η δύναμη επιδρά ισχυρά στο ηλεκτρόνιο όταν αυτό βρίσκεται στη γειτονία του ιόντος, για χρόνο περίπου b_{col}/v_e , και συνεπώς η αλλαγή της ορμής του ηλεκτρονίου είναι $\Delta(m_e v_e) = |Ft| = q_e^2/(b_{col} v_e)$. Αν υποθέσουμε ότι κυριαρχούν οι συγκρούσεις με αμβλεία γωνία εκτροπής, η μεταβολή της ορμής είναι της τάξης $m_e v_e$, δηλ. $\Delta(m_e v_e) = q_e^2/(b_{col} v_e) \approx m_e v_e$ οπότε και $b_{col} = q_e^2/(m_e v_e^2)$. Στην περίπτωση αυτή, θεωρώντας ακόμη ότι τα ηλεκτρόνια κινούνται με μέση ταχύτητα ίση με τη θερμική $v_{te} = (K_B T_e/m_e)^{1/2}$, η συχνότητα συγκρούσεων είναι

$$\nu_{ei} \approx \frac{\pi q_e^4 \langle n_p \rangle}{\sqrt{m_e (K_B T_e)^3}}. \quad (1.7)$$

Ο υπολογισμός της ν_{ei} βασίστηκε σε μια απλή περίπτωση, η οποία όμως καταδεικνύει πλήρως τη σχέση της με τις άλλες παραμέτρους του πλάσματος. Η σύγκριση της συχνότητας συγκρούσεων με τη συχνότητα πλάσματος καθορίζει το ρόλο που θα παίξουν οι συγκρούσεις στο πλάσμα. Χρησιμοποιώντας τις Εξ. (1.5), (1.7) καταλήγουμε στο ότι $\omega_p/\nu_{ei} = K_0 \gg 1$. Συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι (α) σε φαινόμενα τα οποία εξελίσσονται σε χρόνους $t < \omega_p^{-1}$, στην ανάλυση μπορούμε καταρχήν να αγνοήσουμε τις συγκρούσεις, (β) αν στο πλάσμα επικρατήσουν συνθήκες τέτοιες που $\omega_p \approx \nu_{ei}$, τότε τα συλλογικά φαινόμενα εξασθενούν και το πλάσμα αρχίζει να συμπεριφέρεται σαν ουδέτερο αέριο. Να σημειώσουμε ακόμη ότι, σαν αποτέλεσμα των συγκρούσεων, τα φορτία εκπέμπουν ακτινοβολία πέδησης (brehmsstrahlung), οπότε υπάρχουν επιπλέον απώλειες ενέργειας.

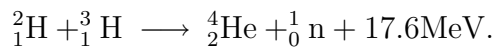
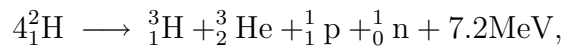


Σχήμα 1.3: Σχηματική αναπαράσταση της σύγκρουσης ηλεκτρονίου-ιόντος.

1.1.3 Εφαρμογές σχετικές με το πλάσμα

Όπως είδαμε στην Υποεν. 1.1.1, το πλάσμα χαρακτηρίζεται κυρίως από τις δύο παραμέτρους n_e και $K_B T_e$ και συναντάται σε αρκετά ευρύ φάσμα των παραμέτρων αυτών³, $[1, 10^{18}] \text{cm}^{-3}$ για την πυκνότητα και $[1, 10^6] \text{eV}$ για τη θερμοκρασία (βλ. Σχ. 1.1). Ιστορικά, οι πρώτες έρευνες στο πλάσμα (κύρια από τους Langmuir και Tonks τη δεκαετία του '20) καθοδηγήθηκαν από την ανάγκη δημιουργίας θαλάμων εκκένωσης (vacuum tubes) για τη δημιουργία ισχυρών ρευμάτων. Οι έρευνες έγιναν σε ασθενώς ιονισμένο πλάσμα με $n_e \in (10^8, 10^{12}) \text{cm}^{-3}$ και $K_B T_e = 2 \text{eV}$, και ήταν οι πρώτες που επέδειξαν πειραματικά το φαινόμενο της θωράκισης Debye μέσω της εμφάνισης ενός μαύρου περικαλύμματος γύρω απ' τα ηλεκτρόδια της συσκευής. Στις μέρες μας, η εκκένωση πλάσματος συναντάται σε λυχνίες υδρογόνου, σε λαμπτήρες φθορισμού αλλά και σε lasers (με πληθώρα ιατρικών εφαρμογών).

Η μοντέρνα Φυσική Πλάσματος άρχισε να διαμορφώνεται από το 1952, με την προσπάθεια να ελεγχθούν στο εργαστήριο οι αντιδράσεις θερμοπυρηνικής σύντηξης. Οι κύριες αντιδράσεις σύντηξης είναι δύο κατηγοριών: Η πρώτη έχει σαν αντιδρώντα μόνο άτομα δευτερίου ^2_1H , ενώ η δεύτερη έχει άτομα δευτερίου και τριτίου ^3_1H



Δεδομένου ότι το δευτέριο υπάρχει άφθονο στο νερό, η επίλυση του προβλήματος της σύντηξης θα σημάνει ουσιαστικά τη δημιουργία ανεξάντλητων πηγών ενέργειας, τουλάχιστον για μεγάλη κλίμακα κατανάλωσης, με μικρό κόστος και υψηλή διαθεσιμότητα. Το βασικό πρόβλημα για την επίτευξη ελεγχόμενης σύντηξης είναι διπλό:

³ Το ότι το φάσμα αυτό είναι αρκετά ευρύ γίνεται αντιληπτό αν αναλογιστεί κανείς π.χ. ότι ο αέρας και το νερό διαφέρουν στην πυκνότητα μόνο κατά τρεις τάξεις μεγέθους.

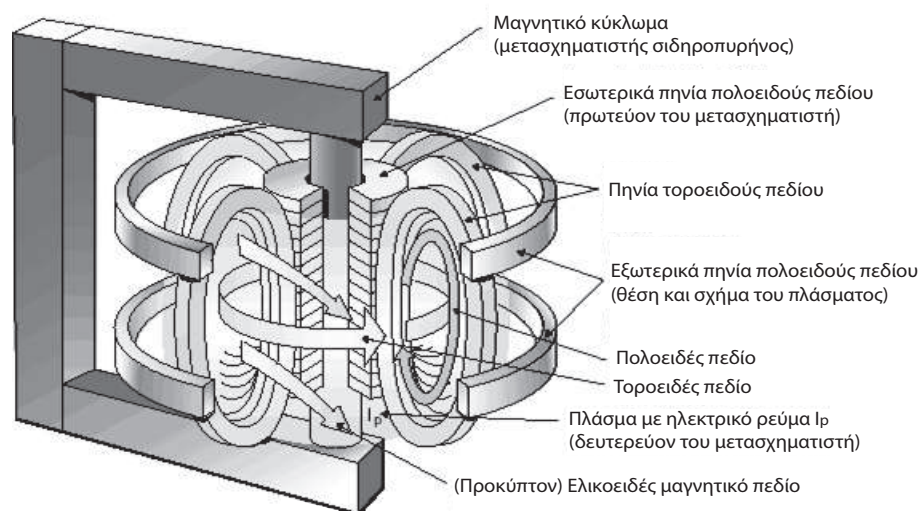
(α) Η δημιουργία πλάσματος με πολύ υψηλή θερμοκρασία, άνω των 10KeV, διότι μόνο τότε η ενεργός διατομή για τις αντιδράσεις σύντηξης είναι επαρκής, (β) Η συγκράτηση του πλάσματος για χρόνο αρκετό ώστε να πραγματοποιηθεί μεγάλος αριθμός αντιδράσεων. Ο χρόνος αυτός, ο οποίος ονομάζεται και χρόνος περιορισμού (confinement time), είναι ίσος με το λόγο της συνολικής ενέργειας του πλάσματος προς την ισχύ που δίνουμε για να το διατηρήσουμε σε υψηλή θερμοκρασία.

Το πρόβλημα της θέρμανσης και περιορισμού του πλάσματος είναι ο κύριος παράγοντας της ραγδαίας ανάπτυξης της Φυσικής Πλάσματος τα τελευταία χρόνια. Σε αυτό το διάστημα έχουν προταθεί και υλοποιηθεί πειραματικά διάφορες διατάξεις (για λεπτομέρειες βλ. [Gill 1981, Παντής και Θρουμουλόπουλος 1999]). Με περισσότερα πλεονεκτήματα εμφανίζονται οι διατάξεις που βασίζονται στο μαγνητικό περιορισμό του πλάσματος, οι οποίες εκμεταλλεύονται το χωρικό περιορισμό των τροχιών των φορτίων παρουσία μαγνητικού πεδίου (όπως δείξαμε στην Υποεν. 1.1.1). Σε αυτή τη διατριβή θα μας απασχολήσει το tokamak, το οποίο και παρουσιάζουμε συνοπτικά. Στη συσκευή αυτή το πλάσμα εμπεριέχεται σε ένα τοροειδή θάλαμο, και ένα μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_t$ εφαρμόζεται εξωτερικά του θαλάμου με χρήση πηνίων τυλιγμένων γύρω απ' αυτόν (βλ. Σχ. 1.4). Τυπικές τιμές για την πολοειδή και τοροειδή ακτίνα στα σύγχρονα tokamak (ο λόγος τους b_{tok} ονομάζεται λόγος όψης (aspect ratio)) είναι αντίστοιχα $r_{pol} = 0.6\text{m}$ και $r_{tor} = 1.4\text{m}$. Το τοροειδές πεδίο είναι ισχυρό (2 – 5T), με αποτέλεσμα οι ακτίνες Larmor των τροχιών να είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις διαστάσεις του tokamak. Αν το πεδίο αυτό ήταν ομογενές, τότε ο συσχετισμός δυνάμεων θα κρατούσε το πλάσμα "κολλημένο" γύρω από τις μαγνητικές γραμμές και θα μιλούσαμε για τέλειο περιορισμό.

Στην πραγματικότητα όμως, λόγω της τοροειδούς καμπυλότητας, το $\mathbf{B}_t$ είναι ανομοιογενές και αυτό οδηγεί τα φορτία σε ολισθήση προς τα τοιχώματα. Αυτός είναι και ο λόγος που στα tokamaks επάγεται ένα τοροειδές ρεύμα με χρήση παλμικού μετασχηματιστή. Το ρεύμα αυτό δημιουργεί ένα πολοειδές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_p$, το οποίο αντιτίθεται στις ολισθήσεις, και το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι τελικά ελικοειδές. Η μέθοδος αυτή βελτιώνει ικανοποιητικά τον περιορισμό αλλά δε λύνει οριστικά το πρόβλημα, διότι η συσκευή δε δύναται να έχει συνεχή λειτουργία. Ακόμη, οι ολισθήσεις δημιουργούν αστάθειες που μπορεί να οδηγήσουν το πλάσμα σε τυρβώδη κατάσταση, ενώ επιπρόσθετα υπάρχουν και απώλειες ενέργειας λόγω ακτινοβολίας bremsstrahlung και cyclotron. Η βελτίωση της λειτουργίας του tokamak είναι στο επίκεντρο της σημερινής έρευνας στο πλάσμα. Τα κυριότερα ευρωπαϊκά πειράματα βρίσκονται στην Αγγλία (Joint European Torus (JET)) και στη Γερμανία (Axisymmetric Divertor EXperiment UpGrade (ASDEX UpGrade ή AUG)), ενώ αναμένεται η δημιουργία του ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) στη Γαλλία⁴, ο οποίος προσδοκάται να αποτελέσει το τελευταίο βήμα πριν τον πρώτο πειραματικό σταθμό παραγωγής ενέργειας από σύντηξη.

Σημαντικότες είναι οι εφαρμογές και στην Αστροφυσική. Η μελέτη της ιονόσφαιρας, του ηλιακού ανέμου και της μαγνητόσφαιρας αφενός έχει βοηθήσει στην κατανόηση φαινομένων σχετικών με την επίδραση του ηλιακού ανέμου και της μα-

⁴ Η τελική συμφωνία υπεγράφη το Νοέμβριο του 2006 στο Παρίσι.



Σχήμα 1.4: Το tokamak, η σύγχρονη πειραματική διάταξη για την επίτευξη ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης μέσω του μαγνητικού περιορισμού πλάσματος.

γνητόσφαιρας στη Γη, όπως π.χ. γεωμαγνητικές καταιγίδες και σέλα, αφετέρου έχει οδηγήσει στην εκμετάλλευση του πλάσματος που περιβάλλει τη Γη για τηλεπικοινωνίες και ραδιοφωνικές μεταδόσεις μέσω της ανάκλασης κυμάτων στην ιονόσφαιρα. Μακριά από τη Γη, είπαμε ήδη ότι το εσωτερικό και η ατμόσφαιρα των αστέρων είναι αρκετά θερμά ώστε να βρίσκονται σε κατάσταση πλάσματος. Για παράδειγμα, η θερμοκρασία στον πυρήνα του Ήλιου είναι περίπου 2KeV και οι θερμοπυρηνικές αντιδράσεις, με πρώτη ύλη το υδρογόνο του πυρήνα, είναι η βασική γεννήτρια της ηλιακής ακτινοβολίας (αυτή ακριβώς είναι η διαδικασία που "αντιγράφεται" από τους αντιδραστήρες σύντηξης). Ακόμη, το πλάσμα εμπλέκεται σε αστροφυσικά προβλήματα όπως η επιτάχυνση κοσμικών ακτίνων, η ακτινοβολία από παλλόμενες ραδιοπηγές (pulsars) και η διάδοση βαρυτικών κυμάτων.

Στις εργαστηριακές εφαρμογές κατατάσσεται και η μαγνητοϋδροδυναμική γεννήτρια. Η παραγωγή ενέργειας βασίζεται στην προώθηση ενός πίδακα πλάσματος ανάμεσα σε δύο ηλεκτρόδια εγκάρσια σε μαγνητικό πεδίο. Η δύναμη Lorentz οδηγεί τα ιόντα να ολισθαίνουν ανοδικά και τα ηλεκτρόνια καθοδικά, φορτίζοντας τα δύο ηλεκτρόδια σε διαφορετικά δυναμικά. Έτσι παράγεται ρεύμα από τα ηλεκτρόδια χωρίς την ανάγκη θερμικού κύκλου, ο οποίος συνεπάγεται απώλειες ενέργειας. Η ίδια αρχή, αλλά αντίστροφα, χρησιμοποιείται στην κατασκευή κινητήρων ιόντος για μακρινές διαπλανητικές αποστολές. Η εφαρμογή διαφοράς δυναμικού σε δύο ηλεκτρόδια δημιουργεί ηλεκτρικό ρεύμα, το οποίο εκτοξεύεται από το σκάφος και λειτουργεί προωστικά. Σημειώστε πως το εκτοξευόμενο πλάσμα πρέπει να είναι ηλεκτρικά ουδέτερο, ειδικά το σκάφος θα φορτιστεί σε αρκετά υψηλό δυναμικό.

Τέλος, σε εφαρμογές που συνδέονται με τη Φυσική Στερεάς Κατάστασης, αναφέρουμε τους ημιαγωγούς. Τα ελεύθερα ηλεκτρόνια και οι οπές στους ημιαγωγούς αποτελούν ένα τύπο πλάσματος παρόμοιο με το ιονισμένο αέριο. Λόγω του ότι οι

ημιαγωγοί έχουν πλεγματική δομή, η συχνότητα συγκρούσεων είναι πολύ μικρότερη απ' ότι κάποιος θα περίμενε για ένα στερεό με πυκνότητα $\sim 10^{23} \text{cm}^{-3}$. Επιπρόσθετα, οι σπές μπορεί να έχουν πολύ μικρή ενεργό μάζα, της τάξης $0.01m_e$, και συνεπώς πολύ μεγάλη κυκλοτρονική συχνότητα ακόμη και για μικρό μαγνητικό πεδίο. Στα πλαίσια της Κλασικής Φυσικής, ο υπολογισμός της παραμέτρου πλάσματος θα έδινε αποτέλεσμα μικρότερο του 1 λόγω της υψηλής πυκνότητας και της χαμηλής θερμοκρασίας. Όμως, συμπεριλαμβάνοντας κβαντικά φαινόμενα (αρχή απροσδιοριστίας), η θερμοκρασία προκύπτει αρκετά μεγάλη ώστε η K_0 να συνιστά πλάσμα.

1.2 Θεωρητική περιγραφή του πλάσματος

Ένα πλήρες και αυτοσυνεπές μοντέλο για την περιγραφή του πλάσματος θα πρέπει να υπολογίζει συγχρόνως: (α) Την κίνηση των σωματιδίων που αποτελούν το πλάσμα υπό την επίδραση των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων που δημιουργούν τα ίδια τα σωματίδια και των όποιων εξωτερικών πεδίων εφαρμόζονται, (β) Την εξέλιξη όλων των πεδίων υπό την επίδραση των σωματιδίων. Όσον αφορά το πρώτο σκέλος, η δυναμική συμπεριφορά των σωματιδίων καθορίζεται από την εξίσωση κίνησης που προκύπτει λ.χ. από τους νόμους του Newton

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.9)$$

Η εξέλιξη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων δίνεται από τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (1.10\alpha)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.10\beta)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.10\gamma)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right), \quad (1.10\delta)$$

όπου οι πυκνότητες φορτίου ρ και ρεύματος $\mathbf{j}$ μπορούν να εκφραστούν σαν

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (1.11\alpha)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\Delta V} \sum_j q_j \mathbf{v}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j), \quad (1.11\beta)$$

δηλ. ως προς τα σωματίδια του πλάσματος που βρίσκονται εντός στοιχειώδους όγκου ΔV γύρω από τη θέση αναφοράς $\mathbf{r}$. Ο όγκος ΔV ορίζεται ως αρκετά μεγάλος ώστε να περιλαμβάνει στατιστικά επαρκή αριθμό φορτίων, αλλά και αρκετά μικρότερος από

τις διαστάσεις του πλάσματος. Αν επρόκειτο να εξεταστεί σύστημα με λίγα σωματίδια, οι παραπάνω εξισώσεις θα ήταν δυνατό να επιλυθούν (αναλυτικά ή αριθμητικά). Αυτό όμως δε συμβαίνει στην περίπτωση του πλάσματος, επειδή η επιλογή μικρού αριθμού σωματιδίων αντιβαίνει στην προϋπόθεση για συλλογικά φαινόμενα. Επομένως, το πλήρες μοντέλο για την περιγραφή του πλάσματος καθίσταται πρακτικά μη υλοποιήσιμο, τουλάχιστον χωρίς σημαντικές απλοποιήσεις που ενδεχομένως θα επηρεάσουν την πληρότητα της περιγραφής.

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε τη συμπεριφορά του πλάσματος σε μια δεδομένη κατάσταση και με καλή ακρίβεια; Επειδή το πλάσμα συναντάται σε ποικίλες περιοχές πυκνότητας και θερμοκρασίας, και σε κάθε μία επικρατούν διαφορετικές φυσικές ιδιότητες, είναι πολύ δύσκολο να υπάρξει ένα ενιαίο μοντέλο σε όλο το εύρος των παραμέτρων. Για παράδειγμα, σε χαμηλές πυκνότητες τα συλλογικά φαινόμενα δεν είναι ισχυρά και τα φορτία κινούνται σχεδόν χωρίς να αλληλεπιδρούν, ενώ σε υψηλές πυκνότητες η κύρια κίνηση είναι συλλογική, δηλ. τύπου ροής. Άλλες φορές το πλάσμα συμπεριφέρεται σαν συλλογή ανεξάρτητων φορτίων, άλλες φορές σαν συλλογή αλληλεπιδρώντων φορτίων και άλλες εμφανίζει και τις δύο συμπεριφορές ταυτόχρονα. Συνέπως, χρειάζεται διαφορετική προσέγγιση ανάλογα με την περιοχή παραμέτρων του εκάστοτε προβλήματος. Εν γένει, σκοπός για ένα μοντέλο είναι να παρέχει τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στο πλάσμα, οι οποίες εκτός από την περιγραφή καθ'αυτού του πλάσματος μπορούν να αξιοποιηθούν στις Εξ. (1.10) για μια αυτοσυνεπή περιγραφή.

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα τρία κύρια μοντέλα περιγραφής του πλάσματος: Το μοντέλο των ανεξάρτητων σωματιδίων (μικροσκοπικό), το μοντέλο του ενός ή των πολλών ρευστών (μακροσκοπικό) και το κινητικό (στατιστικό) μοντέλο. Το πρώτο αντιμετωπίζει το πλάσμα σαν ένα σύστημα σωματιδίων που δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους, και επομένως κινούνται μόνο υπό την επίδραση εξωτερικών δυνάμεων (λ.χ. κύματα). Στο δεύτερο μοντέλο, το πλάσμα προσεγγίζεται είτε ως μείγμα από πολλά αγωγίμα ρευστά, ένα για κάθε διαφορετικό πληθυσμό φορτίων (ηλεκτρόνια, ιόντα), είτε συνολικά ως ένα ρευστό. Εδώ δεν εστιάζουμε στις λεπτομέρειες της κίνησης των φορτίων και η περιγραφή γίνεται στα πλαίσια εξισώσεων παρόμοιων με της Ρευστομηχανικής. Το τρίτο μοντέλο, το οποίο όπως θα δείξουμε εμπεριέχει και τα δύο προηγούμενα, περιγράφει το πλάσμα στα πλαίσια των συναρτήσεων κατανομής των διαφορετικών πληθυσμών, δηλ. της πιθανότητας ένα σωματίδιο να βρίσκεται σε μια συγκεκριμένη κατάσταση στο χώρο φάσεων.

1.2.1 Περιγραφή μέσω μη αλληλεπιδρώντων σωματιδίων

Η πρώτη προσέγγιση ενός προβλήματος στο πλάσμα έγκειται στη διερεύνηση των τροχιών των φορτισμένων σωματιδίων. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι δυνάμεις που παίζουν τον κύριο ρόλο στην εξέλιξη των φορτίων του πλάσματος είναι ηλεκτρομαγνητικές (οι δυνάμεις βαρύτητας είναι πολλές τάξεις μεγέθους μικρότερες), και διακρίνονται σε εσωτερικές (από τα υπόλοιπα φορτία) και εξωτερικές. Στη γενική περίπτωση που οι εσωτερικές δυνάμεις συμπεριλαμβάνονται στη μελέτη, το πρόβλημα παρουσιάζει τις ίδιες πρακτικές δυσκολίες με το πλήρες μοντέλο. Σε περιπτώσεις

όμως όπου (α) τα εξωτερικά πεδία είναι πολύ πιο ισχυρά από τα συλλογικά πεδία (λ.χ. σε αραιό πλάσμα), (β) η ενέργεια που μεταφέρουν τα συλλογικά πεδία στα φορτία είναι σχετικά μικρή (σποραδικές συγκρούσεις), το πρόβλημα απλοποιείται αρκετά διότι οι συλλογικές επιδράσεις μπορούν να αγνοηθούν και η κίνηση των φορτίων να μελετηθεί μόνο υπό την επίδραση των εξωτερικών πεδίων. Παρότι απλοϊκή, η προσέγγιση αυτή εντός των ορίων ισχύος της είναι ακριβής, αλλά και εκτός αυτών παρέχει τη δυνατότητα εξαγωγής ποιοτικών συμπερασμάτων για τη μακροσκοπική συμπεριφορά του πλάσματος σε δεδομένες μαγνητικές γεωμετρίες.

Η μελέτη της κίνησης φορτισμένων σωματιδίων μέσα σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία γίνεται καταρχήν με την εξίσωση Newton (1.9). Για μη σχετικιστικά σωματίδια είναι $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, και η εξίσωση κίνησης εκφράζεται απλά σε σχέση με την ταχύτητα

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.12)$$

Η Εξ. (1.9) καλύπτει και την περίπτωση που το φορτίο είναι σχετικιστικό. Η σχετικιστική διόρθωση για την ορμή είναι $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$, όπου $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ ο παράγοντας Lorentz, και η εξίσωση κίνησης παίρνει τη μορφή

$$\gamma m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{q}{c^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{v} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (1.13)$$

Εν συγκρίσει με τη μη σχετικιστική περίπτωση, η εξίσωση κίνησης περιλαμβάνει επιπλέον τον παράγοντα Lorentz. Ο ρυθμός μεταβολής του γ προσδιορίζεται από τη σχέση ισχύος-δύναμης $d\mathcal{E}/dt = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ ($\mathcal{E} = mc^2\gamma$ η ενέργεια)

$$mc^2 \frac{d\gamma}{dt} = q\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.14)$$

Οι εξισώσεις αυτές, μολονότι έχουν όλη την πληροφορία για την περιγραφή των τροχιών, δεν είναι πάντοτε ο ευκολότερος τρόπος για την επίλυση του προβλήματος. Η διανυσματική μορφή διευκολύνει όταν οι συντεταγμένες είναι καρτεσιανές, όταν όμως χρειάζεται να μεταβούμε σε καμπυλόγραμμο σύστημα, όπως π.χ. σε κινήσεις εντός κεντρικών πεδίων (ώστε να αξιοποιήσουμε την αξιμουθιακή συμμετρία), παράγωγοι όπως η $d\mathbf{v}/dt$ περιλαμβάνουν και όρους που προκύπτουν από τη χρονική μεταβολή των μοναδιαίων διανυσμάτων. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και το ενδεχόμενο εύρεσης ποσοτήτων που παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της κίνησης. Εκτός του ότι η μελέτη απλοποιείται αρκετά, αναλυτικά αλλά και αριθμητικά, η ύπαρξη τέτοιων ποσοτήτων εμπεριέχει σημαντική φυσική πληροφορία. Μέσω των εξισώσεων Newton, η αναζήτηση για σταθερές ποσότητες μπορεί να γίνει μόνο με μαθηματικά τεχνάσματα, όπως π.χ. στη μη σχετικιστική περίπτωση, αν πολλαπλασιάσουμε την Εξ. (1.12) κατά μέλη εσωτερικά με $\mathbf{v}$ θα λάβουμε μια σχέση όμοια της (1.14) που υποδεικνύει ότι η ολική ενέργεια διατηρείται.

Ένας εναλλακτικός τρόπος μελέτης της δυναμικής των σωματιδίων είναι στο πλαίσιο της Αναλυτικής Μηχανικής με τη συνάρτηση Lagrange (ή Lagrangian) $\mathcal{L} = \mathcal{E}_K - \mathcal{E}_\Delta$, όπου $\mathcal{E}_K$, $\mathcal{E}_\Delta$ είναι αντίστοιχα η κινητική και η δυναμική ενέργεια του

σωματιδίου. Το μεγάλο πλεονέκτημα της μεθόδου αυτής είναι η ευελιξία στην επιλογή του συστήματος συντεταγμένων, με μόνη προϋπόθεση αυτές να συνδέονται με αλγεβρική σχέση με τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Αυτό συμβαίνει διότι, εξ' ορισμού, η συνάρτηση Lagrange δε συνδέεται με το διανυσματικό μέγεθος της δύναμης αλλά με το βαθμωτό της ενέργειας. Από τη συνάρτηση Lagrange, η εξίσωση κίνησης προκύπτει μέσω των σχέσεων [Κατσιάρης 1991, Χατζηδημητρίου 2000]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi_j} = 0, \quad (1.15)$$

με χ_j ($j = 1, 2, 3$) τις γενικευμένες συντεταγμένες και $\dot{\chi}_j = d\chi_j/dt$. Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι οι παραπάνω εξισώσεις είναι ισοδύναμες με αυτές του Newton. Όπως είπαμε πριν, ο μόνος περιορισμός είναι η επιλογή των χ_j να είναι τέτοια ώστε οι σχέσεις $\chi_j = \chi_j(x, y, z)$ να είναι επιλύσιμες ως προς x, y, z , δηλ. η Jacobian $\mathcal{J}(\chi_1, \chi_2, \chi_3, x, y, z)$ να είναι μη μηδενική. Η ευελιξία στην επιλογή των χ_j προσφέρει εν μέρει τη δυνατότητα "κατασκευής" σταθερών της κίνησης. Για παράδειγμα, αν είναι δυνατή μια επιλογή τέτοια ώστε $\partial \mathcal{L} / \partial \chi_j = 0$ τότε η ποσότητα $p_j = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\chi}_j$, η οποία αποτελεί τη γενικευμένη ορμή του σωματιδίου, είναι σταθερή.

Η συγκεκριμένη μορφή της συνάρτησης Lagrange για τη μη σχετικιστική κίνηση φορτισμένων σωματιδίων σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία είναι

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 - q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (1.16)$$

όπου Φ , $\mathbf{A}$ είναι αντίστοιχα το βαθμωτό και το διανυσματικό δυναμικό των πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Τα πεδία συνδέονται με τα δυναμικά μέσω των σχέσεων

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (1.17\alpha)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1.17\beta)$$

οι οποίες είναι συνέπεια των εξισώσεων Maxwell (1.10γ) και (1.10β) αντίστοιχα (θα δούμε λεπτομέρειες στην επόμενη ενότητα). Το ότι η μέθοδος του Lagrange βασίζεται στα δυναμικά και όχι στα πεδία αποτελεί ένα επιπρόσθετο πλεονέκτημα διότι, κατά κανόνα, η εξέλιξη των δυναμικών υπακούει σε εξισώσεις απλούστερες από εκείνες των πεδίων. Η συνάρτηση Lagrange για τη σχετικιστική περίπτωση είναι διαφορετική μόνο όσον αφορά την κινητική ενέργεια

$$\mathcal{L} = -\frac{mc^2}{\gamma} - q(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}). \quad (1.18)$$

Η οδός για να βρεθεί η ακριβής μορφή των εξισώσεων κίνησης είναι να εκφραστούν η ταχύτητα και τα δυναμικά συναρτήσει των γενικευμένων συντεταγμένων και να αντικατασταθεί το αποτέλεσμα στη συνάρτηση Lagrange.

Μια προέκταση της θεωρίας Lagrange, η οποία συστηματοποιεί ακόμη περισσότερο τη μελέτη των σωματιδιακών κινήσεων, είναι η θεωρία Hamilton. Η συνάρτηση Hamilton (ή Hamiltonian), η οποία καθορίζει την εξέλιξη του συστήματος,

προκύπτει από την εφαρμογή του δυϊκού μετασχηματισμού Legendre $(\chi_j, \dot{\chi}_j) \rightarrow (\chi_j, \pi_j)$ στη συνάρτηση Lagrange. Επομένως, στα πλαίσια της θεωρίας Hamilton η περιγραφή της κίνησης δε γίνεται μόνο με τις γενικευμένες συντεταγμένες, όπως στη θεωρία Lagrange, αλλά εμπλέκονται και οι γενικευμένες ορμές. Οι συντεταγμένες και οι ορμές μαζί αποκαλούνται κανονικές (ή συζυγείς) μεταβλητές. Η μαθηματική σχέση του μετασχηματισμού είναι

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 \pi_j \dot{\chi}_j - \mathcal{L}, \quad (1.19)$$

και οι εξισώσεις κίνησης για τις κανονικές μεταβλητές προκύπτουν ως εξής

$$\frac{d\chi_j}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_j}, \quad (1.20\alpha)$$

$$\frac{d\pi_j}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \chi_j}. \quad (1.20\beta)$$

Και εδώ είναι εύκολο να διαπιστωθεί η ισοδυναμία των εξισώσεων κίνησης Hamilton, Lagrange και Newton. Από τις παραπάνω εξισώσεις φαίνεται πάλι ότι η κατάλληλη επιλογή των χ_j μπορεί να οδηγήσει σε σταθερές της κίνησης, π.χ. αν είναι τέτοια ώστε $\partial \mathcal{H} / \partial \chi_j = 0$ τότε η συζυγής ορμή π_j είναι σταθερή. Στην περίπτωση αυτή, η συντεταγμένη χ_j ονομάζεται κυκλική (ή αγνοήσιμη). Επιπρόσθετα, αν η συνάρτηση Hamilton δεν εξαρτάται ρητά από το χρόνο, τότε κι αυτή είναι σταθερά της κίνησης.

Με μια πρώτη ματιά, η παραπάνω πρακτική φαίνεται σαν πισωγύρισμα, καθώς οι μεταβλητές κίνησης (και συνεπώς οι διαφορικές εξισώσεις προς επίλυση) γίνονται διπλάσιες σε αριθμό. Όμως, οι κανονικές εξισώσεις είναι 1^{ης} τάξης και η επίλυσή τους είναι απλούστερη σε σχέση με τις εξισώσεις 2^{ης} τάξης του Lagrange. Επιπλέον, η θεωρία Hamilton εμφανίζει πολλά πλεονεκτήματα σε σχέση με τη συστηματοποίηση της μελέτης. Θα αναφέρουμε εν συντομία μερικά απ' αυτά (για περισσότερες λεπτομέρειες ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [Goldstein 1980, Πολυμίλης 2000, Ιχτιάρογλου 2004]): Με την ενοποίηση συντεταγμένων-ορμών, για τη δυναμική περιγραφή του συστήματος, αντί των χώρων θέσεων και ταχυτήτων, καθιερώνεται η χρήση του ενιαίου χώρου (χ_j, π_j) ο οποίος καλείται χώρος φάσεων (phase space). Στο χώρο φάσεων, η εποπτεία της εξέλιξης των καμπυλών είναι καλύτερη απ' ότι αυτή των πραγματικών τροχιών στο χώρο θέσεων, διότι κάθε φασική καμπύλη είναι μοναδική και δεν είναι δυνατό να τέμνεται με άλλες⁵.

Ένα δεύτερο πλεονέκτημα είναι ότι, με την εφαρμογή μετασχηματισμών που διατηρούν την κανονική μορφή των εξισώσεων Hamilton, είναι δυνατόν η συνάρτηση Hamilton να μετασχηματιστεί σε μια συνάρτηση απλής μορφής μέσω της δημιουργίας κυκλικών συντεταγμένων. Οι μετασχηματισμοί αυτοί ονομάζονται κανονικοί και χαρακτηρίζονται από μια γεννήτρια συνάρτηση $\mathcal{F}_k$ (τύπου k) που συνδέει τις αρχικές (παλιές) μεταβλητές με τις τελικές (νέες). Οι βασικές γεννήτριες συναρτήσεις είναι

⁵ Αυτό είναι συνέπεια της μοναδικότητας της λύσης των διαφορικών εξισώσεων (Θεωρ. Cauchy-Lipschitz, βλ. [Dennerly and Krzywicki 1995]).

Τύπος	Γεννήτρια συνάρτηση	Μετασχηματισμός
$k = 1$	$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1(\chi_j, \chi'_j, t)$	$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \chi_j}, \pi'_j = -\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial \chi'_j}, \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial t}$
$k = 2$	$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_2(\chi_j, \pi'_j, t)$	$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \chi_j}, \chi'_j = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \pi'_j}, \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t}$
$k = 3$	$\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}_3(\pi_j, \chi'_j, t)$	$\chi_j = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \pi_j}, \pi'_j = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \chi'_j}, \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial t}$
$k = 4$	$\mathcal{F}_4 = \mathcal{F}_4(\pi_j, \pi'_j, t)$	$\chi_j = -\frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \pi_j}, \chi'_j = \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial \pi'_j}, \mathcal{H}' = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}_4}{\partial t}$

Πίνακας 1.1: Οι τέσσερις βασικοί τύποι κανονικών μετασχηματισμών.

τεσσάρων τύπων, ανάλογα με το ποιές από τις παλιές/νέες συντεταγμένες/ορμές είναι οι αρχικές μεταβλητές. Οι σχέσεις που συνδέουν τις παλιές με τις νέες μεταβλητές (τονούμενες) προσδιορίζονται μέσω της γενικής σχέσης

$$\sum_{j=1}^3 \pi_j \dot{\chi}_j - \mathcal{H} = \sum_{j=1}^3 \pi'_j \dot{\chi}'_j - \mathcal{H}' + \frac{d\mathcal{F}_k}{dt}, \quad (1.21)$$

και για τον καθένα από τους τέσσερις βασικούς τύπους κανονικών μετασχηματισμών δίνονται στον Πίν. 1.1. Εν γένει, ένας κανονικός μετασχηματισμός δε βασίζεται σε έναν μόνο από τους τέσσερις τύπους αλλά είναι συνδυασμός αυτών, δηλ. είναι μικτού τύπου. Στην ιδανική περίπτωση, ζητάμε ο μετασχηματισμός να είναι τέτοιος ώστε $\mathcal{H}' = 0$ και οι εξισώσεις Hamilton στις νέες μεταβλητές να ολοκληρώνονται απευθείας. Η γεννήτρια συνάρτηση για το μετασχηματισμό αυτό βρίσκεται ως λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης Hamilton-Jacobi, η οποία προκύπτει από τη σχέση μετασχηματισμού της συνάρτησης Hamilton (βλ. Πίν. 1.1)

$$\mathcal{H}\left(\chi_j, \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \chi_j}, t\right) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = 0. \quad (1.22)$$

Ας δώσουμε τώρα τη σχετικιστική και μη σχετικιστική έκφραση της συνάρτησης Hamilton για την κίνηση φορτίων σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Στη μη σχετικιστική περίπτωση, οι κανονικές ορμές είναι

$$\pi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}_j} = (m\mathbf{v} + q\mathbf{A}) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\chi}_j},$$

και με αντικατάσταση στην (1.19) μαζί με τις Εξ. (1.16) η $\mathcal{H}$ προκύπτει

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}mv^2 + q\Phi. \quad (1.23)$$

Αντίστοιχα, στη σχετικιστική περίπτωση έχουμε για τις κανονικές ορμές

$$\pi_j = \frac{mc^2}{\gamma^2} \frac{\partial \gamma}{\partial \dot{\chi}_j} + q\mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\chi}_j} = \left(-\frac{\gamma \mathbf{v}}{c^2} + q\mathbf{A}\right) \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \dot{\chi}_j},$$

και με τον ίδιο τρόπο με προηγουμένως βρίσκουμε για την $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H} = mc^2\gamma + q\Phi. \quad (1.24)$$

Σε αντιστοιχία με τη θεωρία Lagrange, για να βρεθούν επακριβώς οι εξισώσεις κίνησης πρέπει στη συνάρτηση Hamilton η ταχύτητα και τα δυναμικά να εκφραστούν ως προς τις κανονικές μεταβλητές χ_j, π_j .

Ήδη έχουμε πει ότι η μελέτη της κίνησης των σωματιδίων δίνει ποιοτικές πληροφορίες για τη συμπεριφορά του πλάσματος σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Ενδεικτικά, αναφέρουμε καταρχήν τις διαφόρου τύπου ολισθήσεις των σωματιδίων λόγω των πεδίων. Από την ανάλυση της συνολικής κίνησης, η ολίσθηση προκύπτει ως κίνηση του κέντρου-οδηγού της τροχιάς. Οι κυριότερες ολισθήσεις είναι λόγω (α) ηλεκτρικού πεδίου (ολίσθηση $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$), (β) ανομοιογένειας ή/και καμπυλότητας του μαγνητικού πεδίου, (γ) χρονικής μεταβολής του ηλεκτρικού πεδίου (ολίσθηση πόλωσης). Σημαντικά συμπεράσματα για τις κινήσεις εξάγονται και από τις αδιαβατικές αμετάβλητες, οι οποίες είναι ποσότητες που μεταβάλλονται αργά στην εξέλιξη της κίνησης. Οι ποσότητες αυτές συνδέονται με περιοδικές κινήσεις που εκτελούν τα φορτία, και συναντούν εφαρμογή στη μελέτη της παγίδευσης του πλάσματος. Η σημαντικότερη αδιαβατική αμετάβλητη είναι η μαγνητική ροπή $M \propto \oint \sum_{j=1}^3 \pi_j d\chi_j$.

1.2.2 Μοντέλο ενός ή πολλών ρευστών

Σε συνθήκες για το πλάσμα τελείως αντιδιαμετρικές με τις παραπάνω, όπου κυριαρχούν τα συλλογικά φαινόμενα και οι ουσιαστικές διαφορές ανάμεσα στις κινήσεις των φορτίων είναι ασήμαντες, όπως λ.χ. συμβαίνει σε πυκνό πλάσμα, είναι προτιμότερο να χρησιμοποιηθεί ένα άλλο μοντέλο που επικεντρώνεται στην περιγραφή της συλλογικής κίνησης (ροής) του πλάσματος και όχι της λεπτομερούς κίνησης κάθε σωματιδίου. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, το πλάσμα θεωρείται ότι απαρτίζεται από ένα ή περισσότερα αλληλοεφαπτόμενα, αγωγίμα και μη σχετικιστικά ρευστά, τα οποία αντιστοιχούν στους διαφορετικούς πληθυσμούς σωματιδίων. Οι εξισώσεις της εξέλιξης των ρευστών έχουν σημαντικό φυσικό περιεχόμενο, καθώς αποτελούν τις μαθηματικές εκφράσεις των νόμων διατήρησης που ισχύουν στο πλάσμα. Ανάλογα με το πλήθος των ρευστών που θεωρούμε, το μοντέλο συναντάται σε διάφορες παραλλαγές τις οποίες και παρουσιάζουμε στη συνέχεια.

Στην απλή περίπτωση που έχουμε να κάνουμε με ηλεκτρόνια και μόνο ένα είδος ιόντων, τότε μιλάμε για το μοντέλο των δύο ρευστών. Εδώ ουσιαστικά χρειαζόμαστε δύο διαφορετικά σύνολα εξισώσεων, ένα για τα ιόντα (θετικά φορτισμένο ρευστό) και ένα για τα ηλεκτρόνια (αρνητικά φορτισμένο ρευστό). Οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος στο πλάσμα διατυπώνονται ως

$$\rho = n_i q_i + n_e q_e,$$

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e,$$

όπου $\mathbf{u}_i$ και $\mathbf{u}_e$ είναι οι ταχύτητες των δύο ρευστών, δηλ. οι μακροσκοπικές ταχύτητες που περιγράφουν τις συλλογικές ροές στο πλάσμα.

Η εξίσωση συνέχειας είναι η πρώτη από τις εξισώσεις του μοντέλου. Απεικονίζει τη διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου (ή ισοδύναμα της μάζας) κατά τις μετακινήσεις των ηλεκτρονίων και των ιόντων εντός του πλάσματος, και συνδέει τις ποσότητες n_i , n_e , $\mathbf{u}_i$ και $\mathbf{u}_e$. Η εξίσωση συνέχειας προκύπτει αν εφαρμόσουμε τον τελεστή $\nabla \cdot$ στην εξίσωση Maxwell (1.10δ), και επιπλέον χρησιμοποιήσουμε την (1.10α). Η εξίσωση αυτή, λαμβάνοντας υπόψη τη μορφή των πυκνοτήτων φορτίου και ρεύματος που δώσαμε παραπάνω, γράφεται για κάθε πληθυσμό

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s) = 0, \quad (1.25)$$

και ουσιαστικά υποδεικνύει ότι κάθε αλλαγή του αριθμού σωματιδίων σε μια περιοχή του πλάσματος συνδέεται με ροή σωματιδίων εκτός του συνόρου της περιοχής.

Η επόμενη εξίσωση του μοντέλου είναι η εξίσωση ισοζυγίου ορμής (momentum balance) και έχει να κάνει με τη διατήρηση της ορμής κατά τις μετατοπίσεις των σωματιδίων στις διαφορετικές διευθύνσεις. Η εξίσωση αυτή είναι αντίστοιχη με μια εξίσωση κίνησης και σχηματίζεται με γνώμονα τις υποθέσεις περί αυτοτελών ροών και αμελητέων κινήσεων κάθετα σε αυτές, λαμβάνοντας επιπλέον υπόψη την αλληλεπίδραση μεταξύ των ρευστών και τη μεταφορά ορμής από κάθε διεύθυνση προς όλες τις άλλες διευθύνσεις. Συγκεκριμένα, η εξίσωση προκύπτει από την (1.12) με πολλαπλασιασμό επί την πυκνότητα και αντικατάσταση της ολικής παραγωγού $\partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, η οποία δίνει το ρυθμό μεταβολής κάθε ποσότητας που κινείται με το ρευστό, ενώ περιλαμβάνονται σαν ξεχωριστοί όροι η δύναμη τριβής $\mathcal{T}$ μεταξύ των δύο ρευστών και η βαθμίδα του τανυστή πίεσης (stress tensor) $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}$ λόγω της μεταφοράς ορμής. Η τελική της μορφή λοιπόν είναι

$$n_s m_s \left[\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} + (\mathbf{u}_s \cdot \nabla) \mathbf{u}_s \right] = n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \mathcal{T}_{ss'} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}_s. \quad (1.26)$$

Η δύναμη της τριβής προέρχεται από την αύξηση της ορμής του ενός πληθυσμού λόγω των συγκρούσεων με τα σωματίδια του άλλου, και μπορούμε να την εκφράσουμε μαθηματικά συναρτήσει της σχετικής ταχύτητας των δύο ρευστών και της ειδικής αντίστασης του πλάσματος (plasma resistivity) η_p

$$\mathcal{T}_{ei} = -\mathcal{T}_{ie} = \eta_p n_e n_i |q_e|^2 (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i).$$

Σαν φυσικό μέγεθος, η ειδική αντίσταση καταδεικνύει το ρόλο των συγκρούσεων στο να περιορίζουν το ρεύμα που μπορεί να επάγει ένα ηλεκτρικό πεδίο στο πλάσμα. Σε πολλές εφαρμογές, οι τιμές των παραμέτρων επιτρέπουν η ειδική αντίσταση να θεωρηθεί πολύ μικρή και η τριβή να αγνοηθεί.

Η πίεση είναι τανυστικό μέγεθος διότι, εν γένει, η κίνηση σε μια διεύθυνση δε μεταφέρει ορμή μόνο κατά μήκος της ίδιας αλλά και κατά μήκος των άλλων διευθύνσεων. Ο τανυστής της πίεσης είναι συμμετρικός και τα στοιχεία του P_{kl} περιγράφουν την κίνηση στη διεύθυνση k σαν αποτέλεσμα της συνιστώσας της ορμής στη διεύθυνση l . Τα διαγώνια στοιχεία του τανυστή λειτουργούν αντίστοιχα με την κλασική υδροστατική πίεση, ενώ τα μη διαγώνια αντιπροσωπεύουν το ιξώδες

(viscosity) του πλάσματος. Το ιξώδες είναι αντιστρόφως ανάλογο της συχνότητας συγκρούσεων, οπότε στην περίπτωση που οι συγκρούσεις είναι σποραδικές μπορεί να υποτεθεί με καλή ακρίβεια ότι η κίνηση σε μια διεύθυνση μεταφέρει ορμή μόνο σε αυτή τη διεύθυνση. Σαν συνέπεια, ο τανυστής πίεσης είναι διαγώνιος ($P_{kl} = 0$ ($k \neq l$)) και η Εξ. (1.26) απλοποιείται αρκετά. Όταν επιπλέον το πλάσμα είναι ισότροπο, δηλ. οι διαφορετικές διευθύνσεις είναι ισοδύναμες από πλευράς φυσικής, τα στοιχεία του $\tilde{\mathbf{P}}$ είναι ίσα μεταξύ τους και ο όρος $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}}$ στην εξίσωση κίνησης μπορεί να αντικατασταθεί με τη βαθμίδα της βαθμωτής ποσότητας $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = P$. Αν τώρα το πλάσμα δεν είναι ισότροπο (λ.χ. υπάρχει μαγνητικό πεδίο), τότε η μόνη διαφορά είναι ότι τα διαγώνια στοιχεία δεν είναι όλα ίσα μεταξύ τους.

Το σύστημα των Εξ. (1.25), (1.26) παρέχει όλη τη φυσική του ρευστού πλάσματος, όμως δεν είναι κλειστό διότι οι εξισώσεις είναι τέσσερις (από δύο εξισώσεις συνέχειας και κίνησης) αλλά οι άγνωστοι είναι έξι (από δύο πυκνότητες, ταχύτητες και πιέσεις). Για να κλείσει το σύστημα χρειάζονται σχέσεις που να συνδέουν τους τανυστές πίεσης με τα υπόλοιπα μεγέθη. Μια τέτοια σχέση ονομάζεται καταστατική εξίσωση, και έχει τη γενική μορφή $P_{kl} = P_{kl}(n_s, T_s)$. Η ακριβής μορφή εξαρτάται από συγκεκριμένες παραδοχές για την εξέλιξη του πλάσματος (για λεπτομέρειες βλ. [Goldston and Rutherford 1995]). Μαζί με τις καταστατικές εξισώσεις, οι (1.25), (1.26) παρέχουν πλήρη περιγραφή του συνολικού ρευστού, ενώ σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Maxwell μπορούν να αποτελέσουν ένα αυτοσυνεπές μοντέλο πεδίων-ρευστού. Αν τώρα το πλάσμα, εκτός από τους δύο παραπάνω πληθυσμούς, περιέχει ουδέτερα άτομα ή/και άλλα είδη ιόντων, χρειάζονται οι ανάλογες εξισώσεις συνέχειας και κίνησης για κάθε επιπλέον πληθυσμό σωματιδίων. Μιλάμε τότε για ένα μοντέλο περισσότερων των δύο ρευστών, το οποίο όμως είναι παρόμοιο με ότι περιγράψαμε ως εδώ και αλλάζει μόνο ο συνολικός αριθμός των εξισώσεων.

Μετά την προσομοίωση του πλάσματος μέσω αυτοτελών ρευστών, και λόγω του ότι σε ένα πλήρως ιονισμένο πλάσμα οι κινήσεις των σωματιδίων είναι στενά συνδεδεμένες μεταξύ τους και οι οποιεσδήποτε διαφορές ενδέχεται να είναι πολύ μικρές, είναι λογικό το επόμενο βήμα να είναι η μετάβαση σε ένα απλούστερο μοντέλο που περιγράφει το πλάσμα σαν ενιαίο ρευστό. Το μοντέλο αυτό λέγεται μαγνητοϋδροδυναμικό (magnetohydrodynamic (MHD)), και η βάση του είναι ο γραμμικός συνδυασμός των εξισώσεων των πολλών ρευστών σε ένα σύνολο εξισώσεων που περιγράφει το πλάσμα ως ένα ουδέτερο, αγωγίμο ρευστό. Εδώ θα διατυπώσουμε τις εξισώσεις MHD για την απλή περίπτωση του ισότροπου πλάσματος δύο ρευστών χωρίς ιξώδες, όμως η διαδικασία αυτή εύκολα γενικεύεται και για τις άλλες περιπτώσεις. Για το συνολικό ρευστό υιοθετούμε προσεγγιστικά τη μακροσκοπική ουδετερότητα, δηλ. $n_e \approx n_i \approx n_p$ αλλά με $n_e - n_i \neq 0$. Ορίζουμε τις πυκνότητες φορτίου ρ , μάζας ϱ και ρεύματος $\mathbf{j}$, καθώς και την ταχύτητα $\mathbf{u}$ ως

$$\rho = n_i q_i + n_e q_e = |q_e|(n_i - n_e) \neq 0,$$

$$\varrho = n_i m_i + n_e m_e \approx n_p(m_i + m_e),$$

$$\mathbf{j} = n_i q_i \mathbf{u}_i + n_e q_e \mathbf{u}_e \approx n_p |q_e|(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e),$$

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\rho} (n_i m_i \mathbf{u}_i + n_e m_e \mathbf{u}_e) \approx \frac{m_i \mathbf{u}_i + m_e \mathbf{u}_e}{m_i + m_e}.$$

Με κατάλληλο συνδυασμό των παραπάνω ορισμών και των εξισώσεων των δύο ρευστών προκύπτουν οι εξισώσεις MHD. Από το άθροισμα και τη διαφορά των εξισώσεων συνέχειας (1.25) βρίσκουμε τις εξισώσεις συνέχειας για τις πυκνότητες μάζας ρ και φορτίου ρ του ενιαίου ρευστού

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.27\alpha)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (1.27\beta)$$

Εν συνεχεία, με πρόσθεση κατά μέλη των εξισώσεων ισοζυγίου ορμής (1.26), και ορίζοντας ως $P = P_e + P_i$ την ολική πίεση, προκύπτει η αντίστοιχη εξίσωση κίνησης του μαγνητοϋδροδυναμικού ρευστού

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P. \quad (1.28)$$

Έχοντας αξιοποιήσει όλη τη διαθέσιμη γνώση από το μοντέλο των δύο ρευστών, παρατηρούμε ότι το σύστημα (1.27), (1.28) μαζί με την καταστατική εξίσωση έχει τέσσερις εξισώσεις και πέντε αγνώστους (ρ , ρ , $\mathbf{j}$, $\mathbf{u}$, P). Μπορούμε όμως να πάρουμε μια άλλη σημαντική εξίσωση με κατάλληλο συνδυασμό των Εξ. (1.26), πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση για το είδος s με $m_{s'}/\rho|q_e|$ και αφαιρώντας κατά μέλη

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta_p \mathbf{j} + \frac{1}{n_p |q_e|} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla P), \quad (1.29)$$

η οποία και κλείνει το σύστημα των εξισώσεων της μαγνητοϋδροδυναμικής. Ουσιαστικά, η Εξ. (1.29) αποτελεί μια γενίκευση του νόμου του Ohm.

Σε αυτό το σημείο είναι καλό να γίνει μια σύγκριση με την κοινή Υδροδυναμική. Τα συνηθισμένα ρευστά υπακούουν την εξίσωση Navier-Stokes

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right] = -\nabla P + \rho c_{vsc} \nabla^2 \mathbf{u},$$

με c_{vsc} τον κινηματικό συντελεστή ιξώδους. Η μόνη διαφορά με την εξίσωση ισοζυγίου ορμής της μαγνητοϋδροδυναμικής είναι η απουσία των ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων. Σε σχέση με τις Εξ. (1.26) λείπει ο όρος τριβής/συγκρούσεων, καθώς η Navier-Stokes περιγράφει ένα ρευστό και οι δυνάμεις αυτές, ως εσωτερικές, αλληλοαναιρούνται. Ο όρος $\rho c_{vsc} \nabla^2 \mathbf{u}$, ο οποίος περιγράφει την επίδραση του ιξώδους, αντιστοιχεί στην όποια συνεισφορά των συγκρούσεων στον όρο $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{P}} - \nabla P$. Η ύπαρξη συχνών συγκρούσεων είναι βασική παραδοχή για την περιγραφή Navier-Stokes, και λόγω της παραπάνω ομοιότητας αυτό σηματοδοτεί και τα όρια της ισχύος της

θεωρίας ρευστού για το πλάσμα. Θα δούμε παρακάτω ότι η ύπαρξη θερμοδυναμικής ισορροπίας στο πλάσμα προϋποθέτει την ύπαρξη συγκρούσεων. Ακόμη όμως και στην περίπτωση που οι συγκρούσεις είναι σποραδικές, η θεωρία ρευστού μπορεί να περιγράψει καταστάσεις όπου εμφανίζεται η ίδια φυσική συμπεριφορά λόγω κάποιου άλλου παράγοντα, π.χ. ενός ισχυρού μαγνητικού πεδίου που μειώνει τις γρήγορες ευθύγραμμες ροές, αναγκάζοντας τα φορτία σε κυκλικές περιστροφές Larmor.

Τελειώνοντας, αναφέρουμε συνοπτικά μερικές εφαρμογές της θεωρίας ρευστού. Μία σημαντική συνεισφορά, κεντρικής σημασίας για το εργαστηριακό πλάσμα, είναι στη μελέτη της ισορροπίας του πλάσματος. Παρόλο που το γενικό πρόβλημα του καθορισμού της ισορροπίας είναι πολύπλοκο, αρκετή φυσική πληροφορία περιέχεται στο μοντέλο MHD. Με τη βοήθεια της Εξ. (1.28), σε συνδυασμό με τις εξισώσεις Maxwell (1.10β), (1.10γ), μπορούμε να μελετήσουμε την ισορροπία του πλάσματος αν αναλύσουμε τις χρονικά ανεξάρτητες λύσεις ($\partial/\partial t = 0$). Σε αυτό το πλαίσιο, η εξίσωση (1.28) με αντικατάσταση της (1.10γ) παίρνει τη μορφή

$$\nabla \left(P + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Ενδεικτικά, στην περίπτωση όπου δεν υπάρχει διαμήκης μεταβολή του μαγνητικού πεδίου, η παραπάνω εξίσωση δηλώνει ότι στην κατάσταση ισορροπίας το άθροισμα της κινητικής και της μαγνητικής πίεσης του πλάσματος είναι σταθερό. Έτσι, το πεδίο είναι υψηλό σε περιοχές όπου η πίεση είναι χαμηλή και αντίστροφα. Περαιτέρω, να αναφέρουμε ότι μέσω του μοντέλου MHD, όπως και του κινητικού μοντέλου που ακολουθεί, μπορεί να καθοριστεί η ευστάθεια της ισορροπίας του πλάσματος. Ο τρόπος υπολογισμού των ασταθειών και του ρυθμού εξάπλωσής τους είναι παρόμοιος με το γενικό τρόπο υπολογισμού κυμάτων στο πλάσμα, ο οποίος θα μελετηθεί στην επόμενη ενότητα. Άλλες εφαρμογές είναι στη μελέτη της διάχυσης και των ολισθήσεων των ρευστών και της διάχυσης των μαγνητικών γραμμών.

1.2.3 Κινητική θεωρία

Στο μοντέλο που θα μας απασχολήσει σε αυτή την υποενότητα, η περιγραφή είναι μεν στο μικροσκοπικό επίπεδο αλλά έχει στατιστικό χαρακτήρα. Με αυτό εννοούμε ότι δεν ενδιαφέρει η ακριβής θέση και ταχύτητα των σωματιδίων, αλλά μόνο η πιθανότητα να βρίσκονται στη γειτονία μιας συγκεκριμένης κατάστασης στο χώρο φάσεων. Η βάση γι' αυτή την περιγραφή είναι η συνάρτηση κατανομής (distribution function) $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, που δίνει την πυκνότητα πιθανότητας ένα σωματίδιο να βρίσκεται στην κατάσταση $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, δηλ. τη χρονική στιγμή t να βρίσκεται σε μια θέση στο διάστημα $[\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}]$ με ορμή από $\mathbf{p}$ ως $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$. Η ακρίβεια μιας τέτοιας περιγραφής στηρίζεται στο ότι η επίδραση των δυνάμεων από μακρινές αποστάσεις διαρκεί πολύ περισσότερο χρόνο από την αντίστοιχη των κοντινών δυνάμεων. Αυτό επιτρέπει τη "μαζοποίηση" των ισοενεργειακών σωματιδίων σε αποστάσεις $n_p^{-1/3} < |\mathbf{dr}| \ll \lambda_D$, δηλ. τη μη αναγκαιότητα διάκρισης μεταξύ σωματιδίων που έχουν περίπου την ίδια ορμή και βρίσκονται γύρω από μια συγκεκριμένη θέση σε ακτίνα πολύ μικρότερη από τη χαρακτηριστική απόσταση επίδρασης των συλλογικών φαινομένων.

Για να υπολογίσει κανείς τη συνάρτηση κατανομής ξεκινά απ' το γεγονός ότι ο συνολικός αριθμός σωματιδίων σε οποιαδήποτε περιοχή του χώρου φάσεων δεν αλλάζει στο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι οι ρυθμοί εισόδου/εξόδου από το σύνορο της περιοχής και οι αλλαγές λόγω συγκρούσεων έχουν αλληλοαναιρούμενες μεταβολές. Στο πλαίσιο της συνάρτησης κατανομής, ο αριθμός σωματιδίων στο στοιχείο όγκου d^3rd^3p του 6-διάστατου χώρου φάσεων τη χρονική στιγμή t είναι $\int f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3rd^3p$. Με διαφορίση ως προς το χρόνο, και λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$ και την εξίσωση κίνησης (1.9), καταλήγουμε στην κινητική εξίσωση Boltzmann-Vlasov⁶

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{col}. \quad (1.30)$$

Η εξίσωση αυτή είναι γενική (ισχύει και για κλασικά και για σχετικιστικά σωματίδια). Αυτό που αλλάζει σε κάθε περίπτωση είναι η μαθηματική σχέση μεταξύ ταχύτητας και ορμής που πρέπει να αντικαταστήσουμε ώστε να προχωρήσουμε στη λύση. Το άθροισμα των όρων στο αριστερό μέλος αποτελεί την ολική παράγωγο df/dt , ενώ ο όρος στο δεξιό μέλος δίνει τις αλλαγές στην f λόγω συγκρούσεων.

Στην περίπτωση που οι συγκρούσεις είναι σημαντικές, ο καθορισμός του όρου συγκρούσεων παίζει πρωταγωνιστικό ρόλο στην επίλυση της εξίσωσης Boltzmann-Vlasov και τη μορφή της λύσης. Μερικές φορές είναι δυνατό να χρησιμοποιηθούν απλές μαθηματικές εκφράσεις για τον όρο συγκρούσεων, όπως π.χ.

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{col} = -\nu_{ei}(f - f|_{t=0}).$$

Η παραπάνω διατύπωση είναι επαρκής για να περιγράψει το πλάσμα καθώς οδεύει προς τη θερμοδυναμική ισορροπία, αλλά δε μπορεί να περιγράψει π.χ. το φαινόμενο της σκέδασης στο χώρο ταχυτήτων. Όταν είναι επιθυμητή η πλήρης περιγραφή των συγκρούσεων, πρέπει να καταφύγουμε στη διαφορική εξίσωση Fokker-Planck

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{col} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{d\langle \Delta \mathbf{v} \rangle}{dt} f \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} \left(\frac{d\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle}{dt} f \right). \quad (1.31)$$

Στην εξίσωση αυτή, οι μεταβολές της ταχύτητας υπολογίζονται από τις τροχιές των σωματιδίων λύνοντας την αντίστοιχη εξίσωση κίνησης. Οι όροι $d\langle \Delta \mathbf{v} \rangle/dt$ έχουν εν γένει αντίθετη φορά με την ταχύτητα και συνδέονται με τη δυναμική τριβή που προκαλούν οι συγκρούσεις, ενώ οι όροι $d\langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle/dt$ είναι ουσιαστικά συντελεστές διάχυσης, καθώς έχουν την τάση να προκαλούν εξάπλωση των τιμών της ταχύτητας σε μεγάλο εύρος εντός του χώρου ταχυτήτων.

Μια ειδική λύση με μεγάλο φυσικό ενδιαφέρον έχουμε στην περίπτωση που το πλάσμα βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία. Στην κατάσταση αυτή οι μακροσκοπικές παράμετροι δεν αλλάζουν με το χρόνο, ενώ τα μικροσκοπικά μεγέθη έχουν τυχαίες διακυμάνσεις γύρω από μέσες τιμές. Γενικά, το πλάσμα δε βρίσκεται σε μια τέτοια κατάσταση λόγω της επίδρασης εξωτερικών πεδίων ή ασταθειών. Όταν όμως

⁶ Στη βιβλιογραφία συνηθίζεται η κινητική εξίσωση να αναφέρεται σαν εξίσωση Boltzmann όταν συμπεριλαμβάνεται ο όρος συγκρούσεων και σαν Vlasov όταν δε συμπεριλαμβάνεται.

δεν υπάρχει ισχυρή αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, τότε λόγω του τυχαίου χαρακτήρα των συγκρούσεων το πλάσμα τελικά φτάνει στη θερμοδυναμική ισορροπία και παραμένει εκεί. Στην περίπτωση αυτή η κινητική εξίσωση απλοποιείται διότι όλες οι χρονικές παράγωγοι μηδενίζονται, και αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η ισορροπία ισχύει ομογενώς σε όλο το πλάσμα ($\partial f / \partial \mathbf{r} = 0$) η επίλυση είναι αρκετά απλή. Η λύση αυτή είναι γνωστή ως συνάρτηση κατανομής Maxwell, και στη μη σχετικιστική της μορφή (βλ. Σχ. 1.5) γράφεται

$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{\pi^{3/2} m^3 v_t^3} e^{-p^2 / (2m^2 v_t^2)}. \quad (1.32)$$

Όταν το πλάσμα είναι σχετικιστικό, η κατανομή Maxwell έχει τη μορφή

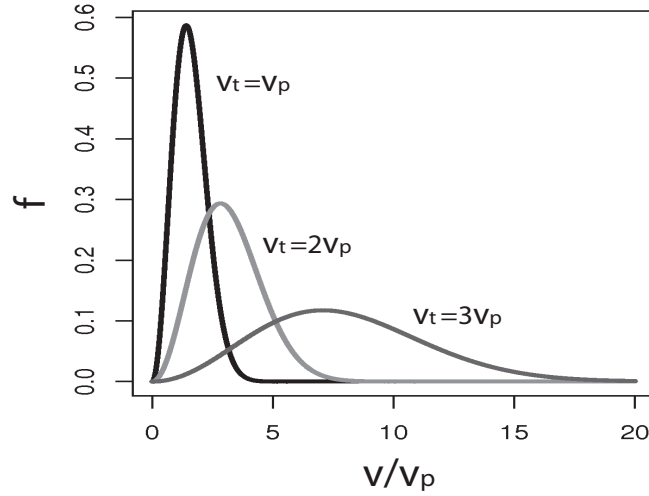
$$f(\mathbf{p}) = \frac{n}{m^3 v_t^3 K_2(v_t^2/c^2)} e^{-\sqrt{p^2 + m^2 c^2} / (2m^2 v_t^2)}, \quad (1.33)$$

όπου $K_2(x)$ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τύπου 2 και 2^{ης} τάξης. Στην κατανομή Maxwell, η θερμοκρασία (εμφανίζεται στη θερμική ταχύτητα) είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος⁷. Εν γένει, λόγω του διαφορετικού ρυθμού συγκρούσεων, σε κάθε πληθυσμό αντιστοιχεί διαφορετική θερμοκρασία και κατά συνέπεια και διαφορετική συνάρτηση κατανομής. Η κατάσταση γίνεται πιο πολύπλοκη όταν το πλάσμα είναι μαγνητισμένο, κι αυτό γιατί, λόγω της μορφής της δύναμης Lorentz, οι δυνάμεις που ασκούνται σε σωματίδια που κινούνται παράλληλα και κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι διαφορετικές. Επομένως, οι ταχύτητες κάθετα και παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο ενδέχεται να ανήκουν σε διαφορετικές κατανομές Maxwell με διαφορετικές θερμοκρασίες $T_{\parallel}$, $T_{\perp}$.

Η κινητική θεωρία παρέχει την όσο το δυνατό πιο πλήρη περιγραφή σε όλο το φάσμα των παραμέτρων. Το στατιστικό μοντέλο είναι πληρέστερο από αυτό των ρευστών διότι μελετά το πλάσμα στο μικροσκοπικό επίπεδο, οπότε συμπεριλαμβάνει φυσικές λεπτομέρειες που η θεωρία ρευστού δε μπορεί λόγω του μακροσκοπικού της χαρακτήρα, αλλά και πιο πρακτικό από τη μικροσκοπική περιγραφή των κινήσεων σωματιδίων. Με την κινητική θεωρία μπορούν να μελετηθούν όλα τα προβλήματα που αναφέραμε σαν εφαρμογές στις προηγούμενες υποενότητες. Πέρα όμως από τις διαπιστώσεις αυτές, το πιο ισχυρό επιχείρημα για την πληρότητα της κινητικής θεωρίας είναι ότι εμπεριέχει στη δομή της τόσο την κινηματική των σωματιδίων όσο και τη θεωρία ρευστού.

Ας μιλήσουμε πρώτα για τη σχέση της κινητικής θεωρίας με την κίνηση του ενός σωματιδίου. Η γενική λύση της εξίσωσης κίνησης (1.9) περιλαμβάνει έξι σταθερές ολοκλήρωσης, έστω $\mathcal{B}_j$ ($j = 1, \dots, 6$), καθώς αυτή είναι 2^{ης} τάξης διαφορική εξίσωση στις τρεις διαστάσεις. Είναι εύκολο ναδειχθεί ότι οποιαδήποτε συνάρτηση των σταθερών κίνησης είναι συνάρτηση κατανομής, δηλ. λύση της κινητικής εξίσωσης. Πράγματι, αντικαθιστώντας μια τέτοια συνάρτηση $f = f(\mathcal{B}_j) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ (μπορούμε από την εξίσωση κίνησης να εκφράσουμε τις $\mathcal{B}_j$ συναρτήσει των $\mathbf{r}, \mathbf{p}, t$) στην Εξ.

⁷ Στις εφαρμογές συνήθως λογίζεται σαν θερμοκρασία το $\mathcal{K}_B T$, μετρούμενο σε eV.



Σχήμα 1.5: Η μη σχετικιστική κατανομή Maxwell για διαφορετικές τιμές της θερμικής ταχύτητας στο πλάσμα.

(1.30) βρίσκουμε ότι την επαληθεύει

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{df}{dt} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial f}{\partial \mathcal{B}_j} \frac{d\mathcal{B}_j}{dt} = 0.$$

Συνεπώς, σε συνδυασμό με τις συγκεκριμένες αρχικές και συνοριακές συνθήκες, η λύση της κινητικής εξίσωσης καθορίζεται επακριβώς από τις τροχιές των σωματιδίων μέσω των σταθερών της κίνησης.

Η σύνδεση με τα μοντέλα ρευστών βρίσκεται στο ότι οι μακροσκοπικές ποσότητες που χαρακτηρίζουν το πλάσμα πηγάζουν ουσιαστικά από μέσες τιμές κατάλληλα ορισμένες με βάση τη συνάρτηση κατανομής. Συγκεκριμένα, η πυκνότητα, η ταχύτητα ροής και ο τανυστής πίεσης ορίζονται ως ακολούθως

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (1.34\alpha)$$

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (1.34\beta)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_s(\mathbf{r}, t) = m_s \int (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) \star (\mathbf{v} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad (1.34\gamma)$$

όπου με τον αστερίσκο συμβολίζουμε το διϊκό γινόμενο (dual product) δύο διανυσμάτων. Σε αυτό το πλαίσιο, οι εξισώσεις των ρευστών προκύπτουν από τις στατιστικές ροπές της εξίσωσης Boltzmann-Vlasov. Ενδεικτικά, για τη ροπή μηδενικής τάξης, ολοκληρώνοντας την Εξ. (1.30) ως προς την ορμή και υπολογίζοντας

τον κάθε όρο ξεχωριστά, καταλήγουμε απευθείας στην εξίσωση της συνέχειας. Οι πρώτοι δύο όροι δίνουν

$$\int \frac{\partial f_s}{\partial t} d^3p = \frac{\partial}{\partial t} \int f_s d^3p = \frac{\partial n_s}{\partial t},$$

$$\int \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} d^3p = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \cdot \int \mathbf{v} f_s d^3p = \nabla \cdot (n_s \mathbf{u}_s),$$

δηλ. τους όρους της εξίσωσης συνέχειας. Ο τρίτος όρος παίρνει τη μορφή

$$\int (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{p}} d^3p = \int \frac{\partial(f_s \mathbf{E})}{\partial \mathbf{p}} d^3p + \int \frac{\partial(f_s \mathbf{v} \times \mathbf{B})}{\partial \mathbf{p}} d^3p - \int f_s \frac{\partial(\mathbf{v} \times \mathbf{B})}{\partial \mathbf{p}} d^3p,$$

και είναι μηδέν διότι (α) τα δύο πρώτα ολοκληρώματα μετατρέπονται σε επιφανειακά, τα οποία είναι μηδενικά καθώς η συνάρτηση κατανομής μηδενίζεται στο άπειρο (β) το τρίτο ολοκλήρωμα είναι επίσης μηδέν διότι η μεταβολή του διανύσματος $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ είναι κάθετη στην ορμή. Στην περίπτωση που θεωρούμε και τον όρο στο δεύτερο μέλος, και αυτός είναι μηδέν διότι οι συγκρούσεις δεν αλλάζουν το συνολικό αριθμό των σωματιδίων. Με ακριβώς αντίστοιχο τρόπο προκύπτει η εξίσωση ισοζυγίου ορμής από τη ροπή πρώτης τάξης, πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση Boltzmann-Vlasov με την ταχύτητα και ολοκληρώνοντας ως προς την ορμή.

1.3 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο πλάσμα

Οι μηχανισμοί διέγερσης και διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα είναι πολύ σημαντικοί για τη μελέτη του πλάσματος. Ένας από τους κυριότερους λόγους είναι ότι τα κύματα αυτά, όταν ανιχνευτούν, αποτελούν χρήσιμα διαγνωστικά για τη δυναμική συμπεριφορά του πλάσματος, τόσο στη φύση όσο και στο εργαστήριο. Η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων διέπεται από τις εξισώσεις Maxwell, οι οποίες αποτελούν και ομαδοποίηση των σημαντικότερων νόμων του Ηλεκτρομαγνητισμού, των νόμων Gauss, Faraday και Ampère. Το μεγαλύτερο μέρος της μελέτης των κυμάτων στο πλάσμα αποτελεί η (άμεση ή έμμεση) επίλυση των εξισώσεων Maxwell σε συνδυασμό με τις εξισώσεις που χαρακτηρίζουν το πλάσμα (λ.χ. κινητική εξίσωση), με σκοπό (α) να εντοπιστούν και να κατηγοριοποιηθούν τα είδη κυμάτων, (β) να διερευνηθούν οι αλληλεπιδράσεις τους με τα φορτία.

Σε μη μαγνητισμένο πλάσμα, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται είναι υψηλής συχνότητας, και λόγω της διέγερσης των ηλεκτρονίων (συγκριτικά η διέγερση των ιόντων είναι αγνοήσιμη) "βλέπουν" το πλάσμα σαν ένα απλό διηλεκτρικό. Η προσθήκη μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα εισάγει ανισοτροπία και αλλάζει τα είδη των κυμάτων που μπορούν να διαδοθούν. Τα χαρακτηριστικά των κυμάτων υψηλής συχνότητας που υπήρχαν απουσία του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλονται σημαντικά, ενώ γίνεται εφικτή η διάδοση και νέων ειδών κυμάτων. Τα κύματα αυτά δεν είναι μόνο σε υψηλές συχνότητες αλλά και σε χαμηλότερες, κοντά στην κυκλοτρονική συχνότητα των ιόντων, δηλ. πλέον η διέγερση των ιόντων είναι υπολογίσιμη. Λόγω

της ανισοτροπίας, η περιγραφή αυτών των φαινομένων είναι μαθηματικά πολύπλοκη, και αυτό εμποδίζει σε αρκετές περιπτώσεις την εξαγωγή φυσικών συμπερασμάτων. Παρόλα αυτά, με διάφορες τεχνικές μπορεί να περιγραφεί επαρκώς το μεγαλύτερο μέρος των κυματικών φαινομένων.

Ένας άλλος παράγοντας που παίζει σημαντικό ρόλο στον καθορισμό των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι η θερμοκρασία του πλάσματος. Όταν η θερμοκρασία είναι πολύ χαμηλή, τότε οι θερμικές κινήσεις των σωματιδίων του πλάσματος δεν επιδρούν στο κύμα και η διάδοση περιλαμβάνει αρκετά από τα χαρακτηριστικά της διάδοσης σε ένα κοινό διηλεκτρικό. Όταν όμως η θερμοκρασία είναι αρκετά υψηλή και οι κινήσεις αυτές είναι σημαντικές, τότε κάνουν την εμφάνισή τους τα λεγόμενα "κινητικά φαινόμενα". Το φυσικό αίτιο είναι ότι σε μια (έστω και κατά προσέγγιση) θερμική κατανομή υπάρχει ένας αριθμός σωματιδίων που κινείται με ταχύτητα ίση ή πολύ κοντά στη φασική ταχύτητα του κύματος. Αυτά τα σωματίδια έρχονται σε συντονισμό με το κύμα, δηλ. αλληλεπιδρούν συμφασικά με το κύμα για μεγάλο χρονικό διάστημα, και οι αλληλεπιδράσεις αυτές οδηγούν είτε σε απόσβεση του κύματος είτε σε ενίσχυση (αστάθεια). Σε συνδυασμό με μαγνητικό πεδίο, τα φαινόμενα αυτά οδηγούν στην εμφάνιση και νέων ειδών κυμάτων.

Στην παρούσα ενότητα κάνουμε μια εισαγωγή στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα πλάσματος σε τρία μέρη. Το πρώτο μέρος αφορά τις εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη/διάδοση ενός κύματος στο πλάσμα, δηλ. τις εξισώσεις Maxwell και την κυματική εξίσωση. Επιπρόσθετα, παρουσιάζονται μερικές έννοιες απαραίτητες για την απλούστερη περιγραφή της κυματικής διάδοσης. Στο δεύτερο μέρος επεξηγείται η μέθοδος με την οποία υπολογίζονται οι κυματικές διαταραχές στο πλάσμα, και πραγματοποιείται μια ομαδοποίηση των αποτελεσμάτων ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων που επηρεάζουν τη διάδοση (θερμοκρασία και μαγνητικό πεδίο). Τέλος, στο τρίτο μέρος παραθέτουμε τις κυριότερες εφαρμογές των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα, με έμφαση στην Αστροφυσική και τη θερμοπυρηνική σύντηξη.

1.3.1 Από τις εξισώσεις Maxwell στην κυματική εξίσωση

Η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε όλα τα υλικά μέσα και σε όλο το εύρος συχνοτήτων περιγράφεται από τις εξισώσεις Maxwell. Σ' αυτή την υποενότητα θα κάνουμε μια σύντομη περιγραφή των εξισώσεων (έχουμε ήδη αναφέρει κάποια στοιχεία στην Ενότη. 1.2). Στη γενική τους μορφή αυτές γράφονται

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.35\alpha)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (1.35\beta)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.35\gamma)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad (1.35\delta)$$

όπου $\mathbf{D}$ είναι η διηλεκτρική μετατόπιση και $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ η μαγνητική πυκνότητα ροής και το μαγνητικό πεδίο αντίστοιχα⁸. Ο Maxwell δεν ανακάλυψε ο ίδιος τις εξισώσεις αυτές, αλλά ομαδοποίησε ήδη υπάρχοντες νόμους του Ηλεκτρομαγνητισμού. Πιο συγκεκριμένα, οι Εξ. (1.35α), (1.35β) αποτελούν τους νόμους Gauss για τη ροή του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, η (1.35γ) είναι ο νόμος του Faraday για την επαγωγή και η (1.35δ) ο νόμος Ampère με την προσθήκη του ρεύματος μετατόπισης από τον Maxwell. Η προσθήκη αυτή έχει μεγάλη φυσική σημασία, διότι μόνο έτσι μπορούν να περιγραφούν δυναμικά φαινόμενα πέραν της επαγωγής, όπως λ.χ. η διάδοση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας (τα στατικά φαινόμενα περιγράφονται στο όριο $\partial/\partial t = 0$). Οι πυκνότητες φορτίου και ρεύματος ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας (βλ. προηγούμενη αναφορά στην Υποεν. 1.2.2). Απουσία φορτίων και ρευμάτων, το σύνολο των εξισώσεων Maxwell είναι συμμετρικό.

Επίλυση των εξισώσεων Maxwell σημαίνει καθορισμό των πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Όπως δίνονται οι εξισώσεις στη μορφή (1.35), αυτό που καταρχήν απαιτείται για την επίλυση είναι να συσχετιστούν τα $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, ρ , $\mathbf{j}$ με τα $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Η μορφή τέτοιων "δομικών" εξισώσεων εξαρτάται από τα συγκεκριμένα χαρακτηριστικά του μέσου. Εδώ μας ενδιαφέρει η διάδοση στο πλάσμα, ένα μέσο το οποίο περιέχει ελεύθερα φορτία, και λόγω αυτού ο χειρισμός πρέπει να είναι διαφορετικός απ' ό,τι στα κοινά διηλεκτρικά. Έν γένει, το πλάσμα ως μέσο είναι δυναμικό, διανέμον (dispersive), μη γραμμικό, ανομοιογενές και ανισότροπο, δηλ. η απόκριση σε εξωτερικές διεγέρσεις εξαρτάται απ' το χρόνο, τη συχνότητα, τα πεδία, το χώρο και την κατεύθυνση αντίστοιχα. Εν συνεχεία, απαραίτητος είναι ο καθορισμός των συνοριακών συνθηκών στα οποιαδήποτε φυσικά σύνορα και ασυνέχειες του προβλήματος. Το πιο κοινό παράδειγμα συνόρου είναι ένας ιδανικά αγωγίμος τοίχος, όπως π.χ. τα μεταλλικά τοιχώματα του tokamak. Οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα πεδία σε τέτοιες ασυνέχειες προκύπτουν με ολοκλήρωση των Εξ. (1.35) πάνω σε απειροστούς όγκους που περικλείονται από τις συνοριακές επιφάνειες.

Οι δομικές σχέσεις μπορούν να προκύψουν μέσω δύο ισοδύναμων θεωρήσεων. Στην πρώτη αντιμετωπίζουμε το πλάσμα ως μέσο, ένα αγωγίμο και ηλεκτρικά ανισότροπο διηλεκτρικό χωρίς πηγές φορτίου. Στην περίπτωση που επιπλέον θεωρούμε ότι τα πεδία είναι αρκετά ασθενή ώστε η διηλεκτρική απόκριση του πλάσματος να είναι γραμμική, οι σχέσεις είναι της μορφής

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \quad (1.36\alpha)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \quad (1.36\beta)$$

$$\rho(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (1.36\gamma)$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \tilde{\sigma}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (1.36\delta)$$

⁸ Στη διατριβή αυτή, αλλά και στο μεγαλύτερο μέρος της βιβλιογραφίας της Φυσικής Πλάσματος, εκτός από το $\mathbf{H}$ ως μαγνητικό πεδίο αναφέρεται και το $\mathbf{B}$.

Εδώ $\tilde{\epsilon}$ είναι ο διηλεκτρικός τανυστής, μ_0 η μαγνητική διαπερατότητα του κενού και $\tilde{\sigma}$ ο τανυστής αγωγιμότητας. Σε αντίθεση με τα κοινά διηλεκτρικά, όπου η απόκριση εξαρτάται απ' την πόλωση των δεσμευμένων φορτίων, στο πλάσμα οι τανυστές $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\sigma}$ καθορίζονται απ' τη δυναμική των ελεύθερων φορτίων. Στην άλλη θεώρηση, την οποία έχουμε ήδη παρουσιάσει στην Ενότητα 1.2, το πλάσμα θεωρείται ως μια συλλογή φορτίων και ρευμάτων στο κενό. Οι σχέσεις (1.36) διαφοροποιούνται ως προς το ότι $\tilde{\epsilon} \rightarrow \epsilon_0$, $\tilde{\sigma} = 0$ (αλλά $\mathbf{j} \neq 0$) και $\rho \neq 0$, και οι εξισώσεις Maxwell καταλήγουν στη μορφή (1.10) με τις πυκνότητες φορτίου και ρεύματος να δίνονται απ' τις (1.11).

Μια εναλλακτική περιγραφή της εξέλιξης των κυμάτων μπορεί να γίνει μέσω της κυματικής εξίσωσης. Σε γενικές γραμμές, αυτή προκύπτει από τις εξισώσεις στροβιλισμού (1.35γ), (1.35δ) με απαλοιφή του ενός εκ των δύο πεδίων, και η ακριβής μορφή της εξαρτάται από τις δομικές σχέσεις τύπου (1.36), δηλ. απ' το μέσο. Ας εξετάσουμε μερικά παραδείγματα που έχουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον. Υπό τη θεώρηση του πλάσματος ως συλλογή φορτίων και ρευμάτων στο κενό, η κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχει τη μορφή

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (1.37\alpha)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{j}. \quad (1.37\beta)$$

Να σημειώσουμε ότι, κατά την εξαγωγή των (1.37), ελήφθη υπόψη η διανυσματική ταυτότητα $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{G}) - \nabla^2 \mathbf{G}$. Παρατηρούμε ότι όταν υπάρχουν φορτία και ρεύματα, όπως στο πλάσμα, οι διαφορικές εξισώσεις είναι μη ομογενείς, και η λύση καθορίζεται από το πως απεικονίζεται η κίνηση των φορτίων στις πυκνότητες ρ , $\mathbf{j}$. Η ομογενής εξίσωση προκύπτει για $\rho = \mathbf{j} = 0$ και περιγράφει τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό. Στην περίπτωση αυτή, η λύση είναι της μορφής επίπεδου κύματος το οποίο διαδίδεται ευθύγραμμα, με τα διανύσματα των πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ να είναι ορθογώνια και μεταξύ τους και με τη διεύθυνση διάδοσης. Τα πεδία είναι αρμονικές συναρτήσεις στο χώρο και στο χρόνο, και γι' αυτό το λόγο συνήθίζεται να τα αναπαριστούμε στο μιγαδικό επίπεδο, π.χ. για το $\mathbf{E}$

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (1.38)$$

όπου $\bar{\mathbf{E}}_0$ το σταθερό πλάτος και $\varphi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t$ η φάση του κύματος. Λόγω της γραμμικότητας 2^{ης} τάξης της κυματικής εξίσωσης, τόσο το πραγματικό όσο και το φανταστικό μέρος αποτελούν λύση της εξίσωσης στο πραγματικό επίπεδο. Βέβαια, ως μετρήσιμη ποσότητα είναι αντιληπτό το πραγματικό μέρος της έκφρασης (1.38).

Αυτό το σημείο είναι κατάλληλο για να αναφέρουμε μερικές χρήσιμες έννοιες σχετικά με την κυματική διάδοση. Η αναφορά θα γίνει για επίπεδα κύματα, όμως η ισχύς των εννοιών είναι γενική. Η φάση εμπεριέχει το μεγαλύτερο μέρος της πληροφορίας για τη διάδοση των κυμάτων. Η συχνότητα ω καθορίζει τη χρονική εξέλιξη των ταλαντώσεων του κύματος, ενώ ο κυματάρριθμος $\mathbf{k}$ καθορίζει την κατεύθυνση της διάδοσης. Στο πλαίσιο ενός γενικότερου ορισμού, ο κυματάρριθμος και η συχνότητα προκύπτουν αντίστοιχα από τις μερικές παραγώγους $\nabla \varphi$ και $\partial \varphi / \partial t$. Οι ισοφασικές επιφάνειες κινούνται στο χώρο με ταχύτητα $v_p = \omega / k$, η οποία ονομάζεται

φασική ταχύτητα (phase velocity). Στην περίπτωση ενός πιά σύνθετου κύματος, π.χ. ενός "κυματοπακέτου" (wavepacket), που προκύπτει από την υπέρθεση πολλών επίπεδων κυμάτων, υπάρχει το ενδεχόμενο κάθε συνιστώσα να διαδίδεται με διαφορετική φασική ταχύτητα. Τότε, ο ρυθμός της διάδοσης περιγράφεται καλύτερα από την ταχύτητα ομάδας (group velocity) $\mathbf{v}_g = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$, η οποία αντιστοιχεί στην ταχύτητα με την οποία ρέει η ενέργεια του κύματος. Η διατήρηση της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας κατά τη διάδοση αποτελεί το περιεχόμενο του θεωρήματος Poynting, το οποίο αποτυπώνεται μαθηματικά στην ακόλουθη σχέση

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})}{\partial t} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}. \quad (1.39)$$

Ο όρος στο αριστερό μέλος αντιπροσωπεύει την ενέργεια που εξέρχεται από ένα κλειστό όγκο διαμέσου της συνοριακής επιφάνειας, ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος την ενέργεια που παραμένει αποθηκευμένη στα πεδία και ο δεύτερος την ενέργεια που απορροφήθηκε από το μέσο εντός του κλειστού όγκου.

Ο υπολογισμός της φασικής και της ομαδικής ταχύτητας προϋποθέτει την ύπαρξη μιας αλγεβρικής σχέσης ανάμεσα στη συχνότητα και τον κυματάρημο. Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως σχέση διασποράς (dispersion relation) και περιέχει όλη την πληροφορία για τη συχνοτική απόκριση του μέσου σε ένα δεδομένο κύμα. Εν γένει, η σχέση διασποράς για ηλεκτρομαγνητικά κύματα υπολογίζεται αντικαθιστώντας τη θεωρητική μορφή της λύσης (ansatz) στην κυματική εξίσωση και λαμβάνοντας τη συνθήκη για μη μηδενικές λύσεις. Στο κενό, η σχέση αυτή προκύπτει να είναι η $\omega = ck$, ή ισοδύναμα $v_p = c$. Η μελέτη της σχέσης διασποράς είναι απλούστερη όταν γράφεται στο πλαίσιο του δείκτη διάθλασης (refraction index) $\mathbf{N} = c\mathbf{k}/\omega$. Για παράδειγμα, η σχέση διασποράς στο κενό είναι απλά $N = 1$. Η σχέση διασποράς καθορίζει όλες τις περιοχές των φυσικών παραμέτρων στις οποίες είναι δυνατή η ύπαρξη και η διάδοση κυμάτων. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τρεις περιπτώσεις: (α) Όταν $N < 1$ είναι $v_p > c$ και λέμε ότι έχουμε ανώμαλη διασπορά (η περίπτωση αυτή είναι πολύ συνηθισμένη στο πλάσμα), (β) Όταν $N = 0$ ή ο N είναι φανταστικός, το κύμα δε μπορεί να διαδοθεί και έχουμε αποκοπή (cutoff), (γ) Όταν $N \rightarrow \infty$ ή ο N είναι μιγαδικός τότε έχουμε συντονισμό (resonance), δηλ. έντονη ανταλλαγή ενέργειας ανάμεσα στο κύμα και το μέσο. Σε ανομοιογενές πλάσμα, στο σημείο όπου έχουμε αποκοπή το κύμα ανακλάται, ενώ όταν υπάρχει συντονισμός απορροφάται.

Όταν μελετάται η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα, για να επιτευχθεί λύση των Εξ. (1.37), όπως είπαμε και παραπάνω, πρέπει να καθοριστούν οι πυκνότητες ρ , $\mathbf{j}$. Στην περίπτωση αυτή εξυπηρετεί η περιγραφή του πλάσματος ως αγώγιμου διηλεκτρικού μέσου. Η ισοδυναμία με την προσέγγιση ως κενό με φορτία και ρεύματα έγκειται στο ότι η θεώρηση ως μέσο με τανυστές απόκρισης $\bar{\epsilon}$, $\bar{\sigma}$ είναι ουσιαστικά ένα μοντέλο για την περιγραφή της κίνησης των φορτίων μέσω των ρ , $\mathbf{j}$ (οι μαθηματικές σχέσεις είναι οι $\rho = \nabla \cdot (\bar{\epsilon} \cdot \mathbf{E})$ και $\mathbf{j} = \bar{\sigma} \cdot \mathbf{E}$). Οι πιά συνηθισμένες παραδοχές, οι οποίες συνδυάζουν την απλότητα με τη ρεαλιστική περιγραφή, είναι ότι: (α) Το κύμα έχει σταθερή συχνότητα, (β) Τα πεδία είναι τόσο ασθενή ώστε η απόκριση του πλάσματος να είναι γραμμική, (γ) Το πλάσμα είναι ανομοιογενές και ανισότροπο, (δ) Οι φυσικές ιδιότητες του πλάσματος δε μεταβάλλονται με το χρόνο.

Υπό τις παραδοχές αυτές, οι δομικές σχέσεις είναι της μορφής (1.36) και η κυματική εξίσωση για το μιγαδικό ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\nabla \times (\nabla \times \bar{\mathbf{E}}) - \frac{\omega^2}{c^2} \tilde{\epsilon} \cdot \bar{\mathbf{E}} = 0. \quad (1.40)$$

Στην Εξ. (1.40) η απόκριση του πλάσματος καθορίζεται μέσω ενός αδιάστατου μιγαδικού τανυστή, του διηλεκτρικού τανυστή πλάσματος (plasma dielectric tensor) $\tilde{\epsilon}$, που σχετίζεται με τους πραγματικούς τανυστές $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\sigma}$ με τις σχέσεις

$$\epsilon_0 \tilde{\epsilon} = \tilde{\epsilon} + i \frac{\tilde{\sigma}}{\omega}, \quad (1.41)$$

ή αντίστροφα $\tilde{\epsilon} = \epsilon_0 \text{Re}(\tilde{\epsilon})$ και $\tilde{\sigma} = \omega \epsilon_0 \text{Im}(\tilde{\epsilon})$.

Σε ανομοιογενές μέσο, το επίπεδο κύμα δεν είναι η ακριβής λύση της κυματικής εξίσωσης. Αν όμως οι ιδιότητες του μέσου μεταβάλλονται αργά στο χώρο, όπως έχουμε υποθέσει, τότε οι λύσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μαθηματική αποτύπωση της πλήρους λύσης. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια των ασυμπτωτικών μεθόδων, οι οποίες μετατρέπουν την κυματική εξίσωση σε ένα σύνολο απλούστερων εξισώσεων μέσω της ανάπτυξης της θεωρητικής μορφής της λύσης για το ηλεκτρικό πεδίο σε ασυμπτωτική σειρά. Η προσέγγιση αυτή περιγράφει τη διάδοση στο πλαίσιο κυματικών ακτίνων ή δεσμών που διαθλώνται διαδοχικά από το ασθενώς χωρικά μεταβαλλόμενο μέσο, με τον ίδιο τρόπο που η τροχιά ενός σωματιδίου εκτρέπεται από ένα συγκεκριμένο δυναμικό. Το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται με γενίκευση της μορφής της Εξ. (1.38)

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{E}}_0(\mathbf{r}) e^{i\kappa\bar{\varphi}(\mathbf{r})},$$

όπου η μιγαδική συνάρτηση $\bar{\varphi}(\mathbf{r})$ είναι η γενικευμένη μορφή της φάσης $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ για ασθενώς ανομοιογενές μέσο. Η παράμετρος $\kappa = \omega L_p / c \gg 1$ καθορίζει πόσο μικρό είναι το μήκος κύματος σε σχέση με την κλίμακα ανομοιογένειας L_p . Η σχέση της γενικευμένης φάσης με τον κυματάρημο είναι η $\mathbf{k} = \text{Re}(\kappa \nabla \bar{\varphi})$. Στο πλαίσιο της ενότητας αυτής δε θα επεκταθούμε περισσότερο στο συγκεκριμένο θέμα (αυτό γίνεται στο Κεφ. 3).

Τελειώνοντας, πρέπει να αναφέρουμε ότι οι εξισώσεις Maxwell και η κυματική εξίσωση είναι δυνατό να διατυπωθούν στο πλαίσιο των δυναμικών Φ , $\mathbf{A}$ αντί των πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$. Θυμίζουμε (βλ. Υποεν. 1.2.1) ότι τα δυναμικά συνδέονται με τα πεδία μέσω των Εξ. (1.17). Έχοντας υπόψη τη διανυσματική ταυτότητα $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$, βλέπουμε ότι η δεύτερη απ' αυτές είναι συνέπεια της Εξ. (1.10β) και η πρώτη προκύπτει με συνδυασμό της δεύτερης και της (1.10γ). Ενώ τα πεδία καθορίζονται πλήρως από τα δυναμικά, τα δυναμικά δεν καθορίζονται μονοσήμαντα από τα πεδία. Συγκεκριμένα, αν υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$\Phi' = \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial g}{\partial t},$$

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla g,$$

τότε τα δυναμικά Φ' , $\mathbf{A}'$ αντιστοιχούν στα ίδια πεδία με τα Φ , $\mathbf{A}$, δηλ. ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει αναλλοίωτα τα πεδία. Ο παραπάνω μετασχηματισμός ονομάζεται μετασχηματισμός βαθμίδας (gauge transformation), και η συνάρτηση g ορίζει τη βαθμίδα στην οποία υπολογίζονται τα δυναμικά. Στην Ηλεκτροδυναμική χρησιμοποιείται ως επί το πλείστον η βαθμίδα Lorentz $c\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial\Phi/\partial t = 0^9$, υπό την οποία οι κυματικές εξισώσεις για τα δυναμικά παίρνουν τη μορφή

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1.42\alpha)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu_0\mathbf{j}. \quad (1.42\beta)$$

1.3.2 Υπολογισμός και είδη κυμάτων στο πλάσμα

Δείξαμε στην προηγούμενη ενότητα ότι το πλάσμα μπορεί να περιγραφεί από ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων, τις εξισώσεις Maxwell για την εξέλιξη των πεδίων και τις εξισώσεις για τη δυναμική του πλάσματος. Για τις τελευταίες υπάρχουν διάφορες επιλογές, ανάλογα με την περιοχή παραμέτρων του πλάσματος. Όταν η θερμοκρασία και η πυκνότητα είναι χαμηλές, επαρκεί η εξίσωση Newton, ενώ όταν μία εκ των δύο είναι υψηλή προτιμώνται οι εξισώσεις ρευστού. Όταν όμως οι συνθήκες στο πλάσμα είναι στην ενδιάμεση περιοχή, οφείλουμε να χρησιμοποιήσουμε την κινητική εξίσωση. Η αναζήτηση κυμάτων στο πλάσμα, όπως άλλωστε και οποιουδήποτε άλλου φαινομένου, περνάει αναγκαστικά από την άμεση ή έμμεση επίλυση κάποιων εκ των παραπάνω εξισώσεων. Ανεξάρτητα απ' τη συγκεκριμένη επιλογή, οι εξισώσεις αυτές είναι εν γένει μη γραμμικές, κάτι που καθιστά αρκετά δύσκολη την επίλυση. Στην περίπτωση που οι κυματικές διαταραχές έχουν μικρό πλάτος, η μελέτη των εξισώσεων μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά καθώς οι μη γραμμικοί όροι μπορούν να παραλειφθούν. Τα κύματα που προκύπτουν απ' αυτή την ανάλυση ονομάζονται γραμμικά κύματα (linear waves), και αποτελούν τα θεμελιώδη κύματα που μπορούν να διαδοθούν στο πλάσμα. Ακόμη και για μεγάλες τιμές του πλάτους τα κύματα αυτά συνεχίζουν να υπάρχουν, με διαφορετικές όμως ιδιότητες, καθώς πλέον υπάρχει εξάρτηση της συχνότητας από το πλάτος.

Ο καθορισμός των γραμμικών κυμάτων στο πλάσμα αναλύεται στα εξής βήματα: (α) Γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις κίνησης με την υπόθεση ότι οι μεταβλητές έχουν τη μορφή $g = g_0 + g_1$, όπου g_0 η τιμή στην ισορροπία και g_1 η διαταραχή, (β) Υποθέτουμε ότι η διαταραχή έχει τη μορφή Fourier $g_1 = g_{10}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$, δηλ. ένα επίπεδο αρμονικό κύμα μικρού πλάτους, (γ) Από τη συνθήκη επιλυσιμότητας των γραμμικοποιημένων εξισώσεων βρίσκουμε τη σχέση διασποράς, (δ) Λύνουμε ως προς το ηλεκτρικό πεδίο και απ' τις (1.36δ), (1.40) υπολογίζουμε τον διηλεκτρικό τανυστή πλάσματος. Προφανώς, σε αυτή την προσέγγιση αγνοείται η επίδραση που έχουν οι

⁹ Στην Ηλεκτροστατική είναι βολικό να χρησιμοποιείται η βαθμίδα Coulomb $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, με την οποία καταλήγουμε στη γνωστή εξίσωση Poisson για το Φ .

ταλαντώσεις στο μη διαταραγμένο τμήμα του πλάσματος (δηλ. στην g_0) καθώς και οι αλληλεπιδράσεις των κυμάτων, που είναι κατ' εξοχήν μη γραμμικά φαινόμενα. Το σύστημα των εξισώσεων που επιλέγουμε να αναλύσουμε κάθε φορά εξαρτάται από την περιοχή συχνοτήτων του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και από την κατάσταση του πλάσματος. Η επιλογή του μοντέλου για τη διηλεκτρική απόκριση του πλάσματος παίζει μεγάλο ρόλο στο είδος των κυμάτων που προκύπτουν, καθώς ανάλογα με την περιοχή των παραμέτρων (ειδικά της θερμοκρασίας) κυριαρχούν διαφορετικές φυσικές συμπεριφορές. Στο πλαίσιο αυτής της διατριβής, θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής ή χαμηλής συχνότητας παρουσία εξωτερικού μαγνητικού πεδίου.

Θα μελετήσουμε αναλυτικά ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για να γίνει η διαδικασία κατανοητή, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής συχνότητας σε μη μαγνητισμένο πλάσμα. Επειδή τα κύματα έχουν υψηλή συχνότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα ιόντα είναι ακίνητα ($m_i \approx 0$) καθώς δε μπορούν να παρακολουθήσουν αυτές τις ταλαντώσεις. Θεωρούμε επίσης ότι $T_e \approx 0$, διότι $v_p \approx c$ ενώ $v_t \ll c$. Εδώ είναι προτιμότερο να αντιμετωπίσουμε το πλάσμα ως ρευστό, οπότε το σύστημα των εξισώσεων προς ανάλυση είναι οι (1.10γ) και (1.10δ) με $\mathbf{j} = -en_e\mathbf{u}_e$, και για το ρευστό ηλεκτρονίων η (1.26) με $\mathcal{T}_{ei} = 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_e = 0$. Αν παραγωγίσουμε την (1.10δ) ως προς το χρόνο, εφαρμόσουμε τον τελεστή $\nabla \times$ στην (1.10γ), αντικαταστήσουμε στην πρώτη τα αποτελέσματα μαζί με την (1.26) και ύστερα γραμμικοποιήσουμε θέτοντας $n_e = n_{e0} + n_{e1}$, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1$ και $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_{e1}$, προκύπτει η εξίσωση

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}_1) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}_1}{\partial t^2} = -\frac{n_{e0}|q_e|^2}{\varepsilon_0 m_e} \mathbf{E}_1.$$

Θεωρώντας ότι οι διαταραχές έχουν τη μορφή Fourier και ότι $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{k}$, και λαμβάνοντας υπόψη την Εξ. (1.5), καταλήγουμε στη σχέση διασποράς

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2. \quad (1.43)$$

Παρατηρήστε ότι όταν $\omega < \omega_{pe}$ είναι $k^2 < 0$, δηλ. ο κυματάριθος γίνεται φανταστικός και το κύμα αποσβένει εκθετικά. Αν το πλάσμα είναι ανομοιογενές, το σημείο στο οποίο $\omega = \omega_{pe}$ είναι σημείο αποκοπής και εκεί το κύμα ανακλάται.

Με την παραπάνω τεχνική είναι δυνατό να υπολογιστούν τα κύματα πλάσματος σε όλες τις περιπτώσεις. Παρουσιάζουμε τις λύσεις για κύματα σε μαγνητισμένο πλάσμα για τις διαφορετικές φυσικές προσεγγίσεις του ψυχρού (μη αλληλεπιδρώντα φορτία), του θερμού (ρευστό) και του κινητικού πλάσματος. Όπως αναφέραμε και παραπάνω, η χρήση κάθε μοντέλου αναδεικνύει διαφορετική φυσική, και αυτό οδηγεί σε σημαντικές μεταβολές των υπάρχοντων ειδών κυμάτων αλλά και στην ανάδειξη νέων. Με τον όρο "ψυχρό" πλάσμα εννοούμε ότι οι θερμικές κινήσεις θεωρούνται αμελητέες. Αυτή πολλές φορές είναι μια καλή προσέγγιση, αλλά δεν περιλαμβάνει τη φυσική των φαινομένων λόγω πεπερασμένης θερμοκρασίας. Τα φαινόμενα αυτά μπορούν να συμπεριληφθούν σε διάφορες τάξεις μεγέθους. Στην πιο απλή διόρθωση, η οποία συνιστά την προσέγγιση του "θερμού" πλάσματος, η επίδραση των θερμικών κινήσεων αντικατοπτρίζεται σε ένα όρο πίεσης στις εξισώσεις ρευστού. Η

Τύπος κύματος	Χαρακτηριστικά	Σχέση διασποράς $N = N(\omega)$
Alfvén	$\omega \sim \omega_{ci}, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$	$N^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$
L	$\omega \sim \omega_{ce}, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \frac{Im(\bar{E})}{Re(E)} > 0$	$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - \omega_{ce})}$
R	$\omega \sim \omega_{ce}, \mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0, \frac{Im(\bar{E})}{Re(E)} < 0$	$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + \omega_{ce})}$
Magnetosonic	$\omega \sim \omega_{ci}, \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$	$N^2 = 1 + \frac{c^2}{v_A^2}$
O	$\omega \sim \omega_{ce}, \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$	$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}$
X	$\omega \sim \omega_{ce}, \mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0, \mathbf{E} \perp \mathbf{B}_0$	$N^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{ce}^2)}$

Πίνακας 1.2: Τα κύρια είδη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε ψυχρό μαγνητισμένο πλάσμα.

πλήρης συμπερίληψη των θερμικών φαινομένων προϋποθέτει τη χρήση της κινητικής εξίσωσης, και το πλάσμα στην προσέγγιση αυτή ονομάζεται κινητικό.

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση του ψυχρού πλάσματος. Η κατηγορία αυτή είναι θεμελιώδης καθώς, παρόλο που η περιγραφή του πλάσματος στηρίζεται σε πολύ απλές φυσικές αρχές, περιλαμβάνονται όλα τα είδη κυμάτων που είναι δυνατό να διαδοθούν στο πλάσμα. Εκείνο που αλλάζει όταν θεωρήσουμε άλλο μοντέλο για το πλάσμα είναι η σχέση διασποράς, δηλ. η συγκεκριμένη μαθηματική σχέση του κυματαριθμού με τη συχνότητα. Στον Πίν. 1.2 φαίνονται συνοπτικά τα κύρια είδη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που μπορούν να διαδοθούν σε ψυχρό μαγνητισμένο πλάσμα, τα βασικά χαρακτηριστικά τους και οι αντίστοιχες σχέσεις διασποράς. Τόσο στις υψηλές συχνότητες ($\omega \sim \omega_{ce}$) όσο και στις χαμηλότερες ($\omega \sim \omega_{ci}$), υπάρχουν κύματα που διαδίδονται τόσο παράλληλα στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο ($\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$) όσο και κάθετα ($\mathbf{k} \perp \mathbf{B}_0$). Αυτά είναι τα βασικά είδη κυμάτων που διαδίδονται σε ψυχρό μαγνητισμένο πλάσμα, και όλα τα υπόλοιπα είδη (π.χ. κύματα που διαδίδονται υπό γωνία) είναι αλληλουχία των βασικών αυτών ειδών.

Στις υψηλές συχνότητες, τα είδη κυμάτων παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο είναι δύο (βλ. Σχ. 1.6): (α) Το δεξιόστροφο κύμα (Right wave ή R), στο οποίο το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου περιστρέφεται γύρω από το $\mathbf{B}_0$ κατά την ορθή φορά, (β) Το αριστερόστροφο κύμα (Left wave ή L), στο οποίο η περιστροφή του $\mathbf{E}$ είναι ανάστροφη. Λόγω της περιστροφής του ηλεκτρικού πεδίου, τα κύματα αυτού του είδους είναι κυκλικά πολωμένα (circularly polarized). Η φορά του κύματος R συμπίπτει με την περιστροφή των ηλεκτρονίων, ενώ αυτή του L με την κίνηση των ιόντων. Αυτό είναι σε συμφωνία με το ότι το κύμα R εμφανίζει συντονισμό όταν $\omega = \omega_{ce}$ (βλ. σχέση διασποράς). Στην περίπτωση αυτή το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος επιταχύνει συνεχώς το ηλεκτρόνιο, γι' αυτό και ο συντονισμός ονομάζεται κυκλοτρονικός (cyclotron resonance). Από τη σχέση διασποράς μπορούμε να βρούμε και τις συχνότητες αποκοπής, οι οποίες είναι οι $\pm\omega_{ce}/2 + \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}/4$.

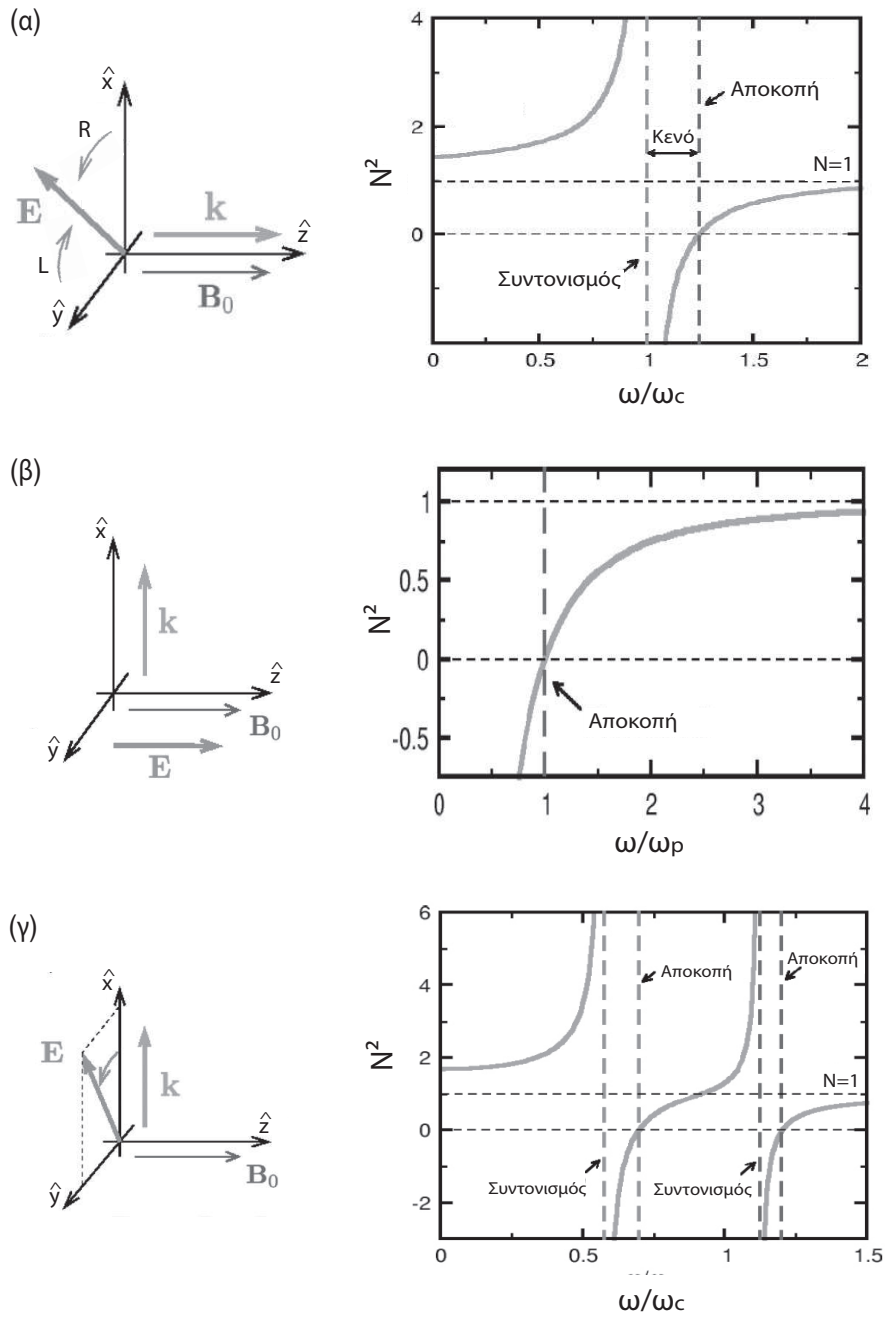
Οι συντονισμοί και οι αποκοπές των κυμάτων R, L φαίνονται δεξιά στο Σχ. 1.6(α), όπου παριστάνεται γραφικά ο δείκτης διάθλασης ως συνάρτηση του λόγου ω/ω_c .

Τα είδη υψίσυχων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται κάθετα στο $\mathbf{B}_0$ είναι και αυτά δύο (Σχ. 1.6): (α) Το σύνηθες κύμα (Ordinary wave ή O), του οποίου το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο προς το $\mathbf{B}_0$, (β) Το ασύνηθες κύμα (extraordinary wave ή X), του οποίου το $\mathbf{E}$ περιστρέφεται στο εγχάρσιο επίπεδο του $\mathbf{B}_0$. Το σύνηθες κύμα είναι γραμμικά πολωμένο (linearly polarized), λόγω του ότι το ηλεκτρικό του πεδίο έχει σταθερή φορά, και έχει τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με τα κύματα υψηλής συχνότητας σε μη μαγνητισμένο πλάσμα. Δηλαδή, τουλάχιστον όσον αφορά τη διασπορά, τα συνήθη κύματα δεν αντιλαμβάνονται την παρουσία του μαγνητικού πεδίου στο πλάσμα. Τα κύματα X είναι εν γένει ελλειπτικά πολωμένα, έχουν τις ίδιες συχνότητες αποκοπής με τα κύματα R, L και εμφανίζουν συντονισμό στη συχνότητα $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{ce}^2}$, η οποία ονομάζεται άνω υβριδική συχνότητα (Upper-Hybrid (UH) frequency).

Μέχρι τώρα αναφερθήκαμε σε κύματα υψηλής συχνότητας στο ψυχρό πλάσμα. Υπάρχουν όμως και ηλεκτρομαγνητικά κύματα στις χαμηλές συχνότητες, τα οποία διαδίδονται τόσο παράλληλα με τις μαγνητικές γραμμές, τα κύματα Alfvén, όσο και κάθετα σε αυτές, τα magnetosonic κύματα. Τα δύο αυτά είδη κυμάτων έχουν την ίδια σχέση διασποράς (όπως φαίνεται και στον Πίν. 1.2), όπου χαρακτηριστική παράμετρος είναι η ταχύτητα Alfvén $v_A = \sqrt{\epsilon_0 B_0^2 / (n_i m_i)}$. Όταν $v_A \ll c$ η σχέση διασποράς παίρνει την πολύ απλή μορφή $\omega = kv_A$, η οποία θυμίζει τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο κενό. Τα κύματα Alfvén μπορούν να θεωρηθούν ως ο μηχανισμός διάδοσης μιας κάθετης προς το μαγνητικό πεδίο διαταραχής, κατά μήκος μιας μαγνητικής γραμμής μέσα στο πλάσμα, ενώ αντίστοιχα λειτουργούν και τα magnetosonic κύματα αλλά κάθετα στις μαγνητικές γραμμές.

Όταν προσεγγίζουμε το πλάσμα ως θερμό ή κινητικό, οι υπολογισμοί δείχνουν ότι υπάρχουν τα ίδια ακριβώς κύματα με το ψυχρό πλάσμα, με τη διαφορά ότι (α) στο θερμό πλάσμα υπάρχει το ενδεχόμενο μετατροπής των κυμάτων από εγχάρσια σε διαμήκη, (β) στο κινητικό πλάσμα υπάρχει κυκλοτρονική απόσβεση και έντονη μεταβολή στη διασπορά. Στο θερμό πλάσμα, τα κύματα L, R και X όταν πλησιάζουν την περιοχή του συντονισμού μετατρέπονται σε ακουστικά, και μετά την απομάκρυνση από εκεί ξαναγίνονται ηλεκτρομαγνητικά. Το αν το ακουστικό κύμα θα διαδοθεί με την ταχύτητα του ήχου ή τη θερμική ταχύτητα εξαρτάται από τη συγκεκριμένη σχέση διασποράς. Σε ομογενές πλάσμα τα κύματα αυτά είναι γραμμικά ανεξάρτητα, οπότε και δεν υπάρχει ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ τους, κάτι όμως που δε συμβαίνει όταν το πλάσμα είναι ανομοιογενές. Η περιγραφή του θερμού πλάσματος δεν είναι ακριβής στη γειτονία των περιοχών συντονισμού, καθώς εκεί $v_p \sim v_t$ και δεν ισχύει η θεωρία ρευστού. Βέβαια, η αξία της περιγραφής έγκειται στην ανάδειξη της μετατροπής του είδους του κύματος και όχι στην πλήρη περιγραφή των θερμικών φαινομένων, κάτι το οποίο είναι αποστολή του κινητικού μοντέλου (με τη συμπερίληψη και σχετικιστικών φαινομένων).

Όλα τα παραπάνω συμπεράσματα για τα χαρακτηριστικά της διάδοσης των κυμάτων συνάγονται με τη βοήθεια μόνο της εξίσωσης διασποράς. Το τελευταίο που μένει για τον πλήρη καθορισμό της εξέλιξης του κύματος στο πλάσμα είναι ο υπο-



Σχήμα 1.6: Κύρια χαρακτηριστικά (χωρική διεύθυνση και διάγραμμα διασποράς) των υψίσυχνων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται σε ψυχρό μαγνητισμένο πλάσμα (α) παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο (R, L), (β) κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με πόλωση O, (γ) κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με πόλωση X.

λογισμός του διηλεκτρικού τανυστή $\tilde{\epsilon}$. Στον τανυστή αυτό αντικατοπτρίζεται όλη η φυσική της απόκρισης του πλάσματος, η οποία ανάλογα με το μοντέλο περιλαμβάνει και διαφορετικά χαρακτηριστικά (π.χ. αποκοπές, συντονισμούς και κυκλοτρονική απόσβεση). Με τη βοήθεια των στοιχείων του $\tilde{\epsilon} = [\epsilon_{kl}]$ μπορεί να εκφραστεί η σχέση διασποράς σε γενικότερη μορφή και να εξαχθούν όλες οι σχέσεις του Πίν. 1.2, χωρίς χρήση της συνθήκης επιλυσιμότητας. Λόγω του εισαγωγικού χαρακτήρα της ενότητας αυτής, δεν θα προχωρήσουμε παραπέρα. Στο Κεφ. 5 δίνεται η μαθηματική έκφραση για τη μορφή του διηλεκτρικού τανυστή σε όλα τα μοντέλα για το πλάσμα και ανάλογα με τα χαρακτηριστικά του ηλεκτρομαγνητικού κύματος.

Τελειώνοντας, αναφέρουμε ότι εκτός από τα κύματα που μελετήσαμε μέχρι τώρα υπάρχει και ένα άλλο είδος διαταραχών που το πλάτος τους αυξάνεται με το χρόνο, με αποτέλεσμα να οδηγούν το πλάσμα σε ασταθή κατάσταση. Εώς τώρα, κατά τον υπολογισμό των κυμάτων θεωρήσαμε το μαγνητισμένο πλάσμα ομογενές και σε θερμοδυναμική ισορροπία, ή με άλλα λόγια ότι η μόνη διαθέσιμη πηγή ενέργειας στο πλάσμα είναι η θερμότητα. Εάν μια από τις παραμέτρους που αναφέραμε αλλάξει, τότε δημιουργείται πλεόνασμα ενέργειας που μπορεί να διεγείρει ταλαντώσεις. Σε αυτή την περίπτωση, οι ασταθείς ταλαντώσεις είναι ο τρόπος με τον οποίο το πλάσμα επιστρέφει στην ισορροπία (με ελάχιστη εσωτερική ενέργεια). Τα διεγειρόμενα κύματα αλλάζουν τα χαρακτηριστικά του πλάσματος και τείνουν σταδιακά να εξαλείφουν τα αίτια που τροφοδοτούν την αστάθεια. Τα ασταθή κύματα κατατάσσονται σε διάφορες κατηγορίες, ανάλογα με τον τρόπο που η ελεύθερη ενέργεια εισέρχεται στο πλάσμα: (α) Αστάθειες ροής, λόγω της παρουσίας ρευμάτων, (β) Αστάθειες Rayleigh-Taylor, λόγω εξωτερικών δυνάμεων/ανομοιογενειών, (γ) Κινητικές αστάθειες, λόγω απόκλισης από τη θερμοδυναμική ισορροπία, (δ) Καθολικές αστάθειες, λόγω παγίδευσης του πλάσματος σε μικρό χώρο.

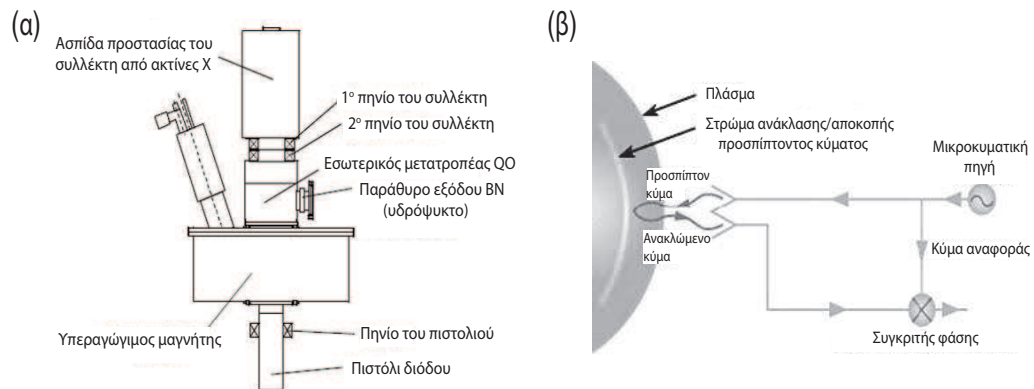
1.3.3 Εφαρμογές

Οι πρώτες εφαρμογές των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα έγιναν στην ιονόσφαιρα. Από τα αρχικά στάδια της ραδιοφωνίας, κάποιο ακατανόητο φαινόμενο στα ανώτατα στρώματα της ατμόσφαιρας εμπόδιζε τη μετάδοση με ένα πολύπλοκο τρόπο. Από το 1932, όταν ο Appleton δημοσίευσε την εργασία σχετικά με την ομώνυμη σχέση διασποράς, συγκεντρώθηκε πληθώρα δεδομένων για τη θέση και τη φύση του ιονοσφαιρικού πλάσματος και πολλά από τα παρατηρούμενα φαινόμενα στις ραδιοφωνικές μεταδόσεις έγιναν κατανοητά. Τα κυριότερα θέματα έρευνας σήμερα αποτελούν τα χαρακτηριστικά της διάδοσης κυμάτων στο ιονοσφαιρικό πλάσμα, οι μεταβολές στην ιονόσφαιρα λόγω της αλληλεπίδρασης κύματος-πλάσματος, καθώς και οι μεταβολές στη διάδοση λόγω της επίδρασης του Ηλίου. Οι μελέτες αυτές συνέβαλαν στη βελτίωση των τηλεπικοινωνιών. Στις μέρες μας, η ραδιοφωνική μετάδοση διαμέσου της ιονόσφαιρας βασίζεται στην ανάκλαση των κυμάτων στα στρώματα αποκοπής. Με δεδομένες τις γεωγραφικές θέσεις πομπού και δέκτη και τις παραμέτρους του ιονοσφαιρικού πλάσματος (κυρίως την πυκνότητα και το μαγνητικό πεδίο), η συχνότητα και η γωνία εκπομπής του σήματος μπορούν να ρυθμιστούν κατάλληλα ώστε η μετάδοση να είναι επιτυχής.

Γενικότερα στην Αστροφυσική, η μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ευρέως διαδεδομένη και, εκτός από τη βελτίωση της λήψης πληροφοριών από μακρινά αστρικά σώματα, παρέχει τη βάση για την κατανόηση της μεταφοράς ενέργειας και των ασταθειών στο πλάσμα. Η μεταφορά ενέργειας και ορμής μέσω των κυμάτων οδηγεί στη θέρμανση του πλάσματος και στη μεταβολή της κατανομής ταχυτήτων. Αντίστροφα, κατανομές που δεν αντιστοιχούν σε θερμοδυναμική ισορροπία οδηγούν σε αστάθειες και στην ενίσχυση των κυμάτων από τα σωματίδια. Στο αστροφυσικό πλάσμα κύριο ρόλο παίζουν οι μη γραμμικές αλληλεπιδράσεις κύματος-σωματιδίου, αλλά μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και η διάδοση των γραμμικών κυμάτων διότι εκεί εμφανίζονται οι ανταγωνιστικοί μηχανισμοί απόσβεσης (θέρμανσης) και ενίσχυσης (αστάθειας). Ενώ η κλίμακα μήκους του αστροφυσικού πλάσματος είναι μεγάλη, οπότε και η υπόθεση του ομογενούς πλάσματος δύναται να περιγράψει επαρκώς τα περισσότερα φαινόμενα, είναι η ασθενής ανομοιογένεια που καθορίζει τις περιοχές συντονισμού και αποκοπής των κυμάτων.

Μεγάλη ώθηση στη μελέτη των κυμάτων πλάσματος έδωσε η διεθνής προσπάθεια για την επίτευξη ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης. Καθώς τα ασταθή κύματα καθορίζουν τη χρονική κλίμακα της ευστάθειας, ή με άλλα λόγια την ανάπτυξη μικροασταθειών και τύρβης, η κατανόηση των γραμμικών και μη γραμμικών ασταθειών αποτελεί πάντα ένα σημαντικό κομμάτι της θεωρίας κυμάτων πλάσματος. Σήμερα, με την τεράστια υπολογιστική δύναμη που είναι διαθέσιμη, είναι εφικτή η χρήση κωδίκων που υπολογίζουν την εξέλιξη τέτοιων ασταθειών τοπικά αλλά και σε όλο το σύστημα. Οι κώδικες αυτοί έχουν διαφορετική τεχνοτροπία ανάλογα με το συγκεκριμένο μοντέλο φυσικής για το πλάσμα. Επίσης, η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα έχει πολλές εφαρμογές. Στα πειράματα σύντηξης, τα κύματα παράγονται από τα γυροτρόνια (gyrotrons). Το γυροτρόνιο είναι μια διάταξη τύπου maser, η φυσική της λειτουργίας του οποίου παρουσιάστηκε στις αρχές της δεκαετίας του '60 (για λεπτομέρειες βλ. Κεφ. 4). Η λειτουργία του βασίζεται στη μεταφορά ενέργειας από μια ασθενώς σχετικιστική δέσμη ηλεκτρονίων σε ένα υψίσυχνο κύμα μέσω του συντονισμού των ηλεκτρονίων με μια κατάλληλη κυκλικά πολωμένη συνιστώσα του κύματος (βλ. Σχ. 1.7(α)). Το κυματόνυσμα της παραγόμενης (σύμφωνης) ακτινοβολίας είναι σχεδόν κάθετο στον άξονα της διάταξης. Χαρακτηριστικό του γυροτρονίου είναι η ύπαρξη ισχυρού μόνιμου μαγνητικού πεδίου κατά μήκος του άξονά του, οπότε τα ηλεκτρόνια που παράγονται στην κάθοδο ακολουθούν ελικοειδείς τροχιές κατά μήκος της διάταξης.

Σαν πρώτες εφαρμογές των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα αναφέρουμε τη θέρμανση πλάσματος και την οδήγηση ρευμάτων. Η θέρμανση μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει έρθει στο προσκήνιο λόγω της ανάγκης να αυξηθεί η θερμοκρασία του πλάσματος σε επίπεδα ανάφλεξης (δηλ. πάνω από το κατώφλι για την έναρξη των θερμοπυρηνικών αντιδράσεων), ενώ η οδήγηση ηλεκτρικού ρεύματος συμβάλει στην ομαλή εξέλιξη του πλάσματος με την καταπολέμηση MHD ασταθειών και τη δημιουργία εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς (Internal Transport Barrier, (ITB)), αλλά και στην ενίσχυση του πολοειδούς μαγνητικού πεδίου. Η προσομοίωση τέτοιων καταστάσεων απαιτεί πολύ λεπτομερή περιγραφή της κυματικής διάδοσης και της απορρόφησης (λόγω κυκλοτρονικού συντονισμού) στο ανομοιογενές μαγνη-



Σχήμα 1.7: (α) Το γυροτρόνιο, η κυριότερη διάταξη για την παραγωγή υψίσυχνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, (β) Σχηματική αναπαράσταση πειράματος ανακλαστομετρίας (reflectometry) για τη μέτρηση της πυκνότητας στο πλάσμα.

τισμένο πλάσμα, καθώς είναι αναγκαία η ακριβής πρόβλεψη του από που θα περάσει και που θα αποτεθεί η κυματική ενέργεια. Λόγω της πολύπλοκης εξάρτησης της απόθεσης ισχύος από πολλούς παράγοντες, π.χ. το μαγνητικό πεδίο, τη γεωμετρία της διάδοσης του κύματος και την απόκριση του πλάσματος, μια ρεαλιστική μελέτη απαιτεί αριθμητική αντιμετώπιση. Τα κύματα που χρησιμοποιούνται είναι σε όλες τις περιοχές συχνοτήτων: Ion-Cyclotron (IC), Lower-Hybrid (LH) και Electron-Cyclotron (EC). Στα Κεφ. 3-5 της διατριβής, όπου μελετώνται τα προβλήματα αυτά από διαφορετικές σκοπιές, θα δώσουμε περισσότερες σχετικές λεπτομέρειες.

Μια άλλη κατηγορία εφαρμογών έχει να κάνει με τα διαγνωστικά πλάσματος (plasma diagnostics), τα οποία είναι πειραματικές διατάξεις μετρήσεως των παραμέτρων του πλάσματος. Δύο είναι οι κυριότερες τεχνικές μέτρησης που βασίζονται σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα: Η ανακλαστομετρία (reflectometry) και η συμβολομετρία (interferometry). Στην πρώτη, εκπέμπονται μικροκύματα με τέτοια συχνότητα ώστε να ανακλαστούν στο επιθυμητό σημείο εντός του πλάσματος (βλ. Σχ. 1.7(β)). Ο υπολογισμός της θέσης των στρωμάτων ανάκλασης βασίζεται στη σχέση διασποράς, οπότε γίνεται αντιληπτό πως το μοντέλο της απόκρισης πλάσματος είναι καθοριστικό για τα αποτελέσματα. Το πλάτος και η φάση του ανακλώμενου κύματος σχετίζονται με τη μιγαδική αντίσταση του πλάσματος, η οποία με τη σειρά της συνδέεται με τις μετρούμενες ποσότητες (πυκνότητα, μαγνητικό πεδίο). Από την άλλη, η συμβολομετρία βασίζεται στη δημιουργία και διάδοση ενός σύνθετου κύματος με την υπέρθεση δύο ή περισσότερων κυμάτων. Όταν το κύμα αυτό διαδίδεται στο πλάσμα, οι διαφορές των συστατικών κυμάτων, οι οποίες αρχικά είναι πολύ μικρές, αυξάνονται λόγω του ότι το πλάσμα είναι διανέμον μέσο. Από τις διαφορές στη φάση των κυμάτων είναι δυνατό να υπολογιστεί η πυκνότητα πλάσματος.

Τέλος, μια άλλη περιοχή όπου τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα παίζουν πρωτεύοντα ρόλο είναι η παραγωγή πλάσματος από laser. Εδώ η ισχύς των κυμάτων είναι τόσο

μεγάλη ώστε η απόκριση του πλάσματος είναι όχι μόνο μη γραμμική αλλά και σχετικιστική, καθώς τα ηλεκτρόνια κερδίζουν σε κάθε περίοδο ενέργειες συγκρίσιμες με την ενέργεια ηρεμίας. Επιπρόσθετα, υπάρχουν και άλλου είδους μη γραμμικότητες που οδηγούν στη δημιουργία κρουστικών κυμάτων (shock waves). Εν γένει το παραγόμενο πλάσμα δεν είναι μαγνητισμένο, υπάρχουν όμως και περιπτώσεις όπου δημιουργείται μαγνητικό πεδίο λόγω της επίδρασης του κύματος. Ακόμη, οι βαθμίδες μεταβολής των χωρικών ανομοιογενειών είναι πολύ μεγάλες, με αποτέλεσμα πολλές φορές η προσέγγιση της ήπιας ανομοιογένειας που αναφέραμε παραπάνω να μην αποτελεί καλή περιγραφή. Όλα αυτά καταδεικνύουν ότι η περιγραφή του πλάσματος laser απαιτεί πολυπλοκότερα μοντέλα απ' αυτά που χρησιμοποιούνται για το θερμοπυρηνικό πλάσμα. Την κύρια εφαρμογή των παραπάνω αποτελεί η αδρανειακή σύντηξη (inertial fusion), όπου γίνεται προσπάθεια να επιτευχθεί σύντηξη βομβαρδίζοντας στόχους υδρογόνου με ισχυρή ακτινοβολία laser.

2. ΤΟ ΠΛΑΣΜΑ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΩΝ

Στο παρόν κεφάλαιο επικεντρώνουμε στα χαρακτηριστικά της επίδρασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα. Το πρόβλημα αυτό συναντάται σε πολλές παραλλαγές, ανάλογα με τη συχνότητα του κύματος και την πυκνότητα του πλάσματος. Στη διατριβή αυτή, θα ασχοληθούμε συγκεκριμένα με την επίδραση υψίσυχων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε αραιό μαγνητισμένο πλάσμα, η οποία βρίσκει εφαρμογή στη μελέτη της ιονόσφαιρας. Η υψηλή συχνότητα, της τάξης μεγέθους της κυκλοτρονικής συχνότητας ηλεκτρονίων, και η χαμηλή πυκνότητα επιτρέπουν τη θεώρηση του πλάσματος ως συνόλου μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων. Σε αυτό το πλαίσιο, το καταλληλότερο εργαλείο για την περιγραφή είναι η θεωρία Hamilton για την κίνηση φορτίων σε ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Πέραν της δυναμικής της μη γραμμικής αλληλεπίδρασης φορτίου-κύματος, τα κυριότερα θέματα προς μελέτη είναι: (α) Ο στατιστικός χαρακτήρας της δύναμης που ασκείται στα ηλεκτρόνια και διαμορφώνει τις τροχιές τους, (β) Η ενεργειακή και χωρική διάχυση των ηλεκτρονίων εγκάρσια στο μαγνητικό πεδίο, (γ) Η ένταση και το φάσμα της ακτινοβολίας cyclotron που εκπέμπουν τα ηλεκτρόνια υπό την επίδραση του κυματικού πεδίου.

Η δομή του κεφαλαίου έχει ως εξής: Στην Ενót. 2.1 παρουσιάζεται το γενικό πρόβλημα της δυναμικής φορτισμένων σωματιδίων υπό την επίδραση ηλεκτροστατικών/ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, με έμφαση στην υπάρχουσα αρθρογραφία και στα θέματα όπου υπάρχει ανάγκη για διερεύνηση. Στην Ενót. 2.2 αναλύεται η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων και ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλαίσιο της θεωρίας Hamilton, με κατάληξη τη διατύπωση των κανονικών εξισώσεων κίνησης. Τα χαρακτηριστικά της δυναμικής των ηλεκτρονίων στο χώρο φάσεων παρουσιάζονται στην Ενót. 2.3, μέσω της απεικόνισης Poincaré και της συνάρτησης κατανομής ταχυτήτων. Στην Ενót. 2.4 καθορίζεται ο στατιστικός χαρακτήρας της ηλεκτρομαγνητικής δύναμης Lorentz και η ανώμαλη διάχυση, ενώ στην 2.5 μελετάται η ακτινοβολία cyclotron από τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια. Τέλος, στην Ενót. 2.6 συνοψίζονται και συζητούνται τα συμπεράσματα της μελέτης.

2.1 Γενικά στοιχεία

Η μη γραμμική αλληλεπίδραση φορτισμένων σωματιδίων με ηλεκτροστατικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι πολύ σημαντικό φαινόμενο, τόσο για το αστροφυσικό όσο και για το εργαστηριακό πλάσμα. Το φυσικό πρόβλημα έχει διερευνηθεί λεπτομερώς τα τελευταία τριάντα χρόνια, και στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τα κυριότερα αποτελέσματα. Αρχικά, μελετήθηκε η αλληλεπίδραση μη σχετικιστικών

ιόντων με ηλεκτροστατικά κύματα εντός μαγνητικού πεδίου. Για κύματα με συχνότητες κοντά στην ιοντική κυκλοτρονική συχνότητα, η αλληλεπίδραση καταλήγει σε έντονη επιτάχυνση των ιόντων όταν το πλάτος του κύματος και η αρχική ενέργεια του ιόντος έχουν τιμές πάνω από ένα κατώφλι. Η κίνηση των ιόντων γίνεται χαοτική, οπότε η θέρμανση των σωματιδίων λαμβάνει χώρα στη χαοτική περιοχή του φασικού χώρου [Smith and Kaufman 1975, Fukuyama et al 1977, Karney and Bers 1977]. Η περιοχή αυτή είναι φραγμένη γεωμετρικά, συνεπώς υπάρχει ένα όριο στη μέγιστη ενέργεια που μπορούν να πάρουν τα ιόντα. Ο παραπάνω μηχανισμός παρέχει μια εξήγηση για τη δημιουργία υπερθερμικών πληθυσμών ιόντων (δηλ. ουρών στην κατανομή ταχυτήτων) σε πειράματα κυκλοτρονικής θέρμανσης πλάσματος σε tokamak [Gladkovskii et al 1974], αλλά και για συγκεκριμένες παρατηρήσεις κατά την επιτάχυνση ιόντων στην ιονόσφαιρα [Vago et al 1992].

Η μελέτη της μη γραμμικής αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίων και ιόντων με πολλά ηλεκτροστατικά κύματα (κυματοπακέτο) εντός μαγνητικού πεδίου ανέδειξε ότι είναι δυνατό να έχουμε αλληλεπίδραση και χωρίς την ύπαρξη συντονισμού. Το φαινόμενο αυτό, για κατάλληλες τιμές των παραμέτρων του πλάσματος και του κυματικού φάσματος, μπορεί να οδηγήσει σε απεριόριστη πρόσληψη ενέργειας, ανεξάρτητα από την αρχική τιμή της ενέργειας των φορτίων [Benisti et al 1998]. Επιπλέον, έχει μελετηθεί η επιρροή των σχετικιστικών φαινομένων. Οι ιδιότητες του φασικού χώρου μεταβάλλονται σημαντικά όταν οι σχετικιστικές διορθώσεις λαμβάνονται υπόψη στους υπολογισμούς των τροχιών, και η πρόσληψη ενέργειας από τα φορτία εμφανίζεται εντονότερη [Shklyar 1981, Akimoto and Karimabadi 1987]. Τα σχετικιστικά φαινόμενα ενδέχεται να είναι πολύ σημαντικά για τα ηλεκτρόνια, όχι όμως τόσο σημαντικά για τα ιόντα. Για παράδειγμα, το φαινόμενο όπου ηλεκτρόνια με πολύ χαμηλή αρχική ενέργεια επιταχύνονται σημαντικά μπορεί να προσομοιωθεί μόνο στα πλαίσια του σχετικιστικού μοντέλου [Akimoto and Karimabadi 1987, Karimabadi and Angelopoulos 1989].

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, κάτω από ορισμένες συνθήκες, είναι πιο αποτελεσματικά από τα ηλεκτροστατικά στην επιτάχυνση των ηλεκτρονίων. Σε σχετικιστικό μαγνητισμένο πλάσμα, ο συντονισμός της κυκλοτρονικής συχνότητας με την μετατοπισμένη κατά Doppler συχνότητα κύματος οδηγεί σε απεριόριστη συμφασική επιτάχυνση, εφόσον το κύμα διαδίδεται παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο και ο συντελεστής διάθλασης είναι κοντά στο 1 [Roberts and Buchsbaum 1964, Woolley 1969]. Παρόμοια είναι τα συμπεράσματα και στην περίπτωση όπου μονοχρωματική ακτινοβολία (δηλ. κύμα με μια μόνο συχνότητα) διαδίδεται υπό γωνία στο μαγνητικό πεδίο [Villalon and Burke 1987, Menyuk et al 1988, Polymilis and Hizanidis 1993]. Όταν η παράλληλη συνιστώσα της φασικής ταχύτητας του κύματος είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός στο κενό, ο χώρος φάσεων δεν είναι περιορισμένος γεωμετρικά και είναι εφικτή η απεριόριστη επιτάχυνση των ηλεκτρονίων [Menyuk et al 1988], σε αντίθεση με την κάθετη διάδοση ηλεκτροστατικών κυμάτων που μελετήθηκε από τους Smith και Kaufman [Smith and Kaufman 1975, Fukuyama et al 1977], αλλά και με τη μη σχετικιστική προσέγγιση της αλληλεπίδρασης [Polymilis and Hizanidis 1993], όπου ο χώρος φάσεων είναι φραγμένος και η επιτάχυνση είναι περιορισμένη.

Η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων με περισσότερα από ένα ηλεκτρομαγνητικά κύματα έχει μελετηθεί τόσο στο πλαίσιο της θεωρίας Hamilton [Hizanidis 1989] όσο και μέσω συμπλεκτικών απεικονίσεων για την εξέλιξη των τροχιών στο χώρο φάσεων [Lichtenberg et al 1986]. Και στις δύο περιπτώσεις, αναδεικνύεται μια ισχυροποίηση του μηχανισμού στοχαστικής επιτάχυνσης σε σχέση με την περίπτωση του ενός κύματος. Οι εφαρμογές των παραπάνω είναι πολύ σημαντικές για τη μελέτη της επιτάχυνσης φορτισμένων σωματιδίων στην ιονόσφαιρα αλλά και για τα σύγχρονα πειράματα θερμοπυρηνικής σύντηξης. Για παράδειγμα, η θέρμανση πλάσματος μέσω του κυκλοτρονικού συντονισμού των ηλεκτρονίων, χρησιμοποιώντας έναν ή περισσότερους κυματικούς ρυθμούς, είναι ουσιαστικό συστατικό των σημερινών πειραματικών συσκευών σύντηξης (tokamaks, stellarators) [Gruber et al 2001].

Ο ρυθμός μεταφοράς των σωματιδίων στο χώρο φάσεων είναι σημαντική παράμετρος για την εξέλιξη του πλάσματος, ιδιαίτερα για το εργαστηριακό πλάσμα όπου ο περιορισμός της ολίσθησης/διάχυσης των σωματιδίων είναι καθοριστικής σημασίας για την ομαλή λειτουργία των αντιδραστήρων σύντηξης. Στην περίπτωση όπου η επιτάχυνση είναι στοχαστική, τα φορτία εκτελούν χαοτικές τροχιές, δηλ. έχουμε διάχυση [Smith and Kaufman 1975, Menyuk et al 1988]. Σε αυτό το πλαίσιο διάφορες μελέτες έδειξαν ότι, για ένα πλήθος περιπτώσεων, πληρούνται οι προϋποθέσεις ώστε η εξίσωση διάχυσης Fokker-Planck (FP) να περιγράφει καλά την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων [Zaslavsky and Chirikov 1972, Chirikov 1979]. Το ότι η συνάρτηση κατανομής δίνεται απ' την εξίσωση FP δεν είναι αυθαίρετη υπόθεση, αλλά προκύπτει αν θεωρήσουμε την επίδραση που έχει η διαταραχή (κύμα) στο μη διαταραγμένο τμήμα της κατανομής των ηλεκτρονίων (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [Brambilla 1998, Swanson 2003]). Η προσέγγιση αυτή είναι ένα μίγμα της γραμμικής υπόθεσης και της πλήρους μη γραμμικής αντιμετώπισης, γι' αυτό και καλείται ημιγραμμική (quasilinear).

Η ημιγραμμική θεωρία παρέχει τη δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων πέραν της γραμμικής προσέγγισης χωρίς να είναι ανάγκη να λυθούν οι πλήρεις μη γραμμικές εξισώσεις, όμως το εύρος ισχύος της είναι και αυτό περιορισμένο. Η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων-ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων έχει μελετηθεί στο πλαίσιο της εξίσωσης FP στην περίπτωση μονοχρωματικής ακτινοβολίας που διαδίδεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο [Farina et al 1993a, Farina et al 1993b] ή υπό γωνία [Hizanidis et al 1989, Farina et al 1994], αλλά και στην περίπτωση διακριτού κυματοπακέτου [Hizanidis 1989]. Όταν η ανάλυση γίνεται στην πλήρη χαοτική περιοχή, οι ημιγραμμικές προβλέψεις συμφωνούν με τα αριθμητικά αποτελέσματα απ' τις τροχιές [Farina et al 1993a], ενώ στην περίπτωση τοπικά χαοτικού φασικού χώρου οι αποκλίσεις είναι σημαντικές για μεγάλους χρόνους [Farina et al 1993b]. Άλλες μελέτες [Hizanidis 1989, Hizanidis et al 1989] έδειξαν ότι η διάχυση εξελίσσεται σε τρία στάδια με αρκετά διαφορετικές χρονικές κλίμακες, πολύ μεγαλύτερες από εκείνες που αναφέρθηκαν σε προηγούμενες μελέτες [Smith and Kaufman 1975], και η προσέγγιση FP δεν ισχύει πλέον μετά από κάποιο χρόνο. Ακόμη, σε μη γραμμικές προσομοιώσεις που έγιναν πρόσφατα, τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η απόκλιση μπορεί να είναι πολύ μεγάλη για παραμέτρους σχετικές με τα τωρινά πειράματα σύντηξης [Kamendje et al 2003, Kamendje et al 2005].

Σε πολλά άρθρα επάνω στο θέμα (λ.χ. [Zaslavsky 1985, Kornienko et al 1991, Chaikovsky and Zaslavsky 1991, Afanasiev et al 1991]) αναφέρεται ότι η ημιγραμμική θεωρία δεν ισχύει λόγω της παρουσίας συντονισμένων περιοδικών τροχιών (νησίδων) στο χώρο φάσεων. Αυτοί οι σχηματισμοί προκαλούν σημαντικές μεταβολές της κατανομής του πλάσματος στο χώρο/χρόνο, οι οποίες οδηγούν σε μη κανονική διάχυση. Η μετάβαση σε κανονική διάχυση συμβαίνει μόνο στην ισχυρά χαοτική περιοχή. Σε αρκετές δημοσιεύσεις [Chaikovsky and Zaslavsky 1991, Afanasiev et al 1991, Shlesinger et al 1993] διατυπώθηκε η άποψη ότι η ανώμαλη διάχυση είναι αποτέλεσμα μιας διαδικασίας Lévy [Lévy 1937]. Σε συστήματα όπου υπάρχει ανώμαλη διάχυση, η εξέλιξη της μέσης τιμής της απομάκρυνσης των φορτίων από την αρχική θέση είναι [Shlesinger et al 1993, Zaslavsky et al 1993]

$$\langle (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 \rangle \propto t^\alpha, \quad (2.1)$$

όπου $\alpha \neq 1$ είναι ο εκθέτης διάχυσης¹ (για $\alpha = 1$ η διάχυση είναι κανονική). Το είδος της ανώμαλης διάχυσης καθορίζεται απ' τον εκθέτη α : Αν $\alpha < 1$ η εξέλιξη στο χρόνο χαρακτηρίζεται σαν υποδιάχυση (sub-diffusion), ενώ αν $\alpha > 1$ έχουμε υπερδιάχυση (super-diffusion). Από πολλούς θεωρείται ότι η εξίσωση Fokker-Planck με κλασματικές παραγώγους (Fractional Fokker-Planck (FFP)) είναι το καταλληλότερο εργαλείο για τη μελέτη δυναμικών συστημάτων όπου εμφανίζεται ανώμαλη διάχυση [Zaslavsky 1994, Metzler et al 1998, Sokolov et al 2002, Chechkin et al 2002].

Όλα τα παραπάνω καταδεικνύουν ότι οι κινήσεις των σωματιδίων κατά την αλληλεπίδραση κύματος-φορτίου είναι αρκετά πιο πολύπλοκες απ' ότι κάποιος θα περίμενε αρχικά. Επικεντρώνοντας στην αλληλεπίδραση σχετικιστικών ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής συχνότητας εντός μαγνητικού πεδίου, παρότι το πρόβλημα αυτό έχει μελετηθεί διεξοδικά στο παρελθόν (βλ. παραπάνω τις αναφορές) υπάρχει ακόμη ισχυρή ασυμφωνία σχετικά με το είδος και τα χαρακτηριστικά της διάχυσης των σωματιδίων, αλλά και αρκετά θέματα που δεν έχουν διερευνηθεί όπως π.χ. τα χαρακτηριστικά του φάσματος της ακτινοβολίας που εκπέμπουν τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια. Τα βασικά ερωτήματα που τίθενται είναι δύο: (α) Η χρονική εξέλιξη της μεταφοράς των σωματιδίων κατά τη μη γραμμική αλληλεπίδραση ακολουθεί κανονική ή ανώμαλη διάχυση; (β) Η ημιγραμμική προσέγγιση είναι ικανή/επαρκής να περιγράψει την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής;

2.2 Θεωρία Hamilton της αλληλεπίδρασης κύματος-φορτίου

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη θεωρία Hamilton και τις κανονικές εξισώσεις για τη μη γραμμική αλληλεπίδραση σχετικιστικών ηλεκτρονίων με ένα ή περισσότερα ηλεκτρομαγνητικά κύματα εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Οι περιπτώσεις του απλού κύματος και του κυματοπακέτου παρουσιάζουν ορισμένες διαφορές στην αντιμετώπιση. Εδώ δε θα αναφέρουμε όλες τις σχετικές λεπτομέρειες (γι' αυτό το ζήτημα ο αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες των Πολυμίλη

¹ Το μισό του εκθέτη διάχυσης (δηλ. το $\alpha/2$) συναντάται στη βιβλιογραφία (ειδικά στον τομέα της ανάλυσης χρονοσειρών) και ως εκθέτης Hurst.

και Χιτζανίδη [Hizanidis 1989, Polymilis and Hizanidis 1993]), αλλά θα παρουσιάσουμε τη γενική περίπτωση του κυματοπακέτου και απ' αυτή θα συνάγουμε την απλούστερη περίπτωση που υπάρχει ένα μόνο κύμα.

Το κυματοπακέτο αποτελείται από N^2 δεξιόστροφα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητες $\omega_j \in [\omega - \Delta\omega/2, \omega + \Delta\omega/2]$ ($j = 1, \dots, N$), δηλ. με τιμές γύρω από μια κύρια συχνότητα ω , τα οποία διαδίδονται στο επίπεδο (x, z) υπό γωνία ϑ_w σε σχέση με το σταθερό μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$. Το εύρος ζώνης $\Delta\omega$ είναι μικρό κλάσμα της κύριας συχνότητας ω , τα πλάτη των πλευρικών κυμάτων (δηλ. των κυμάτων με την ελάχιστη και μέγιστη συχνότητα) είναι κλάσματα του πλάτους A_0 του κύριου ρυθμού, ενώ τα πλάτη των υπολοίπων κυμάτων παίρνουν τιμές που κατανέμονται ανάμεσα στα πλάτη των πλευρικών με γραμμική παρεμβολή. Για την αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων με το κυματοπακέτο το βαθμωτό δυναμικό είναι μηδέν, ενώ το διανυσματικό δυναμικό είναι [Hizanidis 1989]

$$\mathbf{A} = \sum_{j=1}^N A_{0j} (\cos \vartheta_w \sin \varphi_j \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi_j \hat{\mathbf{y}} - \sin \vartheta_w \sin \varphi_j \hat{\mathbf{z}}) + x B_0 \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.2)$$

όπου $A_{0j} = E_{0j}/\omega_j$ είναι τα πλάτη των όρων του διανυσματικού δυναμικού (εκπεφρασμένα ως προς τα αντίστοιχα πλάτη των ηλεκτρικών πεδίων), $\varphi_j = \omega_j(N_{xj}x + N_{zj}z - ct)/c$ οι φάσεις των ρυθμών, N_j ο δείκτης διάθλασης που αντιστοιχεί σε συχνότητα ω_j και $N_{xj} = N_j \sin \vartheta_w$, $N_{zj} = N_j \cos \vartheta_w$ είναι ο παράλληλος και ο εγκάρσιος δείκτης διάθλασης σε σχέση με το μαγνητικό πεδίο. Θεωρώντας το περιβάλλον πλάσμα ψυχρό, για τον υπολογισμό του δείκτη διάθλασης χρησιμοποιούμε τη σχέση διασποράς για κύματα R από τον Πίν. 1.2

$$N_j^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_j(\omega_j - |\omega_{ce}|)}.$$

Η προηγούμενη σχέση δεν είναι η ακριβής σχέση διασποράς για την περίπτωση που μελετάμε, δηλαδή για κύματα διαδιδόμενα υπο γωνία στο μαγνητικό πεδίο (για τη συγκεκριμένη σχέση βλ. [Stix 1992]), παρόλα αυτά είναι μια πολύ καλή προσέγγιση για τις τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή τη μελέτη [Menyuk et al 1988].

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, η μορφή της συνάρτησης Lagrange για τη σχετικιστική κίνηση ηλεκτρονίων εντός μικροκυματικού πεδίου είναι

$$\mathcal{L} = -m_e c^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{1/2} - |q_e|(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z). \quad (2.3)$$

Ο υπολογισμός των κανονικών ορμών π_i ($\chi_i = x, y, z$) δίνει

$$\pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\chi}_i} = m_e \dot{\chi}_i \left(1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2} \right)^{-1/2} - |q_e|A_i, \quad (2.4)$$

² Δεν πρέπει να συγχέονται τα σύμβολα που αντιστοιχούν σε δείκτες με τα σύμβολα που αντιστοιχούν σε μεγέθη (εδώ π.χ. ο συνολικός αριθμός ρυθμών N με το δείκτη διάθλασης N).

και η μορφή της συνάρτησης Hamilton προκύπτει

$$\mathcal{H} = c [m_e^2 c^2 + (\pi_x + |q_e|A_x)^2 + (\pi_y + |q_e|A_y)^2 + (\pi_z + |q_e|A_z)^2]^{1/2},$$

όπου, για ευκολία στην αναγνώριση των μεταβλητών, χρησιμοποιούμε για τις ορμές και το συμβολισμό $\pi_1 = \pi_x$, $\pi_2 = \pi_y$, $\pi_3 = \pi_z$. Με χρήση της Εξ. (2.2) για τις συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού μπορούμε να βρούμε τη συγκεκριμένη έκφραση της συνάρτησης Hamilton. Για την απλούστερη επίλυση του προβλήματος, κανονικοποιούμε την $\mathcal{H}$ με $m_e c^2$, το χρόνο με $|\omega_{ce}|^{-1}$, τις συντεταγμένες με $c/|\omega_{ce}|$, τις κανονικές ορμές με $m_e c$ και τα πλάτη του κύματος με $m_e c/|q_e|$, ενώ οι κανονικοποιημένες φάσεις είναι $\varphi_j = \omega_j(N_{xj}x + N_{zj}z - t)$. Ακόμη, χρησιμοποιούμε τα ίδια σύμβολα για τις φυσικές και τις κανονικοποιημένες μεταβλητές. Σε αυτό το πλαίσιο, η μορφή της συνάρτησης Hamilton είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \left[1 + \left(\pi_x + \sum_{j=1}^N A_{0j} \cos \vartheta_w \sin \varphi_j \right)^2 + \left(\pi_y + x + \sum_{j=1}^N A_{0j} \cos \varphi_j \right)^2 \right. \\ & \left. + \left(\pi_z - \sum_{j=1}^N A_{0j} \sin \vartheta_w \sin \varphi_j \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Παρατηρήστε ότι με βάση την Εξ. (1.24) είναι $\mathcal{H} = \gamma$, δηλ. η συνάρτηση Hamilton είναι ίση με την ενέργεια του ηλεκτρονίου. Επιπλέον, η $\mathcal{H}$ δεν εξαρτάται ρητά από τη συντεταγμένη y , και συνεπώς η συζυγής ορμή π_y είναι σταθερά της κίνησης.

Η συνάρτηση Hamilton της Εξ. (2.5) είναι χρονικά εξαρτημένη, καθώς οι φάσεις φ_j είναι συναρτήσεις του χρόνου. Η μελέτη απλοποιείται σημαντικά αν απαλειφεί ο χρόνος. Αυτό μπορεί να γίνει με τη βοήθεια ενός κανονικού μετασχηματισμού τύπου 2 (βλ. Πίν. 1.1), με γεννήτρια συνάρτηση [Hizanidis 1989]

$$\mathcal{F}_2 = x' \pi_x + y' \pi_y + \sum_{j=1}^N \left(z' - \frac{t}{N_{zj}} \right) \pi_{zj}, \quad (2.6)$$

όπου ως τονούμενες συμβολίζονται οι παλαιές μεταβλητές. Η παραπάνω γεννήτρια συνάρτηση δίνει τις σχέσεις μετασχηματισμού

$$\pi'_x = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial x'} = \pi_x, \quad (2.7\alpha)$$

$$x = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \pi_x} = x', \quad (2.7\beta)$$

$$\pi'_y = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial y'} = \pi_y, \quad (2.7\gamma)$$

$$y = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \pi_y} = y', \quad (2.7\delta)$$

$$\pi'_z = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial z'} = \pi_z, \quad (2.7\epsilon)$$

$$z_j = \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial \pi_{zj}} = z' - \frac{t}{N_{zj}}, \quad (2.7\sigma\tau)$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}' + \frac{\partial \mathcal{F}_2}{\partial t} = \gamma - \sum_{j=1}^N \frac{\pi_{zj}}{N_{zj}}. \quad (2.7\zeta)$$

Στην τελευταία σχέση ο παράγοντας Lorentz έχει την ίδια μαθηματική έκφραση που είχε και στην παλιά συνάρτηση Hamilton, με τη φάση του κύματος όμως να έχει τώρα τη μορφή $\varphi_j = \omega_j(N_{xj}x + N_{zj}z)$ (χωρίς χρονική εξάρτηση).

Ύστερα απ' το μετασχηματισμό για την απαλοιφή του χρόνου το σύστημα γίνεται $N + 2$ βαθμών ελευθερίας, των συντεταγμένων (x, y, z_j) . Αυτό καθιστά τη μελέτη του συστήματος αρκετά δύσκολη, λόγω του μεγάλου αριθμού κανονικών εξισώσεων που αντιστοιχούν στη νέα συνάρτηση Hamilton. Όμως, οι βαθμοί ελευθερίας είναι δυνατό να μειωθούν σε τέσσερις με τη βοήθεια ενός άλλου κανονικού μετασχηματισμού, τύπου 3. Ορίζουμε τις νέες συντεταγμένες z_a, z_h παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο και τη γεννήτρια συνάρτηση του μετασχηματισμού

$$\mathcal{F}_3 = z_a \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{N_h}{N_{zj}}\right) \pi_{zj} + z_h \sum_{j=1}^N \frac{N_h}{N_{zj}} \pi_{zj},$$

όπου N_h είναι ο αρμονικός μέσος των παράλληλων δεικτών διάθλασης N_{zj} . Οι σχέσεις του μετασχηματισμού όσον αφορά τον άξονα z είναι

$$z_j = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial \pi_z} = z_a \left(1 - \frac{N_h}{N_{zj}}\right) + z_h \frac{N_h}{N_{zj}},$$

$$\pi_a = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial z_a} = \sum_{j=1}^N \left(1 - \frac{N_h}{N_{zj}}\right) \pi_{zj},$$

$$\pi_h = -\frac{\partial \mathcal{F}_3}{\partial z_h} = N_h \sum_{j=1}^N \frac{\pi_{zj}}{N_{zj}},$$

και προκύπτει η νέα συνάρτηση Hamilton [Hizanidis 1989]

$$\mathcal{H} = \gamma - \frac{\pi_h}{N_h}, \quad (2.8)$$

όπου ο παράγοντας Lorentz δίνεται από τη σχέση

$$\gamma = \left[1 + \left(\pi_x + \cos \vartheta_w \sum_{j=1}^N A_{0j} \sin \varphi_j \right)^2 + \left(\pi_y + x + \sum_{j=1}^N A_{0j} \cos \varphi_j \right)^2 + \left(\pi_a + \pi_h - \sin \vartheta_w \sum_{j=1}^N A_{0j} \sin \varphi_j \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.9)$$

και η φάση του κάθε ρυθμού είναι

$$\varphi_j = \omega_j [N_{xj}x + (N_{zj} - N_h)z_a + N_h z_h]. \quad (2.10)$$

Οι νέες κανονικές μεταβλητές του συστήματος είναι οι $x, y, z_a, z_h, \pi_x, \pi_y, \pi_a, \pi_h$.

Από τον παραπάνω φορμαλισμό μπορούμε να υπολογίσουμε τις κανονικές εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων με το γνωστό τρόπο (βλ. Υποεν. 1.2.1). Τις παραθέτουμε σε κανονικοποιημένη μορφή

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_x} = \frac{\pi_x + \cos \vartheta_w \sum_{j=1}^N A_{0j} \sin \varphi_j}{\gamma}, \quad (2.11\alpha)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_y} = \frac{\pi_y + x + \sum_{j=1}^N A_{0j} \cos \varphi_j}{\gamma}, \quad (2.11\beta)$$

$$\frac{dz_a}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_a} = \frac{\pi_a - \sin \vartheta_w \sum_{j=1}^N A_{0j} \sin \varphi_j}{\gamma}, \quad (2.11\gamma)$$

$$\frac{dz_h}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi_z} = \frac{\pi_h - \sin \vartheta_w \sum_{j=1}^N A_{0j} \sin \varphi_j}{\gamma} - \frac{1}{N_h}, \quad (2.11\delta)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_x}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{1}{\gamma} \left\{ (\pi_y + x) \left(\sum_{j=1}^N N_{xj} \omega_j A_{0j} \sin \varphi_j - 1 \right) - \sum_{j=1}^N A_{0j} \cos \varphi_j \right. \\ \left. + [(\pi_a + \pi_h) \sin \vartheta_w - \pi_x \cos \vartheta_w] \sum_{j=1}^N N_{xj} \omega_j A_{0j} \cos \varphi_j \right\}, \quad (2.11\epsilon) \end{aligned}$$

$$\frac{d\pi_y}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = 0, \quad (2.11\sigma\tau)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_a}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_a} = \frac{1}{\gamma} \left\{ (\pi_y + x) \sum_{j=1}^N (N_{zj} - N_h) \omega_j A_{0j} \sin \varphi_j + [(\pi_a + \pi_h) \sin \vartheta_w \right. \\ \left. - \pi_x \cos \vartheta_w] \sum_{j=1}^N (N_{zj} - N_h) \omega_j A_{0j} \cos \varphi_j \right\}, \quad (2.11\zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi_z}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_h} = \frac{1}{\gamma} \left\{ (\pi_y + x) \sum_{j=1}^N N_h \omega_j A_{0j} \sin \varphi_j + [(\pi_a + \pi_h) \sin \vartheta_w \right. \\ \left. - \pi_x \cos \vartheta_w] \sum_{j=1}^N N_h \omega_j A_{0j} \cos \varphi_j \right\}. \quad (2.11\eta) \end{aligned}$$

Η θεωρία Hamilton για μονοχρωματικό κύμα ($N = 1$) μπορεί να σχηματιστεί με βάση ότι παρουσιάσαμε παραπάνω. Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα είναι απλούστερο: Οι βαθμοί ελευθερίας μετά την απαλοιφή του χρόνου είναι τρεις, οι καρτεσιανές συντεταγμένες x, y, z με την y να είναι αγνοήσιμη, και δε χρειάζεται μετασχηματισμός για να μειωθούν οι διαστάσεις του συστήματος. Η συνάρτηση Hamilton μπορεί να βρεθεί αφού θέσουμε $z_a = p_a = 0$, $z_h = z$, $p_h = p_z$ και $N_h = N_z$ στις Εξ. (2.8), (2.9) και (2.10), οπότε $\varphi = \omega(N_x x + N_z z)$ και

$$\mathcal{H} = [1 + (\pi_x + A_0 \cos \vartheta_w \sin \varphi)^2 + (\pi_y + x + A_0 \cos \varphi)^2 + (\pi_z - A_0 \sin \vartheta_w \sin \varphi)^2]^{1/2} - \frac{\pi_z}{N_z},$$

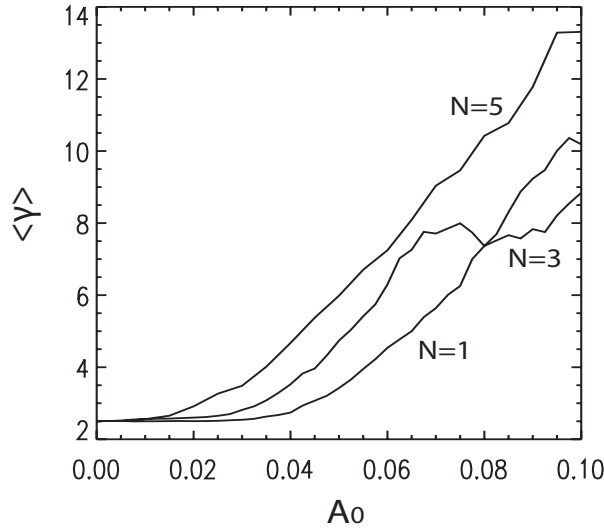
και οι κανονικές εξισώσεις υπολογίζονται με τη γνωστή διαδικασία.

2.3 Δυναμική του χώρου φάσεων

Οι κυριότεροι στόχοι της μελέτης της δυναμικής των ηλεκτρονίων κατά την αλληλεπίδραση με ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι: (α) Η σχηματική απεικόνιση και η περιγραφή του χώρου φάσεων, (β) Ο υπολογισμός της εξέλιξης της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων (ειδικά για μεγάλους χρόνους). Ο χώρος φάσεων του συγκεκριμένου συστήματος είναι τριών διαστάσεων, και σε τέτοιες περιπτώσεις η απεικόνιση γίνεται μέσω επιφανειών τομής Poincaré. Με αυτό τον τρόπο είναι δυνατό να εντοπιστούν εύκολα οι περιοχές όπου υπάρχει οργάνωση ή/και χάος, δηλ. ουσιαστικά να γίνει μια "χαρτογράφηση" του χώρου φάσεων.

Στις αριθμητικές προσομοιώσεις, τόσο στην παρούσα όσο και στις επόμενες ενότητες, η επιλογή για τις τιμές των παραμέτρων είναι η ακόλουθη: Το μαγνητικό πεδίο είναι $B_0 = 3.5 \cdot 10^{-5} \text{T}$, που αντιστοιχεί σε κυκλοτρονική συχνότητα $\omega_{ce} = 1.96 \text{MHz}$, ενώ η πυκνότητα πλάσματος είναι $n_e = 10^2 \text{cm}^{-3}$, οπότε η συχνότητα πλάσματος είναι $\omega_{pe} = 0.564 \text{MHz}$. Πρακτικά, οι τιμές αυτές αντιστοιχούν στην ιονόσφαιρα σε ύψος περίπου 130km . Η κύρια συχνότητα του κυματοπακέτου είναι $\omega = 6 \text{MHz}$, στο τμήμα του φάσματος των ραδιοκυμάτων, και το εύρος ζώνης είναι $\Delta\omega = 0.12 \text{MHz}$, το οποίο αναλογεί σε 2% της κύριας συχνότητας. Η γωνία διάδοσης, εκτός αν δηλωθεί διαφορετική, είναι $\vartheta_w = 40^\circ$. Οι κανονικές εξισώσεις κίνησης ολοκληρώνονται αριθμητικά με έναν αλγόριθμο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης [Press et al 1993]. Η ακρίβεια ελέγχεται μέσω του σφάλματος στον υπολογισμό της σταθερής συνάρτησης Hamilton, το οποίο βρέθηκε να είναι της τάξης του 10^{-8} .

Στο συγκεκριμένο σύστημα, το ποσοστό των χαοτικών τροχιών αρχίζει να γίνεται σημαντικό για πλάτη μεγαλύτερα από μια κρίσιμη τιμή A_{0c} , η οποία εξαρτάται απ' τη συχνότητα κύματος και τη γωνία διάδοσης [Polymilis and Hizanidis 1993]. Η τιμή A_{0c} μπορεί να βρεθεί τοπικά με βάση το ότι για $A_0 > A_{0c}$ τα ηλεκτρόνια αρχίζουν να επιταχύνονται σημαντικά. Στο Σχ. 2.1 δίνεται η μέση ενέργεια ενός αρχικά μονοενεργειακού πληθυσμού 1000 ηλεκτρονίων σαν συνάρτηση του πλάτους A_0 , τόσο για αλληλεπίδραση με ένα κύμα όσο και με κυματοπακέτο $N = 3, 5$ ρυθμών.



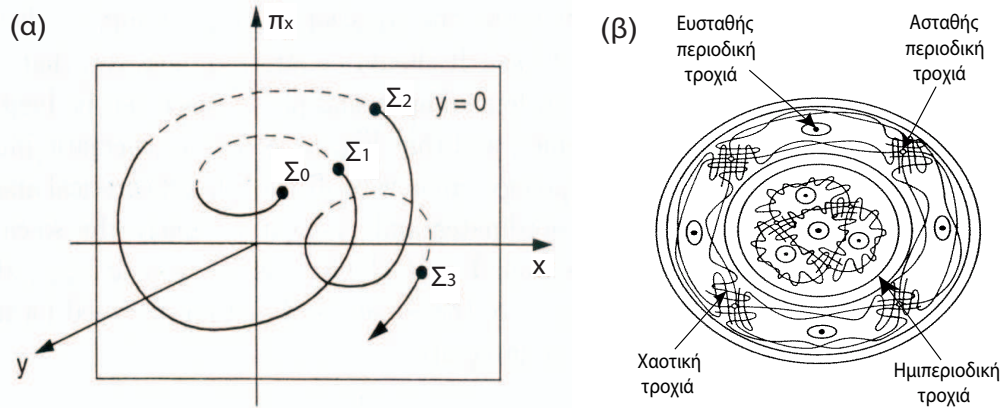
Σχήμα 2.1: Μέση ενέργεια $\langle \gamma \rangle$ ενός αρχικά μονοενεργειακού πληθυσμού ηλεκτρονίων ($\gamma_0 = 2.5$) σαν συνάρτηση του πλάτους κύματος A_0 για $N = 1, 3, 5$.

Η αρχική ενέργεια του δείγματος είναι $\gamma_0 = 2.5$ (1.279MeV), και η αλληλεπίδραση διαρκεί $t = 3000$ (0.48ms). Η ενέργεια παραμένει περίπου σταθερή για μικρά πλάτη, ώσπου μια απότομη αύξηση συμβαίνει κοντά στην τιμή $A_{0c} = 0.035$ για $N = 1$, $A_{0c} = 0.025$ για $N = 3$ και $A_{0c} = 0.01$ για $N = 5$. Η εμφάνιση του χάους στο σύστημα έρχεται με παρόμοιο τρόπο σαν συνάρτηση της γωνίας διάδοσης.

2.3.1 Επιφάνειες τομής Poincaré

Στα δυναμικά συστήματα πολλών βαθμών ελευθερίας υπάρχει αδυναμία να έχουμε καλή εποπτεία του χώρου φάσεων, καθώς οι διαστάσεις του είναι περισσότερες από τρεις. Προβάλλοντας το χώρο φάσεων σε οποιοδήποτε επίπεδο υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να χαθεί ή να αλλοιωθεί η διαθέσιμη πληροφορία, καθώς οι προβολές δε διατηρούν βασικές ιδιότητες του χώρου φάσεων, όπως π.χ. το ότι οι φασικές καμπύλες δεν τέμνονται μεταξύ τους. Η πιο αξιόπιστη μέθοδος είναι να ληφθεί μια τομή του χώρου φάσεων επί ενός κατάλληλα επιλεγμένου επιπέδου που σχηματίζεται από συζυγείς μεταβλητές. Η επιφάνεια που προκύπτει με αυτό τον τρόπο ονομάζεται επιφάνεια τομής Poincaré (Poincaré surface of section (PSS)) [Poincaré 1957, Lichtenberg and Lieberman 1992]. Το κριτήριο για την επιλογή του επιπέδου είναι αυτό να τέμνεται από όσο το δυνατό περισσότερες φασικές τροχιές, έτσι ώστε να συλλέγεται στην επιφάνεια τομής η μέγιστη δυνατή πληροφορία. Γι' αυτό το λόγο, κατά την επιλογή λαμβάνουμε υπόψη ειδικά χαρακτηριστικά του συστήματος όπως λ.χ. περιοδικότητες ή συμμετρίες.

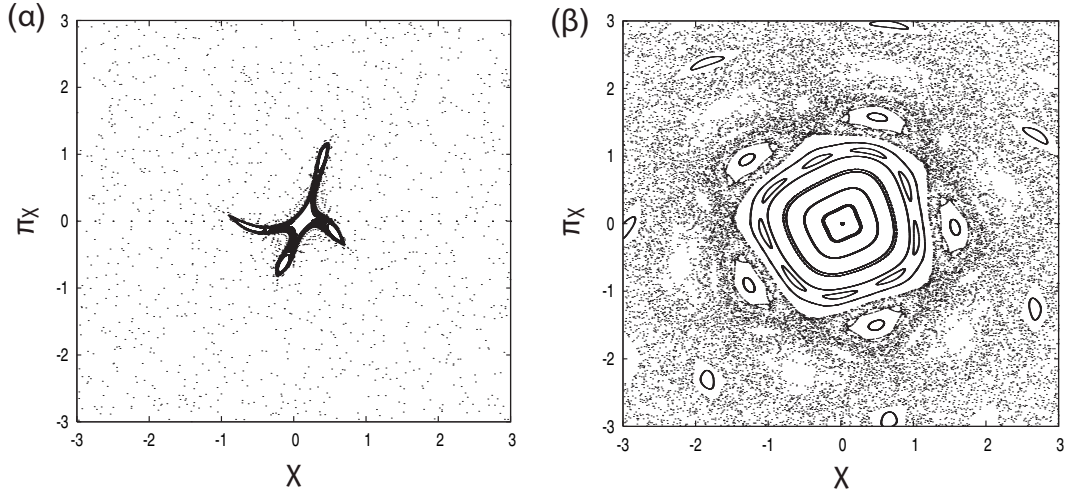
Αναπαριστάμε τη διαδικασία αυτή για σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας στο Σχ. 2.2(α), όπου φαίνονται τέσσερα διαδοχικά σημεία τομής μιας φασικής τροχιάς. Τα σημεία τομής Σ_j λαμβάνονται κάθε φορά που η τροχιά τέμνει το επίπεδο $y = 0$ με την



Σχήμα 2.2: (α) Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας λήψης σημείων τομής Poincaré σε σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας, (β) Τυπική εικόνα (sketch) του χώρου φάσεων ενός δυναμικού συστήματος.

ίδια φορά ροής. Μαθηματικά, η διαδικασία αυτή είναι αντίστοιχη με ένα διαφορομορφισμό $\Sigma_j = g(\Sigma_{j-1}, t_j)$, μέσω του οποίου η κίνηση διακριτοποιείται στην απεικόνιση του σημείου τομής Σ_{j-1} στο Σ_j (t_j ο χρόνος κίνησης μεταξύ των δύο σημείων). Ο διαφορομορφισμός αυτός είναι γνωστός σαν απεικόνιση Poincaré (Poincaré map) [Poincaré 1957]. Με αυτό τον τρόπο, η χρονική εξέλιξη μιας τροχιάς σχηματίζει πάνω στην επιφάνεια τομής μια μονοσήμαντη αλληλουχία σημείων. Είναι ευνόητο ότι (α) μια περιοδική τροχιά αντιστοιχεί σε ένα σύνολο σταθερών σημείων, (β) μια ημιπεριοδική τροχιά σχηματίζει μια κλειστή, συνεχή καμπύλη, (γ) μια χαοτική τροχιά αντιστοιχεί σε τυχαία κατανομημένα σημεία. Καθώς όλα τα παραπάνω είδη τροχιών συνήθως συνυπάρχουν στο χώρο φάσεων ενός δυναμικού συστήματος, είναι λογικό και οι μορφολογίες που περιγράψαμε να συναντώνται στην ίδια επιφάνεια τομής. Μια τυπική εικόνα για ένα διατηρητικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας φαίνεται στο Σχ. 2.2(β). Στην περίπτωση αυτή, λόγω της διατήρησης της ενέργειας, ο χώρος φάσεων είναι τριών διαστάσεων και η επιφάνεια τομής είναι 2-διάστατη.

Η αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικό κύμα αντιστοιχεί σε δυναμικό σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας (η συντεταγμένη y είναι κυκλική) με σταθερή συνάρτηση Hamilton, και συνεπώς ο χώρος φάσεων μπορεί να απεικονιστεί στις δύο διαστάσεις χρησιμοποιώντας τομές Poincaré. Στο Σχ. 2.3 παρουσιάζουμε την επιφάνεια τομής για πλάτος κύματος (α) $A_0 = 0.5$, (β) $A_0 = 0.05$. Για να σχηματίσουμε τις επιφάνειες τομής, υπολογίζουμε αριθμητικά τις τροχιές ενός αριθμού ηλεκτρονίων (20 – 50) με τυχαίες αρχικές συνθήκες για χρόνους $t = 2000 - 3000$. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, λόγω του ότι η κίνηση των ηλεκτρονίων δεν είναι περιορισμένη στο χώρο αλλά αυτά διαφεύγουν κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου, εξαιτίας της παράλληλης συνιστώσας του ηλεκτρικού πεδίου E_z , η καταλληλότερη επιλογή είναι το επίπεδο τομής να ακολουθεί την κίνηση των ηλεκτρονίων. Έτσι, τα σημεία τομής λαμβάνονται "στροβοσκοπικά" (δηλ. επαναληπτικά) κάθε φορά που ο όρος φάσης $\omega N_z z$ είναι πολλαπλάσιος του 2π με την ίδια φορά κίνησης $\dot{z} < 0$.

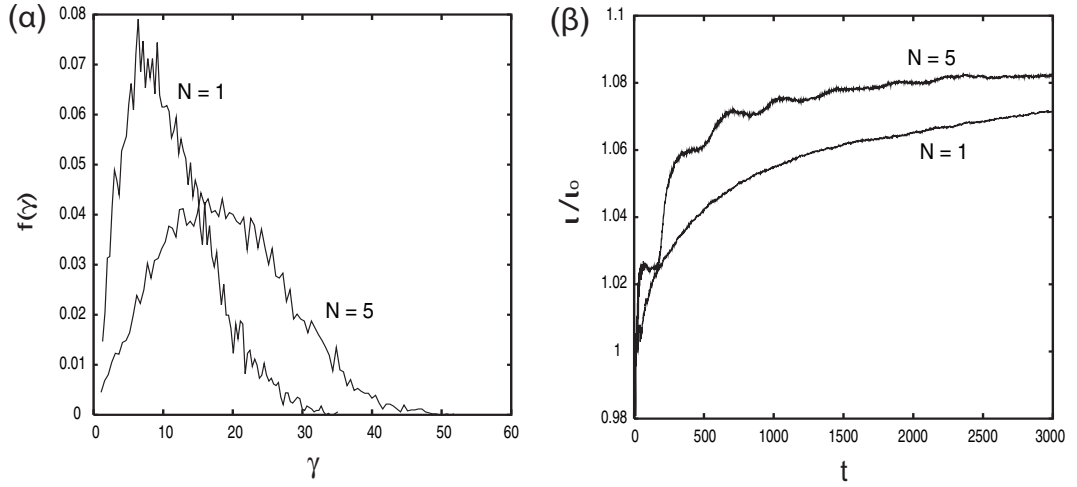


Σχήμα 2.3: Επίπεδο τομής Poincaré (χ, π_χ) για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-κύματος, για πλάτος κύματος (α) $A_0 = 0.5$, (β) $A_0 = 0.05$.

Απ' το Σχ. 2.3(α) βλέπουμε ότι για πλάτος $A_0 = 0.5$ η χαοτική περιοχή του χώρου φάσεων είναι πολύ μεγαλύτερη από την αντίστοιχη οργανωμένη (είναι οι κλειστές καμπύλες γύρω απ' την αρχή των αξόνων). Όσο κατεβαίνουμε σε μικρότερο πλάτος, ο φασικός χώρος μοιάζει όλο και περισσότερο με ένα πολύπλοκο μίγμα οργανωμένης και χαοτικής συμπεριφοράς (βλ. Σχ. 2.3(β)). Μέσα στη χαοτική περιοχή, υπάρχει ένας μεγάλος αριθμός από νησίδες σε πολλές διαφορετικές κλίμακες μεγέθους. Οι σχηματισμοί αυτοί είναι αποτέλεσμα του συντονισμού της περιστροφής των ηλεκτρονίων γύρω απ' το μαγνητικό πεδίο με την κυματική ταλάντωση, και αντιστοιχούν σε ευσταθείς περιοδικές τροχιές. Αυτό σημαίνει ότι κάποια από τα ηλεκτρόνια που θα βρεθούν στην περιοχή εκείνη του χώρου φάσεων ενδέχεται να παγιδευτούν σε τροχιές γύρω απ' το μαγνητικό πεδίο. Έτσι, εκτός από τις καθαρά οργανωμένες και τις καθαρά χαοτικές τροχιές, υπάρχουν και πιο πολύπλοκες τροχιές που είναι συνδυασμός περιστροφής και διάχυσης.

2.3.2 Κατανομή ενέργειας των ηλεκτρονίων

Η συνάρτηση κατανομής της ενέργειας των ηλεκτρονίων παρέχει σημαντικές πληροφορίες για τη δυναμική των ηλεκτρονίων χωρίς να απαιτείται η ανάλυση των λεπτομερειών των τροχιών (βλ. Υποεν. 1.2.3). Όπως αναφέραμε και στην Ενότητα 2.1, σε συστήματα όπου η διάχυση στο χώρο φάσεων είναι το κυρίαρχο φαινόμενο, η συνάρτηση κατανομής (ή σωστότερα "συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας") μπορεί να αντιστοιχηθεί με τη λύση μιας εξίσωσης FP. Όταν όμως ο χώρος φάσεων έχει την εικόνα του Σχ. 2.3(β), δηλ. τα δυναμικά χαρακτηριστικά των κινήσεων είναι ανάμικτα οργανωμένα και χαοτικά, ο απευθείας υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής απαιτεί την επίλυση μιας εξίσωσης FFP ή των αντίστοιχων ολοκληρωτικών εξισώσεων (integral equations), οι οποίες είναι αρκετά υψηλής δυσκολίας.



Σχήμα 2.4: (α) Συνάρτηση κατανομής ενέργειας, (β) Ηλεκτρικό ρεύμα σαν συνάρτηση του χρόνου, για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων αρχικής ενέργειας $\gamma_0 = 2.5$ με $N = 1, 5$ ηλεκτρομαγνητικά κύματα πλάτους $A_0 = 0.1$.

Έμμεσα, η συνάρτηση κατανομής ενός μεγέθους είναι δυνατό να υπολογιστεί μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης των τροχιών ενός κατάλληλα επιλεγμένου στατιστικού δείγματος ηλεκτρονίων και την ταξινόμηση (binning) των αποτελεσμάτων σε καθορισμένα διαστήματα (κλάσεις) του μεγέθους.

Ακολουθήσαμε αυτή την οδό και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα. Στο Σχ. 2.4(α) φαίνεται η συνάρτηση κατανομής της ενέργειας των ηλεκτρονίων $f(\gamma)$ μετά την αλληλεπίδραση με απλό κύμα ($N = 1$) και με κυματοπακέτο $N = 5$ ρυθμών. Ο υπολογισμός πραγματοποιήθηκε με βάση δείγμα 10000 ηλεκτρονίων της ίδιας αρχικής ενέργειας $\gamma_0 = 2.5$, οπότε η αρχική συνάρτηση κατανομής είναι $f(\gamma, t = 0) = \delta(\gamma - \gamma_0)$. Το πλάτος κύματος είναι $A_0 = 0.1$, ενώ η αλληλεπίδραση διαρκεί $t = 3000$. Και στις δύο περιπτώσεις, η μορφή της κατανομής φανερώνει την ύπαρξη ανώμαλης διάχυσης στο σύστημα. Με μια πρώτη ματιά, ο αριθμός των ηλεκτρονίων στην ουρά της κατανομής (δηλ. στις υψηλές ενέργειες) είναι αρκετά μεγαλύτερος απ' ότι προβλέπει η ημιγραμμική θεωρία μέσω της εξίσωσης FP. Η λεπτομερής σύγκριση της συνάρτησης κατανομής από πλήρεις μη γραμμικούς υπολογισμούς με τη λύση της εξίσωσης FP ξεφεύγει από τα όρια της διατριβής αυτής, αλλά έχει μελετηθεί σε πρόσφατες εργασίες [Kamendje et al 2003].

Στο Σχ. 2.4(β) απεικονίζεται η χρονική εξέλιξη του ηλεκτρικού ρεύματος $I = |q_e| \langle v \rangle$ (ροπή 1^{ης} τάξης της συνάρτησης κατανομής) που δημιουργείται απ' τις κινήσεις των ηλεκτρονίων. Στο σχήμα αυτό, οι τιμές του ρεύματος είναι κανονικοποιημένες ως προς το αρχικό ρεύμα $I_0 = |q_e| v_0$. Και στις δύο περιπτώσεις το ρεύμα αυξάνεται στην αρχή με έντονο ρυθμό, ο οποίος στη συνέχεια μειώνεται σημαντικά. Παρατηρήστε ότι η επιτάχυνση των ηλεκτρονίων γίνεται πió έντονη όσο αυξάνεται ο αριθμός των κυματικών ρυθμών N . Αυτό φαίνεται και στο 2.4(α), όπου η συνάρτηση κατανομής για $N = 5$ είναι πió "απλωμένη" απ' ότι για $N = 1$.

2.4 Ανώμαλη διάχυση

Η μελέτη της μορφολογίας του χώρου φάσεων και της συνάρτησης κατανομής, η οποία μας απασχόλησε στην προηγούμενη ενότητα, δίνει μία πρώτη ένδειξη για τα κύρια ποιοτικά χαρακτηριστικά των κινήσεων των ηλεκτρονίων. Μια δεύτερη ένδειξη για το είδος της διάχυσης μπορεί να έρθει από τη μελέτη των χαρακτηριστικών της δύναμης Lorentz. Εν γένει, σε δυναμικά συστήματα όπου ένα μέρος των τροχιών είναι χαοτικές, οι τιμές των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια ακολουθούν κάποια στατιστική κατανομή. Η κατανομή αυτή συνδέεται άμεσα, ή πιο σωστά καθορίζει το είδος της διάχυσης των σωματιδίων.

Ο καθορισμός του είδους της διάχυσης απαιτεί τον υπολογισμό του εκθέτη α που εμφανίζεται στην Εξ. (2.1). Σε συστήματα όπου το χάος είναι συντριπτικά η κυρίαρχη συμπεριφορά, η κίνηση μοιάζει αρκετά με τον τυχαίο βηματισμό (random walk) της κίνησης Brown. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η συνάρτηση κατανομής των τυχαίων δυνάμεων είναι Gaussian και η μέση τιμή του τετραγώνου της απομάκρυνσης είναι ανάλογη του χρόνου (περίπτωση $\alpha = 1$). Όμως, όπως είπαμε και στην Ενότ. 2.1, υπάρχουν πολλές άλλες περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις δεν έχουν τόσο απλή στατιστική και η διάχυση είναι ανώμαλη. Μια τέτοια περίπτωση είναι εν γένει και η αλληλεπίδραση φορτίου-κύματος, όπου οι συντονισμοί στο χώρο φάσεων περιπλέκουν τις στατιστικές ιδιότητες των κινήσεων των φορτίων.

2.4.1 Στατιστικός χαρακτήρας της δύναμης Lorentz

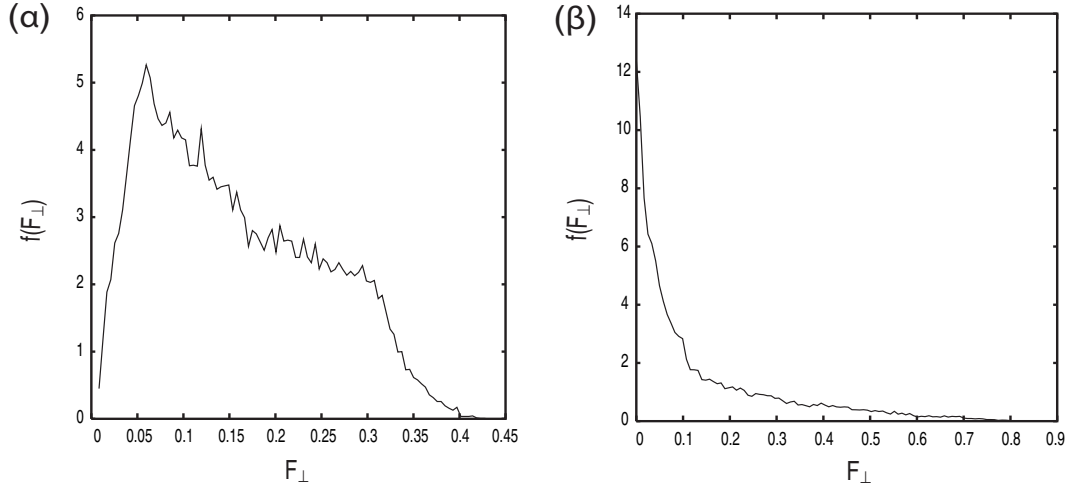
Η εξίσωση κίνησης για ένα ηλεκτρόνιο υπό την επίδραση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εντός μαγνητικού πεδίου προκύπτει με βάση τις Εξ. (1.9), (1.13)

$$\frac{d(\gamma m_e \mathbf{v})}{dt} = -|q_e| \{ \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times [\mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)] \}, \quad (2.12)$$

όπου $\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) = -\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)/\partial t$ και $\mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ το συνολικό ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων. Τα πεδία αυτά καθορίζουν και τη δύναμη Lorentz που ασκείται στα ηλεκτρόνια

$$\mathbf{F} = -|q_e| [\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)]. \quad (2.13)$$

Η δύναμη Lorentz έχει την ιδιομορφία ότι εξαρτάται, μέσω της ταχύτητας, από την ίδια την κίνηση. Στην περίπτωση που η τροχιά είναι χαοτική, η δύναμη αποκτά ένα στατιστικό χαρακτήρα, κάτι που επιτρέπει μια πιο απλή, φαινομενολογική προσέγγιση στο πλαίσιο της εξίσωσης Langevin (βλ. [Reif 1965]). Σε διάφορα άρθρα έχει μελετηθεί η κίνηση μαγνητισμένων ιόντων υπό την επίδραση δυνάμεων που ακολουθούν κάποια στατιστική. Υπό την επίδραση δύναμης που ασκείται σε τυχαίους χρόνους και διευθύνσεις, απουσία τριβών, η κίνηση είναι υπέρθεση τυχαίου βηματισμού και κυκλοτρονικής περιστροφής, και η συνάρτηση κατανομής, όταν ο αριθμός των επιδράσεων της δύναμης είναι πολύ μεγάλος, περιγράφεται καλά από την εξίσωση FP [Newman and Newman 1991]. Στην [Carreras et al 2001], όπου

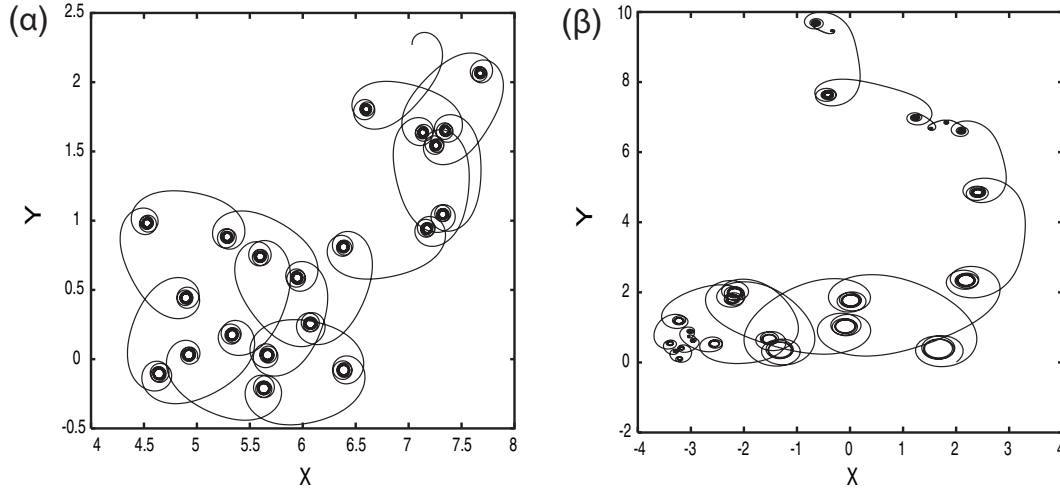


Σχήμα 2.5: Συνάρτηση κατανομής $f(F_{\perp})$ της συνιστώσας της δύναμης Lorentz κάθετα στο μαγνητικό πεδίο για $A_0 = 0.1$ και (α) $N = 1$, (β) $N = 5$.

μελετάται η κίνηση σε ένα τυρβώδες ηλεκτροστατικό πεδίο, φάνηκε ότι η διάχυση είναι ανώμαλη και η εξίσωση FFP είναι απαραίτητη για την περιγραφή της κατανομής. Στην [Chechkin et al 2002] μελετάται ένα ηλεκτρικό πεδίο με non-Gaussian στατιστική και επιλύεται η αντίστοιχη εξίσωση FFP. Η κατάσταση ισορροπίας είναι non-Maxwellian και οι απομακρύνσεις των ιόντων υποδεικνύουν υπερδιάχυση. Ένα παρόμοιο πεδίο με αυτό της [Carreras et al 2001] μελετήθηκε από τους Carbone et al [Carbone et al 2003]. Εκτός από την ανώμαλη διάχυση, βρέθηκε ότι λόγω της τυχαιότητας των φάσεων του τυρβώδους πεδίου είναι δυνατό να δημιουργηθεί ένα φράγμα μεταφοράς (transport barrier), δηλ. ελάττωση του εκθέτη διάχυσης.

Όπως φαίνεται και απ' την Εξ (2.13), η δύναμη Lorentz εξαρτάται (μέσω των πεδίων) απ' τις συντεταγμένες κατά μήκος της τροχιάς. Στο Σχ. 2.5 δείχνουμε την κατανομή τιμών της συνιστώσας της δύναμης κάθετα στο μαγνητικό πεδίο, η οποία είναι και "υπεύθυνη" για τη διάχυση των ηλεκτρονίων, για την περίπτωση $A_0 = 1$ και (α) $N = 1$, (β) $N = 5$. Η κατανομή αυτή σχηματίζεται με βάση δείγμα 10000 ηλεκτρονίων, όπου υπολογίζονται και ακολούθως ταξινομούνται οι τιμές της $F_{\perp}$ για κάθε ηλεκτρόνιο. Οι αρχικές συνθήκες λαμβάνονται εντός της χαοτικής περιοχής του φασικού χώρου, και οι τροχιές των ηλεκτρονίων υπολογίζονται ως τη χρονική στιγμή $t = 3000$. Η δύναμη φαίνεται να ακολουθεί μια στατιστική, η απόκλιση της οποίας από την κανονική κατανομή είναι εμφανής (πολύ πιο έντονα στη δεύτερη περίπτωση). Τα ηλεκτρόνια εμφανίζουν μια προτίμηση να βρίσκονται σε περιοχές όπου η εγκάρσια δύναμη είναι μικρή, ειδικά στη δεύτερη περίπτωση.

Η επίδραση της συγκεκριμένης στατιστικής που ακολουθεί η δύναμη $\mathbf{F}_{\perp}$ στις τροχιές των ηλεκτρονίων μπορεί να προσδιοριστεί μέσω της μελέτης της κίνησης του κέντρου-οδηγού. Σε μια προσέγγιση "1^{ης} τάξης", για τιμές του πλάτους κύματος αρκετά μικρές ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη $B_1 < B_0$, μπορεί να αγνοηθεί η συνεισφορά του μαγνητικού πεδίου του κύματος και να μελετήσουμε μια πιο απλή



Σχήμα 2.6: Η τροχιά του κέντρου-οδηγού της περιστροφής υπό την επίδραση της δύναμης ολίσθησης $\mathbf{E}_{1\perp} \times \mathbf{B}_0$ για $A_0 = 0.1$ και (α) $N = 1$, (β) $N = 5$.

έκδοση της Εξ. (2.12) για την κίνηση κάθετα στο μαγνητικό πεδίο

$$\frac{d(\gamma m_e \mathbf{v}_\perp)}{dt} = -|q_e| (\mathbf{E}_{1\perp} + \mathbf{v}_\perp \times \mathbf{B}_0). \quad (2.14)$$

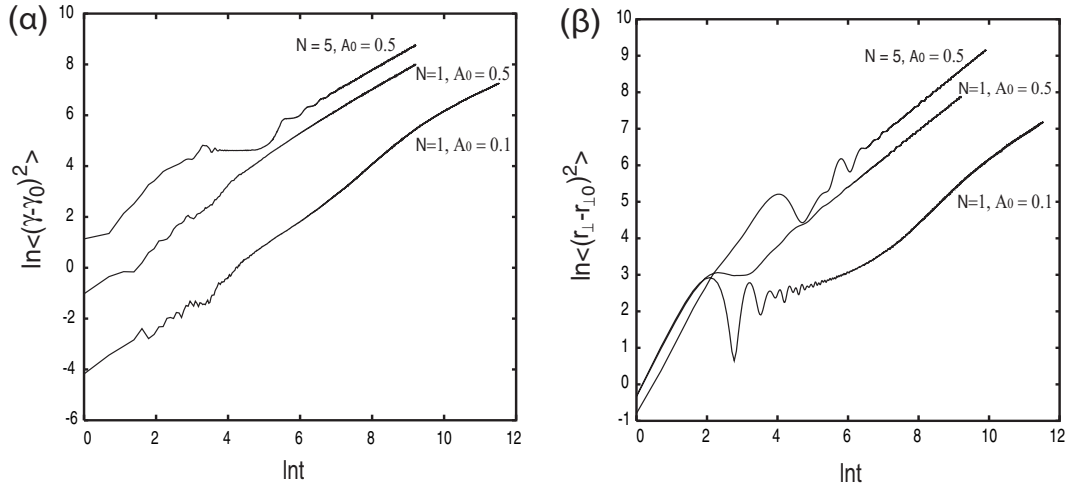
Σε αναλογία με την περιγραφή της ολίσθησης τύπου $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ (βλ. Υποεν. 1.2.1, και για περισσότερες λεπτομέρειες το βιβλίο [Βλάχος 2000]), βάσει της Εξ. (2.14) μπορεί να οριστεί μια σχετικιστική ταχύτητα ολίσθησης για το κέντρο-οδηγό

$$\mathbf{v}_D = \frac{\mathbf{E}_{1\perp} \times \mathbf{B}_0}{\gamma B_0^2}. \quad (2.15)$$

Στο Σχ. 2.6 φαίνεται η τροχιά του κέντρου-οδηγού ύστερα από $t = 1000$ κάτω από την επίδραση της δύναμης ολίσθησης $\mathbf{E}_{1\perp} \times \mathbf{B}_0$, για $A_0 = 0.1$ ($B_1/B_0 \approx 0.3$) και (α) $N = 1$, (β) $N = 5$. Παρατηρούμε ότι η κίνηση του κέντρου-οδηγού συνίσταται σε "άλματα" ανάμεσα σε θέσεις όπου παραμένει παγιδευμένο για μεγάλους χρόνους. Οι εναλλαγές αυτές στην κίνηση είναι ενδεικτικό της non-Gaussian στατιστικής που αναφέρθηκε παραπάνω. Να σημειώσουμε ότι τα αποτελέσματα προκύπτουν ποιοτικά τα ίδια ακόμη και αν το $\mathbf{B}_1$ είναι αρκετά μεγάλο ώστε να πρέπει να συμπεριληφθεί στον ορισμό της $\mathbf{v}_D$.

2.4.2 Υπολογισμός του εκθέτη διάχυσης

Ο υπολογισμός του εκθέτη διάχυσης ακολουθεί τα εξής βήματα: (α) Ολοκληρώνουμε αριθμητικά τις τροχιές 10000 ηλεκτρονίων με την ίδια αρχική ενέργεια $\gamma_0 = 2.5$ και αρχικές συνθήκες που επιλέγονται τυχαία, (β) Από τα δεδομένα των τροχιών, υπολογίζουμε τις μέσες τετραγωνικές διακυμάνσεις της ενέργειας $\langle(\gamma - \gamma_0)^2\rangle$ και της θέσης στο επίπεδο xy $\langle(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{0\perp})^2\rangle$, (γ) Στο τμήμα του γραφήματος $\ln \langle(\gamma - \gamma_0)^2\rangle = g(t)$ που είναι ευθύγραμμο, υπολογίζουμε τον εκθέτη



Σχήμα 2.7: (α) Η ποσότητα $\ln \langle (\gamma - \gamma_0)^2 \rangle$ σαν συνάρτηση του $\ln t$ για $N = 1$ ($A_0 = 0.1, 0.5$) και $N = 5$ ($A_0 = 0.5$), (β) Η ποσότητα $\ln \langle (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{0\perp})^2 \rangle$ σαν συνάρτηση του $\ln t$ για τις ίδιες τιμές των N, A_0 με το (α).

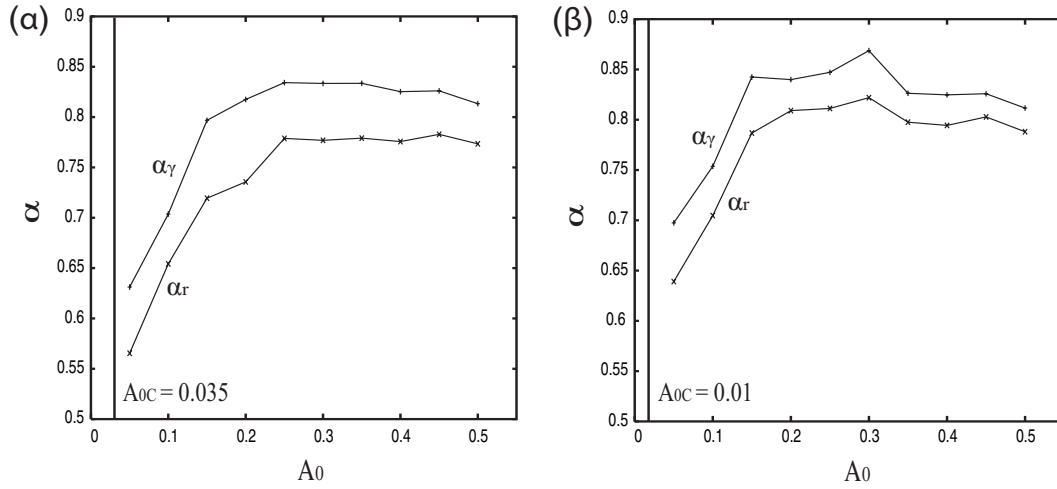
διάχυσης α_γ από την κλίση του γραφήματος, (δ) Επαναλαμβάνουμε το βήμα (γ) για τον υπολογισμό του εκθέτη διάχυσης α_r για το διάνυσμα θέσης. Όλη η διαδικασία, ειδικότερα τα βήματα (γ) και (δ), βασίζονται στις σχέσεις

$$\ln \langle (\gamma - \gamma_0)^2 \rangle \propto \alpha_\gamma \ln t, \quad (2.16\alpha)$$

$$\ln \langle (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{0\perp})^2 \rangle \propto \alpha_r \ln t, \quad (2.16\beta)$$

οι οποίες προκύπτουν με λογαρίθμηση της Εξ. (2.1) και της αντίστοιχης σχέσης για τη χρονική εξέλιξη της διακύμανσης της ενέργειας. Βασική προϋπόθεση για την αξιοπιστία των υπολογισμών είναι και η στατιστική τυχαιότητα του δείγματος των ηλεκτρονίων. Αυτός είναι και ο λόγος που η επιλογή των αρχικών συνθηκών δεν πρέπει να εμπεριέχει κανένα άλλο συσχετισμό εκτός από όποιους επιβάλλονται από τη φυσική του προβλήματος (π.χ. σταθερές της κίνησης).

Στο Σχ. 2.7(α) φαίνεται η ποσότητα $\ln \langle (\gamma - \gamma_0)^2 \rangle$ σαν συνάρτηση του $\ln t$ για $N = 1$ ($A_0 = 0.1, 0.5$) και $N = 5$ ($A_0 = 0.5$). Σε όλες τις περιπτώσεις, οι λογαριθμικές καμπύλες γίνονται σχεδόν ευθύγραμμες ύστερα από κάποιο χαρακτηριστικό χρόνο, ο οποίος είναι συνάρτηση του πλάτους κύματος. Αυτό σημαίνει ότι, εντέλει, οι μέσες τιμές αποκτούν χρονική εξάρτηση νόμου δύναμης (power law). Για τα μικρότερα πλάτη (π.χ. $A_0 = 0.1$), ο χρόνος που χρειάζεται για να εδραιωθεί η εξάρτηση νόμου δύναμης είναι μεγαλύτερος, διότι ο χώρος φάσεων είναι περισσότερο ανομοιογενής δυναμικά. Παρόλα αυτά, η γραμμική κλιμάκωση στο λογαριθμικό επίπεδο συνεχίζει να υπάρχει, έστω και αν εμφανίζεται μετά από αρκετό χρόνο. Η αύξηση των κυματικών ρυθμών προκαλεί εν γένει πιό έντονη επιτάχυνση των ηλεκτρονίων, όμως ο χρόνος που απαιτείται για να εδραιωθούν οι νόμοι δύναμης δεν είναι πάντοτε μικρότερος, όπως φαίνεται π.χ. για $N = 5$. Ένας λόγος είναι ότι η



Σχήμα 2.8: Εκθέτες διάχυσης α_γ και α_r σαν συνάρτηση του πλάτους κύματος A_0 για (α) απλό κύμα ($N=1$), (β) κυματοπακέτο $N=5$ ρυθμών.

παρουσία πολλών ρυθμών μπορεί να επιφέρει σημαντικές αλλαγές στο φασικό χώρο: Νέες νησίδες μπορεί να γεννηθούν ή υπάρχουσες μπορεί να εξαφανιστούν, και δεν είναι εύκολο να γίνει πρόβλεψη πού και πότε μπορεί αυτό να συμβεί. Η εξέλιξη της ποσότητας $\langle (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{0\perp})^2 \rangle$ είναι παρόμοια με παραπάνω και δίνεται στο Σχ. 2.7(β).

Τόσο για την ενέργεια όσο και για τη θέση των ηλεκτρονίων, η χρονική κλιμάκωση της διάχυσης καθορίζεται απ' τους εκθέτες α_γ και α_r των αντίστοιχων νόμων δύναμης. Στο Σχ. 2.8 οι εκθέτες αυτοί σχεδιάζονται σαν συνάρτηση του πλάτους A_0 για (α) απλό κύμα ($N=1$) και (β) κυματοπακέτο $N=5$ ρυθμών. Παρατηρούμε ότι, για οποιοδήποτε πλάτος μεγαλύτερο της κρίσιμης τιμής ($A_0 > A_{0c}$), και οι δύο εκθέτες διάχυσης παίρνουν τιμές κάτω από 1. Αυτό σημαίνει ότι η εξέλιξη της διάχυσης των ηλεκτρονίων "καθυστερεί" σε σχέση με την κανονική διάχυση, δηλ. έχουμε υποδιάχυση. Για $N=1$, στα μεγάλα πλάτη ($0.2 < A_0 < 0.5$) οι εκθέτες παίρνουν τιμές εντοπισμένες σε πολύ στενά διαστήματα. Για πλάτη κάτω από 0.1 οι εκθέτες αρχίζουν να μειώνονται, διότι ο φασικός χώρος για τέτοιες τιμές διαταραχής εμφανίζει μεγάλο αριθμό νησίδων. Οι σχηματισμοί αυτοί αντιστοιχούν σε περιοδικές κινήσεις και σε παγίδευση σωματιδίων, η οποία αντιβαίνει στη διαχυτική συμπεριφορά. Η μείωση των εκθετών γίνεται πió έντονη όσο το πλάτος πλησιάζει την κρίσιμη τιμή A_{0c} .

Η κατάσταση είναι παρόμοια και για την αλληλεπίδραση των ηλεκτρονίων με περισσότερα από ένα κύματα, όπως φαίνεται και απ' το Σχ. 2.8(β). Καθένας απ' τους εκθέτες διάχυσης παίρνει τιμές λίγο μεγαλύτερες απ' αυτές της προηγούμενης περίπτωσης, τουλάχιστον εντός των ορίων σφάλματος των υπολογισμών μας, αλλά πάντα μικρότερες του 1. Συνεπώς, εξακολουθούμε να έχουμε υποδιάχυση και δεν παρατηρείται κάποια άλλη αλλαγή στο είδος της διάχυσης. Βέβαια, μια τέτοια αλλαγή μπορεί να εμφανιστεί στο πλαίσιο ενός κατάλληλα ορισμένου συντελεστή διάχυσης, αλλά ένας τέτοιος υπολογισμός είναι πέρα από τα όρια αυτής της μελέτης.

2.5 Ακτινοβολία cyclotron από τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια

Ένα άλλο σημαντικό θέμα προς εξέταση είναι η μελέτη της ακτινοβολίας που εκπέμπουν τα ηλεκτρόνια κατά την αλληλεπίδραση με το κύμα. Οποιοδήποτε φορτισμένο σωματίδιο, όταν επιταχύνεται, εκπέμπει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [Jackson 1999]). Η ακτινοβολία αυτή χωρίζεται σε δύο κατηγορίες: (α) Ακτινοβολία πέδης (bremsstrahlung), όταν η επιτάχυνση είναι συγγραμμική με την ταχύτητα, (β) Κυκλοτρονική ακτινοβολία (cyclotron), όταν η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα. Στο πρόβλημα που μας ενδιαφέρει, η ύπαρξη του μαγνητικού πεδίου και η κυκλική πόλωση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος αναγκάζει τα ηλεκτρόνια σε γρήγορες περιστροφικές κινήσεις, οπότε η ακτινοβολία πέδης που εκπέμπεται είναι αμελητέα σε σχέση με την αντίστοιχη κυκλοτρονική. Η εκπομπή γίνεται στις ίδιες συχνότητες με εκείνες που το ηλεκτρόνιο απορροφά ακτινοβολία (π.χ. λόγω συντονισμού).

Στο πεδίο του χρόνου, η μελέτη συνίσταται στον υπολογισμό της ισχύος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας cyclotron. Η ισχύς αυτή είναι ανάλογη με την επιτάχυνση, οπότε η εξέλιξή της καθορίζεται και αυτή απ' τις στατιστικές ιδιότητες της δύναμης Lorentz. Στο πεδίο των συχνοτήτων, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μελέτη του φάσματος της ακτινοβολίας και η σύγκριση με την περίπτωση της καθαρά κυκλικής περιστροφής (δηλ. απουσία του κύματος). Ένα άλλο ενδιαφέρον ζήτημα είναι ο αυτοσυνεπής υπολογισμός της κίνησης του ηλεκτρονίου λαμβάνοντας υπόψη τις απώλειες ενέργειας λόγω ακτινοβολίας. Στις εξισώσεις κίνησης, η επίδραση της ακτινοβολίας εκφράζεται μέσω μιας δύναμης τύπου τριβής (radiation reaction) [Barut 1980]. Το συγκεκριμένο θέμα δε θα μας απασχολήσει εδώ, καθώς θα υιοθετήσουμε την (συνήθη) παραδοχή ότι όση ακτινοβολία εκπέμπεται από ένα ηλεκτρόνιο επαναπορροφάται ομοιόμορφα απ' όλα τα υπόλοιπα.

2.5.1 Ισχύς της ακτινοβολίας cyclotron

Η ισχύς της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας που εκπέμπεται από ένα επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή δίνεται απ' τον τύπο του Lienard [Rybicki and Lightman 1979, Jackson 1999]

$$\mathcal{P}_R(t) = \frac{2|q_e|^2\gamma^6}{3c} [c^2\mathbf{a}^2 - (\mathbf{v} \times \mathbf{a})^2], \quad (2.17)$$

όπου $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ είναι η στιγμιαία επιτάχυνση. Η εξίσωση αυτή παίρνει μια πιο απλή μορφή αν κανονικοποιήσουμε την ισχύ με $c|q_e|^2\omega_{ce}$ και την επιτάχυνση με $c\omega_{ce}$, και εκφράσουμε τα $\mathbf{v}$, $\mathbf{a}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\mathcal{P}_R(t) = \frac{2\gamma^6}{3} [a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - (v_y a_z - v_z a_y)^2 - (v_z a_x - v_x a_z)^2 - (v_x a_y - v_y a_x)^2].$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, για τον υπολογισμό της ισχύος απαιτείται η γνώση των συνιστωσών της ταχύτητας και της επιτάχυνσης. Αυτές μπορούν να υπολογιστούν ως συνάρτηση των κανονικών μεταβλητών και των παραγώγων τους.

Όσον αφορά την ταχύτητα, στον υπολογισμό με βάση τις κανονικές μεταβλητές υπάρχει ένα λεπτό σημείο: Ο κανονικός μετασχηματισμός (2.6) για την απαλοιφή του χρόνου απ' τη συνάρτηση Hamilton δεν είναι συμβατός με την ειδική σχετικότητα Lorentz (βλ. π.χ. [Barut 1980] ή [Goldstein 1980]). Συνεπώς, πρέπει να υπολογίσουμε τις συνιστώσες της ταχύτητας με βάση τις τιμές των χ_j, π_j πριν το μετασχηματισμό. Αυτό όμως δε μας εμποδίζει να τις εκφράσουμε σε σχέση με τις τιμές μετά το μετασχηματισμό, κάτι το οποίο μπορεί να γίνει με βάση τις Εξ. (2.7δ), (2.7ε), (2.7στ). Οι εκφράσεις είναι

$$v_x = \dot{x}, \quad (2.18\alpha)$$

$$v_y = \dot{y}, \quad (2.18\beta)$$

$$v_z = \dot{z} + \frac{1}{N_z}. \quad (2.18\gamma)$$

Οι συνιστώσες της επιτάχυνσης υπολογίζονται απ' τη σχέση που προκύπτει παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο την εξίσωση που συνδέει τη σχετικιστική μηχανική ορμή με την ταχύτητα (η ορμή είναι κανονικοποιημένη με $m_e c$)

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\gamma\mathbf{v})}{dt} = \gamma\mathbf{a} + \gamma^3(\mathbf{v} \cdot \mathbf{a})\mathbf{v}.$$

Αναλύοντας την παραπάνω διανυσματική εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, προκύπτει ένα σύστημα τριών εξισώσεων ως προς τις a_x, a_y, a_z του οποίου η λύση δίνει τις συνιστώσες της επιτάχυνσης

$$a_x = \frac{(1 + \gamma^2 v_y^2 + \gamma^2 v_z^2)\dot{p}_x - \gamma^2 v_x v_y \dot{p}_y - \gamma^2 v_x v_z \dot{p}_z}{\gamma(1 + \gamma^2 v^2)}, \quad (2.19\alpha)$$

$$a_y = \frac{-\gamma^2 v_x v_y \dot{p}_x + (1 + \gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_z^2)\dot{p}_y - \gamma^2 v_y v_z \dot{p}_z}{\gamma(1 + \gamma^2 v^2)}, \quad (2.19\beta)$$

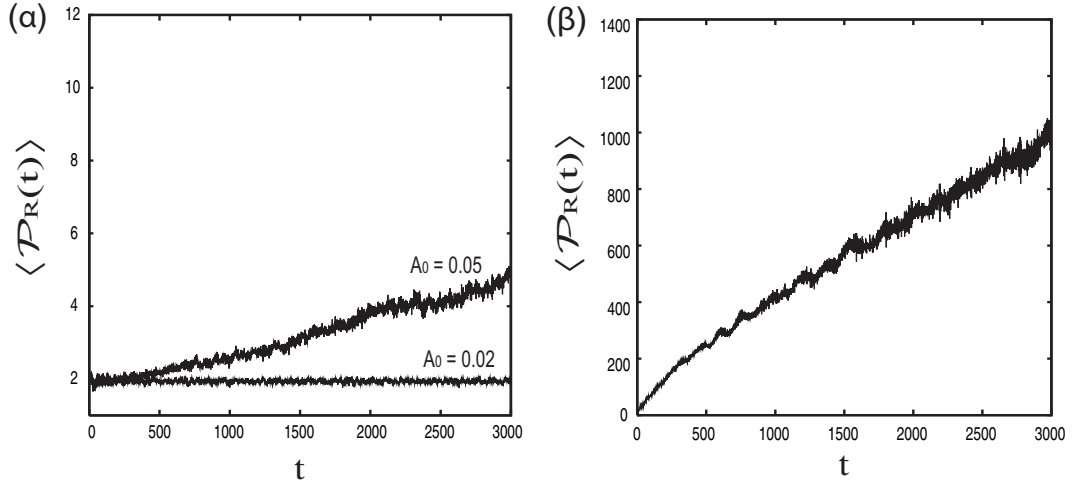
$$a_z = \frac{-\gamma^2 v_x v_z \dot{p}_x - \gamma^2 v_y v_z \dot{p}_y + (1 + \gamma^2 v_x^2 + \gamma^2 v_y^2)\dot{p}_z}{\gamma(1 + \gamma^2 v^2)}. \quad (2.19\gamma)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, οι παράγωγοι των συνιστωσών της $\mathbf{p}$ εκφράζονται ως προς τις κανονικές ορμές με τη βοήθεια των (2.2), (2.4)

$$\dot{p}_x = \dot{\pi}_x + A_0 \dot{\phi} \cos \vartheta_w \cos \phi,$$

$$\dot{p}_y = \dot{\pi}_y + \dot{x} - A_0 \dot{\phi} \sin \phi,$$

$$\dot{p}_z = \dot{\pi}_z - A_0 \dot{\phi} \sin \vartheta_w \cos \phi.$$

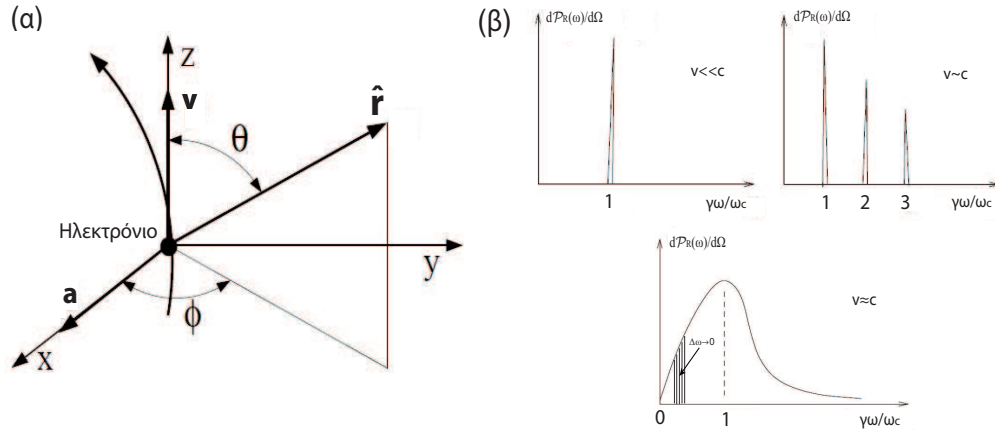


Σχήμα 2.9: Μέση ισχύς ακτινοβολίας cyclotron από δείγμα 1000 ηλεκτρονίων που αλληλεπιδρά με ηλεκτρομαγνητικό κύμα πλάτους (α) $A_0 = 0.02, 0.05$, (β) $A_0 = 0.5$.

Με βάση τα παραπάνω, είναι δυνατόν απ' τις αριθμητικά υπολογισμένες τροχιές των ηλεκτρονίων να βρεθεί η ισχύς της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας. Επειδή, στην πράξη, η ακτινοβολία που λαμβάνουμε από το πλάσμα είναι η υπέρθεση της ακτινοβολίας απ' όλα τα φορτία που το αποτελούν, η ποσότητα που ενδιαφέρει ουσιαστικά είναι η μέση ισχύς από ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα ηλεκτρονίων. Στο Σχ. 2.9 παρουσιάζεται η μέση ισχύς από 1000 ηλεκτρόνια που αλληλεπιδρούν με ένα κύμα πλάτους (α) $A_0 = 0.02, 0.05$, (β) $A_0 = 0.5$. Από την Εξ. (2.17) βλέπουμε ότι η ισχύς είναι ανάλογη της επιτάχυνσης, κάτι που σημαίνει ότι η εξέλιξή της εν γένει ακολουθεί τη συμπεριφορά που παρουσιάστηκε στις προηγούμενες ενότητες. Πράγματι, στο Σχ. 2.9(α) βλέπουμε ότι για $A_0 = 0.02$, που είναι μια τιμή κάτω από το κατώφλι για το χάος, η ισχύς είναι πολύ μικρή και παραμένει σχεδόν σταθερή καθώς τα ηλεκτρόνια δεν επιταχύνονται σημαντικά. Η επιτάχυνση, και μαζί η αύξηση της $\mathcal{P}_R(t)$, αρχίζει να εμφανίζεται για τιμές $A_0 > A_{0c}$, όπως φαίνεται στο ίδιο σχήμα για $A_0 = 0.05$. Για μεγαλύτερο πλάτος κύματος η ισχύς φτάνει σε πολύ υψηλότερες τιμές, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά στο Σχ. 2.9(β) για $A_0 = 0.5$.

2.5.2 Υπολογισμός του φάσματος

Ας υποθέσουμε ότι ένα επιταχυνόμενο ηλεκτρόνιο εκπέμπει ακτινοβολία cyclotron, η οποία λαμβάνεται από αδρανειακό παρατηρητή στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}'$ (βλ. Σχ. 2.10(α)). Ο παρατηρητής θεωρείται ότι βρίσκεται σε αρκετά μακρινή απόσταση, ώστε το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}'$ να μην εξαρτάται από τις λεπτομέρειες της τροχιάς του ηλεκτρονίου, δηλ. να είναι σταθερό στο χρόνο. Το φάσμα της ακτινοβολίας, δηλ. η κατανομή της εκπεμπόμενης ενέργειας στις διάφορες συχνότητες, εκφράζεται στο πλαίσιο της ισχύος ανά μονάδα στερεάς γωνίας $d\mathcal{P}_R(\omega)/d\Omega$, όπου εδώ στο πεδίο



Σχήμα 2.10: (α) Σύστημα συντεταγμένων για τον υπολογισμό του φάσματος της ακτινοβολίας cyclotron, (β) Μετάβαση της μορφής του φάσματος από διακριτό (μίας αρμονικής για $v \ll c$ και πολλών για $v \sim c$) σε συνεχές (για $v \approx c$).

συχνοτήτων η ισχύς ορίζεται ως η εκπεμπόμενη ενέργεια ανά μονάδα συχνότητας. Το κανονικοποιημένο πλάτος του φάσματος δίνεται απ' τη σχέση [Jackson 1999]

$$\frac{d\mathcal{P}_R(\omega)}{d\Omega} = \frac{\omega^2}{4\pi^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\mathbf{r}}' \times (\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{v}) e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{r}/c)} dt \right|^2 = \frac{\omega^2}{4\pi^2} |\bar{\mathcal{I}}|^2, \quad (2.20)$$

όπου ο όρος $t - \hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{r}/c$ στον εκθέτη αντιπροσωπεύει την αρχή της αιτιοκρατίας, δηλ. το ότι η ακτινοβολία χρειάζεται κάποιο χρόνο για να διανύσει την απόσταση μεταξύ ηλεκτρονίου και παρατηρητή λόγω του ότι διαδίδεται με πεπερασμένη ταχύτητα.

Από την Εξ. (2.20) φαίνεται καθαρά ότι το μιγαδικό ολοκλήρωμα $\bar{\mathcal{I}}$ είναι αυτό που ουσιαστικά καθορίζει τη μορφή του φάσματος. Το πραγματικό και το φανταστικό του μέρος είναι

$$Re(\bar{\mathcal{I}}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}\hat{\mathbf{r}}' - \mathbf{v}) \cos[\omega(t - \mathcal{R})] dt, \quad (2.21\alpha)$$

$$Im(\bar{\mathcal{I}}) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V}\hat{\mathbf{r}}' - \mathbf{v}) \sin[\omega(t - \mathcal{R})] dt. \quad (2.21\beta)$$

Για να προκύψουν οι παραπάνω σχέσεις, χρησιμοποιήσαμε τη διανυσματική ταυτότητα $\hat{\mathbf{r}}' \times (\hat{\mathbf{r}}' \times \mathbf{v}) = (\hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{v})\hat{\mathbf{r}}' - \mathbf{v}$ και ορίσαμε τις προβολές των διανυσμάτων θέσης και ταχύτητας στη διεύθυνση παρατήρησης, $\mathcal{R} = \hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{r}$ και $\mathcal{V} = d\mathcal{R}/dt = \hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{v}$. Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.10(α), στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με κέντρο το κινούμενο ηλεκτρόνιο, το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση ηλεκτρονίου-παρατηρητή είναι $\hat{\mathbf{r}}' = \sin\theta \cos\phi \hat{\mathbf{x}} + \sin\theta \sin\phi \hat{\mathbf{y}} + \cos\theta \hat{\mathbf{z}}$, όπου θ, ϕ είναι οι σταθερές γωνίες

παρατήρησης. Οι ποσότητες $\mathcal{R}$, $\mathcal{V}$ εκφράζονται ως ακολούθως

$$\mathcal{R} = x \sin \theta \cos \phi + y \sin \theta \sin \phi + z \cos \theta,$$

$$\mathcal{V} = v_x \sin \theta \cos \phi + v_y \sin \theta \sin \phi + v_z \cos \theta,$$

και αντικαθιστώντας στην Εξ. (2.21) βρίσκουμε τις συνιστώσες του μιγαδικού ολοκληρώματος. Για τα πραγματικά μέρη είναι

$$Re(\bar{\mathcal{I}}_x) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V} \sin \theta \cos \phi - v_x) \cos[\omega(t - \mathcal{R})] dt, \quad (2.22\alpha)$$

$$Re(\bar{\mathcal{I}}_y) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V} \sin \theta \sin \phi - v_y) \cos[\omega(t - \mathcal{R})] dt, \quad (2.22\beta)$$

$$Re(\bar{\mathcal{I}}_z) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{V} \cos \theta - v_z) \cos[\omega(t - \mathcal{R})] dt, \quad (2.22\gamma)$$

ενώ η μορφή για τα φανταστικά μέρη διαφέρει μόνο στο ότι ο συνημιτονικός όρος $\cos(\omega t')$ γίνεται ημιτονικός $\sin(\omega t')$ (βλ. και Εξ. (2.21)).

Όπως και στην περίπτωση της ισχύος στο πεδίο του χρόνου, το φάσμα είναι δυνατό να υπολογιστεί απ' τις τιμές των μεγεθών κατά μήκος της τροχιάς του ηλεκτρονίου. Ο πιο γρήγορος και ακριβής τρόπος να υπολογίσουμε αριθμητικά τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι με χρήση του διακριτού μετασχηματισμού Fourier (Discrete Fourier Transform (DFT)) [Press et al 1993]. Τα ολοκληρώματα αυτά, λόγω του όρου $e^{-i\omega\mathcal{R}}$, δεν είναι στη μορφή Fourier $e^{-i\omega t}$, αλλά μπορούν να έρθουν σε αυτή με την ακόλουθη αλλαγή μεταβλητής

$$t' = t - \mathcal{R},$$

$$dt' = (1 - \mathcal{V})dt,$$

όπου ο χρόνος t' έχει συγκεκριμένη φυσική σημασία: Είναι ο χρόνος στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Τα ολοκληρώματα (2.22) παίρνουν τη μορφή Fourier, και για τα πραγματικά μέρη έχουμε

$$Re(\bar{\mathcal{I}}_x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathcal{V} \sin \theta \cos \phi - v_x}{1 - \mathcal{V}} \right]_{t=t'+\mathcal{R}} \cos(\omega t') dt',$$

$$Re(\bar{\mathcal{I}}_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathcal{V} \sin \theta \sin \phi - v_y}{1 - \mathcal{V}} \right]_{t=t'+\mathcal{R}} \cos(\omega t') dt',$$

$$Re(\bar{\mathcal{I}}_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\mathcal{V} \cos \theta - v_z}{1 - \mathcal{V}} \right]_{t=t'+\mathcal{R}} \cos(\omega t') dt',$$

και, όπως και παραπάνω, στα φανταστικά μέρη ο συνημιτονικός όρος γίνεται ημιτονικός. Σημειώστε ότι, επειδή η εξέλιξη των τροχιών ακολουθείται στο σύστημα αναφοράς του ηλεκτρονίου, οι ολοκληρωτέες ποσότητες (εντός των αγκυλών) υπολογίζονται τη χρονική στιγμή t , η οποία αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $t' = t - \mathcal{R}$ στο σύστημα του παρατηρητή.

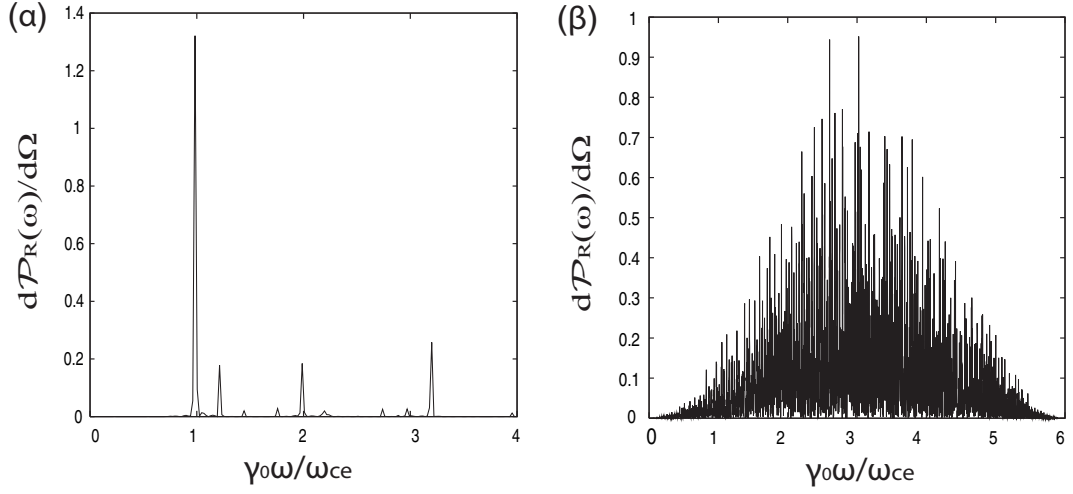
Ποιά είναι όμως η μορφή που αναμένεται να έχει το φάσμα; Λόγω του ότι η περιστροφή του ηλεκτρονίου στο επίπεδο xy είναι πιό έντονη από την κίνηση κατά μήκος του z , το φάσμα θα έχει αρκετές ομοιότητες με αυτό της καθαρά κυκλοτρονικής περιστροφής. Η εξάρτηση της μορφής του φάσματος από την ενέργεια του ηλεκτρονίου και τη θέση του παρατηρητή παρουσιάζει αρκετό ενδιαφέρον. Εδώ θα αναφερθούμε επιγραμματικά στο θέμα αυτό (για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. [Rybicki and Lightman 1979, Ternov 1995]). Οι διαφορετικές μορφές του φάσματος ανάλογα με την ενέργεια απεικονίζονται στο Σχ. 2.10(β). Για μικρές ενέργειες ($v \ll c$) το ηλεκτρικό πεδίο της ακτινοβολίας ταλαντώνεται με συχνότητα ίδια με την κυκλοτρονική, οπότε το φάσμα αποτελείται από μία μόνο γραμμή στη συχνότητα ω_{ce} . Όσο ο λόγος v/c αυξάνεται, στο φάσμα εμφανίζονται και συνεισφορές από υψηλότερες αρμονικές, και στο όριο $v = c$ οι γραμμές είναι τόσο πυκνές που το φάσμα είναι πρακτικά συνεχές. Η συμπεριφορά αυτή οφείλεται στο ότι, στο πλαίσιο της σχετικιστικής θεώρησης, ένα περιστρεφόμενο ηλεκτρόνιο εκπέμπει σε όλες τις συχνότητες $n\omega_{ce}/\gamma$, με πλάτος σε κάθε συχνότητα ανάλογο του $(v/c)^n$. Κατά συνέπεια, όσο αυξάνεται η ταχύτητα του ηλεκτρονίου όλο και ενισχύονται οι φασματικές γραμμές στις υψηλές συχνότητες.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό της ακτινοβολίας που λαμβάνει ο παρατηρητής είναι η μετατόπιση των συχνοτήτων του φάσματος λόγω του φαινομένου Doppler. Η περίοδος μιας ταλάντωσης στο σύστημα αναφοράς του ταλαντωτή είναι διαφορετική απ' ότι στο σύστημα του παρατηρητή εξαιτίας της σχετικιστικής διαστολής του χρόνου. Η μετατόπιση των συχνοτήτων καταδεικνύεται αν εκφράσουμε την Εξ. (2.21) στο πλαίσιο του μετασχηματισμού Fourier της ολοκληρωτέας ποσότητας

$$\bar{\mathcal{I}} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(\mathcal{V}\hat{\mathbf{r}}' - \mathbf{v}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\omega - \omega' - \omega')} dt \right] d\omega' = \int_{-\infty}^{\infty} F(\mathcal{V}\hat{\mathbf{r}}' - \mathbf{v}) \delta[\omega' - \omega(1 - \mathcal{V})] d\omega'.$$

Απ' την παραπάνω σχέση, είναι καταρχήν φανερό ότι η θέση των φασματικών γραμμών καθορίζεται από τη συνάρτηση δ εντός του ολοκληρώματος. Το ολοκλήρωμα είναι μη μηδενικό μόνο για τις συχνότητες $\omega(1 - \mathcal{V})$, συνεπώς οι φασματικές γραμμές που βλέπει ο παρατηρητής είναι μετατοπισμένες κατά $\omega\mathcal{V}$.

Η μορφή του φάσματος της ακτινοβολίας cyclotron από ένα χαοτικό ηλεκτρόνιο φαίνεται στο Σχ. 2.11. Για το συγκεκριμένο υπολογισμό, το κύμα έχει πλάτος $A_0 = 0.1$, οι αρχικές συνθήκες του ηλεκτρονίου είναι τυχαίες και η αλληλεπίδραση διαρκεί $t = 10000$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις για την αρχική ενέργεια του



Σχήμα 2.11: Φάσμα της ακτινοβολίας cyclotron από ένα ηλεκτρόνιο που αλληλεπιδρά με ηλεκτρομαγνητικό κύμα πλάτους $A_0 = 0.1$ για χρόνο $t = 10000$. Η αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι (α) $\gamma_0 = 1.1$, (β) $\gamma_0 = 2.5$.

ηλεκτρονίου: (α) $\gamma_0 = 1.1$ ($v/c \approx 0.42$), (β) $\gamma_0 = 2.5$ ($v/c \approx 0.92$). Και στις δύο περιπτώσεις το φάσμα είναι παρόμοιο με αυτό της κυκλοτρονικής ακτινοβολίας. Στην πρώτη περίπτωση, όπου ο λόγος v/c έχει μια ασθενώς σχετικιστική τιμή, το φάσμα είναι διακριτό και εκτός από την πρώτη αρμονική υπάρχει σημαντική συνεισφορά και από τις δύο επόμενες. Παρατηρήστε ότι οι φασματικές γραμμές δεν εμφανίζονται στις αναμενόμενες τιμές $l\omega_{ce}/\gamma$ της συχνότητας. Αυτό συμβαίνει διότι η βαθμονόμηση του άξονα των συχνοτήτων είναι προσεγγιστική, καθώς γίνεται με βάση την αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου, οπότε δε λαμβάνεται υπόψη η μεταβολή της ενέργειας κατά την αλληλεπίδραση με το κύμα. Στη δεύτερη περίπτωση, καθώς η τιμή του v/c είναι αρκετά υψηλή, οι γραμμές είναι πολύ πυκνές και το φάσμα πλησιάζει αρκετά τη μορφή του συνεχούς φάσματος που δείξαμε στο Σχ. 2.10(β).

2.6 Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχοληθήκαμε με την αλληλεπίδραση πλάσματος-κύματος από την οπτική γωνία της δυναμικής των φορτισμένων σωματιδίων που αποτελούν το πλάσμα. Αυτό είναι ουσιαστικά το πρώτο μισό του προβλήματος. Το δεύτερο μισό είναι η διάδοση και απορρόφηση του κύματος στο πλάσμα-μέσο, και διερευνάται στο κεφάλαιο που ακολουθεί. Συγκεκριμένα, μελετήθηκε η επίδραση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων υψηλής συχνότητας σε σχετικιστικά ηλεκτρόνια εντός στατικού μαγνητικού πεδίου. Οι τροχιές των ηλεκτρονίων προκύπτουν από την επίλυση των κανονικών εξισώσεων Hamilton και αξιοποιούνται, εκτός από τη μελέτη της δυναμικής του χώρου φάσεων, στον καθορισμό του είδους της χωρικής και ενεργειακής διάχυσης των ηλεκτρονίων εγχάρσια στο μαγνητικό πεδίο και του φάσματος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας cyclotron.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, το ποσοστό των χαοτικών τροχιών είναι αξιόλογο για πλάτη πάνω από μια κρίσιμη τιμή A_{0c} . Η τιμή αυτή μπορεί να υπολογιστεί τόσο αναλυτικά, από το κριτήριο επικάλυψης συντονισμών του Chirikov [Chirikov 1979], όσο και αριθμητικά με βάση το ότι για $A_0 > A_{0c}$ τα ηλεκτρόνια επιταχύνονται σημαντικά. Στην αλληλεπίδραση με ένα κύμα, το δυναμικό σύστημα είναι δύο βαθμών ελευθερίας με σταθερή συνάρτηση Hamilton, και συνεπώς ο χώρος φάσεων μπορεί να απεικονιστεί στις δύο διαστάσεις. Για μεγάλα πλάτη κύματος ($A_0 > 0.3$) ο χώρος φάσεων είναι περισσότερο χαοτικός, και όσο το πλάτος μικραίνει αυξάνονται οι δομές εκείνες που υποδηλώνουν οργανωμένη συμπεριφορά (ολοκληρωτικές καμπύλες, νησίδες). Για ενδιάμεσες τιμές του πλάτους, ο χώρος φάσεων είναι ένα πολύπλοκο μίγμα τάξης και χάους και η δυναμική συμπεριφορά ξεφεύγει από τα γνωστά πλαίσια. Ποιοτικά, και στις δύο περιπτώσεις ($N = 1$, $N > 1$), η ύπαρξη ουράς στην κατανομή ενέργειας των ηλεκτρονίων έρχεται σε αντίθεση με τη λύση της εξίσωσης FP (ημιγραμμική θεωρία) και φανερώνει την ύπαρξη ανώμαλης διάχυσης στο σύστημα. Τόσο απ' την ίδια την κατανομή, όσο και απ' τη ροπή 1^{ης} τάξης που είναι το ηλεκτρικό ρεύμα, φαίνεται ότι η επιτάχυνση των ηλεκτρονίων (α) αρχικά αυξάνεται με έντονο ρυθμό και στη συνέχεια ο ρυθμός αυτός σταθεροποιείται, (β) είναι πιο έντονη όσο περισσότεροι είναι οι κυματικοί ρυθμοί N .

Είναι ήδη γνωστό πως η αλληλεπίδραση ιόντων με ηλεκτροστατικά κύματα χαρακτηρίζεται από ανώμαλη διάχυση. Εδώ δείξαμε, για πρώτη φορά, ότι στην αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα η εξέλιξη της θέσης και της ενέργειας ακολουθούν ανώμαλη διάχυση [Tsironis and Vlahos 2005]. Αυτό διαφαίνεται από τα χαρακτηριστικά της δυναμικής του συστήματος, και ενισχύθηκε από τη διερεύνηση του στατιστικού χαρακτήρα της δύναμης Lorentz. Η δύναμη είναι ισχυρά ανομοιογενής κατά μήκος των τροχιών των ηλεκτρονίων και ακολουθεί non-Gaussian στατιστική. Αυτά τα χαρακτηριστικά εμφανίζονται και στην τροχιά του κέντρου-οδηγού υπό τη δύναμη ολίσθησης $\mathbf{E}_{1\perp} \times \mathbf{B}_0$, η οποία βρίσκεται να είναι μια αλληλουχία από ομαλές μεταβάσεις ανάμεσα σε περιοχές παγίδευσης. Με βάση τις μέσες τιμές των μεταβολών της θέσης και της ενέργειας επί των τροχιών, η διάχυση των ηλεκτρονίων βρίσκεται να υπακούει απλό νόμο δύναμης. Για όλα τα πλάτη $A_0 > A_{0c}$ οι εκθέτες διάχυσης είναι μικρότεροι του 1, ενδεικτικό υποδιάχυσης. Συνεπώς το ηλεκτρομαγνητικό κύμα, παρόμοια με το ηλεκτροστατικό, λειτουργεί σαν "φράγμα" στη διάχυση των σωματιδίων, με την έννοια ότι απουσία του κύματος η διάχυση λόγω των συγκρούσεων θα ήταν κανονική και θα εξελισσόταν ταχύτερα στο χρόνο ($e^t > e^{at}$). Οι εκθέτες διάχυσης μειώνονται όσο μειώνεται το πλάτος του κύματος, λόγω της αύξησης των περιοδικών τροχιών στο χώρο φάσεων.

Επιπλέον, μελετήσαμε για πρώτη φορά την ακτινοβολία cyclotron που εκπέμπουν τα ηλεκτρόνια κατά την αλληλεπίδραση με το κύμα. Η στιγμιαία ισχύς της ακτινοβολίας είναι ανάλογη με την επιτάχυνση, οπότε η εξέλιξή της καθορίζεται και αυτή από τις στατιστικές ιδιότητες της δύναμης Lorentz. Τα ηλεκτρόνια εκπέμπουν σημαντικές ποσότητες ακτινοβολίας μόνο για πλάτη κύματος μεγαλύτερα απ' το κατώφλι για το χάος. Στο πεδίο των συχνοτήτων, η μορφή του φάσματος είναι παρόμοια με αυτό της κυκλοτρονικής ακτινοβολίας. Στην περίπτωση όπου ο λόγος v/c είναι ασθενώς σχετικιστικός, το φάσμα είναι διακριτό με συνεισφορές όχι μόνο απ' την

κύρια αρμονική, και οι συχνότητες είναι μετατοπισμένες λόγω του φαινομένου Doppler. Όταν το ηλεκτρόνιο είναι ισχυρά σχετικιστικό, οι φασματικές γραμμές είναι πολύ πυκνές και το φάσμα είναι πρακτικά συνεχές. Γίνεται αντιληπτό ότι η μορφή του φάσματος ενδέχεται να μεταβάλλεται σημαντικά ανάλογα με το πόσο αλλάζει η ενέργεια του ηλεκτρονίου κατά τη διάρκεια της τροχιάς.

Κάτω από τις συνθήκες που περιγράψαμε, η χρήση της ημιγραμμικής θεωρίας και της εξίσωσης FP τίθεται υπό αμφισβήτηση. Στην υπάρχουσα αρθρογραφία, υπάρχει ακόμη διχογνωμία πάνω στο ζήτημα αυτό. Η ημιγραμμική θεωρία χρησιμοποιείται ευρέως στην περιγραφή της διάχυσης στο χώρο φάσεων, τόσο στο αστροφυσικό όσο και στο εργαστηριακό πλάσμα. Ωστόσο τα αποτελέσματά μας, αλλά και αυτά άλλων ερευνητών, υποδεικνύουν ότι σε περιπτώσεις όπου το χάος δεν καλύπτει σημαντικά το χώρο φάσεων, η θεωρία αυτή παύει να ισχύει και δημιουργείται η ανάγκη για άλλου είδους προσεγγίσεις, όπως π.χ. η εξίσωση FFP. Οι τιμές των παραμέτρων και η γεωμετρία στην οποία αντιστοιχούν τα αποτελέσματα στο κεφάλαιο αυτό παραπέμπουν στο ιονοσφαιρικό πλάσμα, οπότε δεν είναι ξεκάθαρο ποιά είναι η ισχύς της ημιγραμμικής θεωρίας για εφαρμογές σε πλάσμα σύντηξης. Αυτό είναι ένα θέμα που χρειάζεται περαιτέρω διερεύνηση, και υπάρχουν ήδη αποτελέσματα σε αυτή την κατεύθυνση (βλ. [Kamendje et al 2003]).

3. ΔΙΑΔΟΣΗ ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΩΝ ΚΥΜΑΤΙΚΩΝ ΔΕΣΜΩΝ ΣΤΟ ΠΛΑΣΜΑ

Ύστερα απ' τη μελέτη της επίδρασης των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα απ' την αντίστροφη οπτική γωνία, επικεντρώνοντας στην επίδραση του πλάσματος στα χαρακτηριστικά της κυματικής διάδοσης. Το πλάσμα διαφέρει σημαντικά σε σχέση με τα συνηθισμένα διηλεκτρικά μέσα, κυρίως λόγω της ύπαρξης των συλλογικών φαινομένων, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα την εμφάνιση μιας ιδιαίτερης φυσικής συμπεριφοράς κατά την αλληλεπίδραση με ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Το πρόβλημα της διάδοσης επίπεδων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα έχει μελετηθεί διεξοδικά στο παρελθόν και είναι πλέον ελάχιστα τα ερωτηματικά που παραμένουν αναπάντητα (βλ. Ενότ. 1.3). Στην περίπτωση που το μήκος κύματος είναι πολύ μικρότερο απ' τη χαρακτηριστική κλίμακα ανομοιογένειας στο πλάσμα, η λύση επιτυγχάνεται γρήγορα, εύκολα και με αρκετά καλή ακρίβεια μέσω των ασυμπτωτικών μεθόδων. Σήμερα, τα προβλήματα που παρουσιάζουν μεγάλο πρακτικό ενδιαφέρον έχουν να κάνουν περισσότερο με τη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυματικών δεσμών¹. Η χρήση κυματικών δεσμών με αρχική εστίαση (focusing) εμφανίζει πλεονεκτήματα όπως π.χ. ο εντοπισμός της ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας του κύματος στο χώρο και η αύξηση της διακριτικής ικανότητας των διαγνωστικών διατάξεων.

Στις μηχανές ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης, η χρήση κυματικών δεσμών με αρχική εστίαση οδηγεί στην αύξηση της πυκνότητας ενέργειας κατά μήκος της διάδοσης και στον καλύτερο έλεγχο των μαγνητοϋδροδυναμικών και κινητικών ασταθειών. Στις περισσότερες εφαρμογές χρησιμοποιούνται Gaussian δέσμες, δηλ. δέσμες όπου το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου είναι φθίνουσα εκθετική συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων εγκάρσια στη διάδοση. Τα πλεονεκτήματα των Gaussian δεσμών είναι σημαντικά: (α) Εμφανίζουν ελάχιστες θερμικές απώλειες κατά τη διάδοση, (β) Είναι πολύ εύκολη η σύζευξη με τους χαρακτηριστικούς (κανονικούς) ρυθμούς των κυματοδηγών, (γ) Η μαθηματική τους περιγραφή σε θεωρητικές και αριθμητικές εφαρμογές είναι ιδιαίτερα απλή. Όμως, σε πειράματα όπου εμπλέκονται κύματα με συχνότητα πολλαπλάσια της κυκλοτρονικής συχνότητας των ηλεκτρονίων, είναι πιθανό να προκύψουν δέσμες με non-Gaussian κατανομή πλάτους λόγω ατελειών στη διάταξη εκπομπής της μικροκυματικής ακτινοβολίας ή λόγω της πολυπλοκότητας της αλληλεπίδρασης με το πλάσμα. Ενώ η θεωρητική αντιμετώπιση της διάδοσης Gaussian δεσμών έχει φτάσει σε πολύ ικανοποιητικό επίπεδο, για δέσμες διαφορετικού τύπου το πρόβλημα δεν έχει μελετηθεί επαρκώς.

¹ Με τον όρο "κυματική δέσμη" (wave beam) εννοούμε ένα κύμα όπου η ισχύς του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι περιορισμένη στο χώρο και το μέτωπο κύματος είναι καμπυλόγραμμο.

Ο σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η γενίκευση των μεθόδων επίλυσης της κυματικής εξίσωσης για την περίπτωση όπου η δέσμη δεν είναι Gaussian. Η δομή του κεφαλαίου είναι η ακόλουθη: Στην πρώτη ενότητα αναφερόμαστε γενικά στο πρόβλημα της διάδοσης κυμάτων στο πλάσμα, επικεντρώνοντας στην περίπτωση της κυματικής δέσμης. Στην Ενót. 3.2 παρουσιάζονται συνοπτικά οι ασυμπτωτικές μέθοδοι για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης, ενώ στην επόμενη ενότητα επεκτείνουμε τη μέθοδο εντοπισμού δέσμης στην περίπτωση που η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου είναι non-Gaussian. Ακολούθως, στην Ενót. 3.4 γενικεύονται οι χαρακτηριστικές παράμετροι που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή δεσμών με Gaussian κατανομή και για την περίπτωση όπου η κατανομή έχει διαφορετικό σχήμα. Οι αριθμητικές εφαρμογές παρουσιάζονται στην Ενót. 3.5, και στην τελευταία ενότητα συζητώνται τα κύρια συμπεράσματα.

3.1 Εισαγωγή

Η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με συχνότητα πολλαπλάσια της συχνότητας περιστροφής των ηλεκτρονίων (ακτινοβολία electron-cyclotron (EC)) είναι η πιο συνηθισμένη μέθοδος για την επίτευξη θέρμανσης (Electron-Cyclotron Resonance Heating (ECRH)) και οδήγησης μη επαγόμενων ρευμάτων (Electron-Cyclotron Current Drive (ECCD)) στις πειραματικές μηχανές θερμοπυρηνικής σύντηξης (tokamaks, stellarators) [Erckmann and Gasparino 1994, Lloyd 1998, Prater 2004]. Η διοχέτευση ενέργειας στο πλάσμα μέσω ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εμφανίζει το πλεονέκτημα της πολύ εντοπισμένης απορρόφησης. Παραδείγματα της αξιοποίησης του πλεονεκτήματος αυτού είναι: (α) Ο έλεγχος των MHD ασταθειών (π.χ. πριονωτή, Neoclassical Tearing mode (NTM)), (β) Η δημιουργία εσωτερικών φραγμάτων μεταφοράς (ITB), (γ) Η διαμόρφωση της κατανομής του ρεύματος στο χώρο, (δ) Η υψηλή ανάλυση των διαγνωστικών πλάσματος (interferometry, reflectometry) (βλ. π.χ. [Erckmann and Gasparino 1994] και αναφορές εκεί).

Η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα περιγράφεται από τις διαφορικές εξισώσεις Maxwell, ή ισοδύναμα απ' την κυματική εξίσωση. Εν γένει, το να λυθεί πλήρως το πρόβλημα είναι ιδιαίτερα δύσκολο, διότι η κυματική εξίσωση είναι μια μερική διαφορική εξίσωση $2^{ηs}$ τάξης, ενώ είναι απαραίτητο να καθοριστεί και η απόκριση του πλάσματος. Στην περίπτωση όπου το μήκος κύματος είναι αρκετά μικρότερο απ' το χαρακτηριστικό μήκος ανομοιογένειας του πλάσματος, που είναι και η συνηθισμένη περίπτωση για παραμέτρους σχετικές με τα σύγχρονα πειράματα, η επίλυση της κυματικής εξίσωσης απλουστεύεται με χρήση των λεγόμενων "ασυμπτωτικών μεθόδων" (asymptotic methods). Με αυτές επιχειρείται η εξεύρεση προσεγγιστικής λύσης με ανάπτυξη της μαθηματικής έκφρασης της λύσης της κυματικής εξίσωσης σε ασυμπτωτική σειρά. Αναφέρουμε επιγραμματικά τις κύριες ασυμπτωτικές μεθόδους (συνοπτική παρουσίαση θα γίνει στην επόμενη ενότητα): (α) Εντοπισμός ακτίνας (ray tracing) [Bernstein 1975, Friedland and Bernstein 1980], (β) Μέθοδος μιγαδικής φάσης (complex eikonal method) [Mazzucato 1989, Permittin and Smirnov 1996, Kravtsov et al 1999], (γ) Εντοπισμός δέσμης (beam tracing) [Pereverzev 1996, Pereverzev 1998].

Στις μεθόδους εντοπισμού ακτίνας και δέσμης η λύση προσδιορίζεται μέσω κανονικών εξισώσεων, όπου η συνάρτηση διασποράς (dispersion function) παίζει το ρόλο της συνάρτησης Hamilton. Η αντιμετώπιση αυτή παρέχει μια άμεση εικόνα της φυσικής της διάδοσης του κύματος στο πλάσμα. Στις περισσότερες εφαρμογές, ως συνάρτηση Hamilton θεωρείται η συνάρτηση διασποράς ψυχρού πλάσματος [Stix 1992], ενώ η διηλεκτρική απόκριση υπολογίζεται με βάση τη γραμμική θεωρία της κυκλοτρονικής απορρόφησης από ηλεκτρόνια [Bornatici et al 1983, Swanson 2003]. Η τόσο απλοποιημένη περιγραφή δικαιολογείται απ' το ότι, εκτός από τη στενή ζώνη του κυκλοτρονικού συντονισμού, η αλληλεπίδραση κύματος-πλάσματος δεν είναι ιδιαίτερα ισχυρή, ενώ για παράμετρους σχετικές με τα σημερινά πειράματα σύντηξης η ισχύς του κύματος είναι πολύ μικρή. Υπάρχουν πολλοί κώδικες εντοπισμού ακτίνας και δέσμης που ακολουθούν τη διαδικασία που αναφέρθηκε παραπάνω (βλ. π.χ. [Westerhof 1989, Nowak and Orefice 1993, Poli et al 2001b, Farina 2005]), και τα αποτελέσματα συμφωνούν με έναν ικανοποιητικό αριθμό πειραμάτων από διαφορετικά tokamaks (για λεπτομέρειες δείτε τις [Erckmann and Gasparino 1994, Lloyd 1998, Prater 2004]).

Στην πλειοψηφία των πειραμάτων για την επίτευξη ECRH και ECCD είναι επιθυμητή η διάδοση εστιασμένων κυματικών δεσμών με μικρό εύρος. Με τη χρήση δεσμών τέτοιου τύπου, σε πειράματα ECRH αυξάνεται κατά πολύ ο εντοπισμός της απορρόφησης της κυματικής ενέργειας, σε διαγνωστικά πλάσματος η μελετώμενη περιοχή μπορεί να γίνει πολύ μικρότερη, ενώ βελτιώνεται ο έλεγχος των ασταθειών πλάσματος μέσω της δημιουργίας ECCD. Οι περισσότερες τεχνικές στη θεωρία και τα πειράματα βασίζονται στη χρήση δεσμών που έχουν Gaussian profile, δηλ. που η κατανομή πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου έχει το σχήμα της κανονικής κατανομής. Τέτοιες κυματικές δέσμες χρησιμοποιούνται ευρύτατα σε πρακτικές εφαρμογές λόγω των μικρών θερμικών απωλειών στη γραμμή διάδοσης και επειδή επιτρέπουν εύκολη σύζευξη με τους κανονικούς ρυθμούς των κυματοδηγών. Επίσης, λόγω των συμμετριών που τις χαρακτηρίζουν, είναι εύκολη η περιγραφή και η προσομοίωσή τους στις θεωρητικές και αριθμητικές εφαρμογές.

Όμως, ακόμη κι αν οι προδιαγραφές του πειράματος προβλέπουν το σχήμα της δέσμης να είναι Gaussian, η δέσμη που εισέρχεται στο πλάσμα ενδέχεται να μην είναι Gaussian. Αυτό μπορεί να είναι ανεπιθύμητο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται σε κακή ρύθμιση της διάταξης εκπομπής ή σε παραμόρφωση κάποιων στελεχών της διάταξης που είναι ευαίσθητα στη θερμοκρασία. Υπάρχει όμως το ενδεχόμενο η δέσμη να είναι σκόπιμα non-Gaussian. Ένα παράδειγμα είναι όταν θέλουμε να μειωθεί η πυκνότητα ενέργειας στο παράθυρο που υπάρχει ανάμεσα στη γραμμή εκπομπής της ακτινοβολίας και στο θάλαμο κενού (vacuum vessel) του tokamak². Αυτό μπορεί να επιτευχθεί συμπεριλαμβανοντας στο ηλεκτρικό πεδίο της δέσμης ένα ρυθμό ανώτερης τάξης στο ρυθμό μηδενικής τάξης (Gaussian) [Siegman 1986], οπότε προκύπτει μια κατανομή πλάτους με μεγαλύτερο εύρος απ' αυτό της Gaussian (βλ. Υποεν. 3.5.2). Επιπρόσθετα, εντός του πλάσματος, ενδέχεται το αρχικό σχήμα της δέσμης να τροποποιηθεί λόγω εντοπισμένης απορρόφησης ή ισχυρής εστίασης.

² Το παράθυρο αυτό κατασκευάζεται από καθαρό διαμάντι, οπότε και έχει πολύ υψηλό κόστος, και συνεπώς η αύξηση του χρόνου ζωής του είναι επιβεβλημένη.

Οι (επιθυμητές και μη) περιπτώσεις όπου κυματικές δέσμες με non-Gaussian profile διαδίδονται στο πλάσμα είναι ένα θέμα που δεν έχει μελετηθεί αρκετά. Στο κεφάλαιο αυτό, η μέθοδος εντοπισμού δέσμης, η οποία στο παρελθόν έχει εφαρμοστεί στη διάδοση Gaussian δεσμών, γενικεύεται για την περίπτωση δεσμών με profile αυθαίρετου σχήματος. Ειδικότερα, καθορίζεται η αλληλουχία των βημάτων για την επίλυση του προβλήματος, επικεντρώνοντας στις αλλαγές που απαιτούνται στην υπάρχουσα μέθοδο εντοπισμού δέσμης. Οι κυριότερες αλλαγές αφορούν στην περιγραφή (α) της διαφοράς φάσης των ρυθμών σε σχέση με το γεωμετρικό άξονα συμμετρίας της δέσμης, (β) της κυκλοτρονικής απορρόφησης των ρυθμών υψηλότερης τάξης. Επιπλέον, διατηρείται η απλοποιημένη αναπαράσταση της κυματικής δέσμης μέσω χαρακτηριστικών παραμέτρων, όπως π.χ. το εύρος της δέσμης και η ακτίνα καμπυλότητας του μετώπου κύματος, με τη γενίκευση των παραμέτρων που έχουν ήδη οριστεί για την Gaussian δέσμη.

3.2 Ασυμπτωτικές μέθοδοι για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης

Όπως δείξαμε στην Υποεν. 1.3.2, από τις εξισώσεις Maxwell προκύπτει η κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό ή το μαγνητικό πεδίο. Το γενικότερο πρόβλημα απλοποιείται ακόμη περισσότερο με τις παραδοχές για σταθερή συχνότητα κύματος, γραμμική απόκριση πλάσματος και πολύ αργή μεταβολή στο χώρο και το χρόνο των φυσικών ιδιοτήτων του πλάσματος (μαγνητικό πεδίο, πυκνότητα, θερμοκρασία). Η μαθηματική έκφραση του μιγαδικού ηλεκτρικού πεδίου είναι $\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, και η κυματική εξίσωση σε ανομοιογενές πλάσμα με διηλεκτρική απόκριση $\tilde{\epsilon}$ έχει μορφή παρόμοια με αυτή της Εξ. (1.40)

$$\nabla \times [\nabla \times \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r})] - \kappa^2 \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = 0. \quad (3.1)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η παράμετρος $\kappa = \omega L_p / c$ καθορίζει πόσο μικρό είναι το μήκος κύματος σε σχέση με την κλίμακα ανομοιογένειας του πλάσματος L_p ³.

Η εφαρμογή των ασυμπτωτικών μεθόδων στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης συνίσταται στα εξής βήματα: (α) Καθορισμός της μαθηματικής μορφής της λύσης για το ηλεκτρικό πεδίο (ansatz), (β) Ανάπτυξη της λύσης σε ασυμπτωτική σειρά ως προς την παράμετρο κ , (γ) Αντικατάσταση της ασυμπτωτικής σειράς στην κυματική εξίσωση και διαχωρισμός των όρων διαφορετικής τάξης ως προς το κ , (δ) Επίλυση της εξίσωσης που αντιστοιχεί σε κάθε τάξη του κ . Υπάρχουν διαφορετικές ασυμπτωτικές μέθοδοι, ανάλογα με το ansatz για το ηλεκτρικό πεδίο και τη μορφή των όρων της ασυμπτωτικής σειράς. Οι τρεις κυριότερες, τις οποίες και παρουσιάζουμε στις υποενοτήτες που ακολουθούν, είναι οι εξής: (α) Εντοπισμός ακτίνας, που προκύπτει απ' τη θεωρία της γεωμετρικής οπτικής (geometrical optics), (β) Μέθοδος μιγαδικής φάσης, που βασίζεται στην ημιοπτική θεωρία (quasi-optics), (γ) Εντοπισμός δέσμης, που είναι ένας συνδυασμός των προηγούμενων δύο.

³ Στις περιπτώσεις που θα μελετήσουμε είναι $\lambda \ll L_p$ (ή αλλιώς $\kappa \gg 1$) και λέμε ότι βρισκόμαστε στο "μικροκυματικό όριο" (short-wavelength limit).

3.2.1 Εντοπισμός ακτίνας

Η γνωστότερη, και ταυτόχρονα απλούστερη, ασυμπτωτική μέθοδος για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης είναι η μέθοδος του εντοπισμού ακτίνας (ray tracing), η οποία προκύπτει από τη θεωρία της γεωμετρικής οπτικής [Weinberg 1962, Bernstein 1975, Friedland and Bernstein 1980, Kravtsov and Orlov 1990]. Η θεωρία αυτή περιγράφει την κυματική διάδοση στο πλαίσιο ενός συνόλου από ακτίνες, παρόμοιες με αυτές του φωτός, οι οποίες υπόκεινται σε συνεχή διάθλαση από το χωρικά μεταβαλλόμενο μέσο. Σαν κινηματικό ανάλογο, θα μπορούσαμε να αντιστοιχίσουμε την τροχιά ενός σωματιδίου υπό την επίδραση ενός συγκεκριμένου δυναμικού. Με τον τρόπο αυτό καθιερώνεται μια αντιστοιχία ανάμεσα στη διάδοση ενός κύματος, όπως αυτή προκύπτει από τις εξισώσεις Maxwell, και τη μεθοδολογία Hamilton για την κίνηση ενός σωματιδίου [Landau and Lifshitz 1997].

Στη μέθοδο εντοπισμού ακτίνας, το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος περιγράφεται σαν γενίκευση της αντίστοιχης μορφής του επίπεδου κύματος, όπου εδώ θεωρούμε ότι ο κυματάρριθμος μεταβάλλεται στο χώρο. Η μορφή αυτή είναι γνωστή με την ονομασία "eikonal ansatz" [Weinberg 1962, Bernstein 1975]

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r})e^{i\kappa s(\mathbf{r})}, \quad (3.2)$$

όπου με $\bar{\mathbf{A}}$ συμβολίζεται το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου και s είναι η γενίκευση της φάσης $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ για ασθενώς ανομοιογενές μέσο. Η σχέση της γενικευμένης φάσης με το μήκος κύματος είναι η (προφανής) $\mathbf{k} = \kappa \nabla s$. Κάθε ακτίνα του κυματικού πεδίου καθορίζεται από ένα σύνολο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες δίνουν την τροχιά που διαγράφει η ακτίνα, τον κυματάρριθμο και το πλάτος του κύματος κατά μήκος της ακτίνας. Στις εξισώσεις αυτές καταλήγουμε ως εξής: (α) Αναπτύσσουμε σε ασυμπτωτική σειρά το πλάτος του "eikonal ansatz"

$$\bar{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{A}}_0 + \frac{\bar{\mathbf{A}}_1}{\kappa} + \frac{\bar{\mathbf{A}}_2}{\kappa^2} + \dots,$$

(β) Αντικαθιστούμε στην κυματική εξίσωση την Εξ. (3.2) και το παραπάνω ανάπτυγμα, (γ) Υποθέτουμε ότι η απορρόφηση είναι ασθενής, δηλ. ότι το αντιστοιχο ερμιτιανό, κάτι που μεταφράζεται στη σχέση $\tilde{\mathbf{e}} = \tilde{\mathbf{e}}^H + i\kappa^{-1}\tilde{\mathbf{e}}^A$ (για λεπτομέρειες βλ. [Poli 1998]), (δ) Διαχωρίζουμε τους όρους διαφορετικής τάξης ως προς κ .

Η εξίσωση που προκύπτει απ' τους όρους μηδενικής τάξης είναι η

$$\left[\kappa^2(-k^2\tilde{\mathbf{I}} + \mathbf{k} \star \mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{e}}^H \right] \cdot \bar{\mathbf{A}}_0 = 0. \quad (3.3)$$

Η συνθήκη επιλυσιμότητας της Εξ. (3.3) είναι η $\det[\kappa^2(-k^2\tilde{\mathbf{I}} + \mathbf{k} \star \mathbf{k}) + \tilde{\mathbf{e}}^H] = 0$. Η συνθήκη αυτή αποτελεί και τη σχέση διασποράς για τη διάδοση στο ανομοιογενές μέσο, και είναι μια εξίσωση Hamilton-Jacobi ως προς s . Αυτό σημαίνει ότι η εξέλιξη της θέσης και της "ορμής" (δηλ. του κυματάριθμου) της ακτίνας εντός του πλάσματος δίνεται από κανονικές εξισώσεις Hamilton

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{k}}, \quad (3.4a)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.4\beta)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις, η μεταβλητή τ αποτελεί μια παράμετρο που λειτουργεί ως συντεταγμένη κατά μήκος της διάδοσης και ορίζεται απ' τη σχέση

$$\frac{dt}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \omega},$$

ενώ η συνάρτηση διασποράς $\mathcal{H} = \det[\kappa^2(-k^2\tilde{\mathbf{I}} + \mathbf{k} \star \mathbf{k}) + \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^H]$ παίζει το ρόλο της συνάρτησης Hamilton. Να σημειώσουμε ότι οι καμπύλες που υπολογίζονται από τις Εξ. (3.4β) ταυτίζονται με τις γραμμές ροής της ταχύτητας ομάδας, η οποία εδώ δίνεται απ' τη σχέση

$$\mathbf{v}_g = -\frac{\partial \mathcal{H}/\partial \mathbf{k}}{\partial \mathcal{H}/\partial \omega}.$$

Η εξίσωση που προκύπτει απ' τους όρους 1^{ης} τάξης είναι η ακόλουθη

$$\frac{d|\bar{\mathcal{A}}_0|^2}{d\tau} + (\nabla \cdot \mathbf{v}_g + 2\alpha_L) |\bar{\mathcal{A}}_0|^2 = 0, \quad (3.5)$$

όπου $\alpha_L = \hat{\mathbf{e}}^* \cdot \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}^A \cdot \hat{\mathbf{e}}$ είναι ο συντελεστής απορρόφησης και $\hat{\mathbf{e}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης ($\bar{\mathcal{A}}_0 = \bar{\mathcal{A}}_0 \hat{\mathbf{e}}$). Η εξίσωση αυτή παρέχει την εξέλιξη του πλάτους του κύματος κατά μήκος της ακτίνας. Ο όρος $\nabla \cdot \mathbf{v}_g |\bar{\mathcal{A}}_0|^2$ υποδηλώνει ότι η ενέργεια του κύματος διαδίδεται κατά μήκος της διεύθυνσης της ταχύτητας ομάδας, ενώ ο όρος $2\alpha_L |\bar{\mathcal{A}}_0|^2$ ότι η απορρόφηση είναι ανάλογη της προβολής του αντισυμμετρικού μέρους του διηλεκτρικού τανυστή πάνω στο διάνυσμα πόλωσης.

3.2.2 Μέθοδος μιγαδικής φάσης

Η μέθοδος εντοπισμού ακτίνας αποτελεί ένα ιδιαίτερα αποτελεσματικό εργαλείο για την επίλυση της κυματικής εξίσωσης. Το βασικό πλεονέκτημα είναι ότι μετατρέπει τις διαφορικές εξισώσεις προς λύση από μερικές σε συνήθειες. Υπάρχει όμως ένας σημαντικός περιορισμός: Η περιγραφή κυματικών φαινομένων, όπως π.χ. η περίθλαση, δεν είναι εφικτή μέσω της μεθόδου αυτής. Στη γεωμετρική οπτική, τα κυματικά φαινόμενα εμφανίζονται στις εξισώσεις ανώτερης τάξης, οι οποίες εν γένει είναι πολύ δύσκολο να λυθούν. Έχουμε όμως περιπτώσεις όπου τέτοια φαινόμενα δε γίνεται να αγνοηθούν, όπως π.χ. όταν χρησιμοποιούνται εστιασμένες δέσμες, όπου οι ακτίνες είναι πολύ κοντά μεταξύ τους και έχουμε αλληλεπιδράσεις κύματος-κύματος, οι οποίες οδηγούν στη διεύρυνση της δέσμης. Σε αυτές τις περιπτώσεις, η χρήση της μεθόδου εντοπισμού δέσμης οδηγεί σε φυσικές ασυμβατότητες. Συνεπώς, απαιτείται η αναβάθμιση της γεωμετρικής οπτικής ώστε να λαμβάνει υπόψη τα κυματικά φαινόμενα. Η θεωρία που έχει αναπτυχθεί στην κατεύθυνση αυτή ονομάζεται "ημιοπτική" (quasi-optics), και σαν αποτέλεσμα έχουν δημιουργηθεί διάφορες μέθοδοι για να αντιμετωπίσουν τα προβλήματα που αναφέραμε πριν.

Απ' τις μεθόδους αυτές, πρώτη έκανε την εμφάνισή της η μέθοδος μιγαδικής φάσης (complex eikonal method) [Choudary and Felsen 1973, Mazzucato 1989, Bravo-Ortega and Glasser 1991]. Η βασική καινοτομία εδώ είναι ότι η φάση του κύματος ορίζεται να είναι μιγαδική, $\bar{s} = s + i\phi$, όπου το φανταστικό μέρος ϕ συνδέεται με το profile της δέσμης. Η μαθηματική έκφραση για το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\bar{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r})e^{i\kappa\bar{s}(\mathbf{r})} = \bar{\mathbf{A}}(\mathbf{r})e^{i\kappa s(\mathbf{r}) - \kappa\phi(\mathbf{r})}, \quad (3.6)$$

όπου το φανταστικό μέρος του κυματανύσματος $\text{Im}(\bar{\mathbf{k}}) = \kappa\nabla\phi$ είναι εγκάρσιο στο διάνυσμα της ταχύτητας ομάδας. Παρατηρήστε ότι, σε αυτό το πλαίσιο, εμφανίζεται ένα νέο χαρακτηριστικό μήκος, το εύρος της δέσμης w ($\lambda \leq w \leq L_p$). Να σημειώσουμε ότι το φανταστικό μέρος $\text{Im}(\bar{\mathbf{k}}) \propto w^{-1}$ είναι της τάξης $\kappa^{-1/2}$ σε σχέση με το πραγματικό μέρος $\text{Re}(\bar{\mathbf{k}})$, σαν αποτέλεσμα της συνθήκης Fresnel $w^2 \geq \lambda L_p$.

Αν ακολουθήσουμε την ίδια οδό με αυτή της προηγούμενης υποενότητας, οι λύσεις που προκύπτουν για τις τροχιές των κυματικών ακτίνων θα είναι μιγαδικές διότι η ίδια η συνάρτηση Hamilton είναι μιγαδική. Είναι όμως δυνατό να παράγουμε μια λύση στο πραγματικό επίπεδο, αν αναπτύξουμε σε σειρά Taylor τη μιγαδική συνάρτηση Hamilton. Η εγκυρότητα της ανάπτυξης αυτής δικαιολογείται απ' τη σχέση $\text{Im}(\bar{\mathbf{k}}) \ll \text{Re}(\bar{\mathbf{k}})$ που δείξαμε παραπάνω. Η συνάρτηση Hamilton που προκύπτει είναι πραγματική, καθώς το φανταστικό μέρος είναι $\text{Im}(\bar{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{v}_g = 0$ λόγω της καθετότητας των $\text{Im}(\bar{\mathbf{k}})$, $\mathbf{v}_g$, και αποτελείται από δύο όρους, τον όρο μηδενικής τάξης της γεωμετρικής οπτικής και έναν όρο ανώτερης τάξης που περιγράφει τα κυματικά φαινόμενα (βλ. π.χ. [Nowak and Orefice 1993, Kravtsov et al 1999])

$$\mathcal{H}(\bar{\mathbf{k}}) = \mathcal{H}[\text{Re}(\bar{\mathbf{k}})] - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \text{Im}(\bar{k}_\alpha) \text{Im}(\bar{k}_\beta) \frac{\partial^2 \mathcal{H}[\text{Re}(\bar{\mathbf{k}})]}{\partial \text{Re}(\bar{k}_\alpha) \partial \text{Re}(\bar{k}_\beta)},$$

όπου οι δείκτες α, β αναφέρονται στις συντεταγμένες ($\chi_\alpha, \chi_\beta = x, y, z$).

Απ' την παραπάνω συνάρτηση Hamilton παίρνουμε τις ημιοπτικές εξισώσεις

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}[\text{Re}(\bar{\mathbf{k}})]}{\partial \text{Re}(\bar{\mathbf{k}})} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha,\beta} \text{Im}(\bar{k}_\alpha) \text{Im}(\bar{k}_\beta) \frac{\partial^3 \mathcal{H}(\bar{\mathbf{k}})}{\partial \text{Re}(\bar{k}_\alpha) \partial \text{Re}(\bar{k}_\beta) \partial \text{Re}(\bar{\mathbf{k}})},$$

$$\frac{d\text{Re}(\bar{\mathbf{k}})}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{H}[\text{Re}(\bar{\mathbf{k}})]}{\partial \mathbf{r}} + \sum_{\alpha,\beta} \text{Im}(\bar{k}_\alpha) \frac{\partial^2 \mathcal{H}(\bar{\mathbf{k}})}{\partial \text{Re}(\bar{k}_\alpha) \partial \text{Re}(\bar{k}_\beta)} \frac{d\text{Im}(\bar{k}_\beta)}{d\tau}.$$

Οι εξισώσεις αυτές, οι οποίες ουσιαστικά προκύπτουν από τους όρους μηδενικής τάξης, περιγράφουν την τροχιά της δέσμης συνυπολογίζοντας την επίδραση των κυματικών φαινομένων. Να τονίσουμε εδώ ότι, σε σχέση με τη μέθοδο εντοπισμού ακτίνας, οι διαφορικές εξισώσεις για τις τροχιές των ακτίνων δεν είναι πλέον συνήθεις αλλά μερικές. Αυτό οφείλεται στο ότι η συμπερίληψη των κυματικών φαινομένων απαιτεί τη σύζευξη των εξισώσεων μέσω όρων που περιγράφουν την αλληλεπίδραση κάθε ακτίνας με τις γειτονικές της. Το μειονέκτημα αυτό αναιρείται από τη μέθοδο εντοπισμού δέσμης, την οποία παρουσιάζουμε στην επόμενη υποενότητα. Όσον αφορά την εξίσωση 1^{ης} τάξης για το πλάτος του κύματος, αυτή είναι η ίδια με την (3.5) που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη υποενότητα.

3.2.3 Εντοπισμός δέσμης

Η τρίτη ασυμπτωτική μέθοδος, στην οποία και θα βασιστούμε στο κεφάλαιο αυτό για την περιγραφή της διάδοσης non-Gaussian κυματικών δεσμών, είναι η μέθοδος εντοπισμού δέσμης (beam tracing). Η μέθοδος αυτή είναι μια εφαρμογή της θεωρίας Wentzel-Krammers-Brillouin (WKB) στην επίλυση της κυματικής εξίσωσης, και συνδυάζει τη μαθηματική απλότητα της μεθόδου εντοπισμού ακτίνας με την ουσιαστική περιγραφή των κυματικών φαινομένων. Η διάδοση της κυματικής δέσμης καθορίζεται από ένα σύνολο συνήθων διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες παρέχουν (α) την τροχιά του γεωμετρικού άξονα, (β) την εξέλιξη του εύρους του profile του ηλεκτρικού πεδίου και της καμπυλότητας του μετώπου κύματος, (γ) την απορρόφηση της κυματικής ενέργειας από το πλάσμα. Όλες οι εξισώσεις αυτές μαζί ονομάζονται εξισώσεις εντοπισμού δέσμης (beam tracing equations).

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει την ίδια μορφή με αυτή που συναντήσαμε στην ημιοπτική θεωρία, δηλ. με μιγαδική γενικευμένη φάση. Η διαφορά έγκειται στο ότι το ανάπτυγμα του πλάτους σε ασυμπτωτική σειρά εμπεριέχει και όρους της ενδιάμεσης τάξης $\kappa^{-1/2}$ [Pereverzev 1996, Pereverzev 1998]

$$\bar{\mathcal{A}} = \Psi_{mn} \bar{\mathcal{A}}_0 - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \xi_j} \frac{i \bar{\mathcal{A}}_1^j}{\kappa^{1/2}} - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} \frac{\bar{\mathcal{A}}_2^{ij}}{2\kappa} - \Psi_{mn} \frac{i \bar{\mathcal{A}}_3}{\kappa}, \quad (3.7)$$

όπου $i, j = 1, 2$. Η συνάρτηση Ψ_{mn} περιγράφει το εγκάρσιο profile της δέσμης

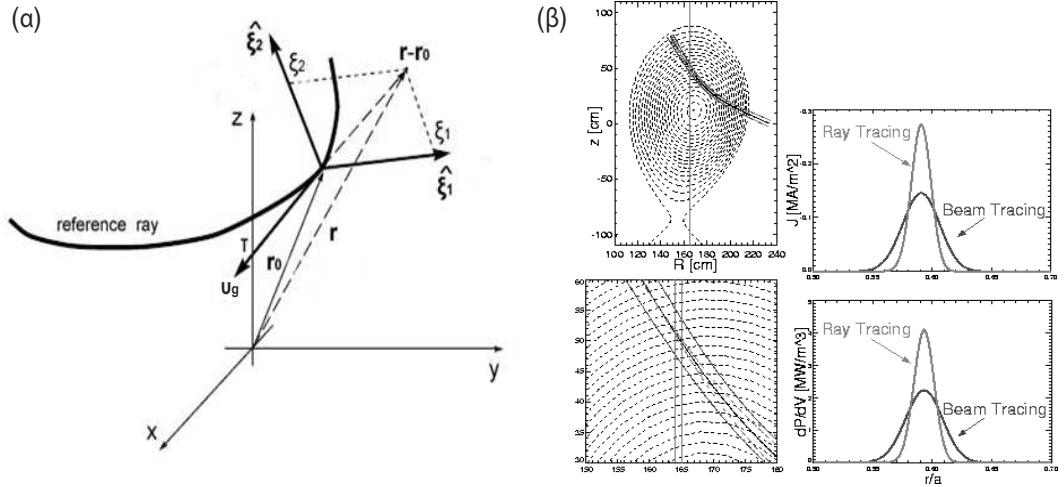
$$\Psi_{mn}(\xi_1, \xi_2) = \frac{H_m(\xi_1) H_n(\xi_2)}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} e^{-\phi(\xi_1, \xi_2)}, \quad (3.8)$$

με H_n τα πολυώνυμα Hermite [Abramowitz and Stegun 1965]. Στα παραπάνω ορίσαμε ένα αδιάστατο σύστημα συντεταγμένων (τ, ξ_1, ξ_2) , που ονομάζεται "σύστημα συντεταγμένων δέσμης" (beam coordinate system). Η συντεταγμένη τ^4 είναι παράλληλη στη διάδοση, ενώ οι ξ_1, ξ_2 ορίζουν το εγκάρσιο επίπεδο όπου σχηματίζεται το beam profile (βλ. Σχ. 3.1(α)). Η καμπύλη $\xi_1 = \xi_2 = 0$ είναι μια ακτίνα παρόμοια με αυτές της γεωμετρικής οπτικής, την οποία ονομάζουμε "ακτίνα αναφοράς" (reference ray). Η ακτίνα αυτή περιγράφει την τροχιά του γεωμετρικού άξονα της δέσμης και υπακούει τις εξισώσεις εντοπισμού ακτίνας (3.4). Το μιγαδικό μέρος της γενικευμένης φάσης είναι μια τετραγωνική μορφή των ξ_1, ξ_2 , οι οποίες επιλέγονται έτσι ώστε η τετραγωνική μορφή 2ϕ να είναι μοναδιαία, δηλ. $\phi = \sum_{i,j=1}^2 \delta_{i,j} \xi_i \xi_j / 2$.

Για τον υπολογισμό της εξέλιξης του εύρους της δέσμης και της καμπυλότητας του μετώπου κύματος, ουσιαστικά αυτό που πρέπει να υπολογίσουμε είναι η μιγαδική φάση $\bar{s}$. Στις εφαρμογές που οι δέσμες είναι χωρικά εντοπισμένες, οπότε και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αμελητέο μακριά απ' τον άξονα της δέσμης, μπορούμε να απλοποιήσουμε σημαντικά τον υπολογισμό αν αναπτύξουμε την $\bar{s}$ σε σειρά Taylor γύρω απ' την ακτίνα αναφοράς. Το ανάπτυγμα έχει τη μορφή

$$\bar{s} = \bar{s}_0 + \sum_{\alpha} \bar{s}_{\alpha} (\chi_{\alpha} - \chi_{0\alpha}) + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \bar{s}_{\alpha\beta} (\chi_{\alpha} - \chi_{0\alpha}) (\chi_{\beta} - \chi_{0\beta}).$$

⁴ Η συντεταγμένη τ στη μέθοδο εντοπισμού δέσμης ορίζεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με την παράμετρο τ στη μέθοδο εντοπισμού ακτίνας (βλ. Υποεν. 3.2.1).



Σχήμα 3.1: Το σύστημα συντεταγμένων δέσμης (τ, ξ_1, ξ_2) [Maj 2003], (β) Αποτελέσματα του κώδικα εντοπισμού δέσμης TORBEAM για την απορροφώμενη ενέργεια και την πυκνότητα οδηγούμενου ρεύματος [Poli et al 2001b].

Οι συντελεστές $\bar{s}_{\alpha\beta} = \partial^2 \bar{s} / (\partial \chi_\alpha \partial \chi_\beta) = s_{\alpha\beta} + i\phi_{\alpha\beta}$ υπολογίζονται από μια διαφορική εξίσωση που προκύπτει απ' τους όρους τάξης $\kappa^{-1/2}$ στην Εξ. (3.7)

$$\frac{d\bar{s}_{\alpha\beta}}{d\tau} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \chi_\alpha \partial \chi_\beta} + \sum_{\alpha'} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \chi_\beta \partial k_{\alpha'}} \bar{s}_{\alpha\alpha'} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \chi_\alpha \partial k_{\alpha'}} \bar{s}_{\beta\alpha'} \right) + \sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} \bar{s}_{\alpha\alpha'} \bar{s}_{\beta\beta'} = 0. \quad (3.9)$$

Το πραγματικό μέρος $s_{\alpha\beta}$ συνδέεται με την ακτίνα καμπυλότητας ($s_{\alpha\beta} \propto R^{-1}$), ενώ το φανταστικό μέρος $\phi_{\alpha\beta}$ με το εύρος της δέσμης ($\phi_{\alpha\beta} \propto W^{-2}$). Η σχέση με το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι $2\phi = \sum_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta} (\chi_\alpha - \chi_{0\alpha})(\chi_\beta - \chi_{0\beta})$.

Η εξίσωση 1^{ης} τάξης για την εξέλιξη του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου είναι παρόμοια με την Εξ. (3.5)

$$\frac{d|\bar{C}_{mn}|^2}{d\tau} + [\nabla \cdot \mathbf{v}_g + 2\alpha_L(\mathbf{k})] |\bar{C}_{mn}|^2 = 0. \quad (3.10)$$

Η διαφορά εδώ είναι πως η απορρόφηση υπολογίζεται μεν επί του γεωμετρικού άξονα, αναφέρεται όμως σε όλη την επιφάνεια της δέσμης. Ο όρος $\bar{C}_{mn} = \bar{A}_0 e^{i\Theta_{mn}}$ είναι ότι απομένει απ' το μιγαδικό πλάτος $\bar{A}_0$ (το αντίστοιχο με αυτό της μεθόδου εντοπισμού ακτίνας) αφού αφαιρέσουμε τη μετατόπιση φάσης Θ_{mn} σε σχέση με το γεωμετρικό άξονα (θα συζητήσουμε αργότερα τον ακριβή ορισμό της Θ_{mn}). Με βάση όλα τα παραπάνω, η γενική λύση για το ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να εκφραστεί σαν υπέρθεση μερικών λύσεων, $\bar{\mathbf{E}} = \sum_{mn} \bar{E}_{mn} \bar{\mathbf{e}}$, της μορφής

$$\bar{E}_{mn} = \frac{\bar{C}_{mn} H_m(\xi_1) H_n(\xi_2)}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} e^{i\kappa s - \kappa \phi - i\Theta_{mn}}. \quad (3.11)$$

Οι μερικές λύσεις $\bar{E}_{mn}$ είναι ιδιοσυναρτήσεις της κυματικής εξίσωσης και είναι γνωστές ως ρυθμοί Gauss-Hermite (δείτε περαιτέρω στην Ενότητα 3.3).

Είναι σημαντικό να τονίσουμε τα πλεονεκτήματα της μεθόδου εντοπισμού δέσμης σε σχέση με τις υπόλοιπες ασυμπτωτικές μεθόδους. Πρώτα απ' όλα, η συγκεκριμένη μέθοδος δίνει τη δυνατότητα να συμπεριληφθούν κυματικά φαινόμενα, τα οποία αγνοούνται στην περιγραφή που παρέχει η μέθοδος εντοπισμού ακτίνας, και μάλιστα με λιγότερες εξισώσεις. Επιπρόσθετα, οι διαφορικές εξισώσεις προς λύση είναι συνήθεις και στο πραγματικό επίπεδο, και συνεπώς αυτή η μέθοδος δεν απαιτεί την ολοκλήρωση εξισώσεων στο μιγαδικό επίπεδο. Η μέθοδος εντοπισμού δέσμης υλοποιείται αριθμητικά στον κώδικα TORBEAM [Poli et al 2001a, Poli et al 2001b]. Ο TORBEAM υπολογίζει τη διάδοση δεσμών ακτινοβολίας EC με Gaussian κατανομή ηλεκτρικού πεδίου σε τοροειδή γεωμετρία, για διάφορες αρχικές συνθήκες εκπομπής και για μαγνητική ισορροπία που δίνεται από αναλυτικές εκφράσεις ή πειραματικά δεδομένα. Εκτός απ' τη διάδοση της δέσμης, ο κώδικας υπολογίζει τη χωρική εξέλιξη της απορρόφησης της ενέργειας και της οδήγησης ρεύματος βάσει γραμμικών μοντέλων για το συντελεστή απορρόφησης και το συντελεστή απόδοσης της οδήγησης ρεύματος (βλ. Σχ. 3.1(β)).

3.3 Εντοπισμός δέσμων με γενική κατανομή ηλεκτρικού πεδίου

Η διάδοση μικροκυματικών δεσμών με Gaussian profile στο πλάσμα έχει μελετηθεί με όλες τις ασυμπτωτικές μεθόδους που αναφέραμε προηγουμένως, αναλυτικά αλλά και αριθμητικά (βλ. ενδεικτικά [Westerhof 1989, Mazzucato 1989, Nowak and Orefice 1993, Pereverzev 1998, Poli et al 2001a, Maj 2003]). Σε αυτό το μέρος του κεφαλαίου περιγράφουμε τον υπολογισμό της διάδοσης non-Gaussian δεσμών σε ανομοιογενές και ανισότροπο πλάσμα, στο πλαίσιο της μεθόδου εντοπισμού δέσμης. Η μαθηματική περιγραφή της non-Gaussian δέσμης γίνεται μέσω της υπέρθεσης ρυθμών Gauss-Hermite (βλ. την Εξ. (3.11)). Δίνουμε έμφαση στις αλλαγές που χρειάζονται στην αρχική μέθοδο, όπως αυτή παρουσιάστηκε από τον Pereverzev [Pereverzev 1998], ώστε να είναι δυνατό να μελετήσουμε, πέρα απ' τις Gaussian δέσμες, και δέσμες με διαφορετικό profile.

Η συγκεκριμένη δομή της μεθόδου εντοπισμού δέσμης διευκολύνει σημαντικά την εισαγωγή όρων υψηλότερης τάξης σε μια Gaussian δέσμη. Οι μερικές λύσεις $\{E_{mn}\}$ είναι ένα πλήρες σύνολο ιδιοσυναρτήσεων της κυματικής εξίσωσης, καθώς (α) κάθε μία απ' τις μερικές λύσεις ικανοποιεί τη διατήρηση ενέργειας, όπως αυτή αποτυπώνεται στην Εξ. (3.10), (β) στο όριο όπου η απορρόφηση είναι ασθενής ($\tilde{\epsilon}^A \ll \tilde{\epsilon}^H$) δεν υπάρχει σύζευξη μεταξύ των διαφορετικών ρυθμών (m, n) , (γ) η μαθηματική έκφραση του πλάτους $|\bar{E}_{mn}|$ συνδέεται γραμμικά με τις συναρτήσεις Gauss-Hermite $\psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x) / \sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}$

$$|\bar{E}_{mn}| = |\bar{C}_{mn}| \frac{H_m(\xi_1) H_n(\xi_2)}{\sqrt{\pi 2^{m+n} m! n!}} e^{-(\xi_1^2 + \xi_2^2)/2} = |\bar{C}_{mn}| \Psi_{mn}(\xi_1, \xi_2) = |\bar{C}_{mn}| \psi_m(\xi_1) \psi_n(\xi_2).$$

Οι συναρτήσεις ψ_n είναι πλήρες και ορθογώνιο σύνολο, οπότε και οι συναρτήσεις Ψ_{mn} αποτελούν βάση στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων εκθετικών συναρτήσεων στις δύο διαστάσεις. Συνεπώς, ένα οποιοδήποτε ηλεκτρικό πεδίο μπορεί

να εκφραστεί σαν μια υπέρθεση τέτοιων συνιστωσών και, με βάση την προηγούμενη ενότητα, να αναλυθεί στο πλαίσιο της μεθόδου εντοπισμού δέσμης. Η συγκεκριμένη διαδικασία της ανάλυσης είναι η εξής: (α) Δίνουμε κατάλληλες αρχικές συνθήκες σε όλες τις μεταβλητές, (β) Επιλύουμε τις εξισώσεις για την ακτίνα αναφοράς, την καμπυλότητα του μετώπου κύματος και το εύρος της δέσμης, (γ) Επιλύουμε την εξίσωση εξέλιξης του πλάτους για κάθε ρυθμό της δέσμης (m, n) .

Όσον αφορά το πρώτο βήμα, είναι απλό να ορίσουμε κατάλληλες αρχικές συνθήκες για τις μεταβλητές που εμπλέκονται στις εξισώσεις εντοπισμού δέσμης (3.4), (3.9), αφού οι μεταβλητές αυτές υπολογίζονται πάνω στην ακτίνα αναφοράς ($\xi_1 = \xi_2 = 0$) και συνεπώς είναι κοινές για όλους του ρυθμούς της δέσμης. Για τα αρχικά πλάτη των ρυθμών $\bar{C}_{mn}|_{\tau=0}$, αξιοποιούμε το γεγονός ότι ένα γενικό ηλεκτρικό πεδίο μπορεί να αναλυθεί σε υπέρθεση ρυθμών Gauss-Hermite. Στην πραγματικότητα, οι συντελεστές ενός τέτοιου αναπτύγματος συμπίπτουν με τις αρχικές τιμές των πλατών στις εξισώσεις εντοπισμού δέσμης (3.10)

$$\bar{E}(\xi_1, \xi_2)|_{\tau=0} = \sum_{m,n} \bar{C}_{mn}|_{\tau=0} \psi_m(\xi_1) \psi_n(\xi_2). \quad (3.12)$$

Ο υπολογισμός των συντελεστών του αναπτύγματος γίνεται απ' τη συνθήκη ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Gauss-Hermite

$$\bar{C}_{mn}|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E}(\xi_1, \xi_2)|_{\tau=0} \psi_m(\xi_1) \psi_n(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (3.13)$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι, θεωρητικά, για να επιτευχθεί η ισότητα στην (3.12) απαιτείται άπειρος αριθμός όρων στο άθροισμα. Όμως, σε πρακτικές εφαρμογές, ο αριθμός των όρων είναι πεπερασμένος, οπότε ο ρόλος της επιλογής του αριθμού αυτού στην ακρίβεια του αναπτύγματος θα πρέπει να διερευνηθεί. Το σφάλμα στην ανάπτυξη του ηλεκτρικού πεδίου σε σειρά ορίζεται ως

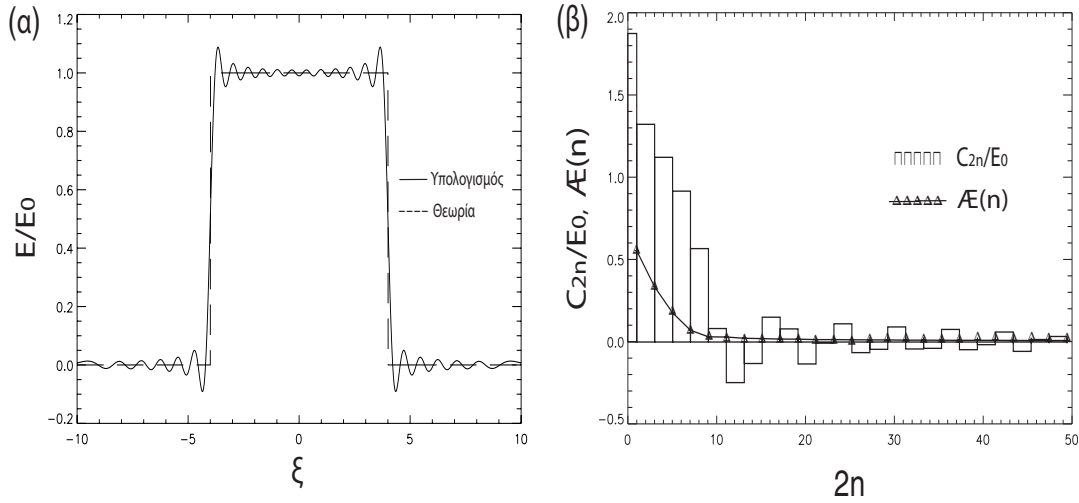
$$\mathcal{A}(m, n) = 1 - \frac{\sum_{m,n} |\bar{C}_{mn}|_{\tau=0}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{E}(\xi_1, \xi_2)|_{\tau=0}^2 d\xi_1 d\xi_2}. \quad (3.14)$$

Η ποσότητα αυτή είναι πάντοτε θετική, κάτι το οποίο προκύπτει απ' την ανισότητα Bessel για γενικευμένες σειρές Fourier.

Σαν παράδειγμα της τεχνικής που περιγράψαμε, ας μελετήσουμε την ανάλυση σε ρυθμούς Gauss-Hermite ενός 1-διάστατου ηλεκτρικού πεδίου με ομοιόμορφη (τετραγωνική) κατανομή πλάτους. Η μαθηματική έκφραση του πεδίου είναι

$$E(\xi)|_{\tau=0} = E_0 [U(\xi + \ell_{sq}) - U(\xi - \ell_{sq})].$$

Στην προηγούμενη σχέση, ℓ_{sq} είναι το εύρος της ομοιόμορφης κατανομής (κανονικοποιημένο ως προς το ίδιο μήκος W με την εγκάρσια συντεταγμένη ξ) και $U(x)$

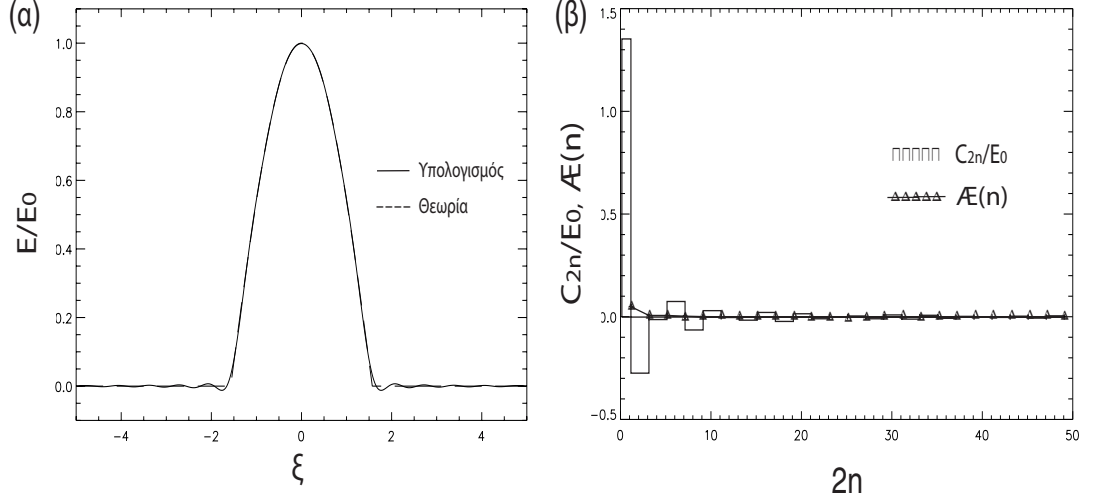


Σχήμα 3.2: (α) Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου μιας 1-διάστατης τετραγωνικής (ομοιόμορφης) δέσμης εύρους $\ell_{sq} = 4$, όπως ανακατασκευάστηκε με χρήση 50 ρυθμών Gauss-Hermite, (β) Οι συντελεστές των άρτιων όρων του αναπτύγματος και το σφάλμα σαν συνάρτηση της τάξης $2n$.

είναι η βηματική συνάρτηση. Εισάγοντας την έκφραση του πεδίου στο 1-διάστατο ανάλογο της Εξ. (3.13), οι συντελεστές του αναπτύγματος βρίσκονται να είναι

$$C_n|_{\tau=0} = \frac{E_0}{\sqrt{\pi^{1/2} 2^n n!}} \int_{-\ell_{sq}}^{\ell_{sq}} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi) d\xi.$$

Παρατηρήστε εδώ ότι, σύμφωνα με τις ιδιότητες των πολυωνύμων Hermite, οι συντελεστές $C_n|_{\tau=0}$ είναι μη μηδενικοί μόνο για άρτιες τιμές του δείκτη n . Υπολογίσαμε αριθμητικά τη λύση του προβλήματος, και στο Σχ. 3.2(α) δείχνουμε το profile της τετραγωνικής δέσμης όπως αυτό αναδομήθηκε με βάση τα αποτελέσματα της ανάλυσης σε 50 συνιστώσες Gauss-Hermite. Η προσέγγιση είναι σε γενικές γραμμές πολύ καλή, ενώ αύξηση του αριθμού των ρυθμών κάνει την προσέγγιση ακόμη καλύτερη. Στο Σχ. 3.2(β), οι συντελεστές των ρυθμών άρτιας τάξης σχεδιάζονται σαν συνάρτηση των δεικτών $2n$. Οι ρυθμοί υψηλής τάξης ($n > 14$) έχουν πολύ μικρούς συντελεστές και δεν παίζουν σημαντικό ρόλο στη διαμόρφωση του profile. Ένα σημείο που πρέπει να τονίσουμε είναι ότι, στην κανονικοποίηση των εγκάρσιων συντεταγμένων, το εύρος W επιλέγεται να είναι μικρότερο από το ℓ_{sq} , ειδικά αν η ανάπτυξη απαιτεί ένα μεγάλο αριθμό όρων για να περιγράψει επαρκώς το σχήμα της δέσμης. Για τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται εδώ χρησιμοποιούμε την τιμή $\ell_{sq} = 4$. Στο Σχ. 3.2(β) απεικονίζουμε το σφάλμα του αναπτύγματος, όπως αυτό ορίζεται στην Εξ. (3.14). Το σφάλμα βρίσκεται να είναι κοντά στο 3% για $n = 10$ και πέφτει κάτω από 1% για $n > 30$, κάτι που σημαίνει ότι η περιγραφή της δέσμης μπορεί να είναι πολύ ακριβής με χρήση λίγων μόνο όρων.



Σχήμα 3.3: (α) Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου μιας 1-διάστατης δέσμης με σχήμα "μισού ημιτόνου" πλάτους $\ell_{hs} = \pi/2$, όπως ανακατασκευάστηκε από 50 ρυθμούς Gauss-Hermite, (β) Οι συντελεστές των άρτιων όρων του αναπτύγματος και το σφάλμα σαν συνάρτηση της τάξης $2n$.

Σε ένα άλλο παράδειγμα, μελετάμε ένα 1-διάστατο ηλεκτρικό πεδίο με κατανομή σχήματος "μισού ημιτόνου" (half-sine)

$$E(\xi)|_{\tau=0} = E_0 \sin(\xi + \ell_{hs}) [U(\xi + \ell_{hs}) - U(\xi - \ell_{hs})].$$

Και σε αυτή την περίπτωση, οι συντελεστές του αναπτύγματος είναι μη μηδενικοί μόνο για άρτιους δείκτες. Στο Σχ. 3.3(α) φαίνεται το profile της δέσμης, όπως υπολογίστηκε με χρήση 50 ρυθμών Gauss-Hermite (εδώ το κανονικοποιημένο εύρος της δέσμης είναι ίσο με $\ell_{hs} = \pi/2$). Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση είναι πολύ ακριβής κατά πλάτος όλης της δέσμης. Στο Σχ. 3.3(β), οι συντελεστές των άρτιων όρων παριστάνονται σαν συνάρτηση του $2n$. Βλέπουμε πως μόνο οι όροι τάξης $n < 8$ έχουν σημαντική επίδραση στο σχήμα του profile. Το σφάλμα είναι περίπου 7% για $n = 2$ και πέφτει κάτω από 1% πολύ γρήγορα, από μόλις $n = 4$.

Αφού έχουμε καθορίσει τις αρχικές συνθήκες, για την επίλυση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης ακολουθούμε τη μεθοδολογία που έχει παρουσιάσει ο Pereverzev [Pereverzev 1996, Pereverzev 1998]. Οι εξισώσεις εντοπισμού δέσμης για την ακτίνα αναφοράς, το εύρος και το μέτωπο κύματος είναι οι ίδιες για όλους τους ρυθμούς, διότι όλες οι ποσότητες στις εξισώσεις αυτές υπολογίζονται πάνω στην ακτίνα αναφοράς. Η γενική μορφή της εξίσωσης για το μιγαδικό πλάτος είναι

$$\frac{d\bar{C}_{mn}}{d\tau} + [\hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{M}(\hat{\mathbf{e}}) + \alpha_L] \bar{C}_{mn} = 0, \quad (3.15)$$

όπου $\mathbf{M}(\hat{\mathbf{e}}) = -\nabla \times (\nabla s \times \hat{\mathbf{e}}) - \nabla s \times (\nabla \times \hat{\mathbf{e}})$. Συνδυασμός της Εξ. (3.15) για το $\bar{C}_{mn} = |\bar{C}_{mn}|e^{i \arg \bar{C}_{mn}}$ με τη σύζυγή της εξίσωση έχει για αποτέλεσμα την Εξ.

(3.10) για το πλάτος $|\bar{C}_{mn}|^2$, όπως και μια σχέση για το όρισμα $\arg \bar{C}_{mn}$

$$\frac{d \arg \bar{C}_{mn}}{d\tau} = \frac{i}{2} [\hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{M}(\hat{\mathbf{e}}) - \hat{\mathbf{e}} \cdot \mathbf{M}(\hat{\mathbf{e}}^*)]. \quad (3.16)$$

Η προηγούμενη σχέση είναι ίδια για όλους τους ρυθμούς, καθώς το δεύτερο μέλος αποτελείται από μεταβλητές που έχουν σχέση μόνο με το γεωμετρικό άξονα της δέσμης. Από την άλλη, η (3.15) εν γένει δεν είναι ίδια για όλους τους ρυθμούς επειδή ο συντελεστής απορρόφησης α_L εξαρτάται από το κυματόνυσμα, το οποίο είναι διαφορετικό για κάθε ρυθμό. Συγκεκριμένα, το κυματόνυσμα που αντιστοιχεί στο ρυθμό τάξης (m, n) είναι

$$\mathbf{k}_{mn} = \nabla(\kappa s - \Theta_{mn}) = \mathbf{k} - \frac{d\Theta_{mn}}{d\tau} \nabla \tau, \quad (3.17)$$

όπου $\mathbf{k} = \kappa \nabla s$ είναι το κυματόνυσμα που αντιστοιχεί στη διάδοση της ακτίνας αναφοράς και υπολογίζεται απ' τη λύση της εξίσωσης εντοπισμού ακτίνας για την $d\mathbf{k}/d\tau$, ενώ η παράμετρος $\nabla \tau$ μπορεί να υπολογιστεί απ' την εξίσωση εντοπισμού ακτίνας για την $d\mathbf{r}/d\tau$. Ο συντελεστής απορρόφησης προσδιορίζεται από αναλυτικά μοντέλα (βλ. ενδεικτικά [Bornatici et al 1983]) ή λύνοντας τη σχέση διασποράς για κινητικό πλάσμα, όπως π.χ. υλοποιείται από τον Westerhof [Westerhof 1989] (αριθμητικά αποτελέσματα παρουσιάζονται στην Υποεν. 3.5.1).

Για να ολοκληρώσουμε τη λύση, αυτό που απομένει να υπολογιστεί είναι η μετατόπιση φάσης Θ_{mn} . Ο ρόλος της στην εξέλιξη της δέσμης θα αναλυθεί περισσότερο στην επόμενη ενότητα. Στο πλαίσιο που αναφέραμε ήδη, η Θ_{mn} δίνεται απ' τη σχέση

$$\Theta_{mn} = (m + n + 1) \int_0^\tau \mathcal{N} d\tau, \quad (3.18)$$

όπου $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\tau)$ είναι μια συνάρτηση που μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος της ακτίνας αναφοράς, και πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση-περιορισμό

$$\sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 H}{\partial k_\alpha \partial k_\beta} \frac{\partial \xi_i}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_j}{\partial \chi_\beta} = \kappa \mathcal{N} \delta_{i,j}. \quad (3.19)$$

Αυτή η εξίσωση είναι στην πραγματικότητα μια άλλη μορφή της Εξ. (40) στην [Pereverzev 1998], και πρέπει να ικανοποιείται διότι είναι η συνθήκη επιλυσιμότητας της Εξ. (24c). Η συγκεκριμένη είναι μία από τις εξισώσεις που προκύπτουν απ' τους όρους τάξης $\kappa^{-1/2}$ αφ'ότου η Εξ. (3.7) αντικατασταθεί στη κυματική εξίσωση και γίνει συνδυασμός με την Εξ. (5)

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_{i,j} \frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \left(m + n + 1 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \delta_{i,j} \xi_i \xi_j \right) \Psi_{mn} = 0. \quad (3.20)$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ιδιότητα των 2-διάστατων συναρτήσεων Gauss-Hermite, η οποία μπορεί να εξαχθεί αθροίζοντας τις αντίστοιχες 1-διάστατες εξισώσεις

$$\frac{d^2 \psi_n}{d\xi^2} + (2n + 1 - \xi^2) \psi_n = 0. \quad (3.21)$$

Η μέθοδος αυτή δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα στην περίπτωση που η δέσμη είναι Gaussian, αλλά για να την εφαρμόσουμε στη γενική περίπτωση μιας τυχαίας δέσμης απαιτείται μια αναθεώρηση. Πιο συγκεκριμένα, η συνθήκη (3.19) είναι πολύ περιοριστική για την περιγραφή του profile της δέσμης, διότι έτσι είναι δυνατό να προσομοιωθούν μόνο δέσμες με φυσική συμπεριφορά που υπακούει τη συγκεκριμένη συμμετρία που περιγράφεται στην Εξ. (3.19), δηλ. $\sum_{\alpha,\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \mathcal{H} \partial_{\alpha} \xi_1 \partial_{\beta} \xi_1 = \sum_{\alpha,\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \mathcal{H} \partial_{\alpha} \xi_2 \partial_{\beta} \xi_2$ (συμβολίζουμε με ∂_{α} τη μερική παράγωγο ως προς χ_{α} και με $\partial_{\alpha\beta}$ αυτή ως προς k_{α}, k_{β}). Μπορούμε να γενικεύσουμε τη συνθήκη αυτή ορίζοντας ένα τανυστή $\tilde{\Lambda}$ ($\Lambda_{11}, \Lambda_{22} \neq 0, \Lambda_{12} = \Lambda_{21} = 0$), όπου τα διαγώνια στοιχεία του θα υπεισέρχονται σαν πολλαπλασιαστές των Εξ. (3.21) για κάθε κατεύθυνση εγκάρσια στη διάδοση της δέσμης. Η εισαγωγή τέτοιων ποσοτήτων στην Εξ. (3.20) γίνεται με αντικατάσταση του $\delta_{i,j}$ με το αντίστοιχο στοιχείο του $\tilde{\Lambda}$

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 \Phi_{mn}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{11} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{22} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda_{ij} \xi_i \xi_j \right] \Phi_{mn} = 0.$$

Στα παραπάνω, αυτό έχει σαν αποτέλεσμα η σχέση (3.19) να πάρει τη μορφή

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 H}{\partial k_{\alpha} \partial k_{\beta}} \frac{\partial \xi_i}{\partial \chi_{\alpha}} \frac{\partial \xi_i}{\partial \chi_{\beta}} = \kappa \mathcal{N} (\Lambda_{11} \delta_{i,1} + \Lambda_{22} \delta_{i,2}), \quad (3.22)$$

δηλ. ουσιαστικά να διασπαστεί σε δύο διαφορετικές σχέσεις οι οποίες δε θέτουν κανένα περιορισμό στη φυσική που μπορεί να υπακούει η δέσμη. Συνεπώς, με αυτή την αλλαγή η μέθοδος είναι δυνατό να εφαρμοστεί και σε γενικότερες περιπτώσεις. Οι παραπάνω αλλαγές δεν επηρεάζουν τη μορφή των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης, όπως αυτές δίνονται στην Εξ. (3.9) (για λεπτομέρειες βλ. Παράρτ. Α).

Σε αυτό το νέο πλαίσιο, ο ορισμός για τη μετατόπιση φάσης γίνεται

$$\Theta_{mn} = \left(m + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\tau} \Lambda_{11} \mathcal{N} d\tau + \left(n + \frac{1}{2} \right) \int_0^{\tau} \Lambda_{22} \mathcal{N} d\tau. \quad (3.23)$$

Οι Εξ. (3.22) συνδέουν τις ποσότητες $\Lambda_{11}, \Lambda_{22}, \mathcal{N}$ με τη συνάρτηση Hamilton και τη Jacobian του μετασχηματισμού απ' τις συντεταγμένες δέσμης στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Στις εφαρμογές, οι σχέσεις αυτές είναι απαραίτητες για να καθοριστούν οι όροι $\Lambda_{11} \mathcal{N}, \Lambda_{22} \mathcal{N}$ που εμφανίζονται στη μετατόπιση φάσης (βλ. Εξ. (3.23)). Για παράδειγμα, στην περίπτωση διάδοσης στο κενό κατά μήκος του άξονα x , όπου $\mathcal{H} = c^2 k^2 / (2\omega^2) - 1/2$ και η σχέση μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι $\xi_{\alpha} = \chi_{\alpha} / W_{\alpha}$ ($\chi_{\alpha} = y, z$), το αποτέλεσμα είναι $\Lambda_{11} \mathcal{N} = c^2 / (\omega^2 W_y^2)$ και $\Lambda_{22} \mathcal{N} = c^2 / (\omega^2 W_z^2)$. Στα παραπάνω, δεν ασχοληθήκαμε με θέματα που αφορούν το βαθμό αοριστίας των $\tilde{\Lambda}$ και $\mathcal{N}$. Μια λεπτομερής διερεύνηση της σχέσης ανάμεσα στις ποσότητες $\tilde{\Lambda}, \mathcal{N}$ και στην επιλογή των (τ, ξ_1, ξ_2) είναι πέρα από το πλαίσιο αυτής της διατριβής και θα γίνει σε μελλοντική εργασία.

3.4 Παραμετροποίηση non-Gaussian δεσμών

Μια δέσμη με Gaussian profile μπορεί να περιγραφεί από λίγες μόνο παραμέτρους, οι πιο σημαντικές απ' τις οποίες είναι το εύρος της δέσμης και η ακτίνα καμπυλότητας του μετώπου κύματος. Το εύρος μετρά την εγκάρσια έκταση της δέσμης, ενώ η ακτίνα καμπυλότητας απεικονίζει την εστίαση της δέσμης. Το εύρος της δέσμης ορίζεται συνήθως ως η απόσταση από το μέγιστο του σημείου εκείνου όπου η σχετική μείωση του πλάτους είναι ίση με $1/e$ ($1/e$ -width), αλλά επίσης συναντάται περιστασιακά και ο ορισμός του πλήρους εύρους στο μισό του μεγίστου (Full Width at Half-Maximum (FWHM)). Η ακτίνα καμπυλότητας του μετώπου κύματος είναι η ακτίνα της σφαιρικής καμπύλης που ορίζεται τοπικά από τη μορφή του σχήματος του μετώπου κύματος.

Όταν το profile είναι non-Gaussian, οι κλασικοί ορισμοί στις περισσότερες περιπτώσεις αποτυγχάνουν να περιγράψουν επαρκώς το σχήμα της δέσμης. Για παράδειγμα, ο ορισμός του εύρους ως το $1/e$ -width ενδέχεται να δώσει λάθος εκτίμηση για το μέγεθος της εγκάρσιας διατομής της δέσμης, επειδή η τιμή του πεδίου συνήθως πέφτει κάτω απ' το ποσοστό $1/e$ σε περισσότερες από μία θέσεις κατά μήκος της εγκάρσιας διεύθυνσης. Επίσης, σε κάποιες περιπτώσεις, η προσέγγιση ότι το μέτωπο κύματος είναι τοπικά σφαιρικό μπορεί να είναι αρκετά εσφαλμένη. Σε τέτοιες καταστάσεις επιβάλλεται να ορίσουμε ξανά τις παραμέτρους αυτές. Η όλη αντίληψη περί παραμετροποίησης είναι σημαντική διότι παρέχει μια απλή (αλλά ταυτόχρονα πρακτική) περιγραφή των γενικών χαρακτηριστικών της δέσμης μέσω λίγων παραμέτρων. Το εύρος της εγκάρσιας διατομής και η δομή του μετώπου κύματος χαρακτηρίζουν πλήρως την κύρια συμπεριφορά της δέσμης δίχως να αναφέρονται σε τοπικές μεταβολές του κυματικού πεδίου, οι οποίες είναι χρονοβόρο να υπολογιστούν και σε πολλές πρακτικές εφαρμογές δεν είναι καν απαραίτητη η γνώση τους.

Η περιγραφή δεσμών με profile γενικού σχήματος μπορεί να γίνει με γενίκευση των παραμέτρων που έχουν ήδη οριστεί για τις Gaussian δέσμες. Θεωρώντας τη μαθηματική έκφραση του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου ως μια συνάρτηση κατανομής των τιμών του ηλεκτρικού πεδίου στο χώρο, οι γενικευμένες παράμετροι είναι δυνατό να οριστούν με βάση τις ροπές της κατανομής αυτής

$$\langle x^m y^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^m y^n |\bar{\mathbf{E}}(x, y)|^2 dx dy}{\int_{-\infty}^{\infty} |\bar{\mathbf{E}}(x, y)|^2 dx dy}.$$

Θα παρουσιάσουμε τη γενίκευση της παραμέτρου του εύρους δέσμης. Στη σύγχρονη Οπτική [Siegman 1986, Dreggers 2003], το εύρος μιας τυχαίας δέσμης περιγράφεται από ένα 2-διάστατο συμμετρικό πίνακα/τανυστή

$$\tilde{\mathbf{w}}^2 = 2 \begin{bmatrix} \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 & \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle \\ \langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle & \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \end{bmatrix}.$$

Στον τανυστή αυτό, οι όροι που είναι αρνητικά προσημασμένοι ($-\langle x \rangle^2$, $-\langle y \rangle^2$) περιγράφουν την ασυμμετρία της δέσμης ως προς το γεωμετρικό της άξονα, ενώ οι μη διαγώνιοι όροι ($\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle$) σχετίζονται με τη σύζευξη των εγκάρσιων διευθύνσεων στη μαθηματική έκφραση του profile. Πρέπει να σημειώσουμε ότι είναι

δυνατό να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων όπου η σύζευξη των εγκάρσιων διευθύνσεων απαλείφεται, και να μεταβούμε σε αυτό με διαδοχικούς μετασχηματισμούς στροφής. Σε αυτό το "προσανατολισμένο" σύστημα ο τανυστής $\tilde{\mathbf{w}}$ είναι διαγώνιος

$$\tilde{\mathbf{w}}^2 = \begin{bmatrix} w_y^2 & 0 \\ 0 & w_z^2 \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

με $w_\alpha = \sqrt{2(\langle \chi_a^2 \rangle - \langle \chi_a \rangle^2)}$ το γενικευμένο εύρος δέσμης ανά κατεύθυνση $\chi_\alpha = x, y$. Για μια Gaussian δέσμη, είναι πολύ εύκολο ναδειχθεί ότι το γενικευμένο εύρος συμπίπτει με τον ορισμό του πλάτους με βάση τη μείωση κατά παράγοντα $1/e$.

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω στην περίπτωση μιας non-Gaussian δέσμης που είναι άθροισμα ρυθμών Gauss-Hermite. Το ηλεκτρικό πεδίο γράφεται σαν υπέρθεση του όρου μηδενικής τάξης (κύριος όρος) και ενός αθροίσματος από όρους ανώτερης τάξης με την ίδια πόλωση: $\bar{E} = \bar{E}_{00} + \sum_{m,n} \bar{E}_{mn}$. Είναι φανερό ότι οι όροι ανώτερης τάξης λειτουργούν σαν διόρθωση/αποδιαμόρφωση για τον κύριο όρο. Με βάση τη μορφή της λύσεως των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης για τη μερική λύση $\bar{E}_{mn}$, το τετράγωνο του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου $|\bar{E}|^2 = \bar{E}\bar{E}^*$ είναι

$$|\bar{E}|^2 = \frac{|\bar{C}_{00}|^2}{\pi} e^{-\xi_1^2} e^{-\xi_2^2} \left[H_0^2(\xi_1) H_0^2(\xi_2) + 2 \sum_{m,n} \frac{|\bar{\gamma}_{mn}| \cos \theta_{mn}}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} H_{0m}(\xi_1) H_{0n}(\xi_2) \right. \\ \left. + \sum_{m,n,k,l} \frac{|\bar{\gamma}_{mn}| |\bar{\gamma}_{kl}| \cos(\theta_{mn} - \theta_{kl})}{\sqrt{2^{m+n+k+l} m! n! k! l!}} H_{mk}(\xi_1) H_{nl}(\xi_2) \right], \quad (3.25)$$

όπου $\bar{C}_{00}$ είναι το πλάτος του κύριου όρου, $\bar{\gamma}_{mn} = \bar{C}_{mn}/\bar{C}_{00}$ είναι ο λόγος του πλάτους του όρου τάξης (m, n) προς το πλάτος του κύριου όρου, $\theta_{mn} = \Theta_{mn} - \Theta_{00} - \arg(\bar{\gamma}_{mn})$ είναι η συνολική μετατόπιση φάσης του ρυθμού (m, n) , και ακόμη ορίζουμε $H_{mn}(x) = H_m(x)H_n(x)$ για λόγους απλότητας. Στα αθροίσματα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $\bar{z} + \bar{z}^* = 2\text{Re}(z)$ για μιγαδικούς αριθμούς. Μια πιο ξεκάθαρη αναπαράσταση της Εξ. (3.25) επιτυγχάνεται αν το άθροισμα πάνω στους δείκτες m, n, k, l χωριστεί στο άθροισμα των όρων με $(m, n) = (k, l)$ και στο άθροισμα των υπολοίπων όρων. Η απλοποίηση έγκειται στο ότι το άθροισμα των όρων με ίσους δείκτες περιέχει μόνο τετραγωνικούς όρους, ενώ το άλλο άθροισμα περιέχει μόνο όρους σύζευξης. Ορίζοντας το συμπλήρωμα του δέλτα του Kronecker σαν $\delta'_{m,k,n,l} = 1 - \delta_{m,k}\delta_{n,l}$, το πεδίο παίρνει τη μορφή

$$|\bar{E}|^2 = \frac{|\bar{C}_{00}|^2}{\pi} e^{-\xi_1^2} e^{-\xi_2^2} \left[H_0^2(\xi_1) H_0^2(\xi_2) + \sum_{m,n} \frac{|\bar{\gamma}_{mn}|^2}{2^{m+n} m! n!} H_m^2(\xi_1) H_n^2(\xi_2) \right. \\ \left. + \sum_{m,n,k,l} \frac{|\bar{\gamma}_{mn}| |\bar{\gamma}_{kl}| \cos(\theta_{mn} - \theta_{kl})}{\sqrt{2^{m+n+k+l} m! n! k! l!}} H_{mk}(\xi_1) H_{nl}(\xi_2) \delta'_{m,k,n,l} \right. \\ \left. + 2 \sum_{m,n} \frac{|\bar{\gamma}_{mn}| \cos \theta_{mn}}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} H_{0m}(\xi_1) H_{0n}(\xi_2) \right]. \quad (3.26)$$

Βάσει του ηλεκτρικού πεδίου της Εξ. (3.26) μπορούμε να υπολογίσουμε τον τανυστή του γενικευμένου εύρους δέσμης. Στο σύστημα (ξ_1, ξ_2) , ο τανυστής είναι κανονικοποιημένος και διαγώνιος, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η Εξ. (3.24). Η μορφή του τανυστή στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς εξαρτάται απ' τη μορφή του μετασχηματισμού από τις συντεταγμένες δέσμης (τ, ξ_1, ξ_2) στις καρτεσιανές συντεταγμένες (x, y, z) , ο οποίος είναι άμεσα γνωστός απ' τη λύση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης για τον τανυστή $\phi_{\alpha\beta}$ (βλ. προηγούμενη υποενότητα). Στους υπολογισμούς λαμβάνονται υπόψη οι ιδιότητες της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Hermite [Abramowitz and Stegun 1965, Strang 2006]. Η ροπή 1^{ης} τάξης ως προς τη συντεταγμένη ξ_1 είναι

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \rangle = & \left(1 + \sum_{m,n} |\bar{\gamma}_{mn}|^2 \right)^{-1} \left[2 \sum_{m,n} |\bar{\gamma}_{mn}| \cos \theta_{mn} \sqrt{\frac{m}{2}} \delta_{m,1} \delta_{n,0} \right. \\ & \left. + \sum_{m,n,k,l} |\bar{\gamma}_{mn}| |\bar{\gamma}_{kl}| \delta_{n,l} \cos(\theta_{mn} - \theta_{kl}) \left(\sqrt{\frac{m}{2}} \delta_{m,k+1} + \sqrt{\frac{k}{2}} \delta_{m,k-1} \right) \right], \quad (3.27) \end{aligned}$$

και το ίδιο αποτέλεσμα για την ξ_2 μπορεί να παραχθεί με εναλλαγή του δείκτη m με τον n και του k με τον l . Η ροπή δεύτερης τάξης για την ξ_1 , και αντίστοιχα για την ξ_2 με εναλλαγή, είναι

$$\begin{aligned} \langle \xi_1^2 \rangle = & 1 + \left(1 + \sum_{m,n} |\bar{\gamma}_{mn}|^2 \right)^{-1} \left[\sum_{m,n,k,l} |\bar{\gamma}_{mn}| |\bar{\gamma}_{kl}| \delta_{n,l} \cos(\theta_{mn} - \theta_{kl}) \left(\sqrt{m(m-1)} \right. \right. \\ & \left. \cdot \delta_{m,k+2} + \sqrt{k(k-1)} \delta_{m,k-2} \right) + 2 \sum_{m,n} |\bar{\gamma}_{mn}| \cos \theta_{mn} \sqrt{m(m-1)} \delta_{m,2} \delta_{n,0} \left. \right], \quad (3.28) \end{aligned}$$

και είναι πλέον δυνατό να υπολογιστεί ο τανυστής εύρους δέσμης απ' την (3.24).

Ας αναδείξουμε την πληροφορία που προκύπτει απ' τους παραπάνω αναλυτικούς υπολογισμούς με τη μελέτη της απλούστερης περίπτωσης, όπου στον όρο $(0,0)$ προστίθεται ένας μόνο όρος ανώτερης τάξης (m,n) . Το τετράγωνο του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτή την περίπτωση είναι

$$\begin{aligned} |\bar{E}|^2 = & \frac{|\bar{C}_{00}|^2}{\pi} e^{-\xi_1^2} e^{-\xi_2^2} \left[H_0^2(\xi_1) H_0^2(\xi_2) + \frac{|\bar{\gamma}_{mn}|^2}{2^{m+n} m! n!} H_m^2(\xi_1) H_n^2(\xi_2) \right. \\ & \left. + \frac{2|\bar{\gamma}_{mn}|}{\sqrt{2^{m+n} m! n!}} H_{0m}(\xi_1) H_{0n}(\xi_2) \cos \theta_{mn} \right], \end{aligned}$$

ενώ οι ροπές ως προς τη συντεταγμένη ξ_1 είναι

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \rangle = & \frac{|\bar{\gamma}_{mn}|}{1 + |\bar{\gamma}_{mn}|^2} \cos \theta_{mn} \sqrt{2m} \delta_{m,1} \delta_{n,0}, \\ \langle \xi_1^2 \rangle = & \frac{1}{2} + m \frac{|\bar{\gamma}_{mn}|^2}{1 + |\bar{\gamma}_{mn}|^2} + \frac{|\bar{\gamma}_{mn}|}{1 + |\bar{\gamma}_{mn}|^2} \cos \theta_{mn} \sqrt{m(m-1)} \delta_{m,2} \delta_{n,0}. \end{aligned}$$

Το γενικευμένο εύρος στην κατεύθυνση ξ_1 είναι με βάση την Εξ. (3.24)

$$w_1^2 = 1 + 2m \frac{|\bar{\gamma}_{mn}|^2}{1 + |\bar{\gamma}_{mn}|^2} + \frac{2|\bar{\gamma}_{mn}|}{1 + |\bar{\gamma}_{mn}|^2} \cos \theta_{mn} \delta_{n,0} \cdot \left[\sqrt{m(m-1)} \delta_{m,2} - m \frac{2|\bar{\gamma}_{mn}|}{1 + |\bar{\gamma}_{mn}|^2} \cos \theta_{mn} \delta_{m,1} \right], \quad (3.30)$$

με όλα τα αποτελέσματα να εναλλάσσονται στην κατεύθυνση ξ_2 με τον τρόπο που δείξαμε πιο πάνω. Πρέπει να σημειώσουμε ότι, επειδή χρησιμοποιήσαμε κανονικοποιημένες εγκάρσιες συντεταγμένες, τα γενικευμένα εύρη της δέσμης θα είναι και αυτά επίσης κανονικοποιημένα υπό τους ίδιους παράγοντες (για την κανονικοποίηση συνήθως επιλέγουμε τα $1/e$ -εύρη). Στην κατεύθυνση ξ_1 , το αποτέλεσμα της Εξ. (3.30) μπορεί να αναλυθεί ως εξής: Για $n \neq 0$ το εύρος της δέσμης είναι ίσο με

$$w_1^2|_{n \neq 0} = 1 + 2m \frac{|\bar{\gamma}_{m0}|^2}{1 + |\bar{\gamma}_{m0}|^2},$$

ενώ όταν $n = 0$, αν $m = 1$ έχουμε

$$w_1^2|_{m=1,n=0} = 1 + 2 \frac{|\bar{\gamma}_{10}|^2}{1 + |\bar{\gamma}_{10}|^2} - \left(\frac{2|\bar{\gamma}_{10}|}{1 + |\bar{\gamma}_{10}|^2} \right)^2 \cos^2 \theta_{10},$$

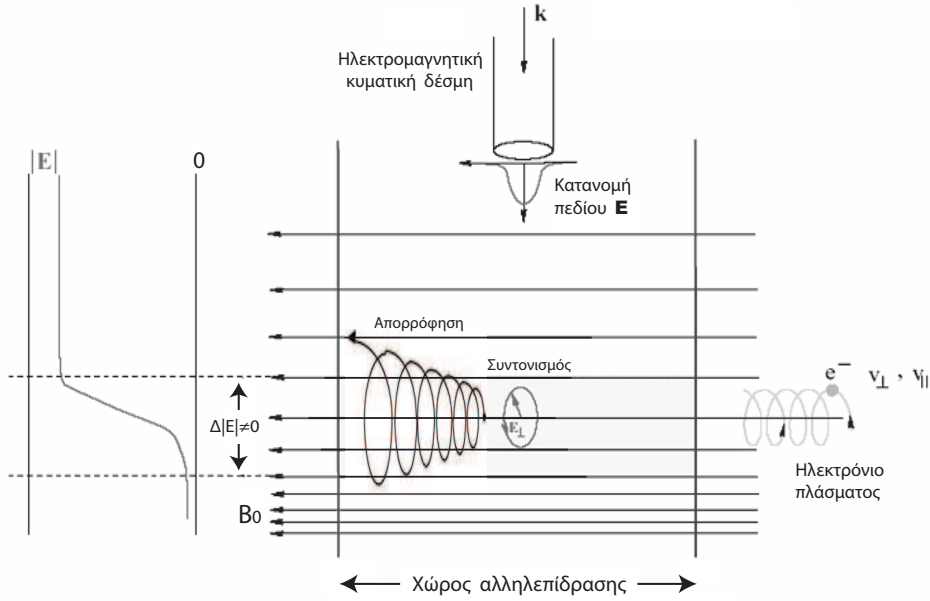
και όταν $m = 2$ το αποτέλεσμα είναι

$$w_1^2|_{m=2,n=0} = 1 + 4 \frac{|\bar{\gamma}_{20}|^2}{1 + |\bar{\gamma}_{20}|^2} + \sqrt{2} \frac{2|\bar{\gamma}_{20}|}{1 + |\bar{\gamma}_{20}|^2} \cos \theta_{20}.$$

Παρατηρήστε ότι οι μόνες περιπτώσεις για τις τιμές των (m, n) όπου η συνολική μετατόπιση φάσης έχει επίδραση στο εύρος της δέσμης είναι οι $(m, n) = (1, 0), (2, 0), (0, 1), (0, 2)$. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, το γενικευμένο εύρος είναι πάντα μεγαλύτερο από το εύρος του κύριου όρου και είναι αύξουσα συνάρτηση των (m, n) χωρίς η μετατόπιση φάσης να παίζει ρόλο.

3.5 Αριθμητικές εφαρμογές

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε δύο αριθμητικές εφαρμογές της γενικευμένης μεθόδου εντοπισμού δέσμης για τη διάδοση δεσμών με non-Gaussian profile. Στην πρώτη μελετάμε τη διάδοση μιας κυκλοτρονικής δέσμης κάθετα στο μαγνητικό πεδίο σε πλάσμα με απλή γεωμετρία. Η δέσμη συνίσταται από έναν Gaussian ρυθμό και ένα ρυθμό ανώτερης τάξης, δηλ. πρόκειται για την τελευταία περίπτωση που μελετήσαμε στην προηγούμενη ενότητα όπου το εύρος της δέσμης δίνεται από την Εξ. (3.30). Η δεύτερη εφαρμογή ασχολείται με τη διάδοση non-Gaussian δεσμών σε συστήματα εκπομπής ECRH για tokamak, με ιδιαίτερη εμφάση στα πλεονεκτήματα της χρήσης non-Gaussian δεσμών έναντι των Gaussian.



Σχήμα 3.4: Η γεωμετρία για τη διάδοση κυματικής δέσμης σε επίπεδο πλάσμα.

3.5.1 Διάδοση non-Gaussian δέσμης σε επίπεδο πλάσμα

Στην πρώτη εφαρμογή μελετάμε την κάθετη διάδοση και απορρόφηση μιας non-Gaussian κυκλοτρονικής δέσμης σε πλάσμα με απλοποιημένη, επίπεδη γεωμετρία (βλ. Σχ. 3.4). Το πλάσμα είναι περιορισμένο στην περιοχή $[-\ell_p, \ell_p]$ κατά μήκος της διάστασης x , ενώ εκτείνεται απεριόριστα στις άλλες διαστάσεις y, z . Το μαγνητικό πεδίο είναι κατά μήκος του άξονα z , και όλες οι ιδιότητες του πλάσματος θεωρούνται συναρτήσεις μόνο του x . Η κυματική δέσμη εκπέμπεται απ' την πλευρά όπου το μαγνητικό πεδίο είναι μικρότερο (low-field side), απ' το σημείο $x = x_0 = \ell_p$ και κατά την αρνητική κατεύθυνση $-x$ (άρα $k_{x0} < 0, k_{y0} = k_{z0} = 0$). Το ηλεκτρικό πεδίο της δέσμης είναι το άθροισμα δύο ρυθμών Gauss-Hermite, του μηδενικής τάξης ρυθμού (Gaussian)(0,0) και του ανώτερης τάξης (m,n) , οι οποίοι έχουν την ίδια πόλωση και δεν έχουν αρχική φάση. Στα ακόλουθα, υποθέτουμε ότι η διάδοση γίνεται σε ψυχρό πλάσμα, δηλ. ότι τα θερμικά φαινόμενα επηρεάζουν μόνο το πλάτος του κύματος και όχι την πόλωσή του.

Η αναλυτική λύση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης για το πρόβλημα αυτό έχει βρεθεί από τους Poli, Pereverzev και Peeters [Poli et al 1999]. Η απλότητα σε σχέση με το γενικότερο πρόβλημα οφείλεται στο ότι η συνάρτηση διασποράς για διάδοση κοντά στις 90° παίρνει μια τετραγωνική μορφή, $\mathcal{H} = \sum_{\alpha\beta} \mathcal{D}_{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta / 2 - 1/2 = 0$, με διαγώνιο τανυστή διασποράς

$$\tilde{\mathcal{D}}^M(x) = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_{xx}^M(x) & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{D}_{yy}^M(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{D}_{zz}^M(x) \end{bmatrix},$$

όπου $M = O, X$ η πόλωση του κύματος. Για την περίπτωση πόλωσης O , τα στοιχεία του ταχυοστή είναι [Stix 1992]

$$\mathcal{D}_{xx}^O = \mathcal{D}_{yy}^O = \frac{c^2}{\omega^2 - \omega_{pe}^2},$$

$$\mathcal{D}_{zz}^O = \frac{c^2}{\omega^2},$$

ενώ για την περίπτωση της πόλωσης X είναι

$$\mathcal{D}_{xx}^X = \mathcal{D}_{yy}^X = \frac{c^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{ce}^2)}{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 - \omega^2\omega_{ce}^2},$$

$$\mathcal{D}_{zz}^X = \frac{c^2}{\omega^2} \left[\frac{2\omega^2(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{ce}^2)}{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 - \omega^2\omega_{ce}^2} - 1 \right].$$

Η συνάρτηση διασποράς, η οποία είναι και η συνάρτηση Hamilton για την περιγραφή της δέσμης, δεν εξαρτάται απ' τις συντεταγμένες y, z , και έτσι τα κυματανύσματα k_y, k_z είναι συνεχώς ίσα με μηδέν κατά μήκος της διάδοσης. Ακόμη, ο κυματάρηθος k_x καθορίζεται πλήρως από τη σχέση διασποράς ως $k_x = -(\mathcal{D}_{xx}^M)^{-1/2}$, οπότε η μόνη απ' τις εξισώσεις εντοπισμού ακτίνας που χρειάζεται να επιλύσουμε είναι αυτή για το ρυθμό μεταβολής $dx/d\tau$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_x} = \sqrt{\mathcal{D}_{xx}^M}. \quad (3.33)$$

Σε αυτό το πλαίσιο, η συντεταγμένη τ είναι συνάρτηση μόνο του x και οι εγχάρσιες συντεταγμένες που περιγράφουν το profile του πλάτους είναι οι $y/W_y, z/W_z$, όπου W_y, W_z το εύρος του κύριου όρου σε κάθε εγχάρσια διεύθυνση.

Η λύση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης για το εύρος της δέσμης και την καμπυλότητα του μετώπου κύματος είναι [Poli et al 1999]

$$\bar{s}_{\alpha\alpha}(x) = \frac{\bar{s}_{\alpha\alpha}(x_0)}{1 + \bar{s}_{\alpha\alpha}(x_0)\ell_{\alpha}(x)}. \quad (3.34)$$

Τα $\ell_{\alpha}(x)$ αποκαλούνται "ενεργά μήκη διάδοσης" και ορίζονται από τις σχέσεις

$$\frac{c}{\omega}\ell_{\alpha}(x) = \int_0^{\tau} \mathcal{D}_{\alpha\alpha}^M(\tau')d\tau' = - \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{D}_{\alpha\alpha}^M(x')}{\sqrt{\mathcal{D}_{\alpha\alpha}(x')}}dx',$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η Εξ. (3.33) για να αλλάξουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από τ σε x . Η λύση αυτή μπορεί να εκφραστεί στο πλαίσιο του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του $\bar{s}_{\alpha\alpha}$ και των αρχικών τιμών $\bar{s}_{\alpha\alpha}(x_0) = \bar{s}_{\alpha\alpha 0}$. Για τον ταχυοστή $\phi_{\alpha\alpha}$, ο οποίος περιγράφει το εύρος της δέσμης, είναι

$$\phi_{\alpha\alpha} = \frac{\phi_{\alpha\alpha 0}}{(1 + s_{\alpha\alpha 0}\ell_{\alpha})^2 + (\phi_{\alpha\alpha 0}\ell_{\alpha})^2}.$$

Τα στοιχεία $\phi_{\alpha\alpha}$ συνδέονται με το κύριο εύρος ανά εγκάρσια διεύθυνση ως εξής

$$\kappa\phi_{\alpha\alpha} = \frac{1}{W_{\alpha}^2}. \quad (3.35)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να αποδειχθεί αν γράψουμε την έκφραση της τετραγωνικής μορφής ϕ τόσο στις συντεταγμένες δέσμης όσο και στις καρτεσιανές, δηλ. $2\phi = \xi_1^2 + \xi_2^2 = \kappa(\phi_{yy}y^2 + \phi_{zz}z^2)$. Σε κάθε διεύθυνση, η λύση για το εύρος του Gaussian ρυθμού εκφράζεται στο πλαίσιο των αρχικών τιμών του εύρους και της ακτίνας καμπυλότητας ως ακολούθως

$$\frac{W_{\alpha}^2}{W_{\alpha 0}^2} = \left(1 + \frac{\ell_{\alpha}}{\kappa R_{\alpha 0}}\right)^2 + \frac{\ell_{\alpha}^2}{\kappa^2 W_{\alpha 0}^2}. \quad (3.36)$$

Η γενική μορφή των Εξ. (3.23) για τη μετατόπιση φάσης Θ_{mn} δίνει για τη συνολική μετατόπιση φάσης

$$\theta_{mn}(x) = \frac{c^2}{\omega^2} \left(m \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{D}_{yy}^M}{W_y^2} dx' + n \int_{x_0}^x \frac{\mathcal{D}_{zz}^M}{W_z^2} dx' \right). \quad (3.37)$$

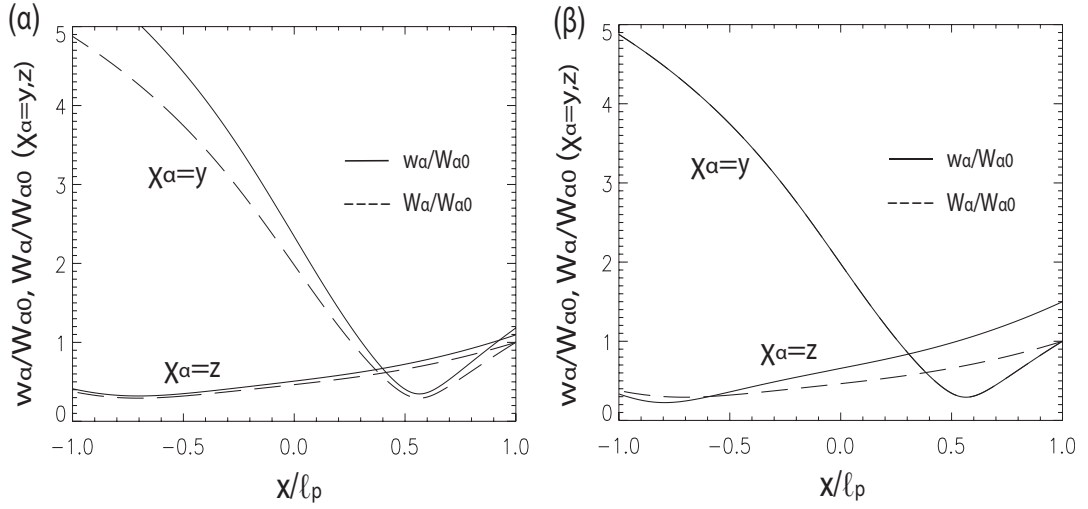
Με βάση όλα αυτά, η λύση για την εξέλιξη του πλάτους $|\bar{C}_{mn}|^2$ προκύπτει

$$\frac{|\bar{C}_{mn}|^2(x)}{|\bar{C}_{mn}|^2(x_0)} = \sqrt{\frac{\mathcal{D}_{xx}(x)}{\mathcal{D}_{xx}(x_0)} \frac{W_y(x_0)}{W_y(x)} \frac{W_z(x_0)}{W_z(x)}} e^{-\int_{x_0}^x \alpha_L(x') dx'}, \quad (3.38)$$

όπου ο συντελεστής απορρόφησης α_L υπολογίζεται με βάση τη διατήρηση της ενέργειας για το κλειστό σύστημα κύμα-πλάσμα [Bornatici et al 1983].

Η διάδοση της non-Gaussian κυματικής δέσμης υπολογίζεται από τον κώδικα NGBT [Tsironis et al 2006], ο οποίος υλοποιεί τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε στην Ενότητα 3.3 (λεπτομέρειες για τον κώδικα στο Παράρτ. Β.1). Έμφαση δίνεται στον υπολογισμό του γενικευμένου εύρους και της συνολικής μετατόπισης φάσης. Στις προσομοιώσεις, το μήκος ℓ_p είναι ίσο με 1m, ενώ η πυκνότητα ηλεκτρονίων πλάσματος είναι παραβολική συνάρτηση του x : $\omega_p^2(x)/\omega_c^2(0) = 0.9 - 0.4(x/\ell_p)^2$. Όταν δεν είναι μηδέν, η θερμοκρασία ηλεκτρονίων πλάσματος έχει παρόμοια μεταβολή με την ω_p , $T_e(x) = 3 - 2.9(x/\ell_p)^2$ (KeV), ενώ η κυκλοτρονική συχνότητα ηλεκτρονίων (δηλ. το μαγνητικό πεδίο) μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $\omega_c(x)/\omega_c(0) = \ell_p/(\ell_p + 2.5x)$. Η συχνότητα του κύματος είναι $\omega/2\pi = 140\text{GHz}$ και αντιστοιχεί, ανάλογα με την τιμή του μαγνητικού πεδίου, είτε στην 1^{η} κυκλοτρονική αρμονική με πόλωση O ($O1$) είτε στη 2^{η} με πόλωση X ($X2$). Ο κύριος ρυθμός E_{00} έχει κυκλικά συμμετρική αρχική κατανομή πλάτους, με κύρια εύρη $W_{y0} = W_{z0} = 3.02\text{cm}$, και συμμετρική αρχική εστίαση με ακτίνες καμπυλότητας $R_{y0} = R_{z0} = -82\text{cm}$. Το αρχικό πλάτος του ρυθμού ανώτερης τάξης καθορίζεται με βάση το λόγο της πυκνότητας ενέργειας του ρυθμού αυτού ως προς τη συνολική πυκνότητα ενέργειας της δέσμης

$$d_{mn} = \frac{|\bar{C}_{mn}|^2}{|\bar{C}_{00}|^2 + |\bar{C}_{mn}|^2} = \frac{\gamma_{mn}^2}{1 + \gamma_{mn}^2}.$$

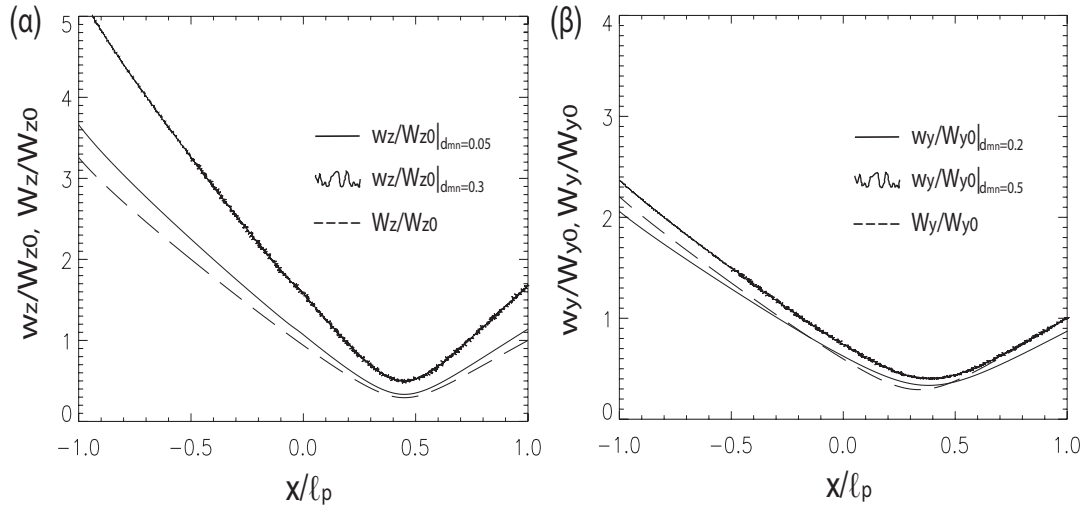


Σχήμα 3.5: Εξέλιξη του γενικευμένου εύρους δέσμης στις διευθύνσεις y, z για διάδοση με πόλωση O , $d_{mn} = 0.1$ και (α) $(m, n) = (2, 1)$, (β) $(m, n) = (0, 2)$.

Παρατηρήστε ότι στο συγκεκριμένο πρόβλημα, λόγω της επιλογής οι ρυθμοί να έχουν την ίδια πόλωση και αρχική φάση μηδέν, ο λόγος γ_{mn} είναι πραγματικός αριθμός. Λαμβάνοντας υπόψη αυτά που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, είναι ευδιάκριτη η σχέση ανάμεσα στην κατανομή της ενέργειας της δέσμης στους διαφορετικούς ρυθμούς και στη γεωμετρία της δέσμης.

Στο Σχ. 3.5 απεικονίζεται το γενικευμένο εύρος δέσμης w_α ($\chi_\alpha = y, z$), σε σύγκριση με το κύριο εύρος W_α , σαν συνάρτηση της συντεταγμένης x κατά μήκος της διάδοσης για (α) $(m, n) = (2, 1)$ και (β) $(m, n) = (0, 2)$. Και στις δύο περιπτώσεις, η δέσμη έχει πόλωση O και σχετική πυκνότητα ενέργειας $d_{mn} = 0.1$. Στο Σχ. 3.5(α), το γενικευμένο εύρος είναι σταθερά μεγαλύτερο από το κύριο και στις δύο διευθύνσεις. Επακριβώς, τα w_α, W_α σε αυτή την περίπτωση είναι περίπου ανάλογα, διότι το γενικευμένο εύρος δεν εξαρτάται απ' τη μετατόπιση φάσης (βλ. Εξ. (3.30)). Στην περίπτωση του Σχ. 3.5(β), το γενικευμένο εύρος w_y συμπίπτει με το W_y γιατί είναι $m = 0$. Στην άλλη διεύθυνση, η επίδραση της μετατόπισης φάσης είναι εμφανής, και η μεταβολή του w_z κατά μήκος της διάδοσης είναι σημαντική. Το εύρος ξεκινά με μια αρχική τιμή πολύ μεγαλύτερη απ' αυτή του κύριου ρυθμού, παρόλα αυτά συγκλίνει προς το W_z όσο η δέσμη πλησιάζει προς την εστία (όπου το εύρος της δέσμης γίνεται ελάχιστο). Η μη μονότονη μεταβολή του γενικευμένου εύρους οφείλεται στην εξάρτηση από τη μετατόπιση φάσης θ_{mn} .

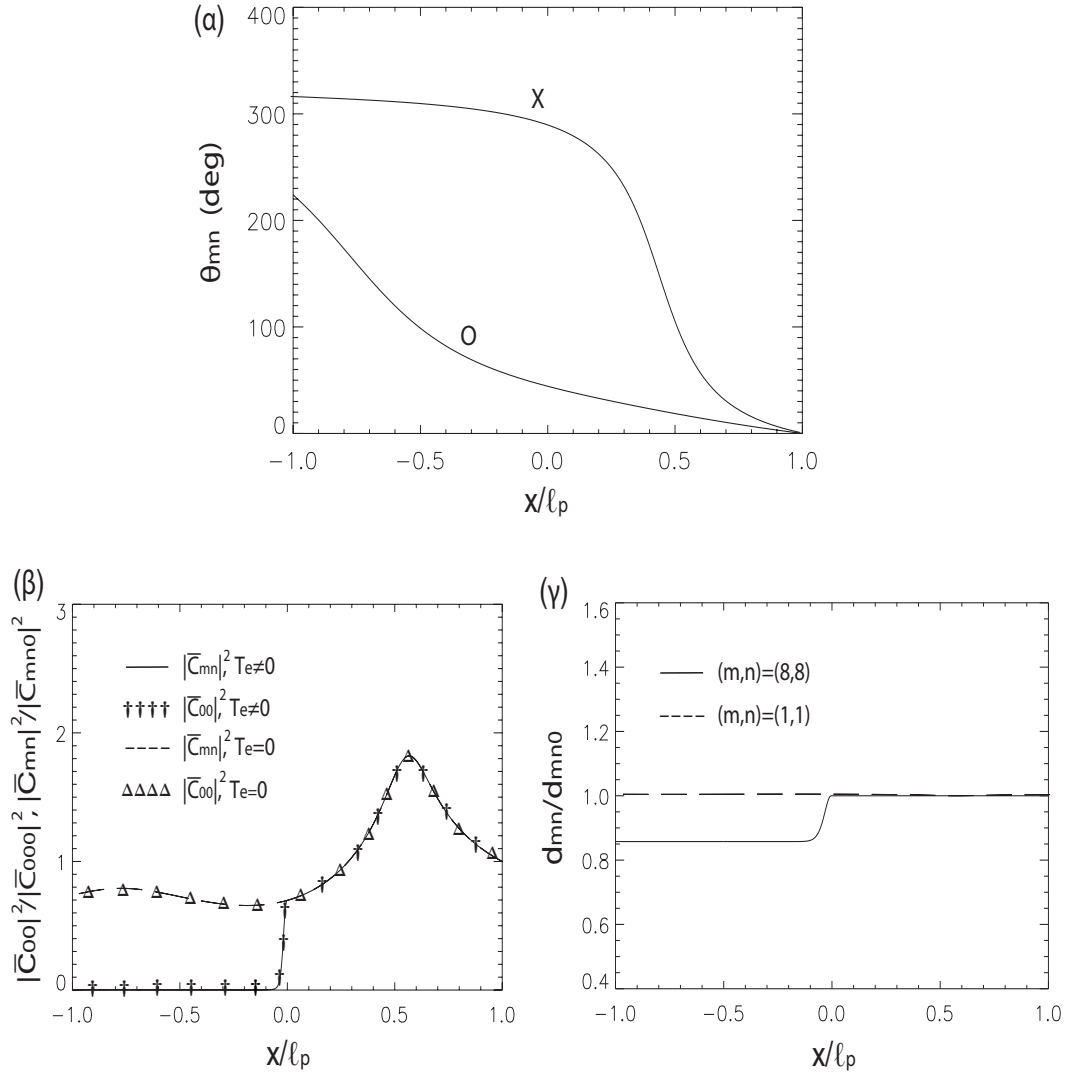
Στο Σχ. 3.6 παρουσιάζουμε την εξέλιξη του γενικευμένου εύρους δέσμης για διάδοση με πόλωση X και (α) $(m, n) = (1, 3)$, (β) $(m, n) = (1, 0)$. Παρατηρούμε ότι η γενική συμπεριφορά είναι η ίδια με την προηγούμενη περίπτωση. Στο Σχ. 3.6(α) συγκρίνουμε τα εύρη στη διεύθυνση z για τις περιπτώσεις $d_{mn} = 0.05, 0.3$. Είναι προφανές ότι όσο μεγαλώνει η σχετική πυκνότητα ενέργειας του ρυθμού, τόσο αυξάνει η απόκλιση του γενικευμένου εύρους απ' το εύρος του Gaussian ρυθμού. Αυτό ήταν αναμενόμενο με βάση τις Εξ. (3.30), οι οποίες δείχνουν ότι το εύρος αυξάνεται



Σχήμα 3.6: Γενικευμένο εύρος δέσμης για διάδοση με πόλωση X (α) στη διεύθυνση z για $(m, n) = (1, 3)$ και $d_{mn} = 0.05, 0.3$, (β) στη διεύθυνση y για $(m, n) = (1, 0)$ και $d_{mn} = 0.2, 0.5$.

ως συνάρτηση των δεικτών (m, n) και της d_{mn} . Στο Σχ. 3.6(β) συγκρίνονται τα εύρη στη διεύθυνση y για $d_{mn} = 0.2, 0.5$. Παρατηρούμε ξανά την επίδραση της συνολικής μετατόπισης φάσης, η οποία για την περίπτωση αυτή, λόγω της χαμηλής τάξης του non-Gaussian όρου, δεν είναι τόσο έντονη. Το εύρος w_y παίρνει τιμές κοντά στο W_y , ακόμη και στην περίπτωση $d_{mn} = 0.5$ όπου η μισή ισχύς της δέσμης περιέχεται στον ανώτερης τάξης όρο.

Η εξέλιξη της συνολικής μετατόπισης φάσης του ρυθμού (m, n) δείχνεται στο Σχ. 3.7(α), και για τις δύο περιπτώσεις πόλωσης O , X με $(m, n) = (0, 2)$ και $d_{mn} = 0.1$. Η μεταβολή της θ_{mn} εντός του πλάσματος είναι σημαντική και στις δύο περιπτώσεις, και σαν συνέπεια το γενικευμένο εύρος δεν είναι πλέον ανάλογο του κύριου εύρους αλλά μπορεί να γίνει ακόμη και μικρότερο απ' αυτό. Η μετατόπιση φάσης εμφανίζει διαφορετική συμπεριφορά για τις δύο περιπτώσεις πόλωσης, κάτι που οφείλεται στο ότι ο τανυστής διασποράς και το κύριο εύρος έχουν διαφορετική μαθηματική μορφή (βλ. περαιτέρω την Εξ. (3.37)). Στο Σχ. 3.7(β) τα πλάτη των διαφορετικών ρυθμών $|\bar{C}_{00}|^2$, $|\bar{C}_{mn}|^2$ συγκρίνονται για διάδοση τόσο σε ψυχρό όσο και σε κινητικό πλάσμα. Το διαδιδόμενο κύμα έχει πόλωση O και $(m, n) = (2, 1)$, $d_{mn} = 0.1$. Κατά την απόσβεση του κύματος εντός της ζώνης συντονισμού, βλέπουμε ότι οι δύο ρυθμοί απορροφώνται με περίπου τον ίδιο τρόπο. Η διαφορά στα κυματανύσματα των δύο ρυθμών δεν είναι τόσο μεγάλη ώστε οι συντελεστές απορρόφησης να είναι διαφορετικοί. Συνεπώς, ο λόγος γ_{mn} για αυτές τις περιπτώσεις δε μεταβάλλεται σημαντικά, οπότε και η επίδραση της κυκλοτρονικής απορρόφησης στο εύρος της δέσμης είναι πολύ μικρή. Αυτή η επίδραση γίνεται σημαντική για ρυθμούς μεγαλύτερης τάξης. Πράγματι, στο Σχ. 3.7(γ), όπου δίνεται ο λόγος γ_{mn} για τις περιπτώσεις $(m, n) = (1, 1), (8, 8)$, παρατηρούμε ότι στη δεύτερη περίπτωση η μεταβολή του γ_{mn} κατά την απορρόφηση είναι σημαντική.



Σχήμα 3.7: (α) Συνολική μετατόπιση φάσης θ_{mn} για δέσμη με πόλωση O, X και $(m, n) = (0, 2)$, (β) Πλάτη κύματος $|\bar{C}_{00}|^2, |\bar{C}_{mn}|^2$ για δέσμη με πόλωση O και $(m, n) = (2, 1)$ που διαδίδεται σε ψυχρό ($T_e = 0$) και σε κινητικό ($T_e \neq 0$) πλάσμα, (γ) Σχετική πυκνότητα ενέργειας d_{mn} για δέσμη με πόλωση X , $d_{mn0} = 0.1$ και $(m, n) = (1, 1), (8, 8)$.

Το πρόβλημα που μελετήσαμε σε αυτή την υποενότητα αντιστοιχεί σε γεωμετρία πλάσματος στην οποία είναι δυνατή η αναλυτική λύση για το ηλεκτρικό πεδίο χωρίς να χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε ασυμπτωτικές μεθόδους. Πιο συγκεκριμένα, μια κυματική δέσμη δεδομένης συχνότητας μπορεί να προσεγγιστεί μέσω της υπέρθεσης επίπεδων κυμάτων, καθένα με διαφορετική τιμή του κυματαριθμού $k_z = k_{||}$ στη θέση $x = \ell_p$. Επειδή σε αυτή τη γεωμετρία η ισορροπία πλάσματος δεν εξαρτάται από τα y, z , τόσο ο k_y όσο και ο k_z διατηρούνται σταθεροί. Η διάδοση των επίπεδων κυμάτων υπολογίζεται εύκολα, και το πεδίο σε κάθε σημείο x επανασυντίθεται μέσω της υπέρθεσης των επίπεδων κυμάτων. Φτάνουμε έτσι στην ακόλουθη εξίσωση

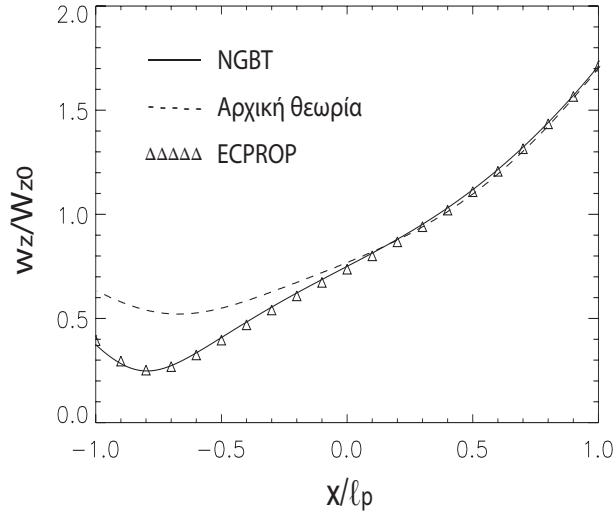
$$\bar{\mathbf{E}}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} F[\bar{\mathbf{E}}(\ell_p, z)] e^{-ik_z z - i \int_{\ell_p}^x k_x(k_z, x') dx'} \frac{dk_z}{2\pi},$$

όπου $F[\bar{\mathbf{E}}(\ell_p, z)] = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{\mathbf{E}}(\ell_p, z) e^{ik_z z} dz$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του αρχικού πεδίου, και σε μια παρόμοια εξίσωση για το $\bar{\mathbf{E}}(x, y)$.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου για την πλήρη λύση είναι δυνατό να συγκριθούν με τα αναλυτικά και αριθμητικά μας αποτελέσματα. Η αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου γίνεται από τον κώδικα ECPROP [Westerhof 1997]. Το αρχικό profile της δέσμης ορίζεται είτε στο χώρο θέσεων είτε στο χώρο Fourier (κυματαριθμών). Σε κάθε σημείο κατά μήκος της διάδοσης, ο $k_{\perp}$ υπολογίζεται λύνοντας τη σχέση διασποράς ψυχρού πλάσματος για κάθε τιμή του $k_{||}$, και καταλήγουμε στο ηλεκτρικό πεδίο μέσω ενός αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier. Για τον υπολογισμό του γενικευμένου εύρους της δέσμης, προσθέσαμε στον κώδικα ECPROP μια ρουτίνα που υπολογίζει τα ολοκληρώματα των ροπών της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου. Στο Σχ. 3.8 συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του NGBT με αυτά του ECPROP και της αρχικής θεωρίας του Pereverzev [Pereverzev 1998], για τις ίδιες παραμέτρους με την προηγούμενη υποενότητα αλλά για ψυχρό πλάσμα. Οι τιμές των m, n, d_{mn} για τον όρο ανώτερης τάξης είναι $(m, n) = (0, 2)$ και $d_{mn} = 0.2$. Παρατηρήστε την πολύ καλή συμφωνία μεταξύ των αποτελεσμάτων των δύο κωδίκων, αλλά και το εσφαλμένο αποτέλεσμα της αρχικής θεωρίας.

3.5.2 Non-Gaussian δέσμες και γραμμές εκπομπής ECRH

Σε αυτή την υποενότητα παρουσιάζεται μια εφαρμογή των non-Gaussian δεσμών στη βελτίωση της λειτουργίας των γραμμών εκπομπής ακτινοβολίας των διατάξεων ECRH σε tokamak. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου, παρά την πολυπλοκότητά τους, οι non-Gaussian δέσμες έχουν ιδιότητες που τις καθιστούν προτιμητέες για συγκεκριμένες εφαρμογές. Για παράδειγμα, όταν ζητείται η μείωση της πυκνότητας ενέργειας στο παράθυρο ανάμεσα στη γραμμή εκπομπής και στο θάλαμο κενού, αυτή είναι δυνατό να επιτευχθεί με την πρόσθεση ρυθμών Gauss-Hermite ανώτερης τάξης στον μηδενικής τάξης (Gaussian) ρυθμό. Με επιλογή των κατάλληλων ρυθμών, προκύπτει μια κατανομή ηλεκτρικού πεδίου με εύρος μεγαλύτερο απ' αυτό της αρχικής, και κατά συνέπεια μειώνεται η μέγιστη τιμή της επιφανειακής πυκνότητας ενέργειας.



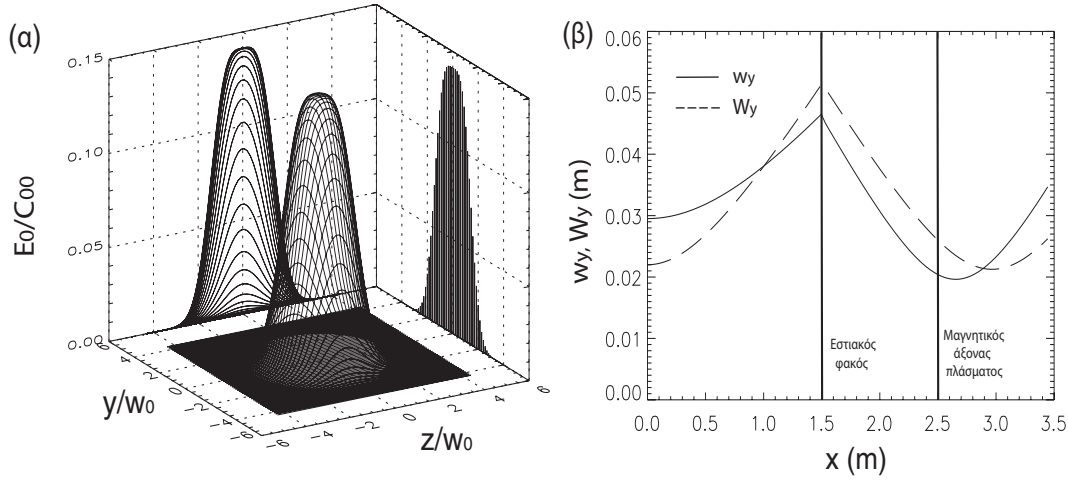
Σχήμα 3.8: Γενικευμένο εύρος w_z , όπως υπολογίζεται απ' τους κώδικες NGBT και ECPROP, αλλά και με βάση την αρχική μέθοδο εντοπισμού δέσμης [Pereverzev 1998], για διάδοση με πόλωση O και $(m, n) = (0, 2)$, $d_{mn} = 0.2$.

Σε μια τέτοια περίπτωση, οι ιδιότητες της δέσμης είναι εξαιρετικού ενδιαφέροντος και αποδεικνύεται ότι έχουν συγκεκριμένα πλεονεκτήματα (βλ. [Siegman 1986]).

Αναφέρουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα για τα παραπάνω. Χρησιμοποιώντας το ηλεκτρικό πεδίο $\bar{E} = \bar{E}_{00} + \bar{E}_{20} + \bar{E}_{02}$, το οποίο δηλαδή αποτελείται από τρεις ρυθμούς Gauss-Hermite, το ρυθμό μηδενικής τάξης και τους δύο εκφυλισμένους ρυθμούς 2^{ης} τάξης⁵, μπορούμε να επιτύχουμε μια αρχική κατανομή σχήματος "top-hat". Εδώ, με σκοπό να έχουμε μια πιο ξεκάθαρη εικόνα του μεγέθους των όρων ανώτερης τάξης (τώρα που οι όροι αυτοί είναι παραπάνω από ένας), ορίζουμε ως $\bar{\gamma}_{rms}$ τη μέση τετραγωνική τιμή (Root Mean Square (RMS)) των λόγων $\bar{\gamma}_{mn}$ όλων των όρων (m, n) της δέσμης, και αντίστοιχα ορίζουμε την d_{rms} για τις σχετικές πυκνότητες ενέργειας. Το top-hat profile έχει εύρος αρκετά μεγαλύτερο από εκείνο της κατανομής Gauss. Αυτό φαίνεται ξεκάθαρα στο Σχ. 3.9(α), όπου σχεδιάζουμε το αρχικό profile της δέσμης για την περίπτωση $\bar{\gamma}_{20} = \bar{\gamma}_{02} = \bar{\gamma}_{rms}/\sqrt{2}$ με $d_{rms} = 0.1$. Το τετράγωνο του πλάτους του αρχικού ηλεκτρικού πεδίου σε αυτή την περίπτωση προκύπτει απ' την Εξ. (3.26). Μετά από απλοποιήσεις, καταλήγουμε τελικά στην

$$|\bar{E}|_{x=0}^2 = \frac{|\bar{C}_{00}|^2}{\pi} e^{-\frac{y^2}{w_y^2} - \frac{z^2}{w_z^2}} H_0^2 \cdot \left\{ H_0^2 + \frac{|\bar{\gamma}_{rms}|^2}{16} \left[H_2\left(\frac{y}{W_y}\right) + H_2\left(\frac{z}{W_z}\right) \right]^2 + \frac{|\bar{\gamma}_{rms}|}{\sqrt{8}} \left[H_2\left(\frac{y}{W_y}\right) + H_2\left(\frac{z}{W_z}\right) \right] \right\}.$$

⁵ Ένας ρυθμός Gauss-Hermite καλείται εκφυλισμένος όταν $m = 0$ ή $n = 0$. Στη διεύθυνση που αντιστοιχεί ο μηδενικός δείκτης, η δέσμη συμπεριφέρεται ακριβώς όπως οι Gaussian δέσμες.



Σχήμα 3.9: (α) Profile του ηλεκτρικού πεδίου της δέσμης, το οποίο αποτελείται από τους ρυθμούς $\bar{E} = \bar{E}_{00} + \bar{E}_{20} + \bar{E}_{02}$, για $d_{rms} = 0.1$. (β) Εξέλιξη του γενικευμένου εύρους δέσμης στη διεύθυνση y για διάδοση και απορρόφηση στη γραμμή εκπομπής και στο πλάσμα (υπολογισμός κενού).

Η διάδοση της δέσμης στη γραμμή εκπομπής ισοδυναμεί ουσιαστικά με διάδοση στο κενό. Η λύση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη υποενότητα περιγράφει επαρκώς τη διάδοση, αρκεί να τεθεί $\mathcal{D}_{xx}^M = \mathcal{D}_{yy}^M = \mathcal{D}_{zz}^M = c^2/\omega^2$ για τον ταχυστή διασποράς στο κενό και $\omega_{pe} = \omega_{ce} = 0$, $T_e = 0$. Η διάδοση ξεκινά από το σημείο $x = 0$, όπου το profile είναι αυτό του Σχ. 3.9(α) και η δέσμη είναι ακριβώς στην εστία ($1/R_0 \approx 0$) με κύριο εύρος $W_0 = 1.98\text{cm}$. Στη γραμμή εκπομπής, στη θέση $x = 1.51\text{m}$ υπάρχει ένας εστιακός φακός με $f = 90\text{cm}$, ο οποίος επανεστιάζει τη δέσμη πριν αυτή εισέλθει στο πλάσμα. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αλλαγή της τιμής της ακτίνας καμπυλότητας. Η νέα τιμή R'_0 μπορεί να υπολογιστεί απ' την κλασική σχέση $1/f = 1/R_0 + 1/R'_0$, μαζί με την Εξ. (3.34) για την εύρεση της τιμής R_0 πριν την πρόσπτωση στο φακό (για λεπτομέρειες βλ. [Poli et al 1999]). Ύστερα απ' το φακό, η δέσμη καλύπτει 32cm πριν εισέλθει στο πλάσμα και ακόμη 70cm ως το κέντρο του πλάσματος.

Στο Σχ. 3.9(β) δίνουμε το γενικευμένο εύρος της δέσμης στη διεύθυνση y (η συμπεριφορά στην άλλη εγκάρσια διεύθυνση είναι η ίδια λόγω του ότι το κενό είναι ιστροπικό μέσο). Είναι φανερό ότι, για το μεγαλύτερο μέρος της διάδοσης, η non-Gaussian δέσμη είναι πιο εστιασμένη απ' ότι θα ήταν μια Gaussian δέσμη. Με άλλα λόγια, προσθέτοντας ένα ρυθμό ανώτερης τάξης, εκτός απ' το πλεονέκτημα της αποφυγής μεγάλου θερμικού φορτίου στο παράθυρο, επιπρόσθετα επιτυγχάνουμε καλύτερη εστίαση της δέσμης εντός του πλάσματος. Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι για το τμήμα της διάδοσης εντός του πλάσματος συνεχίζει να εφαρμόζεται ο ταχυστής διασποράς του κενού (αυτή η τακτική είναι γνωστή σαν "υπολογισμός κενού"). Αυτό δεν επηρεάζει την ποιότητα του αποτελέσματος στο Σχ. 3.9(β), αφού στο πλαίσιο της εφαρμογής αυτής μας ενδιαφέρει η σύγκριση της Gaussian δέσμης με τη non-Gaussian και όχι οι συγκεκριμένες λεπτομέρειες της διάδοσης.

3.6 Περίληψη-Συμπεράσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήθηκε η διάδοση και απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικών κυματικών δεσμών με non-Gaussian profile ηλεκτρικού πεδίου στο πλαίσιο της ασυμπτωτικής μεθόδου εντοπισμού δέσμης. Η αναγκαιότητα για τη μελέτη του συγκεκριμένου θέματος προκύπτει απ' το γεγονός ότι σε πειράματα όπου χρησιμοποιούνται ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητα κοντά ή πολλαπλάσια της κυκλοτρονικής συχνότητας των ηλεκτρονίων, ενδέχεται να δημιουργηθούν δέσμες με non-Gaussian κατανομή πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου λόγω (α) κάποιου σφάλματος στη διάταξη εκπομπής, (β) της πολυπλοκότητας της αλληλεπίδρασης εντός του πλάσματος. Επιπρόσθετα, σε ορισμένες περιπτώσεις η χρήση non-Gaussian δεσμών συμβάλει στη βελτίωση της λειτουργίας των διατάξεων ECRH στους σύγχρονους πειραματικούς αντιδραστήρες θερμοπυρηνικής σύντηξης.

Ακολουθώντας τη λογική της μεθόδου εντοπισμού δέσμης, όπως αυτή έχει διατυπωθεί από τον Pereverzev στις [Pereverzev 1996, Pereverzev 1998], η κατάλληλη αλληλουχία ενεργειών για τον εντοπισμό κυματικών δεσμών με profile οποιουδήποτε σχήματος είναι η εξής: (α) Καθορισμός κατάλληλων αρχικών συνθηκών για όλες τις μεταβλητές, (β) Επίλυση των εξισώσεων για τη θέση και το κυματόνισμα της ακτίνας αναφοράς, το εύρος της δέσμης και την ακτίνα καμπυλότητας του μετώπου κύματος, (γ) Επίλυση της εξίσωσης για την εξέλιξη του πλάτους κάθε ρυθμού. Στα παραπάνω βήματα, υπάρχουν κάποιες ενέργειες για τις οποίες η μεθοδολογία δεν περιλαμβάνεται στην ήδη διατυπωμένη θεωρία: (α) Ο καθορισμός των αρχικών συνθηκών για τα πλάτη των ρυθμών $\bar{C}_{mn}|_{\tau=0}$, (β) Η συγκεκριμένη μέθοδος για τον υπολογισμό της απόσβεσης των ρυθμών ανώτερης τάξης, (γ) Η παραμετροποίηση των non-Gaussian δεσμών, δηλ. η γενίκευση των παραμέτρων που υπάρχουν για τις Gaussian δέσμες (π.χ. εύρος δέσμης).

Η αντιμετώπιση των παραπάνω προβλημάτων αποτέλεσε κεντρικό θέμα στο κεφάλαιο αυτό. Καταρχήν, διαπιστώθηκε ότι η μέθοδος εντοπισμού δέσμης χρειαζόταν ορισμένες μετατροπές ώστε να παρέχει άρτια περιγραφή της διάδοσης non-Gaussian δεσμών σε πρακτικές εφαρμογές. Σχετικά με το πρώτο πρόβλημα, ο καθορισμός των αρχικών συνθηκών για τα πλάτη $\bar{C}_{mn}$ συντελείται αναλύοντας το αρχικό ηλεκτρικό πεδίο σε υπέρθεση ρυθμών Gauss-Hermite. Οι συντελεστές ενός τέτοιου αναπτύγματος είναι ουσιαστικά οι αρχικές τιμές που ζητάμε, και υπολογίζονται απ' τη συνθήκη ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Gauss-Hermite. Μελετήθηκαν δύο πρακτικές εφαρμογές, όπου καταδείχθηκε ο ρόλος της επιλογής του αριθμού των ρυθμών στην ακρίβεια του αναπτύγματος. Όσον αφορά την απόσβεση των ρυθμών ανώτερης τάξης, διαπιστώθηκε πως ο συντελεστής απορρόφησης εξαρτάται απ' το κυματόνισμα, το οποίο εξαρτάται απ' τη μετατόπιση φάσης Θ_{mn} και είναι διαφορετικό για κάθε ρυθμό. Τέλος, γενικεύθηκε η παράμετρος του εύρους της δέσμης καθώς οι συνηθισμένοι ορισμοί, οι οποίοι βασίζονται στις Gaussian δέσμες, αποτυγχάνουν στο να εκτιμήσουν σωστά την έκταση της δέσμης εγκάρσια στη διάδοση. Η επίδραση της μετατόπισης φάσης κάθε ρυθμού (σε σχέση με τον άξονα συμμετρίας της δέσμης) στο γενικευμένο εύρος μελετήθηκε λεπτομερώς και συμπεριλήφθηκε στον υπολογισμό της εξέλιξης της δέσμης.

Η μέθοδος που προτείνουμε αναδεικνύεται σε δύο αριθμητικές εφαρμογές. Στην πρώτη, θεωρούμε τη διάδοση και απορρόφηση non-Gaussian δεσμών σε πλάσμα με επίπεδη γεωμετρία, όπου είναι δυνατή η σύγκριση με πλήρη λύση μέσω άλλης μεθόδου. Βρίσκουμε ότι το γενικευμένο εύρος είναι αύξουσα συνάρτηση των (m, n) και d_{mn} , και εξαρτάται απ' τη συνολική μετατόπιση φάσης θ_{mn} μόνο στις περιπτώσεις $(m, n) = (0, 1), (1, 0), (0, 2), (2, 0)$. Λόγω του ότι η μεταβολή της θ_{mn} κατά τη διάδοση στο πλάσμα είναι σημαντική, καθώς και ότι η συμπεριφορά είναι διαφορετική για κύμα με πόλωση O απ' ότι με πόλωση X , στις τέσσερις αυτές περιπτώσεις το γενικευμένο εύρος ενδέχεται να γίνει ακόμη και μικρότερο απ' το κύριο. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις, η συμπεριφορά είναι παρόμοια για κύματα με πόλωση O, X . Όσον αφορά την απόσβεση των ρυθμών ανώτερης τάξης, βρέθηκε ότι η επίδραση της απορρόφησης στο εύρος της δέσμης γίνεται σημαντική μόνο για ρυθμούς πολύ υψηλής τάξης. Εν γένει, η διαφορά στα κυματανύσματα των ρυθμών $(0, 0)$ και (m, n) δεν είναι τόσο μεγάλη ώστε οι συντελεστές απορρόφησης να είναι διαφορετικοί. Τα αποτελέσματα συγκρίνονται με αυτά του κώδικα ECPROP και βρίσκεται πολύ καλή συμφωνία σε όλες τις περιπτώσεις. Στη δεύτερη εφαρμογή αναλύονται οι ιδιότητες της διάδοσης μιας non-Gaussian δέσμης στη γραμμή εκπομπής ενός συστήματος ECRH, και καταδεικνύεται πως χρησιμοποιώντας μια σύνθετη δέσμη με κατάλληλο profile είναι δυνατό να επιτευχθεί μείωση της επιφανειακής πυκνότητας ενέργειας της δέσμης. Επιπρόσθετα, μια δέσμη αυτού του τύπου βρέθηκε να χάνει την εστίασή της πιο αργά και να παραμένει πιο εντοπισμένη απ' ότι οι Gaussian δέσμες κατά τη διάδοση στη γραμμή εκπομπής (κενό) και στο πλάσμα.

Τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν σε αυτό το κεφάλαιο ανοίγουν το δρόμο για τη μετατροπή/αναβάθμιση κωδίκων που υλοποιούν την ασυμπτωτική μέθοδο εντοπισμού δέσμης, όπως π.χ. ο TORBEAM, ώστε να είναι σε θέση να προσομοιώνουν τη διάδοση και απορρόφηση κυκλοτρονικών δεσμών με non-Gaussian profile ηλεκτρικού πεδίου στο πλάσμα. Επιπρόσθετα, η δυνατότητα του υπολογισμού της διάδοσης non-Gaussian δεσμών αποτελεί το πρώτο βήμα για την κατασκευή μιας θεωρίας σχετικά με την περιγραφή μεταβολών στο profile του ηλεκτρικού πεδίου της δέσμης λόγω ασυμμετρίας, ανομοιογένειας ή/και ισχυρού εντοπισμού στην απορρόφηση εντός του πλάσματος. Τέτοια φαινόμενα πιθανότατα μπορούν να περιγραφούν στο πλαίσιο της γένεσης όρων Gauss-Hermite ανώτερης τάξης στα σημεία όπου υπάρχουν σημαντικές μεταβολές στο profile.

4. ΑΥΤΟΣΥΝΕΠΗΣ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ-ΚΥΜΑΤΟΣ

Στα δύο προηγούμενα κεφάλαια μελετήσαμε ξεχωριστά τα κύρια χαρακτηριστικά της επίδρασης του κύματος στο πλάσμα και του πλάσματος στο κύμα. Με το "ξεχωριστά" εννοούμε ότι σε κάθε περίπτωση η περιγραφή δεν ήταν αυτοσυνεπής, δηλ. δεν ελήφθησαν υπόψη μεταβολές στην κατάσταση του κύματος σαν απόκριση στις μεταβολές του πλάσματος και αντίστροφα. Στο Κεφ. 2 θεωρούμε ότι το πλάσμα και η συχνότητα του κύματος δε μεταβάλλονται λόγω των κινήσεων των ηλεκτρικών φορτίων, ενώ στο Κεφ. 3 το ηλεκτρικό ρεύμα που διαρρέει το πλάσμα έχει προκαθορισμένη μορφή που δεν εξαρτάται απ' το χρόνο.

Εδώ πραγματοποιούμε μια αυτοσυνεπή μελέτη της αλληλεπίδρασης μαγνητισμένου πλάσματος με ηλεκτρομαγνητικό κύμα. Η μελέτη βασίζεται σε ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων, το οποίο αποτελείται από τις εξισώσεις της σχετικιστικής κίνησης των ηλεκτρονίων υπό την επίδραση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου και την κυματική εξίσωση για το ανυσματικό δυναμικό. Το πλάσμα περιγράφεται μέσω στατιστικών δειγμάτων (ensembles) ηλεκτρονίων, τα οποία δρουν συλλογικά και καθορίζουν τη χρονική εξέλιξη του πλάσματος και της συχνότητας του κύματος μέσω της πυκνότητας ρεύματος. Σαν εφαρμογή μελετάμε την απορρόφηση μιας κυκλοτρονικής δέσμης σε πλάσμα με επίπεδη γεωμετρία. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, η μικροσκοπική περιγραφή του πλάσματος επιτρέπει να συμπεριλάβουμε και μη γραμμικά φαινόμενα, όπως π.χ. την ασυμφωνία ανάμεσα στη φάση του κύματος και τη φάση της περιστροφής των φορτίων. Γενικά, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η γραμμική θεωρία για την απορρόφηση λόγω κυκλοτρονικού συντονισμού, η οποία χρησιμοποιείται ευρέως στην τρέχουσα αρθρογραφία, μπορεί να υπερεκτιμήσει την απόθεση ενέργειας στο πλάσμα. Τότε τα μη γραμμικά φαινόμενα είναι απαραίτητα για τη σωστή περιγραφή της απορρόφησης, ειδικά όταν η ισχύς του κύματος είναι πολύ μεγάλη όπως π.χ. στην περίπτωση θέρμανσης πλάσματος στον ITER.

Το κεφάλαιο αυτό χωρίζεται σε τέσσερις ενότητες. Στην Ενót. 4.1 γίνεται μια εισαγωγή στο γενικό πρόβλημα της αυτοσυνεπούς ανάλυσης του συστήματος πλάσμα-κύμα, με έμφαση στην ανάγκη προσομοίωσης της απορρόφησης με μεθόδους πληρέστερες της γραμμικής θεωρίας. Στην Ενót. 4.2 παρουσιάζεται το αυτοσυνεπές μοντέλο για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο πλαίσιο της εξίσωσης κίνησης Newton, και στην επόμενη ενότητα το μοντέλο εφαρμόζεται στη μελέτη της απορρόφησης μιας ηλεκτρομαγνητικής δέσμης σε απλοποιημένη γεωμετρία tokamak. Τέλος, στην Ενót. 4.4 συνοψίζονται τα συμπεράσματα της μελέτης, με επίκεντρο τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των μη γραμμικών προσομοιώσεων με αυτά της γραμμικής θεωρίας.

4.1 Εισαγωγή

Όπως αναφέραμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, στη θερμοπυρηνική σύντηξη η εκπομπή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με συχνότητα περίπου ίση ή πολλαπλάσια της κυκλοτρονικής συχνότητας των ηλεκτρονίων (EC waves) είναι η πιό διαδεδομένη μέθοδος για την επίτευξη θέρμανσης πλάσματος και οδήγησης ρευμάτων, αλλά και για πληθώρα άλλων εφαρμογών όπως π.χ. τον έλεγχο ασταθειών MHD. Στους σύγχρονους πειραματικούς αντιδραστήρες σύντηξης, η μικροκυματική ακτινοβολία διαδίδεται στο πλάσμα υπό τη μορφή χωρικά εντοπισμένων κυματικών δεσμών, και τα ηλεκτρόνια του πλάσματος αλληλεπιδρούν με το κύμα όταν ισχύει η συνθήκη κυκλοτρονικού συντονισμού

$$\omega - k_{||}v_{||} - \frac{l\omega_{ce}}{\gamma} = 0 \quad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (4.1)$$

όπου $k_{||}$, $v_{||}$ είναι οι συνιστώσες του κυματαριθμού και της ταχύτητας παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο. Η κυκλοτρονική συχνότητα είναι ανάλογη του μαγνητικού πεδίου, το οποίο είναι ανομοιογενές, άρα η συνθήκη (4.1) ικανοποιείται σε μια στενή χωρικά περιοχή. Συνεπώς, με τη χρήση EC κυμάτων υπάρχει το πλεονέκτημα της πολύ εντοπισμένης απόθεσης της κυματικής ενέργειας στο πλάσμα.

Η μελέτη του όλου προβλήματος τυπικά χωρίζεται σε δύο κλάδους: (α) Στη σχεδίαση και υλοποίηση πειραμάτων όπου εκπέμπονται κυματικές δέσμες στο πλάσμα, (β) Στη θεωρητική διερεύνηση της εξέλιξης του συστήματος πλάσμα-κύμα. Σε σχέση με τη θεωρία, είναι σημαντικό να υπάρχει ένα ποσοτικό μοντέλο που να περιγράφει την εξέλιξη του κύματος κατά τη διάδοση στο πλάσμα, όπως επίσης και την επίδραση του κυματικού πεδίου στη δυναμική του πλάσματος. Σε αυτό το πλαίσιο, οι θεωρητικές μελέτες εστιάζονται στον υπολογισμό (α) της διάδοσης και απορρόφησης του κύματος στο πλάσμα (επίδραση του πλάσματος στο κύμα, βλ. Κεφ. 3), (β) της εξέλιξης της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων (επίδραση του κύματος στο πλάσμα, βλ. Κεφ. 2). Η συνηθισμένη οδός είναι να επιλύεται το κάθε πρόβλημα ξεχωριστά, ενώ η σύζευξη των δύο προβλημάτων συνιστά μια αυτοσυνεπή περιγραφή. Λόγω της πολύπλοκης εξάρτησης της διάδοσης και απορρόφησης από πολλούς παράγοντες, όπως π.χ. το μαγνητικό πεδίο, η θερμοκρασία του πλάσματος και η γεωμετρία του κύματος, για τη ρεαλιστική αντιμετώπιση τέτοιων προβλημάτων είναι αναγκαία η χρήση αριθμητικών αλγορίθμων.

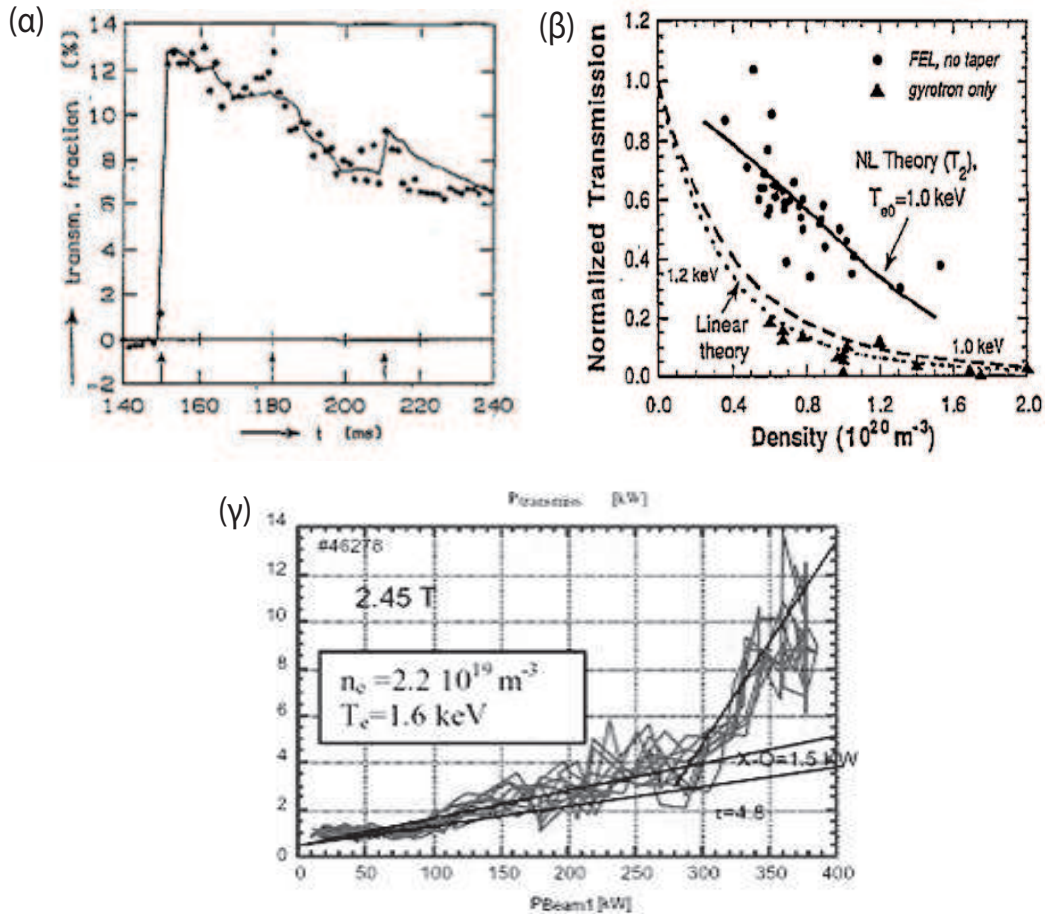
Η εξέλιξη του κύματος διέπεται από τις εξισώσεις Maxwell, οι οποίες, όταν το μήκος κύματος είναι πολύ μικρό σε σχέση με τη χαρακτηριστική κλίμακα ανομοιογένειας στο πλάσμα, απλοποιούνται με τη χρήση των ασυμπτωτικών μεθόδων. Για τιμές των B_0 , n_e μακριά από τους κυκλοτρονικούς συντονισμούς η αλληλεπίδραση κύματος-πλάσματος δεν είναι ισχυρή, ενώ κοντά σε συντονισμούς, λόγω του ότι η ισχύς των κυμάτων στις σύγχρονες μηχανές σύντηξης είναι πολύ μικρή σε σχέση με την τιμή-κατώφλι για την εμφάνιση χάους (βλ. Κεφ. 2), η απόσβεση του κύματος προσεγγίζεται αρκετά καλά από τη γραμμική θεωρία ταλαντώσεων πλάσματος. Και στις δύο περιπτώσεις, η πυκνότητα ρεύματος, η οποία εμπεριέχει όλη τη φυσική πληροφορία σχετικά με την απορρόφηση του κύματος, διατυπώνεται στο πλαίσιο ενός

διηλεκτρικού τανυστή (μια μορφή αρκετά βολική για τις εφαρμογές). Για τη δυναμική εξέλιξη του πλάσματος, η ανάλυση που έχει επικρατήσει βασίζεται στην ημιγραμμική θεωρία. Η βασική υπόθεση εδώ είναι ότι η κατανομή των ηλεκτρονίων δεν ακολουθεί ακριβώς την κατανομή Maxwell, αλλά μια κατανομή ελαφρώς διαταραγμένη σε σχέση με αυτήν. Η συνάρτηση κατανομής προκύπτει ως λύση μιας εξίσωσης Fokker-Planck με συντελεστές διάχυσης ανάλογους με το τετράγωνο του πλάτους κύματος [Suvorov and Tokman 1983, Timofeev and Tokman 1994]. Η διάχυση αυτή, στις περισσότερες περιπτώσεις, διαταράσσει την ισορροπία που συντηρούν οι συγκρούσεις στο χώρο των ταχυτήτων, με αποτέλεσμα να δημιουργείται στην κατανομή μια μορφολογία τύπου "πλατό" γύρω απ' την περιοχή του συντονισμού.

Η γραμμική θεωρία για την απορρόφηση κυκλοτρονικών κυμάτων από το πλάσμα υλοποιείται από πολλούς αριθμητικούς κώδικες, και υπάρχουν προσομοιώσεις που είναι σε αρκετά καλή συμφωνία με πειραματικά αποτελέσματα (βλ. Σχ. 4.1(α), (β)), ενώ η ημιγραμμική θεωρία εφαρμόζεται σε κώδικες Fokker-Planck [Harvey 1992, Krivenski 2001] που περιγράφουν το χώρο ταχυτήτων με αρκετά μεγάλη λεπτομέρεια (βλ. π.χ. [Erckmann and Gasparino 1994]). Όσον αφορά τα μη γραμμικά φαινόμενα, κυριαρχεί η αντίληψη ότι αυτά παίζουν σημαντικό ρόλο μόνο σε περιπτώσεις όπου η ισχύς του κύματος είναι πάρα πολύ μεγάλη, όπως π.χ. αν χρησιμοποιήσουμε Free Electron Laser (FEL) αντί για γυροτρόνια ως μικροκυματική πηγή. Τα FEL παρέχουν ακτινοβολία υψηλής ισχύος σε ένα ευρύ φάσμα συχνοτήτων και με αρκετά καλό συντελεστή απόδοσης [Robertson and Sprangle 1989, Cohen et al 1991]. Στην περίπτωση αυτή παρατηρείται σημαντική μείωση της απορρόφησης του κύματος (βλ. Σχ. 4.1(γ)) επειδή το μεγαλύτερο ποσοστό των ηλεκτρονίων, λόγω των μη γραμμικών φαινομένων, δεν ικανοποιούν τη συνθήκη (4.1) κατά την αλληλεπίδραση με το κύμα [Nevins et al 1987, Kotelnikov and Stupakov 1990, Allen et al 1994].

Υπάρχουν όμως αποτελέσματα, τόσο στη θεωρία όσο και στα πειράματα, όπου τα μη γραμμικά φαινόμενα εμφανίζονται σε χαμηλότερες τιμές ισχύος απ' αυτές που εφαρμόζεται η γραμμική θεωρία. Πρόσφατα, οι Kamendje et al πραγματοποίησαν μια μη γραμμική και κινητική περιγραφή για παραμέτρους σχετικές με τα σύγχρονα πειράματα, όπου φαίνεται ότι η απόκλιση μπορεί να είναι αρκετά σημαντική [Kamendje et al 2003, Kamendje et al 2005]. Ανάλογα συμπεράσματα προκύπτουν και από πειραματικά αποτελέσματα για κυματικές δέσμες υψηλής ισχύος [Laqua and Erckmann 2004] (βλ. Σχ. 4.1(γ)). Η ασυμφωνία των αποτελεσμάτων μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι, στις περιπτώσεις αυτές, ο λόγος του χρόνου αλληλεπίδρασης των ηλεκτρονίων με τη δέσμη και του χαρακτηριστικού χρόνου ταλαντώσεων εντός του κυματικού πεδίου παίρνει τιμές για τις οποίες η γραμμική και η ημιγραμμική θεωρία παύουν να παρέχουν καλή περιγραφή της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος. Σε τέτοιες περιπτώσεις πρέπει να ληφθούν υπόψη οι φυσικές συμπεριφορές που αναφέραμε στο Κεφ. 2.

Όλα τα παραπάνω οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο ρόλος των μη γραμμικών φαινομένων στα πειράματα ECRH και ECCD είναι ακόμη ανοικτό θέμα. Την ίδια στιγμή, η αυτοσυνεπής περιγραφή της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος είναι ένα πολύ ενδιαφέρον πρόβλημα που ακόμη παραμένει σχετικά ανεξερεύνητο, παρόλο που η λύση του είναι πολύ καθοριστική για τη βελτίωση των προσομοιώσεων. Στο



Σχήμα 4.1: Σύγκριση της γραμμικής θεωρίας για την κυκλοτρονική απορρόφηση με πειραματικά αποτελέσματα από τις μηχανές θερμοπυρηνικής σύντηξης: (α) Tokamak de Fontenay-aux-Roses (TFR), (β) Microwave Tokamak Experiment (MTX), (γ) Wendelstein 7-AS (W7-AS) [Erckmann and Gasparino 1994, Nevins et al 1987, Laqua and Erckmann 2004].

παρόν κεφάλαιο γίνεται μια προσπάθεια αυτοσυνεπούς περιγραφής του συστήματος πλάσμα-κύμα. Στο μοντέλο που παρουσιάζουμε, η απόκριση του πλάσματος περιγράφεται στο πλαίσιο στατιστικών δειγμάτων από ηλεκτρόνια που κινούνται κάτω από την επίδραση του κυματικού πεδίου. Εδώ ο όρος "αυτοσυνεπής" χρησιμοποιείται με την έννοια ότι οι κινήσεις των ηλεκτρονίων διαμορφώνουν τη χρονική εξέλιξη του πλάτους και της συχνότητας του κύματος μέσω του όρου της πυκνότητας ρεύματος στην κυματική εξίσωση. Ένα πλεονέκτημα αυτής της περιγραφής είναι ότι λαμβάνεται πλήρως υπόψη η επίδραση των κυκλοτρονικών κινήσεων στην κυματική απορρόφηση, μέσω φαινομένων όπως π.χ. η απώλεια συγχρονισμού ανάμεσα στη φάση του κύματος και τη φάση της περιστροφής των ηλεκτρονίων (η οποία συνδέεται με το ρόλο της ανώμαλης διάχυσης στην αλληλεπίδραση κύματος-φορτίου που παρουσιάστηκε στο Κεφ. 2).

4.2 Αυτοσυνεπές μοντέλο για την αλληλεπίδραση κύματος-φορτίου

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε το μοντέλο της αλληλεπίδρασης κύματος-φορτίου που θα χρησιμοποιήσουμε για την περιγραφή της μη γραμμικής κυκλοτρονικής απορρόφησης [Tsironis and Vlahos 2006]. Η αυτοσυνέπεια του μοντέλου έγκειται στη σύζευξη των σχετικιστικών εξισώσεων κίνησης υπό την επίδραση του κυματικού πεδίου με την κυματική εξίσωση παρουσία των ηλεκτρονίων του πλάσματος. Το (κλειστό) σύνολο των εξισώσεων αυτών παρέχει μια πλήρη περιγραφή της δυναμικής φορτισμένων σωματιδίων κατά την αλληλεπίδραση με ηλεκτρομαγνητικά πεδία. Οι τροχιές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της πυκνότητας ρεύματος, η οποία επιδρά με τη σειρά της στο κύμα μέσω της εμφάνισής της στις εξισώσεις που περιγράφουν τη χρονική εξέλιξη του πλάτους και της συχνότητας. Στο παρελθόν, ένα παρόμοιο μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή της λειτουργίας του μηχανισμού electron-cyclotron maser (βλ. την εφαρμογή παρακάτω).

4.2.1 Εξισώσεις του μοντέλου

Σε αυτό το μοντέλο το ηλεκτρομαγνητικό κύμα $(\omega, \mathbf{k})$ θεωρείται επίπεδο και το πλάσμα ομοιόμορφα μαγνητισμένο, και έστω ότι η διάδοση γίνεται στο επίπεδο xz υπό γωνία ϑ_w ως προς το ομογενές μαγνητικό πεδίο $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{z}$. Το μικροκυματικό πεδίο περιγράφεται από το ανυσματικό δυναμικό

$$\mathbf{A} = A_0(t) [l_1^M \cos \vartheta_w \sin \varphi(t) \hat{\mathbf{x}} + l_2^M \cos \varphi(t) \hat{\mathbf{y}} - l_1^M \sin \vartheta_w \sin \varphi(t) \hat{\mathbf{z}}], \quad (4.2)$$

όπου $A_0(t) = [8c\mathcal{P}_w(t)]^{1/2}/[w\omega(t)]$ είναι το πλάτος του ανυσματικού δυναμικού, εκπεφρασμένο στο πλαίσιο της κυματικής ισχύος $\mathcal{P}_w(t)$ (w είναι το εύρος της κυματικής δέσμης κατά τη διεύθυνση εγκάρσια στη διάδοση), l_1^M, l_2^M είναι ακέρατοι που καθορίζουν την πόλωση του κύματος (δηλ. αν είναι τύπου O ή X) και $\varphi(t)$ είναι η φάση του κύματος [Sprangle and Vlahos 1986]

$$\varphi(t) = k(x \sin \vartheta_w + z \cos \vartheta_w) - \int_0^t \omega(t') dt'. \quad (4.3)$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της Εξ. (4.3) προκύπτει απ' την ολοκλήρωση της σχέσης-ορισμού $d\varphi/dt = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega$ για τη χρονική παράγωγο της φάσης.

Στη βαθμίδα $\Phi = 0$ (όπως και στο Κεφ. 2), και λαμβάνοντας ακόμη υπόψη ότι για το συγκεκριμένο ανυσματικό δυναμικό της Εξ. (4.2) είναι $\nabla(\nabla \mathbf{A}) = 0$, οι σχετικιστικές εξισώσεις κίνησης των ηλεκτρονίων παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{|\omega_{ce}|}{\gamma} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{p} + |q_e| \left[\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{\gamma m_e} \right],$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\frac{|q_e|}{\gamma m_e c^2} \mathbf{p} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

όπου θυμίζουμε πως q_e και m_e είναι το φορτίο και η μάζα ηρεμίας του ηλεκτρονίου, $\omega_{ce} = q_e B_0 / m_e$ είναι η κυκλοτρονική συχνότητα των ηλεκτρονίων και $\mathbf{p}$ η σχετικιστική μηχανική ορμή. Στην εξίσωση για το ρυθμό μεταβολής $d\mathbf{p}/dt$, ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος είναι η δύναμη Lorentz λόγω του σταθερού μαγνητικού πεδίου $B_0 \hat{\mathbf{z}}$ και ο δεύτερος είναι η δύναμη που ασκεί το μικροκυματικό πεδίο. Αντικαθιστώντας τις συγκεκριμένες εκφράσεις του ανυσματικού δυναμικού (4.2) και της φάσης (4.3) φτάνουμε στην καρτεσιανή μορφή των εξισώσεων κίνησης

$$\begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} = & -\frac{|\omega_{ce}|}{\gamma} p_y + |q_e| \left[l_1^M \cos \vartheta_w \left(\frac{dA_0}{dt} \sin \varphi - \omega A_0 \cos \varphi \right) \right. \\ & \left. + \frac{kA_0}{\gamma m_e} (l_2^M p_y \sin \vartheta_w \sin \varphi + l_1^M p_z \cos \varphi) \right], \end{aligned} \quad (4.5\alpha)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_y}{dt} = & \frac{|\omega_{ce}|}{\gamma} p_x + |q_e| \left[l_2^M \left(\frac{dA_0}{dt} \cos \varphi + \omega A_0 \sin \varphi \right) \right. \\ & \left. - \frac{l_1^M kA_0 \sin \varphi}{\gamma m_e} (p_z \cos \vartheta_w + p_x \sin \vartheta_w) \right], \end{aligned} \quad (4.5\beta)$$

$$\begin{aligned} \frac{dp_z}{dt} = & |q_e| \left[l_1^M \sin \vartheta_w \left(\frac{dA_0}{dt} \sin \varphi - \omega A_0 \cos \varphi \right) \right. \\ & \left. + \frac{kA_0}{\gamma m_e} (l_1^M p_y \cos \vartheta_w \sin \varphi - l_2^M p_x \cos \varphi) \right], \end{aligned} \quad (4.5\gamma)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} = & \frac{|q_e|}{\gamma m_e c^2} \left[l_1^M (p_z \sin \vartheta_w - p_x \cos \vartheta_w) \left(\frac{dA_0}{dt} \sin \varphi - \omega A_0 \cos \varphi \right) \right. \\ & \left. - l_2^M p_y \left(\frac{dA_0}{dt} \cos \varphi + \omega A_0 \sin \varphi \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.5\delta)$$

Η κυματική εξίσωση για το ανυσματικό δυναμικό είναι γνωστή (βλ. (1.42β)), την παραθέτουμε ξανά για λόγους πληρότητας)

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{d^2 \mathbf{A}}{dt^2} = -\mu_0 \mathbf{j}.$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση για το $\mathbf{A}$ στην κυματική εξίσωση και πραγματοποιώντας τριγωνομετρική απαλοιφή των συντελεστών των ρυθμών μεταβολής $d\omega/dt$, dA_0/dt και $d^2 A_0/dt^2$, καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\frac{d^2 A_0}{dt^2} + A_0(c^2 k^2 - \omega^2) = \frac{1}{\epsilon_0} [l_1^M \sin \varphi (j_x \cos \vartheta_w - j_z \sin \vartheta_w) + l_2^M j_y \cos \varphi], \quad (4.6\alpha)$$

$$A_0 \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dA_0}{dt} = \frac{1}{\epsilon_0} [l_1^M \cos \varphi (j_z \sin \vartheta_w - j_x \cos \vartheta_w) + l_2^M j_y \sin \varphi]. \quad (4.6\beta)$$

Αν συμβολίσουμε την αρχική κατανομή ηλεκτρονίων με $f_0(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$, τότε η πυκνότητα ρεύματος ηλεκτρονίων στο πλάσμα έχει τη μορφή

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = -\frac{n_e |q_e|}{\gamma m_e} \int f_0 \mathbf{p} \delta[\mathbf{r} - \check{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)] d^3 \mathbf{r}_0 d^3 \mathbf{p}_0, \quad (4.7)$$

όπου $\check{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$ είναι η θέση στην οποία βρίσκεται το σωματίδιο με αρχικές συνθήκες $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$ τη χρονική στιγμή t . Η ύπαρξη της συνάρτησης δέλτα στην παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει ότι οι συνεισφορές στην πυκνότητα ρεύματος προέρχονται μόνο από ηλεκτρόνια της αρχικής κατανομής. Στις εφαρμογές, όπου ο αριθμός των σωματιδίων που απαρτίζουν το στατιστικό δείγμα είναι (εκ των πραγμάτων) πεπερασμένος, το ολοκλήρωμα στη Εξ. (4.7) (ή οποιοδήποτε παρόμοιο ολοκλήρωμα) υπολογίζεται σαν άθροισμα πάνω σε αυτά τα σωματίδια.

Στις Εξ. (4.6), όπως αυτές δίνονται παραπάνω, υπάρχει μια "ασυμφωνία": Ένω έχουμε υποθέσει πως τα A_0 , ω εξαρτώνται μόνο απ' το χρόνο, στα δεξιά μέλη υπάρχει εξάρτηση και απ' τις θέσεις των ηλεκτρονίων μέσω των φ και $\mathbf{j}$. Εν γένει λοιπόν, θα έπρεπε να έχουμε θεωρήσει εξαρχής ότι τα A_0 , ω εξαρτώνται και απ' τις θέσεις (βλ. π.χ. [Kotelnikov and Stupakov 1990]). Αυτό θα είχε σαν αποτέλεσμα να έχουμε πλέον μερικές διαφορικές εξισώσεις και το μοντέλο να είναι αρκετά πιο σύνθετο. Σε περιπτώσεις όμως που οι διαστάσεις της περιοχής αλληλεπίδρασης είναι πολύ μικρές σε σχέση με τις χαρακτηριστικές βαθμίδες χωρικής μεταβολής του μαγνητικού πεδίου και της πυκνότητας πλάσματος, και καθώς η φάση του κύματος εμφανίζεται μόνο σαν όρισμα περιοδικών συναρτήσεων, η απλότητα των εξισώσεων μπορεί να διατηρηθεί θεωρώντας τις μέσες τιμές τους ως προς το χώρο (averaging over space). Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αρχική κατανομή ηλεκτρονίων είναι χωρικά ομογενής, και λαμβάνοντας υπόψη την έκφραση (4.7) για την πυκνότητα ρεύματος οι Εξ. (4.6) παίρνουν τη μορφή

$$\frac{d^2 A_0}{dt^2} + A_0(c^2 k^2 - \omega^2) = \frac{\omega_{pe}^2}{|q_e|} \int f_0 \left(\frac{l_1^M (p_z \sin \vartheta_w - p_x \cos \vartheta_w) \sin \varphi - l_2^M p_y \cos \varphi}{\gamma} \right) d^3 \mathbf{p}_0, \quad (4.8\alpha)$$

$$A_0 \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dA_0}{dt} = \frac{\omega_{pe}^2}{|q_e|} \int f_0 \left\langle \frac{l_1^M (p_x \cos \vartheta_w - p_z \sin \vartheta_w) \cos \varphi - l_2^M p_y \sin \varphi}{\gamma} \right\rangle d^3 \mathbf{p}_0, \quad (4.8\beta)$$

όπου $\omega_{pe}^2 = n_e q_e^2 / (\epsilon_0 m_e)$ είναι η συχνότητα πλάσματος και $d^3 \mathbf{p}_0 = dp_{0x} dp_{0y} dp_{0z}$. Οι μέσες τιμές εντός των ολοκληρωμάτων είναι οι μέσες τιμές ως προς το χώρο που αναφέραμε προηγουμένως.

Οι Εξ. (4.5) και (4.8) αποτελούν ένα κλειστό, αυτοσυνεπές σύνολο που περιγράφει τη δυναμική του συστήματος πλάσμα-κύμα. Οι πρώτες, οι εξισώσεις κίνησης, δίνουν τις τροχιές των ηλεκτρονίων κάτω από την επίδραση του μικροκυματικού πεδίου, ενώ από τις δεύτερες καθορίζεται η χρονική εξέλιξη του πλάτους και της συχνότητας του κύματος. Τα A_0 και ω στην (4.5) υπολογίζονται ως λύσεις των Εξ. (4.8), ενώ τα ολοκληρώματα στην (4.8) καθορίζονται από τις λύσεις των Εξ. (4.5) για τις τροχιές.

4.2.2 Εφαρμογή: Ο μηχανισμός electron-cyclotron maser

Όταν ισχύει η συνθήκη κυκλοτρονικού συντονισμού υπάρχει έντονη ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ κύματος και σωματιδίων. Η κατάσταση αυτή είναι γνωστή και σαν "κυκλοτρονική αστάθεια" (cyclotron instability) [Sprangle and Drobot 1977, Stix 1992]. Σε εργαστηριακές εφαρμογές, ένα τέτοιο είδος αστάθειας είναι η αστάθεια maser [Hirshfield and Granatstein 1977, Ginzburg et al 1981]. Η ύπαρξη αυτής της συγκεκριμένης αστάθειας οφείλεται στο σχετικιστικό χαρακτήρα της κυκλοτρονικής κίνησης, και συγκεκριμένα στην εξάρτηση της κυκλοτρονικής συχνότητας απ' την ενέργεια. Στην περίπτωση που η μετατοπισμένη κατά Doppler συχνότητα κύματος είναι λίγο μεγαλύτερη από την κυκλοτρονική συχνότητα, τα ηλεκτρόνια ενδέχεται να συντονιστούν κατά φάση (phase bunching), κάτι που έχει σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία πυκνότητας ρεύματος η οποία διεγείρει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία. Ο μηχανισμός αυτός είναι η βάση για τη λειτουργία του γυροτρονίου [Gaponov et al 1967, Vomvoridis and Sprangle 1982, Chu 2004], και επίσης συνδέεται με παρατηρήσεις ακτινοβολίας από ηλιακές εκλάμψεις [Sharma et al 1982] και απ' τους μαγνητικούς πόλους της Γης [Wu and Lee 1979].

Το μοντέλο που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη υποενότητα εμπεριέχει όλη τη φυσική της αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα και συνδέεται με ένα ευρύ φάσμα εφαρμογών, από την επιτάχυνση φορτισμένων σωματιδίων και τη διάδοση ακτινοβολίας στο διάστημα ως τη θερμοπυρηνική σύντηξη και τις μικροκυματικές πηγές. Σε σχέση με την αστάθεια maser, το συγκεκριμένο μοντέλο έχει βρει εφαρμογή (α) στην αναλυτική μελέτη του μηχανισμού εκπομπής της ακτινοβολίας με σκοπό την παραγωγή υψίσυχων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων [Sprangle and Vlahos 1986], (β) στην ερμηνεία της φυσικής των ηλιακών μικροκυματικών εξάρσεων (solar microwave spikes) [Vlahos and Sprangle 1987], (γ) στη μελέτη της μη γραμμικής απορρόφησης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων πόλωσης O με $\omega \approx \omega_{ce}$ [Kotelnikov and Stupakov 1990]. Ακόμη, ένα παρόμοιο μοντέλο έχει χρησιμοποιηθεί στην προσομοίωση της αλληλεπίδρασης κύματος-φορτίου στην ομοαξονική κοιλότητα του γυροτρονίου [Avramides et al 2004].

Εδώ, σαν εφαρμογή, θα παρουσιάσουμε τη δυναμική εξέλιξη της αστάθειας maser που δημιουργείται σε μαγνητισμένο πλάσμα από την αλληλεπίδραση μιας κινούμενης δέσμης ηλεκτρονίων με ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα που διαδίδεται παράλληλα με το μαγνητικό πεδίο. Ο απλούστερος τρόπος να υπολογιστεί η εξέλιξη της αστάθειας είναι απ' τις μιγαδικές λύσεις της γραμμικής σχέσης διασποράς για το ηλεκτρομαγνητικό κύμα [Sprangle and Vlahos 1986, Vlahos and Sprangle 1987]

$$\omega^2 - c^2 k^2 - \frac{\omega \omega_{pp}^2}{\omega - \omega_{ce}} = \omega_{pb}^2 \left\{ \frac{\omega - k v_{b||}}{\gamma_b (\omega - k v_{b||}) - \omega_{ce}} - \frac{\gamma_b v_{b\perp}^2}{2c^2} \frac{\omega^2 - c^2 k^2}{[\gamma_b (\omega - k v_{b||}) - \omega_{ce}]^2} \right\},$$

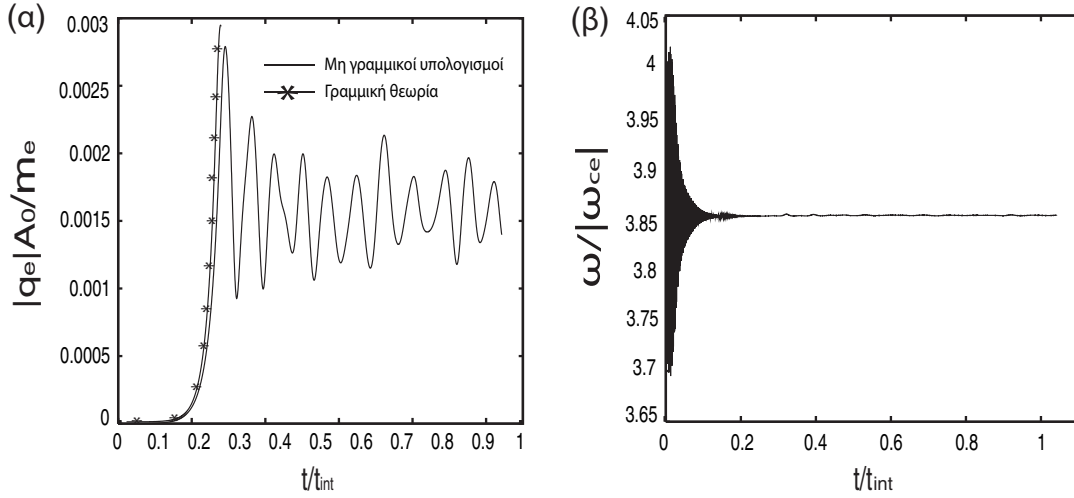
όπου ω_{pb} , $\mathbf{v}_b$ και γ_b είναι αντίστοιχα η συχνότητα πλάσματος, η ταχύτητα και ο σχετικιστικός παράγοντας Lorentz των ηλεκτρονίων της δέσμης, ενώ ω_{pp} είναι η συχνότητα πλάσματος των ηλεκτρονίων του πλάσματος. Αν $\bar{\omega}^M$ είναι μια λύση της παραπάνω εξίσωσης, τότε η εξέλιξη του πλάτους δίνεται απ' τη σχέση $A_0(t) = A_0(0)e^{Im(\bar{\omega}^M)t}$, όπου $Im(\bar{\omega}^M) > 0$ είναι ο ρυθμός εκθετικής αύξησης. Αυτή η μέθοδος δίνει σχετικά ακριβή αποτελέσματα μόνο όταν το πλάτος του κύματος είναι σχετικά μικρό. Στην περίπτωση που το πλάτος είναι αρκετά μεγάλο, η γραμμική θεωρία παύει να ισχύει και απαιτείται η χρήση μη γραμμικών υπολογισμών. Η σύγκριση των γραμμικών και μη γραμμικών μοντέλων είναι χρήσιμη για τον καθορισμό του πότε η γραμμική θεωρία περιγράφει σωστά τη φυσική του συστήματος.

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα, οι εξισώσεις του μη γραμμικού μοντέλου προκύπτουν απ' τις Εξ. (4.5) και (4.8) αν θέσουμε $\vartheta_w = 0$ και στο δεξί μέλος της (4.8) συμπεριλάβουμε και τον όρο πυκνότητας ρεύματος που αντιστοιχεί στη δέσμη ηλεκτρονίων, ο οποίος είναι όμοιος με αυτόν που αντιστοιχεί στο πλάσμα. Εδώ που η διάδοση είναι παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο, οι εξισώσεις αυτές είναι δυνατό να πάρουν πιό απλή μορφή αν (α) αναλύσουμε το διάνυσμα της ορμής όχι σε καρτεσιανές συνιστώσες, αλλά σε συνιστώσες παράλληλες και κάθετες στο μαγνητικό πεδίο, (β) εκφράσουμε την κάθετη συνιστώσα $\mathbf{p}_\perp$ σε πολικές συντεταγμένες $p_\perp$, $\theta_\perp$, (γ) ορίσουμε τη συνολική φάση του κύματος και της συνιστώσας της ορμής κάθετα στο μαγνητικό πεδίο $\varphi' = \varphi + \theta_\perp$. Με αυτά, οι εξισώσεις κίνησης για τα ηλεκτρόνια της δέσμης και του πλάσματος γίνονται

$$\begin{aligned} \frac{dp_{||}}{dt} &= -|q_e| \frac{kp_\perp}{\gamma m_e} A_0 \cos \varphi', \\ \frac{dp_\perp}{dt} &= |q_e| \left[\frac{dA_0}{dt} \sin \varphi' - \left(\omega - \frac{kp_{||}}{\gamma m_e} \right) A_0 \cos \varphi' \right], \\ \frac{d\varphi'}{dt} &= - \left(\omega - \frac{kp_{||}}{\gamma m_e} - \frac{\omega_{ce}}{\gamma} \right) + \frac{|q_e|}{p_\perp} \left[\frac{dA_0}{dt} \cos \varphi' + \left(\omega - \frac{kp_{||}}{\gamma m_e} \right) A_0 \sin \varphi' \right], \\ \frac{d\gamma}{dt} &= \frac{|q_e|}{m_e^2 c^2} \frac{p_\perp}{\gamma} \left(\frac{dA_0}{dt} \sin \varphi' - \omega A_0 \cos \varphi' \right), \end{aligned}$$

και οι εξισώσεις εξέλιξης του πλάτους και της συχνότητας του κύματος είναι

$$\frac{d^2 A_0}{dt^2} + (c^2 k^2 - \omega^2) A_0 = - \frac{1}{|q_e|} \sum_s \omega_{ps}^2 \left\langle \frac{p_{s\perp}}{\gamma_s} \sin \varphi'_s \right\rangle,$$



Σχήμα 4.2: Χρονική εξέλιξη (α) του πλάτους και (β) της συχνότητας στην αστάθεια maser για $\gamma_b = 4$ (η αρχική συχνότητα του κύματος είναι ίση με γ_b).

$$A_0 \frac{d\omega}{dt} + 2\omega \frac{dA_0}{dt} = \frac{1}{|q_e|} \sum_s \omega_{ps}^2 \left\langle \frac{p_{s\perp}}{\gamma_s} \cos \varphi'_s \right\rangle.$$

Στο Σχ. 4.2 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για $v_b = 0.25c$ ($\gamma_b = 4$) σε σύγκριση με το γραμμικό υπολογισμό. Η αρχική συχνότητα του κύματος είναι ίση με γ_b (το αρχικό πλάτος είναι μηδέν) και το πλάσμα είναι μη σχετικιστικό ($\gamma_p \approx 1$), ενώ για την προσομοίωση του πλάσματος και της δέσμης χρησιμοποιούνται από 1000 σωματίδια. Στο Σχ. 4.2(α) απεικονίζεται η εξέλιξη του πλάτους του ανυσματικού δυναμικού. Είναι εμφανές ότι, αρχικά, το κύμα αναπτύσσεται με ρυθμό πολύ κοντά στο γραμμικό, αλλά μετά επέρχεται ένα είδος κορεσμού (saturation) λόγω της παγίδευσης ηλεκτρονίων της δέσμης στο πεδίο του κύματος και η αύξηση σταματά. Με άλλα λόγια, αρχικά το κύμα αντλεί ενέργεια από τη δέσμη και μετά τον κορεσμό το κύμα και η δέσμη ανταλλάσσουν ενέργεια περιοδικά. Η εξέλιξη της συχνότητας στο χρόνο φαίνεται στο Σχ. 4.2(β). Παρατηρήστε ότι μετά από ένα χαρακτηριστικό χρόνο η συχνότητα σταθεροποιείται. Αυτή η ιδιότητα αποτελεί και τη βάση της εφαρμογής του μηχανισμού στις πηγές μικροκυματικής ακτινοβολίας.

4.3 Μη γραμμική απορρόφηση EC κύματος σε πλάσμα tokamak

Με τη βοήθεια του αυτοσυνεπούς μοντέλου περνάμε τώρα στη μελέτη της μη γραμμικής κυκλοτρονικής απορρόφησης μιας δέσμης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε πλάσμα tokamak. Στην πρώτη υποενότητα παρουσιάζουμε τα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας και τις παραμέτρους του πλάσματος και του κύματος που υιοθετήθηκαν για τους υπολογισμούς, και ακόμη αναλύουμε το πλαίσιο της σύγκρισης με τη γραμμική θεωρία της κυκλοτρονικής απορρόφησης, ενώ στη δεύτερη υποενότητα παραθέτουμε και σχολιάζουμε τα αριθμητικά αποτελέσματα.

4.3.1 Χαρακτηριστικές παράμετροι της προσομοίωσης

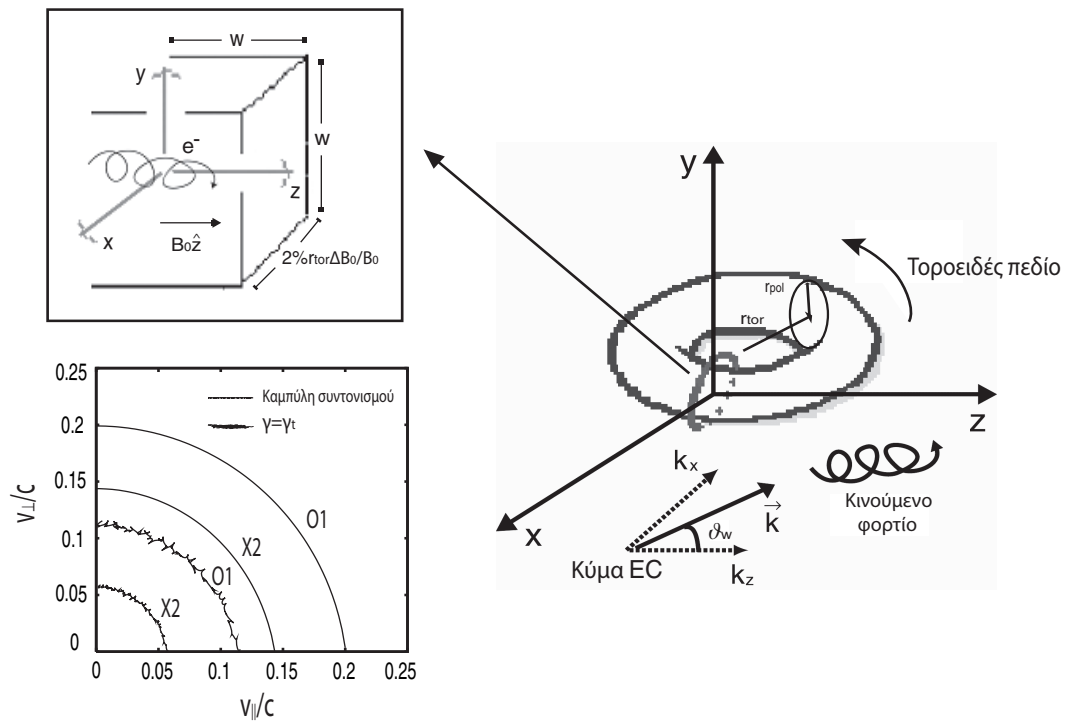
Για να διευκολυνθεί η αριθμητική μελέτη του προβλήματος, κάνουμε τις ακόλουθες προσεγγίσεις/απλοποιήσεις: (α) Η γεωμετρία του πλάσματος είναι σχεδόν επίπεδη (large aspect ratio approximation, όπως στο Κεφ. 3), (β) Η περιοχή της αλληλεπίδρασης ηλεκτρονίων-κύματος είναι πεπερασμένων διαστάσεων (σε αντίθεση με το Κεφ. 2), (γ) Η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία έχει συχνότητα κοντά στην κυκλοτρονική συχνότητα των ηλεκτρονίων ή πολλαπλάσια αυτής. Τα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας του πλάσματος και της περιοχής αλληλεπίδρασης απεικονίζονται στο Σχ. 4.3. Στις διευθύνσεις εγκάρσια στη διάδοση της δέσμης, η περιοχή αλληλεπίδρασης ορίζεται από την προβολή του εύρους της δέσμης πάνω στο μαγνητικό άξονα, ενώ παράλληλα στη διάδοση το εύρος της περιοχής αντιστοιχεί σε ελάττωση του τοροειδούς πεδίου κατά 2%, θεωρώντας μεταβολή της μορφής $B_0(1 + x/r_{tor})^{-1}$. Οι διαστάσεις της περιοχής που προσομοιώνουμε είναι μικρές σε σχέση με τη χωρική κλίμακα μεταβολής όχι μόνο του B_0 αλλά και των n_e, T_e , που έχουν μεταβολή του τύπου $1 - (x/r_{pol})^2$ (παραβολική). Έτσι, μπορεί να θεωρηθεί ότι αυτά τα μεγέθη παραμένουν σταθερά εντός της περιοχής αλληλεπίδρασης, και σαν αποτέλεσμα το κυματόνισμα και το εύρος της δέσμης είναι επίσης σταθερά (βλ. Εξ. (3.4)). Τα ηλεκτρόνια του πλάσματος έρχονται σε επαφή με το κύμα όσο είναι εντός της περιοχής αλληλεπίδρασης, και όταν βγαίνουν απ' την περιοχή η συνεισφορά τους στην πυκνότητα ρεύματος δε λαμβάνεται πλέον υπόψη.

Για να είναι δυνατή η σύγκριση με τις υπάρχουσες δημοσιεύσεις που υλοποιούν τη γραμμική θεωρία της απορρόφησης, η οποία προϋποθέτει ότι το πλάσμα είναι στατικό, ανομοιογενές και χωρίς συγκρούσεις, πρέπει να γίνουν κατάλληλες επιλογές για τη χρονική διάρκεια της προσομοίωσης και τον υπολογισμό της απορρόφησης. Όταν το πλάσμα είναι στατικό, η ισχύς του κύματος θεωρείται ότι είναι σταθερή στο χρόνο και μεταβάλλεται μόνο κατά μήκος του πλάσματος. Αν P_{w0} είναι η αρχική ισχύς, τότε η ισχύς που απορροφάται εντός του πλάσματος είναι

$$\Delta P_w = P_{w0} \left(1 - e^{-\int_0^{\ell_{prop}} \alpha_L d\tau} \right) \quad (4.9)$$

όπου ℓ_{prop} είναι το συνολικό μήκος της διάδοσης, α_L είναι ο γραμμικός συντελεστής απορρόφησης και τ είναι η καμπυλόγραμμη συντεταγμένη κατά μήκος της διάδοσης. Η ενέργεια που απορροφάται από το πλάσμα είναι τελικά $\Delta P_w \cdot t_H$, όπου t_H είναι ο χρόνος που διαρκεί η θέρμανση. Είναι προφανές ότι σε τέτοια μοντέλα, τουλάχιστον όσον αφορά την εξέλιξη του πλάτους και της ισχύος, ο χρόνος επιδρά σαν ρυθμιστική παράμετρος. Αντιστρόφως, στο μοντέλο μας το πλάτος και η συχνότητα κύματος είναι σταθερά στο χώρο εντός των περιοχών που μελετάμε, αλλά μεταβάλλονται χρονικά. Η εξέλιξη του κύματος υπόκειται σε δυναμικά φαινόμενα που συνδέονται με τη διάδοση και τις σωματιδιακές κινήσεις.

Με σκοπό να "συμβιβάσουμε" τα παραπάνω, κάνουμε την επιλογή να παρακολουθούμε το κύμα και τα ηλεκτρόνια για το χρονικό διάστημα t_{int} που χρειάζεται η δέσμη, κινούμενη με (τη μέγιστη δυνατή) ομαδική ταχύτητα c , να διασχίσει την περιοχή της αλληλεπίδρασης. Αυτό σημαίνει ότι, στις συγκρίσεις μας, συνυπολογίζουμε μόνο το ποσοστό της κυματικής ενέργειας που διέρχεται απ' την περιοχή



Σχήμα 4.3: Η γεωμετρία του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου: Το μικρό σχήμα επάνω προβάλλει μια μεγέθυνση της πεπερασμένης περιοχής αλληλεπίδρασης κύματος-σωματιδίου, ενώ το κάτω δείχνει (στο χώρο ταχυτήτων) την καμπύλη συντονισμού και την καμπύλη που ορίζεται από τη θερμική ταχύτητα για τις περιπτώσεις των ρυθμών $O1$ και $X2$ κάθετα στο μαγνητικό πεδίο.

στο χρονικό παράθυρο $[0, t_{int}]$, θεωρώντας ότι η συμπεριφορά στο παράθυρο αυτό επαναλαμβάνεται όσο η κυματική ενέργεια κατευθύνεται από την πηγή ακτινοβολίας διαμέσου της περιοχής. Ο χαρακτηριστικός αυτός χρόνος είναι πολύ μικρότερος απ' το χρόνο συγκρούσεων $1/\nu_{ei}$, οπότε η επίδραση των συγκρούσεων μπορεί να παραληφθεί. Ο λόγος $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$ προκύπτει απ' τις μη γραμμικές εξισώσεις (4.4), (4.8) και συγκρίνεται με το λόγο (4.9) από τη γραμμική θεωρία, όπου $\int_0^{\ell_{prop}} \alpha_L d\tau = \alpha_L \ell_{prop}$.

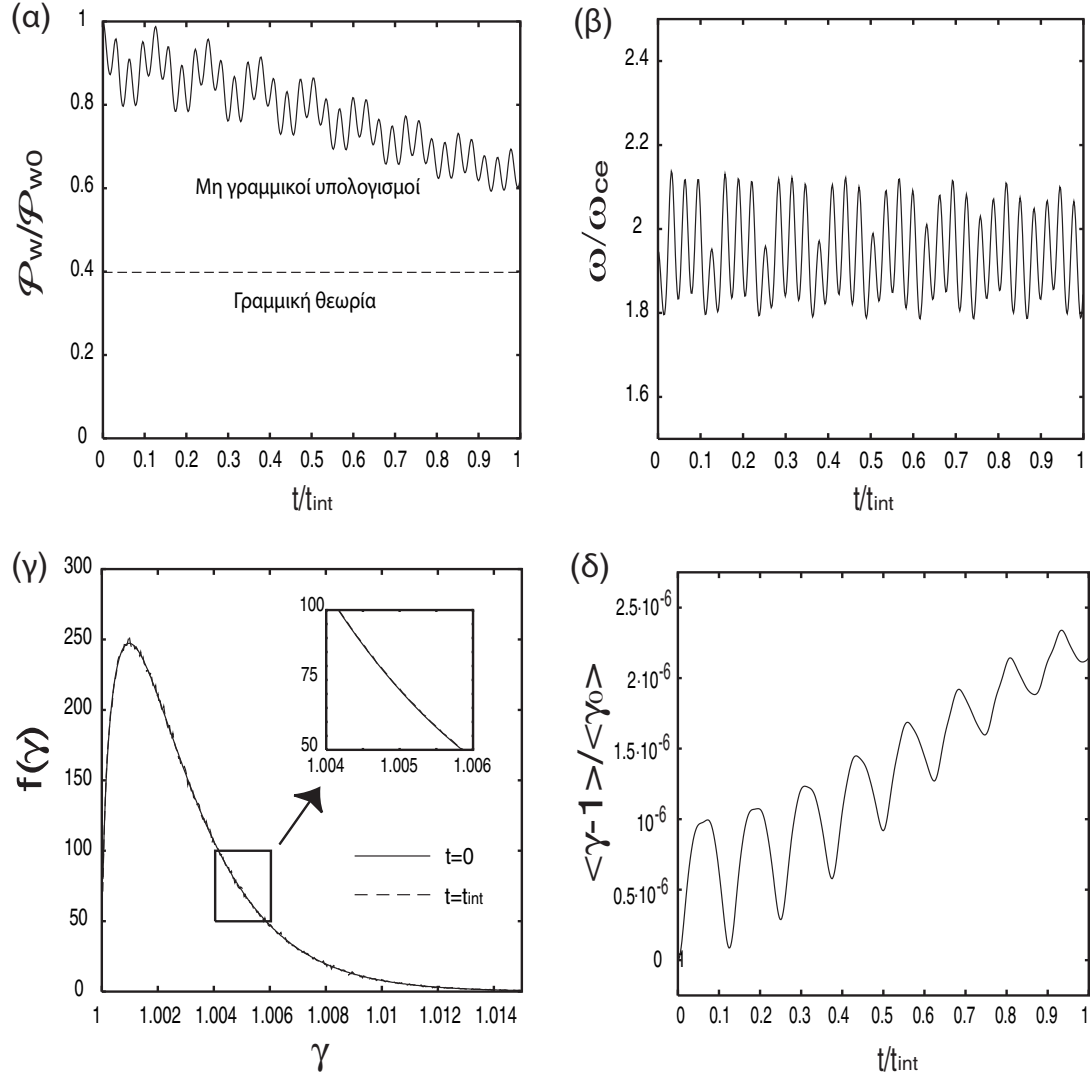
Πραγματοποιούμε προσομοιώσεις για παραμέτρους πλάσματος/κύματος σχετικές με τα tokamak AUG και ITER. Ο κυματάριθμος υπολογίζεται ως λύση της εξίσωσης διασποράς ψυχρού πλάσματος για τη συγκεκριμένη πόλωση κύματος, $X2$ για το AUG (για τους δείκτες που εμφανίζονται στην Εξ. (4.2) είναι $l_1^M = l_2^M = 1$) και $O1$ για τον ITER ($l_1^M = 1, l_2^M = -1$). Ο γραμμικός συντελεστής απορρόφησης υπολογίζεται από τη σχέση διατήρησης της ενέργειας του συστήματος πλάσμα-κύμα, λαμβάνοντας υπόψη και ασθενώς σχετικιστικά φαινόμενα [Bornatici 1982]. Στο AUG, οι διαστάσεις του tokamak είναι $r_{tor} = 165\text{cm}$ και $r_{pol} = 60\text{cm}$ αντίστοιχα, το μαγνητικό πεδίο είναι $B_0 = 2.5\text{T}$, η πυκνότητα πλάσματος $n_e = 10^{13}\text{cm}^{-3}$ και η θερμοκρασία $T_e = 1\text{KeV}$. Οι αντίστοιχες τιμές για τον ITER είναι $r_{tor} = 620\text{cm}$, $r_{pol} = 190\text{cm}$, $B_0 = 5.3\text{T}$, $n_e = 2 \cdot 10^{13}\text{cm}^{-3}$ και $T_e = 8\text{KeV}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το πλάσμα ακολουθεί κατανομή Juettner (σχετικιστική Maxwell)

$$f(\gamma)|_{t=0} = \frac{T_e}{m_e c^2 K_2(T_e/m_e c^2)} \gamma(\gamma^2 - 1)^{1/2} e^{-\gamma T_e/m_e c^2}. \quad (4.10)$$

Το κύμα εκπέμπεται υπό γωνία $\vartheta_w = 70^\circ$ (αντιστοιχεί σε τοροειδή γωνία 20°) ή 90° (κάθετα στο μαγνητικό πεδίο) στη μορφή τετραγωνικής δέσμης. Σε όλες τις περιπτώσεις, η αρχική συχνότητα του κύματος επιλέγεται έτσι ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη κυκλοτρονικού συντονισμού. Στο Σχ. 4.3 δείχνουμε τη θέση της καμπύλης συντονισμού στο χώρο των ταχυτήτων, εν συγκρίσει με την καμπύλη $\gamma = \gamma_t$ που ορίζεται από τη θερμική ταχύτητα της αρχικής κατανομής για την περίπτωση της κάθετης πρόσπτωσης. Οι διαφορικές εξισώσεις (4.5), (4.8) επιλύονται αριθμητικά με τη μέθοδο Runge-Kutta 4^{ης} τάξης, με βήμα 10^{-2} (η χρήση μεθόδων με μεταβλητό βήμα δεν ανέδειξε διαφορές στα αποτελέσματα).

4.3.2 Αριθμητικά αποτελέσματα

Στην πρώτη περίπτωση που θα μελετήσουμε, η δέσμη διαδίδεται στο AUG υπό γωνία $\vartheta_w = 70^\circ$, η αρχική ισχύς είναι $\mathcal{P}_{w0} = 1\text{MW}$, το εύρος της δέσμης είναι $w = 2\text{cm}$ και η αρχική συχνότητα $\omega_0 = 1.98\omega_{ce}$. Στο Σχ. 4.4(α) σχεδιάζουμε το λόγο της ισχύος του κύματος προς την αρχική της τιμή. Η οριζόντια γραμμή που εμφανίζεται στα σχήματα αντιστοιχεί στο μέρος της κυματικής ενέργειας που δεν έχει απορροφηθεί από το πλάσμα, όπως αυτή υπολογίζεται από τη γραμμική θεωρία, και είναι ίση με $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0} = 1 - \Delta\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$. Η ποσότητα αυτή δεν έχει χρονική εξάρτηση, αλλά εξαρτάται μόνο από το μήκος της περιοχής αλληλεπίδρασης. Η ισχύς απορροφάται από τα ηλεκτρόνια του πλάσματος με ρυθμό μικρότερο απ' αυτόν που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Στο Σχ. 4.4(β) παρουσιάζεται η χρονική εξέλιξη της συχνότητας (η τιμή είναι κανονικοποιημένη ως προς την ω_{ce}). Φαίνεται καθαρά ότι



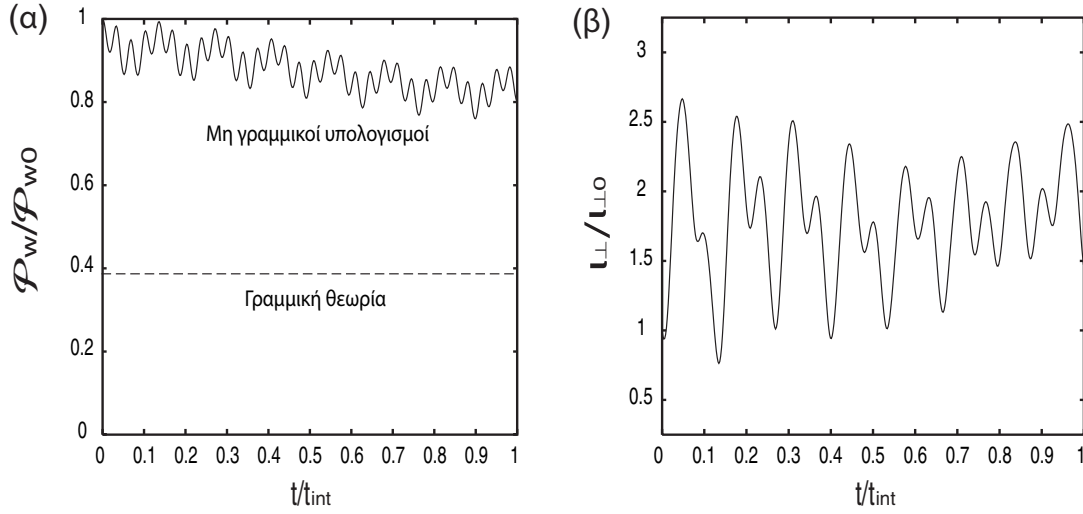
Σχήμα 4.4: Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στο AUG για $P_{w0} = 1\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$: (α) Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης ισχύος P_w/P_{w0} (από τη γραμμική θεωρία και τους μη γραμμικούς υπολογισμούς), (β) Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης συχνότητας ω/ω_{ce} , (γ) Συνάρτηση κατανομής $f(\gamma)$ τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = t_{int}$, (δ) Κανονικοποιημένη μέση κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων $\langle \gamma - 1 \rangle / \langle \gamma_0 \rangle$.

η συχνότητα ταλαντώνεται γύρω από την αρχική τιμή $\omega_0 \sim 2\omega_{ce}$. Πραγματοποιήθηκε φασματική ανάλυση στη χρονοσειρά των τιμών της ω , η οποία έδειξε ότι δεν υπάρχουν επικρατούσες συχνότητες στο φάσμα, κάτι που ουσιαστικά σημαίνει ότι οι ταλαντώσεις αυτές είναι μη γραμμικής φύσεως. Η συμπεριφορά αυτή, η οποία εμφανίζεται και στην εξέλιξη του πλάτους (βλ. ξανά το Σχ. 4.4(α)), υποδηλώνει ότι η επίδραση των ηλεκτρονίων δεν περιορίζεται μόνο στην απόσβεση του κύματος αλλά επεμβαίνει και στα χαρακτηριστικά της διάδοσης.

Στο Σχ. 4.4(γ) σχεδιάζεται η τελική κατανομή των ηλεκτρονίων $f|_{t=t_{int}}$ συγκριτικά με την αρχική κατανομή f_0 . Η σύγκριση επεκτάθηκε ακόμη και σε πολύ μικρές τιμές της ενέργειας (βλ. το μικρό σχήμα), και κατέδειξε ότι η επίδραση της απορροφώμενης ενέργειας στη μορφή της κατανομής είναι πολύ μικρή. Αυτό συμβαίνει διότι ο χρόνος αλληλεπίδρασης στις προσομοιώσεις είναι πολύ μικρός σε σχέση με τη χαρακτηριστική κλίμακα χρόνου για την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής, και συνεπώς η ενέργεια που προσλαμβάνουν τα ηλεκτρόνια δεν είναι αρκετή ώστε να τροποποιηθεί σημαντικά η κατανομή. Η ενεργειακή ανταλλαγή ανάμεσα στο κύμα και τα ηλεκτρόνια απεικονίζεται στο Σχ. 4.4(δ), όπου παρουσιάζουμε την εξέλιξη του λόγου της μέσης κινητικής ενέργειας $\langle \gamma - 1 \rangle$ προς την αρχική τιμή $\langle \gamma_0 \rangle$.

Επόμενη περίπτωση που θα μελετηθεί είναι η διάδοση στο AUG υπό γωνία $\vartheta_w = 90^\circ$ με την ίδια αρχική ισχύ και συχνότητα με προηγουμένως. Στο Σχ. 4.5(α) δίνεται η χρονική εξέλιξη της κυματικής ισχύος, και, όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, υπάρχει διαφωνία μεταξύ του γραμμικού και του μη γραμμικού υπολογισμού. Ειδικά εδώ, στην περίπτωση της κάθετης διάδοσης, ο μη γραμμικός υπολογισμός αναδεικνύει μια σημαντική μείωση της απορρόφησης. Αυτό είναι σε συμφωνία με τα πρόσφατα αποτελέσματα των Kamendje et al, που υποστηρίζουν ότι τα μη γραμμικά φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο στα πειράματα ECRH [Kamendje et al 2003, Kamendje et al 2005]. Στο Σχ. 4.5(β) απεικονίζεται η εξέλιξη του ηλεκτρικού ρεύματος που διαρρέει το πλάσμα στη διεύθυνση εγκάρσια της διάδοσης. Η τιμή του ρεύματος αυξάνεται εμφανίζοντας ταλαντώσεις παρόμοιες με εκείνες των περιπτώσεων που έχουν εξεταστεί παραπάνω, λόγω του μη γραμμικού χαρακτήρα της ανταλλαγής ενέργειας μεταξύ κύματος και ηλεκτρονίων.

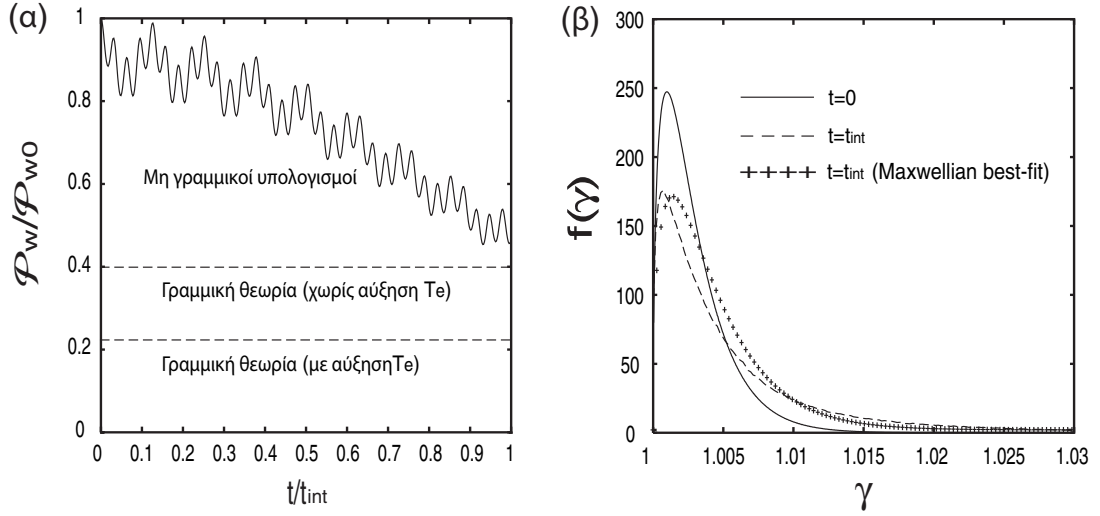
Αναφέραμε στην εισαγωγή ότι όσο η ισχύς του κύματος αυξάνει, τα μη γραμμικά φαινόμενα γίνονται εντονότερα. Ας εμβαθύνουμε σε αυτό, πραγματοποιώντας μια προσομοίωση με την υπόθεση ότι έχει εγκατασταθεί μια συσκευή FEL στο tokamak AUG. Η δέσμη διαδίδεται υπό γωνία $\vartheta_w = 70^\circ$, έχει αρχική συχνότητα $\omega_0 = 1.98\omega_{ce}$ και αρχική ισχύ $P_{w0} = 1\text{GW}$. Η εξέλιξη της ισχύος φαίνεται στο Σχ. 4.6(α). Στην περίπτωση αυτή, επειδή η ενέργεια που δίνεται στα σωματίδια είναι πολύ μεγάλη και η θερμοκρασία στην περιοχή αλληλεπίδρασης αυξάνεται σημαντικά, υιοθετούμε και έναν εναλλακτικό υπολογισμό για τη γραμμική απορρόφηση που λαμβάνει υπόψη αυτή την αύξηση της θερμοκρασίας. Συγκεκριμένα, η θερμική ταχύτητα της κατανομής υπολογίζεται αριθμητικά σε κάθε χρονική στιγμή και ύστερα χρησιμοποιείται στον υπολογισμό του α_L . Η συνολική απόσβεση δίνεται απ' την Εξ. (4.9), όπου το ολοκλήρωμα υπολογίζεται σαν $\int_0^{\ell_{prop}} \alpha_L d\tau = \langle \alpha_L \rangle \ell_{prop}$, με $\langle \alpha_L \rangle$ τη μέση τιμή του α_L ως προς το χρόνο. Η απόκλιση από τη γραμμική θεωρία φαίνεται λίγο μεγαλύτερη από εκείνη της περιπτώσεως $\vartheta_w = 70^\circ$, $P_{w0} = 1\text{MW}$.



Σχήμα 4.5: Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στο AUG για $P_w/P_{w0} = 1\text{MW}$, $\vartheta_w = 90^\circ$ (κάθετη πρόσπτωση): (α) Ο λόγος P_w/P_{w0} (γραμμικός και μη γραμμικός υπολογισμός) σαν συνάρτηση του t/t_{int} , (β) Ο λόγος $i_\perp/i_{0\perp}$ (απόκριση ρεύματος εγκάρσια στο μαγνητικό πεδίο) σαν συνάρτηση του t/t_{int} .

Στο Σχ. 4.6(β) δείχνουμε την κατανομή ενέργειας για $t = 0, t_{int}$. Η τελική κατανομή διαφέρει σημαντικά σε σχέση με την αρχική, παρόλο που ο χρόνος αλληλεπίδρασης είναι πολύ μικρός. Πιο συγκεκριμένα, η τελική κατανομή δεν είναι καν Maxwell. Αυτό επιβεβαιώθηκε συγκρίνοντας την κατανομή με την καλύτερη μαθηματική "προσαρμογή" (best-fit) ως προς την κατανομή Maxwell, όπου εμφανίζονται σημαντικές αποκλίσεις (βλ. στο Σχ. 4.6(β) την ουρά που εμφανίζεται λόγω της μη γραμμικότητας). Είναι πιθανό η διαδικασία αυτή να μπορεί να περιγραφεί με την ημιγραμμική θεωρία, αλλά εν γένει η συμπεριφορά είναι έντονα μη γραμμική (βλ. π.χ. [Hizanidis et al 1989]). Μιά πιο λεπτομερής μελέτη της συνάρτησης κατανομής είναι έξω από τα πλαίσια αυτής της διατριβής. Η εξέταση και των δύο σχημάτων δείχνει ότι ο ρόλος των μη γραμμικών φαινομένων είναι πολύ σημαντικός, τόσο για την εξέλιξη του κύματος όσο και για την απόκριση του πλάσματος.

Καταλήγουμε με την προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στον ITER. Συγκεκριμένα, μελετάμε την περίπτωση που το κύμα διαδίδεται υπό γωνία $\vartheta_w = 70^\circ$ στη μορφή τετραγωνικής δέσμης εύρους $w = 3\text{cm}$. Η κυματική ισχύς είναι $P_{w0} = 20\text{MW}$ και η αρχική συχνότητα είναι $\omega_0 = 0.98\omega_{ce}$. Στο Σχ. 4.7(α) παρουσιάζουμε τη χρονική εξέλιξη της ισχύος σε σύγκριση με το γραμμικό αποτέλεσμα. Η απορρόφηση εμφανίζεται μειωμένη σε σχέση με το AUG. Αυτό είναι σε αντιστοιχία με το ότι, για παραμέτρους σχετικές με τον ITER, ο λόγος του χρόνου αλληλεπίδρασης με τη δέσμη προς το χρόνο ταλαντώσεων στο κυματικό πεδίο παίρνει τιμές που ευνοούν την εμφάνιση μη γραμμικών φαινομένων [Kamendje et al 2005]. Οι μη γραμμικές ταλαντώσεις που χαρακτηρίζουν το σύστημα είναι οξύτερες στην περίπτωση αυτή. Αυτό συμβαίνει διότι το οπτικό βάθος είναι μεγαλύτερο, και συνεπώς η απορρόφηση από το πλάσμα είναι πιο έντονη. Στο Σχ. 4.7(β) φαίνεται η χρονική εξέλιξη της



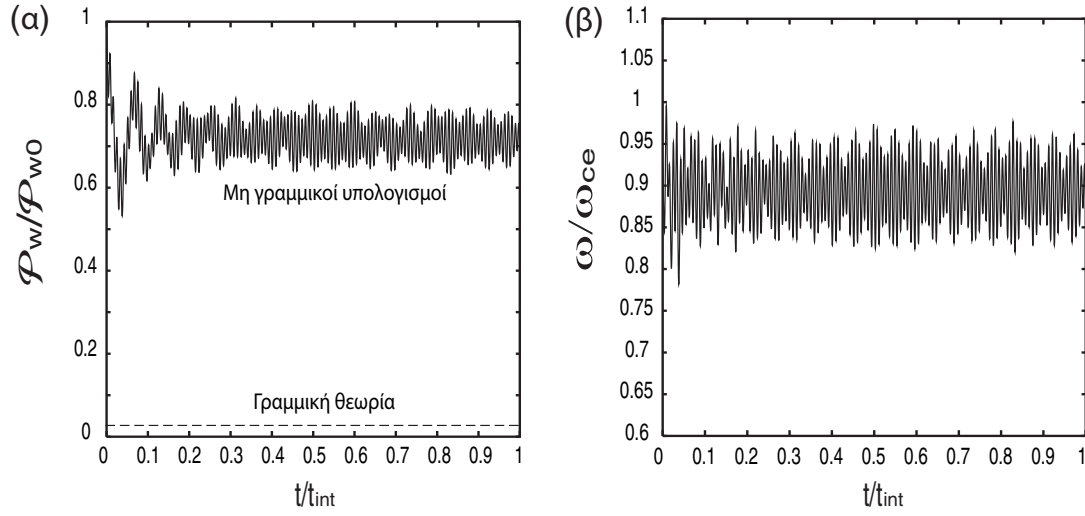
Σχήμα 4.6: Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στο AUG για $P_{w0} = 1\text{GW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$: (α) Δυναμική εξέλιξη του P_w/P_{w0} (λαμβάνοντας υπόψη και την αύξηση της T_e στον υπολογισμό του α_L), (β) $f(\gamma)$ για $t = 0, t_{int}$ (η τελευταία εν συγκρίσει με την best-fit ως προς την κατανομή Maxwell).

συχνότητας και η συνάρτηση κατανομής. Η συμπεριφορά είναι και εδώ παρόμοια με αυτή στο AUG (βλ. Σχ. 4.4).

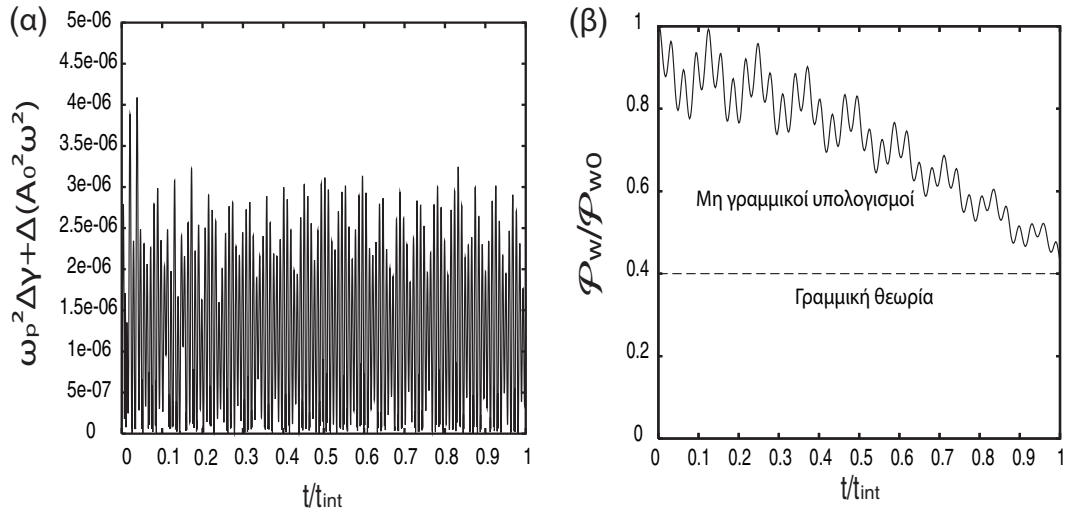
Όλα τα παραπάνω αποτελέσματα είναι συμβιβαστά με τη διατήρηση της ενέργειας. Στο πλαίσιο της μεταβολής της συνολικής πυκνότητας ενέργειας του κύματος και των ηλεκτρονίων, η αρχή διατήρησης γράφεται $d(\mathcal{E}_p + \mathcal{E}_w)/dV = 0$, όπου $d\mathcal{E}_p/dV = n_e \langle \gamma \rangle m_e c^2$ είναι η πυκνότητα ενέργειας του πλάσματος και $d\mathcal{E}_w/dV = \varepsilon_0 A_0^2 \omega^2$ αυτή του κύματος. Με κανονικοποίηση των εκφράσεων για τις πυκνότητες ενέργειας και αντικατάσταση στην αρχή διατήρησης, καταλήγουμε στην απλή έκφραση

$$\omega_p^2 \Delta \langle \gamma \rangle + \Delta(A_0^2 \omega^2) = 0. \quad (4.11)$$

Η εγκυρότητα των αποτελεσμάτων μπορεί να πιστοποιηθεί ελέγχοντας αριθμητικά την ισχύ της Εξ. (4.11) στον όγκο που καταλαμβάνει η περιοχή αλληλεπίδρασης. Στο Σχ. 4.8(α) παρουσιάζουμε τη χρονική εξέλιξη του αριστερού μέλους της Εξ. (4.11) για παραμέτρους σχετικές με τον ITER ($P_{w0} = 20\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$). Το σφάλμα υπολογίζεται να είναι της τάξης του 10^{-6} . Πρέπει να σημειώσουμε ότι η αριθμητική ακρίβεια εξαρτάται ισχυρά απ' τον αριθμό των σωματιδίων που χρησιμοποιούνται για τη στατιστική περιγραφή του πλάσματος. Ο αριθμός αυτός στις δικές μας προσομοιώσεις κυμάνθηκε περίπου στα $10^5 - 10^6$, και για τις περιπτώσεις που μελετήσαμε η αύξηση του αριθμού αυτού δεν συνετέλεσε σε περαιτέρω αύξηση της ακρίβειας. Πραγματοποιήθηκε και ένας ακόμη έλεγχος του μοντέλου μας, με σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της γραμμικής θεωρίας για μια πολύ μικρή τιμή της κυματικής ισχύος. Το αποτέλεσμα της σύγκρισης παρουσιάζεται στο Σχ. 4.8(β), όπου μελετάται η διάδοση στο AUG για $P_{w0} = 10\text{kW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$. Η συμφωνία ανάμεσα στα δύο μοντέλα είναι πολύ καλή (σε λογικά πλαίσια).



Σχήμα 4.7: Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στον ITER για $P_{w0} = 20\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$: (α) P_w/P_{w0} (γραμμικός και μη γραμμικός υπολογισμός) ως προς t/t_{int} , (β) ω/ω_{ce} ως προς t/t_{int} .



Σχήμα 4.8: (α) Δυναμική εξέλιξη του αριθμητικού σφάλματος για την περίπτωση $P_{w0} = 20\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$ (παράμετροι ITER), (β) Δυναμική εξέλιξη του P_w/P_{w0} (γραμμικός και μη γραμμικός υπολογισμός) για την περίπτωση $P_{w0} = 10\text{kW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$ (παράμετροι AUG).

4.4 Περίληψη-Συζήτηση

Σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε την αλληλεπίδραση σχετικιστικών ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα εντός ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Χρησιμοποιήσαμε μια μη γραμμική και αυτοσυνεπή περιγραφή για την αλληλεπίδραση κύματος-σωματιδίου, στην οποία λαμβάνεται υπόψη η επίδραση των περιστροφικών κινήσεων των φορτισμένων σωματιδίων στη δυναμική εξέλιξη του πλάτους και της συχνότητας του κύματος. Σαν παράδειγμα υλοποίησης του μοντέλου παρουσιάσαμε τη μη γραμμική εξέλιξη της αστάθειας maser, ενώ την κύρια εφαρμογή αποτέλεσε η προσομοίωση της κυκλοτρονικής απορρόφησης ηλεκτρομαγνητικών δεσμών σε πλάσμα σύντηξης, θεωρώντας απλοποιημένη γεωμετρία tokamak και πεπερασμένη περιοχή αλληλεπίδρασης κύματος-σωματιδίου. Οι αριθμητικοί υπολογισμοί έγιναν για παραμέτρους σχετικές με τις πειραματικές μηχανές σύντηξης AUG και ITER.

Τα αποτελέσματα συνοψίζονται ως εξής: Για παραμέτρους πλάσματος και κύματος σχετικές με τα σύγχρονα πειράματα, και εντός των ορίων ισχύος του μοντέλου μας, προκύπτει ότι η απορρόφηση του κύματος είναι μικρότερη απ' αυτή που προβλέπει η γραμμική θεωρία. Η απόκλιση γίνεται όλο και πιο μεγάλη όσο η διάδοση πλησιάζει τη διεύθυνση κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Η επίδραση του κύματος στην κατανομή ταχυτήτων των ηλεκτρονίων είναι μικρή, διότι ο χρόνος που διαρκεί η αλληλεπίδραση κύματος-σωματιδίου στις προσομοιώσεις μας είναι μικρός σε σχέση με τη χρονική κλίμακα μεταβολής της συνάρτησης κατανομής. Στην περίπτωση όπου διαθέτουμε μικροκυματικές πηγές υψηλής ισχύος (όπως π.χ. FEL), συνυπολογίζοντας την αύξηση της θερμοκρασίας που συμβαίνει στην περίπτωση αυτή, βρίσκουμε ότι η απόκλιση απ' τη γραμμική θεωρία είναι πιο έντονη, όπως και αναμενόταν [Cohen et al 1991, Allen et al 1994]. Στην περίπτωση αυτή η κατανομή διαφέρει πολύ απ' την κατανομή Maxwell, παρόλο που ο χρόνος αλληλεπίδρασης είναι πολύ μικρός. Η συχνότητα του κύματος έχει μια δυναμική συμπεριφορά μη γραμμικής φύσεως, μια μη γραμμική ταλάντωση γύρω απ' την αρχική της τιμή. Αυτό υποδηλώνει ότι η επίδραση των ηλεκτρονίων δεν περιορίζεται μόνο στην απορρόφηση αλλά υπεισέρχεται και στα χαρακτηριστικά της διάδοσης της δέσμης.

Μια συζήτηση γύρω απ' τους περιορισμούς του μοντέλου μας είναι επιβεβλημένη. Εν γένει, η προσομοίωση φυσικών συστημάτων μέσω κινούμενων σωματιδίων έχει πολύ υψηλές υπολογιστικές απαιτήσεις. Συνεπώς, το να γίνουν παραδοχές με σκοπό να οδηγηθούμε σε απλούστερα μοντέλα είναι μια αναγκαιότητα. Τέτοιου είδους θεωρήσεις, οι οποίες είναι και μέρος της αρθρογραφίας που παρατίθεται στο κεφάλαιο αυτό, κάνουν εφικτή στην πράξη την εξάρτηση των χαρακτηριστικών μεγεθών του κύματος και απ' τη θέση και απ' το χρόνο, ιδιαίτερα όταν η μελέτη δεν περιλαμβάνει αριθμητικές προσομοιώσεις. Απ' τη σκοπιά μας, επιλέξαμε να συμπεριλάβουμε στην περιγραφή όσο το δυνατόν περισσότερη από τη φυσική του προβλήματος και να απλοποιήσουμε τους αριθμητικούς υπολογισμούς υιοθετώντας μια τοπική περιγραφή της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος, με την έννοια ότι δε λαμβάνει υπόψη τη χωρική μεταβολή του κύματος και του πλάσματος. Στην περιγραφή μας, βλέπουμε τη συνολική περιοχή αλληλεπίδρασης σαν ένα σύνολο από λεπτές "λωρίδες", και μελετάμε τη φυσική του συστήματος σε μια τέτοια λωρίδα. Απ' αυτή την οπτική

γωνία, η χωρική εξάρτηση των παραμέτρων του πλάσματος μπορεί να αγνοηθεί. Αυτό απλοποιεί τους αριθμητικούς υπολογισμούς, παραβλέποντας όμως φαινόμενα λόγω της ανομοιογένειας του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου, όπως η χωρική μεταβολή του κυματανύσματος και της πυκνότητας ρεύματος στο πλάσμα, οι ολισθήσεις των ηλεκτρονίων λόγω μη μηδενικού ∇B κτλπ.

Στη στατιστική περιγραφή του πλάσματος μέσω των φορτισμένων σωματιδίων, δεν υιοθετήσαμε την πρακτική του να χρησιμοποιούμε σωματίδια που εισέρχονται (ή επανέρχονται) στην περιοχή της αλληλεπίδρασης κατά τη διάρκεια της προσομοίωσης, με σκοπό να μειώσουμε όσο το δυνατόν περισσότερο τον υπολογιστικό χρόνο. Όταν ένα σωματίδιο βγαίνει απ' την περιοχή αλληλεπίδρασης, η κίνησή του σταματάει να υπολογίζεται. Στην πραγματικότητα, ο τρόπος με τον οποίο επιλέγεται το δείγμα των σωματιδίων (το επονομαζόμενο "polling") είναι θέμα επιλογής, και τα αποτελέσματα από διαφορετικά δείγματα δεν πρέπει να εμφανίζουν σημαντικές αποκλίσεις (οι υπολογισμοί μας επιβεβαιώνουν ακριβώς αυτό). Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι η ύπαρξη σωματιδίων που εξέρχονται από την περιοχή της αλληλεπίδρασης κατά τη διάρκεια των υπολογισμών δεν επηρεάζει την ακρίβεια των αποτελεσμάτων, διότι ο αριθμός των χαμένων αυτών σωματιδίων είναι αναλογικά πολύ μικρός (maximum 5% του συνολικού δείγματος).

Η αριθμητική ευστάθεια των προσομοιώσεων εξαρτάται από τον αριθμό των ηλεκτρονίων που χρησιμοποιούνται για τη στατιστική περιγραφή του πλάσματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι οι όροι στο δεξί μέλος της Εξ. (4.8) είναι πολύ ευαίσθητοι στην επιλογή του αριθμού αυτού. Ειδικά σε περιπτώσεις όπου η συνεισφορά των όρων αυτών είναι σημαντική, όπως π.χ. όταν η πυκνότητα πλάσματος είναι πολύ μεγάλη, η αριθμητική διαδικασία τείνει να γίνει ασταθής επειδή οποιαδήποτε στατιστική διακύμανση στους υπολογισμούς των μέσων όρων που υπάρχουν στην Εξ. (4.8) είναι συγκρίσιμη με τις άγνωστες ποσότητες. Το μειονέκτημα αυτό μπορεί να αντιμετωπιστεί μόνο με σημαντική αύξηση του αριθμού των ηλεκτρονίων και περαιτέρω μείωση του χρονικού βήματος, οι οποίες κάνουν τον υπολογιστικό χρόνο πολύ μεγάλο. Όμως, το μοντέλο μπορεί και σε αυτή την περίπτωση να εφαρμοστεί, αν αναλογιστούμε την υπολογιστική δύναμη και τις μεθόδους παραλληλισμού κωδίκων που είναι διαθέσιμες σήμερα. Μια βελτιωμένη έκδοση του μοντέλου μας, η οποία θα μπορεί να αντιμετωπίζει θέματα όπως π.χ. τη μείωση της ισχύος των μη γραμμικών φαινομένων όσο αυξάνει η πυκνότητα πλάσματος (βλ. [Kamendje 2001]), είναι στόχος μελλοντικής μας δουλειάς.

5. ΥΒΡΙΔΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΛΗΡΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΠΛΑΣΜΑ-ΚΥΜΑ

Στα προηγούμενα κεφάλαια αντιμετωπίσαμε το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης κύματος-πλάσματος από όλες τις οπτικές γωνίες: Στο Κεφ. 2 μελετήθηκε η επίδραση του κύματος στο πλάσμα, στο Κεφ. 3 υπολογίστηκε η επίδραση του πλάσματος στο κύμα, ενώ στο Κεφ. 4 το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε αυτοσυνεπώς. Το πρώτο συμπέρασμα είναι ότι τα μοντέλα που παρουσιάσαμε ως τώρα παρέχουν ικανοποιητική περιγραφή σε αρκετές περιπτώσεις. Μάλιστα, δεν είναι λίγες οι περιπτώσεις, ειδικά στο αστροφυσικό πλάσμα, όπου η περιγραφή είναι ουσιαστικά πλήρης και τα αποτελέσματα συμφωνούν με δεδομένα από παρατηρήσεις ή πειράματα. Εν γένει όμως υπάρχουν δύο κύρια προβλήματα: (α) Όσες απ' τις μεθόδους έχουν μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις (π.χ. γραμμική θεωρία) έχουν ταυτόχρονα και περιορισμένα όρια ισχύος, εκτός των οποίων βρίσκονται αρκετές σημαντικές περιπτώσεις, (β) Ο αυτοσυνεπής υπολογισμός για περιοχές με μεγάλες διαστάσεις έχει πολύ υψηλό υπολογιστικό κόστος, ειδικά σε ρεαλιστικές γεωμετρίες όπως π.χ. του tokamak.

Η πολυπλοκότητα των ζητημάτων που είναι σήμερα στο επίκεντρο της έρευνας στη θερμοπυρηνική σύντηξη απαιτεί τη χρήση ρεαλιστικών προσομοιώσεων. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με πλάσμα, αυτό προϋποθέτει μια αυτοσυνεπή περιγραφή με τις λιγότερες δυνατές προσεγγίσεις. Χρησιμοποιούμε τον όρο "δυνατές" διότι η διαθέσιμη υπολογιστική ισχύς, ακόμα και στη σημερινή εποχή, δεν είναι αρκετή για να επιλυθεί το πλήρες πρόβλημα χωρίς να γίνουν σημαντικές απλοποιήσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, το όλο πρόβλημα συνίσταται στη δημιουργία ενός υβριδικού μοντέλου, δηλ. ενός μοντέλου που θα προκύπτει από τη σύζευξη μιας μεθόδου για τον υπολογισμό της διάδοσης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος και μιας μεθόδου για τον καθορισμό της εξέλιξης του πλάσματος. Το μοντέλο αυτό θα πρέπει να είναι κατάλληλα σχεδιασμένο ώστε να προσομοιώνει τις περισσότερες δυνατές φυσικές αρχές που επιτρέπουν οι δυνατότητες των σημερινών υπολογιστών.

Σε αυτό το μέρος της διατριβής θα ασχοληθούμε με την κατασκευή ενός τέτοιου μοντέλου. Όσον αφορά την εξέλιξη του πλάσματος, η πληρέστερη αντιμετώπιση είναι να λυθεί αριθμητικά η κινητική εξίσωση (βλ. Υποεν. 1.2.3) και όλες οι ποσότητες να υπολογίζονται με βάση τη συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων. Μια εναλλακτική, την οποία χρησιμοποιήσαμε στα Κεφ. 2 και 4, είναι ο υπολογισμός των τροχιών ενός μεγάλου πληθυσμού φορτισμένων σωματιδίων. Η μέθοδος αυτή δίνει αποτελέσματα αντίστοιχης ακρίβειας χωρίς να είναι πολύ πιο χρονοβόρα, με βασική προϋπόθεση (α) οι συγκρούσεις να είναι αμελητέες, (β) τα στατιστικά δείγματα να είναι κατάλληλα επιλεγμένα, (γ) οι εξισώσεις κίνησης να λαμβάνονται στην

πλήρη μη γραμμική τους μορφή (χωρίς απλοποιήσεις σαν π.χ. αυτές που υιοθέτησε ο Kamendje [Kamendje 2001]). Σχετικά με την κυματική διάδοση, στο Κεφ. 3 το πρόβλημα αντιμετωπίστηκε στο πλαίσιο της ασυμπτωτικής μεθόδου εντοπισμού δέσμης. Εδώ θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των Πεπερασμένων Διαφορών στο Πεδίο του Χρόνου (Finite Difference Time Domain (FDTD)), η οποία συνίσταται στη διακριτοποίηση και αριθμητική επίλυση των εξισώσεων Maxwell. Η FDTD είναι μια "πλήρης κυματική" (full-wave) μέθοδος, δηλ. λύνει τις εξισώσεις που διέπουν την εξέλιξη του κύματος χωρίς κανενός είδους προσέγγιση στη φυσική.

Τα περιεχόμενα του κεφαλαίου έχουν ως εξής: Στην Ενότ. 5.1 συνοψίζεται τι έχει γίνει σχετικά με την επίλυση του προβλήματος της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος. Στην Ενότ. 5.2 κάνουμε μια σύντομη επισκόπηση της μεθόδου FDTD με βάση τη διατύπωση Yee, ενώ στην 5.3 παρουσιάζεται ο αλγόριθμος σκεδάζομενου πεδίου για ανισοτροπικό πλάσμα. Στην Ενότ. 5.4 η μέθοδος εφαρμόζεται στη μελέτη της διάδοσης υψίσυχνου κυκλοτρονικού κύματος κάθετα στο μαγνητικό πεδίο σε απλοποιημένη γεωμετρία tokamak. Τέλος, στην Ενότ. 5.5 παρουσιάζονται τα κύρια συμπεράσματα και συζητώνται οι προοπτικές για τη δημιουργία του πληρέστερου δυνατού υβριδικού μοντέλου.

5.1 Αλληλεπίδραση πλάσματος-κύματος: Μια σύνοψη

Σ' αυτή την ενότητα, για λόγους πληρότητας, θα κάνουμε μια μικρή σύνοψη όσων έχουμε αναφέρει στα προηγούμενα κεφάλαια περί του προβλήματος της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος. Η περιγραφή του προβλήματος, της υπάρχουσας αρθρογραφίας και των κυριότερων ζητημάτων που παραμένουν ανοικτά έχει γίνει αναλυτικά στα προηγούμενα κεφάλαια. Εδώ απλώς θα πραγματοποιήσουμε μια σύντομη αναφορά στα πλαίσια της σύνοψης και θα προσθέσουμε κάποια στοιχεία, με επίκεντρο το πρόβλημα της διάδοσης και απορρόφησης υψίσυχνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας σε πλάσμα μέσα σε θερμοπυρηνικούς αντιδραστήρες.

Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα με συχνότητα κοντά στην κυκλοτρονική συχνότητα των ηλεκτρονίων χρησιμοποιούνται ευρύτατα για τη θέρμανση του πλάσματος και την οδήγηση ρευμάτων στις σημερινές πειραματικές συσκευές σύντηξης (tokamaks, stellarators), με πληθώρα εξειδικευμένων εφαρμογών (π.χ. έλεγχος ασταθειών, δημιουργία ITB). Η ακτινοβολία εκπέμπεται υπό τη μορφή χωρικά εντοπισμένων δεσμών, οι οποίες αλληλεπιδρούν με το πλάσμα όταν ισχύει η συνθήκη συντονισμού (4.1). Η θεωρητική αντιμετώπιση του προβλήματος χωρίζεται στη μελέτη της κυματικής διάδοσης και απορρόφησης στο πλάσμα (επίδραση πλάσματος στο κύμα) και της εξέλιξης της κατανομής των ηλεκτρονίων παρουσία του κύματος (επίδραση κύματος στο πλάσμα). Στις περισσότερες εφαρμογές κάθε μέρος του προβλήματος αντιμετωπίζεται ξεχωριστά, ενώ ο ταυτόχρονος υπολογισμός όλων των φαινομένων είναι η επανομαζόμενη "αυτοσυνεπής περιγραφή".

Η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα περιγράφεται από τις εξισώσεις Maxwell, ή ισοδύναμα απ' την κυματική εξίσωση. Όταν το μήκος κύματος είναι πολύ μικρότερο απ' τη χαρακτηριστική κλίμακα ανομοιογένειας του πλάσματος, η επίλυση γίνεται στο πεδίο των συχνοτήτων με τις ασυμπτωτικές μεθόδους (εντοπι-

σμός ακτίνας, μέθοδος μιγαδικής φάσης, εντοπισμός δέσμης). Όπως αναλύσαμε στο Κεφ. 3, στις περισσότερες εφαρμογές το πλάσμα θεωρείται ψυχρό και η διηλεκτρική απόκριση προκύπτει απ' τη γραμμική θεωρία. Όσον αφορά τη διάδοση, οι κυματικές τροχιές υπολογίζονται με βάση τη σχέση διασποράς Appleton-Hartree [Stix 1992], με το επιχείρημα ότι στη μηδενικής τάξης προσέγγιση (δηλ. χωρίς θερμικά φαινόμενα) οι τροχιές είναι ακριβώς οι λύσεις αυτής της σχέσης διασποράς, ακόμη και πολύ κοντά στο συντονισμό. Όμως, σε περιπτώσεις που συναντώνται συχνά στις εφαρμογές, όπως π.χ. η διάδοση των ρυθμών O1 και X2 κάθετα στο μαγνητικό πεδίο (βλ. Υποεν. 1.3.2), οι συνεισφορές των υψηλότερων τάξεων γίνονται σημαντικές και το μοντέλο του ψυχρού πλάσματος δε μπορεί να περιγράψει σωστά τη διάδοση. Επιπρόσθετα, σε άλλα προβλήματα όπως π.χ. δέσμες με ισχυρή εστίαση ή μετατροπή πόλωσης Ordinary-eXtraordinary-Bernstein (O-X-B), οι βασικές παραδοχές των ασυμπτωτικών μεθόδων καταρρίπτονται και η λύση τίθεται υπό αμφισβήτηση.

Έχουμε αναφέρει ήδη ότι υπάρχει πληθώρα αριθμητικών κωδίκων (και κατασκευάζονται συνεχώς νέοι) που βασίζονται στις ασυμπτωτικές μεθόδους και υλοποιούν την προσέγγιση του ψυχρού πλάσματος για τη διάδοση και τη γραμμική θεωρία για την απορρόφηση (ενδεικτικά βλ. [Westerhof 1989, Poli et al 2001a]). Σε σύγκριση των αποτελεσμάτων με πειραματικά δεδομένα από διαφορετικά tokamak, άλλα αποτελέσματα είναι σε συμφωνία (βλ. [Erckmann and Gasparino 1994, Prater 2004]) και αλλά σε διαφωνία [Segui et al 1995, Laqua and Erckmann 2004]. Εκτός από τα μη γραμμικά φαινόμενα, υπάρχουν τόσο πειραματικές όσο και θεωρητικές ενδείξεις για τη σημαντικότητα των κινητικών φαινομένων στη διάδοση κοντά στο συντονισμό [Segui et al 1995, Westerhof 1997]. Ειδικά στην [Westerhof 1997], ο Westerhof έδειξε ότι η κατεύθυνση της διάδοσης των ακτίνων διαφέρει σημαντικά όταν συμπεριλαμβάνονται στην περιγραφή τα κινητικά φαινόμενα. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η επίδραση στην εξέλιξη του διανύσματος πόλωσης είναι σημαντική, ειδικά κοντά στο συντονισμό (άρα και στην απορρόφηση του κύματος).

Το πρόβλημα της κυματικής διάδοσης στο πλάσμα έχει αντιμετωπιστεί ως επί το πλείστον στο πεδίο των συχνοτήτων επειδή, στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας, είναι δυνατό να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις για τη διηλεκτρική απόκριση του πλάσματος [Stix 1992, Brambilla 1998, Swanson 2003]. Στο κεφάλαιο αυτό θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα με τη μέθοδο FDTD. Τα κυριότερα πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής είναι τα ακόλουθα: (α) Δίνει τη δυνατότητα του απευθείας υπολογισμού των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων εντός του μέσου, (β) Μέσω της διηλεκτρικής σταθεράς επιτρέπει τον πλήρη καθορισμό της απόκρισης του μέσου σε όλα τα σημεία του αριθμητικού πλέγματος, (γ) Χρησιμοποιώντας κατάλληλες συνοριακές συνθήκες είναι δυνατό να προσομοιωθεί η διάδοση και πέρα απ' τα όρια του υπολογιστικού χώρου. Από την άλλη, υπάρχουν δύο κύριες δυσκολίες που πρέπει να αντιμετωπιστούν: (α) Η FDTD είναι διατυπωμένη στο πεδίο του χρόνου, οπότε είναι απαραίτητη η χρήση μετασχηματισμών Fourier για να αξιοποιήσουμε τις ήδη γνωστές εκφράσεις απ' το πεδίο συχνοτήτων, (β) Η FDTD απαιτεί όλος ο υπολογιστικός χώρος να διαιρεθεί σε κελιά με διαστάσεις μικρότερες απ' το μήκος κύματος, οπότε σε κάποιες περιπτώσεις (π.χ. υψηλή συχνότητα) ενδέχεται οι αριθμητικές απαιτήσεις να είναι υπερβολικά μεγάλες.

Θα μελετηθεί η διάδοση του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο πλάσμα σε απλοποιημένη, επίπεδη γεωμετρία, υπολογίζοντας την απόκριση του πλάσματος μέσω του διηλεκτρικού τανυστή που προκύπτει απ' τη γραμμική θεωρία. Το μοντέλο αυτό βέβαια δεν είναι το πληρέστερο δυνατό, καθώς δεν είναι αυτοσυνεπές και δε συμπεριλαμβάνει την επίδραση των μη γραμμικών φαινομένων. Έχοντας όμως σαν χαρακτηριστικό τη βέλτιστη περιγραφή της εξέλιξης των πεδίων (μέσω της πλήρους κυματικής μεθόδου FDTD), αποτελεί το πρώτο βήμα για τη δημιουργία ενός υβριδικού μοντέλου για τη μελέτη του συστήματος πλάσμα-κύμα. Είπαμε πριν ότι, εν γένει, καθώς η FDTD είναι στο πεδίο του χρόνου, για να χρησιμοποιήσουμε τις εκφράσεις απ' το πεδίο συχνοτήτων πρέπει να εφαρμόσουμε μετασχηματισμό Fourier. Όμως, στην περίπτωση που θα μελετήσουμε, όπου κύμα σταθερής συχνότητας διαδίδεται σε στατικό πλάσμα, η μέθοδος είναι δυνατό να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας απευθείας την έκφραση του διηλεκτρικού τανυστή στο χώρο των συχνοτήτων.

5.2 Γενικά χαρακτηριστικά της μεθόδου FDTD

Η μέθοδος FDTD είναι ένας ιδιαίτερα εύελικτος τρόπος για να διακριτοποιηθεί η διαφορική μορφή των εξισώσεων Maxwell. Παρόλο που υπάρχει απ' το 1966, η χρήση της εξαπλώθηκε ραγδαία στα μέσα της δεκαετίας του '90, με την εμφάνιση των εξελιγμένων ηλεκτρονικών υπολογιστών, και γίνεται όλο και μεγαλύτερη όσο οι δυνατότητες των υπολογιστών συνεχίζουν να αυξάνονται. Στην ενότητα αυτή θα κάνουμε μια σύντομη επισκόπηση της μεθόδου, χωρίς λεπτομερείς υπολογισμούς, εστιάζοντας (α) στη διακριτοποιημένη μορφή των εξισώσεων Maxwell με βάση τη θεωρία Yee, (β) στις ακτινοβολούσες και απορροφούσες συνοριακές συνθήκες, (γ) στην αριθμητική ευστάθεια και ακρίβεια της μεθόδου. Για περισσότερες λεπτομέρειες επί της μαθηματικής βάσης της μεθόδου και του ευρέος φάσματος των εφαρμογών, ο αναγνώστης παραπέμπεται στα βιβλία [Kunz and Luebbers 1992, Taflov 1995].

Η βάση της αριθμητικής μεθόδου FDTD είναι η επίλυση των Εξ. (1.35γ), (1.35δ), με τις Εξ. (1.35α), (1.35β) σαν περιορισμούς. Στη συνέχεια του κεφαλαίου, θα αναφέρουμε τις (1.35γ), (1.35δ) σαν εξισώσεις στροβιλισμού (curl equations) και τις (1.35α), (1.35β) σαν εξισώσεις απόκλισης (divergence equations). Όπως είδαμε στην Ενότητα 1.3, αυτό που απαιτείται για την επίλυση των εξισώσεων Maxwell είναι να συσχετιστούν τα $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, ρ , $\mathbf{j}$ με τα $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$. Στην περίπτωση ενός μέσου που είναι στατικό, μη διανέμον, γραμμικό, ισότροπο και δεν περιέχει πηγές φορτίων, οι δομικές σχέσεις είναι της μορφής

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (5.1\alpha)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5.1\beta)$$

$$\rho = 0, \quad (5.1\gamma)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5.1\delta)$$

Εδώ ε είναι η διηλεκτρική σταθερά, μ είναι η μαγνητική διαπερατότητα και σ είναι ο συντελεστής αγωγιμότητας του μέσου. Μετά από την αντικατάσταση των Εξ. (5.1), οι εξισώσεις (1.35γ), (1.35δ) γίνονται

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}, \quad (5.2\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}, \quad (5.2\beta)$$

και αν τις αναλύσουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right), \quad (5.3\alpha)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \quad (5.3\beta)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right), \quad (5.3\gamma)$$

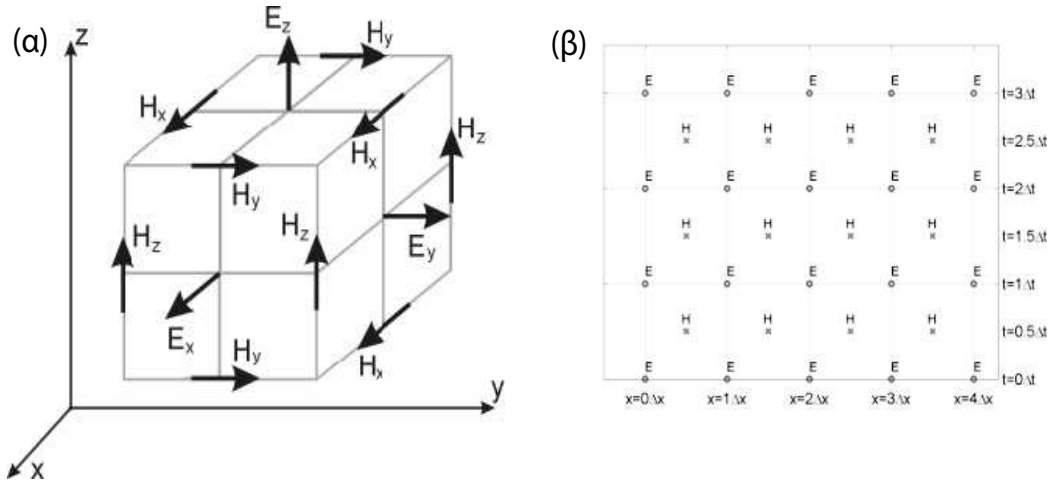
$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right), \quad (5.3\delta)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right), \quad (5.3\epsilon)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right). \quad (5.3\sigma\tau)$$

5.2.1 Αλγόριθμος Yee

Στο πλαίσιο της προσέγγισης των πεπερασμένων διαφορών, το βασικό βήμα για την επίλυση των Εξ. (5.3) είναι η διαμόρφωση του χωρικού και του χρονικού πλέγματος πάνω στο οποίο θα εξελιχθούν αριθμητικά οι διακριτοποιημένες εξισώσεις. Το 1966, ο Yee παρουσίασε ένα σχήμα πεπερασμένων διαφορών για τις εξισώσεις στροβιλισμού στην περίπτωση $\sigma = 0$ [Yee 1966]. Ο Yee, χρησιμοποιώντας ένα πλέγμα για το ηλεκτρικό πεδίο χωρικά και χρονικά μετατοπισμένο από ένα αντίστοιχο πλέγμα για το μαγνητικό πεδίο, κατέληξε σε εξισώσεις που συνδέουν τις παρούσες τιμές των πεδίων με τις παρελθούσες τιμές τους σε όλο τον υπολογιστικό χώρο. Όπως δείχνουμε στο Σχ. 5.1(α), στον 3-διάστατο χώρο η τοποθέτηση του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου είναι τέτοια ώστε κάθε συνιστώσα του $\mathbf{E}$ να περιβάλλεται από τέσσερις συνιστώσες του $\mathbf{H}$ και αντίστροφα. Με αυτή την επιλογή, δημιουργούνται βρόχοι όπου ισχύουν οι νόμοι των Faraday και Ampère (εξισώσεις στροβιλισμού), ενώ και οι εξισώσεις απόκλισης ισχύουν εκ ταυτότητος. Στο χρόνο, ο αλγόριθμος του Yee λειτουργεί όπως ένα σχήμα διαδοχικού συμβηματισμού (leapfrog scheme),



Σχήμα 5.1: (α) Το κελί του Yee στον 3-διάστατο χώρο, με κατάλληλα τοποθετημένα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, (β) Χάρτης που υποδεικνύει την εξέλιξη του σχήματος leapfrog στον 1-διάστατο χώρο και το χρόνο.

σύμφωνα με το οποίο το πεδίο $\mathbf{E}$ υπολογίζεται σε μια χρονική στιγμή με βάση τιμές του $\mathbf{H}$ από την προηγούμενη χρονική στιγμή, και αντίστροφα για το $\mathbf{H}$. Ένα παράδειγμα στον 1-διάστατο χώρο δίνεται στο Σχ. 5.1(β).

Ο Yee εισήγαγε ένα σύνολο από συμβολισμούς για να εκφράσει τις συναρτήσεις της θέσης και του χρόνου και τις μερικές παραγώγους τους πάνω στο υπολογιστικό πλέγμα. Σε ένα 3-διάστατο ορθογώνιο πλέγμα, ένα σημείο στο χώρο συμβολίζεται σαν $(x, y, z) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z)^1$, όπου Δx , Δy , Δz είναι οι διαστάσεις του πλέγματος (ή αλλιώς τα χωρικά βήματα) ανά διεύθυνση. Για προβλήματα σε μία ή δύο διαστάσεις, τα αντίστοιχα (μειωμένης διαστατικότητας) πλέγματα σχηματίζονται θέτοντας το $1/\Delta y$ και/ή το $1/\Delta z$ ίσα με μηδέν. Κάθε συνάρτηση $g(\mathbf{r}, t)$ σε ένα σημείο $\mathbf{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ τη χρονική στιγμή $t = n\Delta t$ (Δt είναι το χρονικό βήμα) εκφράζεται με τον ακόλουθο τρόπο

$$g(\mathbf{r}, t) = g(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = g|_{i,j,k}^n.$$

Για τις χωρικές και χρονικές παραγώγους χρησιμοποιούνται εκφράσεις κεντρικών πεπερασμένων διαφορών, με κέντρο γύρω απ' το συγκεκριμένο πλεγματοειδές σημείο και με βάση τιμές που απέχουν μισό βήμα τόσο στο χώρο όσο και στο χρόνο. Για παράδειγμα, η μερική παράγωγος της g ως προς x τη χρονική στιγμή $n\Delta t$ γράφεται

$$\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{i,j,k}^n = \frac{g|_{i+1/2,j,k}^n - g|_{i-1/2,j,k}^n}{\Delta x} + \mathcal{O}[(\Delta x)^2],$$

όπου με $\mathcal{O}[(\Delta x)^2]$ συμβολίζουμε τους όρους ανώτερης τάξης. Η προσαύξηση $\pm 1/2$ στο δείκτη i υποδηλώνει απόσταση $\pm \Delta x/2$ στο χώρο. Παρόμοια, οι παράγωγοι

¹ Υπενθυμίζουμε ότι, όπως και στο Κεφ. 2, δεν πρέπει να συγχέονται τα σύμβολα που αντιστοιχούν σε δείκτες με τα σύμβολα που αντιστοιχούν σε μεγέθη (εδώ π.χ. ο δείκτης k , που αναφέρεται στη διεύθυνση z , με το κυματόνυσμα $\mathbf{k}$).

στις άλλες διευθύνσεις y, z υπολογίζονται μεταβάλλοντας κάθε φορά τον κατάλληλο δείκτη, ενώ η μερική παράγωγος ως προς το χρόνο στο σημείο (x, y, z) είναι

$$\left. \frac{\partial g}{\partial t} \right|_{i,j,k}^n = \frac{g|_{i,j,k}^{n+1/2} - g|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} + \mathcal{O}[(\Delta t)^2],$$

με την προσαύξηση στο δείκτη n να υποδηλώνει μια χρονική απόσταση $\pm \Delta t/2$. Να σημειώσουμε ότι οι παραπάνω εκφράσεις έχουν ακρίβεια 2^{ns} τάξης ως προς όλες τις πλεγματικές διαστάσεις $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ και το χρονικό βήμα Δt .

Είμαστε πλέον σε θέση να υπολογίσουμε τη διακριτοποιημένη μορφή των Εξ. (5.3). Αντικαθιστώντας τις διακριτές εκφράσεις των μερικών παραγώγων των πεδίων στο πλεγματικό σημείο (i, j, k) στο βήμα n , έχουμε π.χ. για την Εξ. (5.3α)

$$\begin{aligned} \frac{H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} - H_x|_{i,j,k}^{n-1/2}}{\Delta t} &= \frac{1}{\mu|_{i,j,k}} \left(\frac{E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n}{\Delta z} \right. \\ &\quad \left. - \frac{E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n}{\Delta y} \right), \end{aligned}$$

και λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς τον όρο $H_x|_{i,j,k}^{n+1/2}$ προκύπτει μια σχέση για τη χρονική εξέλιξη του πεδίου H_x

$$\begin{aligned} H_x|_{i,j,k}^{n+1/2} &= H_x|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu|_{i,j,k}\Delta z} (E_y|_{i,j,k+1/2}^n - E_y|_{i,j,k-1/2}^n) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\mu|_{i,j,k}\Delta y} (E_z|_{i,j+1/2,k}^n - E_z|_{i,j-1/2,k}^n). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε από τις Εξ. (5.3β), (5.3γ) να βρούμε αντίστοιχες εξισώσεις για τη χρονική εξέλιξη των πεδίων $H_y|_{i,j,k}^{n+1/2}, H_z|_{i,j,k}^{n+1/2}$. Η μέθοδος εργασίας είναι παρόμοια και για τη διακριτοποίηση των Εξ. (5.3δ)-(5.3στ) για τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου. Ενδεικτικά, για την Εξ. (5.3δ) ξεκινάμε απ' την

$$\begin{aligned} \frac{E_x|_{i,j,k}^{n+1} - E_x|_{i,j,k}^n}{\Delta t} &= \frac{1}{\varepsilon|_{i,j,k}} \left(\frac{H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2}}{\Delta y} \right. \\ &\quad \left. - \frac{H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2}}{\Delta z} - \sigma|_{i,j,k} E_x|_{i,j,k}^{n+1/2} \right). \end{aligned}$$

Όλες οι τιμές των πεδίων στο δεξί μέλος υπολογίζονται στο χρονικό βήμα $n + 1/2$, συμπεριλαμβανομένης και της τιμής $E_x|_{i,j,k}^{n+1/2}$ του όρου $\sigma \mathbf{E}$. Όμως, σύμφωνα με το σχήμα του Yee, το E_x στο βήμα $n + 1/2$ δεν είναι μια τιμή που έχει υπολογιστεί. Αυτό συμβαίνει μόνο για τις προηγούμενες και τις επόμενες τιμές του E_x , δηλ. στα βήματα n και $n + 1$. Συνεπώς, χρειάζεται να κάνουμε μια εκτίμηση/προσέγγιση για τον όρο αυτό. Γι' αυτό το σκοπό χρησιμοποιούμε την έκφραση

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1/2} = \frac{E_x|_{i,j,k}^n + E_x|_{i,j,k}^{n+1}}{2}, \quad (5.5)$$

δηλ. υποθέτουμε απλά ότι το E_x στο βήμα $n + 1/2$ είναι ο αριθμητικός μέσος της αποθηκευμένης τιμής στο n και της τιμής που πρόκειται να υπολογιστεί στο $n + 1$. Με αντικατάσταση προκύπτει μια "βηματική" σχέση παρόμοια με την (5.4)

$$E_x|_{i,j,k}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}} E_x|_{i,j,k}^n + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon|_{i,j,k}\Delta y}}{1 + \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}} \left(H_z|_{i,j+1/2,k}^{n+1/2} - H_z|_{i,j-1/2,k}^{n+1/2} \right) - \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon|_{i,j,k}\Delta z}}{1 + \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}} \left(H_y|_{i,j,k+1/2}^{n+1/2} - H_y|_{i,j,k-1/2}^{n+1/2} \right). \quad (5.6)$$

Στις παραπάνω διακριτές εξισώσεις εξέλιξης των πεδίων, η τιμή μιας συνιστώσας σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή εξαρτάται μόνο απ' την προηγούμενη τιμή της στο σημείο αυτό και τις προηγούμενες τιμές των υπολοίπων πεδίων στα αμέσως γειτονικά σημεία. Στην περίπτωση που το μέσο είναι μεν στατικό αλλά ανομοιογενές, κατά την αριθμητική υλοποίηση του σχήματος των πεπερασμένων διαφορών επιβάλλεται, από υπολογιστικής πλευράς, να ορίσουμε και να αποθηκεύσουμε στη μνήμη τους συντελεστές κάθε πεδιακής συνιστώσας προτού αρχίσει ο χρονικός βηματισμός, καθώς αυτοί οι συντελεστές δεν αλλάζουν με το χρόνο. Για την περίπτωση που μελετήσαμε παραπάνω, υποθέτοντας ακόμη χάριν απλότητας ότι το πλέγμα Yee είναι κυβικό ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta r$), οι συντελεστές εξέλιξης ανά πεδίο είναι οι ίδιοι για όλες τις συνιστώσες

$$\begin{aligned} C^H|_{i,j,k} &= \frac{\Delta t}{\mu|_{i,j,k}\Delta r}, \\ C_1^E|_{i,j,k} &= \frac{1 - \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}}{1 + \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}}, \\ C_2^E|_{i,j,k} &= \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon|_{i,j,k}\Delta r}}{1 + \frac{\sigma|_{i,j,k}\Delta t}{2\varepsilon|_{i,j,k}}}. \end{aligned}$$

Ο αλγόριθμος που παρουσιάσαμε παραπάνω ονομάζεται "αλγόριθμος συνολικού πεδίου" (total-field algorithm). Εναλλακτικά, υπάρχει και ο αλγόριθμος σκεδαζόμενου πεδίου (scattered-field algorithm), όπου το συνολικό πεδίο θεωρείται ως η επαλληλία ενός προσπίπτοντος (incident) και ενός σκεδαζόμενου (scattered) πεδίου, δηλ. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_s$. Το προσπίπτον πεδίο ορίζεται ως το πεδίο που θα υπήρχε απουσία του μέσου, και θεωρείται ότι διαδίδεται πάντα στον ελεύθερο χώρο (κενό), ενώ το σκεδαζόμενο πεδίο δημιουργείται απ' το μέσο σαν απόκριση στο προσπίπτον πεδίο. Η λογική βάση για την προσέγγιση με χρήση δύο τύπων πεδίου (προσπίπτον και σκεδαζόμενο) είναι ότι το προσπίπτον πεδίο μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά παντού στον υπολογιστικό χώρο, οπότε μόνο για το σκεδαζόμενο πεδίο, το οποίο υπολογίζεται αριθμητικά, είναι αναγκαίο να ορίσουμε συνοριακές συνθήκες. Όμως, και από μια γενικότερη οπτική γωνία, ο διαχωρισμός αυτός επιτρέπει την περαιτέρω

ανάλυση της αλληλεπίδρασης του κύματος με το μέσο. Σε μέσο που είναι γραμμικό, το προσπίπτον πεδίο υπακούει τις Εξ. (5.2) με $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$ (δηλ. τις εξισώσεις Maxwell στο κενό), και το σκεδαζόμενο πεδίο τις

$$\frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E}_s - \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu}\right) \frac{\partial \mathbf{H}_i}{\partial t}, \quad (5.7\alpha)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}_s - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}_s - \frac{\sigma}{\varepsilon} \mathbf{E}_i - \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right) \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t}, \quad (5.7\beta)$$

Οι Εξ. (5.7) προκύπτουν αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τη μορφή που παίρνουν οι Εξ. (5.2) στο κενό (αναφέρονται στο προσπίπτον κύμα) από τη μορφή τους για το συνολικό πεδίο εντός του μέσου.

5.2.2 Συνοριακές συνθήκες-Ευστάθεια-Ακρίβεια

Για να ολοκληρωθεί η λύση των Εξ. (5.7) πρέπει να καθοριστούν οι συνοριακές συνθήκες. Αυτό είναι αναγκαίο διότι κάποια απ' τα σημεία που είναι απαραίτητα για τον υπολογισμό των πεδίων πάνω στο συνοριακό επίπεδο βρίσκονται εκτός του υπολογιστικού χώρου, και σαν συνέπεια ο αλγόριθμος Yee δίνει εσφαλμένα αποτελέσματα². Οι συνοριακές συνθήκες είναι ουσιαστικά οι τιμές του ηλεκτρικού πεδίου επάνω στα επίπεδα που περικλείουν τον υπολογιστικό χώρο. Αν το φυσικό πρόβλημα περιλαμβάνει συνθήκες που είναι δυνατό να γραφούν σε διακριτή μορφή, τότε αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν σαν συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, στη διάδοση κατά μήκος ενός 1-διάστατου κυματοδηγού με αγωγίμα τοιχώματα, η συνθήκη μηδενισμού του ηλεκτρικού πεδίου πάνω στα τοιχώματα είναι, από πλευράς φυσικής, η κατάλληλη επιλογή. Για να μελετήσουμε προβλήματα όπου χρειάζεται να προσομοιωθεί η διάδοση και πέρα απ' τον υπολογιστικό χώρο, απαιτείται ένας ειδικός τύπος συνοριακών συνθηκών που στις εξισώσεις του θα έχει ενσωματωμένη τη φυσική της διάδοσης του κύματος.

Αυτές οι ειδικές συνοριακές συνθήκες είναι δύο τύπων: (α) Ακτινοβολούσες συνοριακές συνθήκες (Outer Radiating Boundary Conditions (ORBC)), που προκύπτουν με παραγοντοποίηση της διακριτοποιημένης κυματικής εξίσωσης και θεωρώντας μόνο λύσεις που αντιστοιχούν σε διάδοση με φορά προς τα έξω, (β) Απορροφούσες συνοριακές συνθήκες (Absorbing Boundary Conditions (ABC)), όπου ο υπολογιστικός χώρος περιβάλλεται με ένα τεχνητό/υποθετικό διηλεκτρικό υλικό που απορροφά τα εξερχόμενα κύματα. Στη σχετική αρθρογραφία υπάρχουν πολλές διαφορετικές υλοποιήσεις των συνθηκών ORBC, ABC, με τις πιο δημοφιλείς να είναι αντίστοιχα από τον Mur [Mur 1981] και τον Berenger [Berenger 1994] (βλ. [Kunz and Luebbers 1992, Taflov 1995] για περισσότερες λεπτομέρειες). Οι συνθήκες τύπου ABC παρέχουν εν γένει μεγαλύτερη ακρίβεια, όμως σε εφαρμογές όπου δεν εμπλέκονται γεωμετρίες με λεπτομέρειες προτιμώνται οι συνθήκες ORBC διότι η υλοποίησή τους είναι απλούστερη.

² Συγκεκριμένα, στην περίπτωση όπου δεν καθοριστούν συνοριακές συνθήκες, ο αλγόριθμος Yee δίνει σαν αποτέλεσμα μια μη φυσική ανάκλαση του εξερχόμενου κύματος (βλ. [Taflov 1995]).

Σαν παράδειγμα, παρουσιάζουμε τον τρόπο υπολογισμού των συνθηκών Mur στην περίπτωση 1-διάστατης διάδοσης (κατά μήκος του x) στο κενό. Η κυματική εξίσωση για κάθε πεδιακή συνιστώσα (εδώ αναφερόμαστε την E_z) γράφεται ως

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0. \quad (5.8)$$

Υποθέτοντας ότι ο υπολογιστικός χώρος εκτείνεται προς την κατεύθυνση $x > 0$, στο σημείο $x = 0$ υπάρχει ένα σύνορο όπου πρέπει να εφαρμοστεί μια συνθήκη τύπου ORBC. Το σχεδιαζόμενο κύμα μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά από ένα επίπεδο κύμα στην κατεύθυνση $-x$, δηλ. μια συνάρτηση του $t + x/c$. Στο $x = 0$ το κύμα αυτό ικανοποιεί, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με αντικατάσταση στην Εξ. (5.8), την ακόλουθη συνοριακή συνθήκη

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) \Big|_0^{n+1/2} = 0, \quad (5.9)$$

η οποία διακριτοποιείται ως εξής

$$E_z|_0^{n+1} = E_z|_0^n + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (E_z|_1^{n+1} - E_z|_0^n). \quad (5.10)$$

Η παραπάνω συνθήκη υπολογίζει την τιμή της E_z επάνω στο σύνορο σε κάθε χρονική στιγμή με βάση τιμές που είναι πίσω ένα βήμα στο χρόνο και ένα κελί στο χώρο. Γι' αυτό το λόγο, οι συνθήκες αυτού του τύπου αναφέρονται σαν ORBC 1^{ης} τάξης. Είναι δυνατό να αποκτηθούν προσεγγίσεις ανώτερης τάξης, οι οποίες παρέχουν ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια. Οι συνθήκες αυτές, οι οποίες βασίζονται σε τιμές ακόμη πιο πίσω στο χώρο και το χρόνο, μπορούν να υπολογιστούν με διαφόριση της Εξ. (5.9) ως προς τη θέση ή/και το χρόνο και διακριτοποίηση. Για παράδειγμα, η συνθήκη ORBC 2^{ης} τάξης έχει τη μορφή

$$E_z|_0^{n+1} = -E_z|_1^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (E_z|_1^{n+1} + E_z|_0^{n-1}) + \frac{2\Delta x}{c\Delta t + \Delta x} (E_z|_0^n + E_z|_1^n).$$

Οι συνθήκες Mur στα υπόλοιπα σύνορα του αριθμητικού πλέγματος και για τις άλλες πεδιακές συνιστώσες υπολογίζονται με αντίστοιχο τρόπο.

Σε αυτό το σημείο είναι απαραίτητο να αναφερθούν ορισμένα θέματα σχετικά με την ευστάθεια του αλγορίθμου FDTD, την ακρίβεια των υπολογισμών και τις συνοριακές συνθήκες. Πρώτα, η επιλογή των διαστάσεων των κελιών του υπολογιστικού χώρου είναι καθοριστική. Εν γένει, τα κελιά πρέπει να είναι αρκετά μικρά ώστε να εξασφαλίζεται η ακρίβεια της μεθόδου, αλλά ταυτόχρονα και αρκετά μεγάλα ώστε να είναι μικρότερο το υπολογιστικό κόστος. Ο ουσιαστικός περιορισμός συνοψίζεται στο θεώρημα Nyquist, σύμφωνα με το οποίο η διάσταση του κελιού πρέπει να είναι μικρότερη απ' την ελάχιστη τιμή που παίρνει το μήκος κύματος στο μέσο, ώστε ο ρυθμός με τον οποίο δειγματίζεται στο χώρο η φυσική πληροφορία να είναι επαρκής. Αφού επιλεγούν οι διαστάσεις των κελιών, το μέγιστο χρονικό βήμα για το οποίο ο αλγόριθμος είναι ευσταθής καθορίζεται απ' τη συνθήκη Courant

$$v_p \Delta t \leq [(\Delta x)^{-2} + (\Delta y)^{-2} + (\Delta z)^{-2}]^{-1/2}, \quad (5.11)$$

όπου v_p είναι η μέγιστη ταχύτητα φάσης στο μέσο. Η Εξ. (5.11) υποδεικνύει ότι οποιοδήποτε σημείο πάνω στο κύμα δεν είναι δυνατό να διανύσει παραπάνω από ένα κελί ανά χρονικό βήμα, διότι κατά τη διάρκεια ενός βήματος η FDTD επιτελεί τη διάδοση του κύματος από ένα κελί μέχρι τους πλησιέστερους γείτονες. Εν γένει, η χρήση βήματος μικρότερου απ' το μέγιστο της (5.11) δεν προσδίδει πολύ μεγαλύτερη ακρίβεια, εκτός από ειδικές περιπτώσεις.

Σε αρκετές περιπτώσεις όπου το κύμα δεν προσπίπτει κάθετα ή/και δεν έχει επίπεδο μέτωπο πάνω στα σύνορα του υπολογιστικού χώρου, οι ORBC ενδέχεται να μην απορροφήσουν πλήρως το κύμα. Η κλασική τακτική για να βελτιωθεί η απόδοση των συνθηκών Mur είναι να εισάγουμε μια λωρίδα κενού, πλάτους μερικών κελιών, ανάμεσα στο μέσο και στο σύνορο. Τα σχεδάζόμενα κύματα, όσο διαδίδονται στο κενό, τείνουν να μετατραπούν σε επίπεδα κύματα, οπότε φτάνοντας στο σύνορο έχουν αποκτήσει δομή που διευκολύνει την απορρόφηση απ' τις ORBC. Ο ιδανικός αριθμός κελιών εξαρτάται απ' τις ιδιότητες του μέσου (π.χ. αγωγιμότητα). Ένας γενικός τρόπος για να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα των διαφορετικών τύπων συνοριακών συνθηκών είναι να υπολογιστεί η τιμή του συντελεστή ανάκλασης πάνω στα σύνορα. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι η 2^η τάξης ORBC δίνει την καλύτερη ακρίβεια σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις. Παρόλα αυτά, υπάρχουν περιπτώσεις όπου η 1^η τάξης ORBC είναι η μόνη δυνατή επιλογή, όπως π.χ. για τον καθορισμό των πεδίων σε σημεία γειτονικά στις ακμές του υπολογιστικού χώρου, επειδή οι τιμές που εμπλέκονται στις συνθήκες 2^{ης} τάξης είναι εκτός του υπολογιστικού χώρου.

Έχοντας καθορίσει τις διαστάσεις των κελιών του αριθμητικού πλέγματος, το χρονικό βήμα και το είδος των συνοριακών συνθηκών, είναι δυνατό να γίνει μια πρώτη εκτίμηση της υπολογιστικής ισχύος που απαιτείται για την εκτέλεση της FDTD. Σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, σημαντικό ζήτημα είναι, δεδομένων των διαθέσιμων υπολογιστικών πόρων, το αν η μέθοδος είναι αποτελεσματική στο να παρέχει την επιθυμητή λύση. Για παράδειγμα, για την προσομοίωση της 3-διάστατης διάδοσης υψίσυχνου ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε ρεαλιστική γεωμετρία tokamak, οι ανάγκες σε δύναμη επεξεργαστή και μνήμη είναι εξαιρετικά μεγάλες αν π.χ. θέλουμε να παρακολουθήσουμε τη συνολική διαδρομή του κύματος στο πλάσμα.

5.3 Η μέθοδος FDTD για διάδοση σε μαγνητισμένο πλάσμα

Κατά την εφαρμογή της μεθόδου FDTD στην επίλυση της διάδοσης κυμάτων στο πλάσμα, το κύριο σημείο που πρέπει να δοθεί προσοχή είναι η προσομοίωση της απόκρισης του πλάσματος. Υπάρχουν δύο εναλλακτικές περιγραφές: (α) Η μακροσκοπική, η οποία συνίσταται στη χρήση του νόμου του Ohm με τον ταχυστή αγωγιμότητας να υπολογίζεται από την κινητική θεωρία, (β) Η μικροσκοπική, όπου υπολογίζεται απευθείας η πυκνότητα ρεύματος με βάση μέσες τιμές από τις τροχιές των φορτισμένων σωματιδίων. Η μακροσκοπική περιγραφή έχει το πλεονέκτημα ότι, στο πλαίσιο της γραμμικής προσέγγισης, είναι δυνατό η διηλεκτρική απόκριση του πλάσματος να προσδιοριστεί σε αναλυτική μορφή, κάτι που αφενός κάνει πιο εύκολη την εξαγωγή φυσικών συμπερασμάτων, αφετέρου δίνει τη δυνατότητα αύξησης της ταχύτητας των αριθμητικών υπολογισμών.

Ακολουθώντας τη μακροσκοπική οδό, η πρώτη διαπίστωση είναι πως το μαγνητισμένο πλάσμα σαν μέσο μπορεί να υποτεθεί στατικό ή/και γραμμικό, αλλά είναι σίγουρα ανισότροπο λόγω του μαγνητικού πεδίου. Όμως, η κλασική έκδοση του αλγορίθμου FDTD, όπως διατυπώθηκε από τον Yee, είναι προσανατολισμένη στη μελέτη ισοτροπικών μέσων και η ισχύς της μπορεί να επεκταθεί το πολύ ως τη μελέτη ανισοτροπικών μέσων με διαγώνιο διηλεκτρικό ταυστή, όπου οι εξισώσεις είναι παρόμοιες με αυτές του Yee. Συνεπώς, είναι απαραίτητο να γενικεύσουμε τη μεθοδολογία που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Μαθηματικά, αυτό σημαίνει την εισαγωγή ταυστικών μεγεθών, αντί για βαθμωτών, για την περιγραφή της απόκρισης του πλάσματος.

5.3.1 Αλγόριθμος σχεδάζομενου πεδίου για ανισότροπο πλάσμα

Ο αλγόριθμος συνολικού πεδίου για ανισότροπα μέσα παρουσιάστηκε για πρώτη φορά από τους Schneider και Hudson [Schneider and Hudson 1993]. Στο άρθρο αυτό, γίνεται επέκταση της FDTD ώστε να είναι δυνατή η επίλυση της διάδοσης στην περίπτωση που οι ταυστές έχουν μη μηδενικά μη διαγώνια στοιχεία, και καταδεικνύεται ότι αυτά τα μη διαγώνια στοιχεία προκαλούν σύζευξη στις χρονικές παραγώγους των εξισώσεων στροβιλισμού. Σε αυτή την περίπτωση, οι εξισώσεις FDTD διαφέρουν σημαντικά από αυτές του Yee. Σε αυτό το πνεύμα, παρουσιάζουμε εδώ για πρώτη φορά τον αλγόριθμο σχεδάζομενου πεδίου για το συγκεκριμένο πρόβλημα [Tsironis et al 2007].

Σε ανισότροπο πλάσμα που είναι γραμμικό, η διηλεκτρική μετατόπιση συνδέεται με το ηλεκτρικό πεδίο μέσω ενός διηλεκτρικού ταυστή και η πυκνότητα ρεύματος μέσω ενός ταυστή αγωγιμότητας (βλ. Εξ. (1.36)). Συνδυάζοντας τις Εξ. (1.35) και (1.36) προκύπτουν οι εξισώσεις στροβιλισμού για το συνολικό πεδίο, απ' τις οποίες, με τον τρόπο που περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, προκύπτουν εύκολα οι αντίστοιχες εξισώσεις για το σχεδάζομενο πεδίο

$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}_s}{\partial t}, \quad (5.12\alpha)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_s = \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{E}_s + \tilde{\epsilon} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_s}{\partial t} + \tilde{\sigma} \cdot \mathbf{E}_i + (\tilde{\epsilon} - \epsilon_0 \tilde{\mathbf{I}}) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t}, \quad (5.12\beta)$$

Η διακριτοποίηση των Εξ. (5.12) ακολουθεί τη σειρά που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Για λόγους απλότητας, από εδώ και πέρα θα υιοθετήσουμε τη χρήση κυβικών κελιών, όμως τα αποτελέσματα γενικεύονται εύκολα σε άλλες πλεγματικές γεωμετρίες. Η διακριτοποιημένη μορφή της Εξ. (5.12α) είναι παρόμοια με το αποτέλεσμα (5.4), μιας και η (5.12α) είναι αλγεβρικά ίδια με την (5.2α). Ορίζοντας τον ακόλουθο "στροβιλικό" πίνακα-διάνυσμα

$$\Xi[\mathbf{A}_{i,j,k}^n] = \frac{1}{\Delta r} \begin{bmatrix} A_z|_{i,j+1/2,k}^n - A_z|_{i,j-1/2,k}^n - A_y|_{i,j,k+1/2}^n + A_y|_{i,j,k-1/2}^n \\ A_x|_{i,j,k+1/2}^n - A_x|_{i,j,k-1/2}^n - A_z|_{i+1/2,j,k}^n + A_z|_{i-1/2,j,k}^n \\ A_y|_{i+1/2,j,k}^n - A_y|_{i-1/2,j,k}^n - A_x|_{i,j+1/2,k}^n + A_x|_{i,j-1/2,k}^n \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

οι διακριτές εξισώσεις μπορούν να γραφούν στη συμπαγή μορφή

$$H_{\alpha s}|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_{\alpha s}|_{i,j,k}^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu_0} \Xi_{\alpha} [\mathbf{E}_s|_{i,j,k}^n] \quad (\alpha = x, y, z). \quad (5.14)$$

Για την Εξ. (5.12β) τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά, διότι οι μη διαγώνιοι όροι των ταχυοτήτων $\tilde{\epsilon}$, $\tilde{\sigma}$ οδηγούν στην εμφάνιση των χρονικών παραγώγων του ηλεκτρικού πεδίου στο δεξί μέλος των εξισώσεων. Αυτό γίνεται φανερό αν διακρίτοποιήσουμε την εξίσωση στη διανυσματική της μορφή (χωρίς να διαχωρίσουμε στις βαθμωτές συνιστώσες)

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{H}_s)|_{i,j,k}^{n+1/2} &= \tilde{\sigma}|_{i,j,k} \cdot \frac{\mathbf{E}_s|_{i,j,k}^n + \mathbf{E}_s|_{i,j,k}^{n+1}}{2} + \tilde{\epsilon}|_{i,j,k} \cdot \frac{\mathbf{E}_s|_{i,j,k}^{n+1} - \mathbf{E}_s|_{i,j,k}^n}{\Delta t} \\ &\quad + \tilde{\sigma}|_{i,j,k} \cdot \mathbf{E}_i|_{i,j,k}^{n+1/2} + \left(\tilde{\epsilon}|_{i,j,k} - \epsilon_0 \tilde{\mathbf{I}} \right) \cdot \frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial t} \Big|_{i,j,k}^{n+1/2}. \end{aligned}$$

Όπως ακριβώς και στην αλληλουχία που οδηγεί στην Εξ. (5.6), ο στροβιλισμός του $\mathbf{H}$ υπολογίζεται στο χρονικό βήμα $n + 1/2$ και συνεπώς πρέπει να γίνει μια προσέγγιση στον όρο $\tilde{\sigma} \mathbf{E}_s$. Είναι ξεκάθαρο ότι, σε αντίθεση με την (5.14), οι εξισώσεις που δίνουν τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου στο βήμα $n + 1$ είναι συζευγμένες λόγω των μη μηδενικών στοιχείων των ταχυοτήτων απόκρισης του πλάσματος. Έτσι, για να υπολογίσουμε τη βηματική εξέλιξη του ηλεκτρικού πεδίου, οι εξισώσεις αυτές πρέπει να λυθούν σαν αλγεβρικό σύστημα. Η λύση είναι

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_{xs} \\ E_{ys} \\ E_{zs} \end{bmatrix}_{i,j,k}^{n+1} &= \left(\frac{\tilde{\epsilon}|_{i,j,k}}{\Delta t} + \frac{\tilde{\sigma}|_{i,j,k}}{2} \right)^{-1} \left\{ \left(\frac{\tilde{\epsilon}|_{i,j,k}}{\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}|_{i,j,k}}{2} \right) \begin{bmatrix} E_{xs} \\ E_{ys} \\ E_{zs} \end{bmatrix}_{i,j,k}^n \right. \\ &\quad + \begin{bmatrix} \frac{\partial H_{zs}}{\partial y} - \frac{\partial H_{ys}}{\partial z} \\ \frac{\partial H_{xs}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zs}}{\partial x} \\ \frac{\partial H_{ys}}{\partial x} - \frac{\partial H_{xs}}{\partial y} \end{bmatrix}_{i,j,k}^{n+1/2} - \tilde{\sigma}|_{i,j,k} \begin{bmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \\ E_{zi} \end{bmatrix}_{i,j,k}^{n+1/2} \\ &\quad \left. - \left(\tilde{\epsilon}|_{i,j,k} - \epsilon_0 \tilde{\mathbf{I}} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial E_{xi}}{\partial t} \\ \frac{\partial E_{yi}}{\partial t} \\ \frac{\partial E_{zi}}{\partial t} \end{bmatrix}_{i,j,k}^{n+1/2} \right\}. \quad (5.15) \end{aligned}$$

Η διατύπωση των Εξ. (5.15) σε απλούστερη μορφή δεν είναι εύκολη υπόθεση, είναι όμως θέμα ευθέως υπολογισμού. Αρχικά, ορίζουμε τους ταχυοτές

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \frac{\tilde{\epsilon}}{\Delta t} - \frac{\tilde{\sigma}}{2}, \quad (5.16\alpha)$$

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left(\frac{\tilde{\epsilon}}{\Delta t} + \frac{\tilde{\sigma}}{2} \right)^{-1}. \quad (5.16\beta)$$

Αυτό απλοποιεί τις εκφράσεις για τις συνιστώσες $\mathbf{E}_s|_{i,j,k}^{n+1}$ σε μια συμπαγή μορφή, αντιστοιχία με αυτή της Εξ. (5.14)

$$E_{as}|_{i,j,k}^{n+1} = \sum_{l,m} Q_{al}|_{i,j,k} \left\{ S_{lm}|_{i,j,k} E_{ms}|_{i,j,k}^n + \Xi_\alpha[\mathbf{H}_s|_{i,j,k}^{n+1/2}] \right. \\ \left. - \sigma_{lm}|_{i,j,k} E_{mi}|_{i,j,k}^{n+1/2} - (\varepsilon_{lm}|_{i,j,k} - \varepsilon_0 \delta_{l,m}) \frac{\partial E_{mi}}{\partial t} \Big|_{i,j,k}^{n+1/2} \right\}. \quad (5.17)$$

Με τον υπολογισμό των Εξ. (5.14), (5.17) η διαδικασία της διακριτοποίησης δεν έχει ολοκληρωθεί. Σε αντίθεση με τις εξισώσεις εξέλιξης για ισότροπο μέσο (ενδεικτικά βλ. (5.4), (5.6) και (5.14)), στην Εξ. (5.17) τα πεδία στο δεξί μέλος δεν είναι όλες τις φορές διαθέσιμα (δηλ. δεν έχουν υπολογιστεί) στις θέσεις όπου απαιτείται. Αυτό συμβαίνει λόγω της εμφάνισης των συνιστώσων του πεδίου ως προς τις άλλες δύο διευθύνσεις. Για παράδειγμα, σύμφωνα με την (5.17), για τον υπολογισμό της $E_{zs}|_{i,j,k}^{n+1}$ χρειάζεται να γνωρίζουμε τις $E_{xs}|_{i,j,k}^n$, $E_{ys}|_{i,j,k}^n$ και $H_{xs}|_{i,j,k\pm 1/2}^{n+1/2}$, $H_{ys}|_{i,j,k\pm 1/2}^{n+1/2}$, $H_{zs}|_{i\pm 1/2,j,k}^{n+1/2}$, $H_{zs}|_{i,j\pm 1/2,k}^{n+1/2}$, όμως απ' το Σχ. 5.1(α) φαίνεται ότι οι τιμές αυτές δεν είναι διαθέσιμες. Οι τιμές E_{as} βρίσκονται στα σημεία $(i + \delta_{\alpha,x}/2, j + \delta_{\alpha,y}/2, k + \delta_{\alpha,z}/2)$, ενώ οι H_{as} στα $(i + \delta'_{\alpha,x}/2, j + \delta'_{\alpha,y}/2, k + \delta'_{\alpha,z}/2)$ ($\delta'_{i,j} = 1 - \delta_{i,j}$ το συμπλήρωμα του δέλτα του Kronecker). Ο προσδιορισμός των απαιτούμενων τιμών γίνεται μέσω γραμμικών παρεμβολών στο χώρο ανάμεσα σε θέσεις όπου υπάρχουν υπολογισμένες οι τιμές των πεδίων. Σαν παράδειγμα, δίνουμε το αποτέλεσμα για το $E_{xs}|_{i,j,k}^n$

$$E_{xs}|_{i,j,k}^n = \frac{1}{4} (E_{xs}|_{i+1/2,j,k+1/2}^n + E_{xs}|_{i+1/2,j,k-1/2}^n + E_{xs}|_{i-1/2,j,k+1/2}^n + E_{xs}|_{i-1/2,j,k-1/2}^n).$$

Οι Εξ. (5.14) και (5.17) (μαζί με τις γραμμικές παρεμβολές όπου απαιτείται) συνιστούν τη διακριτοποιημένη μορφή των Εξ. (5.12). Για να ολοκληρωθεί η μεθοδολογία, πρέπει να ορίσουμε τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες και τους ταχυστές απόκρισης του πλάσματος σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Για τις συνοριακές συνθήκες, υιοθετούμε το σχήμα Mur όπως παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα. Στο σύνορο $x = 0$, οι συνθήκες Mur 1^{ης} και 2^{ης} τάξης γράφονται

$$E_{as}|_{0,j,k+1/2}^{n+1} = E_{as}|_{0,j,k+1/2}^n + \frac{c\Delta t - \Delta r}{c\Delta t + \Delta r} \left(E_{as}|_{1,j,k+1/2}^{n+1} - E_{as}|_{0,j,k+1/2}^n \right), \quad (5.18\alpha)$$

$$E_{as}|_{0,j,k+1/2}^{n+1} = -E_{as}|_{1,j,k+1/2}^{n-1} + \frac{c\Delta t - \Delta r}{c\Delta t + \Delta r} \left(E_{as}|_{1,j,k+1/2}^{n+1} + E_{as}|_{0,j,k+1/2}^{n-1} \right) \\ + \frac{2\Delta r}{c\Delta t + \Delta r} \left(E_{as}|_{0,j,k+1/2}^n + E_{as}|_{1,j,k+1/2}^n \right) \\ + \frac{(c\Delta t)^2}{2\Delta r(c\Delta t + \Delta r)} \left(E_{as}|_{0,j+1,k+1/2}^n - 4E_{as}|_{0,j,k+1/2}^n + E_{as}|_{0,j-1,k+1/2}^n \right. \\ \left. + E_{as}|_{1,j+1,k+1/2}^n - 4E_{as}|_{1,j,k+1/2}^n + E_{as}|_{1,j-1,k+1/2}^n + E_{as}|_{0,j,k+3/2}^n \right. \\ \left. + E_{as}|_{0,j,k-1/2}^n + E_{as}|_{1,j,k+3/2}^n + E_{as}|_{1,j,k-1/2}^n \right). \quad (5.18\beta)$$

Οι Εξ. (5.18) είναι το 3-διάστατο ανάλογο των εξισώσεων που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα για 1-διάστατη διάδοση. Οι συνθήκες Mur στα υπόλοιπα σύνορα υπολογίζονται εύκολα από τις παραπάνω, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες συμμετρίας του συστήματος συντεταγμένων για να μεταθέτουμε τους δείκτες θέσης των συνιστωσών των πεδίων ανάλογα με τη συνιστώσα που μας ενδιαφέρει.

5.3.2 Υπολογισμός της διηλεκτρικής απόκρισης

Ο τρόπος υπολογισμού της διηλεκτρικής απόκρισης του πλάσματος εμφανίζει σημαντικές διαφορές σε σχέση με τα συνηθισμένα μέσα, διότι το πλάσμα είναι ένα μέσο όπου όλα τα φορτία είναι ελεύθερα να κινούνται και η διάκριση μεταξύ ρεύματος πόλωσης και ρεύματος αγωγιμότητας παύει να υφίσταται. Ειδικότερα, η απόκριση του πλάσματος σε ηλεκτρομαγνητικά κύματα υψηλής συχνότητας καθορίζεται από τη φυσική των κινήσεων των ηλεκτρονίων. Στην περίπτωση που δεν υπάρχει σημαντική ανταλλαγή ενέργειας μεταξύ του κύματος και των ηλεκτρονίων, η προσέγγιση του ψυχρού πλάσματος είναι επαρκής. Όταν όμως οι θερμικές κινήσεις των ηλεκτρονίων είναι σημαντικές, όπως π.χ. όταν $\omega \approx \omega_{ce}$, εμφανίζονται τα φαινόμενα εκείνα που η προσέγγιση του ψυχρού πλάσματος αδυνατεί να περιγράψει, και τότε είναι αναγκαία η κινητική περιγραφή. Για τιμές των παραμέτρων όπου οι συγκρούσεις είναι αμελητέες και η συχνότητα του κύματος είναι πολύ μεγαλύτερη απ' τη συχνότητα συγκρούσεων, η κινητική εξίσωση έχει τη μορφή (1.30). Στο πλαίσιο της ενότητας αυτής δε θα μπούμε στις λεπτομέρειες των υπολογισμών, αλλά θα αξιοποιήσουμε μόνο τα αποτελέσματα (στα βιβλία [Stix 1992, Swanson 2003] παρουσιάζεται αναλυτικά ο τρόπος υπολογισμού του διηλεκτρικού τανυστή).

Τα κύρια βήματα της κινητικής περιγραφής είναι εν συντομία τα ακόλουθα: (α) Γραμμικοποίηση της εξίσωσης Vlasov θεωρώντας ομογενή κατανομή πλάσματος με μια διαταραχή τύπου Fourier μικρού πλάτους, (β) Υπολογισμός της συνάρτησης κατανομής με ολοκλήρωση κατά μήκος των αδιατάρακτων τροχιών των ηλεκτρονίων στο χώρο ταχυτήτων, (γ) Υπολογισμός της πυκνότητας ρεύματος ως η ροπή 1^{ης} τάξης της κατανομής, (δ) Καθορισμός των τανυστών απόκρισης του πλάσματος στο πεδίο συχνοτήτων με σύγκριση του αποτελέσματος του (γ) με το νόμο του Ohm. Από το (δ) σαν αποτέλεσμα προκύπτει ο διηλεκτρικός τανυστής πλάσματος, ο αδιάστατος μιγαδικός τανυστής $\tilde{\epsilon}$ που έχουμε ήδη ορίσει στην Υποεν. 1.3.2. Ο τανυστής αυτός έχει την ακόλουθη γενική μορφή

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int \frac{\frac{1}{\gamma p} \frac{df_0}{dp}}{\omega - k_{||}v_{||} - \frac{l\omega_{ce}}{\gamma}} \begin{bmatrix} \frac{l^2}{\beta_J^2} J_l^2 p_{\perp}^2 & i \frac{l}{\beta_J} J_l J_l' p_{\perp}^2 & \frac{l}{\beta_J} J_l^2 p_{||} p_{\perp} \\ -i \frac{l}{\beta_J} J_l J_l' p_{\perp}^2 & J_l^2 p_{\perp}^2 & -i J_l J_l' p_{||} p_{\perp} \\ \frac{l}{\beta_J} J_l^2 p_{||} p_{\perp} & i J_l J_l' p_{||} p_{\perp} & J_l^2 p_{||}^2 \end{bmatrix} d^3 p,$$

με $f_0(p)$ τη συνάρτηση κατανομής στην ισορροπία (για την ορμή είναι $p^2 = p_{||}^2 + p_{\perp}^2$), $J_l(\beta_J)$ τη συνάρτηση Bessel τάξης l με όρισμα $\beta_J = k_{\perp} p_{\perp} / (m_e \omega_{ce})$ και $J_l'(\beta_J)$ την παράγωγό της ως προς β_J [Dennerly and Krzywicki 1995].

Για να βρούμε επακριβώς την έκφραση του διηλεκτρικού τανυστή $\tilde{\epsilon}$, πρέπει να θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση τη συγκεκριμένη μορφή της f_0 και να κάνουμε τις

ολοκληρώσεις. Στη σχετικιστική περίπτωση, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων μπορεί να γίνει μόνο αριθμητικά. Ο μόνος τρόπος για να βρεθεί αναλυτική έκφραση για το διηλεκτρικό τανυστή είναι να γίνουν κάποιες παραδοχές. Η μη σχετικιστική προσέγγιση ισοδυναμεί με το να τεθεί $\gamma = 1$ και να θεωρηθεί ως f_0 η μη σχετικιστική μορφή της κατανομής Maxwell (βλ. Εξ. (1.32)). Σε αυτή την περίπτωση ο παρονομαστής είναι ανεξάρτητος από την $p_\perp$ και η ολοκλήρωση ως προς $p_\parallel$ μπορεί να γίνει αναλυτικά. Το τελικό αποτέλεσμα για τον τανυστή είναι

$$\tilde{\epsilon} = \tilde{\mathbf{I}} + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{c}{\sqrt{2}N_\parallel v_{te}} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \frac{l^2}{\beta_\Gamma} \Gamma_l \mathcal{Z} & i l \Gamma'_l \mathcal{Z} & \sqrt{\frac{2}{\beta_\Gamma}} l \Gamma_l \zeta_l \mathcal{Z} \\ -i l \Gamma'_l \mathcal{Z} & \left(\frac{l^2}{\beta_\Gamma} \Gamma_l - 2\beta_\Gamma \Gamma'_l \right) \mathcal{Z} & -i \sqrt{2\beta_\Gamma} \Gamma'_l \zeta_l \mathcal{Z} \\ \sqrt{\frac{2}{\beta_\Gamma}} l \Gamma_l \zeta_l \mathcal{Z} & i \sqrt{2\beta_\Gamma} \Gamma'_l \zeta_l \mathcal{Z} & 2\Gamma_l \zeta_l (1 + \zeta_l \mathcal{Z}) \end{bmatrix},$$

όπου $\Gamma_l(\beta_\Gamma) = e^{-\beta_\Gamma} I_l(\beta_\Gamma)$, με $I_l(\beta_\Gamma)$ την τροποποιημένη συνάρτηση Bessel με όρισμα $\beta_\Gamma = k_\perp^2 v_{te}^2 / \omega_{ce}^2$ [Dennerly and Krzywicki 1995], και η $\mathcal{Z}(\zeta)$ ονομάζεται συνάρτηση διασποράς πλάσματος (plasma dispersion function) με όρισμα $\zeta_l = (\omega - l\omega_{ce}) / (\sqrt{2}k_\parallel v_{te})$ [Fried and Conte 1961].

Για να ισχύει η μη σχετικιστική προσέγγιση πρέπει να ικανοποιούνται οι συνθήκες $|N_\parallel| \gg v_{te}/c$ και $|N_\parallel| \gg |1 - l\omega_{ce}/\omega|$. Με την πρώτη συνθήκη εξασφαλίζεται ότι τα ηλεκτρόνια παραμένουν μη σχετικιστικά, ενώ η δεύτερη εγγυάται πως το φαινόμενο Doppler είναι σημαντικότερο απ' αυτό της σχετικιστικής μετατόπισης της συχνότητας (λόγω εξάρτησης απ' τον παράγοντα Lorentz). Όταν οι υποθέσεις αυτές δεν ισχύουν, όπως π.χ. στην περίπτωση $N_\parallel = 0$, τότε ακολουθούμε την ασθενώς σχετικιστική προσέγγιση. Η μόνη διαφορά με τη μη σχετικιστική προσέγγιση είναι ότι πραγματοποιείται μια ανάπτυξη Taylor στον παράγοντα Lorentz ως προς την ορμή $p \ll m_e c$. Η ολοκλήρωση στο χώρο των ορμών δίνει το εξής αποτέλεσμα

$$\epsilon_{xx} = 1 - \beta_T \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{l^2}{\beta_\Gamma} \Gamma_{|l|} \mathcal{S}_{|l|+3/2}, \quad (5.19\alpha)$$

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = -i\beta_T \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} l \Gamma'_{|l|} \mathcal{S}_{|l|+3/2}, \quad (5.19\beta)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = \beta_T \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} N_\parallel N_\perp \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{l}{\beta_\Gamma} \Gamma_{|l|} (\mathcal{S}_{|l|+3/2} - \mathcal{S}_{|l|+5/2}), \quad (5.19\gamma)$$

$$\epsilon_{yy} = 1 - \beta_T \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left(\frac{l^2}{\beta_\Gamma} \Gamma_{|l|} \mathcal{S}_{|l|+3/2} + 2\beta_\Gamma \Gamma'_{|l|} \mathcal{S}_{|l|+5/2} \right), \quad (5.19\delta)$$

$$\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} = i\beta_T \frac{\omega_{pe}^2}{\omega \omega_{ce}} N_\parallel N_\perp \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma'_{|l|} \mathcal{S}_{|l|+5/2}, \quad (5.19\epsilon)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 - \beta_T \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \Gamma_{|l|} [\beta_T N_\parallel^2 (\mathcal{S}_{|l|+7/2} - 2\mathcal{S}_{|l|+5/2} + \mathcal{S}_{|l|+3/2}) + \mathcal{S}_{|l|+5/2}], \quad (5.19\sigma\tau)$$

όπου $\beta_T = c^2/(2v_{te}^2)$ είναι το αντίστροφο της κανονικοποιημένης θερμικής ενέργειας, ενώ $\mathcal{S}_q(\varpi, \zeta_l)$ είναι οι συναρτήσεις Shkarofsky τάξης q με ορίσματα $\varpi = \beta_T N_{||}^2/2$, $\zeta_l = \beta_T (1 - l\omega_{ce}/\omega)$ [Robinson 1986].

Πριν κλείσουμε, είναι απαραίτητο να κάνουμε μερικά σχόλια. Είναι λογικό να γεννηθεί το ερώτημα του αν είναι συμβιβαστό να χρησιμοποιήσουμε στις εξισώσεις FDTD την έκφραση του διηλεκτρικού ταυυστή στο πεδίο των συχνοτήτων, μιας και οι εξισώσεις αυτές είναι στο πεδίο το χρόνου. Εν γένει, κάποιος θα περίμενε ότι απαιτείται μετατροπή μέσω μετασχηματισμού Fourier. Όμως, όταν η κυματική συχνότητα και οι παράμετροι του πλάσματος δε μεταβάλλονται με το χρόνο, η μέθοδος FDTD μπορεί να εφαρμοστεί χρησιμοποιώντας την απόκριση απ' το πεδίο συχνοτήτων. Ακολουθεί η απόδειξη: Ο ταυυστής στο πεδίο του χρόνου είναι ουσιαστικά ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του ταυυστή στο πεδίο των συχνοτήτων

$$\tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega_0) e^{-i\omega' t} d\omega' = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega_0) \delta(t),$$

όπου η συχνότητα του κύματος συμβολίζεται με ω_0 . Η διηλεκτρική μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου υπολογίζεται ως η συνέλιξη του ταυυστή επιτρεπτότητας (πραγματικό μέρος του διηλεκτρικού ταυυστή) και του ηλεκτρικού πεδίου

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_0^t \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-t') dt' = \int_0^t \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{i\omega' t'} \delta(t') dt' = \tilde{\epsilon}(\mathbf{r}, \omega_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t).$$

Με παρόμοιο τρόπο, μπορεί να εξαχθεί μια σχέση που συνδέει την πυκνότητα ρεύματος με το ηλεκτρικό πεδίο και περιλαμβάνει τον ταυυστή $\tilde{\sigma}(\mathbf{r}, \omega_0)$.

Η παράμετρος β_T είναι ανάλογη του λόγου της ακτίνας Larmor προς το μήκος κύματος, συνεπώς είναι ένα μέτρο της βαρύτητας των φαινομένων λόγω κυκλοτρονικών κινήσεων (Finite Larmor Radius effects (FLR)). Στο όριο που η ακτίνα Larmor είναι πολύ μικρή είναι αρκετό να κρατήσουμε μόνο τη διόρθωση μηδενικής τάξης, η οποία είναι ισοδύναμη με ένα πεπερασμένο όρο πίεσης. Σε αυτή την περίπτωση, τόσο η μη σχετικιστική όσο και η ασθενώς σχετικιστική προσέγγιση του διηλεκτρικού ταυυστή λαμβάνει μια μορφή που είναι γνωστή ως "ταυυστής θερμού πλάσματος" (warm plasma tensor) [Swanson 2003]

$$\epsilon_{xx} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2 (\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - k^2 v_{te}^2) - \omega_{ce}^2 (\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)}, \quad (5.20\alpha)$$

$$\epsilon_{xy} = -\epsilon_{yx} = i \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce} (\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)}{\omega [\omega^2 (\omega^2 - k^2 v_{te}^2) - \omega_{ce}^2 (\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)]}, \quad (5.20\beta)$$

$$\epsilon_{xz} = \epsilon_{zx} = - \frac{\omega_{pe}^2 k_{||} k_{\perp} v_{te}^2}{\omega^2 (\omega^2 - k^2 v_{te}^2) - \omega_{ce}^2 (\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)}, \quad (5.20\gamma)$$

$$\epsilon_{yy} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2(\omega^2 - k^2 v_{te}^2)}{\omega^2(\omega^2 - k^2 v_{te}^2) - \omega_{ce}^2(\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)}, \quad (5.20\delta)$$

$$\epsilon_{yz} = -\epsilon_{zy} = -i \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce} k_{||} k_{\perp} v_{te}^2}{\omega[\omega^2(\omega^2 - k^2 v_{te}^2) - \omega_{ce}^2(\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)]}, \quad (5.20\epsilon)$$

$$\epsilon_{zz} = 1 + \frac{\omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{ce}^2 - k_{\perp}^2 v_{te}^2)}{\omega^2(\omega^2 - k^2 v_{te}^2) - \omega_{ce}^2(\omega^2 - k_{||}^2 v_{te}^2)}. \quad (5.20\sigma\tau)$$

ενώ στο όριο της μηδενικής ακτίνας Larmor ο διηλεκτρικός ταυυστής παίρνει τη γνωστή μορφή του ψυχρού πλάσματος (μπορεί να εξαχθεί απ' την Εξ. (5.20) αν θέσουμε $v_{te} = 0$) [Stix 1992].

Συγκρίνοντας τη μορφή του διηλεκτρικού ταυυστή για ψυχρό, θερμό και κινητικό πλάσμα, συμπεραίνουμε πως όταν η θερμοκρασία είναι πεπερασμένη υπάρχει εξάρτηση του ταυυστή απ' το δείκτη διάθλασης. Συνεπώς, εκτός από την περίπτωση του ψυχρού πλάσματος, ο δείκτης διάθλασης είναι απαραίτητος για τον υπολογισμό των στοιχείων του διηλεκτρικού ταυυστή. Ο δείκτης διάθλασης υπολογίζεται απ' τη σχέση διασποράς, η οποία, ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων και τη μορφή του ταυυστή επιτρεπτότητας, εμφανίζει ποικίλους κλάδους λύσεων. Για ένα συγκεκριμένο πρόβλημα, από όλες τις διαθέσιμες λύσεις πρέπει να επιλεγεί εκείνη που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο ρυθμό διάδοσης.

Τα φαινόμενα FLR μπορούν να ενσωματωθούν στην έκφραση της απόκρισης του πλάσματος διαδοχικά σε τάξεις μεγέθους, μιας και η προσέγγιση της τιμής της συνάρτησης Bessel γίνεται μέσω του αναπτύγματός της σε σειρά. Για παράδειγμα, στην ασθενώς σχετικιστική περίπτωση, η ακτίνα Larmor είναι εν γένει πολύ μικρότερη απ' το μήκος κύματος και μόνο οι όροι κατώτερης τάξης είναι απαραίτητοι. Μια τέτοια προσέγγιση αναφέρεται σαν "κατώτατης τάξης FLR". Όταν συμπεριληφθούν και συνεισφορές από όρους υψηλότερης τάξης, οδηγούμαστε σε ένα επιπλέον άθροισμα συναρτήσεων Shkarofsky. Γύρω από ένα δεδομένο συντονισμό είναι $\beta_T \approx l^2 N_{\perp}^2 v_{te}^2 / c^2$, και καθώς σε εφαρμογές ECRH/ECCD είναι $l, N_{\perp} \simeq 1$, ο κυρίαρχος όρος στο β_T είναι ο $v_{te}^2 / c^2 \ll 1$. Κατά συνέπεια, οι συνεισφορές από ανώτερες αρμονικές γίνονται μικρότερες όσο μεγαλύτερη είναι η τάξη. Στην πράξη, αξιόλογες συνεισφορές έχουμε μόνο για $l = 0, \pm 1, \pm 2$, δηλ. η αλληλεπίδραση είναι αποτελεσματική μόνο για την 1^η και τη 2^η αρμονική.

5.4 Αριθμητικά αποτελέσματα

Παρά τα πλεονεκτήματα της μεθόδου FDTD, δεν έχουν γίνει μέχρι σήμερα αρκετές εφαρμογές σε προβλήματα σχετικά με τη διάδοση κυμάτων σε πλάσμα σύντηξης. Ο κυριότερος λόγος είναι ότι, για ρεαλιστικές προσομοιώσεις, η απαιτούμενη χωρική ανάλυση κάνει τις υπολογιστικές ανάγκες πολύ μεγάλες, ενώ την ίδια στιγμή οι ασυμπτωτικές μέθοδοι παρέχουν στις περισσότερες περιπτώσεις μια γρήγορη λύση του προβλήματος. Στην υπάρχουσα αρθρογραφία, οι κυριότερες εφαρμογές της

FDTD σε αυτά τα προβλήματα είναι (α) η 1-διάστατη προσομοίωση συμβολομετρίας από τους Muta et al, θεωρώντας διάδοση σε ψυχρό πλάσμα αλλά λαμβάνοντας υπόψη την απόσβεση λόγω συγχρούσεων και μη σχετικιστικού κυκλοτρονικού συντονισμού [Muta et al 1997a], (β) η επέκταση του (α) στις τρεις διαστάσεις, όπου η απόκριση του πλάσματος περιγράφεται στο πλαίσιο της ηλεκτρικής πόλωσης [Muta et al 1997b], (γ) οι 2-διάστατες προσομοιώσεις ανακλαστομετρίας του Da Silva σε ψυχρό πλάσμα με επιμηκυμένη μαγνητική γεωμετρία [Da Silva 2001], (δ) τις προσομοιώσεις ECRH στην 1^η αρμονική από τους Hojo et al, όπου η απόκριση του πλάσματος περιγράφεται από ένα "τεχνητό" τανυστή αγωγιμότητας που προκύπτει με βάση τη θεωρία ρευστού [Hojo et al 2004].

Εδώ παρουσιάζουμε μια εφαρμογή της μεθόδου FDTD στη διάδοση EC κύματος σε απλοποιημένη γεωμετρία tokamak κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. Η τοροειδής κάτοψη της συγκεκριμένης γεωμετρίας απεικονίζεται στο Σχ. 5.2(α). Η απλοποίηση οφείλεται στη συνηθισμένη υπόθεση $r_{pol} \ll r_{tor}$, η οποία είναι γνωστή ως "προσέγγιση μεγάλου λόγου όψης" (large aspect ratio approximation), και αντιστοιχεί σε επίπεδη (αντί για καμπυλόγραμμη) μαγνητική γεωμετρία με αμελητέο πολοειδές πεδίο. Σαν συνέπεια, τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πλάσματος (μαγνητικό πεδίο, πυκνότητα και θερμοκρασία) μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταβάλλονται μόνο κατά μήκος του άξονα x , στην περιοχή $[-r_{pol}, r_{pol}]$. Τα profiles των ω_{ce} , ω_{pe} και v_{te} κατά μήκος του x είναι της μορφής

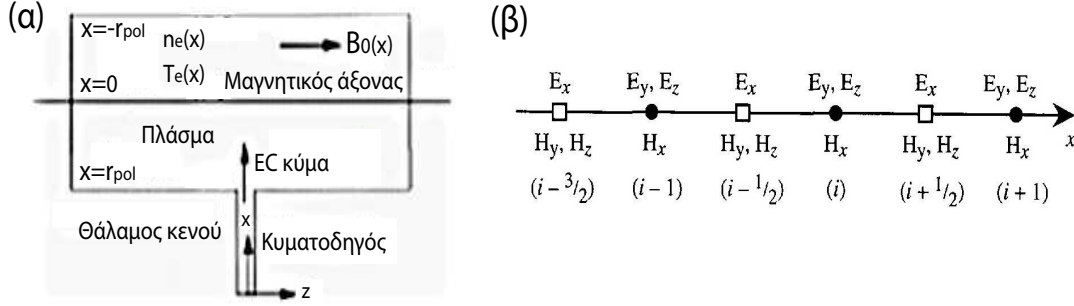
$$\omega_{ce}(x) = \frac{\omega_{ce}|_{x=0}}{1 + \frac{x}{r_{tor}}}, \quad (5.21\alpha)$$

$$\omega_{pe}^2(x) = \omega_{pe}^2|_{x=0} + (\omega_{pe}^2|_{x=r_{pol}} - \omega_{pe}^2|_{x=0}) \left(\frac{x}{r_{pol}} \right)^2, \quad (5.21\beta)$$

$$v_{te}^2(x) = v_{te}^2|_{x=0} + (v_{te}^2|_{x=r_{pol}} - v_{te}^2|_{x=0}) \left(\frac{x}{r_{pol}} \right)^2. \quad (5.21\gamma)$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις, το μαγνητικό πεδίο αυξάνεται από το ένα άκρο του πλάσματος $x = r_{pol}$ (low-field side) προς το άλλο $x = -r_{pol}$ (high-field side), ενώ η πυκνότητα και η θερμοκρασία αυξάνουν απ' τα άκρα προς το κέντρο $x = 0$. Το κύμα εκπέμπεται απ' την low-field side προς τα αρνητικά x ($k_{x0} < 0$, $k_{y0} = k_{z0} = 0$). Αφού το κύμα εκπέμπεται κατά μήκος της διάστασης όπου το πλάσμα είναι ανομοιογενές, οι συνιστώσες του $\mathbf{k}$ εγκάρσια του x παραμένουν σταθερά μηδέν, δηλ. η διάδοση παραμένει κάθετη στο μαγνητικό πεδίο. Όσον αφορά την FDTD, αυτό επιτρέπει μια απλούστερη (και ταχύτερη αριθμητικά) προσομοίωση, βασισμένη στη 1-διάστατη υλοποίηση του αλγορίθμου, η οποία αποκτάται θέτοντας $1/\Delta y = 1/\Delta z = 0$ στις Εξ. (5.14), (5.17). Το κελί Yee στο 1-διάστατο χώρο είναι η απλοποιημένη μορφή του 3-διάστατου κελιού του Σχ. 5.1 και φαίνεται στο Σχ. 5.2(β).

Το αριθμητικό πρόβλημα συνίσταται στην επίλυση των εξισώσεων FDTD στη μία διάσταση, με συνοριακές συνθήκες τις (5.18) και διηλεκτρική απόκριση που υπολογίζεται ανάλογα με το συγκεκριμένο φυσικό μοντέλο που επιλέγεται για το πλάσμα (ψυχρό, θερμό ή κινητικό ασθενώς σχετικιστικό). Αυτά υλοποιούνται στον



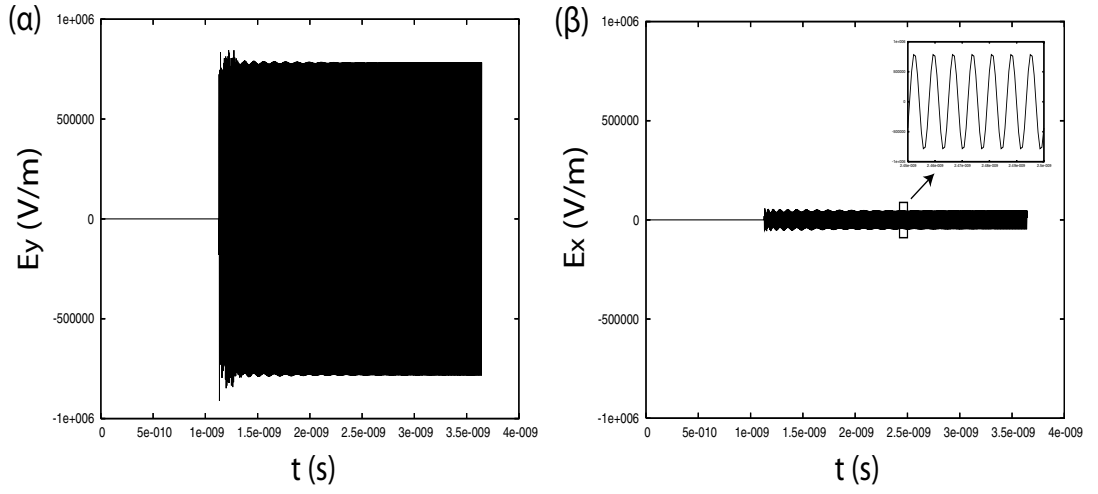
Σχήμα 5.2: (α) Η απλοποιημένη γεωμετρία για τη μελέτη της διάδοσης κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με τη μέθοδο FDTD, (β) Το κελί Yee στο 1-διάστατο χώρο.

κώδικα ECFW1D, ο οποίος υπολογίζει την εξέλιξη των πεδίων και της πυκνότητας ρεύματος στο πλάσμα [Tsironis et al 2007]. Οι παράμετροι για το πλάσμα και το ηλεκτρομαγνητικό κύμα αντιστοιχούν στα tokamak AUG και ITER. Στο AUG, οι παράμετροι είναι $r_{tor} = 1.65\text{m}$, $r_{pol} = 0.6\text{m}$, $B_0|_{x=0} = 2.5\text{T}$, $n_e|_{x=\pm r_{pol}} = 1.4 \cdot 10^{13}\text{cm}^{-3}$, $n_e|_{x=0} = 1.6 \cdot 10^{13}\text{cm}^{-3}$, $T_e|_{x=\pm r_{pol}} = 0.2\text{ KeV}$ και $T_e|_{x=0} = 2\text{KeV}$. Η συχνότητα του κύματος είναι $\omega/2\pi = 140\text{GHz}$ (2^η αρμονική του X-mode), η αρχική ισχύς είναι $P_{w0} = 1\text{ MW}$ και το εύρος της δέσμης είναι $w = 2\text{cm}$. Για τον ITER, οι ίδιες παράμετροι έχουν τιμές $r_{tor} = 6.2\text{m}$, $r_{pol} = 1.9\text{m}$, $B_0|_{x=0} = 5.51\text{T}$, $n_e|_{x=\pm r_{pol}} = 10^{13}\text{cm}^{-3}$, $n_e|_{x=0} = 10^{14}\text{cm}^{-3}$, $T_e|_{x=\pm r_{pol}} = 1\text{KeV}$, $T_e|_{x=0} = 10\text{KeV}$, $\omega/2\pi = 160\text{ GHz}$ (1^η αρμονική O-mode), $P_0 = 10\text{MW}$ και $w = 3\text{cm}$.

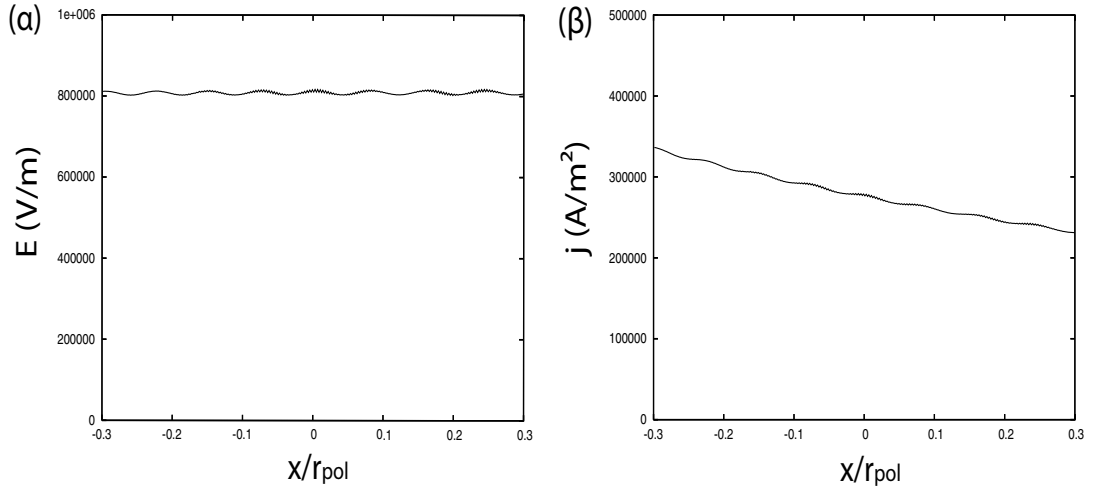
Πριν παρουσιάσουμε τα αποτελέσματα, αναφέρουμε κάποια στοιχεία σχετικά με την αριθμητική υλοποίηση (για τον κώδικα βλ. Παράρτ. Β.2). Το χωρικό βήμα Δr είναι ίσο με το 1% του μήκους κύματος στο κενό λ_v , ενώ το χρονικό βήμα είναι ίσο με το 10% του βήματος που προκύπτει απ' τη συνθήκη Courant. Οι τιμές αυτές είναι μικρές σε σχέση με την κοινή πρακτική (βλ. π.χ. [Kunz and Luebbers 1992]), διότι η αγωγιμότητα στο πλάσμα γίνεται πολύ μεγάλη, ειδικά κοντά στο συντονισμό, και συνεπώς διακυβεύεται η ακρίβεια και η ευστάθεια των υπολογισμών αν επιλέξουμε τιμές αντίστοιχες με αυτές για συνηθισμένα μέσα διάδοσης. Ο συνολικός χρόνος ολοκλήρωσης είναι πολλαπλάσιο του χρόνου που χρειάζεται το κύμα για να διανύσει την πολοειδή διάμετρο. Αφού η συχνότητα κύματος και ο διηλεκτρικός ταυυστής δεν εξαρτώνται απ' το χρόνο, τα πεδία αναμένεται να φτάσουν σε κατάσταση στατικότητας (steady state). Το εάν ο χρόνος ολοκλήρωσης είναι μεγαλύτερος από τον κρίσιμο χρόνο για την εδραίωση της κατάστασης στατικότητας, ώστε να συμπεριλαμβάνεται η συνολική φυσική εικόνα στα αποτελέσματα, ελέγχεται παρακολουθώντας τη χρονική εξέλιξη των πεδίων σε διάφορα πλεγματικά σημεία. Το προσπίπτον πεδίο είναι ημιτονικό και διαδίδεται στην αρνητική κατεύθυνση

$$\mathbf{E}_i(x, t) = \mathbf{E}_{0i} \cos[k_v(x - x_0) + \omega t] U(ct - |x_0 - x|). \quad (5.22)$$

Στη μαθηματική έκφραση του $\mathbf{E}_i$ χρησιμοποιούμε τη βηματική συνάρτηση $U(x)$ για να ενσωματώσουμε την αρχή της αιτιότητας, δηλ. το γεγονός ότι το κύμα χρειάζεται ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα $|x_0 - x|/c$ για να φτάσει στο σημείο x .



Σχήμα 5.3: Αποτελέσματα προσομοίωσης FDTD σε ψυχρό πλάσμα για παραμέτρους AUG: (α) Χρονική εξέλιξη της συνιστώσας E_y στο σημείο $x = -0.3r_{pol}$, (β) Χρονική εξέλιξη της συνιστώσας E_x στο σημείο $x = -0.3r_{pol}$ (με zoom στη γειτονία της χρονικής στιγμής $t = 2.5 \cdot 10^{-9}$ s).



Σχήμα 5.4: Αποτελέσματα προσομοίωσης FDTD σε ψυχρό πλάσμα για παραμέτρους AUG: (α) Profile του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου E , (β) Profile του πλάτους της πυκνότητας ρεύματος j .

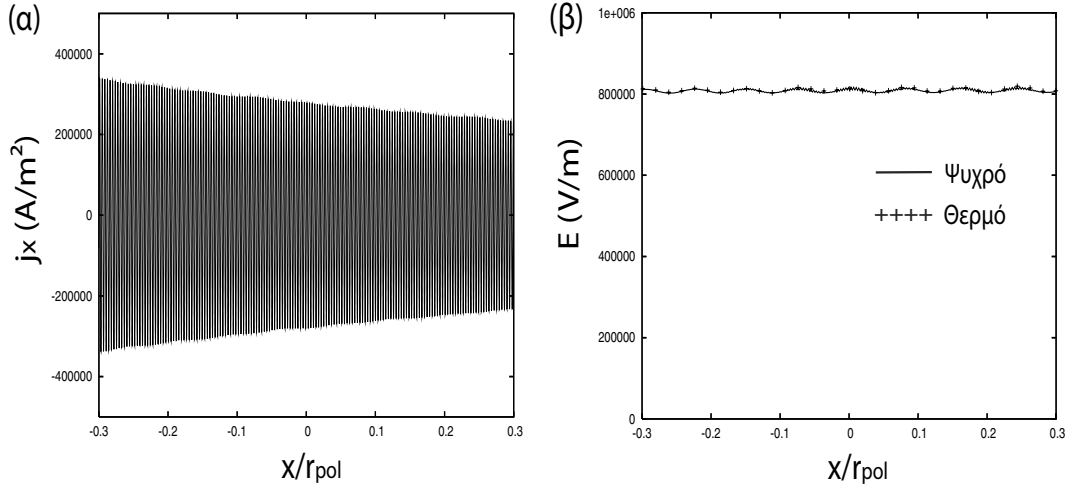
Στα Σχ. 5.3, 5.4 παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα των υπολογισμών σε ψυχρό πλάσμα για παραμέτρους AUG. Η χρονική εξέλιξη των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου E_y , E_x στο σημείο $x = -0.3r_{pol}$ δίνεται στα Σχ. 5.3(α), (β). Τα πεδία έχουν μηδενική τιμή έως τη χρονική στιγμή $t \approx 1.2 \cdot 10^{-9}$ s, ο οποίος είναι και ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα για να φτάσει στο σημείο που έχουμε επιλέξει, και φτάνουν σε στατική κατάσταση ύστερα από $t \approx 3.5 \cdot 10^{-9}$ s (ο χρόνος αυτός αντιστοιχεί σε περίπου 3000 κυματικές περιόδους). Η διαμήκης συνιστώσα E_x , η οποία δημιουργείται απ' το πλάσμα, παίρνει τιμές πάνω από δέκα φορές μικρότερες από αυτές της E_y (η συνιστώσα E_z για κύμα με πόλωση X που διαδίδεται κάθετα στο μαγνητικό πεδίο είναι μηδέν). Τα πεδία μεταβάλλονται περιοδικά στο χρόνο. Αυτό δε φαίνεται καθαρά απ' τα σχήματα, αλλά ξεκαθαρίζει αν μεγεθύνουμε γύρω από μια χρονική στιγμή (βλ. το μικρό σχήμα εντός του 5.3(β)).

Η απορρόφηση της κυματικής ενέργειας στο πλάσμα, καθώς και τα ηλεκτρικά ρεύματα που δημιουργούνται, γίνονται καλύτερα αντιληπτά αν σχεδιάσουμε τα profiles των πλατών του ηλεκτρικού πεδίου και της πυκνότητας ρεύματος κατά μήκος της διάδοσης (δηλ. ως προς x). Βέβαια, τέτοια γραφήματα είναι χρήσιμα μόνο αν ληφθούν υπόψη έχει επέλθει η κατάσταση στασιμότητας, εκτός και αν είναι επιθυμητή η μελέτη της χρονικής εξέλιξης των profiles³. Στα Σχ. 5.4(α), (β) σχεδιάζουμε τα profiles των πλατών του ηλεκτρικού πεδίου E και της πυκνότητας ρεύματος j . Το ηλεκτρικό πεδίο παραμένει σταθερό κατά μήκος της διάδοσης, οπότε δεν υπάρχει απόσβεση του κύματος εντός του πλάσματος, ενώ η πυκνότητα ρεύματος αυξάνει αργά από την low-field side. Αυτά ήταν και τα αποτελέσματα που αναμέναμε για τη διάδοση στο ψυχρό πλάσμα, καθώς απουσία συγκρούσεων και θερμικών κινήσεων δεν υπάρχει μηχανισμός απορρόφησης της κυματικής ενέργειας.

Περνάμε τώρα στα αποτελέσματα για διάδοση σε θερμό πλάσμα με παραμέτρους AUG. Στο Σχ. 5.5(α) φαίνεται το profile της συνιστώσας j_x της πυκνότητας ρεύματος. Συγκρίνοντας την άνω περιβάλλουσα της καμπύλης $j_x(x/r_{pol})$ με το Σχ. 5.4(β), λαμβάνοντας υπόψη ότι αυτή είναι και η μεγαλύτερη συνιστώσα, η απόκριση προκύπτει ίδια με αυτή του ψυχρού πλάσματος. Στο Σχ. 5.4(β), όπου συγκρίνεται το profile του E για θερμό και ψυχρό πλάσμα, είναι ξεκάθαρο ότι η απόκριση του ψυχρού και του θερμού πλάσματος είναι σχεδόν πανομοιότυπη. Αυτό είναι λογικό, διότι η μόνη διαφορά ανάμεσα στις δύο περιπτώσεις είναι ο όρος πίεσης στο διηλεκτρικό τανυστή (ο οποίος προέρχεται απ' τη διόρθωση FLR μηδενικής τάξης), που όμως δεν περιγράφει την κυκλοτρονική απορρόφηση. Φέρνοντας πάλι στο μυαλό μας την περίπτωση του ψυχρού πλάσματος, απουσία συγκρούσεων ο διηλεκτρικός τανυστής είναι και στις δύο περιπτώσεις ερμιτιανός, οπότε δεν εμπεριέχει τους όρους εκείνους που προσομοιώνουν μαθηματικά την απόσβεση. Για τον υπολογισμό του φαινομένου αυτού χρειάζεται απαραίτητα η κινητική θεωρία.

Στα Σχ. 5.6 και 5.7 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα για την περίπτωση κινητικού και ασθενώς σχετικιστικού πλάσματος. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι, ενώ η παρούσα περίπτωση συνδέεται άμεσα με τις προσομοιώσεις ECRH, και οι παραπάνω περιπτώσεις συνδέονται έμμεσα καθώς πολλοί αλγόριθμοι περιγράφουν

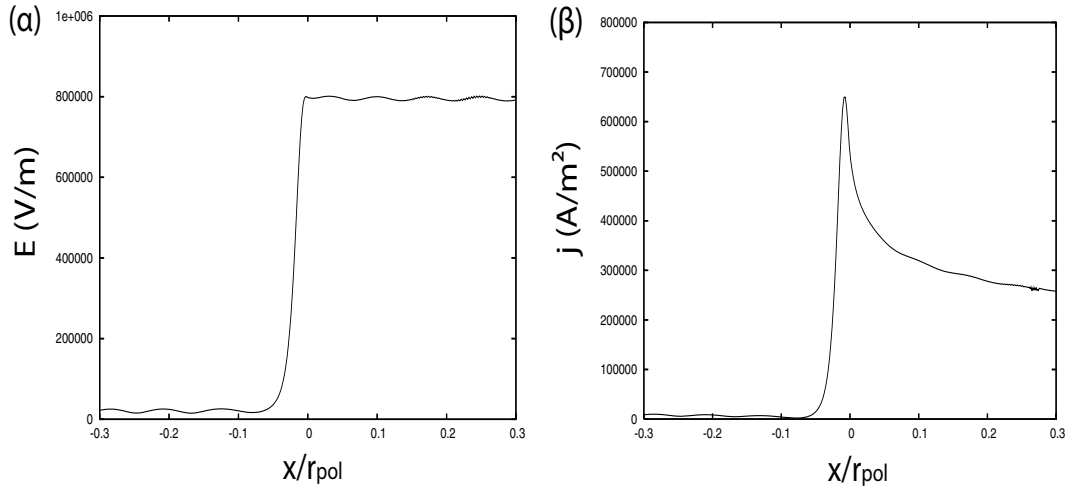
³ Λόγω του ότι, στη συγκεκριμένη εφαρμογή, το πλάσμα είναι στατικό, δεν είναι ξεκάθαρο αν η πληροφορία που θα μπορούσε να αντληθεί από μια τέτοια μελέτη έχει φυσικό περιεχόμενο.



Σχήμα 5.5: Αποτελέσματα προσομοίωσης FDTD για θερμό πλάσμα με παραμέτρους AUG: (α) Profile της συνιστώσας j_x , (β) Profile του πλάτους E (σε σύγκριση με το profile για ψυχρό πλάσμα του Σχ. 5.4).

την ECRH ως το συνδυασμό διάδοσης σε ψυχρό πλάσμα με ένα συντελεστή απορρόφησης υπολογισμένο για κινητικό πλάσμα, θεωρώντας ότι τα κινητικά φαινόμενα εμφανίζονται μόνο στο πλάτος και όχι στην πόλωση του κύματος (βλ. π.χ. τις [Westerhof 1989, Poli et al 2001a]). Στα Σχ. 5.6(α), (β) παρουσιάζονται τα profiles των E , j για παραμέτρους AUG. Η απορρόφηση του κύματος πραγματοποιείται σε μια στενή περιοχή κοντά στο κέντρο του πλάσματος, την αποκαλούμενη "ζώνη συντονισμού". Σε σύνδεση με τα παραπάνω σχόλια, υπενθυμίζουμε ότι ο μηχανισμός της απόσβεσης εμπεριέχεται στο αντισυμβατικό τμήμα του ταχυστή πλάσματος. Το profile του E είναι πολύ απότομο, υποδηλώνοντας υψηλές τιμές της αγωγιμότητας εντός της ζώνης συντονισμού. Η πυκνότητα ρεύματος αυξάνεται αργά προς την κατεύθυνση της ζώνης συντονισμού, όπως στο ψυχρό πλάσμα, γίνεται πολύ μεγαλύτερη λόγω της συντονισμένης αλληλεπίδρασης και ύστερα μηδενίζεται, καθώς το ηλεκτρικό πεδίο του κύματος έχει απορροστεί τελείως.

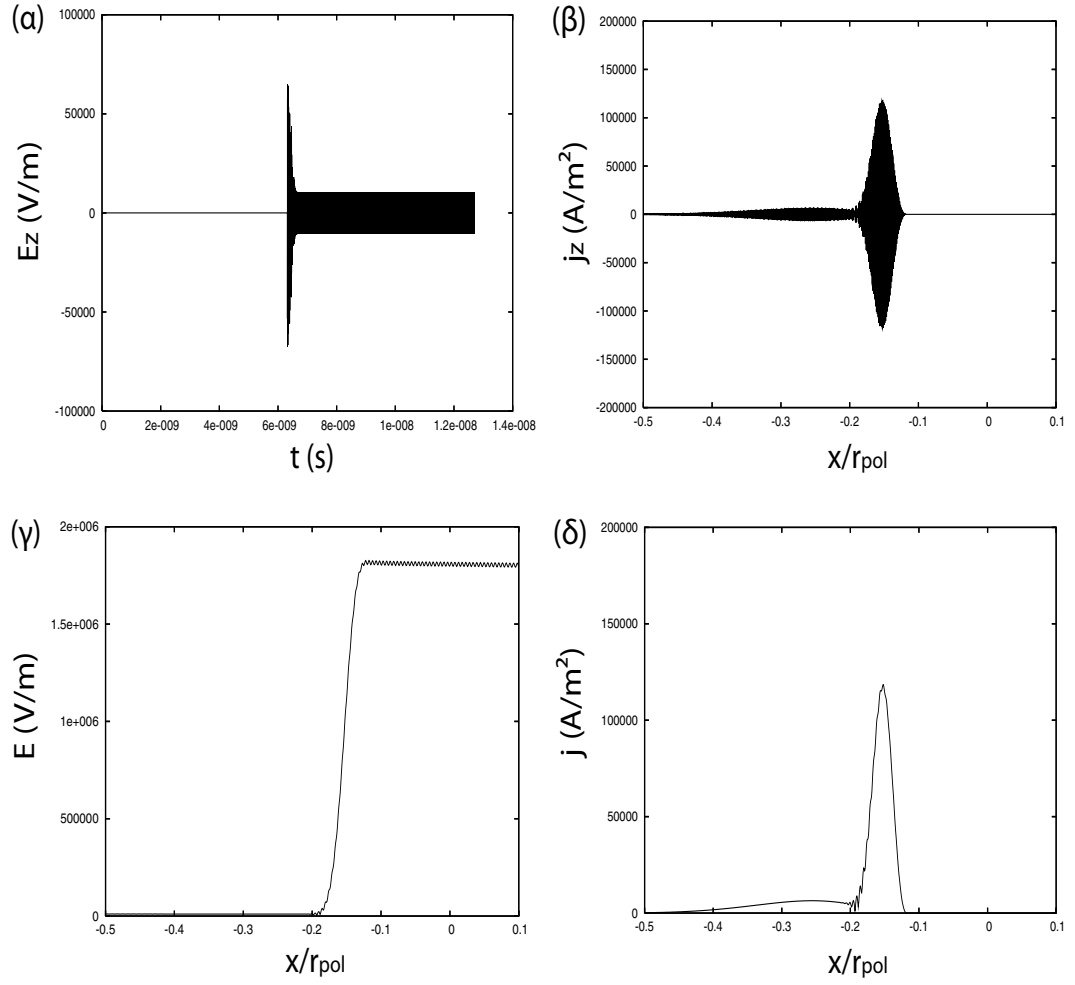
Τέλος, παρουσιάζουμε προσομοιώσεις της διάδοσης σε κινητικό και ασθενώς σχετικιστικό πλάσμα για παραμέτρους ITER. Στο Σχ. 5.7(α) παριστάνουμε γραφικά τη χρονική εξέλιξη της E_z (η οποία είναι η μόνη μη μηδενική συνιστώσα του O -mode για διάδοση κάθετα στο μαγνητικό πεδίο) στο σημείο $x = -0.5r_{pol}$. Σε σχέση με την εδραίωση της κατάστασης στατικότητας, η συμπεριφορά στο χρόνο είναι ίδια με παραπάνω. Εδώ το ηλεκτρικό πεδίο είναι πολύ μικρό σε σχέση με την αρχική τιμή, διότι το σημείο $x = -0.5r_{pol}$ βρίσκεται μετά τη ζώνη συντονισμού όπου κατά κόρον απορροφάται η ενέργεια του κύματος. Στο Σχ. 5.7(β) δίνεται το profile του j_x . Φαίνεται ότι η δημιουργία ρεύματος στο πλάσμα είναι πολύ εντοπισμένη στο χώρο, πρακτικά μόνο εντός της ζώνης συντονισμού. Σε αντίθεση με τον X -mode (Σχ. 5.6(β)), η πόλωση του O -mode είναι τέτοια ώστε δεν είναι δυνατό να δημιουργηθεί ρεύμα προτού το κύμα φτάσει στο συντονισμό. Στα Σχ. 5.7(γ), (δ) σχεδιάζουμε τα



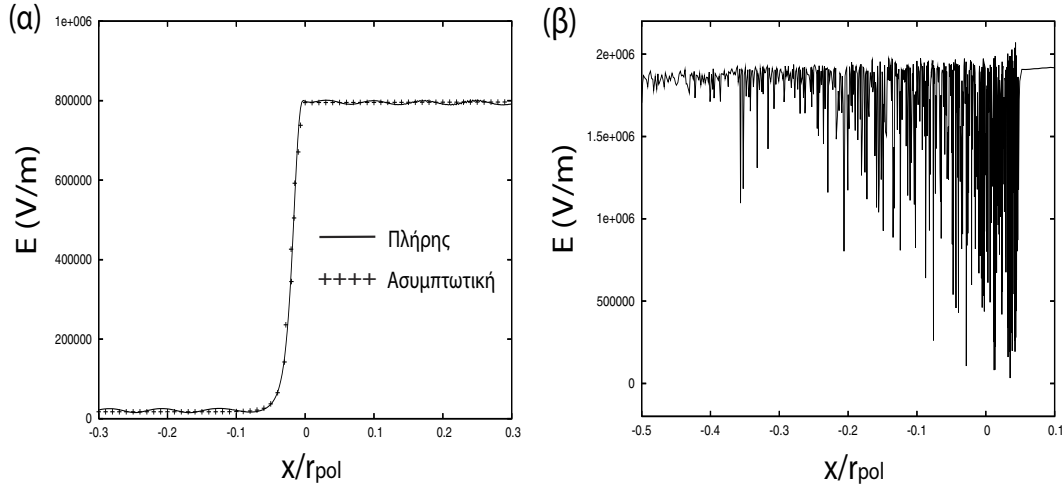
Σχήμα 5.6: Προσομοίωση FDTD για κινητικό και ασθενώς σχετικιστικό πλάσμα με παραμέτρους AUG: (α) Profile του πλάτους E , (β) Profile του πλάτους j .

profiles των E και j . Η απορρόφηση του κύματος είναι και εδώ υψηλά εντοπισμένη. Σε αυτή την περίπτωση, λόγω της συγκεκριμένης τιμής του μαγνητικού πεδίου, η ζώνη συντονισμού μετατοπίζεται προς την high-field side. Η συμπεριφορά του πλάτους της πυκνότητας ρεύματος είναι ίδια με παραπάνω, λαμβάνοντας μάλιστα υπόψη ότι είναι η περιβάλλουσα της καμπύλης του Σχ. 5.7(β).

Σαν κατάληξη, ελέγχουμε και σχολιάζουμε την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων της μεθόδου μας. Αυτό μπορεί να γίνει στο πλαίσιο ασυμπτωτικών μεθόδων, τα αποτελέσματα των οποίων είναι δυνατό να συγκριθούν άμεσα με τα δικά μας αριθμητικά αποτελέσματα. Για τον έλεγχο χρησιμοποιούμε τη μέθοδο εντοπισμού δέσμης, και η αριθμητική υλοποίηση γίνεται από τον κώδικα NGBT (βλ. Κεφ. 3 και Παράρτ. B.1). Σε αντίθεση με τον κώδικα ECFW1D, ο οποίος προσομοιώνει την απόκριση του πλάσματος στο πλαίσιο του διηλεκτρικού τανυστή για κινητικό και ασθενώς σχετικιστικό πλάσμα, ο NGBT ακολουθεί τη λογική των κωδίκων που βασίζονται σε ασυμπτωτικές μεθόδους και θεωρεί διάδοση σε ψυχρό πλάσμα, με τα κινητικά φαινόμενα να υπεισέρχονται μόνο στην εξέλιξη του πλάτους κύματος σύμφωνα με τις τιμές του οπτικού βάθους του κινητικού πλάσματος. Ενδεικτικά, στο Σχ. 5.8(α) συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του ECFW1D με αυτά του NGBT για τις ίδιες παραμέτρους με αυτές του Σχ. 5.6. Φαίνεται ότι, παρά τις σημαντικές διαφορές στη δομή των φυσικών μοντέλων, η συμφωνία των αποτελεσμάτων μεταξύ των δύο κωδίκων είναι πάρα πολύ καλή. Αυτό συμβαίνει διότι, σε επίπεδη γεωμετρία, η κυκλοτρονική απορρόφηση περιγράφεται ολοκληρωτικά από το αντιστοιχιστικό τμήμα του διηλεκτρικού τανυστή. Συνεπώς, η απόθεση της κυματικής ενέργειας σαν συνάρτηση του x είναι τελείως ανεξάρτητη από τις λεπτομέρειες της τροχιάς της δέσμης. Συγκεκριμένα, το οπτικό βάθος του επίπεδου πλάσματος δε μεταβάλλεται λόγω της επίδρασης των κινητικών φαινομένων στη διάδοση του κύματος (βλ. [Westerhof 1997] για λεπτομέρειες).



Σχήμα 5.7: Προσομοίωση FDTD κινητικού και ασθενώς σχετικιστικού πλάσματος για παραμέτρους ITER: (α) Χρονική εξέλιξη της συνιστώσας E_z στο σημείο $x = -0.5r_{pol}$, (β) Profile του πλάτους j_z , (γ) Profile του πλάτους E , (δ) Profile του πλάτους j .



Σχήμα 5.8: (α) Σύγκριση της πλήρους λύσης (ECFW1D) με την ασυμπτωτική λύση (NGBT), (β) "Έκρηξη" (blow-up) της πλήρους λύσης κοντά στο βασικό συντονισμό στο μοντέλο ψυχρού πλάσματος.

5.5 Συμπεράσματα-Συζήτηση

Παρουσιάσαμε ένα μοντέλο για την επίλυση των εξισώσεων Maxwell χωρίς προσεγγίσεις (σε αντίθεση με τις ασυμπτωτικές μεθόδους) βασισμένο στη μέθοδο FDTD. Γι' αυτό τον τύπο προβλημάτων, οι ασυμπτωτικές μέθοδοι στο πεδίο συχνοτήτων χρησιμοποιούνται ευρύτατα λόγω της δυνατότητας να υπολογιστούν αναλυτικές εκφράσεις για την απόκριση του πλάσματος. Για ένα κύμα σταθερής συχνότητας που διαδίδεται σε στατικό πλάσμα (η πιο συνηθισμένη προσέγγιση για την προσομοίωση πειραμάτων ECRH/ECCD), η FDTD είναι δυνατό να εφαρμοστεί απευθείας χρησιμοποιώντας τη διηλεκτρική απόκριση του πλάσματος όπως υπολογίζεται στο πεδίο συχνοτήτων. Σαν επέκταση του αλγορίθμου που παρουσιάστηκε από τους Schneider και Hudson [Schneider and Hudson 1993], παράγεται ο αλγόριθμος σχεδιαζόμενου πεδίου για ανισοτροπικό πλάσμα. Σαν εφαρμογή του αλγορίθμου αυτού, μελετάται η διάδοση EC κύματος σε επίπεδη γεωμετρία. Η συγκεκριμένη γεωμετρία επιτρέπει μια απλούστερη περιγραφή της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος, βασισμένη στον 1-διάστατο αλγόριθμο FDTD. Ο κώδικας ECFW, ο οποίος υλοποιεί αριθμητικά τα παραπάνω, μελετά όλα τα σχετικά φαινόμενα χρησιμοποιώντας διαφορετικά φυσικά μοντέλα για τη διηλεκτρική απόκριση. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων του ECFW με τα αποτελέσματα κώδικα βασισμένου στην ασυμπτωτική μέθοδο εντοπισμού δέσμης (NGBT) αποδείχθηκε επιτυχής.

Τα κύρια αποτελέσματα συνοψίζονται ως ακολούθως: Σε όλες τις περιπτώσεις για την κατάσταση του πλάσματος (ψυχρό, θερμό ή κινητικό), τα πεδία $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ φτάνουν σε κατάσταση στατικότητας (steady-state) ύστερα από ένα χαρακτηριστικό χρόνο. Αυτό ήταν αναμενόμενο λόγω της έλλειψης χρονικής εξάρτησης από τις παραμέτρους του πλάσματος. Σε ψυχρό/θερμό πλάσμα, το πλάτος του ηλεκτρικού

πεδίου παραμένει σταθερό κατά μήκος της διάδοσης, διότι οι προσεγγίσεις αυτές δε συμπεριλαμβάνουν την περιγραφή της απορρόφησης του κύματος λόγω του κυκλοτρονικού συντονισμού. Σε σύνδεση με αυτό, το πλάτος της πυκνότητας ρεύματος που δημιουργείται απ' το κύμα δεν παρουσιάζει σημαντική μεταβολή. Σε κινητικό πλάσμα, η απορρόφηση του κύματος συμβαίνει σε μια πολύ στενή περιοχή, τη ζώνη συντονισμού, η οποία καθορίζεται απ' τη συχνότητα του κύματος και το profile του μαγνητικού πεδίου του πλάσματος. Πιο συγκεκριμένα, η θέση της ζώνης συντονισμού πάνω στον άξονα x είναι "ελεγχόμενη", δηλ. μπορεί να μετατοπιστεί προς την low-field side ή την high-field side, μεταβάλλοντας είτε τη συχνότητα είτε το μαγνητικό πεδίο. Η πυκνότητα ρεύματος που δημιουργείται είναι επίσης πολύ εντοπισμένη στο χώρο, πρακτικά μόνο εντός της ζώνης συντονισμού.

Ας δούμε τους κυριότερους περιορισμούς του μοντέλου μας. Στο πλαίσιο της 1-διάστατης γεωμετρίας δεν είναι δυνατό να μελετήσουμε τη διάδοση σε δύο διαστάσεις (π.χ. υπό γωνία με το μαγνητικό πεδίο). Κατά συνέπεια, δεν είναι δυνατή η περιγραφή πολύ σημαντικών φαινομένων όπως η μετατροπή ρυθμού πόλωσης (mode conversion), η οδήγηση ρεύματος (ECCD) και η θέρμανση πλάσματος σε περιοχές μακριά απ' το μαγνητικό άξονα (off-axis heating), όπως επίσης και φαινομένων που σχετίζονται με τη μεταβολή του profile της κυματικής δέσμης (εστίαση, περίθλαση). Αυτά τα θέματα μπορούν να μελετηθούν μόνο με το 2-διάστατο ή/και 3-διάστατο αλγόριθμο FDTD, η υλοποίηση των οποίων είναι θέμα μελλοντικής μας δουλειάς. Βέβαια, οι υπολογιστικές ανάγκες αυτών των προβλημάτων είναι αρκετά μεγάλες, και αυτό είναι ένα ζήτημα που θα πρέπει να είναι επίσης μέρος της έρευνας.

Ένας άλλος περιορισμός είναι ότι, όταν η απόκριση του πλάσματος περιγράφεται στο πλαίσιο του διηλεκτρικού ταχυστή, δεν είναι δυνατό να προσομοιωθεί σωστά η διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων κοντά στον κυκλοτρονικό συντονισμό 1^{ης} τάξης σε ψυχρό/θερμό πλάσμα. Σε αυτή την περίπτωση, η αριθμητική λύση είναι ασταθής, όπως φαίνεται χαρακτηριστικά και στο Σχ. 5.8(β). Αυτό δεν είναι πρόβλημα της αριθμητικής μεθόδου, αλλά προκύπτει από την ίδια τη θεωρητική περιγραφή. Πιο συγκεκριμένα, στην περιγραφή του πλάσματος ως σύνολο μη αλληλεπιδρώντων ηλεκτρονίων ή ως ρευστό, όπως φαίνεται καθαρά απ' την Εξ. (5.20), τα στοιχεία του διηλεκτρικού ταχυστή δεν ορίζονται όταν $\omega \approx \omega_{ce}$, ενώ στην κινητική περιγραφή τα στοιχεία του ταχυστή ορίζονται κανονικά σε όλες τις περιπτώσεις.

Τέλος, στην τρέχουσα μορφή του μοντέλου μας, η διηλεκτρική απόκριση προκύπτει από τη γραμμική θεωρία ταλαντώσεων πλάσματος. Έτσι, λείπει η περιγραφή μη γραμμικών φαινομένων όπως π.χ. η ανώμαλη διάχυση των ηλεκτρονίων εγχάρσια στο μαγνητικό πεδίο (βλ. Κεφ. 2) και η ασυμφωνία ανάμεσα στη φάση του κύματος και τη φάση της περιστροφής των ηλεκτρονίων (βλ. Κεφ. 4). Σε αυτή την κατεύθυνση, μια άμεση επέκταση της περιγραφής είναι να υπολογίσουμε την πυκνότητα ρεύματος με βάση ηλεκτρόνια που κινούνται επάνω στο αριθμητικό πλέγμα. Οι τροχιές των ηλεκτρονίων μπορούν να υπολογιστούν από τις διακριτοποιημένες εξισώσεις κίνησης ή με άλλες διαθέσιμες μεθόδους.

6. ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ-ΠΡΟΟΠΤΙΚΕΣ

Σε αυτό το κεφάλαιο πραγματοποιούμε μια ανακεφαλαίωση, δίνοντας έμφαση στα κυριότερα αποτελέσματα και την προσφορά της διατριβής αυτής στην καλύτερη κατανόηση της αλληλεπίδρασης πλάσματος-κύματος στη φύση και το εργαστήριο. Ακόμη, κάνουμε μια συζήτηση γύρω από τις πιθανές επεκτάσεις της διατριβής, ειδικότερα σε θέματα που αφορούν τη θέρμανση πλάσματος, την οδήγηση μη επαγόμενων ρευμάτων και την αντιμετώπιση μαγνητοϋδροδυναμικών/κινητικών ασταθειών σε πειραματικούς αντιδραστήρες ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης.

6.1 Ανακεφαλαίωση-Κύρια σημεία

Στη διατριβή αυτή ασχοληθήκαμε με τη θεωρητική μελέτη της αλληλεπίδρασης υψίσυχνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με πλάσμα και τις εφαρμογές της. Η αλληλεπίδραση φορτισμένων σωματιδίων με ηλεκτροστατικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα αποτελεί τη βάση για την περιγραφή και κατανόηση πολλών φαινομένων, όπως π.χ. την επιτάχυνση ηλεκτρονίων και τις αστάθειες πλάσματος σε αστροφυσικά συστήματα και επιταχυντές. Αναλύσαμε τη διάδοση και απορρόφηση ακτινοβολίας με συχνότητα κοντά ή πολλαπλάσια με τη συχνότητα περιστροφής των ηλεκτρονίων γύρω απ' το μαγνητικό πεδίο, με στόχο την καλύτερη κατανόηση της εξέλιξης του κύματος και του πλάσματος. Στην ανάλυση λάβαμε υπόψη (α) τη μη γραμμική αλληλεπίδραση κύματος-φορτίου, (β) τον κινητικό χαρακτήρα του πλάσματος, (γ) τη σύνθετη γεωμετρία της κυματικής δέσμης. Εν γένει, η προσέγγιση του ψυχρού πλάσματος για την κυματική διάδοση, η γραμμική θεωρία ταλαντώσεων πλάσματος για την απορρόφηση του κύματος και η ημιγραμμική θεωρία για την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων παρέχουν μια ικανοποιητική περιγραφή της εξέλιξης του ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο πλάσμα. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου η ισχύς των θεωριών αυτών είναι αμφίβολη, όταν τα κινητικά ή/και τα μη γραμμικά φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο.

Τα αποτελέσματα της διατριβής αναλύονται σε τέσσερα κεφάλαια (Κεφ. 2-5). Στο Κεφ. 2 ασχοληθήκαμε με την επίδραση υψίσυχνων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε αραιό μαγνητισμένο πλάσμα. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, το ποσοστό των χαοτικών τροχιών είναι συνάρτηση του πλάτους του κύματος. Για ένα μεγάλο εύρος τιμών του πλάτους, ο χώρος φάσεων είναι ένα πολύπλοκο μίγμα οργανωμένων και χαοτικών τροχιών, και η δυναμική συμπεριφορά ξεφεύγει απ' τα συνηθισμένα πλαίσια. Ειδικότερα, η μορφή της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων έρχεται σε αντίθεση με τη λύση της εξίσωσης FP (υπολογίζεται με βάση την ημιγραμμική θεωρία), κάτι που υποδηλώνει την ύπαρξη ανώμαλης διάχυσης στο σύστημα.

Από το παρελθόν είναι ήδη γνωστό πως η αλληλεπίδραση ιόντων με ηλεκτροστατικά κύματα χαρακτηρίζεται από ανώμαλη διάχυση. Δείξαμε, για πρώτη φορά, ότι στην αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικά κύματα η εξέλιξη του συστήματος ακολουθεί ανώμαλη διάχυση [Tsironis and Vlahos 2005]. Καταλήξαμε στο συμπέρασμα αυτό από τρεις διαφορετικές οπτικές γωνίες: (α) Ο υπολογισμός της δύναμης Lorentz έδειξε ότι είναι ισχυρά ανομοιογενής κατά μήκος των τροχιών, οδηγώντας το κέντρο-οδηγό σε μια αλληλουχία από ομαλά "άλματα" ανάμεσα σε περιοχές παγίδευσης, (β) Ο υπολογισμός της μέσης τιμής των μεταβολών της θέσης έδειξε πως η διάχυση των ηλεκτρονίων υπακούει απλό νόμο δύναμης με εκθέτες μικρότερους του 1 (υποδιάχυση), (γ) Ο υπολογισμός της ακτινοβολίας cyclotron έδειξε ότι η μορφή του φάσματος μεταβάλλεται ακαθόριστα ανάλογα με το πόσο αλλάζει η δυναμική της τροχιάς. Τα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, η χρήση της ημιγραμμικής θεωρίας δεν παρέχει αξιόπιστη περιγραφή. Βέβαια, οι τιμές των παραμέτρων και η γεωμετρία στην οποία αναφέρονται οι υπολογισμοί παραπέμπουν στο ιονοσφαιρικό πλάσμα, οπότε δε μπορούμε να εξάγουμε γενικότερα συμπεράσματα. Στην υπάρχουσα αρθρογραφία υπάρχει ακόμη διχογνωμία πάνω σε αυτό το ζήτημα και απαιτείται περαιτέρω διερεύνηση.

Στο Κεφ. 3 μελετήσαμε τη διάδοση κυματικών δεσμών με non-Gaussian profile ηλεκτρικού πεδίου, στο πλαίσιο της ασυμπτωτικής μεθόδου εντοπισμού δέσμης. Η απαιτούμενη αλληλουχία υπολογισμών για τον εντοπισμό δεσμών με profile ηλεκτρικού πεδίου γενικού σχήματος είναι η εξής: (α) Ανάλυση του profile σε ρυθμούς Gauss-Hermite, (β) Γενίκευση της παραμέτρου του εύρους δέσμης, (3) Υπολογισμός της κυκλοτρονικής απόσβεσης των ρυθμών ανώτερης τάξης. Διαπιστώθηκε ότι η μέθοδος εντοπισμού δέσμης, με τον τρόπο που είχε διατυπωθεί αρχικά από τον Pereverzev [Pereverzev 1998], χρειαζόταν κάποιες μετατροπές ώστε να μπορεί να παρέχει ορθή περιγραφή των non-Gaussian δεσμών.

Η μελέτη ενός απλού προβλήματος, της διάδοσης μιας non-Gaussian δέσμης με ένα μόνο ρυθμό ανώτερης τάξης σε πλάσμα με επίπεδη γεωμετρία, οδήγησε σε σημαντικά συμπεράσματα: (α) Το γενικευμένο εύρος δέσμης αυξάνεται ως συνάρτηση της τάξης και του πλάτους του ρυθμού ανώτερης τάξης, ενώ εξαρτάται από τη συνολική μετατόπιση φάσης σε ορισμένες μόνο περιπτώσεις, (β) Η επίδραση της κυκλοτρονικής απορρόφησης στο εύρος γίνεται σημαντική για ρυθμούς πολύ υψηλής τάξης και με μεγάλο πλάτος, (γ) Όταν δεν υπάρχει εξάρτηση απ' τη θ_{mn} , η συμπεριφορά είναι παρόμοια για κύμα με πόλωση O και με πόλωση X , ενώ στην αντίθετη περίπτωση υπάρχουν διαφορές. Ο υπολογισμός της διάδοσης non-Gaussian δέσμης στη γραμμή εκπομπής συστήματος ECRH κατέδειξε πως με χρήση μιας non-Gaussian δέσμης με κατάλληλο profile είναι δυνατό να επιτευχθεί (α) μείωση της πυκνότητας ενέργειας της δέσμης, (β) εντονότερη εστίαση μέσα στο πλάσμα σε σχέση με τις Gaussian δέσμες [Tsironis et al 2006]. Τα αποτελέσματα αυτά ανοίγουν το δρόμο για την αναβάθμιση των υπαρχόντων κωδίκων εντοπισμού δέσμης ώστε να συμπεριλάβουν την προσομοίωση της διάδοσης και απορρόφησης οποιουδήποτε τύπου κυματικής δέσμης, όπως και για τη δημιουργία ενός μοντέλου για την περιγραφή μεταβολών στο profile του ηλεκτρικού πεδίου λόγω ασυμμετρίας, ανομοιογένειας ή/και ισχυρού εντοπισμού στην απορρόφηση εντός του πλάσματος.

Στο Κεφ. 4 πραγματοποιήθηκε μια μη γραμμική και αυτοσυνεπής μελέτη της αλληλεπίδρασης κύματος-σωματιδίου. Η διαφορά με τα δύο προηγούμενα κεφάλαια έγκειται στο ότι συμπεριλαμβάνεται η επίδραση των κινήσεων των ηλεκτρονίων στη δυναμική εξέλιξη του κύματος [Tsironis and Vlahos 2006]. Συγκεκριμένα, το πλάσμα περιγράφεται στο πλαίσιο στατιστικών δειγμάτων ηλεκτρονίων, τα οποία δρουν συλλογικά και καθορίζουν τη χρονική εξέλιξη του πλάτους και της συχνότητας του κύματος μέσω της πυκνότητας ρεύματος. Το πρόβλημα προς επίλυση αποτέλεσε η προσομοίωση της κυκλοτρονικής απορρόφησης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε απλοποιημένη γεωμετρία tokamak. Τα κύρια αποτελέσματα συνοψίζονται ως εξής: (α) Η απορρόφηση του κύματος υπολογίζεται αρκετά μειωμένη σε σύγκριση με τον υπολογισμό με βάση τη γραμμική θεωρία, με τη μείωση να αυξάνεται ως συνάρτηση της ισχύος του κύματος και της γωνίας που σχηματίζει η διεύθυνση διάδοσης με το μαγνητικό πεδίο, (β) Η συχνότητα έχει μια χρονική μεταβολή μη γραμμικής φύσεως, συγκεκριμένα μια μη γραμμική ταλάντωση γύρω από την αρχική της τιμή. Το αποτέλεσμα (β) υποδηλώνει ότι η δυναμική των ηλεκτρονίων δεν επιδρά μόνο στην απορρόφηση αλλά επεμβαίνει και στα χαρακτηριστικά της διάδοσης της δέσμης.

Οι περιορισμοί του συγκεκριμένου μοντέλου είναι σημαντικοί. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι, κατά τους υπολογισμούς, δε λαμβάνεται υπόψη (α) η χωρική μεταβολή των παραμέτρων του κύματος (κυματόνυσμα) και του πλάσματος (πυκνότητα, θερμοκρασία, μαγνητικό πεδίο), (β) το ότι η αριθμητική ευστάθεια των προσομοιώσεων εξαρτάται απ' τον αριθμό των ηλεκτρονίων που χρησιμοποιούνται για τη στατιστική περιγραφή του πλάσματος, (γ) ότι κάποια ηλεκτρόνια εισέρχονται ή επανέρχονται στην περιοχή της αλληλεπίδρασης κατά τη διάρκεια των προσομοιώσεων. Παρόλα αυτά, τα αποτελέσματα αποτελούν άλλη μία σημαντική ένδειξη του ότι η ισχύς της γραμμικής θεωρίας ταλαντώσεων πλάσματος σε ορισμένες περιπτώσεις πρέπει να επανεξεταστεί.

Η πολυπλοκότητα των θεμάτων που είναι σήμερα στο επίκεντρο της έρευνας προϋποθέτει τη χρήση ρεαλιστικών προσομοιώσεων. Με αυτή τη λογική, στο Κεφ. 5 ασχοληθήκαμε με την υλοποίηση ενός πληρέστερου μοντέλου, το οποίο να συμπεριλαμβάνει όσα το δυνατόν περισσότερα απ' τα χαρακτηριστικά που εξετάσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Παρουσιάσαμε ένα μοντέλο βασισμένο στον αλγόριθμο FDTD, το οποίο δεν είναι το πληρέστερο δυνατό, καθώς είναι γραμμικό και δεν είναι αυτοσυνεπές. Έχοντας όμως σαν βασικό χαρακτηριστικό τη βέλτιστη περιγραφή της εξέλιξης του κυματικού πεδίου (χωρίς προσεγγίσεις σαν αυτές των ασυμπτωτικών μεθόδων), είναι το πρώτο βήμα για τη δημιουργία ενός υβριδικού μοντέλου για τη μελέτη του συστήματος πλάσμα-κύμα.

Για ένα κύμα με σταθερή συχνότητα που διαδίδεται σε στατικό πλάσμα, η μέθοδος FDTD εφαρμόζεται απευθείας χρησιμοποιώντας τη διηλεκτρική απόκριση του πλάσματος στο πεδίο συχνοτήτων. Επεκτείναμε τη μέθοδο των Schneider και Hudson [Schneider and Hudson 1993] διατυπώνοντας τον αλγόριθμο σχεδιαζόμενου πεδίου για ανισοτροπικό πλάσμα, και τον υλοποιήσαμε στον κώδικα ECFW, ο οποίος έχει τη δυνατότητα χρήσης διαφορετικών φυσικών μοντέλων για τη διηλεκτρική απόκριση [Tsironis et al 2007]. Σαν παράδειγμα, έγινε μια αριθμητική εφαρμογή για 1-διάστατη διάδοση σε επίπεδη γεωμετρία, και τα κύρια αποτελέσματα είναι τα εξής:

(α) Σε όλες τις προσεγγίσεις για το πλάσμα, τα πεδία $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ φτάνουν σε steady-state ύστερα από ένα χαρακτηριστικό χρόνο, (β) Σε ψυχρό/θερμό πλάσμα, το πλάτος $\mathbf{E}$ παραμένει σταθερό κατά μήκος της διάδοσης, διότι οι προσεγγίσεις αυτές δε συμπεριλαμβάνουν την περιγραφή της κυκλοτρονικής απορρόφησης, (γ) Σε κινητικό πλάσμα, η απορρόφηση γίνεται σε μια πολύ στενή περιοχή (ζώνη συντονισμού), της οποίας η θέση εντός του πλάσματος καθορίζεται απ' τη συχνότητα του κύματος και το profile του μαγνητικού πεδίου.

6.2 Προοπτικές και μελλοντικές κατευθύνσεις

Η πολυπλοκότητα των ανοικτών προβλημάτων στη θεωρία, καθώς και η ερμηνεία πειραματικών αποτελεσμάτων, απαιτούν τη χρήση μοντέλων που να προσομοιώνουν όσο το δυνατόν περισσότερες φυσικές αρχές. Για το συγκεκριμένο πρόβλημα της αλληλεπίδρασης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων με πλάσμα, αυτό σημαίνει μια αυτοσυνεπή περιγραφή με τις λιγότερες δυνατές προσεγγίσεις. Όσον αφορά τον υπολογισμό της απόκρισης του πλάσματος, η βέλτιστη αντιμετώπιση είναι να λυθεί αριθμητικά η κινητική εξίσωση και όλες οι ποσότητες να υπολογίζονται με βάση τη συνάρτηση κατανομής. Εναλλακτικά, η συνάρτηση κατανομής μπορεί να υπολογιστεί κατά προσέγγιση από τη στατιστική ταξινόμηση των τροχιών ενός μεγάλου πληθυσμού ηλεκτρονίων. Εν γένει, η χρήση σωματιδίων στην περιγραφή φυσικών προβλημάτων έχει το κόστος του υψηλού υπολογιστικού φόρτου. Συνεπώς, το να γίνουν παραδοχές που οδηγούν σε απλοποιημένες περιγραφές είναι μια αναγκαιότητα. Ταυτόχρονα λοιπόν με την προσπάθεια για τη δημιουργία του πληρέστερου δυνατού μοντέλου, είναι αναγκαία και η μελέτη προβλημάτων πιο απλών, απ' τα οποία όμως μπορούμε να εξάγουμε πολύ σημαντικά φυσικά συμπεράσματα.

Ένα ανοικτό θέμα που είναι πολύ σημαντικό, ειδικά για τα πειράματα που πρόκειται να διεξαχθούν στον ITER, είναι ο ρόλος των μη γραμμικών φαινομένων στα πειράματα ECRH/ECCD. Πρόσφατα αποτελέσματα υποδεικνύουν ότι οι φυσικές συνέπειες της μη γραμμικότητας εμφανίζονται για παραμέτρους σχετικές με τους σύγχρονους αντιδραστήρες σύντηξης, και τόσο η γραμμική όσο και η ημιγραμμική θεωρία παύουν να δίνουν σωστή περιγραφή. Μια κατάλληλη μέθοδος πρέπει να λαμβάνει υπόψη τον πλήρη μη γραμμικό χαρακτήρα της αλληλεπίδρασης κύματος-σωματιδίου. Αυτό μπορεί να υλοποιηθεί με αναλυτικές μεθόδους (θεωρία κανονικών διαταραχών, μετασχηματισμός Lie) ή αριθμητικούς αλγορίθμους (κώδικες που υπολογίζουν τις τροχιές σωματιδίων). Για παράδειγμα, στο μοντέλο που παρουσιάστηκε στο Κεφ. 5 η απόκριση του πλάσματος είναι στο πλαίσιο της γραμμικής θεωρίας, και συνεπώς λείπει η περιγραφή μη γραμμικών φαινομένων. Μια άμεση επέκταση του μοντέλου αυτού είναι να υπολογίσουμε την πυκνότητα ρεύματος με βάση φορτία που κινούνται πάνω στο αριθμητικό πλέγμα.

Η διάδοση και απορρόφηση δεσμών EC ακτινοβολίας με non-Gaussian κατανομή ηλεκτρικού πεδίου είναι ένα πολύ σημαντικό θεωρητικό και πρακτικό πρόβλημα. Εκτός από τη δυνατότητα περιγραφής της εξέλιξης πολύπλοκων κυματικών δεσμών στο πλάσμα, η μελέτη των non-Gaussian δεσμών είναι καθοριστική για την επέκταση της μεθόδου που χρησιμοποιείται σήμερα για τον υπολογισμό της απορρόφησης του

κυκλοτρονικού κύματος. Ένα πιο ρεαλιστικό μοντέλο θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει την επίδραση του ισχυρού εντοπισμού, της ασυμμετρίας και της ανομοιογένειας στην απορρόφηση της δέσμης. Μία βελτίωση των υπάρχοντων μεθόδων έγκειται στο να περιγραφούν οι μεταβολές στην κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου της δέσμης μέσω της δημιουργίας ρυθμών Gauss-Hermite ανώτερης τάξης, οι οποίοι είναι δυνατό να ανταλλάσσουν ενέργεια μεταξύ τους.

Η μελέτη των παραπάνω θεμάτων μπορεί να γίνει και στο πλαίσιο μεθόδων που λύνουν την κυματική εξίσωση χωρίς προσεγγίσεις, όπως π.χ. η αριθμητική μέθοδος FDTD. Παρά τα πλεονεκτήματα της μεθόδου FDTD, ως σήμερα έχει εφαρμοστεί ελάχιστα στην προσομοίωση της διάδοσης κυμάτων σε πλάσμα σύντηξης. Με τη μέθοδο αυτή είναι δυνατός ο απευθείας υπολογισμός φαινομένων όπως λ.χ. η μετατροπή ρυθμού πόλωσης, η θέρμανση πλάσματος σε περιοχές μακριά απ' το μαγνητικό άξονα, καθώς και φαινομένων που συνδέονται με το profile της δέσμης (π.χ. εστίαση, περίθλαση), τα οποία οι ασυμπτωτικές μέθοδοι αδυνατούν να υπολογίσουν χωρίς την προσθήκη επιπλέον παραδοχών. Βέβαια, οι υπολογιστικές ανάγκες μιας τέτοιας υλοποίησης είναι αρκετά μεγάλες, όμως αυτή δεν παύει να είναι εφικτή αν αναλογιστούμε την υπολογιστική δύναμη και τις μεθόδους παραλληλισμού κωδίκων που είναι διαθέσιμες σήμερα. Γίνεται αντιληπτό ότι αυτό είναι ένα ζήτημα που θα πρέπει να είναι επίσης μέρος της έρευνας.

Ο ρόλος του μαγνητικού πεδίου του πλάσματος θα πρέπει επίσης να ληφθεί συστηματικά υπόψη. Καταρχήν, η μαγνητική ανομοιογένεια στο tokamak τροποποιεί τη δυναμική της αλληλεπίδρασης κύματος-σωματιδίου. Με αυτό τον τρόπο επηρεάζεται η απορρόφηση και η οδήγηση μη επαγόμενων ρευμάτων σημαντικά σε σχέση με την περίπτωση του ομογενούς μαγνητικού πεδίου. Είναι επίσης σημαντικό σε μια μελέτη να υπάρχει η δυνατότητα να υλοποιείται η πραγματική δομή της μαγνητικής ισορροπίας του tokamak, αλλά και η παρουσία των διάφορων μαγνητοϋδροδυναμικών ασταθειών που έχουν σαν αποτέλεσμα τη δημιουργία μαγνητικών νησίδων. Σε σχέση με αυτό, καθώς τα φαινόμενα ECRH/ECCD αξιοποιούνται ευρύτατα στον έλεγχο τέτοιων ασταθειών, είναι καθοριστικό να εκτιμήσουμε την επίδραση τέτοιων νησίδων στην απορρόφηση και την οδήγηση ρευμάτων.

Συνοπτικά, το κύριο αντικείμενο μιας πληρέστερης μελέτης του όλου προβλήματος πρέπει να είναι η αναβάθμιση των μεθόδων που χρησιμοποιούνται για τη μελέτη της κυκλοτρονικής απορρόφησης του κύματος, της οδήγησης μη επαγόμενων ρευμάτων, της μετατροπής πόλωσης των κυματικών ρυθμών και της δυναμικής συμπεριφοράς της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων. Συγκεκριμένα βήματα προς αυτή την κατεύθυνση είναι τα ακόλουθα: (α) Καθορισμός της σημαντικότητας των μη γραμμικών φαινομένων στην κυματική απορρόφηση και την εξέλιξη της συνάρτησης κατανομής, (β) Διερεύνηση του πραγματικού ρόλου των κινητικών φαινομένων στη διάδοση της κυματικής δέσμης, (γ) Αξιοποίηση των πλεονεκτημάτων της χρήσης non-Gaussian δεσμών σε γραμμές μεταφοράς συστημάτων ECRH, αλλά και στην περαιτέρω θεωρητική μελέτη της κυκλοτρονικής απορρόφησης, (δ) Ανάπτυξη μιας ενοποιημένης περιγραφής της εξέλιξης της συνάρτησης κατανομής των ηλεκτρονίων (πέρα από τη γραμμική και ημιγραμμική προσέγγιση), παρουσία και χωροχρονικά εντοπισμένων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Ως τελικό συμπέρασμα, θεωρούμε ότι η κατανόηση της φυσικής των φαινομένων ECRH/ECCD φαίνεται να ερμηνεύει αρκετά καλά τις συγκεκριμένες διαδικασίες, όμως η πεποίθηση αυτή στηρίζεται κύρια στην επιτυχή περιγραφή ενός αριθμού πειραμάτων παρά στο λεπτομερή έλεγχο της συμφωνίας ανάμεσα στη θεωρία και το πείραμα. Στην πραγματικότητα, είναι υπερβολικά δύσκολο να μετρηθούν διαδικασίες που λαμβάνουν χώρα στον πολύ μικρό όγκο του πλάσματος κοντά στο συντονισμό, όπου και απορροφάται η κυματική ενέργεια. Πρόσφατες ανακαλύψεις στη θεωρία και το πείραμα αναδεικνύουν περιπτώσεις όπου τα μη γραμμικά φαινόμενα παίζουν σημαντικό ρόλο. Την ίδια στιγμή, είναι σημαντικό να μελετηθεί και η ανάδραση της κατανομής των ηλεκτρονίων στην κυματική δέσμη, με σκοπό να καταλήξουμε σε πιο ακριβή αποτελέσματα. Η διατριβή είναι σε αυτή την κατεύθυνση, όμως σε μερικές περιπτώσεις, λόγω των απλοποιήσεων, τα αποτελέσματα είναι ενδεικτικά. Ο χειρισμός προβλημάτων πρακτικού ενδιαφέροντος, όπως είναι η εξισορρόπηση ασταθειών MHD με εφαρμογή ECRH ή ο υπολογισμός του ECCD σε ρεαλιστική μαγνητική γεωμετρία με νησίδες, απαιτεί μια πιο σύνθετη περιγραφή που λαμβάνει υπόψη τη μέγιστη δυνατή φυσική σε συνδυασμό με την πραγματική γεωμετρία.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

A. ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΟΥ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ Θ_{mn} ΣΤΙΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΥ ΔΕΣΜΗΣ

Στο παράρτημα αυτό αναλύονται οι μεταβολές που επιφέρει στις εξισώσεις εντοπισμού δέσμης (στη μορφή με την οποία παρουσιάστηκαν από τον Pereverzen στην [Pereverzen 1998]) η γενίκευση του ορισμού της μετατόπισης φάσης Θ_{mn} από την Εξ. (3.18) στην (3.23). Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε ότι αλλάζουν οι εξισώσεις για την εξέλιξη του πλάτους και η μορφή της μερικής λύσης για το ηλεκτρικό πεδίο, ενώ οι εξισώσεις για το εύρος και την ακτίνα καμπυλότητας δεν επηρεάζονται.

Υπενθυμίζουμε ότι η μεθοδολογία του εντοπισμού δέσμης (beam tracing formalism) για ηλεκτρομαγνητικά κύματα διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Pereverzen στις δημοσιεύσεις [Pereverzen 1996, Pereverzen 1998] και γενικεύτηκε από τον ίδιο στην [Pereverzen 2007]. Το παράρτημα αυτό έχει σαν σκοπό να λειτουργήσει ως "συνδετικός κρίκος" ανάμεσα στις τρεις αυτές δημοσιεύσεις. Σε αυτό το πλαίσιο, ακολουθούμε τη λογική της [Pereverzen 1998] και σημειώνουμε τις εξισώσεις που αλλάζουν σε σχέση με όσες έχουμε αναφέρει στην Υποεν. 3.2.3 και στην Ενότ. 3.3, χωρίς να μπαίνουμε στις λεπτομέρειες των αποδείξεων των τύπων (αυτές υπάρχουν στις ίδιες τις δημοσιεύσεις). Για πρακτικούς λόγους, ακολουθούμε την αρίθμηση των εξισώσεων όπως αυτή έχει καθοριστεί στην [Pereverzen 1998] και οι εξισώσεις που αλλάζουν σημειώνονται με τόνο.

A.1 Αναλλοίωτο των εξισώσεων για τα $s_{\alpha\beta}$, $\phi_{\alpha\beta}$

Για την περιγραφή του σχήματος της δέσμης, ο Pereverzen ορίζει και ένα δεύτερο τοπικό σύστημα συντεταγμένων το οποίο ονομάζει "ενδιάμεσο σύστημα συντεταγμένων δέσμης" (intermediate beam coordinate system) και το συμβολίζει με (s, w_1, w_2) . Κατ' αντιστοιχία με το σύστημα (τ, ξ_1, ξ_2) , η συντεταγμένη s είναι κατά μήκος της διάδοσης και οι (w_1, w_2) περιγράφουν το εγκάρσιο επίπεδο. Οι (w_1, w_2) συνδέονται με τις (ξ_1, ξ_2) με ένα μετασχηματισμό στροφής $w_j = \kappa^{-1/2} \mathfrak{S}_j(\xi_1, \xi_2)$. Η αναγκαιότητα εισαγωγής των συντεταγμένων αυτών έγκειται στο ότι, εν γένει, η τετραγωνική μορφή ϕ δεν είναι διαχωρίσιμη ως προς τις ξ_1, ξ_2 , αλλά ενδέχεται να περιέχει και πεπλεγμένους όρους της μορφής $\xi_1 \xi_2$. Αυτοί οι όροι προκύπτουν απ' την εφαρμογή του μετασχηματισμού στροφής, και αντίστοιχα απαλείφονται με χρήση του αντίστροφου μετασχηματισμού $\mathfrak{S}_j^{-1}$. Στο πλαίσιο του παραρτήματος αυτού δε θα ασχοληθούμε με τις εξισώσεις που εκφράζονται στο ενδιάμεσο σύστημα συντεταγμένων δέσμης ή/και περιέχουν το μετασχηματισμό στροφής. Για λεπτομέρειες επί των αλλαγών στις εξισώσεις αυτές ο αναγνώστης παραπέμπεται στην πρόσφατη δημοσίευση [Pereverzen 2007].

Προς το τέλος της Ενότητας 3.3, περιγράφοντας συνοπτικά τις γενικεύσεις στη θεωρία εντοπισμού δέσμης, δείξαμε τη νέα μορφή της Εξ. (5) στην [Pereverzev 1998]

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda_{ij} \frac{\partial^2 \Psi_{mn}}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{11} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{22} - \frac{1}{2} \sum_{i,j} \Lambda_{ij} \xi_i \xi_j \right] \Psi_{mn} = 0, \quad (5)'$$

η οποία προκύπτει, αντίστοιχα με την (5), αθροίζοντας τις Εξ. (3.21) αφού πρώτα τις πολλαπλασιάσουμε με Λ_{11} , Λ_{22} . Η εξίσωση αυτή είναι πολύ σημαντική καθώς, όπως θα δούμε παρακάτω, από αυτή προκύπτουν οι όποιες αλλαγές στις βασικές εξισώσεις. Η μαθηματική έκφραση της τετραγωνικής μορφής ϕ παραμένει όπως στην Εξ. (10) ($\phi = \sum_{i,j} \delta_{ij} \xi_i \xi_j / 2$). Παρατηρήστε ότι για την περιγραφή της δέσμης στο επίπεδο εγχάρσια της διάδοσης χρειάζεται τόσο το δέλτα του Kronecker όσο και ο τανυστής $\tilde{\Lambda}$: Το πρώτο εμφανίζεται στη ϕ , ενώ ο δεύτερος εμφανίζεται στην χαρακτηριστική εξίσωση για τη συνάρτηση Ψ_{mn} .

Από τις Εξ. (92) (εξισώσεις εντοπισμού ακτίνας για το γεωμετρικό άξονα της δέσμης) και (93) (εξισώσεις εντοπισμού δέσμης εκπεφρασμένες ως προς τα $s_{\alpha\beta}$, $\phi_{\alpha\beta}$), η μόνη που μεταβάλλεται είναι η δεύτερη από τις Εξ. (93):

$$\begin{aligned} \frac{ds_{\alpha\beta}}{d\tau} = & -\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \chi_\alpha \partial \chi_\beta} - \sum_{\alpha'} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \chi_\beta \partial k_{\alpha'}} s_{\alpha\alpha'} - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \chi_\alpha \partial k_{\alpha'}} s_{\beta\alpha'} \right) \\ & - \sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} s_{\alpha\alpha'} s_{\beta\beta'} + \kappa^{-1} \mathcal{N} \sum_{i,j} \Lambda_{ij} \frac{\partial \xi_i}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_j}{\partial \chi_\beta}. \end{aligned} \quad (93)'$$

Οι Εξ. (93) προκύπτουν απ' την Εξ. (3.9) αν αντικαταστήσουμε τη μιγαδική έκφραση $\bar{s}_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + i\phi_{\alpha\beta}$ και χωρίσουμε σε πραγματικό και φανταστικό μέρος. Η Εξ. (94), η οποία ουσιαστικά περιγράφει την τετραγωνική μορφή ϕ στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ($\phi = \sum_{\alpha,\beta} \phi_{\alpha\beta} (\chi_\alpha - \chi_{0\alpha})(\chi_\beta - \chi_{0\beta})/2$), δεν αλλάζει.

Θα ασχοληθούμε τώρα με τις μεταβολές στην Εξ. (95). Ξεκινάμε από τον υπολογισμό του δεξιού μέλους

$$\sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} \phi_{\alpha\alpha'} \phi_{\beta\beta'} = \kappa^{-1} \sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_{\alpha'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_{\alpha'}} \right) \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_\beta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_{\beta'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_\beta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_{\beta'}} \right).$$

Ύστερα απ' τους πολλαπλασιασμούς, προκύπτουν δύο αθροίσματα που το καθένα περιέχει μία απ' τις συντεταγμένες ξ_1 , ξ_2 , και δύο μικτά αθροίσματα που τις περιέχουν και τις δύο. Τα μικτά αθροίσματα είναι μηδέν, διότι οι μεταβλητές ξ_1 , ξ_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Έτσι, η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} \phi_{\alpha\alpha'} \phi_{\beta\beta'} = \kappa^{-1} \sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_\beta} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_{\beta'}} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_{\alpha'}} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_\beta} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_{\beta'}} \right),$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις Εξ. (3.22) η σχέση απλοποιείται σημαντικά. Οι συνθήκες (3.22), όπως ήδη έχουμε αναφέρει στην Ενότητα 3.3, είναι η γενίκευση των συνθηκών (3.19) της αρχικής θεωρίας. Στην [Pereverzev 1998] οι συνθήκες αυτές δε

συναντώνται με τη συγκεκριμένη μορφή αλλά εκφράζονται ως προς τις (s, w_1, w_2) , ενώ στην [Pereverzev 2007] οι νέες συνθήκες εκφράζονται και στα δύο συστήματα συντεταγμένων δέσμης. Τελικά, η νέα μορφή της Εξ. (95) είναι

$$\kappa^{-1} \mathcal{N} \left(\Lambda_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_1}{\partial \chi_\beta} + \Lambda_{22} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_\alpha} \frac{\partial \xi_2}{\partial \chi_\beta} \right) = \sum_{\alpha', \beta'} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha'} \partial k_{\beta'}} \phi_{\alpha\alpha'} \phi_{\beta\beta'}. \quad (95)'$$

Οι μεταβολές στο αριστερό μέλος της Εξ. (95) είναι τέτοιες που οι εξισώσεις εντοπισμού δέσμης (96) δεν αλλάζουν μορφή. Πράγματι, αν αντικαταστήσουμε την (95)' στη δεύτερη από τις Εξ. (93)' (η πρώτη δείξαμε παραπάνω ότι δε μεταβάλλεται), καταλήγουμε στην ίδια μορφή εξισώσεων με τις (96), ενώ και η νέα μορφή της Εξ. (97) (η παλιά μορφή είναι η Εξ. (3.9) στην Υποεν. 3.2.3), η οποία προκύπτει με τη θεώρηση $\bar{s}_{\alpha\beta} = s_{\alpha\beta} + i\phi_{\alpha\beta}$, είναι ίδια με την παλιά. Κατά συνέπεια, η γενίκευση στη μέθοδο εντοπισμού δέσμης (με την εισαγωγή του ταχυστή $\bar{\Lambda}$ για την περιγραφή του σχήματος της δέσμης στο επίπεδο κάθετα στη διάδοση) αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις εντοπισμού δέσμης για τα $s_{\alpha\beta}, \phi_{\alpha\beta}$.

A.2 Διαφοροποίηση των εξισώσεων για τα $\bar{\mathcal{A}}_0, \bar{\mathbf{E}}_{mn}$

Οι διαφορικές εξισώσεις για την εξέλιξη του πλάτους του κύματος στο πλαίσιο της αρχικής θεωρίας εντοπισμού δέσμης (βλ. Εξ. (3.10) και (3.15)) υπολογίζονται στην Υποεν. (V.C) της [Pereverzev 1998]. Υπενθυμίζουμε ότι οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από τους όρους 1^{ης} τάξης του αναπτύγματος του πλάτους σε ασυμπτωτική σειρά με παράμετρο κ , και ότι ο συντελεστής $\bar{C}_{mn}$ είναι το μιγαδικό πλάτος (το αντίστοιχο με αυτό στη μέθοδο εντοπισμού ακτίνας) μετατοπισμένο κατά Θ_{mn} σε σχέση με το γεωμετρικό άξονα της δέσμης ($\bar{C}_{mn} = \bar{\mathcal{A}}_0 e^{i\Theta_{mn}}$).

Οι εξισώσεις που δίνονται στην [Pereverzev 1998], από τις οποίες και προκύπτει η Εξ. (3.10), μεταβάλλονται με τον εξής τρόπο:

$$\hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{M}(\bar{\mathcal{A}}_0 \hat{\mathbf{e}}) + \bar{\mathcal{A}}_0 \left\{ \hat{\mathbf{e}}^* \cdot (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathbf{A}} \cdot \hat{\mathbf{e}}) + i\mathcal{N} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{11} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{22} \right] \right\} = 0, \quad (98)'$$

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}} \cdot \nabla \bar{\mathcal{A}}_0 + \bar{\mathcal{A}}_0 \left\{ \hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{M}(\hat{\mathbf{e}}) + \alpha_L + i\mathcal{N} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{11} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{22} \right] \right\} = 0, \quad (102)'$$

$$\frac{d\bar{\mathcal{A}}_0}{d\tau} + \bar{\mathcal{A}}_0 \left\{ \hat{\mathbf{e}}^* \cdot \mathbf{M}(\hat{\mathbf{e}}) + \alpha_L + i\mathcal{N} \left[\left(m + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{11} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \Lambda_{22} \right] \right\} = 0, \quad (104)'$$

$$\bar{\mathcal{A}}_0(\tau) = \bar{C}_{mn} e^{-i[(m+\frac{1}{2}) \int_0^\tau \Lambda_{11} d\tau + (n+\frac{1}{2}) \int_0^\tau \Lambda_{22} d\tau]}. \quad (105)'$$

Συγκρίνοντας τις παραπάνω εξισώσεις με αυτές της αρχικής θεωρίας, παρατηρούμε ότι οι αλλαγές έχουν να κάνουν μόνο με τη γενίκευση του ορισμού της μετατόπισης φάσης Θ_{mn} από την Εξ. (3.18) στην (3.23). Συνεπώς, η γενική μορφή των εξισώσεων αυτών, δηλ. όταν ο όρος $m+n+1$ (αρχική θεωρία) ή $(m+1/2)\Lambda_{11} + (n+$

$1/2)\Lambda_{22}$ (νέα θεωρία) εκφράζεται στο πλαίσιο της Θ_{mn} , δεν αλλάζει. Το ίδιο συμβαίνει και με τη μερική λύση για το ηλεκτρικό πεδίο: Η γενική μορφή της Εξ. (3.11) δε μεταβάλλεται, ενώ όταν αντικαταστήσουμε τη μετατόπιση φάσης προκύπτουν η αρχική και η νέα μορφή της Εξ. (111)

$$\bar{\mathbf{E}}_{mn} = \frac{\bar{C}_{mn}H_m(\xi_1)H_n(\xi_2)}{\sqrt{\pi}2^{m+n}m!n!} \hat{\mathbf{e}} \cdot e^{iks - \kappa\phi - i[(m+\frac{1}{2})\int_0^\tau \Lambda_{11}d\tau + (n+\frac{1}{2})\int_0^\tau \Lambda_{22}d\tau]}. \quad (111)'$$

Σε όλες τις παραπάνω εξισώσεις, η γενίκευση της αρχικής θεωρίας επιτυγχάνεται με την εισαγωγή του τανυστή $\tilde{\Lambda}$, η οποία χαρακτηρίζει τις βασικές εξισώσεις (5)' και (95)'. Η παράμετρος $\mathcal{N}$ μπορεί να είναι οποιαδήποτε συνάρτηση της συντεταγμένης τ . Μια κατάλληλη επιλογή με φυσικό περιεχόμενο γίνεται στην [Pereverzev 1998], όπου η $\mathcal{N}$ επιλέγεται να είναι η δράση κατά Hamilton (βλ. Εξ. (43))

$$\mathcal{N} = \sum_{\alpha} k_{\alpha} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_{\alpha}}.$$

Αντιθέτως, τα διαγώνια στοιχεία του $\tilde{\Lambda}$ πρέπει να ικανοποιούν μια σχέση-περιορισμό, την Εξ. (3.22) (στην αρχική θεωρία η αντίστοιχη σχέση είναι η (3.19)). Τα Λ_{11} , Λ_{22} υπολογίζονται απ' τη σχέση αυτή με βάση (α) την επιλογή για τη συνάρτηση $\mathcal{N}(\tau)$, (β) τη μορφή του μετασχηματισμού από τις τοπικές συντεταγμένες (τ, ξ_1, ξ_2) στο καρτεσιανό σύστημα (εμπλέκεται μέσω των βαθμίδων $\partial\xi_i/\partial\chi_{\alpha}$).

Είδαμε ότι η γενίκευση της μεθόδου εντοπισμού δέσμης αφήνει αναλλοίωτες τις εξισώσεις για τα $s_{\alpha\beta}$, $\phi_{\alpha\beta}$, ενώ και οι αλλαγές στην εξίσωση για το πλάτος και στη μερική λύση για το πεδίο έχουν να κάνουν μόνο με τη γενίκευση του ορισμού της μετατόπισης φάσης. Όμως, παρόλο το ότι οι αλλαγές στις βασικές εξισώσεις δεν είναι ριζικές, η γενίκευση είναι θεμελιώδης. Αυτό γίνεται εμφανές αν κάποιος συγκρίνει τη μορφή των συνθηκών επιλυσιμότητας της σχέσης διασποράς στις δύο θεωρίες. Στην αρχική θεωρία, η συνθήκη αυτή είναι η $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\xi_1^2 + \xi_2^2)/2$ με περιορισμό την Εξ. (3.19), ενώ στη νέα θεωρία η αντίστοιχη συνθήκη έχει τη μορφή $\mathcal{H} = \mathcal{N}(\Lambda_{11}\xi_1^2 + \Lambda_{22}\xi_2^2)/2$ με περιορισμό την (3.22). Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι, υπό τη νέα διατύπωση, μπορεί να μελετηθεί (σαν ειδική περίπτωση) και η βαθμωτή κυματική εξίσωση, η οποία έχει τη συνθήκη επιλυσιμότητας [Pereverzev 1996]

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_1^2} \xi_1^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_2^2} \xi_2^2 \right),$$

ενώ κάτι τέτοιο δεν είναι δυνατό στο πλαίσιο της αρχικής θεωρίας, τουλάχιστον όπως αυτή παρουσιάστηκε στην [Pereverzev 1998].

B. ΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΚΩΔΙΚΕΣ NGBT ΚΑΙ ECFW1D

Στο παράρτημα αυτό παρουσιάζονται συνοπτικά οι αλγόριθμοι/κώδικες NGBT και ECFW1D, με τους οποίους υπολογίστηκαν τα αριθμητικά αποτελέσματα στα Κεφ. 3 και 5 αντίστοιχα. Ο NGBT υλοποιεί αριθμητικά τη μέθοδο εντοπισμού δέσμης για τον υπολογισμό της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικής δέσμης με non-Gaussian κατανομή ηλεκτρικού πεδίου σε στατικό, ανομοιογενές και ανισότροπο πλάσμα, ενώ ο ECFW1D προσομοιώνει την 1-διάστατη διάδοση και απορρόφηση ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε δυναμικό, ανομοιογενές και ανισότροπο πλάσμα με τη μέθοδο FDTD. Και οι δύο κώδικες έχουν συνταχθεί σε γλώσσα FORTRAN και στη λογική του δομημένου προγραμματισμού, όπου οι λειτουργίες εκτελούνται από υπορουτίνες (subroutines) οι οποίες καλούνται από ένα κυρίως πρόγραμμα (MAIN).

Η παρουσίαση γίνεται όχι τόσο με σκοπό να αναλυθούν οι φυσικές αρχές που υιοθετεί ο κάθε κώδικας (αυτό έχει γίνει στα αντίστοιχα κεφάλαια), αλλά για να εμβυθύνουμε σε τεχνικές λεπτομέρειες σχετικά με την κατασκευή και την εκτέλεση των κωδίκων. Επικεντρώνουμε στα εξής χαρακτηριστικά: (α) Διαμόρφωση του αρχείου εισόδου (input file), (β) Μεταβλητές (αντιστοιχία με τα φυσικά μεγέθη) (γ) Δομή του κώδικα και διάγραμμα ροής, (δ) Ανάλυση της λειτουργίας των υποπρογραμμάτων, (ε) Διαμόρφωση των αρχείων εξόδου (output files). Να σημειώσουμε ότι, για πρακτικούς λόγους, όλες οι μεταβλητές και οι υπορουτίνες/συναρτήσεις που υπάρχουν στους κώδικες θα αναγράφονται με κεφαλαία γράμματα. Οι συμβολισμοί των μεταβλητών είναι ανεξάρτητοι από εκείνους που ορίσαμε στα Κεφ. 3 και 5, και όλες οι αντιστοιχίες επισημαίνονται σε ειδικούς πίνακες.

B.1 Ο κώδικας NGBT

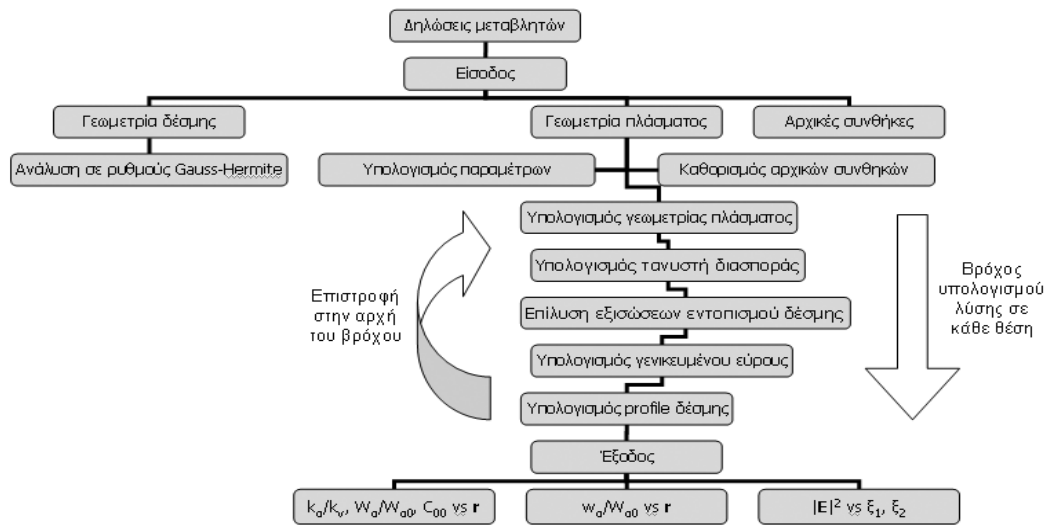
Ο κώδικας NGBT (η ονομασία προέρχεται από τα αρχικά γράμματα των λέξεων Non-Gaussian Beam Tracing) αποτελεί μια αριθμητική υλοποίηση της μεθόδου εντοπισμού δέσμης για τον υπολογισμό της διάδοσης και απορρόφησης κυματικών δεσμών σε στατικό, ανομοιογενές και ανισότροπο πλάσμα. Ο κώδικας δέχεται σαν είσοδο τη δεδομένη γεωμετρία του πλάσματος και τα χαρακτηριστικά της κυματικής δέσμης κατά την εκπομπή και υπολογίζει τη διάδοση στο εσωτερικό του πλάσματος. Στην έξοδο προκύπτουν τα εξής αποτελέσματα: (α) Λύση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης, (β) Γενικευμένο εύρος δέσμης, (γ) Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου (profile). Με τον όρο "εξισώσεις εντοπισμού δέσμης", όπως έχουμε καθορίσει στο Κεφ. 3, αναφερόμαστε στις εξισώσεις για (α) τη θέση και τον κυματάρθρωμο του γεωμετρικού άξονα της δέσμης, (β) το εύρος και την ακτίνα καμπυλότητας του ρυθμού μηδενικής τάξης, (γ) το πλάτος κύματος του κάθε ρυθμού.

Μεταβλητή	Ορισμός	Χαρακτηριστικές τιμές
CFWFC	$\frac{\omega_c}{\omega} _{r=0}$	0.25 – 1
DTAU	Βήμα ολοκλήρωσης ($d\tau$)	0.001 – 0.01 (r_{pol})
ETHC, ETHE	$T_e _{r=0}, T_e _{r=r_{pol}}$	3 – 10, 0.1 – 0.5 (KeV)
IBIM	Αρχικό profile δέσμης	-1: math, 1: datafile
NPOL	Πόλωση κύματος (M=O,X)	-1: O, 1: X
NPROPDIR	Κατεύθυνση διάδοσης	-1: left, 1: right
PFWF2C, PFWF2E	$(\frac{\omega_p}{\omega})^2_{r=0}, (\frac{\omega_p}{\omega})^2_{r=r_{pol}}$	0.2 – 0.5, 0.6 – 0.9
RCY0, RCZ0	R_{y0}, R_{z0}	-1 – 1 (cm)
RTOR, RPOL	r_{tor}, r_{pol}	0.5 – 2, 1.5 – 6.2 (m)
WF2PI	Συχνότητα κύματος	1 – 2 (GHz)
WY0, WZ0	W_{y0}, W_{z0}	2 – 5 (cm)

Πίνακας B.1: Οι μεταβλητές στο αρχείο εισόδου του κώδικα NGBT (με αλφαβητική σειρά). Για κάθε μεταβλητή δίνεται ο ορισμός (ή το αντίστοιχο μέγεθος) και χαρακτηριστικές τιμές για προσομοιώσεις ECRH.

Ο έλεγχος του κώδικα γίνεται από μια κύρια ρουτίνα, η οποία καλεί υπορουτίνες για την εκτέλεση συγκεκριμένων καθηκόντων. Στο εισαγωγικό μέρος γίνονται οι δηλώσεις μεταβλητών και πινάκων για την καταχώρηση των υπολογισμών, καθώς και ο καθορισμός μαθηματικών και φυσικών σταθερών (π.χ. $\sqrt{2}$, c). Στη συνέχεια γίνεται ανάγνωση του αρχείου εισόδου και δημιουργούνται αρχεία εξόδου για την αποθήκευση των αποτελεσμάτων (για τη διαμόρφωση των αρχείων εξόδου θα μιλήσουμε παρακάτω). Οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην είσοδο φαίνονται στον Πίν. B.1. Το αρχείο εισόδου (INITNGBT.DAT) περιέχει τιμές για (α) τα χαρακτηριστικά μεγέθη του πλάσματος (είδος γεωμετρίας, διαστάσεις, profiles μαγνητικού πεδίου/πυκνότητας/θερμοκρασίας), (β) τις παραμέτρους της δέσμης (συχνότητα, πόλωση, κατεύθυνση διάδοσης), (γ) τις αρχικές συνθήκες για το εύρος, την ακτίνα καμπυλότητας και το profile της δέσμης εγκάρσια στη διάδοση. Η γεωμετρία είναι επίπεδη ή τοροειδής (σαν διαστάσεις αντίστοιχα δίνουμε το συνολικό μήκος ή τις r_{tor}, r_{pol}), ενώ τα profiles των B_0 , n_e και T_e είναι αναλυτικές συναρτήσεις των συντεταγμένων (βλ. π.χ. την εφαρμογή της Υποεν. 3.5.1).

Η λειτουργία της κύριας ρουτίνας συνοψίζεται στο Σχ. B.1, όπου δίνεται το λογικό διάγραμμα ροής του NGBT, ενώ οι υπορουτίνες του κώδικα αναφέρονται στον Πίν. B.2. Ύστερα απ' τις δηλώσεις μεταβλητών και την είσοδο, ακολουθεί ο υπολογισμός των βασικών παραμέτρων του κώδικα (βήμα ολοκλήρωσης, κυκλική



Σχήμα B.1: Λογικό διάγραμμα ροής του κώδικα NGBT.

συχνότητα κύματος, μήκος κύματος για διάδοση στο κενό) και ο καθορισμός των αρχικών συνθηκών. Η δέσμη εκπέμπεται από ένα σημείο εκτός της περιοχής που βρίσκεται το πλάσμα, με φορά θετική ή αρνητική, και συνεπώς η αρχική τιμή για τον κυματάρημο είναι εκείνη που αντιστοιχεί σε διάδοση στο κενό. Ανάλογα με την τιμή του δείκτη IBIM, το αρχικό profile της δέσμης δίνεται από μαθηματική σχέση (αναλυτικά) ή από πίνακα τιμών (π.χ. από πειραματικά δεδομένα). Και στις δύο περιπτώσεις, το αρχικό profile αναλύεται σε ρυθμούς Gauss-Hermite, τα πλάτη των οποίων αποτελούν τις αρχικές συνθήκες $\bar{C}_{mn}|_{\tau=0}$. Ο αριθμός των ρυθμών είναι ο μεγαλύτερος για τον οποίο το σφάλμα του αναπτύγματος (όπως το ορίσαμε στην Ενότ. 3.3) δεν ξεπερνά το 1%. Η ανάλυση γίνεται καλώντας την υπορουτίνα GHEXPAN, η οποία δέχεται σαν είσοδο τις τιμές $\bar{\mathbf{E}}(\xi_1, \xi_2)|_{\tau=0}$ και υπολογίζει τα αρχικά πλάτη των ρυθμών με βάση την Εξ. (3.13).

Σε αυτό το σημείο αρχίζει η επαναληπτική διαδικασία για την εύρεση της λύσης σε κάθε θέση. Ο βρόχος (loop) ξεκινά με τον υπολογισμό όλων των χαρακτηριστικών μεγεθών του πλάσματος και των στοιχείων του τανυστή διασποράς, οι οποίοι γίνονται απ' τις υπορουτίνες PLASMAPROF και DISPTENS αντίστοιχα. Έστε-ρα, η κύρια ρουτίνα καλεί την υπορουτίνα BTSOL για την επίλυση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης. Εδώ, ανάλογα με την περίπτωση, υπάρχουν διάφορες επιλογές. Όταν υπάρχει αναλυτική λύση (όπως στην εφαρμογή της Υποεν. 3.5.1) τη χρησιμοποιούμε, καθώς είναι και η πιό ακριβής και η πιό γρήγορη λύση (στην περίπτωση αυτή καλείται και η LINABS για τον υπολογισμό του συντελεστή α_L). Όταν το πρόβλημα αντιμετωπίζεται μόνο αριθμητικά, η λύση υπολογίζεται με "σύζευξη" (coupling) του NGBT με τον κώδικα εντοπισμού δέσμης TORBEAM, διότι στην παρούσα φάση ο NGBT δεν έχει τη δυνατότητα αριθμητικής επίλυσης των συγκεκριμένων εξισώσεων (η υλοποίηση του τμήματος αυτού της BTSOL είναι σε εξέλιξη).

Υπορουτίνα	Λειτουργία
BIMPROF	Υπολογισμός profile ηλεκτρικού πεδίου δέσμης
BTSOL	Επίλυση εξισώσεων εντοπισμού δέσμης
DISPTENS	Υπολογισμός τανυστή διασποράς πλάσματος
GHEXPAN	Ανάλυση profile δέσμης σε ρυθμούς Gauss-Hermite
LINABS	Υπολογισμός γραμμικού συντελεστή απορρόφησης
PLASMAPROF	Καθορισμός γεωμετρίας πλάσματος
RMSWID	Υπολογισμός γενικευμένου εύρους δέσμης

Πίνακας B.2: Οι υπορουτίνες του κώδικα NGBT (με αλφαβητική σειρά).

Για την ολοκλήρωση του βρόχου απομένει ο υπολογισμός των γενικευμένων ευρών και του profile του ηλεκτρικού πεδίου της δέσμης. Ο υπολογισμός του γενικευμένου εύρους γίνεται απ' την υπορουτίνα RMSWID. Η RMSWID δέχεται σαν είσοδο τα εύρη του όρου μηδενικής τάξης και τους δείκτες (m, n) , τα πλάτη r_{mn} και τις μετατοπίσεις φάσης θ_{mn} , και υλοποιεί τη σειρά πράξεων που περιγράφεται στην Ενότητα 3.4. Αντίστοιχα, για τον υπολογισμό του profile της δέσμης καλείται η υπορουτίνα BIMPROF, η οποία βασίζεται ουσιαστικά στην Εξ. (3.25). Η κατασκευή του profile γίνεται με 1000 σημεία εντός της περιοχής $[-10, 10]$ για τις (ξ_1, ξ_2) . Ένα κριτήριο τερματισμού λειτουργίας του βρόχου είναι ο αριθμός των επαναλήψεων να μην ξεπερνά ένα μέγιστο όριο. Ο αριθμός αυτός είναι το πηλίκο της απόστασης που θα διανύσει το κύμα προς το βήμα ολοκλήρωσης. Όμως, η απόσταση αυτή δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή, διότι η δέσμη εν γένει δε διαδίδεται παράλληλα σε κάποια απ' τις καρτεσιανές διευθύνσεις. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το καταλληλότερο κριτήριο είναι να ελέγχουμε αν κάποια απ' τις (x, y, z) ξεπερνά τα όρια της περιοχής που μελετάμε, και όταν συμβαίνει αυτό να τερματίζουμε το βρόχο.

Μετά τη λήξη του βρόχου κλείνουν τα αρχεία εξόδου και η εκτέλεση του κώδικα τερματίζεται. Η αποθήκευση των αποτελεσμάτων στα αρχεία εξόδου πραγματοποιείται εντός του βρόχου, αμέσως μετά τον υπολογισμό των ποσοτήτων σε κάθε θέση. Καθώς, στο αριθμητικό πρόβλημα, για τους υπολογισμούς σε μια θέση δε χρειάζεται να γνωρίζουμε αποτελέσματα απ' τις προηγούμενες, αντιστοιχούμε βαθμωτές μεταβλητές στις ποσότητες αυτές και ελατώνονται οι απαιτήσεις σε μνήμη. Τα αρχεία εξόδου παρουσιάζονται στον Πίν. B.3. Στο αρχείο BEAMPROFILE.DAT γράφονται σε κάθε θέση τα σημεία του profile¹, στο BTSOLUTION.DAT η λύση των εξισώσεων εντοπισμού δέσμης και στο RMSWIDTH.DAT τα γενικευμένα εύρη.

¹ Κατά την αποτύπωση του profile σε γραφήματα (plots) χρειάζεται προσοχή στο να επιλέγονται τα κατάλληλα 1000 σημεία. Στη θέση τ αντιστοιχούν τα σημεία $[1000 \frac{\tau}{d\tau}, 1000 (\frac{\tau}{d\tau} + 1)]$.

Όνομα αρχείου	Διαμόρφωση αποτελεσμάτων
BEAMPROFILE.DAT	$\xi_1, \xi_2, \bar{\mathbf{E}} ^2$
BTSOLUTION.DAT	$\frac{x}{r_{pol}}, \frac{k_x}{k_v}, \frac{W_1}{W_{10}}, \frac{W_2}{W_{20}}, \bar{C}_{00} $
RMSWIDTH.DAT	$\frac{x}{r_{pol}}, \frac{w_1}{W_{10}}, \frac{w_2}{W_{20}}$

Πίνακας B.3: Τα αρχεία εξόδου του κώδικα NGBT (με αλφαβητική σειρά). Για κάθε αρχείο δίνεται η διαμόρφωση των αποτελεσμάτων σε στήλες.

B.2 Ο κώδικας ECFW1D

Ο κώδικας ECFW1D (η ονομασία προέρχεται από τα αρχικά γράμματα των λέξεων Electron-Cyclotron Full-Wave 1-Dimensional) αποτελεί μια προσομοίωση της 1-διάστατης διάδοσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε ανομοιογενές και ανισότροπο πλάσμα με τη μέθοδο FDTD. Στην είσοδο του κώδικα δίνουμε τα χαρακτηριστικά της φυσικής και της γεωμετρίας του πλάσματος και του ηλεκτρομαγνητικού κύματος, τα οποία και καθορίζουν τη δομή του υπολογιστικού χώρου, και ο κώδικας υπολογίζει την εξέλιξη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σε κάθε χρονική στιγμή σε όλο τον υπολογιστικό χώρο. Στην έξοδο παίρνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα: (α) Λύση των εξισώσεων Maxwell (τιμές των πεδίων $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, σε κάθε θέση $\mathbf{r}$ και χρονική στιγμή t), (β) Πυκνότητα ρεύματος $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$, (γ) Profile του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου E και της πυκνότητας ρεύματος j κατά μήκος της διάδοσης.

Η δομή του ECFW1D είναι παρόμοια με αυτή του NGBT που μελετήσαμε παραπάνω (κύρια ρουτίνα που καλεί υπορουτίνες). Μια διαφορά υπάρχει στο ότι οι δηλώσεις μεταβλητών και πινάκων, ο καθορισμός των σταθερών και η απόδοση αρχικών τιμών στις μεταβλητές εισόδου δεν πραγματοποιούνται εντός της κύριας ρουτίνας αλλά στο συμπεριλαμβανόμενο αρχείο INCL1D.FOR. Στον Πίν. B.4 δίνονται οι μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στην είσοδο. Εδώ περιλαμβάνονται τιμές για (α) τη γεωμετρία και τα profiles του μαγνητικού πεδίου, της πυκνότητας και της θερμοκρασίας του πλάσματος, (β) τα χαρακτηριστικά του κύματος (συχνότητα, πόλωση, εύρος δέσμης, αρχική ισχύς), (γ) το χωρικό και χρονικό βήμα για την εκτέλεση του αλγορίθμου FDTD. Η γεωμετρία της διάδοσης είναι επίπεδη 1D (η επέκταση της λειτουργίας του κώδικα σε 2D-3D γεωμετρίες είναι σε εξέλιξη) και τα profiles των χαρακτηριστικών μεγεθών του πλάσματος είναι αναλυτικές συναρτήσεις των συντεταγμένων. Μετά το τέλος της εκτέλεσης των εντολών του αρχείου INCL1D.FOR δημιουργούνται τα αρχεία εξόδου (για τα αρχεία αυτά θα μιλήσουμε παρακάτω).

Το λογικό διάγραμμα ροής του ECFW1D δίνεται στο Σχ. B.2, ενώ οι υπορουτίνες του κώδικα αναφέρονται στον Πίν. B.5. Ύστερα απ' τη δημιουργία των αρχείων εξόδου, υπολογίζονται οι βασικές παράμετροι του κώδικα (χωρικό και χρονικό βήμα, συνολικός αριθμός χρονικών βημάτων) και οι αρχικές συνθήκες (αρχικά πλάτη του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου) απ' την υπορουτίνα INITIALIZE. Στη συ-

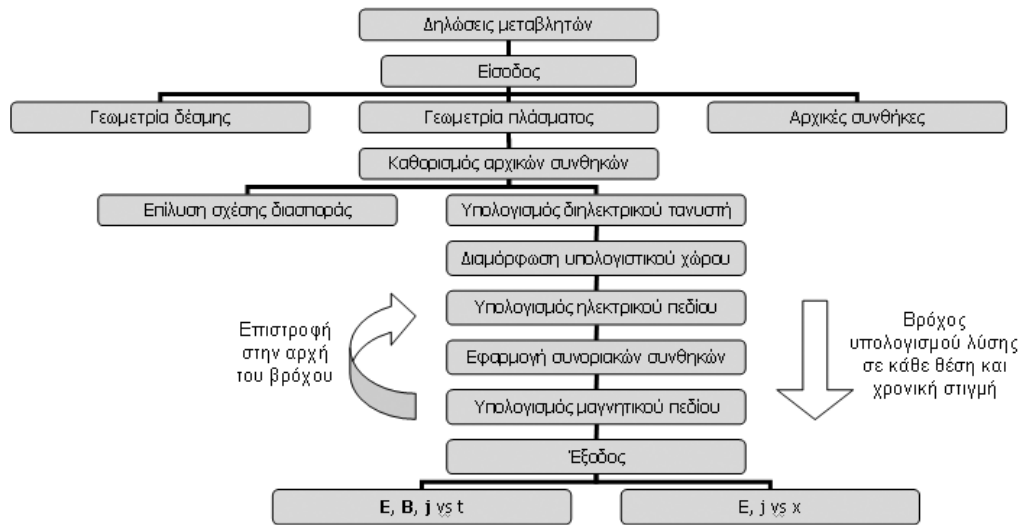
Μεταβλητή	Ορισμός	Χαρακτηριστικές τιμές
B0C	$B_0 _{r=0}$	2 – 5.5 (T)
DELX	Χωρικό βήμα (Δx)	0.01 – 0.2 (λ_v)
DNEC, DNEE	$n_e _{r=0}, n_e _{r=r_{pol}}$	1.5 – 2, 1 – 1.5 (cm^{-3})
ETHC, ETHE	$T_e _{r=0}, T_e _{r=r_{pol}}$	3 – 10, 0.1 – 0.5 (KeV)
FREQ	Συχνότητα κύματος	0.5 – 2 (GHz)
NPOL	Πόλωση κύματος (M=O,X)	-1: O, 1: X
POW0	$\mathcal{P}_0$	1-10 (MW)
RMIN, RMAX	r_{pol}, r_{tor}	0.5 – 2, 1.5 – 6.2 (m)
SFDT	Χρονικό βήμα (Δt)	0.01 – 0.1 ($\frac{\Delta x}{v_p}$)
WBIM	Εύρος δέσμης	2 – 5 (cm)

Πίνακας B.4: Είσοδος του κώδικα ECFW1D: Μεταβλητές (με αλφαβητική σειρά), ορισμός (ή αντίστοιχο μέγεθος) και χαρακτηριστικές τιμές για προσομοιώσεις ECRH.

νέχεια καλείται η υπορουτίνα BUILDSPACE για τη διαμόρφωση του υπολογιστικού χώρου, εντός της οποίας υπολογίζονται οι συντελεστές εξέλιξης των διακριτοποιημένων εξισώσεων του αλγορίθμου FDTD. Όπως είδαμε στην Υποεν. 5.3.1, οι συντελεστές εξέλιξης είναι συναρτήσεις του χωρικού και χρονικού βήματος, καθώς και των στοιχείων του διηλεκτρικού ταχυστή πλάσματος². Τα στοιχεία του ταχυστή υπολογίζονται καλώντας την υπορουτίνα PLASMATENS. Εντός της PLASMA-TENS καλούνται η PLASMAPROF για τον υπολογισμό των ω_c , ω_p και v_t σε όλα τα σημεία του υπολογιστικού χώρου, και η ECDISPSOL για την επίλυση της σχέσης διασποράς των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο πλάσμα.

Από εδώ και πέρα αρχίζει η επαναληπτική διαδικασία (βρόχος) για τον υπολογισμό του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε όλα τα σημεία του χώρου σε κάθε χρονική στιγμή. Σε κάθε επανάληψη εκτελούνται με τη σειρά τα εξής βήματα: (α) Υπολογισμός του προσπίπτοντος ηλεκτρικού πεδίου (υπορουτίνα INCFIELD) (β) Υπολογισμός/Ανανέωση του σκεδαζόμενου ηλεκτρικού πεδίου (υπορουτίνα ESUPDATE), (γ) Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών Mur 2^{ης} τάξης (υπορουτίνα ORBC), (δ) Αύξηση του στιγμιαίου χρόνου t κατά μισό βήμα $\Delta t/2$, (ε) Υπολογισμός/Ανανέωση του σκεδαζόμενου μαγνητικού πεδίου (υπορουτίνα HSUPDATE), (στ) Επανεκτέλεση του βήματος (δ). Η επαναληπτική διαδικασία ολοκληρώνεται όταν ο αριθμός των

² Στην παρούσα έκδοση του κώδικα, ο όρος του ηλεκτρικού ρεύματος που υπεισέρχεται στις εξισώσεις Maxwell υπολογίζεται στο πλαίσιο της θεωρήσης του πλάσματος ως γραμμικό διηλεκτρικό μέσο. Η περιγραφή της απόκρισης του πλάσματος σε άλλο πλαίσιο είναι σε εξέλιξη.



Σχήμα B.2: Λογικό διάγραμμα ροής του κώδικα ECFW1D.

Υπορουτίνα	Λειτουργία
BUILDSPACE	Σχηματισμός υπολογιστικού χώρου
ECDISPSOL	Επίλυση γραμμικής σχέσης διασποράς
ESUPDATE, HSUPDATE	Υπολογισμός σκεδαζομένων πεδίων
INCFIELD	Υπολογισμός προσπιπτόντων πεδίων
INITIALIZE	Καθορισμός αρχικών συνθηκών
ORBC	Εφαρμογή συνοριακών συνθηκών Mur
PLASMAPROF	Καθορισμός γεωμετρίας πλάσματος
PLASMATENS	Υπολογισμός διηλεκτρικού τανυστή πλάσματος

Πίνακας B.5: Οι υπορουτίνες του κώδικα ECFW1D (με αλφαβητική σειρά).

Όνομα αρχείου	Διαμόρφωση αποτελεσμάτων
ABSPROF.DAT	$\frac{x}{r_{pol}}, E$ (V/m)
CDRVPROF.DAT	$\frac{x}{r_{pol}}, j$ (A/m ²)
EPROF.DAT	$\frac{x}{r_{pol}}, E_x$ (V/m), E_y (V/m), E_z (V/m)
JPROF.DAT	$\frac{x}{r_{pol}}, j_x$ (A/m ²), j_y (A/m ²), j_z (A/m ²),
SSCHK.DAT	t (s), $E_x _t$ (V/m), $E_y _t$ (V/m), $E_z _t$ (V/m)

Πίνακας B.6: Τα αρχεία εξόδου του κώδικα ECFW1D (με αλφαβητική σειρά). Για κάθε αρχείο δίνεται η διαμόρφωση των αποτελεσμάτων σε στήλες.

χρονικών βημάτων ξεπεράσει (για πρώτη φορά) το ανώτατο όριο που έχει καθοριστεί στο αρχείο INCL1D.FOR, και μετά την ολοκλήρωσή της κλείνουν τα αρχεία εξόδου και η εκτέλεση του κώδικα τερματίζεται.

Η αποθήκευση των αποτελεσμάτων στα αρχεία εξόδου πραγματοποιείται εντός του βρόχου, ύστερα από τον υπολογισμό των ποσοτήτων σε κάθε θέση. Τα αρχεία εξόδου παρουσιάζονται στον Πίν. B.3. Στο αρχείο ABSPROF.DAT αποθηκεύεται το profile του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου, στο CDRVPROF.DAT το profile του πλάτους της πυκνότητας ρεύματος, στο EPROF.DAT οι τιμές των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου σε κάθε θέση, στο JPROF.DAT τα profiles των συνιστωσών της πυκνότητας ρεύματος και στο SSCHK.DAT οι τιμές των συνιστωσών του ηλεκτρικού πεδίου σε διάφορες χαρακτηριστικές θέσεις κατά μήκος της διάδοσης σε κάθε χρονική στιγμή. Το αρχείο SSCHK.DAT χρησιμεύει για τον έλεγχο της χρονικής εξέλιξης του ηλεκτρικού πεδίου, και συγκεκριμένα για το αν και πότε φτάνει σε στατική κατάσταση (steady-state).

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Σχήματα Κεφ. 1

1.1	Παράμετροι (πυκνότητα και θερμοκρασία) διάφορων φυσικών συστημάτων που αποτελούνται από πλάσμα.	4
1.2	Σχηματική αναπαράσταση των ταλαντώσεων πλάσματος (κατά Langmuir) και των κυκλοτρονικών κινήσεων σε μαγνητισμένο πλάσμα.	7
1.3	Σχηματική αναπαράσταση της σύγκρουσης ηλεκτρονίου-ιόντος.	9
1.4	Το tokamak, μία από τις σύγχρονες πειραματικές διατάξεις για την επίτευξη ελεγχόμενης θερμοπυρηνικής σύντηξης μέσω του μαγνητικού περιορισμού πλάσματος.	11
1.5	Η μη σχετικιστική κατανομή Maxwell για διαφορετικές τιμές της θερμικής ταχύτητας στο πλάσμα.	25
1.6	Κύρια χαρακτηριστικά των υψίσυχων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων που διαδίδονται σε ψυχρό μαγνητισμένο πλάσμα (α) παράλληλα στο μαγνητικό πεδίο (R, L), (β) κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με πόλωση O, (γ) κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με πόλωση X.	36
1.7	(α) Το γυροτρόνιο, η κυριότερη διάταξη για την παραγωγή υψίσυχνης ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, (β) Σχηματική αναπαράσταση πειράματος ανακλαστομετρίας (reflectometry) για τη μέτρηση της πυκνότητας στο πλάσμα.	39

Σχήματα Κεφ. 2

2.1	Μέση ενέργεια $\langle \gamma \rangle$ ενός αρχικά μονοενεργειακού πληθυσμού ηλεκτρονίων ($\gamma_0 = 2.5$) σαν συνάρτηση του πλάτους κύματος A_0 για $N = 1, 3, 5$	50
2.2	(α) Σχηματική αναπαράσταση της διαδικασίας λήψης σημείων τομής Poincaré σε σύστημα δύο βαθμών ελευθερίας, (β) Τυπική εικόνα (sketch) του χώρου φάσεων ενός δυναμικού συστήματος.	51
2.3	Επίπεδο τομής Poincaré (χ, π_χ) για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίου-κύματος, για πλάτος κύματος $A_0 = 0.5, 0.05$	52
2.4	Συνάρτηση κατανομής ενέργειας και ηλεκτρικό ρεύμα ως προς το χρόνο για την αλληλεπίδραση ηλεκτρονίων αρχικής ενέργειας $\gamma_0 = 2.5$ με $N = 1, 5$ ηλεκτρομαγνητικά κύματα πλάτους $A_0 = 0.1$	53
2.5	Συνάρτηση κατανομής $f(F_\perp)$ της συνιστώσας της δύναμης Lorentz κάθετα στο μαγνητικό πεδίο για $A_0 = 0.1$ και $N = 1, 5$	55

2.6	Η τροχιά του κέντρου-οδηγού της περιστροφής υπό την επίδραση της δύναμης ολίσθησης $\mathbf{E}_{1\perp} \times \mathbf{B}_0$ για $A_0 = 0.1$ και $N = 1, 5$	56
2.7	Οι ποσότητες $\ln \langle (\gamma - \gamma_0)^2 \rangle$, $\ln \langle (\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}_{0\perp})^2 \rangle$ σαν συνάρτηση του $\ln t$ για $N = 1$ ($A_0 = 0.1, 0.5$) και $N = 5$ ($A_0 = 0.5$).	57
2.8	Εκθέτες διάχυσης α_γ και α_r σαν συνάρτηση του πλάτους κύματος A_0 για (α) απλό κύμα ($N = 1$), (β) κυματοπακέτο $N = 5$ ρυθμών. .	58
2.9	Μέση ισχύς ακτινοβολίας cyclotron από δείγμα 1000 ηλεκτρονίων που αλληλεπιδρά με κύμα πλάτους $A_0 = 0.02, 0.05, 0.5$	61
2.10	(α) Σύστημα συντεταγμένων για τον υπολογισμό του φάσματος της ακτινοβολίας cyclotron, (β) Μετάβαση της μορφής του φάσματος από διακριτό (μίας αρμονικής για $v \ll c$ και πολλών για $v \sim c$) σε συνεχές (για $v \approx c$).	62
2.11	Φάσμα της ακτινοβολίας cyclotron από ηλεκτρόνιο που αλληλεπιδρά με ηλεκτρομαγνητικό κύμα πλάτους $A_0 = 0.1$ για χρόνο $t = 10000$. Η αρχική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι $\gamma_0 = 1.1, 2.5$	65

Σχήματα Κεφ. 3

3.1	(α) Το σύστημα συντεταγμένων δέσμης (τ, ξ_1, ξ_2), (β) Αποτελέσματα του κώδικα εντοπισμού δέσμης TORBEAM για την απορροφώμενη ενέργεια και την πυκνότητα οδηγούμενου ρεύματος.	77
3.2	(α) Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου μιας 1-διάστατης τετραγωνικής δέσμης εύρους $\ell_{sq} = 4$, όπως ανακατασκευάστηκε με χρήση 50 ρυθμών Gauss-Hermite, (β) Οι συντελεστές των άρτιων όρων του αναπτύγματος και το σφάλμα σαν συνάρτηση της τάξης $2n$	80
3.3	(α) Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου μιας 1-διάστατης δέσμης με σχήμα "μισού ημιτόνου" πλάτους $\ell_{hs} = \pi/2$, όπως ανακατασκευάστηκε από 50 ρυθμούς Gauss-Hermite, (β) Οι συντελεστές των άρτιων όρων και το σφάλμα σαν συνάρτηση της τάξης $2n$	81
3.4	Η γεωμετρία για τη διάδοση κυματικής δέσμης σε επίπεδο πλάσμα. .	88
3.5	Εξέλιξη του γενικευμένου εύρους δέσμης στις διευθύνσεις y, z για διάδοση με πόλωση O , $d_{mn} = 0.1$ και $(m, n) = (2, 1), (0, 2)$	91
3.6	Γενικευμένο εύρος για τη διάδοση δέσμης με πόλωση X στη διεύθυνση z με $(m, n) = (1, 3)$ και $d_{mn} = 0.05, 0.3$ και στη διεύθυνση y με $(m, n) = (1, 0)$ και $d_{mn} = 0.2, 0.5$	92
3.7	(α) Συνολική μετατόπιση φάσης θ_{mn} για δέσμη με πόλωση O, X και $(m, n) = (0, 2)$, (β) Πλάτη κύματος $ \bar{C}_{00} ^2, \bar{C}_{mn} ^2$ για δέσμη με πόλωση O και $(m, n) = (2, 1)$ που διαδίδεται σε ψυχρό ($T_e = 0$) και σε κινητικό ($T_e \neq 0$) πλάσμα, (γ) Σχετική πυκνότητα ενέργειας d_{mn} για δέσμη με πόλωση X , $d_{mno} = 0.1$ και $(m, n) = (1, 1), (8, 8)$	93
3.8	Γενικευμένο εύρος στη διεύθυνση z , όπως υπολογίζεται απ' τους κώδικες NGBT και ECPROP, αλλά και με βάση την αρχική μέθοδο εντοπισμού δέσμης [Pereverzev 1998], για διάδοση με πόλωση O και $(m, n) = (0, 2)$, $d_{mn} = 0.2$	95

- 3.9 Profile του ηλεκτρικού πεδίου της δέσμης, το οποίο αποτελείται από τους ρυθμούς $\bar{E} = \bar{E}_{00} + \bar{E}_{20} + \bar{E}_{02}$, για $d_{rms} = 0.1$. (β) Εξέλιξη του γενικευμένου εύρους w_y για διάδοση και απορρόφηση στη γραμμική εκπομπής και στο πλάσμα (υπολογισμός κενού). 96

Σχήματα Κεφ. 4

- 4.1 Σύγκριση της γραμμικής θεωρίας για την κυκλοτρονική απορρόφηση με πειραματικά αποτελέσματα από τις μηχανές θερμοπυρηνικής σύντηξης TFR, MTX και W7-AS. 102
- 4.2 Χρονική εξέλιξη του πλάτους και της συχνότητας στην αστάθεια maser για $\gamma_b = 4$. Η αρχική συχνότητα είναι ίση με γ_b 108
- 4.3 Η γεωμετρία του πλάσματος και του μαγνητικού πεδίου: Το μικρό σχήμα επάνω προβάλλει μια μεγέθυνση της πεπερασμένης περιοχής αλληλεπίδρασης κύματος-σωματιδίου, ενώ το κάτω δείχνει (στο χώρο ταχυτήτων) την καμπύλη συντονισμού και την καμπύλη που ορίζεται από τη θερμική ταχύτητα για τις περιπτώσεις των ρυθμών O1 και X2 κάθετα στο μαγνητικό πεδίο. 110
- 4.4 Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στο AUG για $\mathcal{P}_{w0} = 1\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$: (α) Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης ισχύος $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$ (με βάση τη γραμμική θεωρία και τους μη γραμμικούς υπολογισμούς), (β) Χρονική εξέλιξη της κανονικοποιημένης συχνότητας ω/ω_{ce} , (γ) Συνάρτηση κατανομής $f(\gamma)$ τις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = t_{int}$, (δ) Κανονικοποιημένη μέση κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων $\langle \gamma - 1 \rangle / \langle \gamma_0 \rangle$ 112
- 4.5 Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στο AUG για $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0} = 1\text{MW}$, $\vartheta_w = 90^\circ$ (κάθετη πρόσπτωση): (α) Ο λόγος $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$ (γραμμικός και μη γραμμικός υπολογισμός) σαν συνάρτηση του t/t_{int} , (β) Ο λόγος $\iota_\perp/\iota_{0\perp}$ (απόκριση ρεύματος εγκάρσια στο μαγνητικό πεδίο) σαν συνάρτηση του t/t_{int} 114
- 4.6 Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στο AUG για $\mathcal{P}_{w0} = 1\text{GW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$: (α) Δυναμική εξέλιξη του $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$ (λαμβάνοντας υπόψη και την αύξηση της T_e στον υπολογισμό του α_L), (β) $f(\gamma)$ για $t = 0, t_{int}$ (η τελευταία εν συγκρίσει με την best-fit ως προς την κατανομή Maxwell). 115
- 4.7 Προσομοίωση κυκλοτρονικής απορρόφησης στον ITER για $\mathcal{P}_{w0} = 20\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$: (α) $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$ (γραμμικός και μη γραμμικός υπολογισμός) ως προς t/t_{int} , (β) ω/ω_{ce} ως προς t/t_{int} 116
- 4.8 (α) Δυναμική εξέλιξη του αριθμητικού σφάλματος για την περίπτωση $\mathcal{P}_{w0} = 20\text{MW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$ (παράμετροι ITER), (β) Δυναμική εξέλιξη του $\mathcal{P}_w/\mathcal{P}_{w0}$ (γραμμικός και μη γραμμικός υπολογισμός) για την περίπτωση $\mathcal{P}_{w0} = 10\text{kW}$, $\vartheta_w = 70^\circ$ (παράμετροι AUG). 116

Σχήματα Κεφ. 5

5.1	(α) Το κελί του Yee στον 3-διάστατο χώρο, με κατάλληλα τοποθετημένα το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο, (β) Χάρτης που υποδεικνύει την εξέλιξη του σχήματος leapfrog στον 1-διάστατο χώρο και το χρόνο.	124
5.2	(α) Η απλοποιημένη γεωμετρία για τη μελέτη της διάδοσης κάθετα στο μαγνητικό πεδίο με τη μέθοδο FDTD, (β) Το κελί Yee στο 1-διάστατο χώρο.	138
5.3	Αποτελέσματα προσομοίωσης FDTD σε ψυχρό πλάσμα για παραμέτρους AUG: (α) Χρονική εξέλιξη της συνιστώσας E_y στο σημείο $x = -0.3r_{pol}$, (β) Χρονική εξέλιξη της συνιστώσας E_x στο σημείο $x = -0.3r_{pol}$ (με zoom στη γειτονία της χρονικής στιγμής $t = 2.5 \cdot 10^{-9}s$).	139
5.4	Αποτελέσματα προσομοίωσης FDTD σε ψυχρό πλάσμα για παραμέτρους AUG: (α) Profile του πλάτους του ηλεκτρικού πεδίου E , (β) Profile του πλάτους της πυκνότητας ρεύματος j	139
5.5	Αποτελέσματα προσομοίωσης FDTD για θερμό πλάσμα με παραμέτρους AUG: (α) Profile της συνιστώσας j_x , (β) Profile του πλάτους E (σε σύγκριση με το profile για ψυχρό πλάσμα του Σχ. 5.4). . . .	141
5.6	Προσομοίωση FDTD για κινητικό και ασθενώς σχετικιστικό πλάσμα με παραμέτρους AUG: (α) Profile του πλάτους E , (β) Profile του πλάτους j	142
5.7	Προσομοίωση FDTD κινητικού και ασθενώς σχετικιστικού πλάσματος για παραμέτρους ITER: (α) Χρονική εξέλιξη της συνιστώσας E_z στο σημείο $x = -0.5r_{pol}$, (β) Profile του πλάτους j_z , (γ) Profile του πλάτους E , (δ) Profile του πλάτους j	143
5.8	(α) Σύγκριση της πλήρους λύσης (ECFW1D) με την ασυμπτωτική λύση (NGBT), (β) "Έκρηξη" (blow-up) της πλήρους λύσης κοντά στο βασικό συντονισμό στο μοντέλο ψυχρού πλάσματος.	144

Σχήματα Παραρτ. Β

B.1	Λογικό διάγραμμα ροής του κώδικα NGBT.	161
B.2	Λογικό διάγραμμα ροής του κώδικα ECFW1D.	165

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακες Κεφ. 1

1.1	Οι τέσσερις βασικοί τύποι κανονικών μετασχηματισμών.	17
1.2	Τα κύρια είδη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων για διάδοση σε ψυχρό μαγνητισμένο πλάσμα	34

Πίνακες Παραρτ. Β

B.1	Οι μεταβλητές στο αρχείο εισόδου του κώδικα NGBT (με αλφαβη- τική σειρά). Για κάθε μεταβλητή δίνεται ο ορισμός (ή το αντίστοιχο μέγεθος) και χαρακτηριστικές τιμές για προσομοιώσεις ECRH. . . .	160
B.2	Οι υπορουτίνες του κώδικα NGBT (με αλφαβητική σειρά).	162
B.3	Τα αρχεία εξόδου του κώδικα NGBT (με αλφαβητική σειρά). Για κάθε αρχείο δίνεται η διαμόρφωση των αποτελεσμάτων σε στήλες. .	163
B.4	Είσοδος του κώδικα ECFW1D: Μεταβλητές (με αλφαβητική σειρά), ορισμός (ή αντίστοιχο μέγεθος) και χαρακτηριστικές τιμές για προ- σομοιώσεις ECRH.	164
B.5	Οι υπορουτίνες του κώδικα ECFW1D (με αλφαβητική σειρά). . . .	165
B.6	Τα αρχεία εξόδου του κώδικα ECFW1D (με αλφαβητική σειρά). Για κάθε αρχείο δίνεται η διαμόρφωση των αποτελεσμάτων σε στήλες. .	166

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΜΒΟΛΩΝ

Λατινικά σύμβολα

A	Ανυσματικό δυναμικό
$\bar{A}$	Πλάτος ηλεκτρικού πεδίου στο eikonal ansatz
a	Επιτάχυνση
$\mathcal{A}(m, n)$	Σφάλμα αναπτύγματος σε γενικευμένη σειρά Fourier
B	Μαγνητική επαγωγή (αναφ. ως μαγνητικό πεδίο)
$\mathcal{B}_j$	Σταθερές ολοκλήρωσης
b_{col}	Παράμετρος χρούσης
b_{tok}	Λόγος όψης σε tokamak (aspect ratio)
$\bar{C}_{mn}$	Μιγαδικό πλάτος του ρυθμού τάξης (m, n)
$\mathcal{C}_l^G _{i,j,k}$	Συντελεστές εξέλιξης FDTD του πεδίου $\mathbf{G}$ στο σημείο (i, j, k)
c	Ταχύτητα του φωτός στο κενό ($3 \cdot 10^8 \text{m/s}$)
c_{ei}	Ενεργός διατομή συγκρούσεων ηλεκτρονίων-ιόντων
c_{vsc}	Κινηματικός συντελεστής ιξώδους
D	Διηλεκτρική μετατόπιση
$\tilde{\mathcal{D}} = [\mathcal{D}_{kl}]$	Τανυστής διασποράς (dispersion tensor)
d_{mn}	Σχετική πυκνότητα ενέργειας του ρυθμού τάξης (m, n)
d_{rms}	RMS τιμή των λόγων d_{mn} σε μια non-Gaussian δέσμη
E	Ηλεκτρικό πεδίο
$\hat{\mathbf{e}}$	Μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης ηλεκτρικού πεδίου
e	$e = 2.71828183$
F	Δύναμη
$\mathcal{F}_k$	Γεννήτρια συνάρτηση κανονικού μετασχηματισμού τύπου k
$F[g(t)]$	Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $g(t)$

f	Συνάρτηση κατανομής (distribution function)
$\mathbf{H}$	Μαγνητικό πεδίο
$H_n(x)$	Πολυώνυμο Hermite βαθμού n
$\mathcal{H}$	Συνάρτηση Hamilton
$\tilde{\mathbf{I}} = [\delta_{i,j}]$	Μοναδιαίος τανυστής
$I_l(x)$	Τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τύπου 1 τάξης l
$\bar{\mathcal{I}}$	Μιγαδικό ολοκλήρωμα ισχύος ακτινοβολίας cyclotron
$J_l(x)$	Συνάρτηση Bessel τάξης l
$\mathcal{J}(x_j, y_j)$	Jacobian του μετασχηματισμού $y_j = y_j(x_j)$
$\mathbf{j}$	Χωρική πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος
$K_l(x)$	Τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τύπου 2 τάξης l
$\mathcal{K}_0$	Παράμετρος πλάσματος
$\mathcal{K}_B$	Σταθερά του Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23} \text{J/K}$)
$\mathbf{k}$	Κυματάνυσμα
L_p	Χαρακτηριστική κλίμακα ανομοιογένειας στο πλάσμα
$\mathcal{L}$	Συνάρτηση Lagrange
l_j^M	Ακέραιοι δείκτες πόλωσης ηλεκτρομαγνητικού κύματος
ℓ	Μήκος
$\mathbf{M}(\mathbf{G})$	Τελεστής ίσος με $-\nabla \times (\nabla s \times \mathbf{G}) - \nabla s \times (\nabla \times \mathbf{G})$
$\mathcal{M}$	Μαγνητική ροπή
m	Μάζα
$\mathbf{N}$	Δείκτης διάθλασης
$\mathcal{N}$	Συνάρτηση για την περιγραφή της μετατόπισης φάσης
n	Αριθμητική πυκνότητα
$\mathcal{O}(x^n)$	Όροι τάξης n
$\tilde{\mathbf{P}} = [P_{kl}]$	Τανυστής πίεσης (stress tensor)
P	Πίεση ισοτροπικού ρευστού
$\mathcal{P}$	Ισχύς (ρυθμός μεταβολής της ενέργειας)
$\mathcal{P}_R$	Ισχύς ακτινοβολίας από φορτισμένα σωματίδια

$\mathcal{P}_w$	Ισχύς μικροκυματικής ακτινοβολίας
$\mathbf{p}$	Μηχανική ορμή σωματιδίου
$\tilde{\mathbf{Q}} = [Q_{kl}]$	Τανυστής εξέλιξης FDTD σε ανισότροπο πλάσμα
q	Ηλεκτρικό φορτίο
R	Ακτίνα καμπυλότητας μετώπου κύματος Gaussian δέσμης
$\mathcal{R}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{r}}')$	Προβολή του διανύσματος θέσης στη διεύθυνση παρατήρησης
$\mathbf{r}$	Διάνυσμα θέσης
$\check{\mathbf{r}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0, t)$	Θέση του σωματιδίου με αρχικές συνθήκες $(\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$
r_L	Ακτίνα Larmor τροχιάς φορτισμένου σωματιδίου
r_{pol}	Πολοειδής (μικρή) ακτίνα tokamak
r_{tor}	Τοροειδής (μεγάλη) ακτίνα tokamak
$\tilde{\mathbf{S}} = [S_{kl}]$	Τανυστής εξέλιξης FDTD σε ανισότροπο πλάσμα
$\mathcal{S}_q(\varpi, \zeta_l)$	Συνάρτηση Shkarofsky τάξης q
$\bar{s} = s + i\phi$	Γενικευμένη φάση κύματος
T	Θερμοκρασία
t	Χρόνος
$\mathcal{T}_{ss'}$	Δύναμη τριβής από τα σωματίδια $s = e, i$ στα $s' = i, e$
$U(x)$	Βηματική συνάρτηση (step function)
$\mathbf{u}$	Ταχύτητα ρευστού
V	Όγκος
$\mathcal{V}(\mathbf{v}, \hat{\mathbf{r}}')$	Προβολή της ταχύτητας στη διεύθυνση παρατήρησης
$\mathbf{v}$	Ταχύτητα σωματιδίου
$\mathbf{v}_D$	Ταχύτητα ολίσθησης κέντρου-οδηγού
v_t	Θερμική ταχύτητα
W	Εύρος Gaussian κυματικής δέσμης (1/e-width)
$\tilde{\mathbf{w}}^2$	Τανυστής εύρους κυματικής δέσμης
w	Εύρος κυματικής δέσμης
$\mathcal{Z}(\zeta_l)$	Συνάρτηση διασποράς πλάσματος (plasma dispersion function)

Ελληνικά σύμβολα

α	Εκθέτης διάχυσης
α_L	Συντελεστής γραμμικής κυκλοτρονικής απορρόφησης
β_J	Όρισμα της συνάρτησης $J_l(x)$ ίσο με $k_{\perp} p_{\perp} / (m_e \omega_{ce})$
β_T	Αντίστροφο της κανονικοποιημένης θερμικής ενέργειας
β_{Γ}	Όρισμα της συνάρτησης $\Gamma_l(x)$ ίσο με $k_{\perp}^2 v_{te}^2 / \omega_{ce}^2$
$\Gamma_l(\beta_{\Gamma})$	Εκθετική μετατόπιση της συνάρτησης $I_l(\beta_{\Gamma})$
γ	Σχετικιστικός παράγοντας Lorentz
$\bar{\gamma}_{mn}$	Λόγος των πλατών $\bar{C}_{mn}$ των όρων (m, n) , $(0, 0)$
$\bar{\gamma}_{rms}$	RMS τιμή των λόγων $\bar{\gamma}_{mn}$ σε μια non-Gaussian δέσμη
$\delta(x)$	Συνάρτηση δέλτα
$\delta_{i,j}$	Δέλτα του Kronecker
$\delta'_{i,j}$	Συμπλήρωμα του δέλτα του Kronecker
$\mathcal{E}$	Ενέργεια
$\tilde{\epsilon} = [\epsilon_{kl}]$	Διηλεκτρικός τανυστής
ϵ	Διηλεκτρική σταθερά
ϵ_0	Διηλεκτρική σταθερά του κενού ($8.85 \cdot 10^{-12} \text{F/m}$)
$\tilde{\epsilon} = [\bar{\epsilon}_{kl}]$	Διηλεκτρικός τανυστής πλάσματος (plasma dielectric tensor)
ζ_l	Όρισμα της συνάρτησης $\mathcal{Z}(\zeta_l)$ ίσο με $(\omega - l\omega_{ce}) / (\sqrt{2}k_{\parallel}v_{te})$
η_p	Ειδική αντίσταση πλάσματος (plasma resistivity)
Θ_{mn}	Μετατόπιση φάσης του ρυθμού (m, n)
θ_{mn}	Συνολική μετατόπιση φάσης του ρυθμού (m, n)
ϑ	Γωνία
ϑ_p	Γωνία ελίωσης (pitch angle)
ϑ_w	Γωνία διάδοσης κύματος ως προς μαγνητικό πεδίο
ι	Ηλεκτρικό ρεύμα
κ	Παράμετρος υψίσυχνου ορίου (short-wavelength limit)
$\tilde{\Lambda} = [\Lambda_{kl}]$	Τανυστής περιγραφής του εγχάρσιου profile κυματικής δέσμης
λ	Μήκος κύματος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας

λ_D	Μήκος Debye
μ	Μαγνητική διαπερατότητα
μ_0	Μαγνητική διαπερατότητα του κενού ($4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$)
ν_{ei}	Συχνότητα συγκρούσεων ηλεκτρονίων-ιόντων
$\Xi[\mathbf{G}]$	Στροβιλικός πίνακας-διάνυσμα του διανύσματος $\mathbf{G}$
ξ_j	Συντεταγμένες δέσμης εγκάρσια στη διάδοση
π	$\pi = 3.14159265358979\dots$
π_j	Γενικευμένες (κανονικές) ορμές
ϖ	Όρισμα της συνάρτησης Shkarofsky ίσο με $\beta_T N_{ }^2/2$
ρ	Χωρική πυκνότητα φορτίου
ϱ	Χωρική πυκνότητα μάζας
$\tilde{\sigma} = [\sigma_{kl}]$	Τανυστής αγωγιμότητας
σ	Συντελεστής αγωγιμότητας
τ	Συντεταγμένη ακτίνας/δέσμης παράλληλα στη διάδοση
v_A	Ταχύτητα Alfven
$\mathbf{v}_g$	Ομαδική ταχύτητα κύματος
v_p	Φασική ταχύτητα κύματος
Φ	Βαθμωτό δυναμικό
φ	Φάση κύματος
χ_j	Γενικευμένες (κανονικές) συντεταγμένες
$\Psi_{mn}(x, y)$	2-διάστατη συνάρτηση Gauss-Hermite τάξης (m, n)
$\psi_n(x)$	1-διάστατη συνάρτηση Gauss-Hermite τάξης n
Ω	Στερεά γωνία
ω	Συχνότητα κύματος
ω_c	Κυκλοτρονική συχνότητα (cyclotron frequency)
ω_p	Συχνότητα (ταλαντώσεων) πλάσματος
ω_{UH}	Άνω υβριδική συχνότητα (upper-hybrid frequency)

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

ABC	Absorbing Boundary Conditions
ASDEX	AxiSymmetric Divertor EXperiment
AUG	Asdex UpGrade
DFT	Discrete Fourier Transform
EC	Electron-Cyclotron
ECCD	Electron-Cyclotron Current Drive
ECRH	Electron-Cyclotron Resonance Heating
FDTD	Finite Difference Time Domain
FEL	Free Electron Laser
FFP	Fractional Fokker-Planck
FLR	Finite Larmor Radius
FP	Fokker-Planck
FWHM	Full Width at Half-Maximum
IC	Ion-Cyclotron
ITB	Internal Transport Barrier
ITER	International Thermonuclear Experimental Reactor
JET	Joint European Torus
LH	Lower-Hybrid
MHD	MagnetoHydroDynamic
MTX	Microwave Tokamak eXperiment
NTM	Neoclassical Tearing Mode
O-X-B	Ordinary-Extraordinary-Bernstein
ORBC	Outer-Radiating Boundary Conditions
PSS	Poincare Surface of Section

RMS	Root Mean Square
TFR	Tokamak de Fontenay-aux-Roses
UH	Upper-Hybrid
W7-AS	Wendelstein 7-AS
WKB	Wentzel-Krammers-Brillouin

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Ελληνικά βιβλία

Βλάχος Λ., *Φυσική Πλάσματος: Η τέταρτη κατάσταση της ύλης*, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη (2000).

Βομβορίδης Γ., *Σημειώσεις Πλάσματος*, Ε.Μ.Π., Αθήνα (1990).

Ιχτιάρογλου Σ., *Εισαγωγή στη Μηχανική Hamilton*, Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη (2004).

Κατσιάρης Γ. Α., *Μαθήματα Αναλυτικής Μηχανικής*, Εκδόσεις Συμμετρία, Πάτρα (1991).

Παντής Γ. και Θρουμουλόπουλος Γ., *Εισαγωγή στη Φυσική Πλάσματος*, Παν. Ιωαννίνων, Ιωάννινα (1999).

Πολυμίλης Χ., *Σημειώσεις Φυσικής Πλάσματος*, Παν. Αθηνών, Αθήνα (2000).

Strang G., *Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*, Εκδόσεις Παν. Πατρών, Πάτρα (2006).

Χατζηδημητρίου Ι., *Θεωρητική Μηχανική*, Εκδόσεις Γιαχούδη-Γιαπούλη, Θεσσαλονίκη (2000).

Ξενόγλωσσα βιβλία

Abramowitz M. and Stegun I., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, New York (1965).

Barut A. O., *Electromagnetism and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover Publications, New York (1980).

Bittencourt J. A., *Fundamentals of Plasma Physics*, Pergamon Press, Oxford (1986).

Boyd T. J. M. and Sanderson J. J., *Plasma Dynamics*, Nelson, London (1969).

Brambilla M., *Kinetic Theory of Plasma Waves*, Oxford University Press, New York (1998).

- Chen F. F., *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Plenum Press, New York (1984).
- Dennerly P. and Krzywicki A., *Mathematics for Physicists*, Dover Publications, New York (1995).
- Dreggers R. H., ed. *Encyclopedia of Optical Engineering*, Marcel-Dekker, Paris (2003).
- Fried B. D. and Conte S. D., *The plasma dispersion function*, Academic, New York (1961).
- Gill R. D., ed. *Plasma Physics and Nuclear Fusion Research*, Academic Press, London (1981).
- Goldstein H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley, London (1980).
- Goldston R. J. and Rutherford P. H., *Introduction to Plasma Physics*, IoP, Bristol (1995).
- Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York (1999).
- Kravtsov Y. A. and Orlov Y. I., *Geometrical Optics of Inhomogeneous Media*, Springer Verlag, Berlin (1990).
- Kunz K. S. and Luebbers R. J., *The Finite Difference Time Domain Method for Electromagnetics*, CRC Press, London (1992).
- Landau L. D. and Lifshitz E. M., *The Classical Theory of Fields*, Pergamon Press, Oxford (1997).
- Lévy P., *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Gauthier-Villars & Cie, Paris (1937).
- Lichtenberg A. J. and Lieberman M. A., *Regular and Chaotic Dynamics*, Springer, New York (1992).
- Poincaré H., *New methods of celestial mechanics*, Dover, New York (1957).
- Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T. and Flannery D., *Numerical Recipes in Fortran*, Cambridge University Press, London (1993).
- Reif F., *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*, McGraw-Hill, New York (1965).
- Rybicki G. B. and Lightman A. P., *Radiative Processes in Astrophysics*, J. Wiley and Sons, Singapore (1979).
- Siegman A. E., *Lasers*, Oxford University Press, Oxford (1986).

- Stix T. H., *Waves in Plasmas*, McGraw-Hill, New York (1992).
- Swanson D. G., *Plasma Waves*, IoP, New York (2003).
- Taflove A., *Computational Electrodynamics*, Artech House, Boston (1995).
- Zaslavsky G. M., *Chaos in Dynamic Systems*, Harwood Academic, New York (1985).

Δημοσιεύσεις

- Afanasiev V. V., Sagdeev R. Z. and Zaslavsky G. M., *Chaos* **1**, 146 (1991).
- Akimoto K. and Karimabadi H., *Phys. Fluids* **31**, 1505 (1987).
- Allen S. L., Brown M. D., Byers J. A., Casper T. A., Cohen B. I., Cohen R. H., Fenstermacher M. E., Foote J. H., Hooper E. B., Lasnier C. J. and the MTX Team, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1348 (1994).
- Avramides K. A., Iatrou C. T. and Vomvoridis J. L., *IEEE Trans. Plasma Sci.* **32**, 917 (2004).
- Benisti D., Ram A. K. and Bers A., *Phys. Plasmas* **5**, 3224 (1998).
- Berenger J. P., *J. Comp. Phys.* **114**, 185 (1994).
- Bernstein I. B., *Phys. Fluids* **18**, 320 (1975).
- Bornatici M., *Plasma Phys.* **24**, 629 (1982).
- Bornatici M., Cano R., De Barbieri O. and Engelmann F., *Nucl. Fusion* **23**, 1153 (1983).
- Bravo-Ortega A. and Glasser A. H., *Phys. Fluids B* **3**, 529 (1991).
- Carbone V., Lepreti F. and Veltri P., *Phys. Rev. Lett.* **90**, 055001 (2003).
- Carreras B. A., Lynch V. E. and Zaslavsky G. M., *Phys. Plasmas* **8**, 5096 (2001).
- Chaikovskiy D. K. and Zaslavsky G. M., *Chaos* **1**, 463 (1991).
- Chechkin A. V., Gonchar V. Y. and Szydlowsky M., *Phys. Plasmas* **9**, 78 (2002).
- Chirikov B. V., *Phys. Rep.* **52**, 264 (1979).
- Choudary S. and Felsen L. B., *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **AP-21**, 827 (1973).
- Chu K. R., *Rev. Mod. Phys.* **76**, 489 (2004).

- Cohen B. I., Cohen R. I., Nevins W. M. and Ronglien T. D., *Rev. Mod. Phys.* **63**, 949 (1991).
- Da Silva F., *Rev. Sci. Instrum.* **72**, 311 (2001).
- Erckmann V. and Gasparino U., *Plasma Phys. Control. Fusion* **36**, 1869 (1994).
- Farina D., Pozzoli R., Mennella A. and Ronzio D., *Phys. Fluids B* **5**, 104 (1993).
- Farina D., Pozzoli R. and Ronzio D., *Phys. Rev. E* **47**, 2995 (1993).
- Farina D., Pozzoli R. and Rome M., *Phys. Plasmas* **6**, 1871 (1994).
- Friedland L. and Bernstein I. B., *Phys. Rev. A* **22**, 1680 (1980).
- Fukuyama A., Momota H., Itaniani R. and Takizuka T., *Phys. Rev. Lett.* **38**, 701 (1977).
- Gaponov A. V., Petelin M. I. and Yulpatov V. K., *Radiophys. Quantum Electron.* **16**, 794 (1967).
- Ginzburg N. S., Zarnitsyna N. S. and Nusinovich G. S., *Radiophys. Quantum Electron.* **24**, 331 (1981).
- Gladkovskii P., Golant V. E., Yachenko V. V., Larionov M. M., Levin L. S., Rozhdestvenskii V. V., Sadovnikov V. A. and Shcherbinin O. N., *Sov. Phys. Tech. Phys.* **18**, 1029 (1974).
- Gruber O., Zohm H., Herrmann A., Kaufmann M., Maraschek M., Sips A., Treutterer W. and the ASDEX Upgrade Team, *Nucl. Fusion* **41**, 1369 (2001).
- Hirshfield J. L. and Granatstein V. L., *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **25**, 522 (1977).
- Hizanidis K., *Phys. Fluids B1* **3**, 675 (1989).
- Hizanidis K., Vlahos L. and Polymilis C., *Phys. Fluids B1* **3**, 682 (1989).
- Hojo H., Fukuchi A., Itakura A. and Mase A., *Rev. Sci. Instrum.* **75**, 3813 (2004).
- Kamendje R., Kasilov S. V., Kernbichler W. and Heyn M. F., *Phys. Plasmas* **10**, 75 (2003).
- Kamendje R., Kasilov S. V., Kernbichler W., Pavlenko I. V., Poli E. and Heyn M. F., *Phys. Plasmas* **12** 012502 (2005).
- Karimabadi H. and Angelopoulos V., *Phys. Rev. Lett.* **62**, 2342 (1989).
- Karney C. F. F. and Bers A., *Phys. Rev. Lett.* **39**, 550 (1977).

- Kornienko A. G., Natenzon M. Y., Sagdeev R. Z. and Zaslavsky G. M., *Phys. Lett. A* **158**, 398 (1991).
- Kotelnikov I. A. and Stupakov G. V., *Phys. Fluids B* **2**, 881 (1990).
- Kravtsov Y. A., Forbes G. W. and Asatryan A. A., *Progress in Optics* **XXIX**, 1 (1999).
- Krivenski V., *Fus. Eng. Design* **53**, 23 (2001).
- Laqua H. P. and Erckmann V., *Proc. 31st EPS Conference*, 1.209 (2004).
- Lichtenberg A. J., Lieberman M. A., Howard J. E. and Cohen R. H., *Phys. Fluids* **29**, 1061 (1989).
- Lloyd B., *Plasma Phys. Control. Fusion* **40**, A119 (1998).
- Mazzucato E., *Phys. Fluids B* **1**, 1855 (1989).
- Menyuk C. R., Drobot A. T., Papadopoulos K. and Karimabadi H., *Phys. Fluids* **31**, 3768 (1988).
- Metzler R., Klafter J. and Sokolov I. M., *Phys. Rev. E* **58**, 1621 (1998).
- Mur G., *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **23**, 1073 (1981).
- Muta H., Ueda Y. and Kawai Y., *Jpn. J. Appl. Phys.* **36**, 872 (1997).
- Muta H., Sakoda T., Ueda Y. and Kawai Y., *Jpn. J. Appl. Phys.* **36**, 4773 (1997).
- Nevins W. M., Ronglien T. D. and Cohen B. I., *Phys. Rev. Lett.* **59**, 60 (1987).
- Newman A. L. and Newman I. W., *Phys. Fluids B* **4**, 915 (1991).
- Nowak S. and Orefice A., *Phys. Fluids B* **5**, 1945 (1993).
- Nowak S. and Orefice A., *Phys. Plasmas* **1**, 1242 (1994).
- Pereverzev G. V., *Rev. Plasma Phys.* **19**, 1 (1996).
- Pereverzev G. V., *Phys. Plasmas* **5**, 3529 (1998).
- Pereverzev G. V., to appear in *Phys. Plasmas* (2007).
- Permitin G. V. and Smirnov A., *Sov. Phys. JETP* **82**, 395 (1996).
- Poli E., Pereverzev G. V. and Peeters A. G., *Phys. Plasmas* **6**, 5 (1999).
- Poli E., Peeters A. G. and Pereverzev G. V., *Comp. Phys. Commun.* **136**, 90 (2001).

- Poli E., Pereverzev G. V., Peeters A. G. and Bornatici M., *Fusion Eng. Design* **53**, 9 (2001).
- Polymilis C. and Hizanidis K., *Phys. Rev. E* **47**, 4381 (1993).
- Prater R., *Phys. Plasmas* **11**, 2349 (2004).
- Roberts C. S. and Buchsbaum S. J., *Phys. Rev.* **135**, A381 (1964).
- Robertson C. W. and Sprangle P., *Phys. Fluids B* **1**, 3 (1989).
- Robinson P. A., *J. Math. Phys.* **27**, 1206 (1986).
- Schneider J. and Hudson S., *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **41**, 994 (1993).
- Schwinger J., *Phys. Rev.* **75**, 1912 (1949).
- Segui J. L., Giruzzi G., Dewit T., Michelot Y., Peysson Y., Moreau D. and Talvard M., *Proc. 9th Joint Workshop on ECE and ECH*, 223 (1995).
- Sharma R. R., Vlahos L. and Papadopoulos K., *Astron. Astrophys.* **112**, 377 (1982).
- Shklyar D. R., *Sov. Phys. JETP* **53**, 1187 (1981).
- Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M. and Klafter J., *Nature* **363**, 31 (1993).
- Smith G. R. and Kaufman A. N., *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1613 (1975).
- Sokolov I. M., Klafter J. and Blumen A., *Phys. Today* **55**, 48 (2002).
- Sprangle P. and Drobot A., *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **25**, 528 (1977).
- Sprangle P. and Vlahos L., *Phys. Rev. A* **33**, 1261 (1986).
- Suvorov E. V. and Tokman M. D., *Plasma Phys.* **25**, 723 (1983).
- Ternov I. M., *Sov. Phys. Uspekhi* **38**, 409 (1995).
- Timofeev A. V. and Tokman M. D., *Plasma Phys. Rep.* **20**, 336 (1994).
- Tsironis C. and Vlahos L., *Plasma Phys. Control. Fusion* **47**, 131 (2005).
- Tsironis C. and Vlahos L., *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, 1297 (2006).
- Tsironis C., Poli E. and Pereverzev G. V., *Phys. Plasmas* **13**, 113104 (2006).
- Tsironis C., Samaras T. and Vlahos L., to appear in *IEEE Trans. Antennas Propagat.* (2007)

- Vago J. L., Kintner P. M., Chesney S., Arnoldy R. L., Lynch K. A., Moore T. E. and Pollock C. J., *J. Geophys. Res.* **97**, 16395 (1992).
- Villalon E. and Burke W. J., *Phys. Fluids* **30**, 3695 (1987).
- Vlahos L. and Sprangle P., *Astr. J.* **322**, 463 (1987).
- Vomvoridis J. L. and Sprangle P., *Phys. Rev. A* **25**, 931 (1982).
- Weinberg S., *Phys. Rev.* **126**, 1889 (1962).
- Westerhof E., *Plasma Phys. Control. Fusion* **39**, 1015 (1997).
- Woolley M. L., *Plasma. Phys.* **12**, 779 (1969).
- Wu C. S. and Lee L. C., *Astr. J.* **230**, 621 (1979).
- Yee K. S., *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **14**, 302 (1966).
- Zaslavsky G. M. and Chirikov B. V., *Sov. Phys. Uspekhi* **14**, 549 (1972).
- Zaslavsky G. M., Stevens G. and Weitzner H., *Phys. Rev. E* **48**, 1683 (1993).
- Zaslavsky G. M., *Chaos* **4**, 25 (1994).

Διατριβές-Τεχνικές εκθέσεις

- Farina D., *Tech. Rep. FP 05/1*, IFP-CNR (2005).
- Harvey R. W., *GA Report A20978*, General Atomics (1992).
- Kamendje R., *PhD Thesis*, Technical University of Graz (2001).
- Maj O., *PhD Thesis*, University of Milan (2003).
- Poli E., *PhD Thesis*, University of Pavia (1998).
- Westerhof E., *Tech. Rep. 89-183*, FOM-Rijnhuizen (1989).

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Γενικές πληροφορίες

Όνομα: Χρήστος

Επώνυμο: Τσιρώνης

Πατρώνυμο: Σπυρίδων

Μητρώνυμο: Μαρία

Ημερομηνία γέννησης: 26/3/1976

Τόπος γέννησης: Αθήνα

Εθνικότητα: Ελληνική

Οικογενειακή κατάσταση: Έγγαμος, 1 τέκνο

Δευτεροβάθμια εκπαίδευση: 1^ο Λύκειο Ταύρου, Αθήνα

Στρατιωτική θητεία: 14/2-14/11/2007, Στρατός Ξηράς

Διεύθυνση οικίας: Σπάρτης 37, Πετρούπολη, 132 31 Αθήνα

Τηλέφωνο: 210 5060785, 6974 243567

Ηλεκτρονική διεύθυνση: ctsironis@astro.auth.gr

Ιστοσελίδα: <http://www.astro.auth.gr/~ctsironis>

Τριτοβάθμια εκπαίδευση

1993-1999: Ε.Κ.Π.Α., Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Φυσικής
Πτυχίο Φυσικών Επιστημών

Βαθμός αποφοίτησης: 7,02/10 (Λίαν Καλώς)

1999-2002: Ε.Κ.Π.Α., Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Φυσικής
Μεταπτυχιακό Δίπλωμα Ειδίκευσης στη Βασική Φυσική

Επιβλέπων: Πολυμίλης Χρόνης (Ε.Κ.Π.Α.)

Βαθμός αποφοίτησης: 8,85/10 (Άριστα)

2003-2007: Α.Π.Θ., Σχολή Θετικών Επιστημών, Τμήμα Φυσικής

Διδακτορικό Δίπλωμα στις Φυσικές Επιστήμες

Επιβλέποντες: Βλάχος Λουκάς (Α.Π.Θ.)

Σαμαράς Θεόδωρος (Α.Π.Θ.)

Χιτζανίδης Κυριάκος (Ε.Μ.Π.)

Ερευνητική δραστηριότητα

Ερευνητικές εργασίες (projects)

1996-1998: Ανάλυση δυναμικών συστημάτων με τη βοήθεια χρονοσειρών

Συνεργάτες: Πολυμίλης Χρόνης (Ε.Κ.Π.Α.)

Παπαδάκης Γεώργιος (Ε.Κ.Π.Α.)

1999-2000: Ομοκλινικό και ετεροκλινικό πλέγμα της συντονισμένης περιοδικής τροχιάς 1:3

Συνεργάτες: Πολυμίλης Χρόνης (Ε.Κ.Π.Α.)

Γιαννακόπουλος Αθανάσιος (U. Warwick)

1999-2002: Μετάβαση στο χάος στη σχετικιστική και μη σχετικιστική εκδοχή ενός δυναμικού συστήματος

Συνεργάτες: Πολυμίλης Χρόνης (Ε.Κ.Π.Α.)

Χιτζανίδης Κυριάκος (Ε.Μ.Π.)

Σκόκος Χαράλαμπος (Ε.Κ.Π.Α.)

2000-2001: Συμμετρικές περιοδικές τροχιές στο κυκλικά περιορισμένο πρόβλημα των N σωμάτων

Συνεργάτες: Πινότσης Αντώνιος (Ε.Κ.Π.Α.)

Καλβουρίδης Τηλέμαχος (Ε.Μ.Π.)

2002-2004: Επιτάχυνση φορτισμένων σωματιδίων και ανώμαλη διάχυση στην αλληλεπίδραση με ηλεκτρομαγνητικά πεδία

Συνεργάτες: Βλάχος Λουκάς (Α.Π.Θ.)

Αναστασιάδης Αναστάσιος (Ε.Α.Α.)

Isliker Heinz (Α.Π.Θ.)

Δαγκλής Ιωάννης (Ε.Α.Α.)

2004-2006: Μη γραμμική αλληλεπίδραση φορτίου-κύματος σε πλάσμα σύντηξης

Συνεργάτες: Βλάχος Λουκάς (Α.Π.Θ.)

Χιτζανίδης Κυριάκος (Ε.Μ.Π.)

Κομίνης Ιωάννης (Ε.Μ.Π.)

2004-2006: Εντοπισμός κυματικών δεσμών με non-Gaussian κατανομή ηλεκτρικού πεδίου σε πλάσμα tokamak

Συνεργάτες: Poli Emanuele (I.P.P.)

Pereverzev Grigory (I.P.P.)

2005-2007: Περιγραφή της διάδοσης και απορρόφησης κυκλοτρονικής ακτινοβολίας σε πλάσμα σύντηξης με τη μέθοδο FDTD

Συνεργάτες: Σαμαράς Θεόδωρος (Α.Π.Θ.)

Βλάχος Λουκάς (Α.Π.Θ.)

Συμμετοχή σε ερευνητικά προγράμματα

1999-2000: Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης

Θέμα: Μεταφορά σωματιδίων και χάος σε πλάσμα σύντηξης

Συνεργάτες: Πολυμίλης Χρόνης (Ε.Κ.Π.Α.)

Σκόκος Χαράλαμπος (Ε.Κ.Π.Α.)

2000-2001: Πρόγραμμα Ενίσχυσης Νέου Ερευνητικού Δυναμικού

Θέμα: Δυναμική αλλαγών φάσης σε κράμματα μετάλλων

Συνεργάτες: Πολυμίλης Χρόνης (Ε.Κ.Π.Α.)

Χιτζανίδης Κυριάκος (Ε.Μ.Π.)

Γιαννακόπουλος Αθανάσιος (U. Warwick)

2003-2007: Εθνικό Πρόγραμμα Ελεγχόμενης Θερμοπυρηνικής Σύντηξης

Θέμα: Θέρμανση πλάσματος σύντηξης και οδήγηση ρευμάτων

Συνεργάτες: Βλάχος Λουκάς (Α.Π.Θ.)

Isliker Heinz (Α.Π.Θ.)

Poli Emanuele (I.P.P.)

Pereverzev Grigory (I.P.P.)

Σεμινάρια

1. *Χάος και ευστάθεια στη σχετικιστική και μη σχετικιστική αλληλεπίδραση ηλεκτρομαγνητικού κύματος με ηλεκτρόνια*
Παρουσίαση Μεταπτυχιακής διατριβής, Αθήνα (2002)
2. *Chaos and anomalous diffusion in nonlinear wave-particle interaction*
Tokamakphysik Kaffeeseminar, Garching (2003)
3. *Επίλυση των εξισώσεων Maxwell στο μικροκυματικό όριο*
Σεμινάριο Αστεροσκοπείου Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη (2004)
4. *Non-Gaussian beam tracing*
Tokamakphysik Kaffeeseminar, Garching (2005)
5. *Non-Gaussian beam tracing and applications to plasma heating*
I.P.P. Kolloquium, Jülich (2006)

Συμμετοχή σε συνέδρια/σχολεία

1. 10^ο Θερινό Σχολείο μη Γραμμικότητας και Χάους, Θεσσαλονίκη (1997)
Ομιλία-Αφίσα: Αναδόμηση χώρου φάσεων με τη βοήθεια χρονοσειρών
2. 11^ο Θερινό Σχολείο μη Γραμμικότητας και Χάους, Λειβαδιά (1998)
3. 1^ο Διεπιστημονικό Συμπόσιο μη Γραμμικών Προβλημάτων, Αθήνα (2000)
4. 14^ο Θερινό Σχολείο μη Γραμμικότητας και Χάους, Πάτρα (2001)
Αφίσα: Στοχαστική επιτάχυνση ηλεκτρονίων με ηλεκτρομαγνητικό κύμα
5. 5th HEL.AS.ET. Astronomical Conference, Heraklion-Greece (2001)
Αφίσα: Symmetric periodic motions in a ring problem
6. 1^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2002)
7. 2^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2003)
Ομιλία: Non-Gaussian διάχυση σωματιδίων στη μη γραμμική αλληλεπίδραση κύματος-ηλεκτρονίου
8. 16^ο Θερινό Σχολείο μη Γραμμικότητας και Χάους, Χαλκίδα (2003)
9. International Topical Conference on Plasma Physics, Santorini-Greece (2003)
Αφίσα: Anomalous diffusion in nonlinear wave-particle interaction
10. 6th HEL.AS.ET. Astronomical Conference, Athens-Greece, (2003)
Αφίσα: Ion interactions with an auroral potential structure

11. 1st Summer School on Basic Processes of Turbulent Plasmas, Chalkidiki-Greece (2003)
12. 3^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2004)
13. 2nd IAEA Technical Meeting on the Theory of Plasma Instabilities, Trieste-Italy (2005)
Αφίσα: Anomalous particle transport and self-consistent wave evolution of magnetized electrons interacting with EC waves
14. Επιστημονικό Συμπόσιο ΕΕΦ: "Μεγάλες Στιγμές της Φυσικής", Αθήνα (2005)
15. 4^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2005)
Αφίσες: Μη γραμμική και αυτοσυνεπής ανάλυση της EC θέρμανσης πλάσματος
 Διάδοση non-Gaussian δεσμών σε πλάσμα σύντηξης
16. 32nd EPS Conference on Plasma Physics, Tarragona-Spain (2005)
Ομιλία: Nonlinear and self-consistent treatment of ECRH
17. 5^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2006)
Ομιλίες: Εισαγωγή στη θεωρία και τα πειράματα θέρμανσης πλάσματος και οδήγησης ρευμάτων
 Εφαρμογή της μεθόδου εντοπισμού δέσμης στη διάδοση και απορρόφηση non-Gaussian δεσμών
18. 14th Joint Workshop on ECE and ECRH, Santorini-Greece (2006)
Αφίσα: Non-Gaussian EC beam tracing in inhomogeneous anisotropic plasmas
19. 19^ο Θερινό Σχολείο μη Γραμμικότητας και Χάους, Θεσσαλονίκη (2006)
Αφίσα: Μη γραμμική απορρόφηση EC κυμάτων σε πλάσμα σύντηξης
20. ITM-TF 2006 General Meeting, Cadarache-France (2006)
21. 6^ο Σχολείο Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2007)
Ομιλίες: Ο ρόλος των μη γραμμικών φαινομένων στη θέρμανση πλάσματος με ηλεκτρομαγνητικά κύματα
 Μελέτη της διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε πλάσμα σύντηξης με τη μέθοδο FDTD

Δημοσιεύσεις

Σε επιστημονικά περιοδικά

1. *Ion heating in an auroral potential structure*
Anastasiadis A., Daglis I. A. and Tsironis C.
Astron. Astrophysics **419**, 793 (2004)
2. *Anomalous transport of magnetized electrons interacting with EC waves*
Tsironis C. and Vlahos L.
Plasma Phys. Control. Fusion **47**, 131 (2005)
3. *Effect of nonlinear wave-particle interaction on electron-cyclotron absorption*
Tsironis C. and Vlahos L.
Plasma Phys. Control. Fusion **48**, 1297 (2006)
4. *Beam tracing description of non-Gaussian wave beams*
Tsironis C., Poli E. and Pereverzev G. V.
Phys. Plasmas **13**, 113304 (2006)
5. *Scattered-field FDTD algorithm for hot anisotropic plasma with application to EC heating*
Tsironis C., Samaras T. and Vlahos L.
To appear in *IEEE Trans. Antennas Propagat.* (2007)

Σε πρακτικά συνεδρίων/σχολείων

1. *Symmetric periodic motions in a ring problem*
Pinotsis A. D., Tsironis C. and Kalvourides T.
Proc. 5th HELASET Astronomical Conference, Heraclion-Greece (2001)
2. *Ανώμαλη διάχυση σχετικιστικών ηλεκτρονίων στη μη γραμμική αλληλεπίδραση φορτίου-κύματος*
Τσιρώνης Χ. και Βλάχος Λ.
Πρακτ. 2^ο Σχολείου Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2003)
3. *Anomalous particle transport and self-consistent wave evolution of magnetized electrons interacting with EC waves*
Tsironis C. and Vlahos L.
Proc. IAEA TM-2/05, Trieste-Italy (2005)
4. *Nonlinear and self-consistent treatment of ECRH*
Tsironis C. and Vlahos L.
Proc. 32nd EPS Conference, Tarragona-Spain (2005)

5. *Εφαρμογή της μεθόδου εντοπισμού δέσμης στη διάδοση non-Gaussian κυματικών δεσμών*
Τσιρώνης Χ., Poli E. και Pereverzev G. V.
Πρακτ. 5^{ου} Σχολείου Φυσικής και Τεχνολογίας Σύντηξης, Βόλος (2006)
6. *Non-Gaussian EC beam tracing in inhomogeneous anisotropic plasmas*
Tsironis C., Poli E. and Pereverzev G. V.
Proc. EC-14, Santorini-Greece (2006)

Διατριβές

1. *Μελέτη δυναμικών συστημάτων με τη βοήθεια χρονοσειρών*
Προπτυχιακή διατριβή, Ε.Κ.Π.Α. (1998)
2. *Μετάβαση στην στοχαστικότητα στη σχετικιστική και μη σχετικιστική εκδοχή ενός δυναμικού συστήματος*
Μεταπτυχιακή διατριβή, Ε.Κ.Π.Α. (2002)
3. *Αλληλεπίδραση ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας με πλάσμα και εφαρμογές*
Διδακτορική διατριβή, Α.Π.Θ. (2007)

Εκπαιδευτική δραστηριότητα

- 2007- :** Τ.Ε.Ι. Πειραιά, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, Τμήμα Αυτοματισμού
Εργαστήριο Σ.Α.Ε. Ι
Συνεργάτες: Καλλιγερόπουλος Δημήτριος (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
Βασιλειάδου Σουλτάνα (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
Γλέζος Οδυσσέας (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
- 2007- :** Τ.Ε.Ι. Πειραιά, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, Τμήμα Αυτοματισμού
Εργαστήριο Ηλεκτρικών και Ηλεκτρονικών Μετρήσεων
Συνεργάτες: Μπούσλης Πέτρος (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
Δρόσος Χρήστος (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
Νικολάου Γρηγόριος (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
- 2007- :** Τ.Ε.Ι. Πειραιά, Σχολή Τεχνολογικών Εφαρμογών, Τμήμα Ηλεκτρολογίας
Εργαστήριο Σ.Α.Ε. ΙΙ
Συνεργάτες: Πολίτης Γεώργιος (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)
Λιγνός Ιωάννης (Τ.Ε.Ι. Πειραιά)

*Λοιπές δεξιότητες**Ηλεκτρονικοί υπολογιστές*

Λειτουργικά συστήματα: DOS

Microsoft Windows

Linux/UNIX

Γλώσσες προγραμματισμού: Fortran 77/95

Pascal

Επιστημονικό λογισμικό: IDL

Matlab/Scilab

Mathematica

SPSS

Desktop Publishing: Adobe Illustrator

CorelDRAW

LaTeX

Microsoft Office

Επεξεργασία εικόνας/ήχου: Adobe Photoshop

Adobe Premiere

Ξένες γλώσσες

Αγγλικά: University of Cambridge

First Certificate in English

Έτος απόκτησης: 1990

Βαθμός: B (Very Good)

Γερμανικά: Χωρίς δίπλωμα