

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ

Μιλτιάδης Βαβουλίδης

Εργαστήριο Αστρονομίας

Τομέας Αστροφυσικής, Αστρονομίας & Μηχανικής

Τμήμα Φυσικής, Σ.Θ.Ε., Α.Π.Θ.

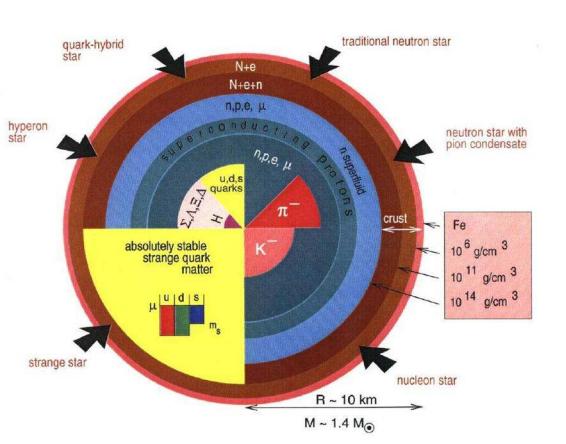
Μέρος 1ο: Βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Μέρος 2ο: Μαγνητισμένοι αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Μέρος 3ο: Ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων

Σχετικιστικοί αστέρες (αστέρες νετρονίων)

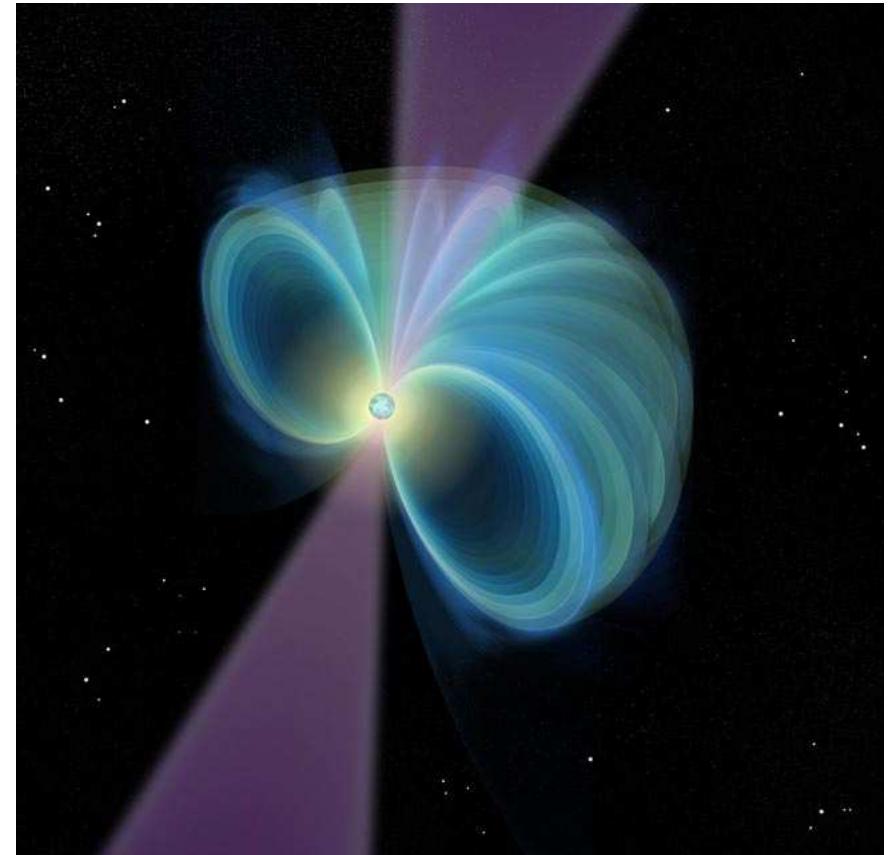
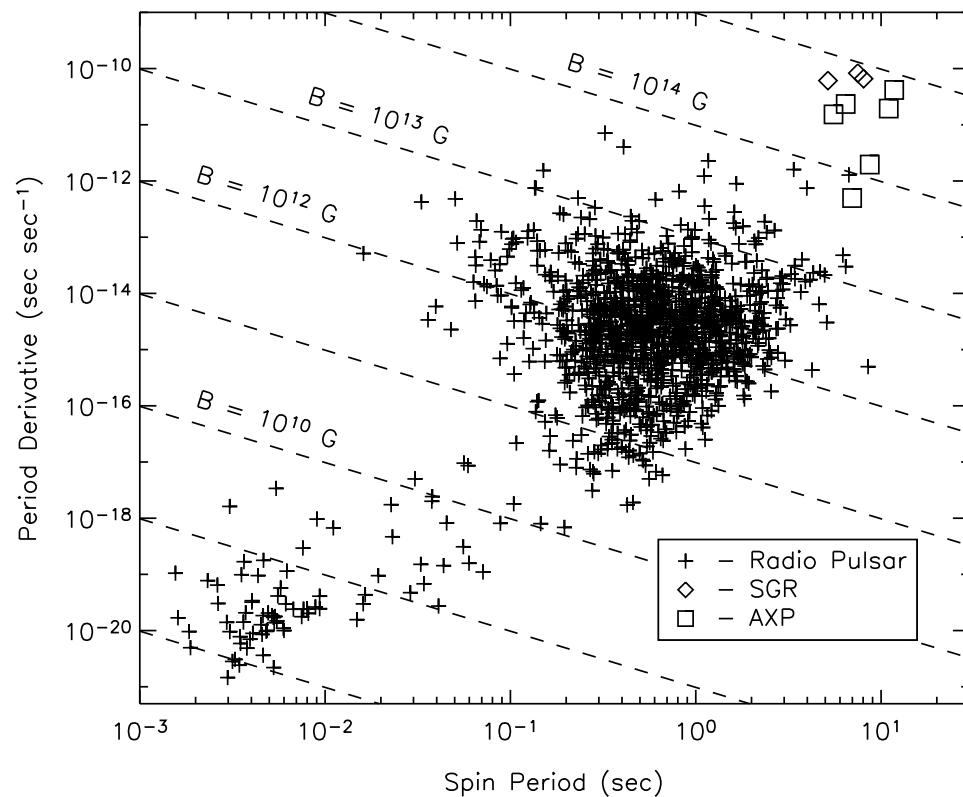
- proto - neutron stars
- millisecond (recycled) pulsars
- accreting neutron stars in Low - Mass X - ray Binaries (LMXBs)
- radio pulsars
- magnetars



→ Διατήρηση της στροφορμής: $J = I\Omega = \frac{2}{5}MR^2\Omega \implies \Omega \propto R^{-2}$

→ Διατήρηση της μαγνητικής ροής: $\Phi = \int dS \cdot B = 4\pi R^2 B \implies B \propto R^{-2}$

→ Δημιουργία στερεού φλοιού: $T \lesssim 10^{10} \text{ Kelvin}$



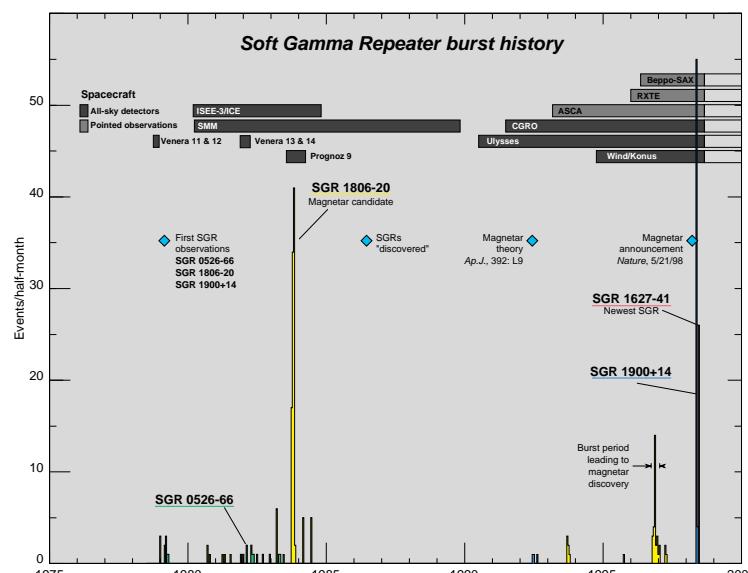
Μοντέλο περιστρεφόμενου μαγνητικού διπόλου:

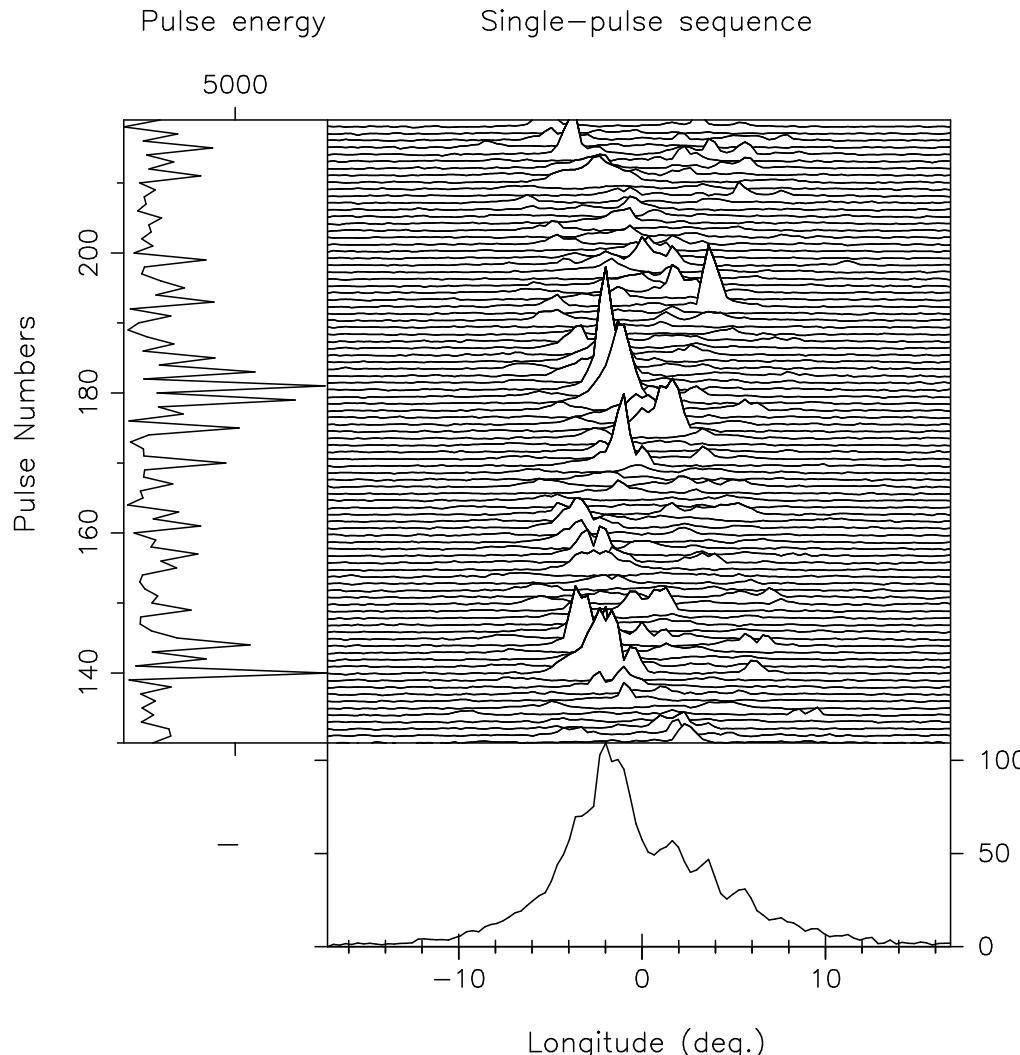
$$B \propto (P \dot{P})^{-1/2}, \quad \tau = P / (2\dot{P})$$

$$dE/dt = 2/3 R^6 B^2 \Omega^4 \sin^2 \theta$$

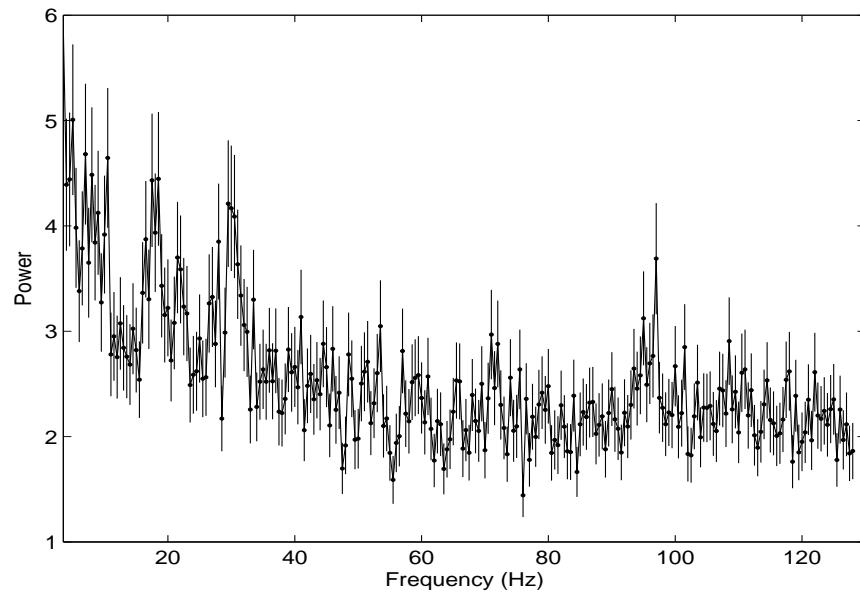
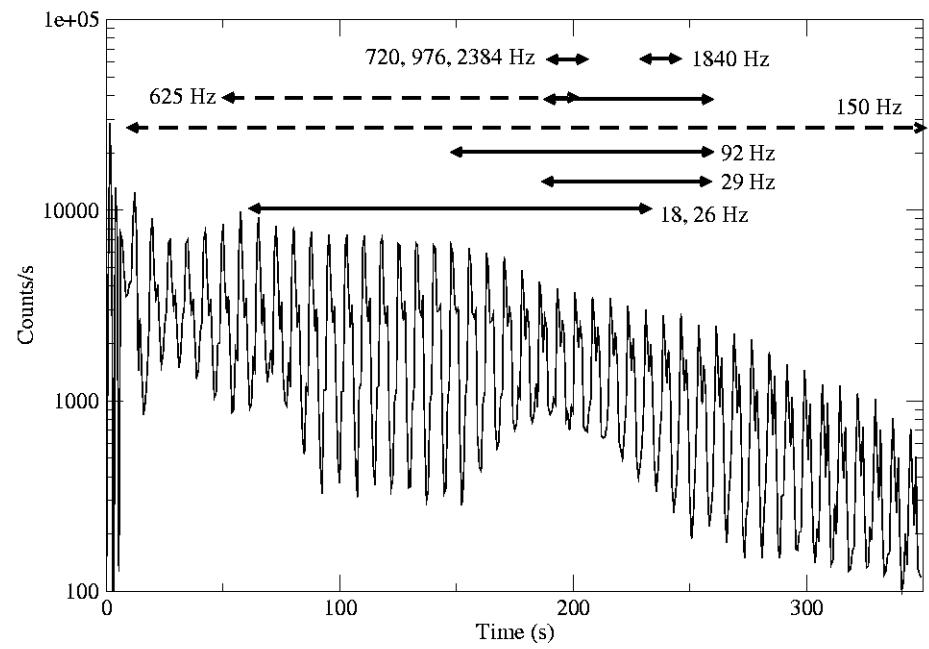
Σεισμοί σε pulsars και magnetars

- Παλμοί, υποπαλμοί, μικροπαλμοί, μετατοπίσεις υποπαλμών και απότομες ελαττώσεις περιόδων (glitches) σε pulsars (Αρχές της δεκαετίας του '70)
- Ήμι - περιοδικές ταλαντώσεις (Quasi - Periodic Oscillations, QPOs) σε magnetars (Soft Gamma - ray Repeaters, SGRs) και Anomalous X - ray Pulsars, AXPs)
(Κυρίως μετά το 2005)





- Παλμοί $P_1 \simeq 1.5$ msec – 10 sec, μικροπαλμοί $P_\mu \simeq 1$ msec,
υποπαλμοί $P_2 \simeq 10 - 50$ msec και μετατοπίσεις υποπαλμών $P_3 \simeq 2 - 20P_1$
- Ταλαντώσεις αστέρων νετρονίων (Van Horn 1980)



- SGR 1806-20: $\simeq 18, 26, 29, 92, 150, 625, 720, 976, 1840, 2384$ Hz
- SGR 1900+14: $\simeq 28, 54, 84, 155$ Hz
- SGR 0526-66: $\simeq 43$ Hz

- Rossi X - ray Timing Explorer (RXTE)
- $\chi\alpha$ Ramaty High - Energy Solar Spectroscopic Imager (RHESSI)

Χρονικό των QPOs σε SGRs

1979: Έκλαμψη στο SGR 0526-66

1983: Ανακάλυψη QPO στο SGR 0526-66 (Barat et al.)

1995: Μοντέλα magnetars (Duncan & Thompson)

1998: Έκλαμψη στο SGR 1900+14

Global Seismic Oscillations (Duncan)

2001: Μαγνητικές επιδράσεις (Messios, Papadopoulos & Stergioulas)

- Σχετικότητα και μαγνητικά μονόπολα

2004: Έκλαμψη στο SGR 1806-20

2005: Νέες ανακαλύψεις QPOs στα SGR 1900+14, SGR 1806-20
(Israel et al., Strohmayer & Watts)

Σύζευξη στερεού φλοιού - ρευστού ωκεανού (Piro)

2006: Μαγνητικές επιδράσεις

- Ιδιοταλαντώσεις (Glampedakis, Samuelsson & Andersson)
(Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis)
- Συνεχές φάσμα (Levin; Sotani, Kokkotas & Stergioulas)

2007: Περιστροφικές επιδράσεις και σφαιροειδείς modes
(Vavoulidis, Stavridis, Kokkotas & Beyer)

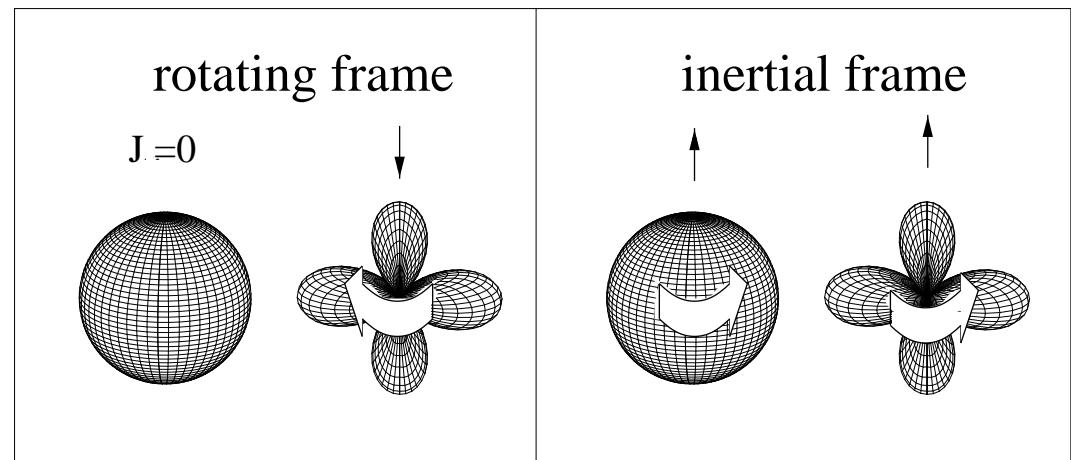
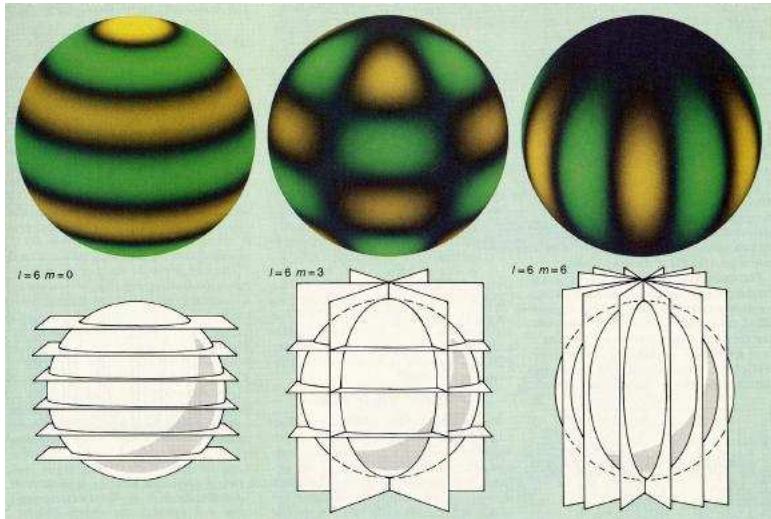
2008: (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis)

Αστάθειες σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων

- Δυναμικές αστάθειες
- Αστάθειες οδηγούμενες από μηχανισμούς απόσβεσης
 - Αστάθειες οδηγούμενες από το Ιξώδες
 - Αστάθειες οδηγούμενες από τη βαρυτική ακτινοβολία
 1. Αστάθειες των f-modes
 2. Αστάθειες των w-modes
 3. Αστάθειες των r-modes
 4. Αστάθειες των t-modes, i-modes

→ Στις περιπτώσεις 1 και 2 ενδιαφερόμαστε για μελέτες σε **ταχέως** περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων.

→ Στις περιπτώσεις 3 και 4 ενδιαφερόμαστε για μελέτες σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με **στερεό φλοιό**.

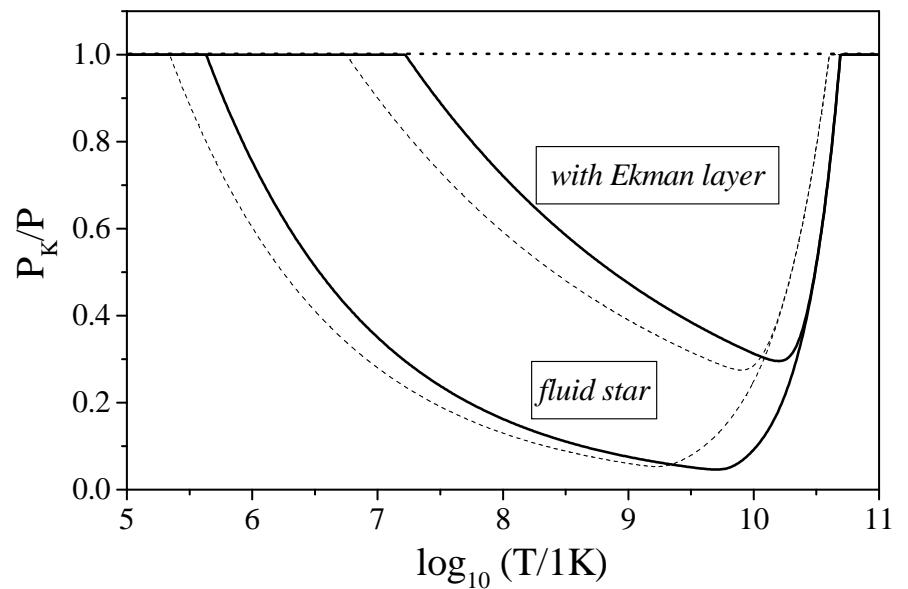
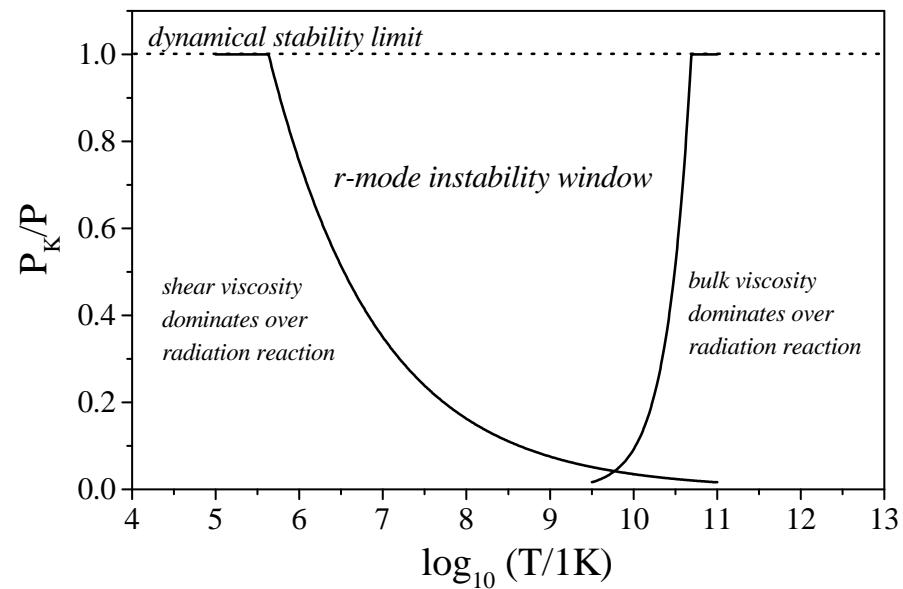


Αναγκαία συνθήκη (αλλά όχι και ικανή): $\sigma_r \sigma_i < 0 \iff \sigma_r (\sigma_r - m\Omega) < 0$

→ Αστροφυσικό ενδιαφέρον έχουν π.χ. οι f-modes με $m = 2 \dots 5$
αλλά τότε, για να ισχύει η παραπάνω συνθήκη, πρέπει $\varepsilon = \Omega/\Omega_K \simeq 1$.

→ Για τους r-modes, αντιθέτως, η παραπάνω συνθήκη ισχύει για κάθε Ω .

$$\sigma_r = +\frac{2m\Omega}{\ell(\ell+1)} > 0 \iff \sigma_i = -\frac{(\ell-1)(\ell+2)m\Omega}{\ell(\ell+1)} < 0$$



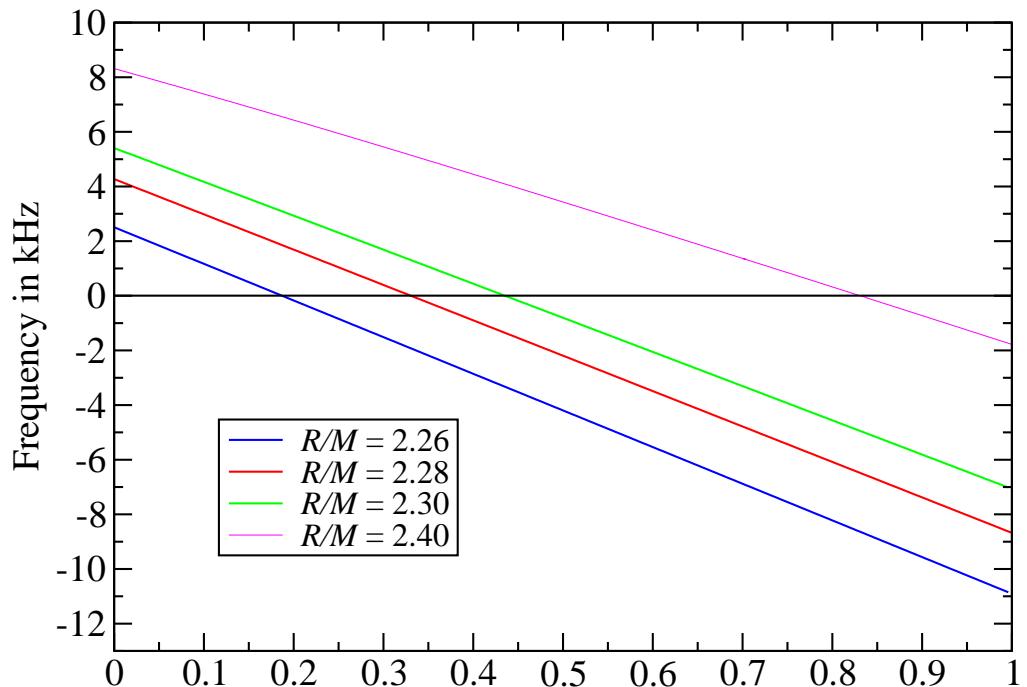
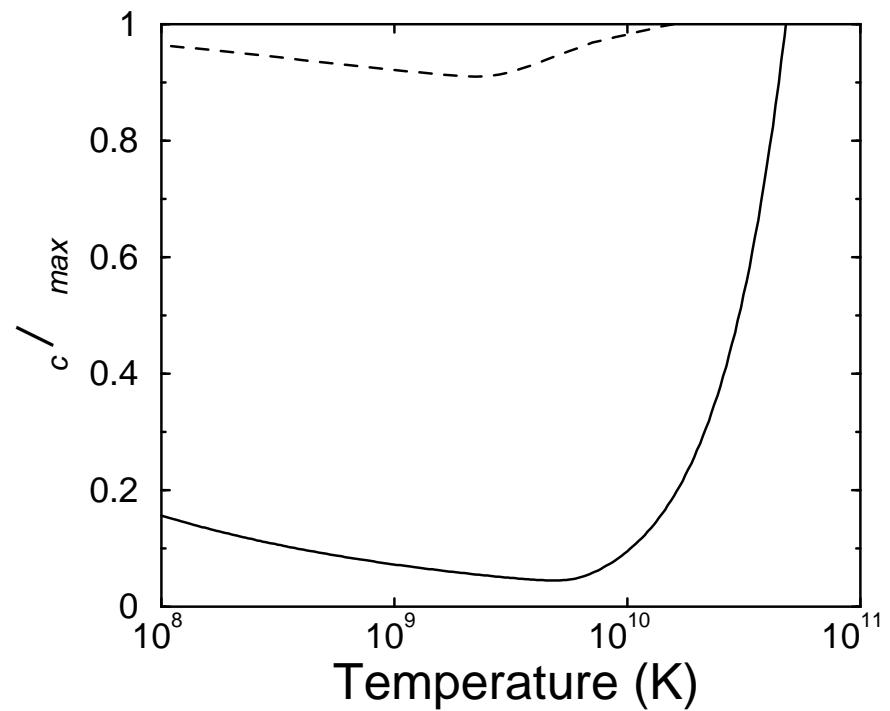
“Παράθυρο” αστάθειας: $(1/2E) dE/dt = 1/\tau_{gr} + 1/\tau_{bv} + 1/\tau_{sv} + 1/\tau_{Ek} + \dots$

→ Βαρυτική ακτινοβολία: $\tau_{gr} \simeq +47M_{1.4}^{-1}R_{10}^{-4}P_{-3}^6 \text{ sec}$

→ Γραμμικό ιξώδες: $\tau_{sv} \simeq -6.7 \times 10^7 M_{1.4}^{-5/4} R_{10}^{23/4} T_9^2 \text{ sec}$

→ Γενικό ιξώδες: $\tau_{bv} \simeq -2.7 \times 10^{11} M_{1.4} R_{10}^{-1} P_{-3}^2 T_9^{-6} \text{ sec}$

→ Στερεός φλοιός (με στρώμα Ekman): $\tau_{Ek} \simeq -830 T_9 P_{-3}^{1/2} \text{ sec}$



- Για τους f-modes (αριστερά) το “παράθυρο” αστάθειας είναι πολύ μικρό και περιορίζεται σε $\varepsilon = \Omega_c/\Omega_{max} \gtrsim 0.91$ και $T \simeq 10^9$ Kelvin.
- Οι w-modes (δεξιά) ικανοποιούν τη συνθήκη αστάθειας για μεγάλα ε ($\varepsilon \gtrsim 0.8$ για $R/M = 2.40$, αν και $\varepsilon \gtrsim 0.2$ για $R/M = 2.26$).

ΒΡΑΔΕΩΣ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΦΛΟΙΟ

- Δομή των μοντέλων
- Εξισώσεις διαταραχών
- Αποτελέσματα
 - I. Μη - περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων
 - II. Περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων
- Συμπεράσματα

Vavoulidis, Stavridis, Kokkotas & Beyer, MNRAS, 377, 1553 (2007)
Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis, MNRAS, 384, 1711 (2008)

→ Μέθοδος του Hartle (1967): τάξεις ως προς $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$

→ Εξισώσεις Einstein ($G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$)

και εξισώσεις διατήρησης ενέργειας - ορυγκών ($\nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0$) για τη μετρική:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi$$

και για των τανυστή ενέργειας - ορυγκών: $T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta}$

→ Εξισώσεις TOV:

$$\begin{aligned} \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \quad e^{-2\lambda} := 1 - \frac{2M(r)}{r} \\ \frac{d\nu}{dr} &= e^{2\lambda} \left(4\pi r p + \frac{M(r)}{r^2} \right) \\ \frac{dp}{dr} &= -(\rho + p) \frac{d\nu}{dr} \end{aligned}$$

και εξίσωση παράσυρσης αδρανειακών συστημάτων αναφοράς ($\varpi := \Omega - \omega$):

$$\frac{d^2\varpi}{dr^2} - \left(\nu' + \lambda' - \frac{4}{r} \right) \frac{d\varpi}{dr} - 16\pi e^{2\lambda} (\rho + p) \varpi = 0$$

→ Ο στερεός φλοιός ($\mu \neq 0$) δεν υπεισέρχεται στις εξισώσεις δομής

σε αυτήν την προσέγγιση. Υπεισέρχεται στις εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς Ω/Ω_K .

→ Γραμμικοποίηση των εξισώσεων διατήρησης ενέργειας - ορμής: $\delta(\nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0)$

→ Προσέγγιση Cowling: $\delta g_{\alpha\beta} = 0$

→ Τανυστής ενέργειας - ορμής: $T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta}$

→ Υπολογισμός του τανυστή ιξώδους $S_{\alpha\beta}$ (Carter & Quintana, 1972):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_u S_{\alpha\beta} \left(= e^{-\nu} \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial t} \right), \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(P_\beta^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha + P_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta \right) - \frac{1}{3} P_{\alpha\beta} \nabla_\gamma u^\gamma$$

$$P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$$

→ Γραμμικές διαταραχές: $\delta p, \delta \rho (\delta p = c_s^2 \delta \rho), \delta u^\alpha \left(= \mathcal{L}_u \xi^\alpha = e^{-\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial t} \right)$

$$\xi^i = (\xi^r, \xi^\theta, \xi^\phi) := \left(\tilde{\xi}^r, \frac{\tilde{\xi}^\theta}{r}, \frac{\tilde{\xi}^\phi}{r \sin \theta} \right)$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta &= \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{A_r \Gamma p}{\rho} \alpha - \frac{\mu}{\rho} \\
&\times \left[\frac{1}{3} \frac{\partial \alpha}{\partial r} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\mu} \frac{d\mu}{dr} + \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} + \nabla^2 \tilde{\xi}^r - \frac{2\tilde{\xi}^r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta} - \frac{2 \cot \theta}{r^2} \tilde{\xi}^\theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi} \right]
\end{aligned} \tag{1\alpha'}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial t^2} + 2\Omega \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \cos \theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\rho} \\
&\times \left[\frac{1}{3r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\xi}^\theta}{r} \right) + \nabla^2 \tilde{\xi}^\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\xi}^\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi} \right]
\end{aligned} \tag{1\beta'}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial t^2} - 2\Omega \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial t} \cos \theta + \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta \right) &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} - \frac{\mu}{\rho} \\
&\times \left[\frac{1}{3r \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} - \frac{\tilde{\xi}^\phi}{r} \right) + \nabla^2 \tilde{\xi}^\phi + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} - \frac{\tilde{\xi}^\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \phi} \right]
\end{aligned} \tag{1\gamma'}$$

$$\chi := -\frac{\Gamma p}{\rho} \alpha - \frac{\tilde{\xi}^r}{\rho} \frac{dp}{dr}$$

$$\alpha := \nabla_i \xi^i = \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} + \frac{2\tilde{\xi}^r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} \tilde{\xi}^\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 := \nabla_i \nabla^i = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Σφαιροειδούς τύπου ταλαντώσεις:

$$\xi^i = \left[rS, H\frac{\partial}{\partial\theta}, H\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} \right] Y_{\ell m} e^{i\sigma t} \quad (2\alpha')$$

με τις σφαιροειδείς ιδιοσυναρτήσεις: $S = S(r)$, $H = H(r)$

Τοροειδούς τύπου ταλαντώσεις:

$$\xi^i = \left[0, T\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi}, -T\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} \right] Y_{\ell m} e^{i\sigma t} \quad (2\beta')$$

με την τοροειδή ιδιοσυνάρτηση: $T = T(r)$

→ Χρησιμοποιώντας τις Σχέσεις (2), στις Εξισώσεις (1),
αναγόμαστε σε ένα μονοδιάστατο σύστημα εξισώσεων.

Βλ. *Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis, MNRAS, 384, 1711 (2008)*

Βλ. επίσης και Strohmayer (1991), Lee & Strohmayer (1996), Yoshida & Lee (2001)

Στερεός φλοιός:

$$z_1^j = S^j$$

$$z_2^j = 2\alpha_1 e^{-\varepsilon\lambda} \frac{d}{dr} (r e^{\varepsilon\lambda} S^j) + \left(\Gamma - \frac{2}{3}\alpha_1 \right) \left\{ \frac{e^{-\varepsilon\lambda}}{r^2} \frac{d}{dr} (r^3 e^{\varepsilon\lambda} S^j) - \ell(\ell+1) H^j \right\}$$

$$z_3^j = H^j$$

$$z_4^j = \alpha_1 \left(e^{-2\varepsilon\lambda} r \frac{dH^j}{dr} + S^j \right)$$

$$z_5^j = T^j$$

$$z_6^j = \alpha_1 e^{-2\varepsilon\lambda} r \frac{dT^j}{dr}$$

Πευστός πυρήνας:

$$y_1^j = S^j$$

$$y_2^j = \left(r \frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \frac{\delta p^j}{\rho + \varepsilon p}$$

Εξισώσεις μηδενικής τάξης ως προς Ω/Ω_K ($j = 0$):

$$\begin{aligned} r \frac{dz_1^0}{dr} &= - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \varepsilon U_2 \right) z_1^0 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^0 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^0 \\ r \frac{dz_2^0}{dr} &= \left\{ \left(-3 - \varepsilon U_2 + U_1 - e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^0 \\ &\quad + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^0 + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^0 + e^{2\varepsilon\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_3^0}{dr} &= -e^{2\varepsilon\lambda} z_1^0 + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_4^0 \\ r \frac{dz_4^0}{dr} &= - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^0 \\ &\quad - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^0 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_4^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_5^0}{dr} &= \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_6^0 \\ r \frac{dz_6^0}{dr} &= - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \right\} z_5^0 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_6^0 \end{aligned}$$

Εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς Ω/Ω_K ($j = 1$):

$$\begin{aligned}
r \frac{dz_1^1}{dr} &= - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \varepsilon U_2 \right) z_1^1 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^1 \\
r \frac{dz_2^1}{dr} &= \left\{ \left(-3 - \varepsilon U_2 + U_1 - e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^1 \\
&\quad + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^1 + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^1 + e^{2\varepsilon\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^1 \\
&\quad + \left\{ -2e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \varepsilon \mathcal{A} \right\} z_1^0 + \left\{ 2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1 + \varepsilon \mathcal{B} \right\} z_3^0 + \varepsilon \mathcal{C} z_4^0 \\
r \frac{dz_3^1}{dr} &= -e^{2\varepsilon\lambda} z_1^1 + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_4^1 \\
r \frac{dz_4^1}{dr} &= - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^1 \\
&\quad - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^1 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_4^1 \\
&\quad + \left\{ \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \varepsilon \mathcal{D} \right\} z_1^0 + \varepsilon \mathcal{E} z_2^0 + \left\{ -2c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \varepsilon \mathcal{F} \right\} z_3^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r \frac{dz_5^1}{dr} &= \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_6^1 \\
r \frac{dz_6^1}{dr} &= - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \right\} z_5^1 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_6^1 \\
&\quad + \left\{ 2c_1 \bar{\sigma}_0 V_1 \left[-\bar{\sigma}_1 + \frac{m \bar{\omega}}{\ell (\ell + 1)} \right] + \varepsilon \mathcal{G} \right\} z_5^0
\end{aligned}$$

Εξισώσεις μηδενικής τάξης ως προς Ω/Ω_K ($j = 0$):

$$r \frac{dy_1^0}{dr} = - \left(3 - \frac{V_1}{\Gamma} + \varepsilon U_2 \right) y_1^0 - \left(\frac{V_1}{\Gamma} - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} \right) y_2^0$$

$$r \frac{dy_2^0}{dr} = (e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 + r A_r) y_1^0 - (U_1 + r A_r) y_2^0$$

Εξισώσεις πρώτης τάξης ως προς Ω/Ω_K ($j = 1$):

$$\begin{aligned} r \frac{dy_1^1}{dr} &= - \left(3 - \frac{V_1}{\Gamma} + \varepsilon U_2 \right) y_1^1 - \left(\frac{V_1}{\Gamma} - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} \right) y_2^1 \\ &\quad + \left\{ \frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} + \varepsilon \mathcal{H} \right\} y_1^0 + \left\{ \left[\frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} - \ell(\ell+1) \frac{2\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_0} \right] + 2\varepsilon \mathcal{I} \right\} \frac{y_2^0}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \frac{dy_2^1}{dr} &= (e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 + r A_r) y_1^1 - (U_1 + r A_r) y_2^1 \\ &\quad + 2e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 y_1^0 - \left\{ \frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} + \varepsilon \mathcal{H} \right\} y_2^0 \end{aligned}$$

Συνοριακές συνθήκες

→ στο κέντρο του αστέρα (ομαλότητα):

$$c_1 \bar{\sigma}_0^2 y_1^j - \ell y_2^j + F^j = 0 \quad \begin{cases} F^0 = 0 \\ F^1 = \frac{2m\varpi}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_1}{m\varpi} - \frac{1}{\ell} \right) c_1 \bar{\sigma}_0^2 y_1^0 \end{cases}$$

→ στην επιφάνεια του αστέρα ($\Delta p = 0$):

$$D = y_1^j - y_2^j = 0$$

$$D = z_6^j = 0$$

→ στην διεπιφάνεια ρευστού πυρήνα - στερεού φλοιού (συνέχεια της πρόσφυσης):

$$z_1^j = y_1^j$$

$$z_2^j = V_1 \left(y_1^j - y_2^j \right)$$

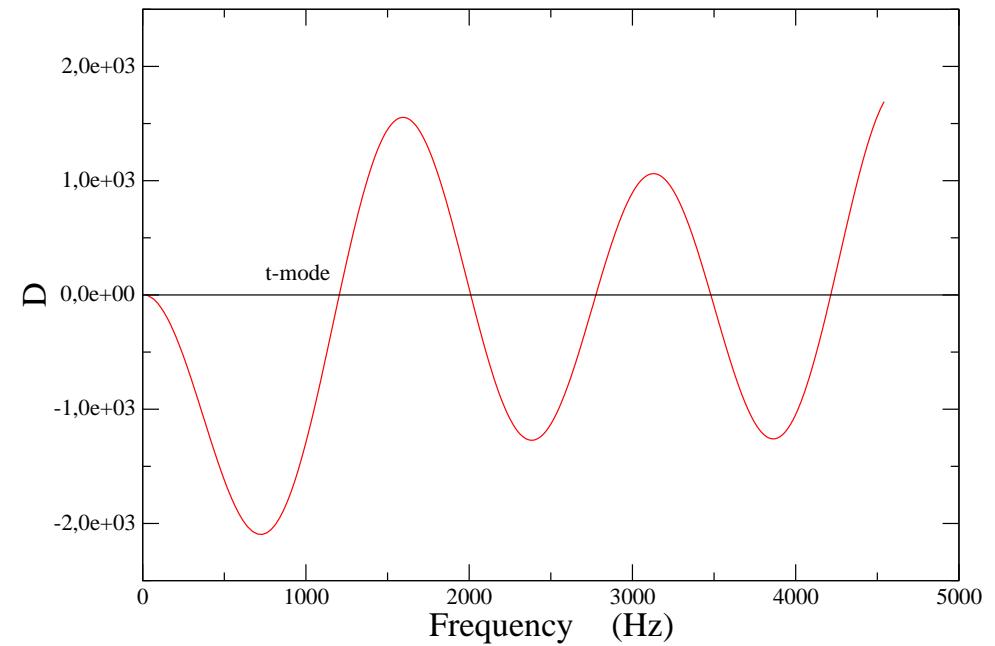
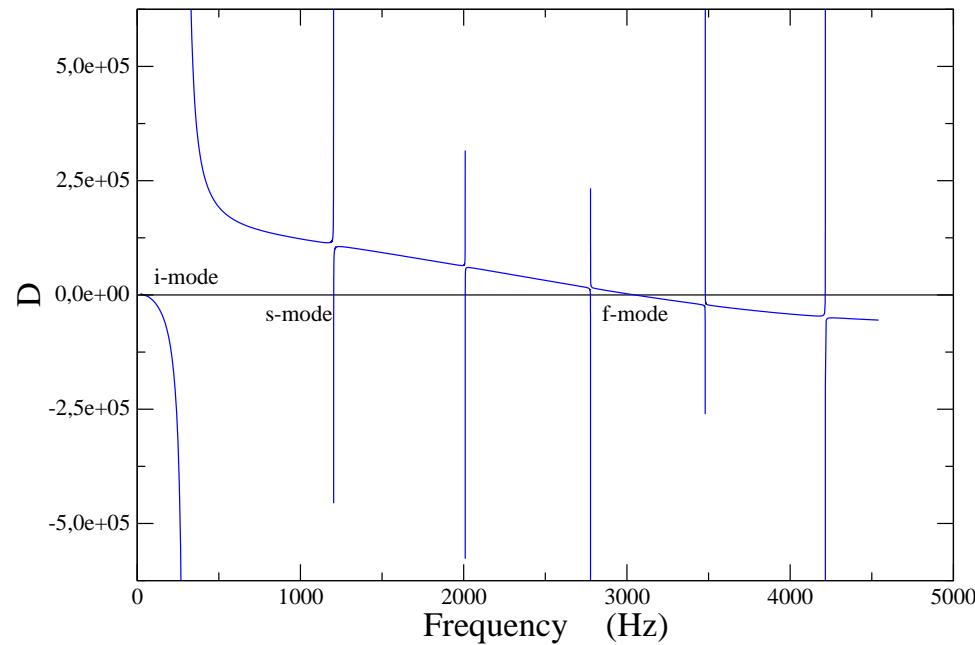
$$z_4^j = 0$$

$$z_6^j = 0$$

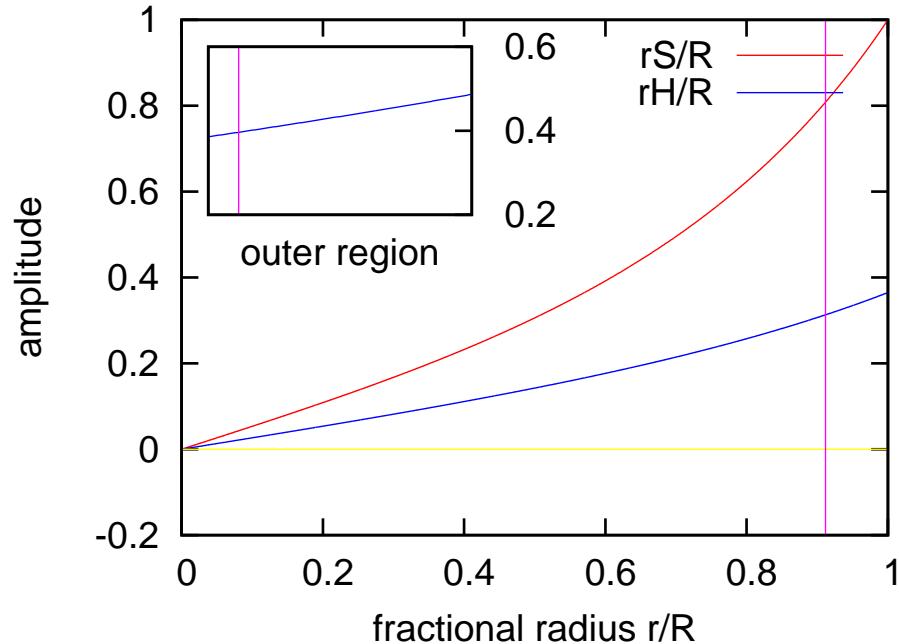
I. ΜΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

→ Βρίσκουμε **σφαιροειδείς** και **τοροειδείς** modes

στα σημεία που μηδενίζονται τα $D = y_1 - y_2$ και $D = z_6$



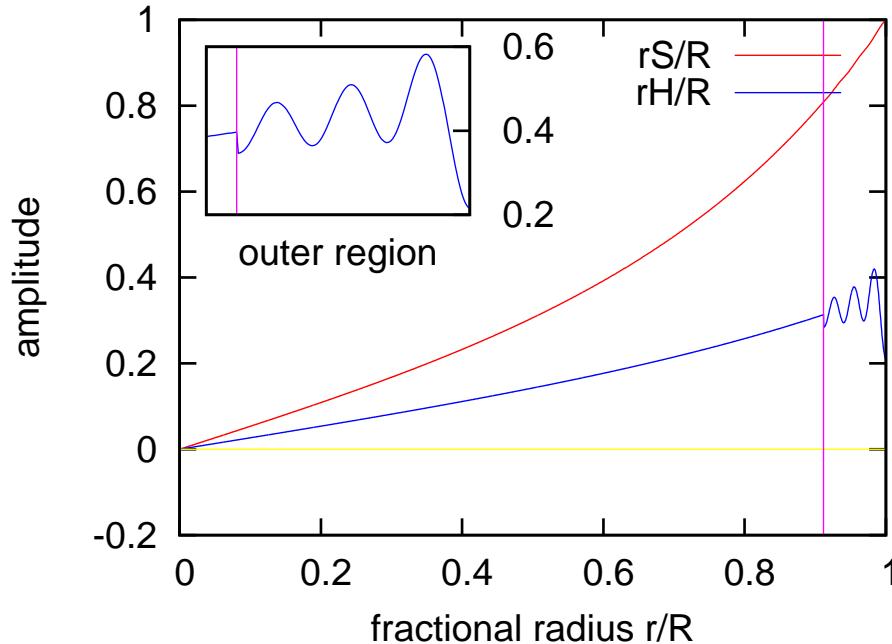
fundamental f -mode (χωρίς στερεό φλοιό)



→ Ιδιοσυχνότητα: 3509 Hz ($\sigma_0^2/\pi G \bar{\rho} = 3.65406$)

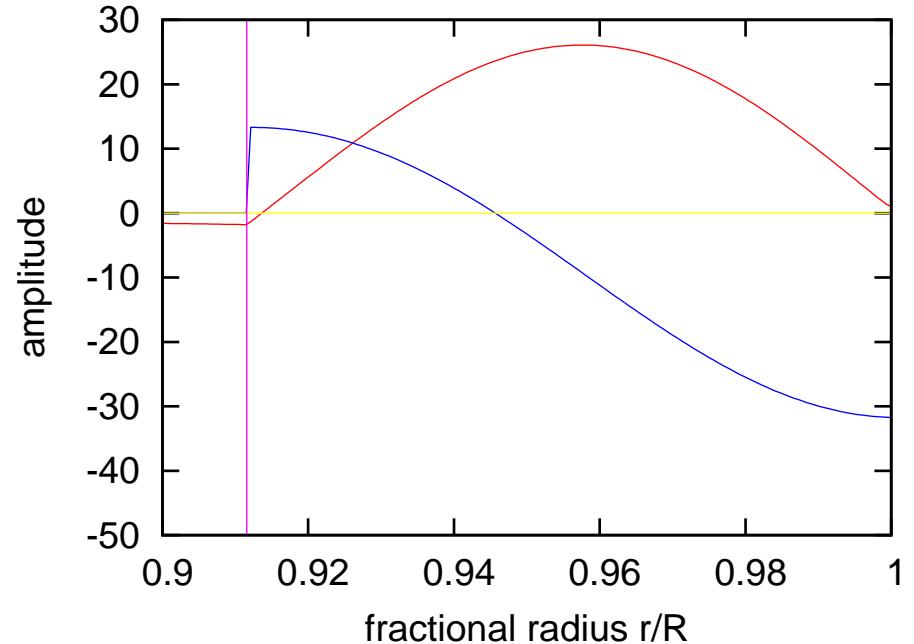
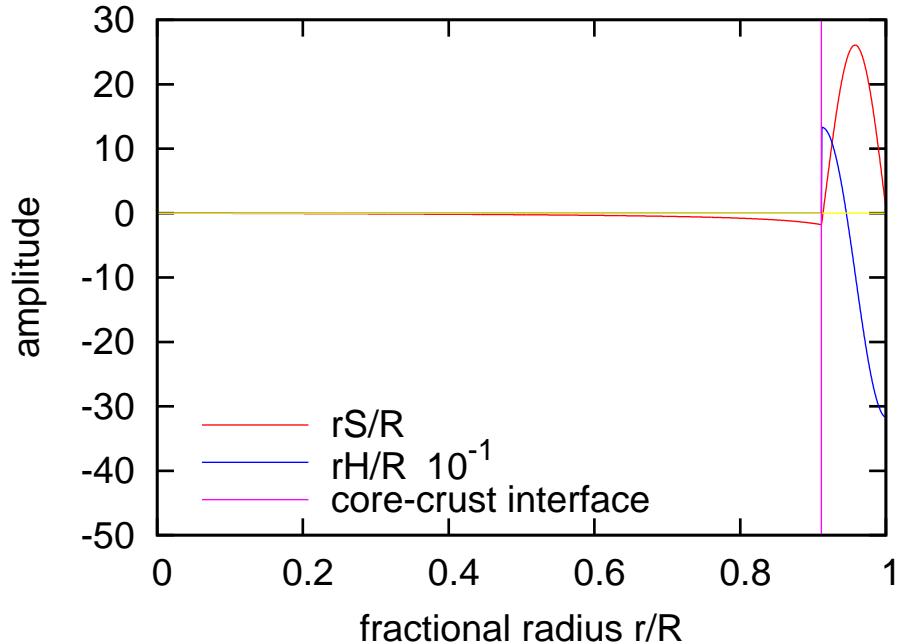
→ Πολυτροπικό μοντέλο: $R \simeq 10.1$ km, $M \simeq 1.4 M_{\odot}$

fundamental f -mode (με στερεό φλοιό)



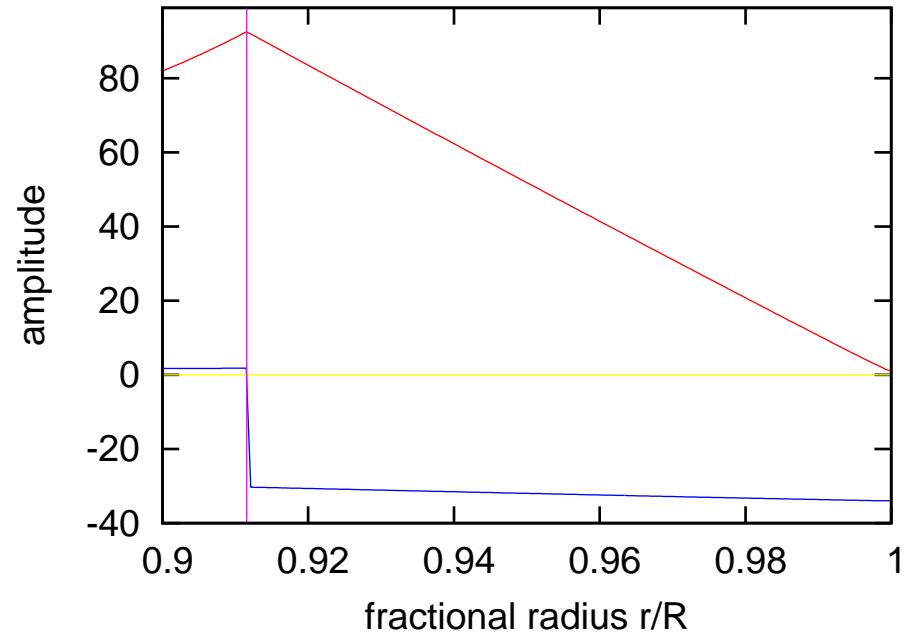
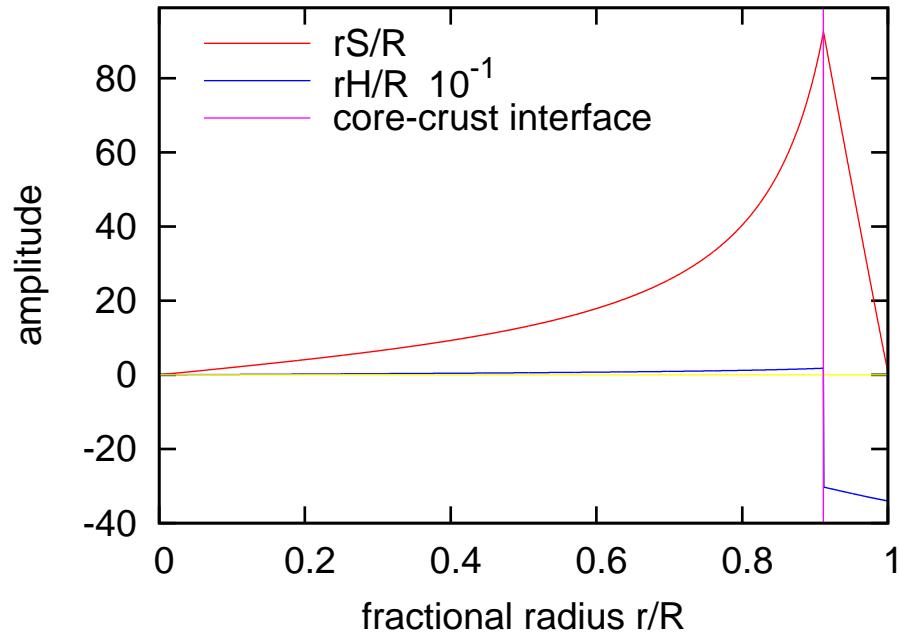
- Ιδιοσυχνότητα: 3509 Hz ($\sigma_0^2/\pi G \bar{\rho} = 3.65418$)
- Πολυτροπικό μοντέλο: $R \simeq 10.1$ km, $M \simeq 1.4 M_{\odot}$, $\Delta r \simeq 0.89$ km
- Ασυνέχεια και ταλαντωτική συμπεριφορά της εγκάρσιας ιδιοσυνάρτησης H
- Συνέχεια και ανεπαίσθητη ταλαντωτική συμπεριφορά της ακτινικής ιδιοσυνάρτησης S

shear s_1 -mode
(μόνο με στερεό φλοιό)



- Ιδιοσυχνότητα: 676 Hz
- Περιορισμός των ιδιοσυναρτήσεων στον στερεό φλοιό
- Κυρίως **εγκάρσιες** κινήσεις ($H \gg S$)

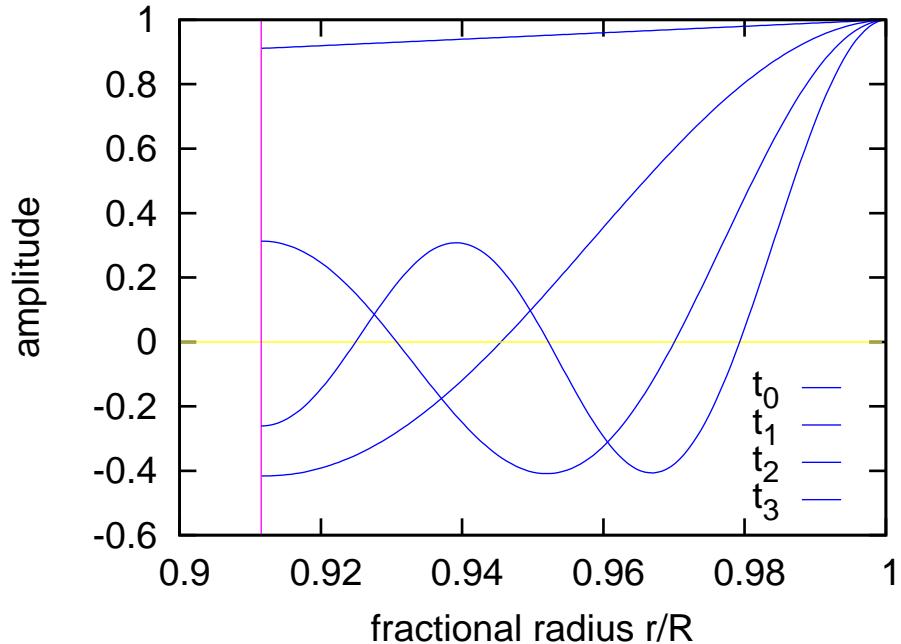
interfacial i -mode (μόνο με στερεό φλοιό)



→ Ιδιοσυχνότητα: 58 Hz

→ Ακμή της **ακτινικής ιδιοσυνάρτησης** στη βάση του στερεού φλοιού

torsional t-modes (μόνο με στερεό φλοιό)

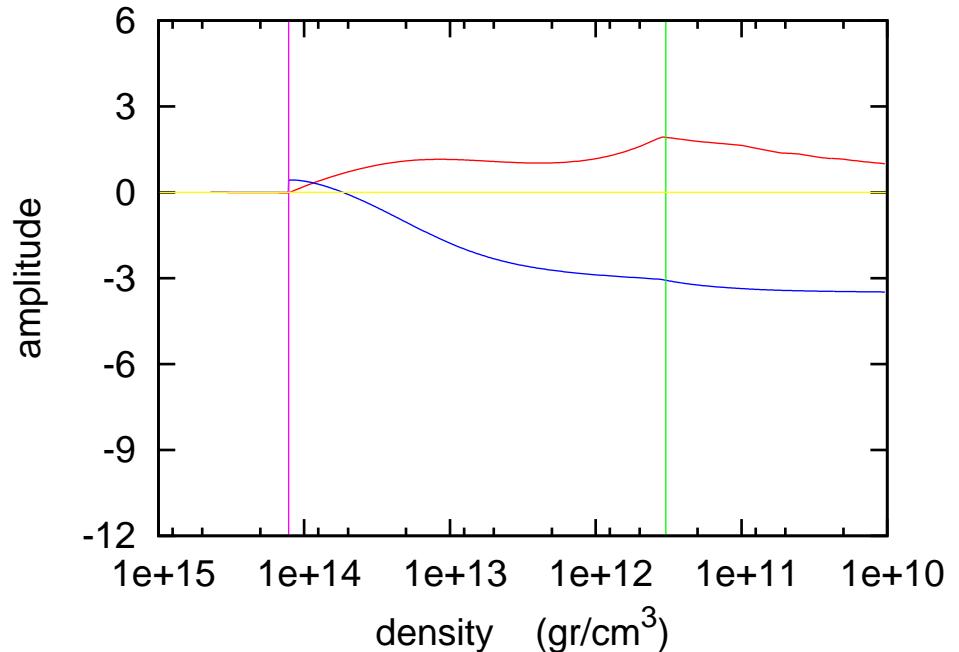
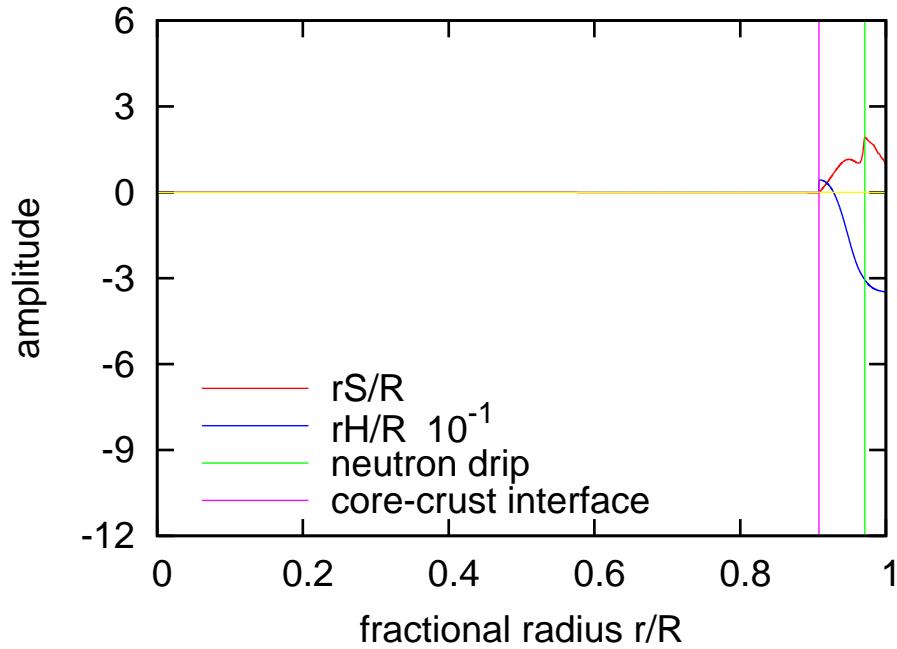


→ Ιδιοσυχνότητες: 33, 676, 1245, 1808 Hz

→ Αποκλειστικά εγκάρσιες κινήσεις ($S = 0$)

s_1 -mode

(μοντέλο με ρεαλιστική καταστατική εξίσωση: $L+DH_{14}$)



→ Εμφάνιση στερεού φλοιού: $1.28 \times 10^{14} \text{ gr}/\text{cm}^3$

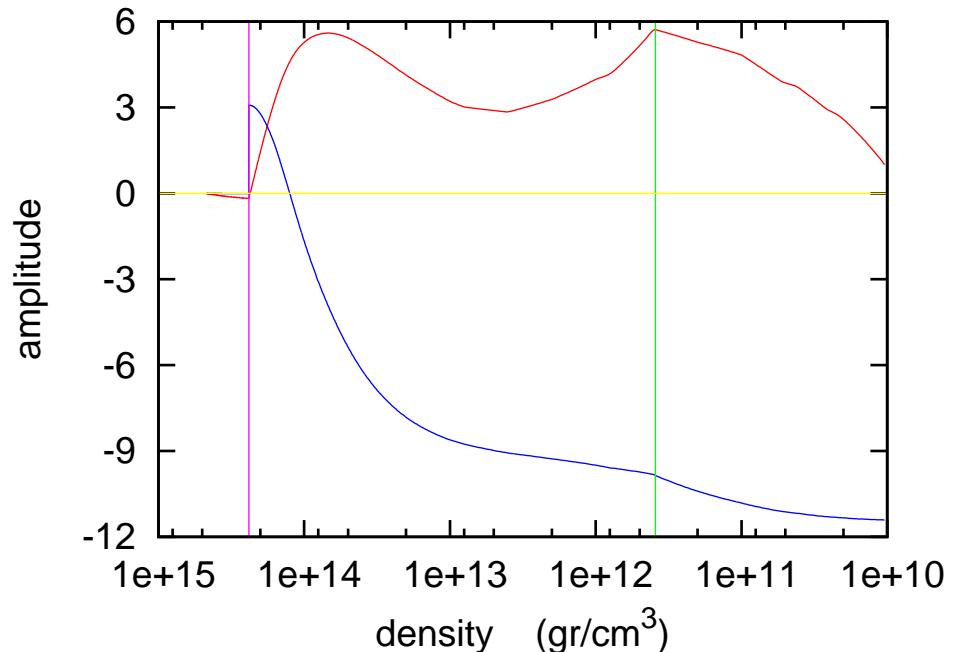
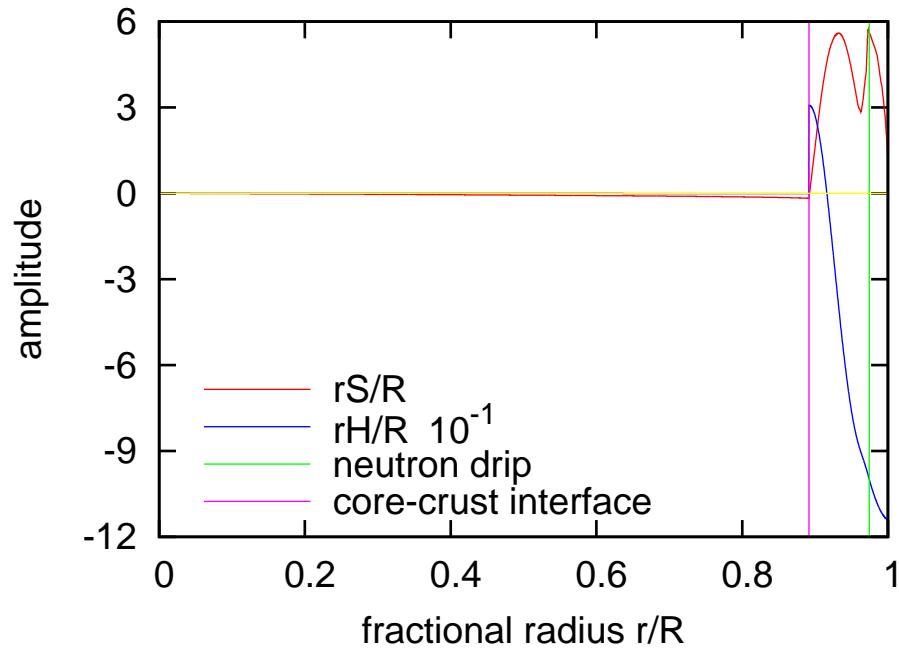
→ Σημείο neutron drip: $3.3 \times 10^{11} \text{ gr}/\text{cm}^3$

→ Συντελεστής γραμμικού Ιξώδους:

$$\mu \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right) = (0.021 + 0.376\rho_{14} + 3.130\rho_{14}^2 - 4.718\rho_{14}^3 + 2.468\rho_{14}^4) \times 10^{30}$$

s_1 -mode

(μοντέλο με ρεαλιστική καταστατική εξίσωση: $\mathbf{L} + \mathbf{NV}_{14}$)



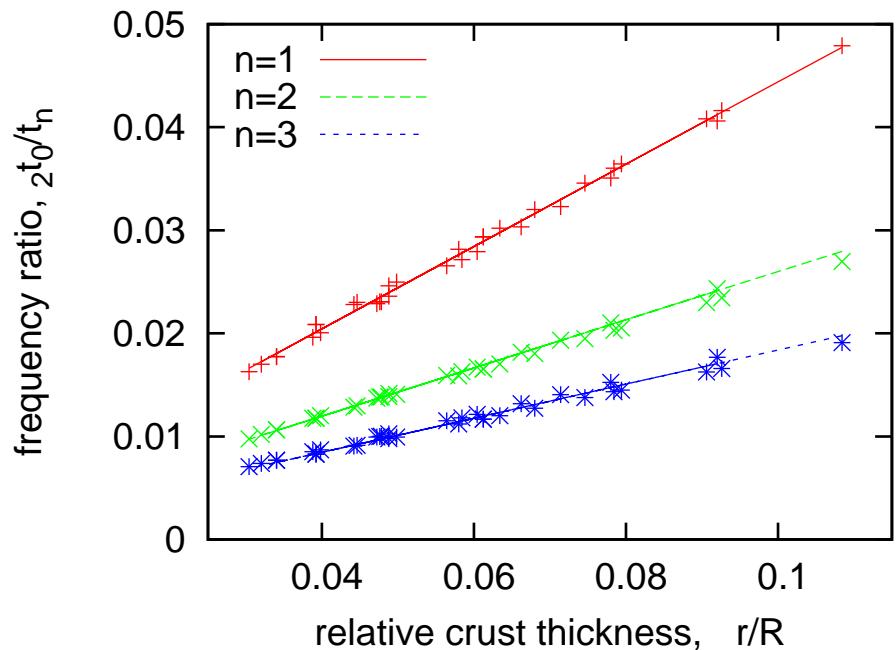
→ Εμφάνιση στερεού φλοιού: $2.40 \times 10^{14} \text{ gr}/\text{cm}^3$

→ Σημείο neutron drip: $3.9 \times 10^{11} \text{ gr}/\text{cm}^3$

→ Συντελεστής γραμμικού Ιξώδους:

$$\mu \left(\frac{\text{erg}}{\text{cm}^3} \right) = 1.267 \rho_{14}^{4/5} \times 10^{30}$$

Αστεροσεισμολογία



→ Τύπος των Hansen & Cioffi (1980):

$$\frac{\ell t_0}{t_n} \simeq \frac{1}{\pi n} \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{\Delta r}{R}$$

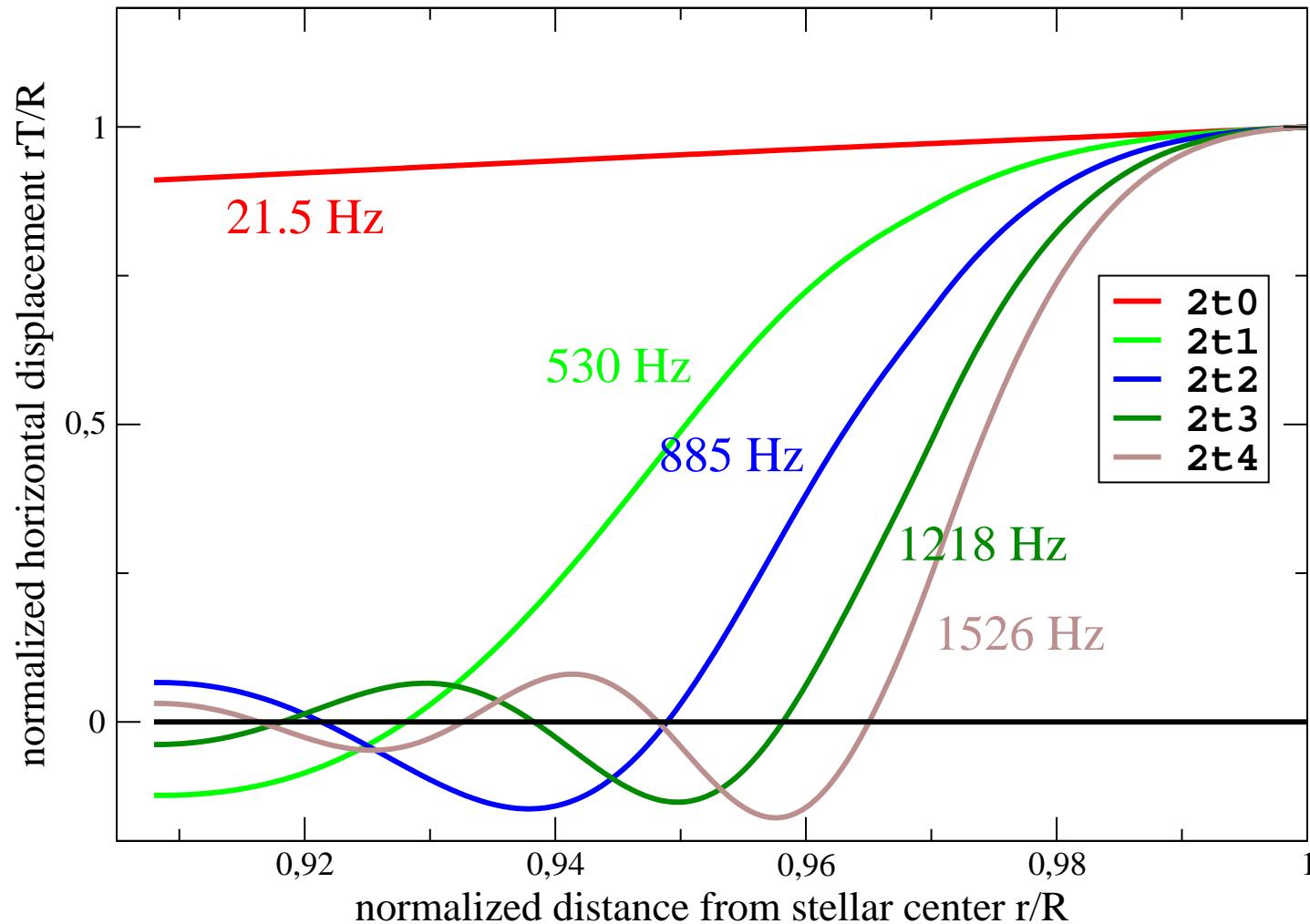
→ Βελτιωμένος τύπος (σωστό scaling των n, ℓ):

$$\frac{\ell t_0}{t_n} \simeq \frac{1}{2[\alpha(n-1)+1]} \sqrt{\ell(\ell+1)-2} \left(\beta \frac{\Delta r}{R} + \gamma \right)$$

II. ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

Eigenfunctions & Eigenfrequencies

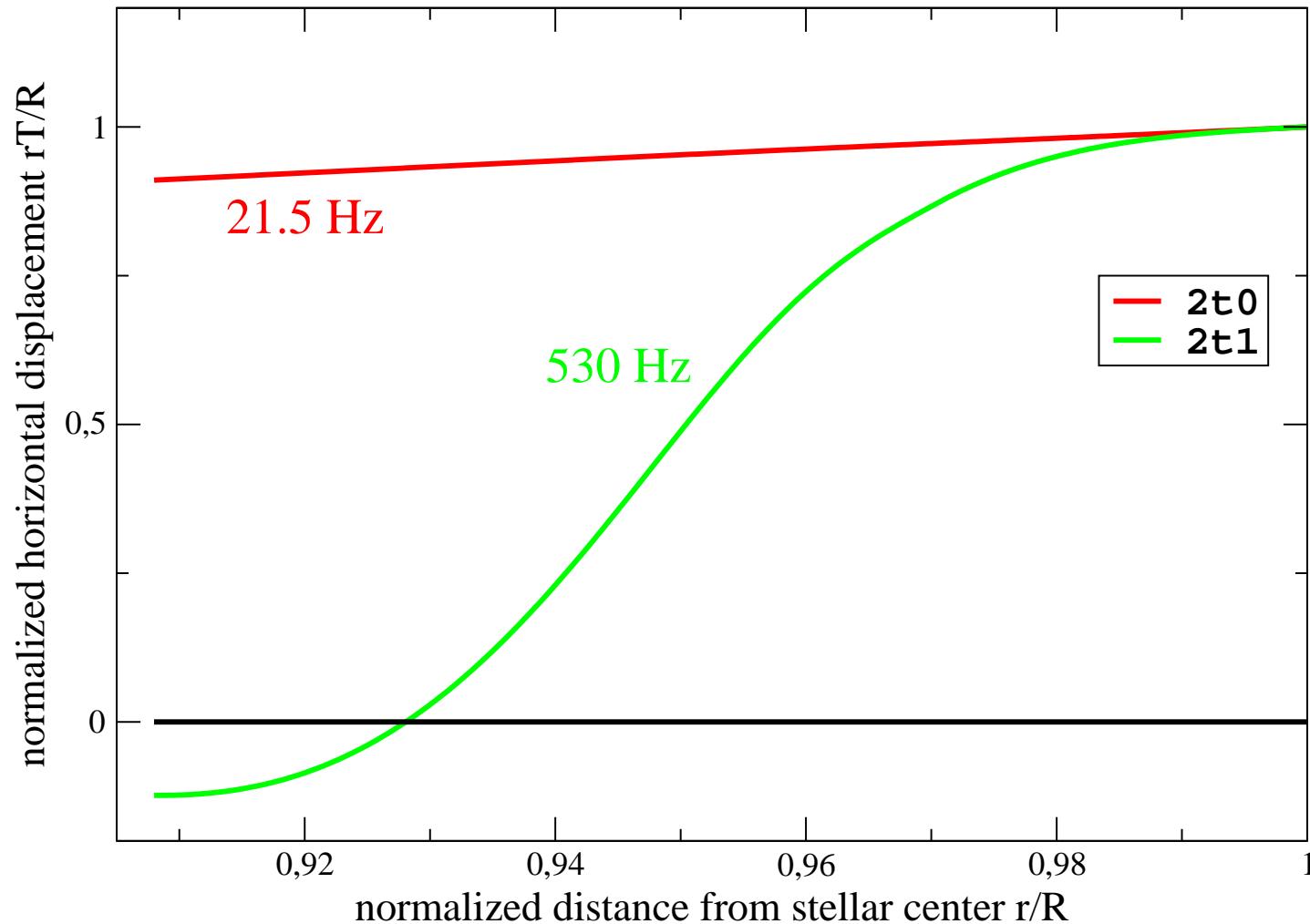
fundamental mode & first few overtones ($l=2$)



II. ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

Eigenfunctions & Eigenfrequencies

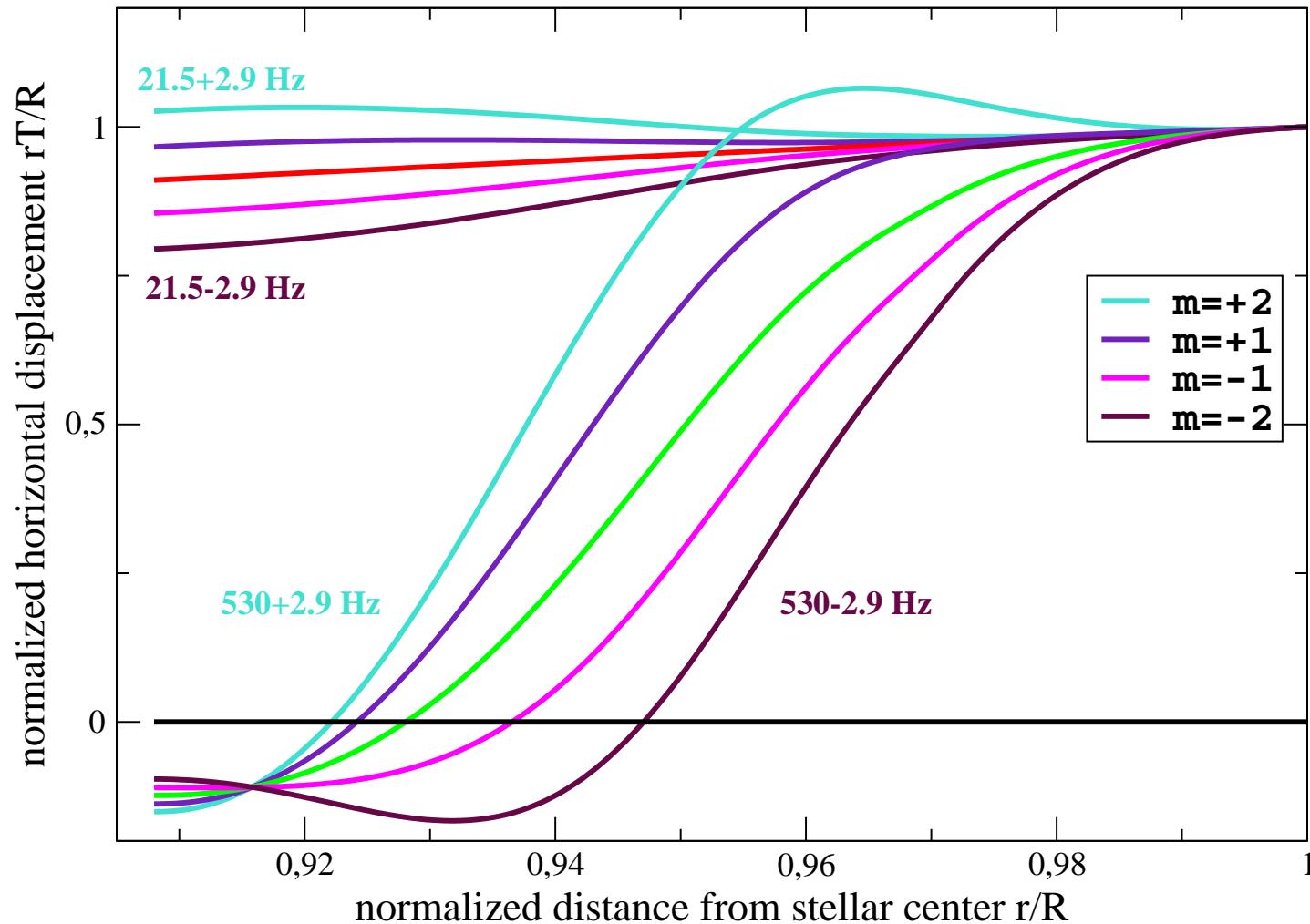
fundamental mode & first overtone ($l=2$)



II. ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

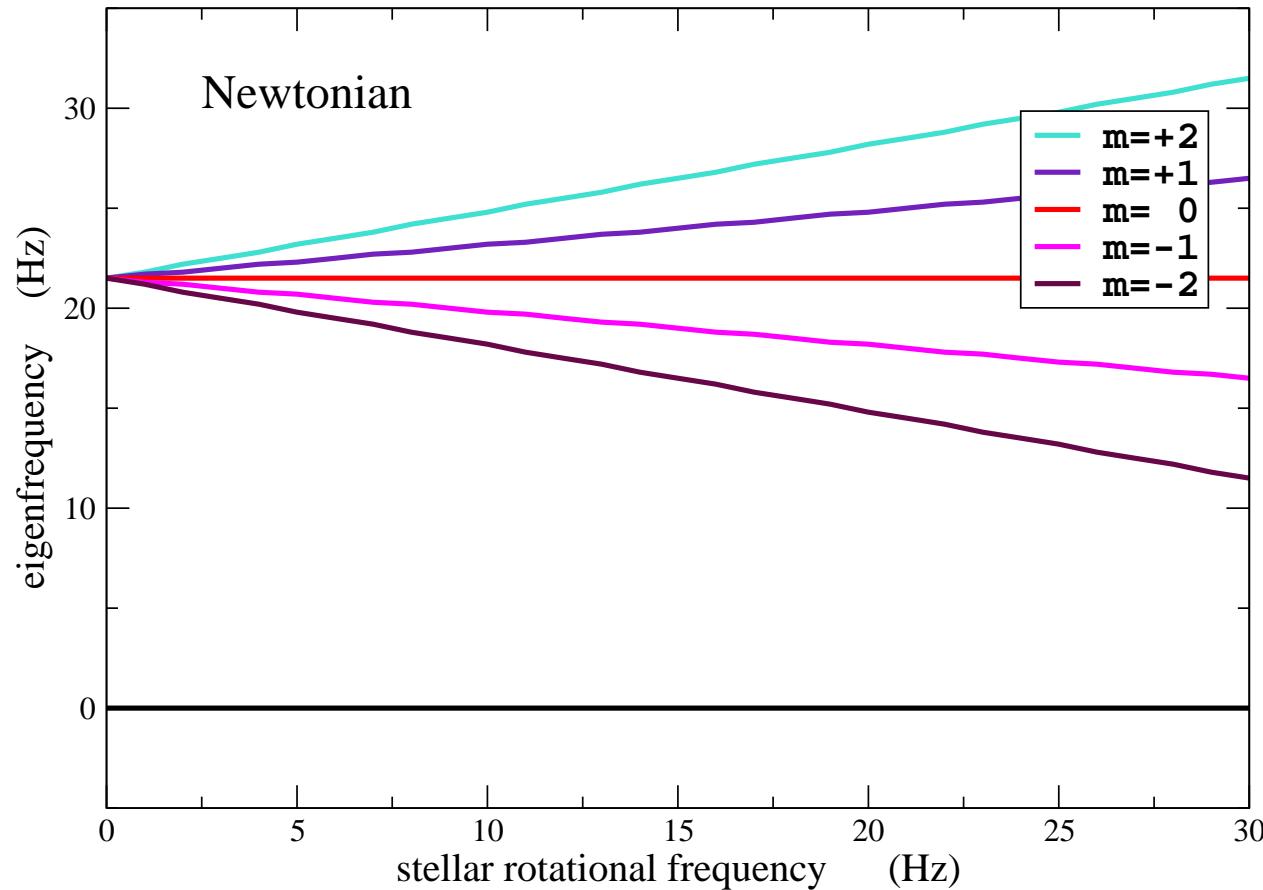
Eigenfunctions & Eigenfrequencies

fundamental mode & first overtone ($l=2$)



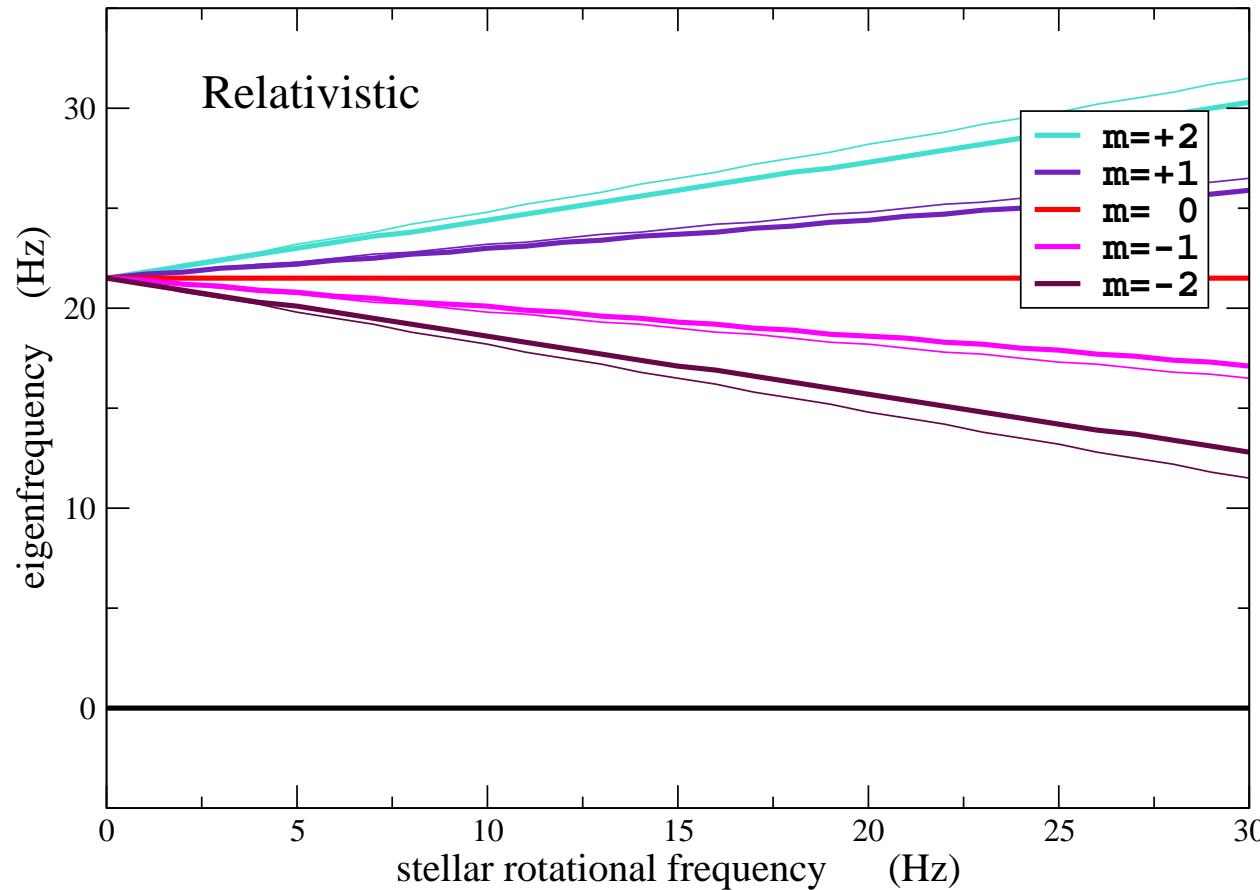
Splitting of Eigenfrequencies

corotating observers



$$\rightarrow \sigma = \sigma_0 + m\Omega C_{1,New} = \sigma_0 + m\Omega / [\ell(\ell+1)] \quad (\text{Strohmayer 1991})$$

Splitting of Eigenfrequencies corotating observers



$\rightarrow \sigma = \sigma_0 + m\Omega C_{1,New} = \sigma_0 + m\Omega / [\ell(\ell + 1)]$ (Strohmayer 1991)

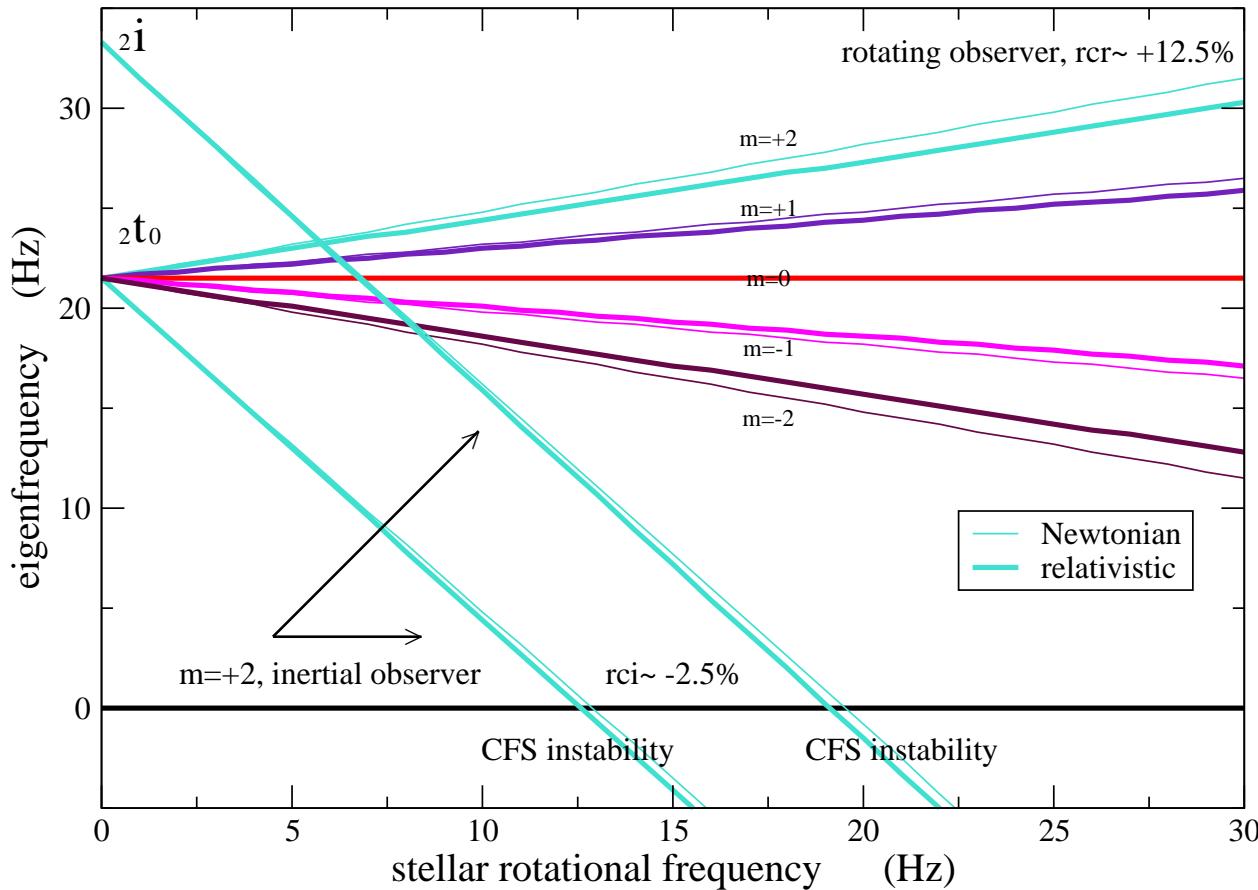
$\rightarrow \sigma = \sigma_0 + m\Omega C_{1,rel}$

Vavoulidis, Stavridis, Kokkotas & Beyer, MNRAS, 377, 1553 (2007)

Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis, MNRAS, 384, 1711 (2008)

Splitting of Eigenfrequencies

corotating and inertial observers



$$\rightarrow \sigma = \sigma_0 - m\Omega + m\Omega C_{1,New} = \sigma_0 + m\Omega / [\ell(\ell+1)] \quad (\text{Strohmayer 1991})$$

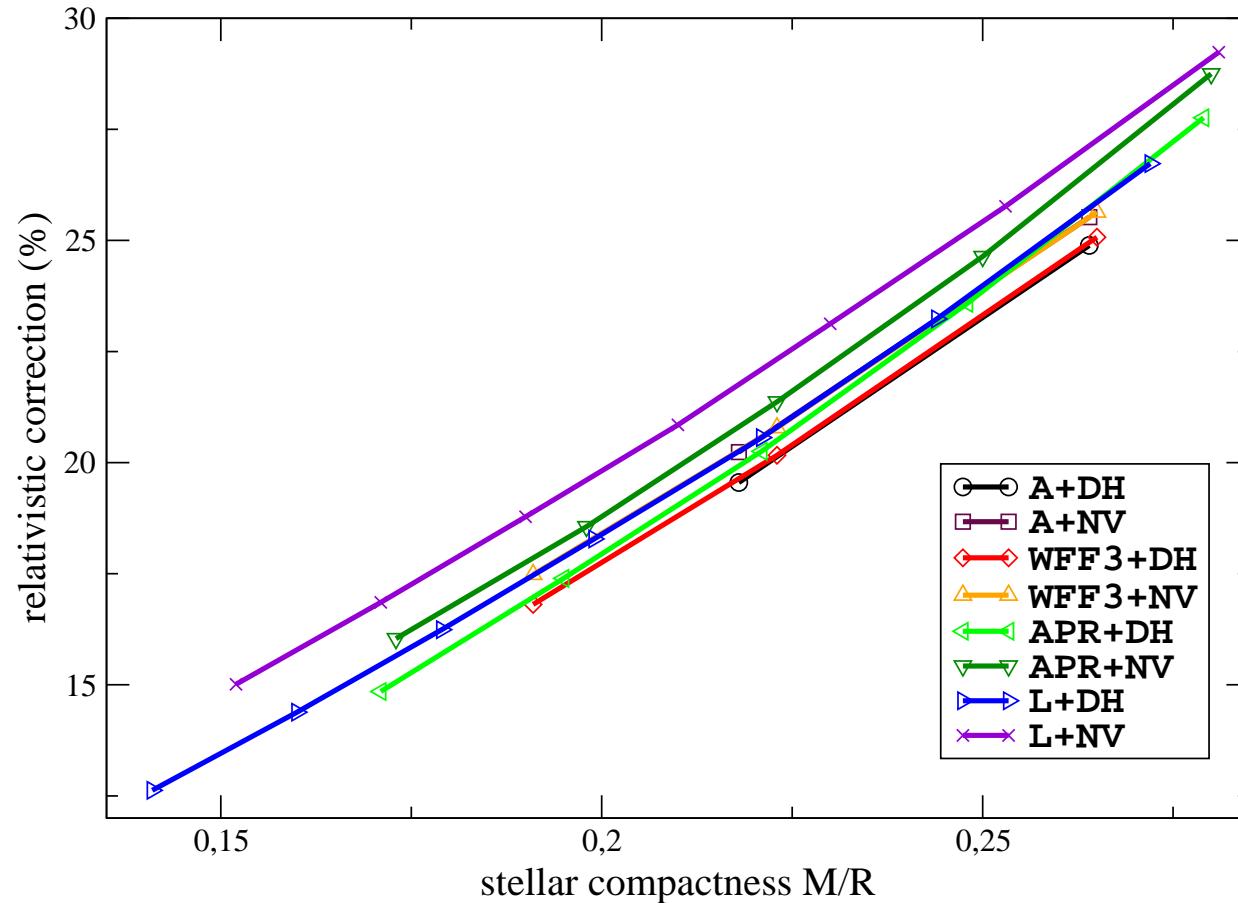
$$\rightarrow \sigma = \sigma_0 - m\Omega + m\Omega C_{1,rel}$$

Vavoulidis, Stavridis, Kokkotas & Beyer, MNRAS, 377, 1553 (2007)

Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis, MNRAS, 384, 1711 (2008)

Relativistic Correction vs Stellar Compactness

various EoS for core (A,WFF3,APR,L) and crust (DH,NV)



$$\rightarrow \Sigma \chi \varepsilon \tau i \kappa i \sigma \tau i \kappa \epsilon \varsigma : \quad rc := 1 - C_{1,rel} / C_{1,New} \simeq 0.9M/R$$

Vavoulidis, Stavridis, Kokkotas & Beyer, MNRAS, 377, 1553 (2007)
 Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis, MNRAS, 384, 1711 (2008)

Συμπεράσματα

1. Η σωστή ταυτοποίηση των διαφόρων παρατηρούμενων QPOs σε SGRs είναι σημαντική. Π.χ. στο SGR 1900+14:

$$\begin{array}{l|llll} \text{Παρατηρούμενες συχνότητες (Hz)} & 28 & 53 & 84 & 155 \\ \ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell + 1)} & 2t_0 & 4t_0 & 7t_0 & 13t_0 \\ \ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell + 1) - 2} & 2t_0 & 4t_0 & 6t_0 & 11t_0 \end{array}$$

2. Η παρατηρούμενη συχνότητα των 18 Hz στο SGR 1806-20 δεν μπορεί να είναι ο τοροειδής $2t_0$ torsional mode.

Θα μπορούσε, όμως, να είναι ο σφαιροειδής ${}_1i$ **interfacial mode** καθώς, για τα περισσότερα ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, η συχνότητα αυτού του mode είναι από 10 ως 25 Hz περίπου.

Συμπεράσματα

3. Οι σχετικιστικές περιστροφικές διορθώσεις αποκλίνουν ως και 30% από τις Νευτώνειες περιστροφικές διορθώσεις.

Η απόκλιση αυτή εξαρτάται από τη συμπαγότητα των θεωρούμενων μοντέλων και, σε μια πρώτη προσέγγιση, δίνεται από τη σχέση ($rc \simeq 0.9M/R$).

Π.χ. για $M/R = 0.2$ παίρνουμε $rc \simeq 18\%$.

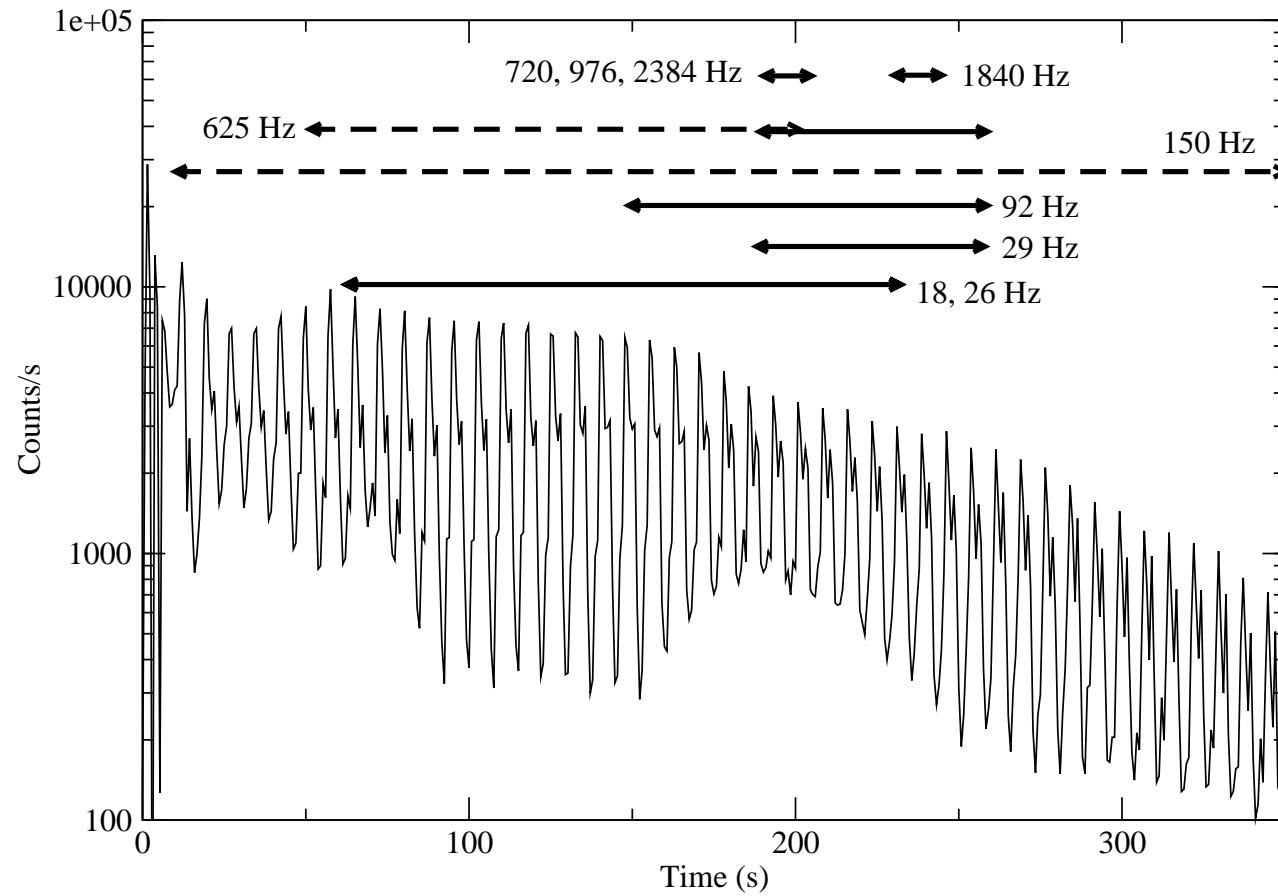
4. Οι **torsional modes** και οι **interfacial modes** ικανοποιούν το χριτήριο αστάθειας CFS ακόμη και σε μικρές περιστροφικές συχνότητες, $\Omega_c \sim 10 - 20$ Hz.

Η Σχετικότητα υποβοηθά την εφαρμογή αυτής της αστάθειας, $\Omega_{c,rel} < \Omega_{c,New}$.

Ωστόσο, δεν έχει ακόμη υπολογιστεί αν αυτή η αστάθεια μπορεί πραγματικά να αναπτυχθεί.

ΜΑΓΝΗΤΙΣΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ ΜΕ ΣΤΕΡΕΟ ΦΛΟΙΟ

- Τοροειδείς ταλαντώσεις: ποιοτική ανάλυση
 - I. Ένα απλό μοντέλο
 - II. Δύο σημεία που χρίζουν προσοχής
- Ρεαλιστικά μοντέλα: ποσοτική ανάλυση
 - III. Δομή των μοντέλων
 - IV. Εξισώσεις διαταραχών
 - V. Αποτελέσματα
- Συμπεράσματα



→ Ήμι - περιοδικές ταλαντώσεις (Quasi - Periodic Oscillations, QPOs)

σε Soft Gamma - ray Repeaters (SGRs)

I. ΕΝΑ ΑΠΛΟ ΜΟΝΤΕΛΟ¹

- Ομογενές μαγνητικό πεδίο: $\vec{B} = B\hat{z}$
- Εγκάρσιες, τοροειδείς ταλαντώσεις: $\vec{\xi} = \xi_x \hat{x} + \xi_y \hat{y}$ ($\mu \varepsilon \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$)
- Σταθερή πυκνότητα ρ και σταθερός συντελεστής γραμμικού ιξώδους μ

Εξισώσεις Euler ($\xi_i \propto e^{i\sigma t}$):

$$-\sigma^2 \xi_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\rho} \left[(\nabla \times \delta \vec{B}) \times \vec{B} \right]_i \quad (i = x, y)$$

όπου:

$$\delta \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right), \quad \delta \vec{B} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B})$$

Αποτέλεσμα:

$$-\sigma^2 \xi_i = \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial y^2} \right) + \frac{B^2}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2} \quad (i = x, y)$$

¹Bλ. π.χ. Carroll et al. (1986), Piro (2005), Glampedakis, Samuelsson & Andersson (2006)

Σ χέση διασποράς $\left(\xi_i \propto e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \right)$:

$$\sigma^2 = v_s^2 (k_z^2 + k_{\perp}^2) + v_A^2 k_z^2$$

όπου:

$$v_s^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad v_A^2 = \frac{B^2}{4\pi\rho}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = - (k_x^2 + k_y^2) = -k_{\perp}^2, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -k_z^2$$

Οριακές περιπτώσεις ($k_{\perp} \simeq \sqrt{\ell(\ell+1)}/R$, $k_z \simeq n\pi/\Delta r$):

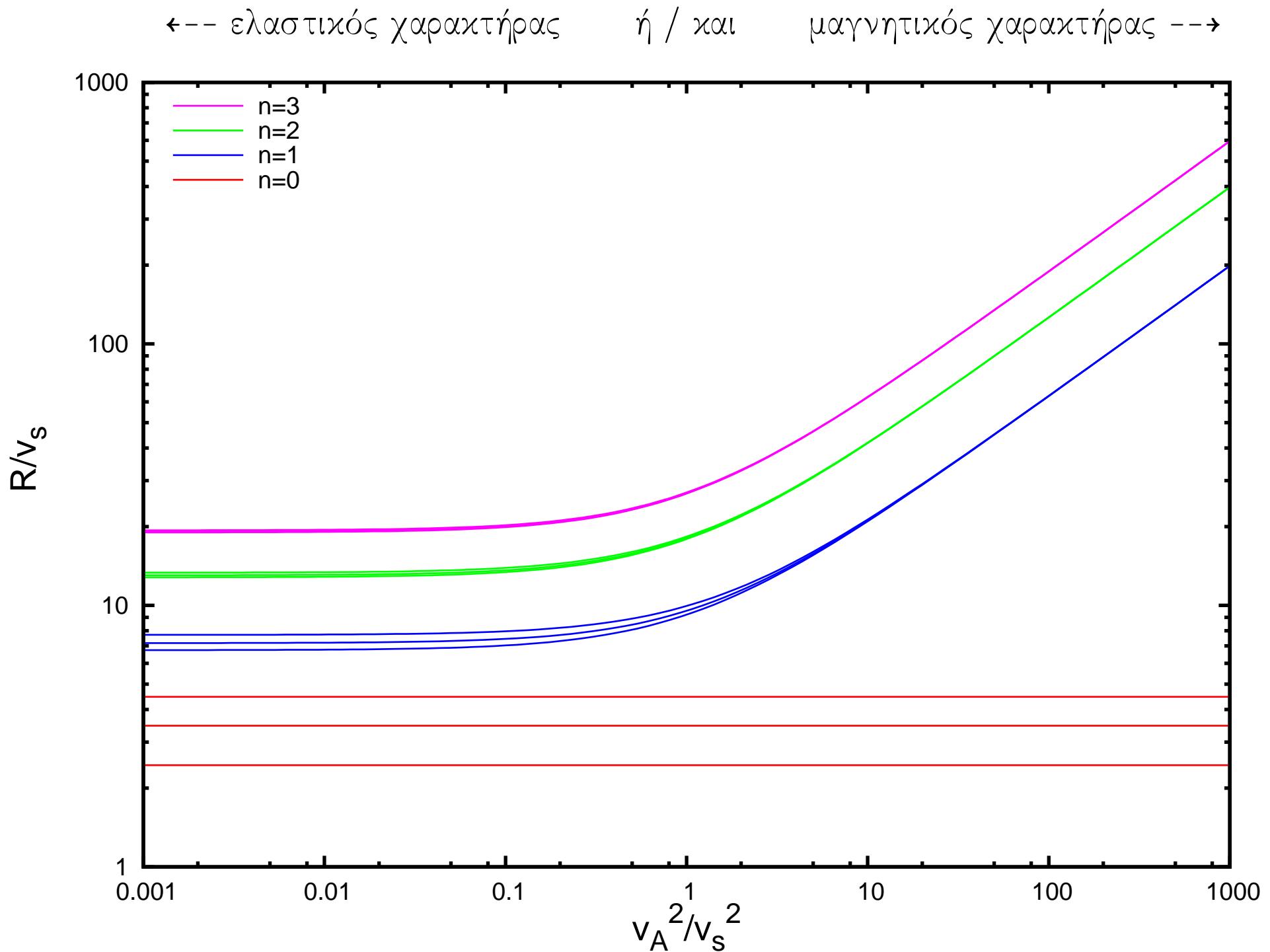
\Rightarrow $n = 0$ modes ($k_z \ll k_{\perp}$): ανεξαρτησία από το B , εξάρτηση από το ℓ

$$\sigma \simeq v_s k_{\perp} \simeq v_s \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{R}$$

\Rightarrow $n > 0$ modes ($k_z \gg k_{\perp}$): ανεξαρτησία από το ℓ , εξάρτηση από το $B \sim v_A$

$$\sigma \simeq \sqrt{v_s^2 + v_A^2} k_z \simeq \sqrt{v_s^2 + v_A^2} \frac{n\pi}{\Delta r} \left\{ \begin{array}{l} \simeq v_s n\pi/\Delta r, \text{ óταν } v_s^2 \gg v_A^2 \\ \simeq v_A n\pi/\Delta r, \text{ óταν } v_s^2 \ll v_A^2 \end{array} \right.$$

Βλ. και Σχήμα που ακολουθεί



II. ΔΤΟ ΣΗΜΕΙΑ ΠΟΥ ΧΡΙΖΟΥΝ ΠΡΟΣΟΧΗΣ

→ Σύζευξη του ρευστού πυρήνα με τον στερεό φλοιό:

Η πρόσφυση (traction) πρέπει να είναι συνεχής:

$$\begin{aligned} \text{Ορισμός της πρόσφυσης: } \quad T_i &= \rho (v_s^2 + v_A^2) \frac{\partial \xi_i}{\partial z} \quad (i = x, y) \\ \text{Συνθήκη συνέχειας: } \quad T_i(R_c^-) &= T_i(R_c^+) \end{aligned}$$

→ Πιο ρεαλιστικά μαγνητικά πεδία:

Π.χ. για ένα κεκλιμένο (σε γωνία θ) ομογενές μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{B} = B \sin \theta \hat{x} + B \cos \theta \hat{z}$$

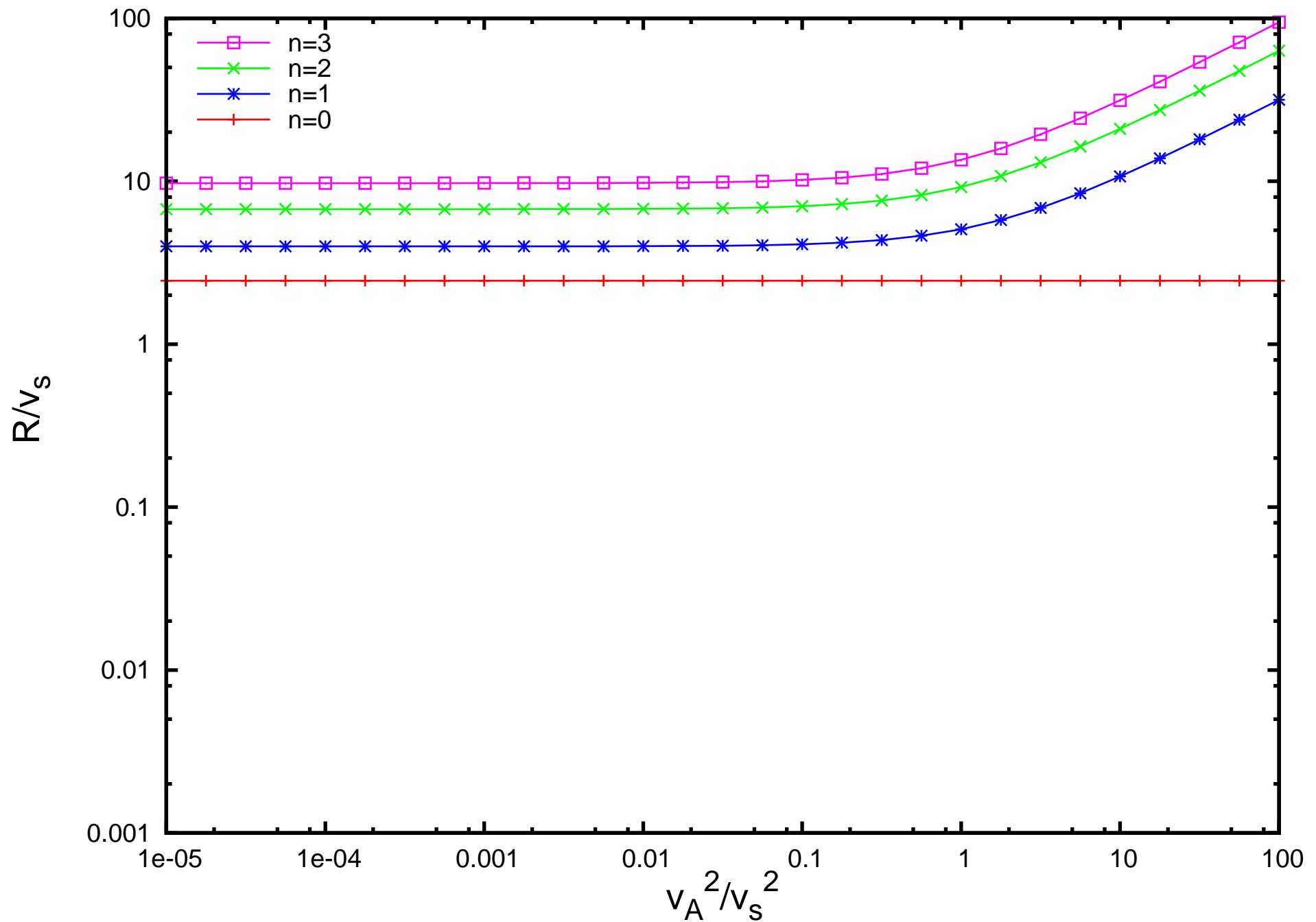
η σχέση διασποράς γίνεται:

$$\sigma^2 = v_s^2 (k_z^2 + k_{\perp}^2) + v_A^2 (\cos^2 \theta k_z^2 + \sin^2 \theta k_{\perp}^2)$$

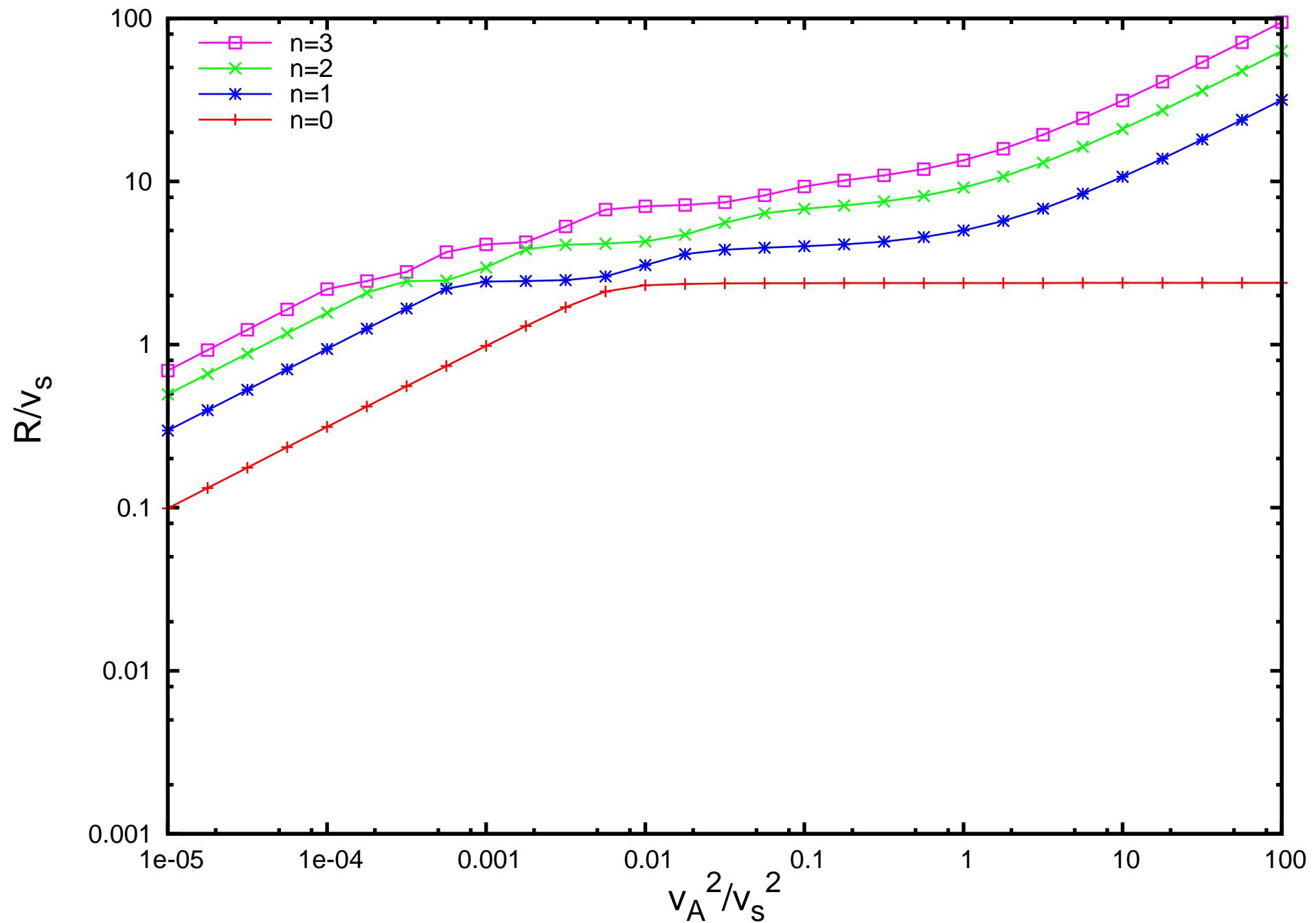
ενώ για $\vec{B} = B \hat{z}$ ($\theta = 0$) ήταν:

$$\sigma^2 = v_s^2 (k_z^2 + k_{\perp}^2) + v_A^2 k_z^2$$

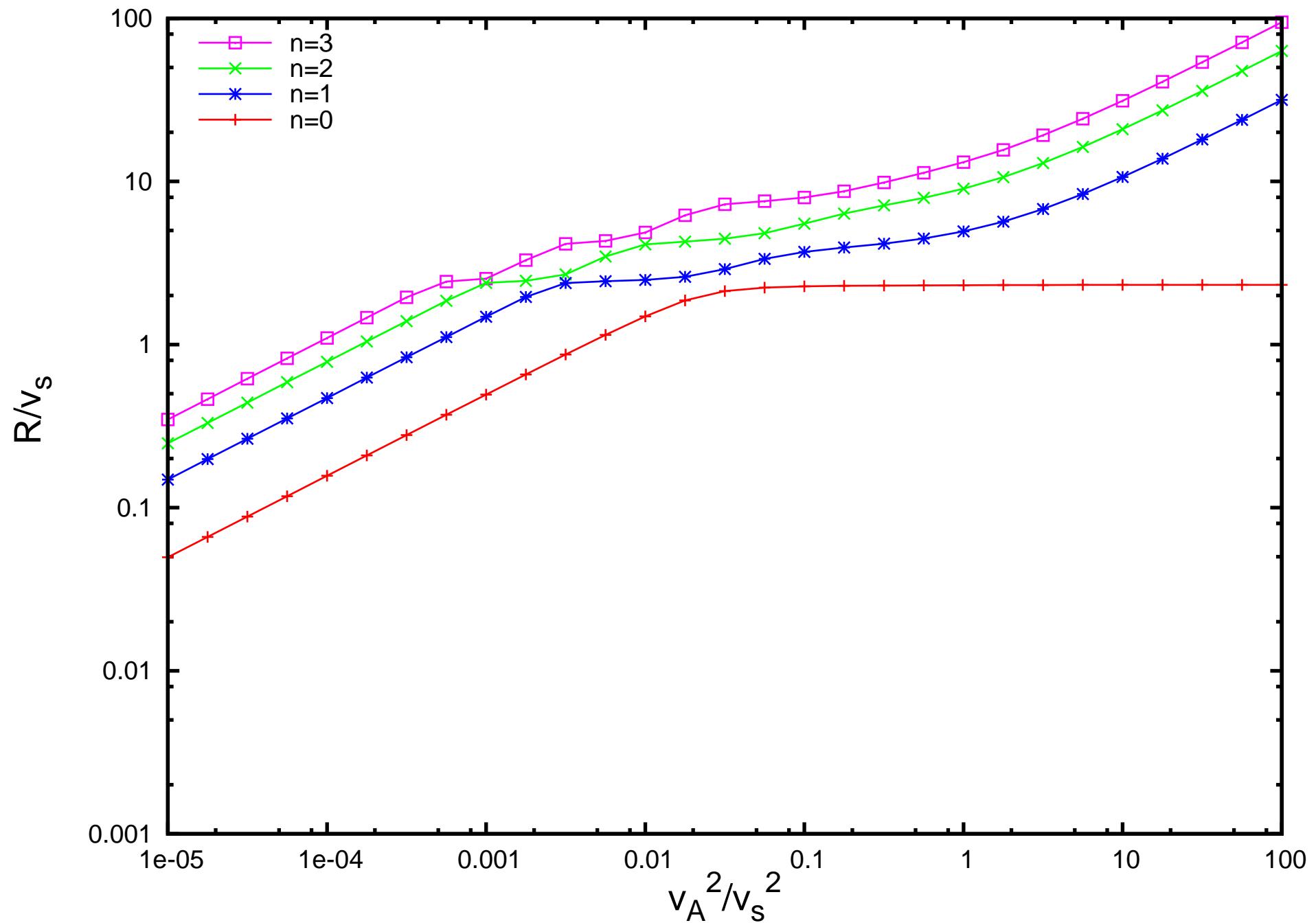
Σύζευξη του ρευστού πυρήνα με τον στερεό φλοιό (αρχίζουμε με $\Delta r/R = 1.00$)



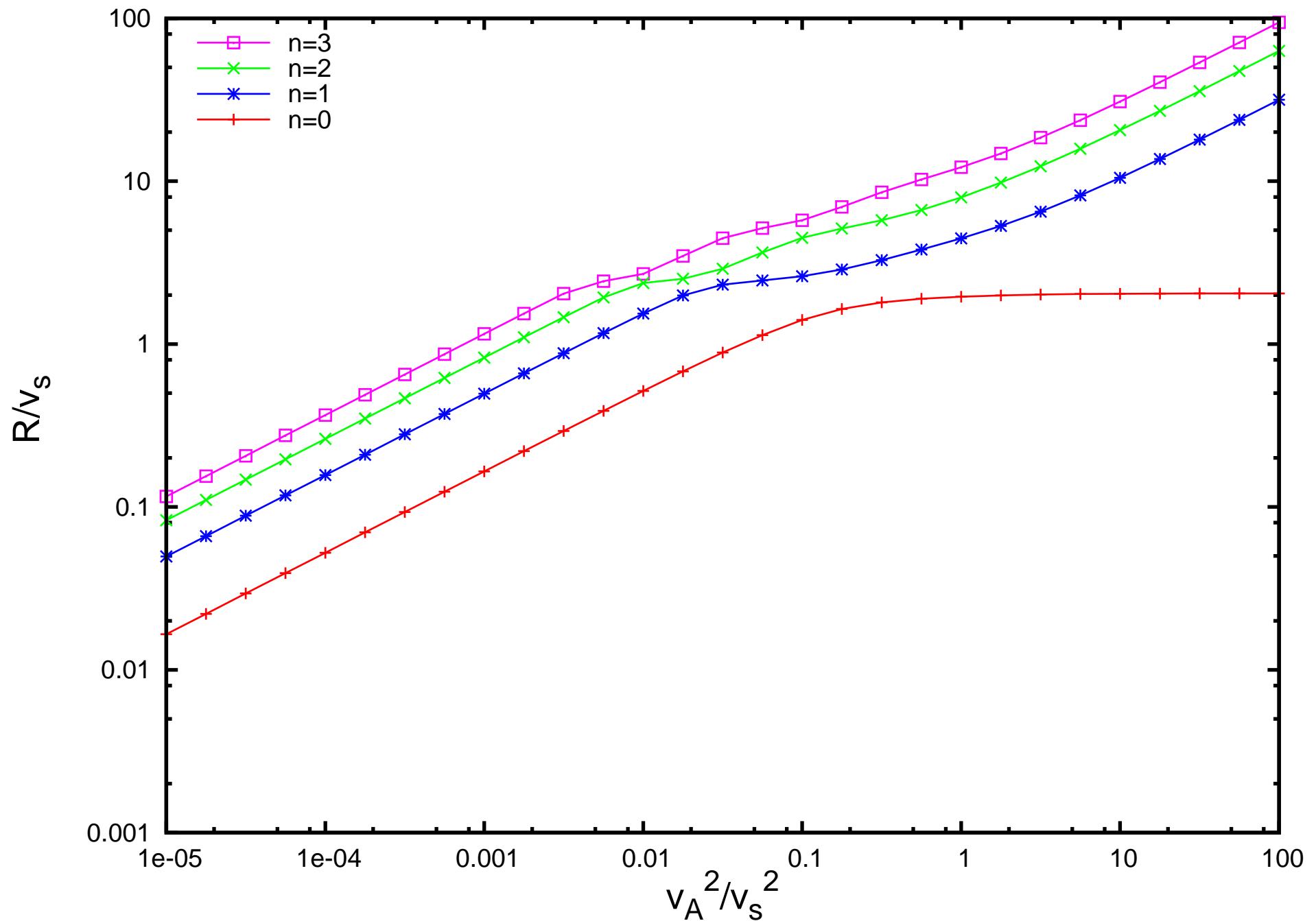
$\Delta r/R = 0.95$: Εμφάνιση μαγνητοελαστικών modes στον ρευστό πυρήνα



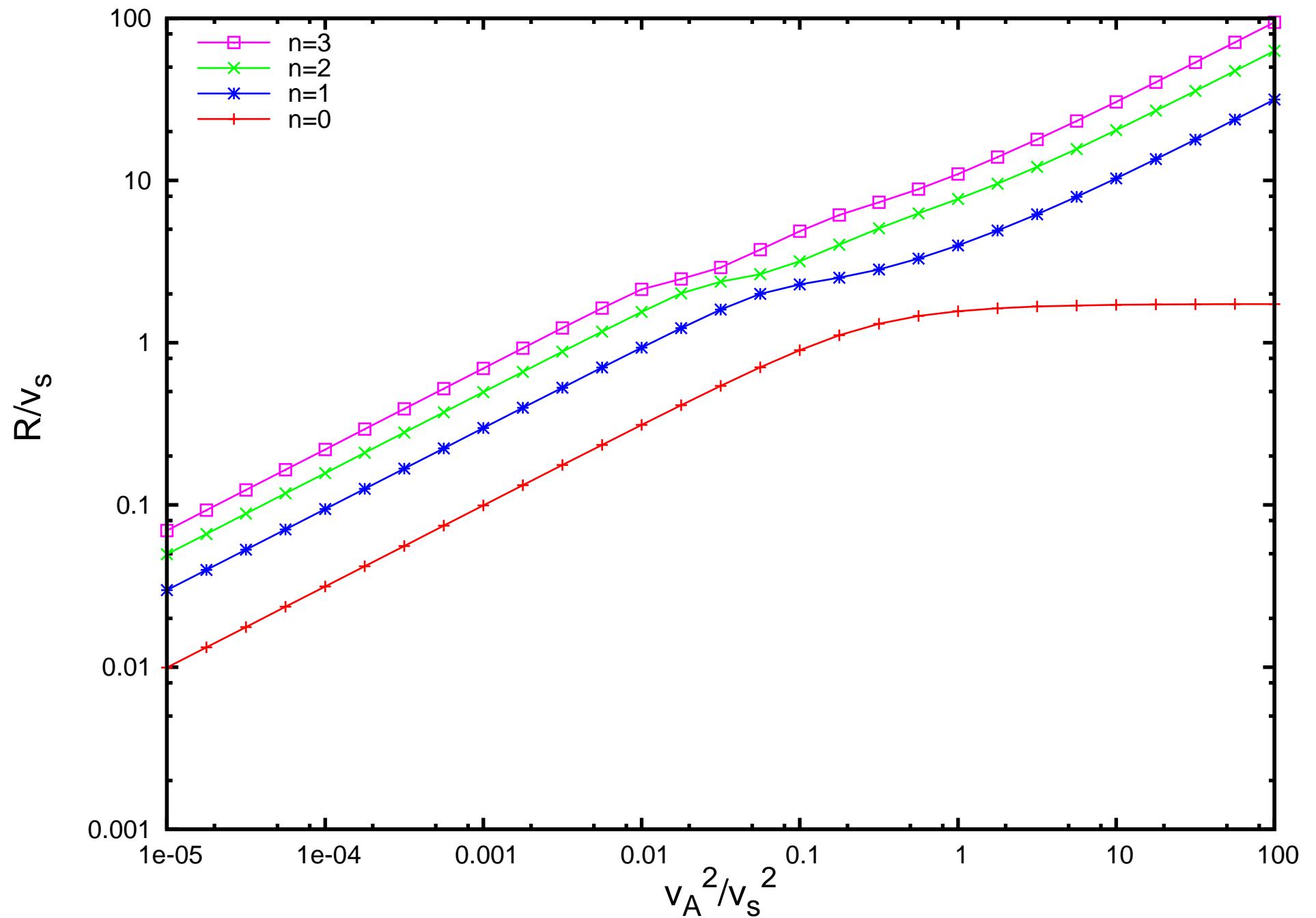
$\Delta r/R = 0.90$: Μείωση των ιδιοσυχνοτήτων, $\sigma \sim 1/R_c$



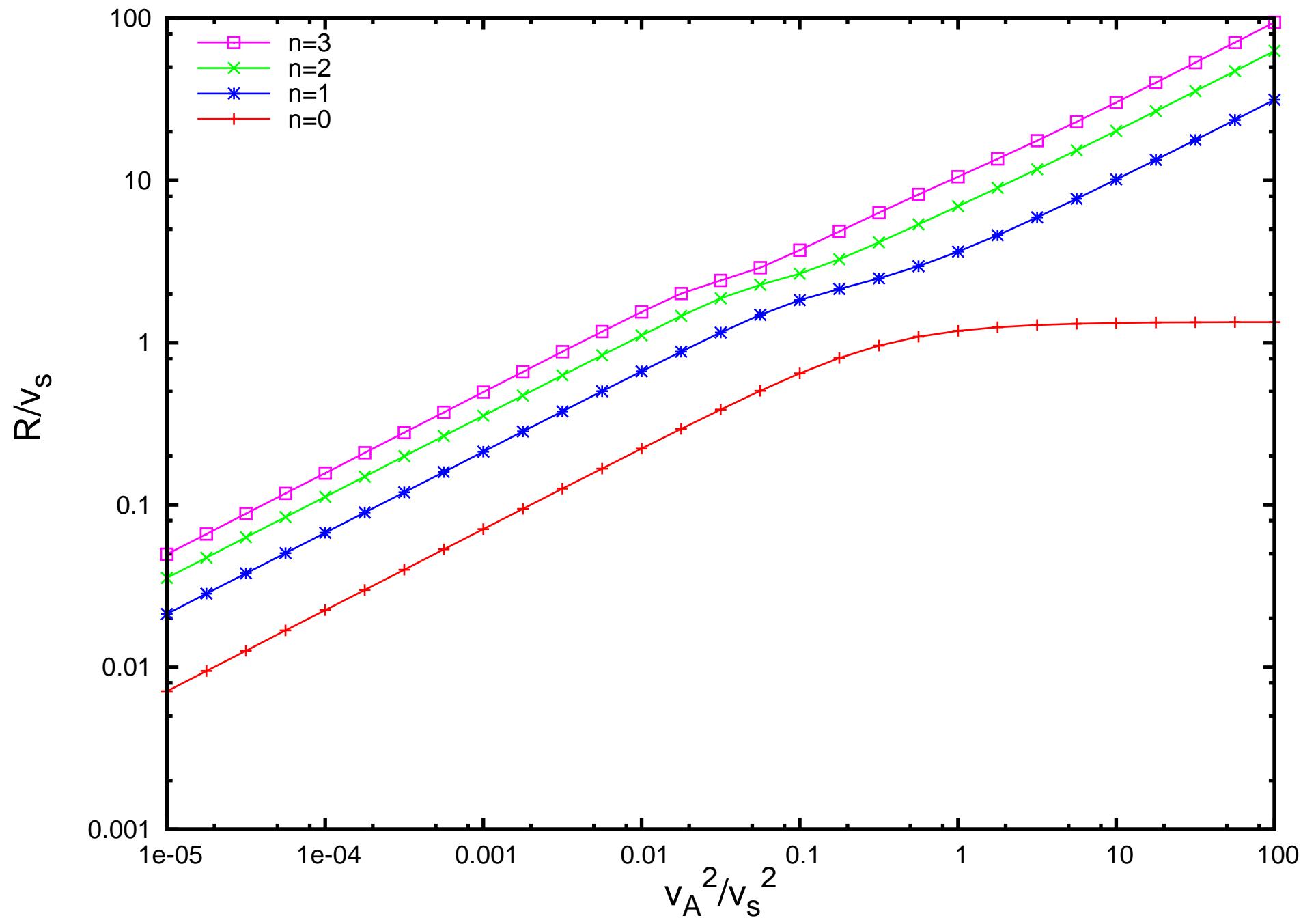
$\Delta r/R = 0.70$: Βλ. και τις ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes



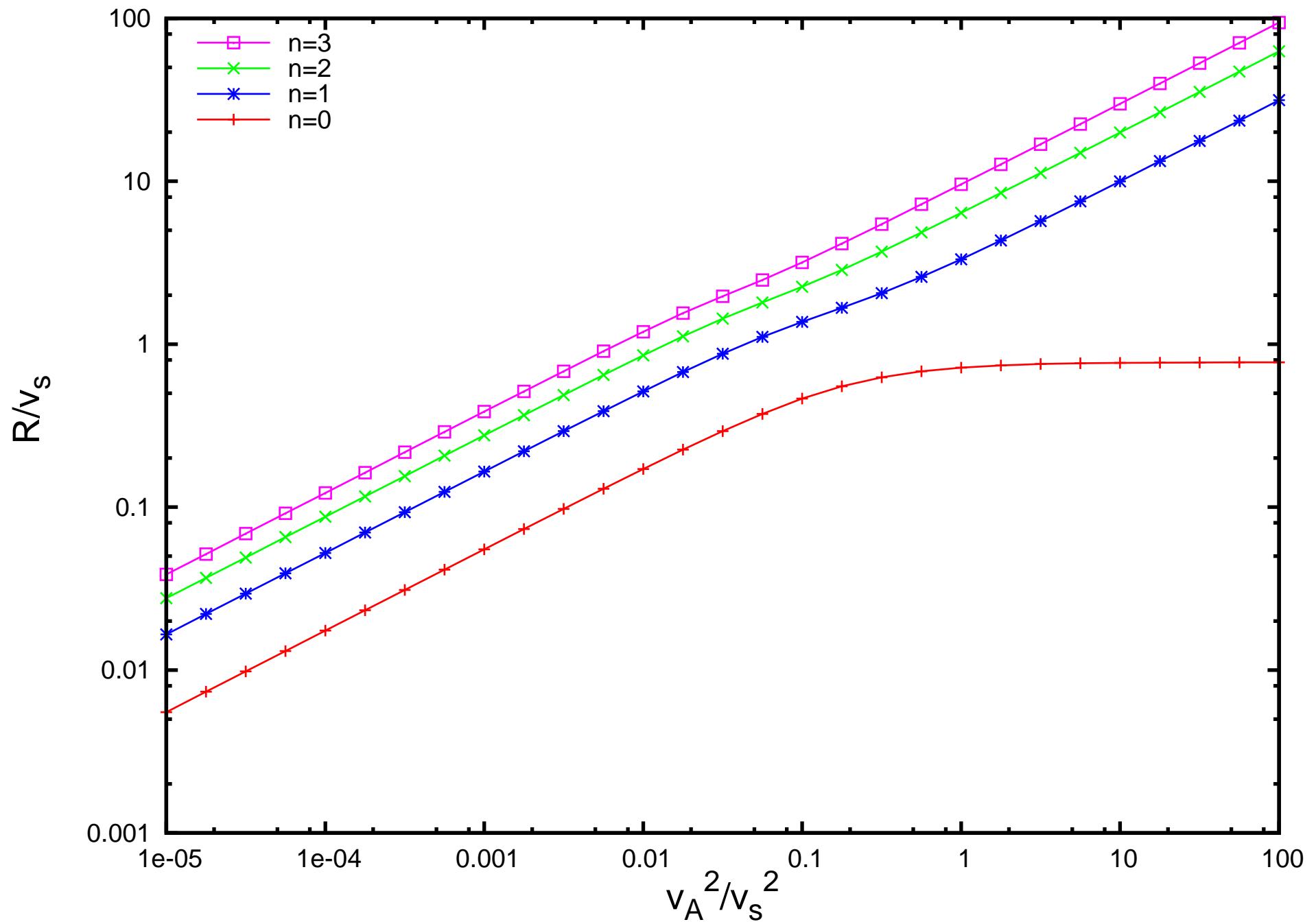
$$\Delta r/R = 0.50$$



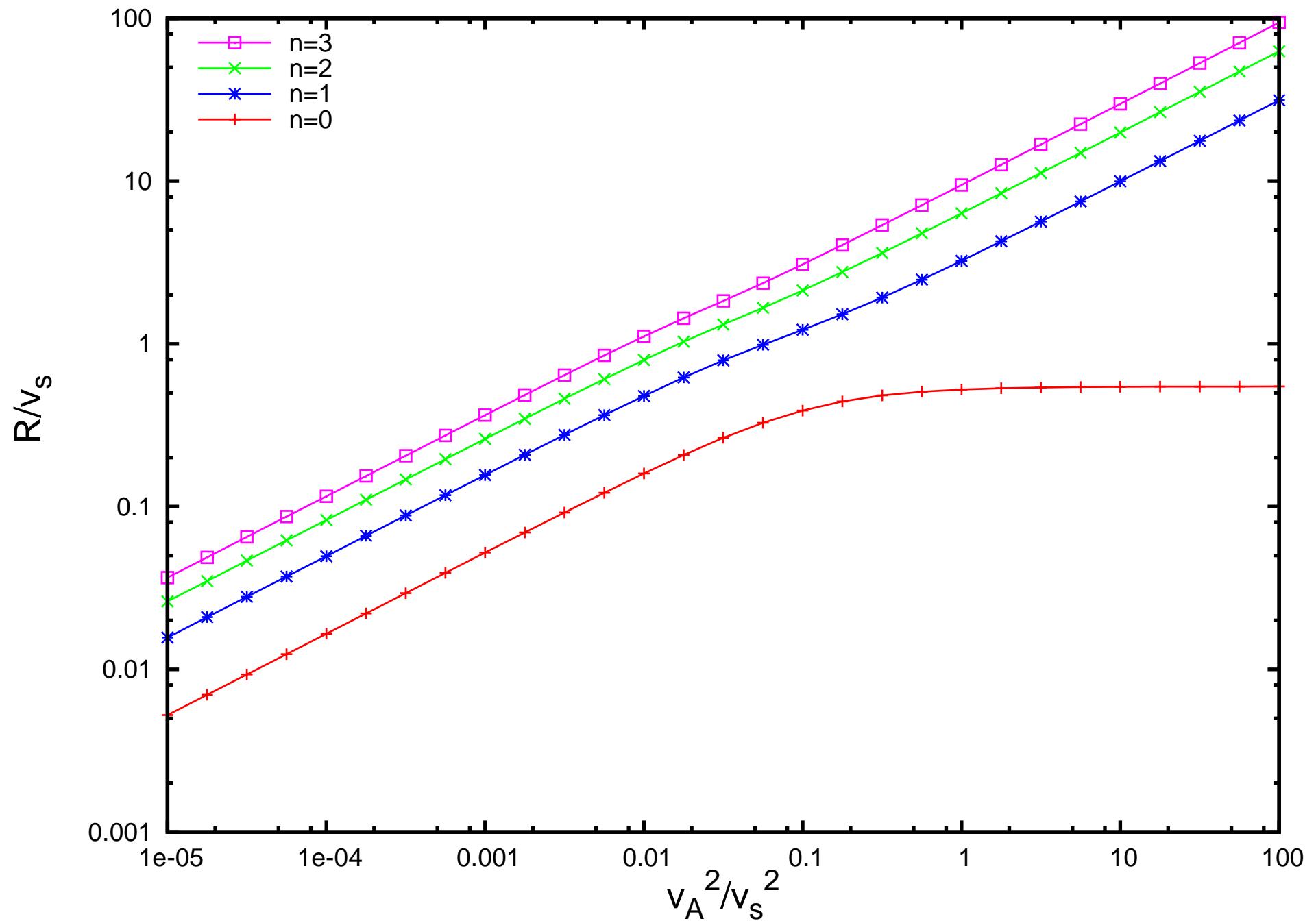
$$\Delta r/R = 0.30$$



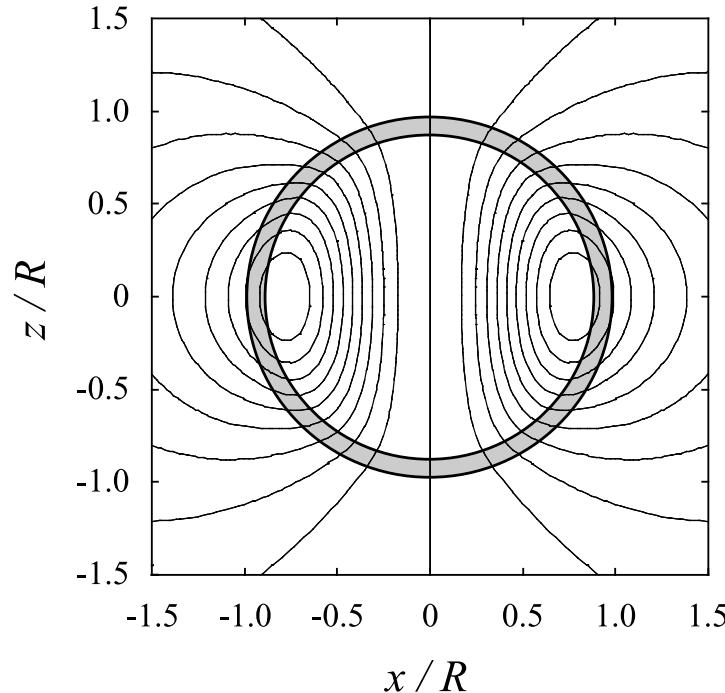
$\Delta r/R = 0.10$: Πολύ κοντά σε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων



$\Delta r/R = 0.05$: Πολύ κοντά σε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων



III. ΔΟΜΗ ΤΩΝ ΜΟΝΤΕΛΩΝ



→ Εξισώσεις Maxwell ($\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha$, $F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$)

για τη μετρική:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$$

→ Εξισώσεις TOV και εξισωση μαγνητικού πεδίου:

$$e^{-2\lambda} \frac{d^2 \alpha_1}{dr^2} + e^{-2\lambda} (\nu' - \lambda') \frac{d\alpha_1}{dr} - \frac{2}{r^2} \alpha_1 = -4\pi j_1$$

IV. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ

→ Γραμμικοί οριζόντες των εξισώσεων διατήρησης ενέργειας - οριμής: $\delta(\nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0)$

και των εξισώσεων Maxwell: $\delta(\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha)$

→ Ταυτής ενέργειας - οριμής με τους **μαγνητικούς όρους**:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta} + H^2 u_\alpha u_\beta + \frac{1}{2} H^2 g_{\alpha\beta} - H_\alpha H_\beta$$

→ Τοροειδείς, αξονικά συμμετρικές (**m=0**) ταλαντώσεις: μόνο $\xi^\phi, \delta H^\phi \neq 0$

$$\delta H^\phi = H^r \frac{\partial}{\partial r} \xi^\phi + H^\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \xi^\phi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\phi &= \frac{e^{2\nu}}{\rho + p + e^{2\lambda} (H^r)^2 + (r H^\theta)^2} \times \left\{ \right. \\ &+ e^{-2\lambda} \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + e^{-2\lambda} \left[\left(\frac{4}{r} + \nu' - \lambda' \right) \mu + \mu' \right] \frac{\partial}{\partial r} + 3 \frac{\mu}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ (H^r)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (H^\theta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2H^r H^\theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \\ &+ \left[\left(2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} H^\theta + \left(\nu' + \frac{2}{r} \right) H^r \right) H^r + H^r H_{,r}^r + H^\theta H_{,\theta}^r \right] \frac{\partial}{\partial r} \\ &\left. + \left[\left(2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} H^\theta + \left(\nu' + \frac{2}{r} \right) H^r \right) H^\theta + H^r H_{,r}^\theta + H^\theta H_{,\theta}^\theta \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \xi^\phi \end{aligned}$$

→ Πρόβλημα ιδιοτιμών: ιδιοσυχνότητες σ , ιδιοσυναρτήσεις \mathcal{Y}

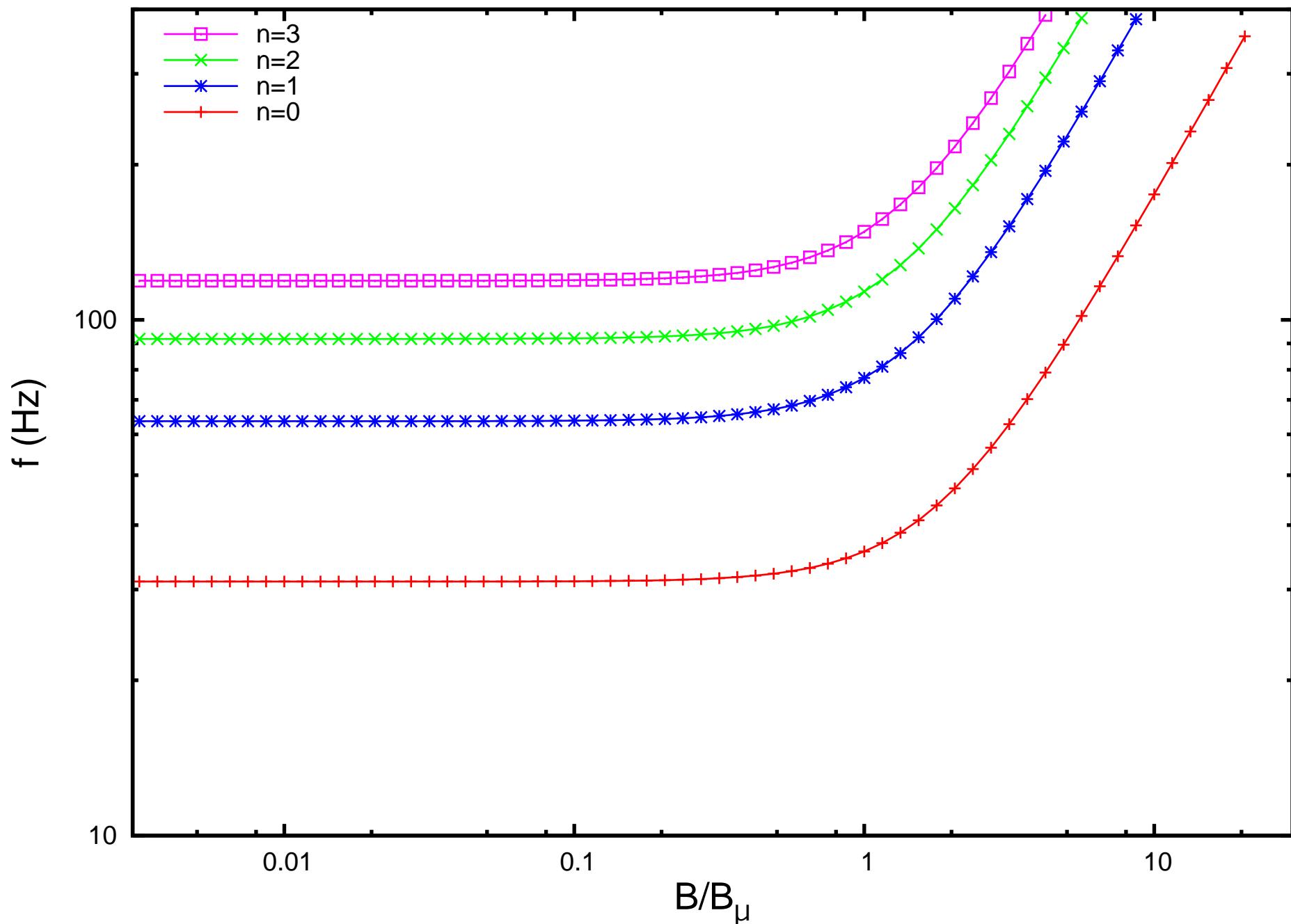
$$\xi^\phi(t, r, \theta) = \mathcal{Y}(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_\ell(\theta)}{d\theta} e^{i\sigma t}$$

→ Μη λαμβάνοντας υπόψη τις συζεύξεις $\ell \pm 2$:

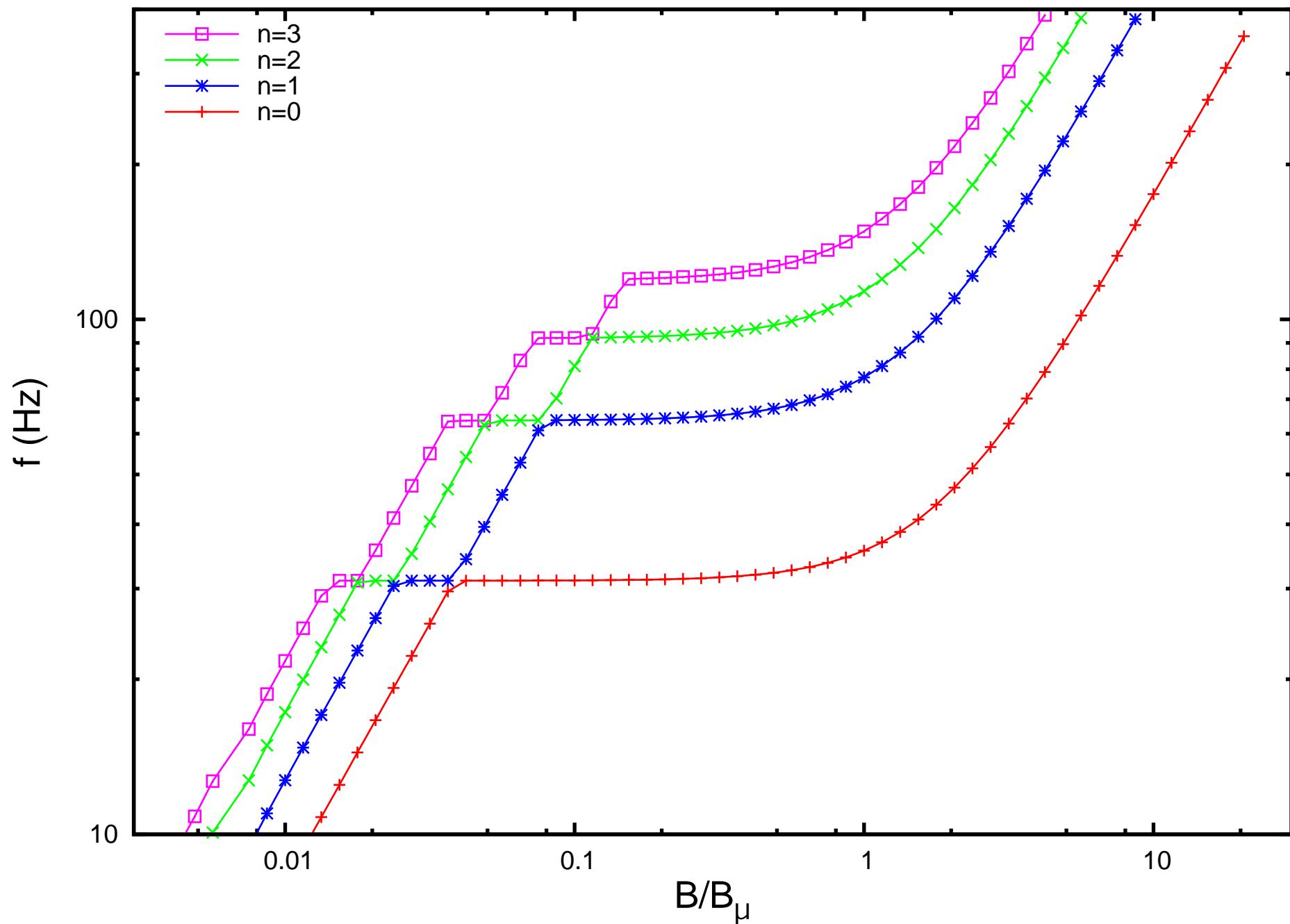
$$\begin{aligned} & \left[\mu + (1 + 2\Lambda_1) \frac{{a_1}^2}{\pi r^4} \right] \frac{d^2 \mathcal{Y}}{dr^2} \\ & + \left\{ \left(\frac{4}{r} + \nu' - \lambda' \right) \mu + \mu' + (1 + 2\Lambda_1) \frac{a_1}{\pi r^4} [(\nu' - \lambda') a_1 + 2{a_1}'] \right\} \frac{d\mathcal{Y}}{dr} \\ & + \left\{ \left[\left(\rho + p + (1 + 2\Lambda_1) \frac{{a_1}^2}{\pi r^4} \right) e^{2\lambda} - \frac{\Lambda_1 {a_1}'^2}{2\pi r^2} \right] \sigma^2 e^{-2\nu} \right. \\ & \left. - (\Lambda - 2) \left(\frac{\mu e^{2\lambda}}{r^2} - \frac{\Lambda_1 {a_1}'^2}{2\pi r^4} \right) + (2 + 5\Lambda_1) \frac{a_1}{2\pi r^4} [(\nu' - \lambda') a_1' + a_1''] \right\} \mathcal{Y} = 0 \end{aligned}$$

→ Συνοριακές συνθήκες: όπως προηγουμένως

V. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

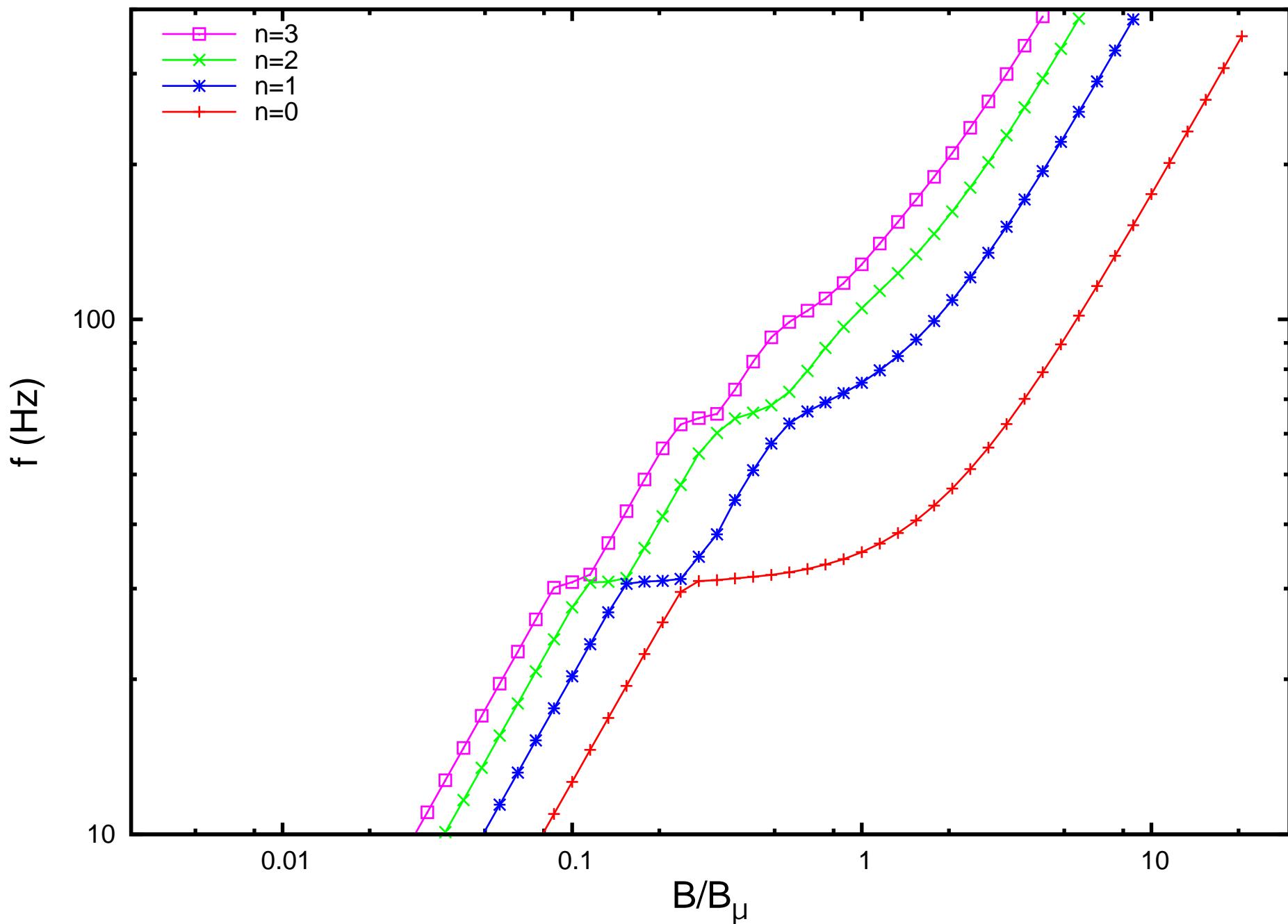
Ρεαλιστικά μαγνητικά πεδία (αρχίζουμε με $\Delta r/R = 1.00$)

$$\Delta r/R = 0.95$$



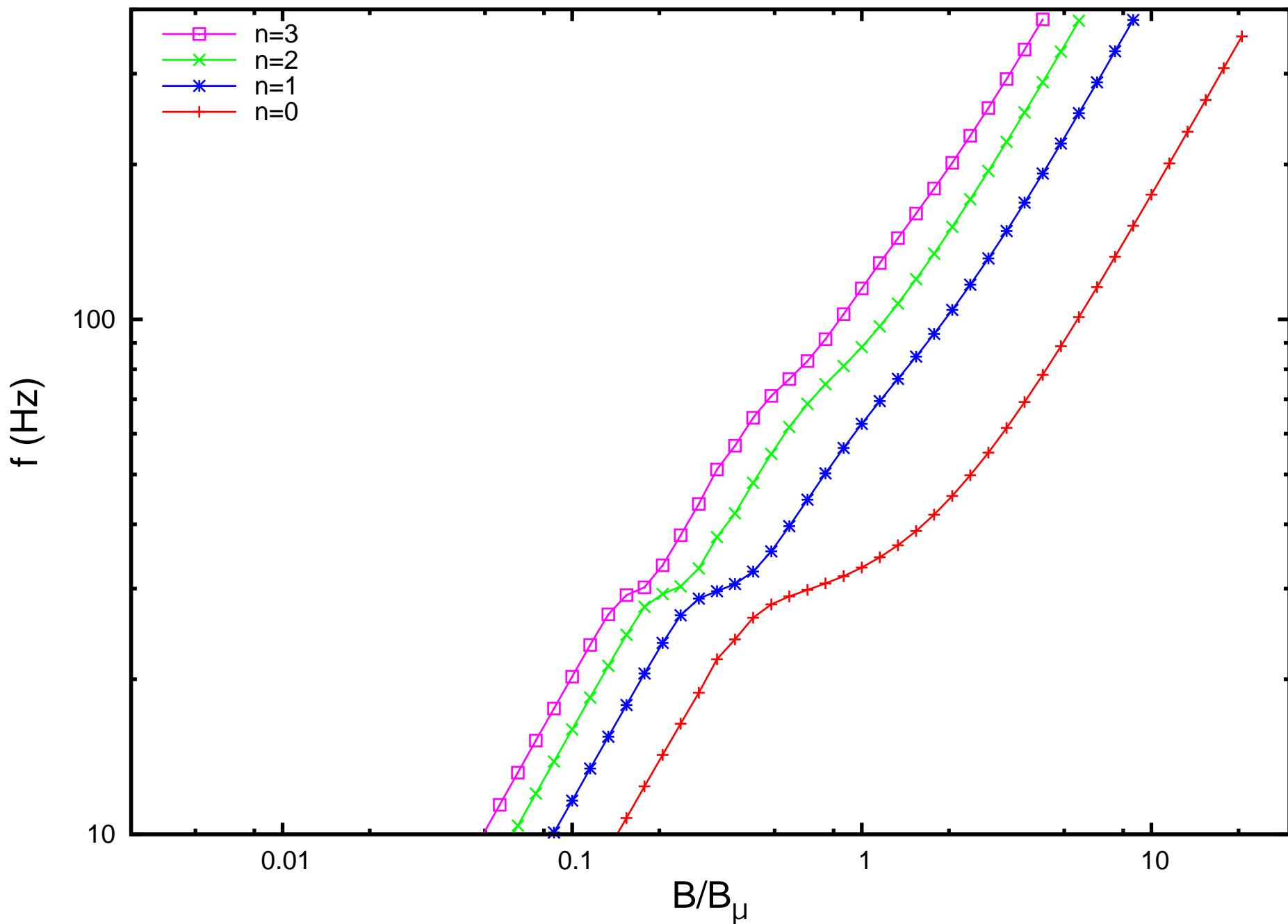
Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis (2006)

$$\Delta r/R = 0.70$$

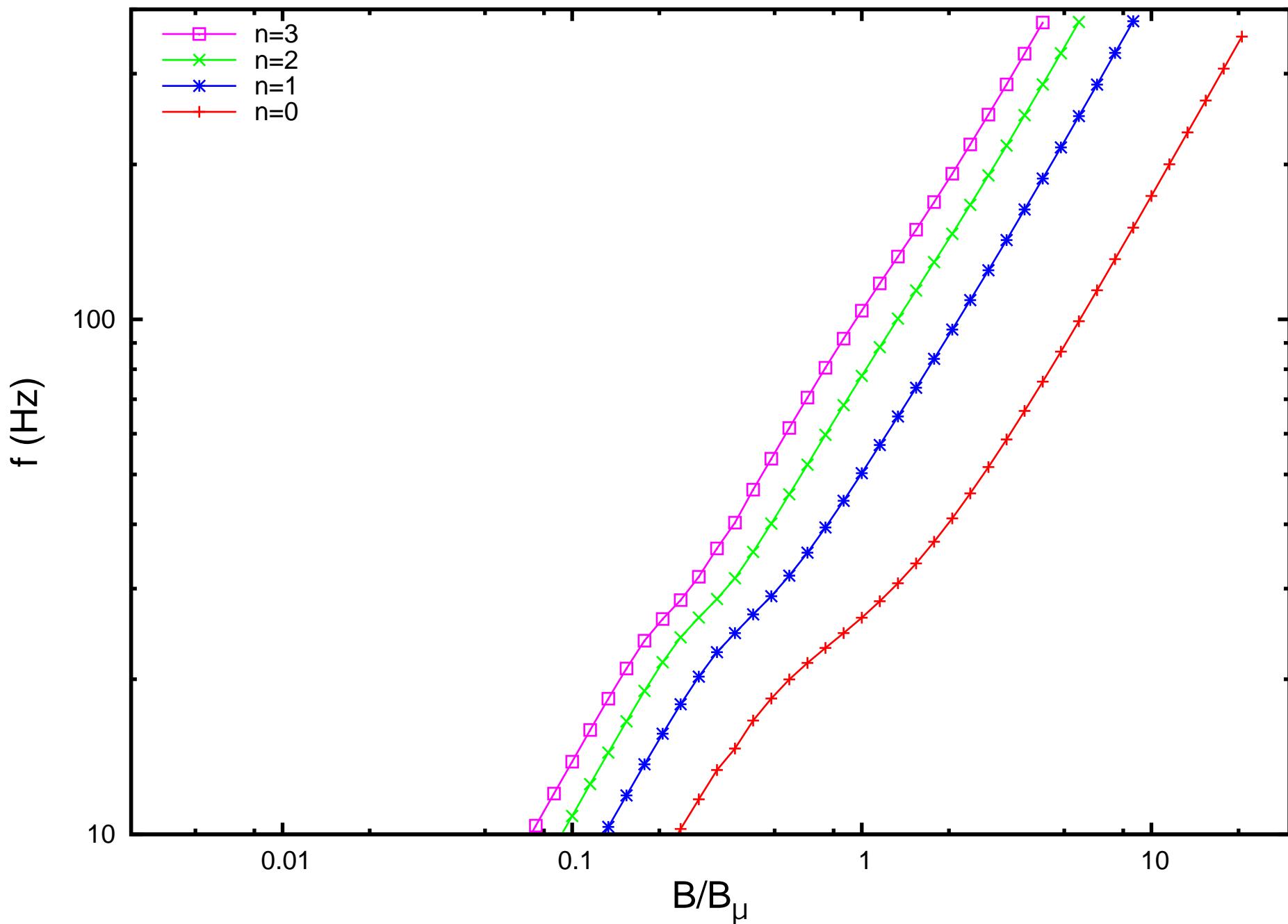


Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis (2006)

$$\Delta r/R = 0.50$$

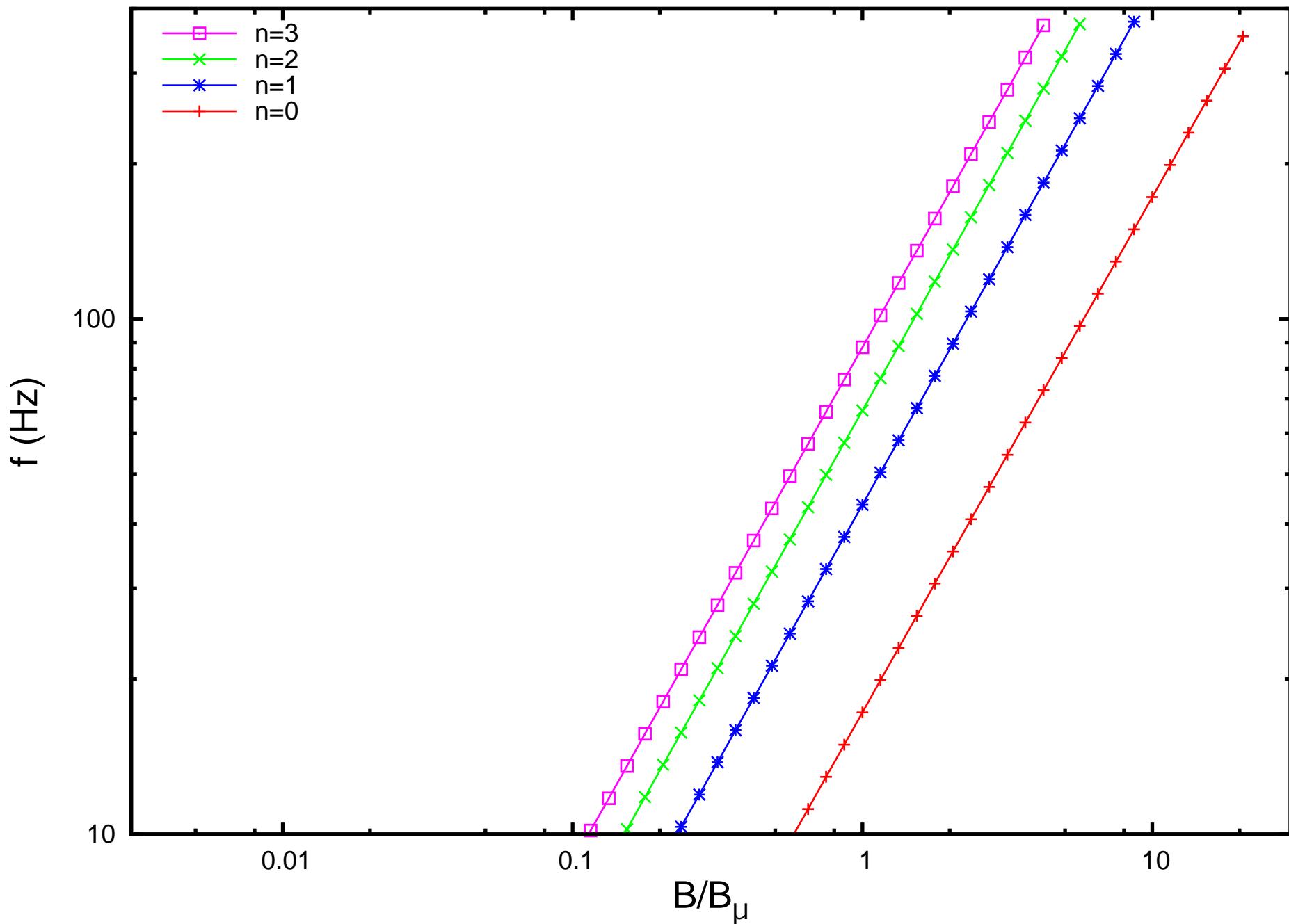


$$\Delta r/R = 0.30$$

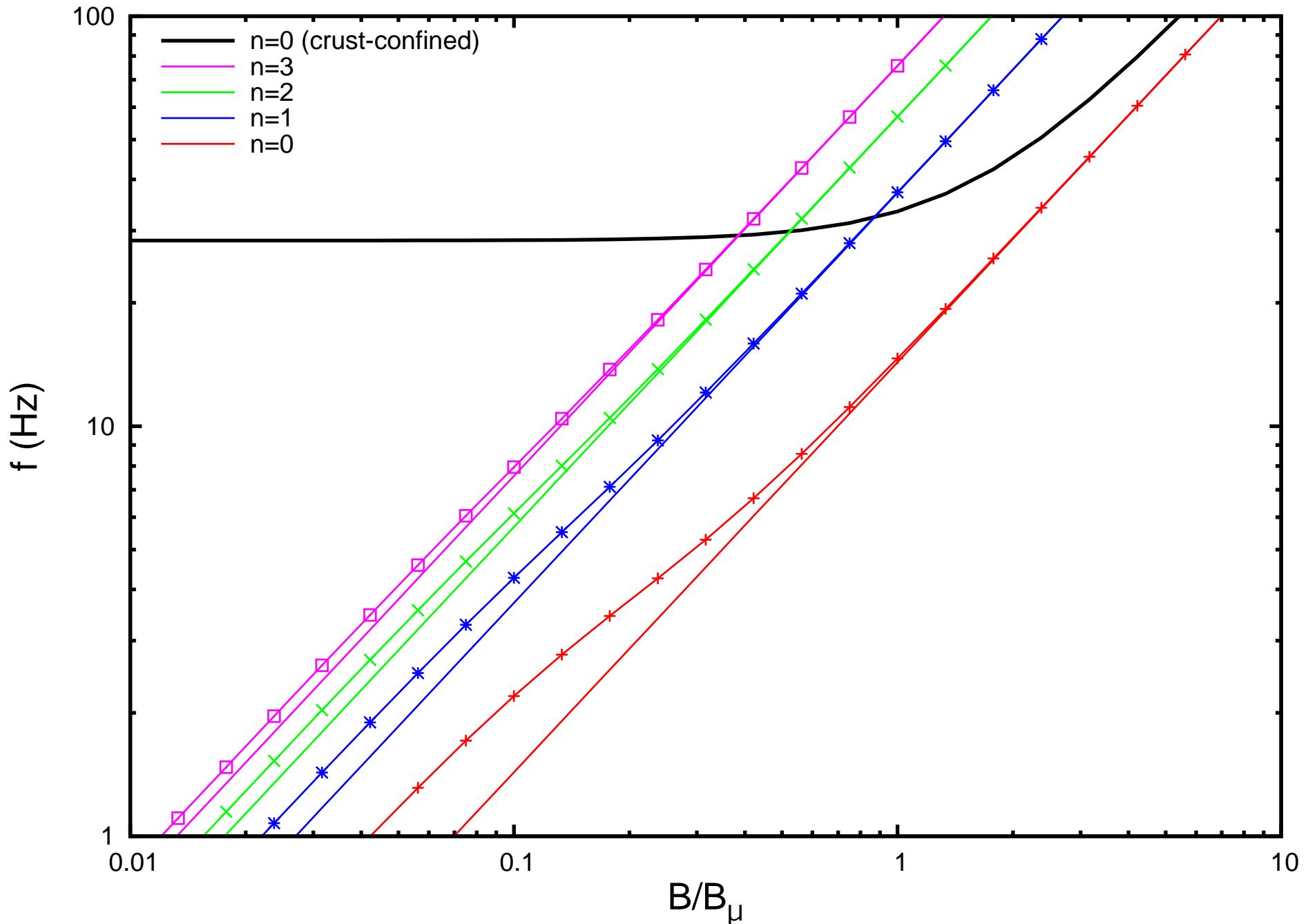


Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis (2006)

$\Delta r/R = 0.00$: “Καθαροί” μαγνητικοί Alfvén modes



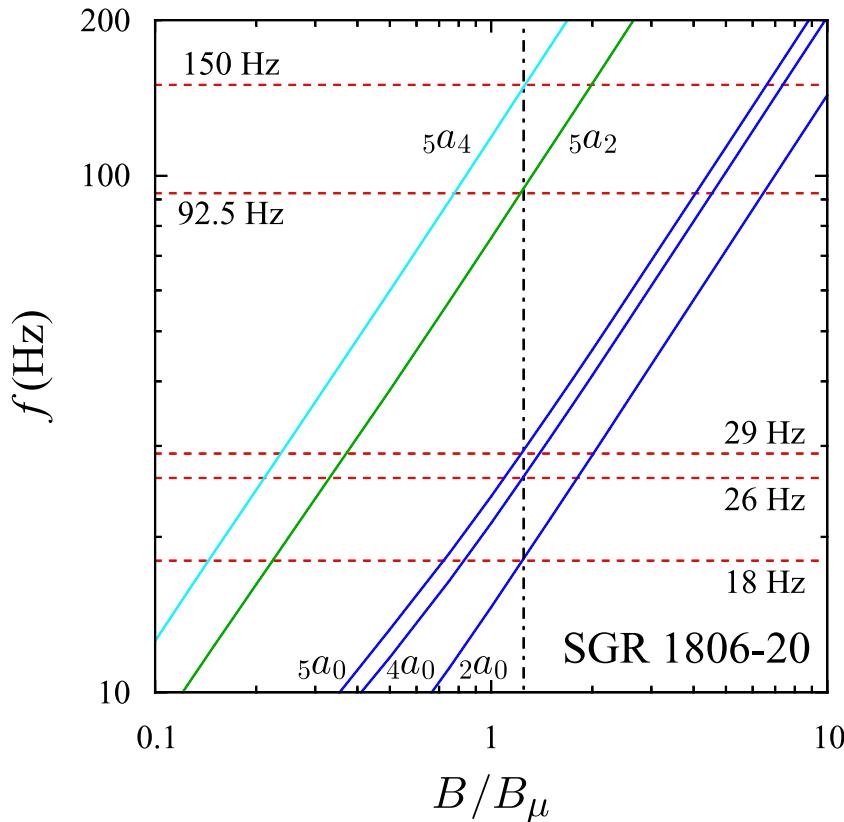
Ρεαλιστικό μοντέλο A+DH₁₄ ($\Delta r/R \simeq 0.05$)



Συμπεράσματα

1. Για ρεαλιστικά μοντέλα magnetars

(στερεός φλοιούς $\Delta r/R \lesssim 0.05$, διπολικό μαγνητικό πεδίο $B \gtrsim B_\mu$)
οι modes έχουν κυρίαρχο μαγνητικό χαρακτήρα



και μπορούμε να εκτιμήσουμε την ένταση του μαγνητικού πεδίου
των αντικειμένων αυτών

και τις επιμέρους λεπτομέρειες της δομής τους (π.χ. $M, R, \Delta r$, EOS κ.ά.).

Συμπεράσματα

2. Μπορούμε να βρίσκουμε τις ιδιοσυχνότητες των Alfvén modes με αναλυτικές σχέσεις της μορφής:

$${}_2a_0 \simeq 43.90 \left[1 - 4.33 \left(\frac{M}{R} \right) + 5.50 \left(\frac{M}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{B}{B_\mu} \right)$$

Οι ιδιοσυχνότητες αυτές σχετίζονται με τις συχνότητες των Lower (L-) και Upper (U-) ταλαντώσεων με σχέσεις της μορφής:

$$\begin{aligned} U_0 &\simeq 1.8 \times {}_2a_0, & U_n &\simeq 1.3 \times {}_2a_n \\ L_0 &\simeq 1.1 \times {}_2a_0, & L_n &\simeq 0.8 \times {}_2a_n \end{aligned}$$

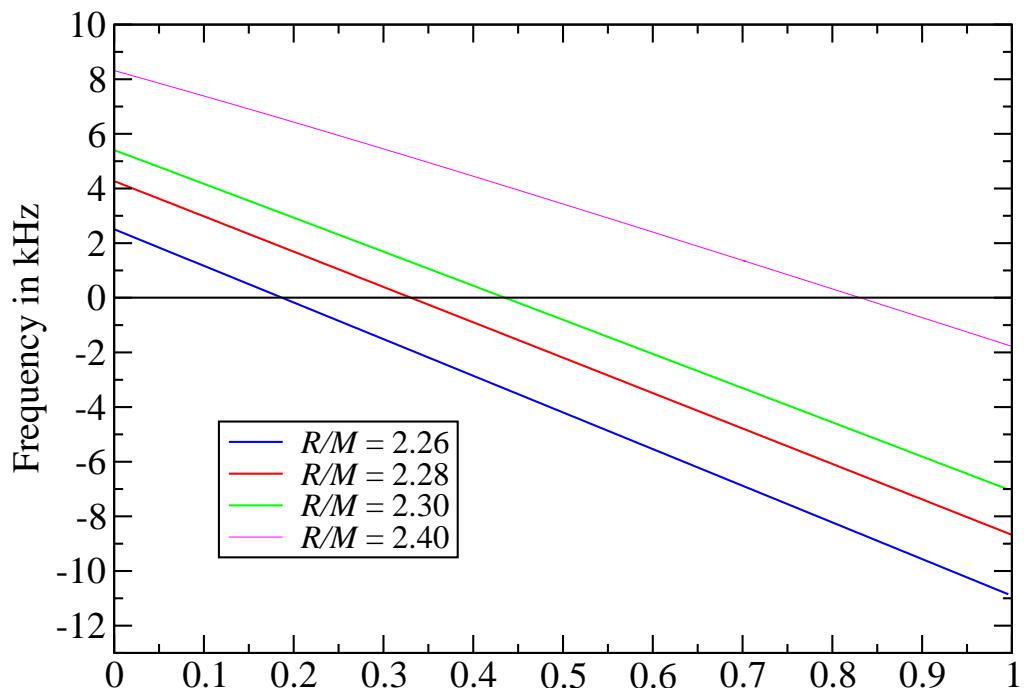
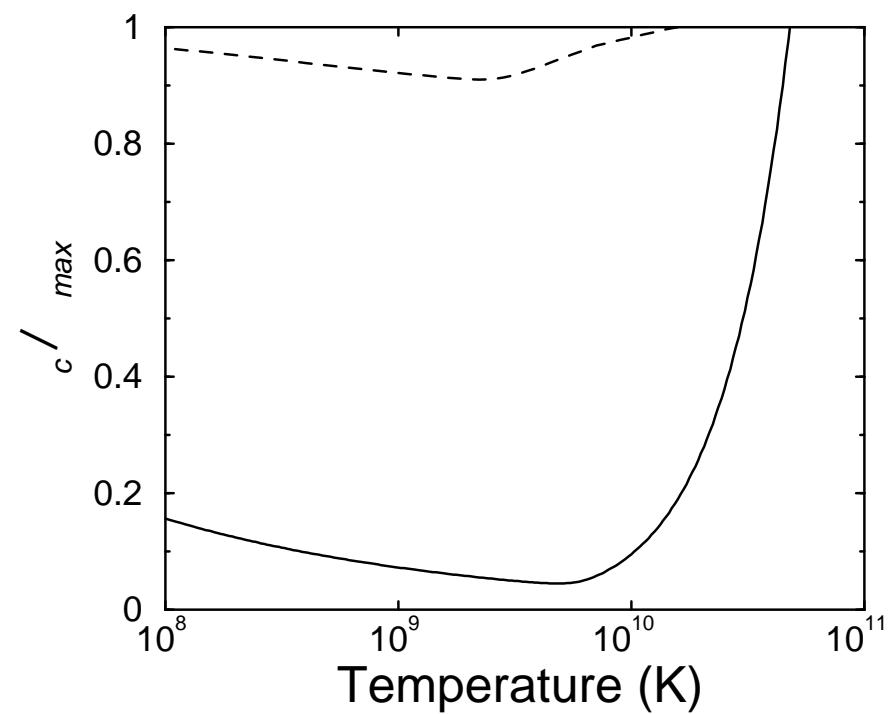
Τι πάρχει, ωστόσο, η επιφύλαξη του συνεχούς φάσματος.

Τι είναι το συνεχές φάσμα; Τι είναι οι Lower και Upper ταλαντώσεις;

ΤΑΧΕΩΣ ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ ΝΕΤΡΟΝΙΩΝ

- Εξισώσεις διαταραχών
 - I. Προσέγγιση Cowling
 - II. Αντίστροφη προσέγγιση Cowling
- Αποτελέσματα

Kokkotas & Vavoulidis, Journal of Physics, Conference Series 8, 71 (2005)



→ Αστάθειες των f-modes, r-modes και w-modes

σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων

I. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ COWLING

→ Στην προσέγγιση **Cowling** θεωρούμε $\delta g_{\alpha\beta} = 0$ (και, συνεπώς, $\delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0$) και δε λαμβάνουμε υπόψη τις διαταραχμένες εξισώσεις πεδίου: $\delta (G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta})$

→ Γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις διατήρησης ενέργειας - ορμής: $\delta (\nabla_\beta T_\alpha^\beta = 0)$

$$\nabla_\beta \delta T_\alpha^\beta = g_{\delta\epsilon} T_\alpha^\epsilon g^{\beta\gamma} \delta \Gamma_{\beta\gamma}^\delta + T_\gamma^\beta \delta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \nabla_\gamma T_\alpha^\beta \delta g_\beta^\gamma = 0 \quad (3)$$

→ δT_α^β είναι οι διαταραχές του μεικτού (μη - συμμετρικού) τανυστή ενέργειας - ορμής:

$$\delta T_\alpha^\beta = t_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} t_t^t & t_t^r & t_t^\theta & t_t^\phi \\ t_r^t & t_r^r & t_r^\theta & t_r^\phi \\ t_\theta^t & t_\theta^r & t_\theta^\theta & t_\theta^\phi \\ t_\phi^t & t_\phi^r & t_\phi^\theta & t_\phi^\phi \end{pmatrix}$$

Διδιάστατες εξισώσεις εξέλιξης [από το ανάπτυγμα της Εξ. (3)]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}t_t^t &= -\frac{\partial}{\partial r}t_t^r - \frac{\partial}{\partial \theta}t_t^\theta - \frac{\partial}{\partial \phi}t_t^\phi - \left(\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi\right)t_t^r - \left(\Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\phi\right)t_t^\theta \\ &\quad + \Gamma_{tt}^r t_r^t + \Gamma_{t\phi}^r t_r^\phi + \Gamma_{tt}^\theta t_\theta^t + \Gamma_{t\phi}^\theta t_\theta^\phi + \Gamma_{tr}^\phi t_\phi^r + \Gamma_{t\theta}^\phi t_\phi^\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}t_r^t &= -\frac{\partial}{\partial r}t_r^r - \frac{\partial}{\partial \phi}t_r^\phi - \left(\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi\right)t_r^r \\ &\quad + \Gamma_{rt}^t t_t^t + \Gamma_{r\phi}^t t_t^\phi + \Gamma_{r\theta}^\theta t_\theta^t + \Gamma_{rt}^\phi t_\phi^t + \Gamma_{r\phi}^\phi t_\phi^\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}t_\theta^t &= -\frac{\partial}{\partial \theta}t_\theta^\theta - \frac{\partial}{\partial \phi}t_\theta^\phi - \left(\Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\phi}^\phi\right)t_\theta^\theta \\ &\quad + \Gamma_{\theta t}^t t_t^t + \Gamma_{\theta\phi}^t t_t^\phi + \Gamma_{\theta r}^r t_r^t + \Gamma_{\theta t}^\phi t_\phi^t + \Gamma_{\theta\phi}^\phi t_\phi^\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}t_\phi^t &= -\frac{\partial}{\partial r}t_\phi^r - \frac{\partial}{\partial \theta}t_\phi^\theta - \frac{\partial}{\partial \phi}t_\phi^\phi - \left(\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta\right)t_\phi^r - \left(\Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta\right)t_\phi^\theta \\ &\quad + \Gamma_{\phi r}^t t_t^r + \Gamma_{\phi\theta}^t t_t^\theta + \Gamma_{\phi t}^r t_r^t + \Gamma_{\phi\phi}^r t_r^\phi + \Gamma_{\phi t}^\theta t_\theta^t + \Gamma_{\phi\phi}^\theta t_\theta^\phi\end{aligned}$$

→ Μόλις 4 εξισώσεις για 16 αγνώστους!

Μπορούμε, ωστόσο, να “κλείσουμε” το σύστημα

χρησιμοποιώντας τις σχέσεις ορθοκανονικότητας, τη σχέση αδιαβατικότητας κ.ά.

Λεπτομέρειες

II. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ COWLING

→ Στην αντίστροφη προσέγγιση Cowling θεωρούμε $\delta T_{\alpha\beta} = 0$ και δε λαμβάνουμε υπόψη τις διαταραχμένες εξισώσεις διατήρησης ενέργειας - οριής

→ Γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις Einstein: $\delta (G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned} -2\delta G_{\alpha\beta} &= \nabla^\gamma \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta h_\gamma^\gamma - 2\nabla_{(\beta} \nabla^\gamma h_{\alpha)\gamma} + 2R^\gamma_\alpha{}^\delta_\beta h_{\gamma\delta} - 2R^\gamma_{(\beta} h_{\alpha)\gamma} \\ &+ g_{\alpha\beta} (\nabla^\gamma \nabla^\delta h_{\gamma\delta} - \nabla^\delta \nabla_\delta h_\gamma^\gamma) + R_\gamma^\gamma h_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} = -16\pi \delta T_{\alpha\beta} = 0 \end{aligned}$$

→ $h_{\alpha\beta}$ είναι οι διαταραχές του μετρικού τανυστή:

$$\delta g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{tt} & h_{tr} & h_{t\theta} & h_{t\phi} \\ \star & h_{rr} & h_{r\theta} & h_{r\phi} \\ \star & \star & h_{\theta\theta} & h_{\theta\phi} \\ \star & \star & \star & h_{\phi\phi} \end{pmatrix}$$

Ποια συνθήκη βαθμίδας (gauge) είναι καταλληλότερη για διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις;

→ Δοκιμάζουμε, με την επίπεδη μετρική: $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2$

→ Με τη συνθήκη βαθμίδας **Regge-Wheeler** ($h_{\theta\phi} = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) h_{t\phi} - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \right) \right] h_{r\phi} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{t\phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} = 0$$

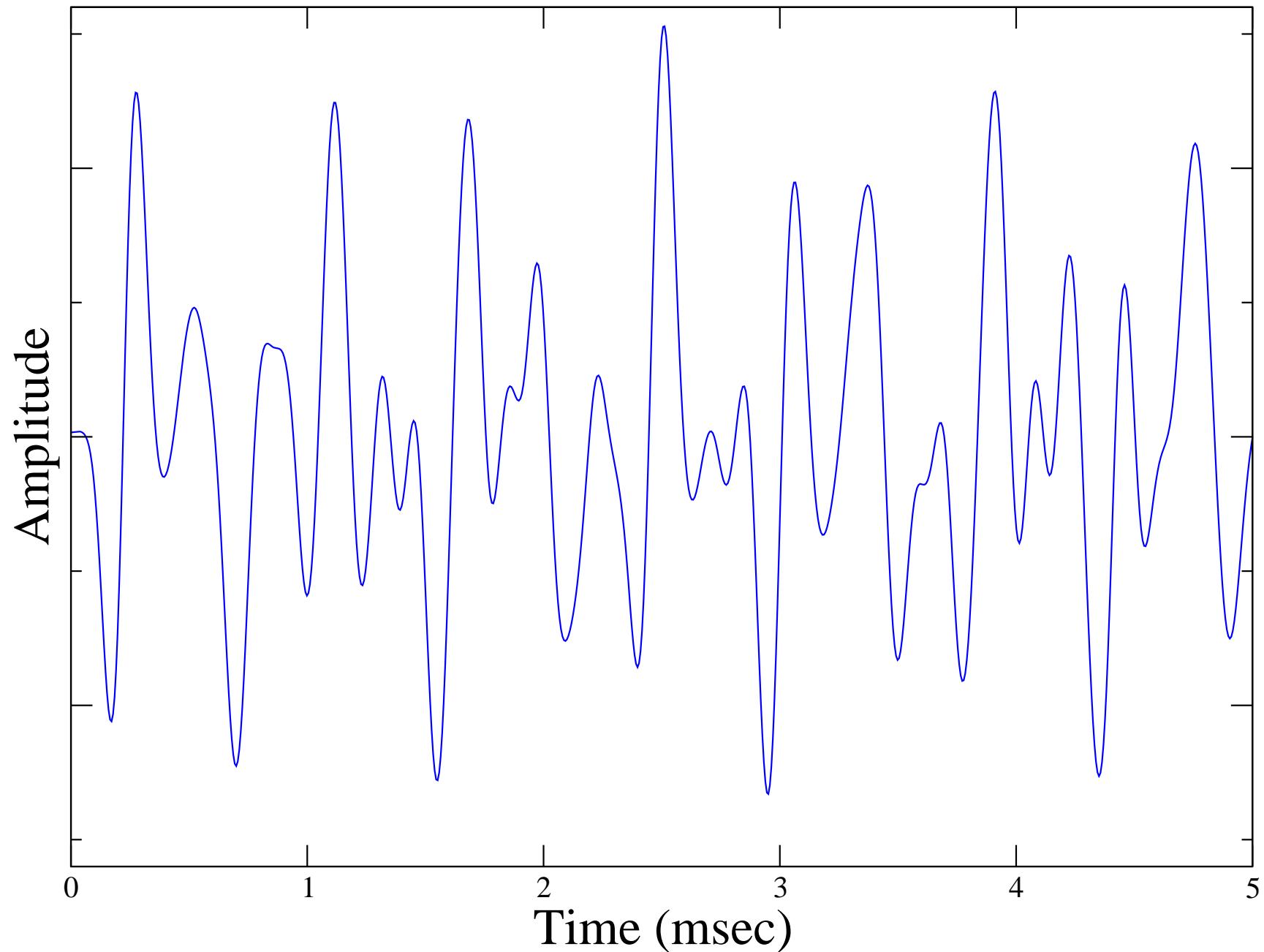
→ Με τη συνθήκη βαθμίδας **Hilbert-Lorentz** ($\nabla^\beta h_{\alpha\beta} = 0$):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{r\phi} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - 4 \right] \right\} h_{r\phi} - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{\theta\phi}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\theta\phi} = \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - 3 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) - 1 \right] \right\} h_{\theta\phi}$$

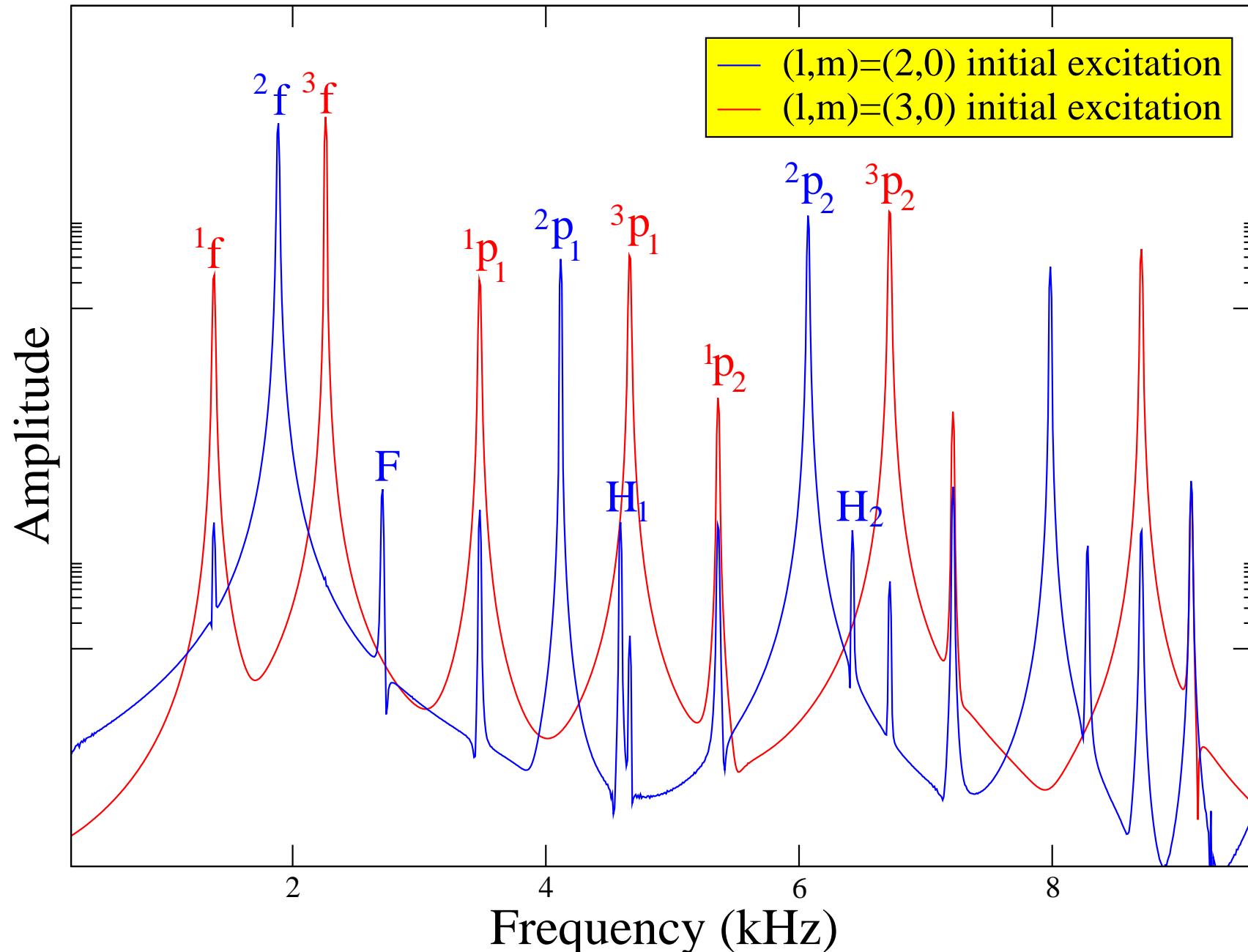
Relativistic non-rotating stars

Waveforms



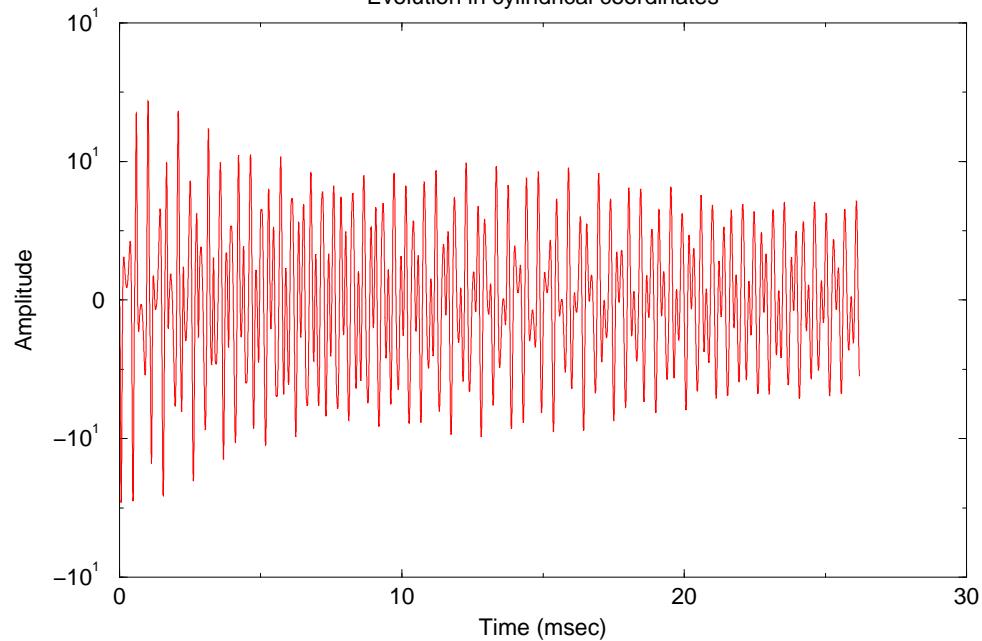
Relativistic non-rotating stars

Eigenfrequencies



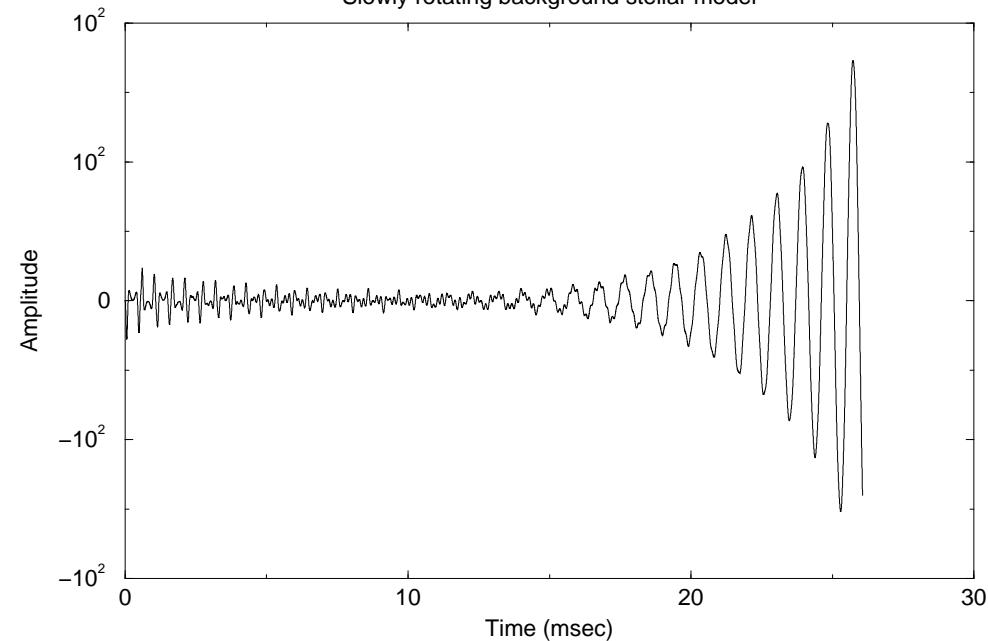
Time Evolution of Axisymmetric Modes

Evolution in cylindrical coordinates



Time Evolution of Axisymmetric Modes

Slowly rotating background stellar model



- Αριθμητική εξέλιξη με κώδικα σε κυλινδρικές συντεταγμένες
- **Αστάθεια** του κώδικα για περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων

Σύνοψη

1. Μελετήσαμε modes σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιού και βρήκαμε ότι:
 - Τα σχετικιστικά αποτελέσματα διαφέρουν ως και 30% από τα Νευτώνεια.
 - Πολλοί modes του στερεού φλοιού θα μπορούσαν να είναι CFS ασταθείς ακόμη και για μικρά Ω . Η Σχετικότητα υποβοηθά αυτήν την αστάθεια.
2. Μελετήσαμε modes σε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό και βρήκαμε ότι:
 - Σε ρεαλιστικά μοντέλα μαγνητισμένων αστέρων νετρονίων ο μαγνητικός χαρακτήρας αυτών των modes είναι κυρίαρχος.
 - Οι παρατηρούμενες QPOs σε SGRs θα μπορούσαν να ερμηνευτούν ως τέτοιοι modes.
3. Μελετήσαμε modes σε ταχέως περιστρεφόμενους ρευστούς αστέρες νετρονίων.
 - Οι διδιάστατες αριθμητικές μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε δεν ήταν, γενικά, ευσταθείς. Η μελέτη αυτή συνεχίζεται.

Εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς Ω/Ω_K

→ Μετρική:

$$ds^2 = - [e^{2\nu} (1 + 2h) - r^2 \sin^2 \theta \omega^2] dt^2 + e^{2\lambda} \left(1 + \frac{2m}{r - 2M(r)} \right) dr^2 + r^2 (1 + 2k) d\theta^2 + r^2 (1 + 2k) \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi$$

→ h, m, k : συναρτήσεις των r, θ π.χ. $h(r, \theta) = h_0(r) + h_2(r) P_2(\theta)$

→ Εξισώσεις δομής:

$$\begin{aligned} \text{π.χ. } & \frac{1}{6} e^{-2(\nu+\lambda)} r^2 (\varpi')^2 - \left(2\nu' + \frac{1}{r} \right) \frac{2m_0}{r^2} + \left(1 - \frac{2M(r)}{r} \right) \frac{2}{r} \frac{dh_0}{dr} \\ &= -8\pi \left[p' \zeta_0^r + \Lambda (e_c^c)_0 + 2\mu \left(\frac{m_0}{r - 2M(r)} + \frac{d\zeta_0^r}{dr} + \lambda' \zeta_0^r \right) \right] \end{aligned}$$

→ 3 εξισώσεις για τα h_0, m_0, ζ_0^r και 5 εξισώσεις για τα $h_2, m_2, k_2, \zeta_2^r, \zeta_2^\theta$

→ Οι ρευστοί περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων
έχουν διαφορετικές ιδιότητες
από τους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό.

Μονοδιάστατο σύστημα εξισώσεων

$$(A_{\ell m} + \tilde{A}_{\ell m} \cos \theta) Y_{\ell m} + B_{\ell m} \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} + C_{\ell m} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} = 0$$

$$(\alpha_{\ell m} + \tilde{\alpha}_{\ell m} \cos \theta) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} - (\beta_{\ell m} + \tilde{\beta}_{\ell m} \cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} + \eta_{\ell m} \sin \theta Y_{\ell m} = 0$$

$$(\beta_{\ell m} + \tilde{\beta}_{\ell m} \cos \theta) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} + (\alpha_{\ell m} + \tilde{\alpha}_{\ell m} \cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} + \zeta_{\ell m} \sin \theta Y_{\ell m} = 0$$

→ $A_{\ell m}, C_{\ell m}, \alpha_{\ell m}, \tilde{\beta}_{\ell m}, \zeta_{\ell m}$ είναι συναρτήσεις του σ και των σφαιροειδών S, H

→ $\tilde{A}_{\ell m}, B_{\ell m}, \tilde{\alpha}_{\ell m}, \beta_{\ell m}, \eta_{\ell m}$ είναι συναρτήσεις του σ και του τοροειδούς T

$$A_{\ell m} \int Y_{\ell m} Y_{\ell m}^* d\Omega + \tilde{A}_{\ell m} \int \cos \theta Y_{\ell m} Y_{\ell m}^* d\Omega + B_{\ell m} \int \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} Y_{\ell m}^* d\Omega + C_{\ell m} \int \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} Y_{\ell m}^* d\Omega = 0$$

$$\alpha_{\ell m} \int \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} Y_{\ell m}^* d\Omega + \tilde{\alpha}_{\ell m} \int \cos \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} Y_{\ell m}^* d\Omega - \beta_{\ell m} \int \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} Y_{\ell m}^* d\Omega - \tilde{\beta}_{\ell m} \int \cos \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} Y_{\ell m}^* d\Omega + \eta_{\ell m} \int \sin \theta Y_{\ell m} Y_{\ell m}^* d\Omega = 0$$

$$\beta_{\ell m} \int \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} Y_{\ell m}^* d\Omega + \tilde{\beta}_{\ell m} \int \cos \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} Y_{\ell m}^* d\Omega + \alpha_{\ell m} \int \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} Y_{\ell m}^* d\Omega + \tilde{\alpha}_{\ell m} \int \cos \theta \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} Y_{\ell m}^* d\Omega + \zeta_{\ell m} \int \sin \theta Y_{\ell m} Y_{\ell m}^* d\Omega = 0$$

$$A_{\ell m} + imC_{\ell m} + Q_{\ell+1m} \left[\tilde{A}_{\ell+1m} - (\ell+2) B_{\ell+1m} \right] + Q_{\ell-1m} \left[\tilde{A}_{\ell-1m} + (\ell-1) B_{\ell-1m} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \ell(\ell+1)\alpha_{\ell m} - im \left(\tilde{\beta}_{\ell m} + \zeta_{\ell m} \right) &+ Q_{\ell-1m} (\ell+1) [(\ell-1) \tilde{\alpha}_{\ell-1m} - \eta_{\ell-1m}] \\ &+ Q_{\ell+1m} \ell [(\ell+2) \tilde{\alpha}_{\ell+1m} + \eta_{\ell+1m}] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ell(\ell+1)\beta_{\ell m} + im (\tilde{\alpha}_{\ell m} + \eta_{\ell m}) &+ Q_{\ell-1m} (\ell+1) \left[(\ell-1) \tilde{\beta}_{\ell-1m} - \zeta_{\ell-1m} \right] \\ &+ Q_{\ell+1m} \ell \left[(\ell+2) \tilde{\beta}_{\ell+1m} + \zeta_{\ell+1m} \right] = 0 \end{aligned}$$

Σχετικιστικοί όροι στις εξισώσεις διαταραχών

$$\mathcal{A} = e^{-2\nu+2\lambda} (\alpha_1 - \alpha_2) r^2 m \sigma_0 \varpi$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= e^{-2\nu} \left[\left(\frac{\rho}{p} + 1 + \alpha_2 \right) r^3 m \sigma_0 \frac{d\varpi}{dr} \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(\left(\frac{\rho}{p} + 1 \right) (\Gamma + 1) + \alpha_2 \right) r \frac{d\nu}{dr} + \frac{2r}{3p} \frac{d\mu}{dr} + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \right] r^2 m \sigma_0 \varpi \right]\end{aligned}$$

$$\mathcal{C} = e^{-2\nu+2\lambda} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - 1 \right) r^2 m \sigma_0 \varpi$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= e^{-2\nu} \left[\left(\frac{\rho}{p} + 1 - \alpha_1 \right) \frac{r^3 m \sigma_0}{\ell(\ell+1)} \frac{d\varpi}{dr} \right. \\ &\quad \left. - \left[\left(\frac{\rho}{p} + 1 - \alpha_1 \right) r \frac{d\nu}{dr} + \frac{r}{p} \frac{d\mu}{dr} + 2 \left(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \right) \right] \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)} \right]\end{aligned}$$

$$\mathcal{E} = e^{-2\nu} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} - 1 \right) \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)}$$

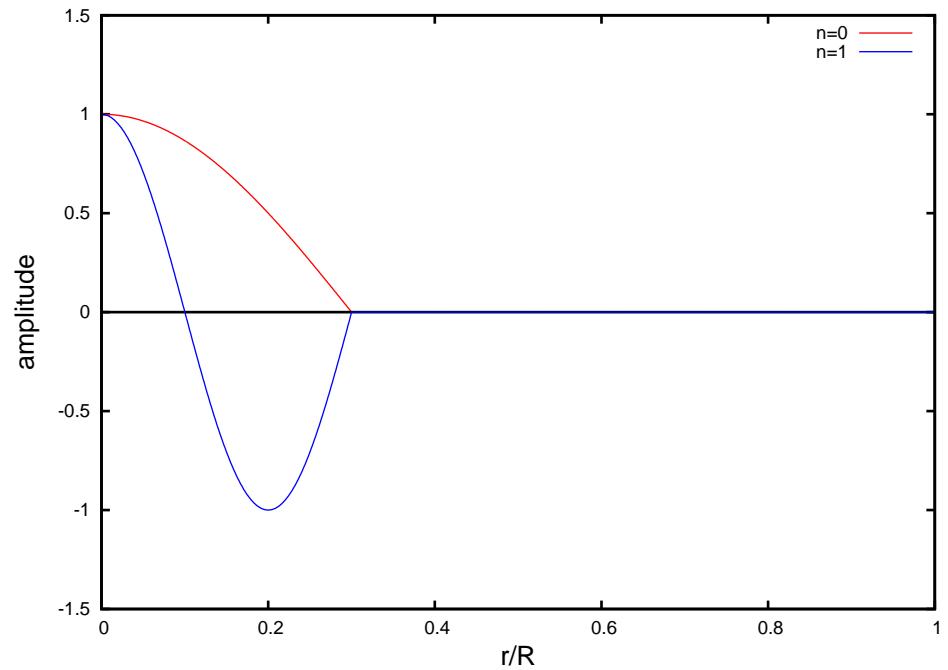
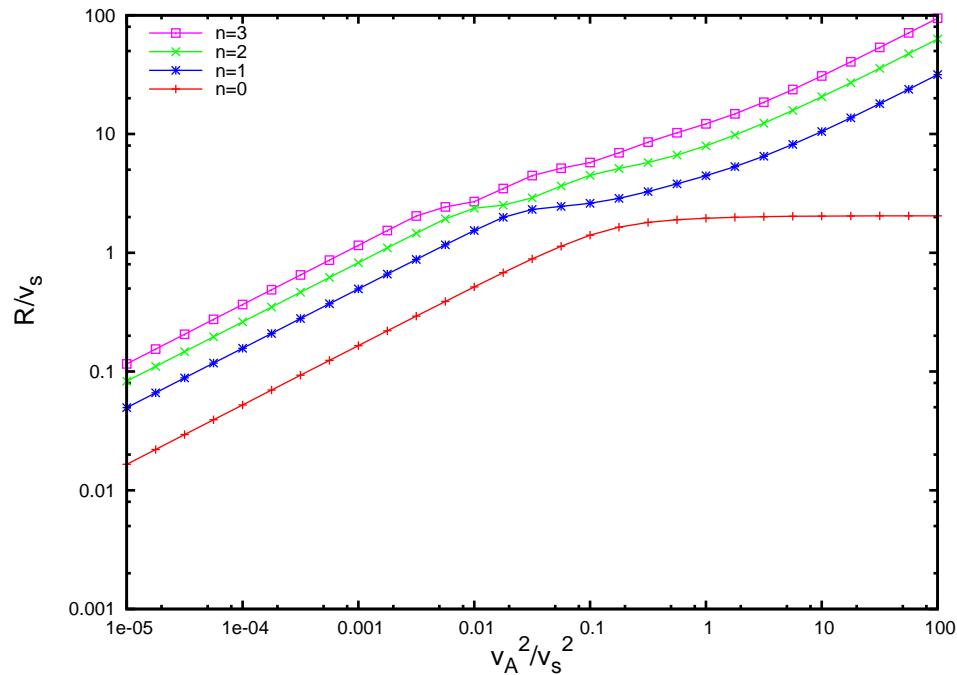
$$\mathcal{F} = e^{-2\nu} \left(-4\alpha_1 + \left(2\alpha_3 - \alpha_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \right) \ell(\ell+1) \right) \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)}$$

$$\mathcal{G} = e^{-2\nu} 2\alpha_1 (\ell-1)(\ell+2) \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)}$$

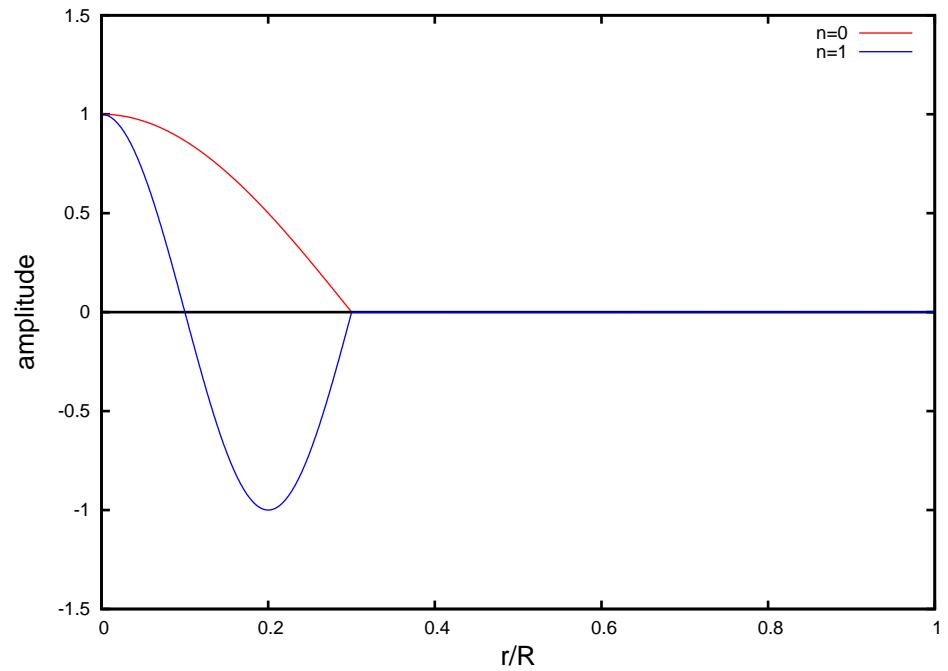
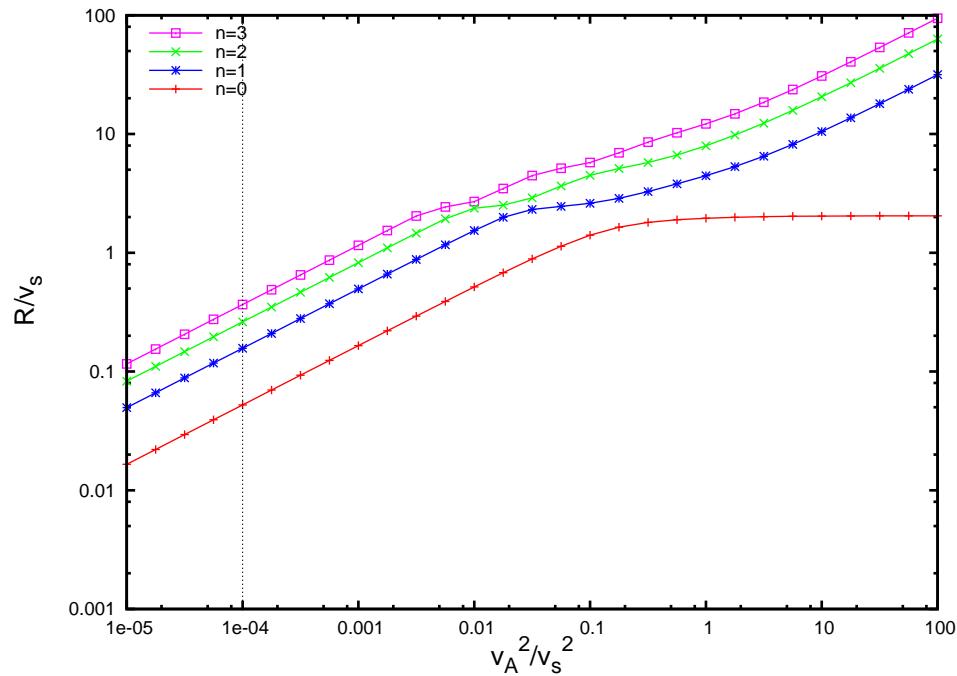
$$\mathcal{H} = \left(\frac{d\varpi}{dr} - 2 \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) \frac{rm}{\sigma_0}$$

$$\mathcal{I} = e^{-2\nu} r^2 m \sigma_0 \varpi$$

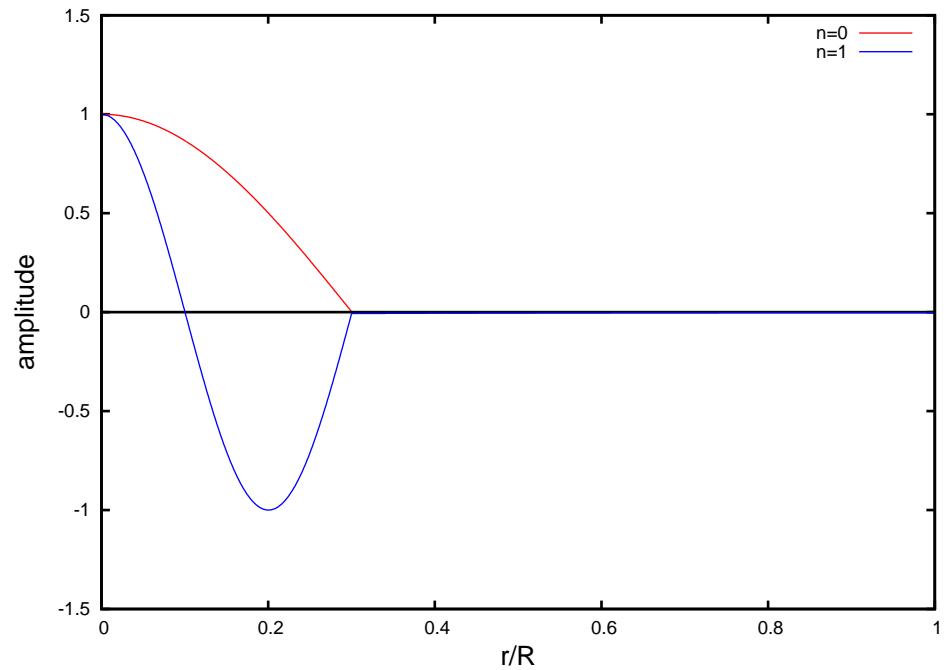
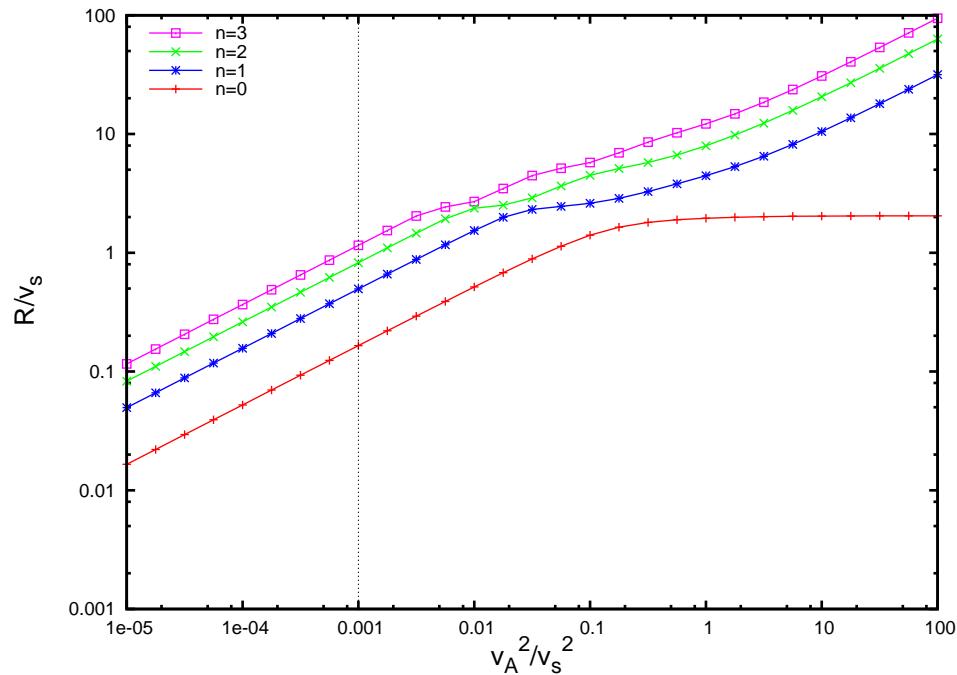
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



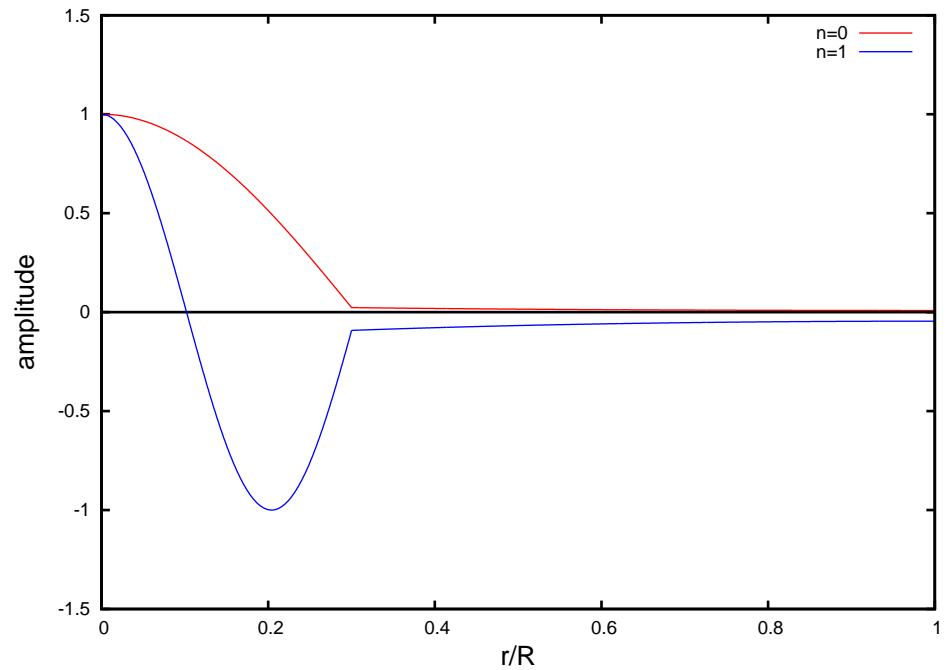
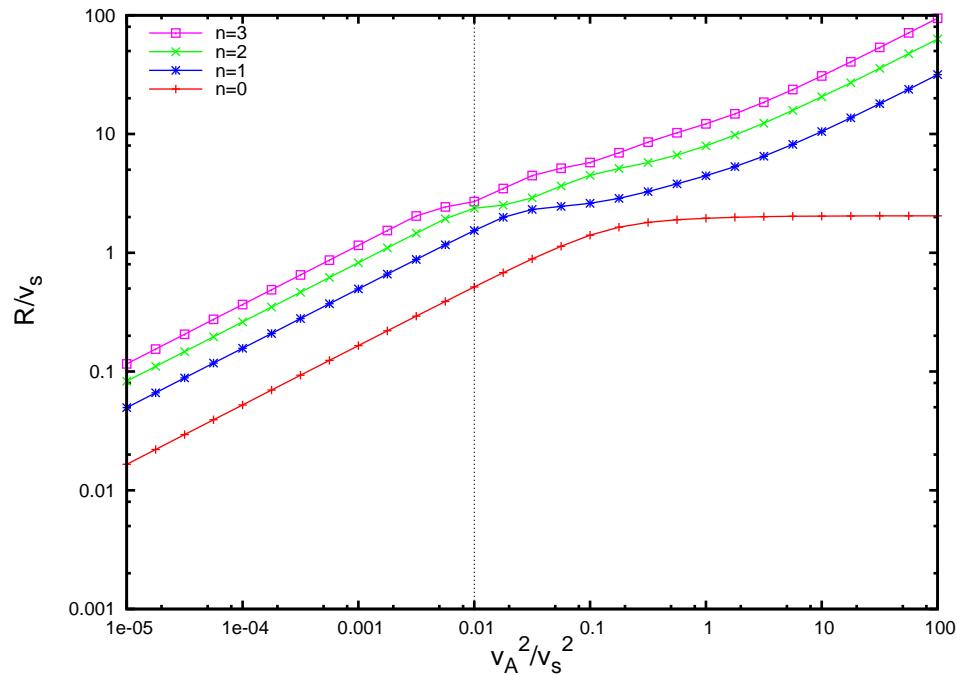
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



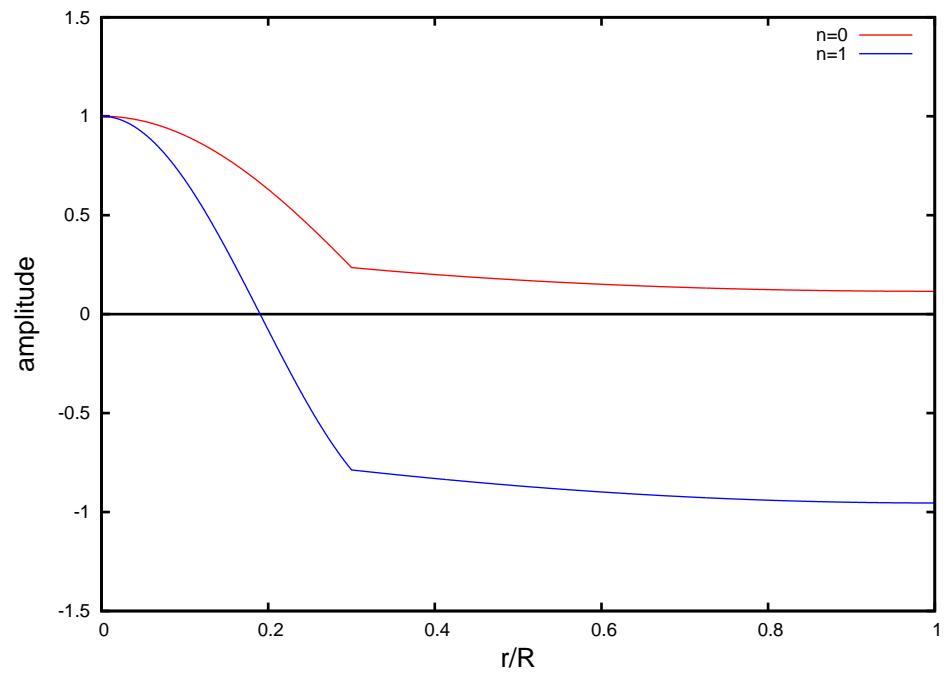
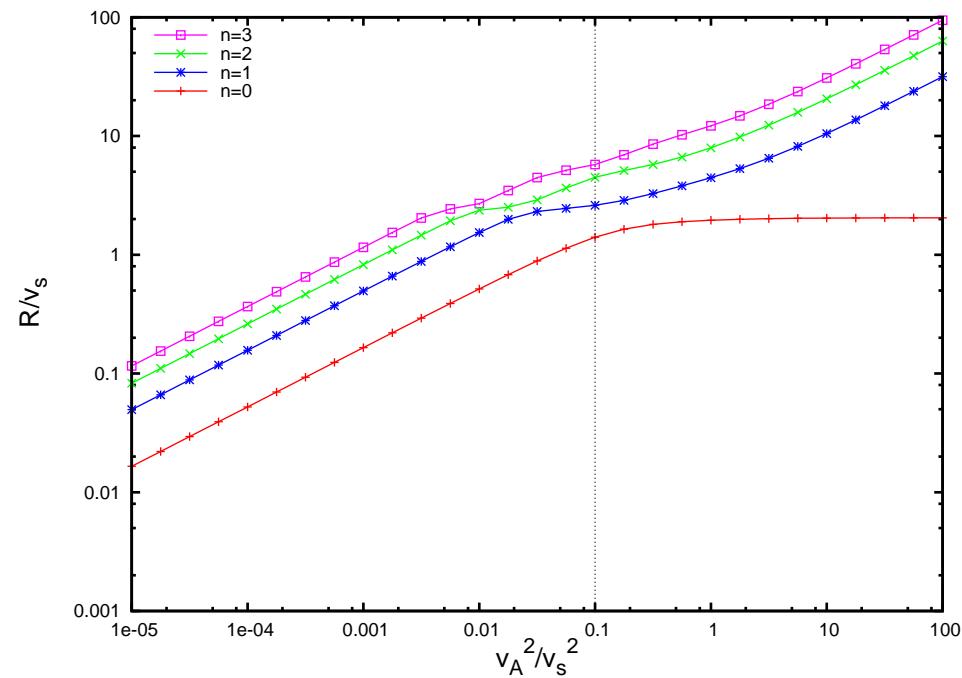
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



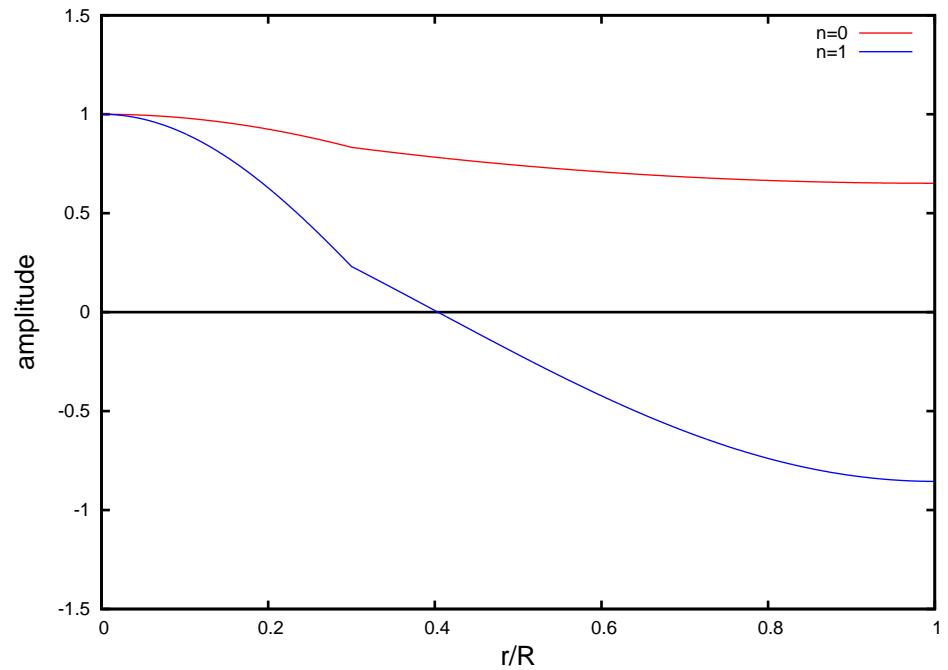
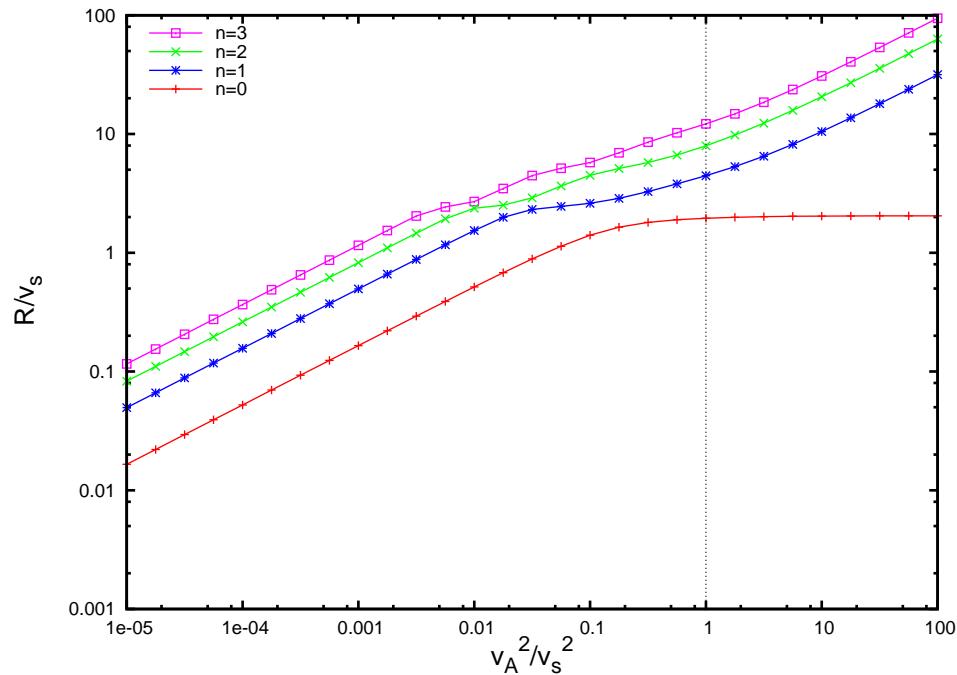
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



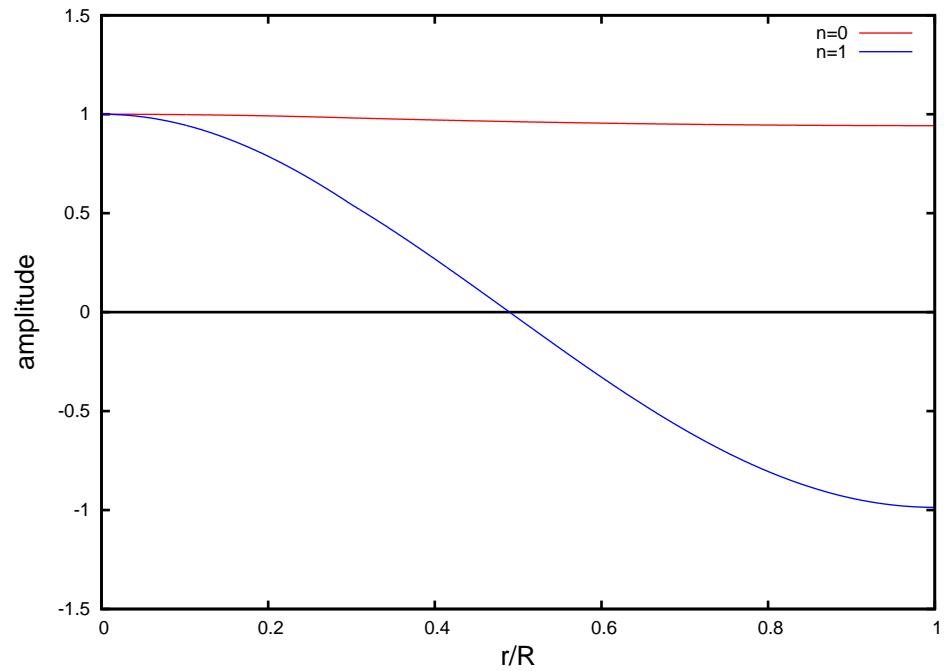
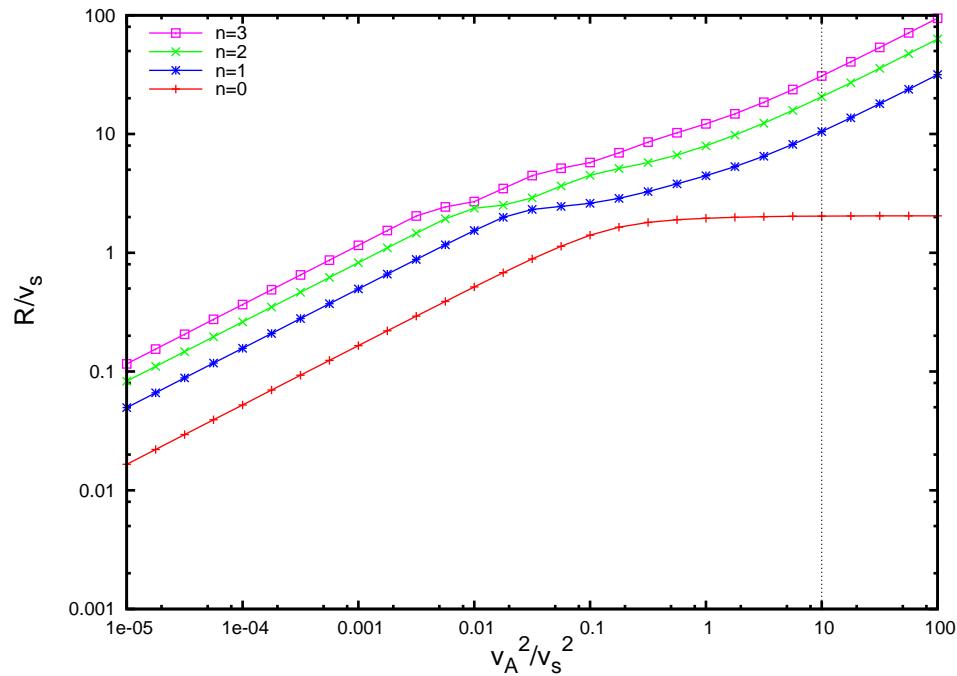
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



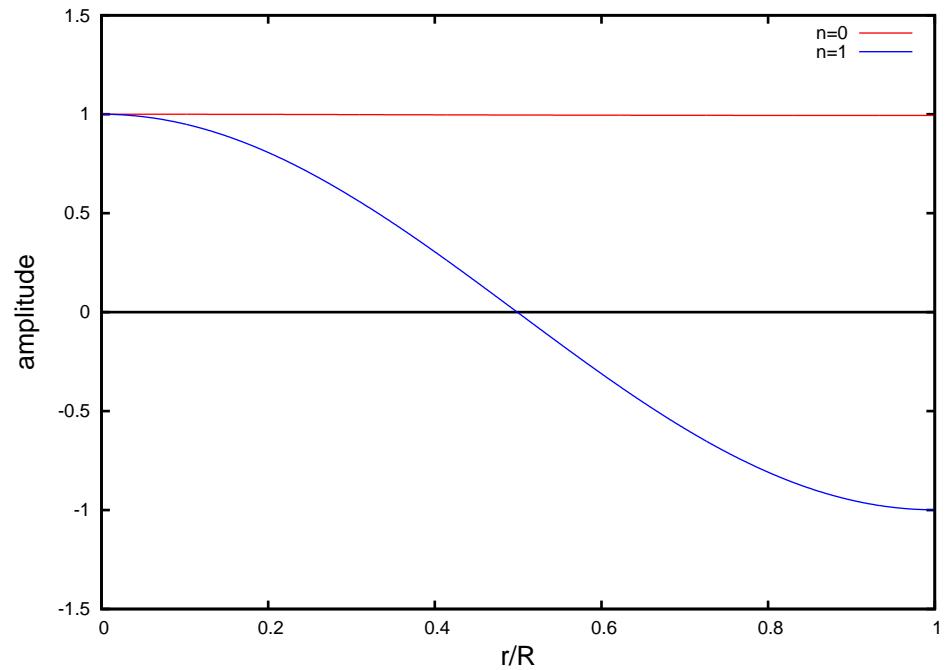
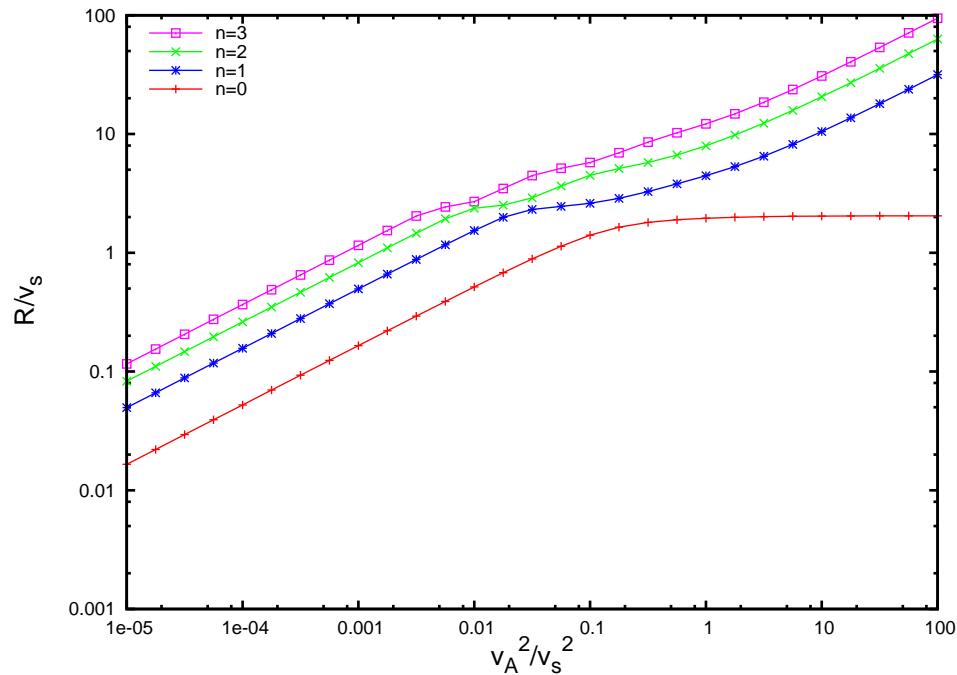
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



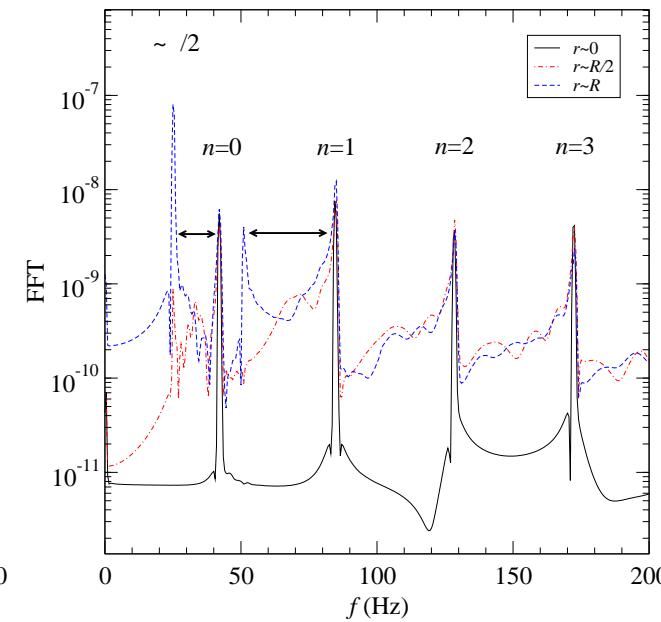
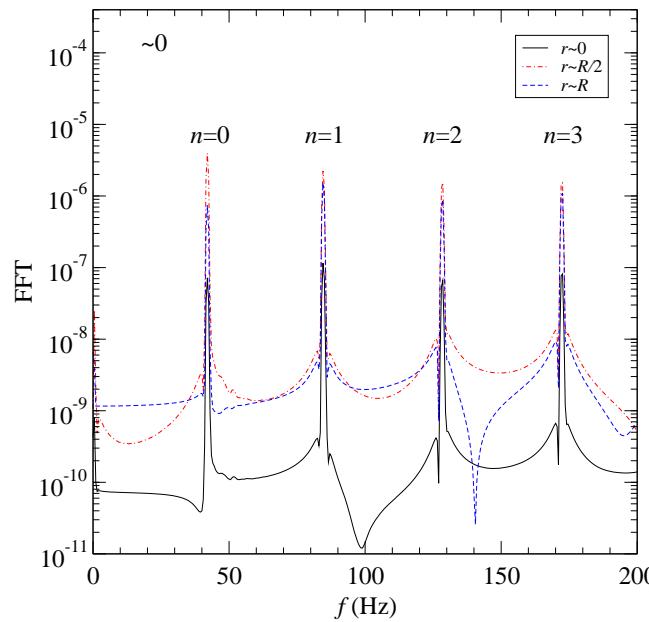
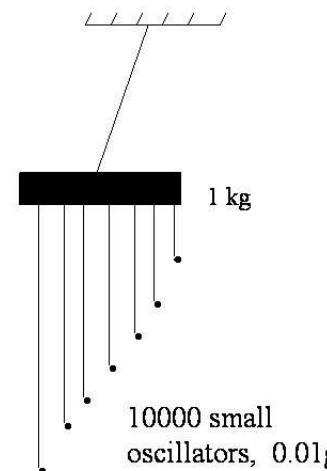
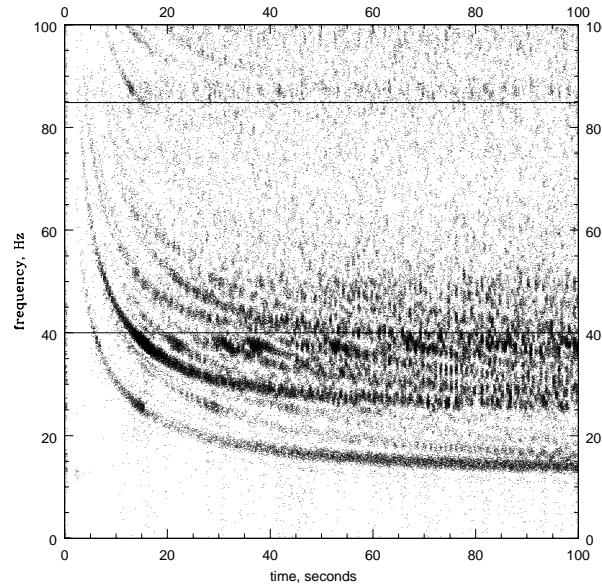
Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



Ιδιοσυναρτήσεις των μαγνητοελαστικών modes ($\Delta r/R = 0.70$)



Συνεχές φάσμα. Lower και Upper ταλαντώσεις



Bλ. π.χ. Levin (2007), Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007)

Εξισώσεις διαταραχών στην προσέγγιση Cowling. Λεπτομέρειες

→ Τανυστής ενέργειας - ορμής ιδανικού ρευστού: $T_\alpha^\beta = (\rho + p) u_\alpha u^\beta + p g_\alpha^\beta$
και γραμμική διαταραχή του:

$$t_\alpha^\beta = (\delta\rho + \delta p) u_\alpha u^\beta + (\rho + p) (u_\alpha \delta u^\beta + \delta u_\alpha u^\beta) + \delta_\alpha^\beta \delta p$$

→ Καθαρά περιστροφική κίνηση: $u^\alpha = (u^t, 0, 0, u^\phi)$ με: $\Omega = u^\phi/u^t$

$$t_r^\theta = 0$$

$$t_\theta^r = 0$$

$$t_r^\phi = \Omega t_r^t$$

$$t_\theta^\phi = \Omega t_\theta^t$$

$$t_\theta^\theta = t_r^r$$

→ Σχέσεις ορθοκανονικότητας: $t_\alpha^\beta = g_{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} t_\gamma^\delta$

→ Σχέσεις αδιαβατικότητας: $t_r^r = \delta p = c_s^2 \delta \rho$