

ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΤΟΜΕΑΣ ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗΣ, ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑΣ

ΒΑΒΟΥΛΙΔΗ ΜΙΛΤΙΑΔΗ

Πτυχιούχου Φυσικού

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2008

ΒΑΒΟΤΛΙΔΗ ΜΙΑΤΙΑΔΗ

ΠΕΡΙΣΤΡΕΦΟΜΕΝΟΙ ΣΧΕΤΙΚΙΣΤΙΚΟΙ ΑΣΤΕΡΕΣ

ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο Τμήμα Φυσικής
της Σχολής Θετικών Επιστημών
του Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Ημερομηνία Προφορικής Εξέτασης: 5-5-2008

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ

Λουκάς Βλάχος, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ.

Ιωάννης Χ. Σειραδάκης, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ.

Νικόλαος Σπύρου, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ.

Κωνσταντίνος Κόκκοτας, Αναπλ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ.

Σπυρίδων Κωτσάκης, Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Δημήτριος Παπαδόπουλος, Αναπλ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ.

Νικόλαος Στεργιούλας, Επίκ. Καθηγητής Τμήματος Φυσικής, Σ.Θ.Ε./Α.Π.Θ.

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή	15
1.1 Ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό	23
1.1.1 Περιοδικότητες σε radio - pulsars	25
1.1.2 Ήμι - περιοδικές ταλαντώσεις σε SGRs	28
1.2 Συμπαγή αστρικά ζεύγη	36
1.3 Αστάθειες CFS σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων	39
1.4 Σύνοψη	48
2 Μοντέλα αστέρων νετρονίων	51
2.1 Στατικοί, σφαιρικοί αστέρες νετρονίων	53
2.2 Βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων	54
2.3 Ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων	55
2.3.1 Δεύτερης - τάξης προσέγγιση ως προς $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$	55
2.3.2 Διδιάστατη προσέγγιση	59
2.4 Μαγνητισμένοι αστέρες νετρονίων	62
2.5 Καταστατικές εξισώσεις	65
2.5.1 Πολυτροπικές σχέσεις πίεσης - πυκνότητας	67
2.5.2 Ρεαλιστικές σχέσεις πίεσης - πυκνότητας	70
2.5.3 Αδιαβατικοί δείκτες	70
2.5.4 Συντελεστές γραμμικού ιζώδους	72
2.5.5 Σχέσεις σχετικού πάχους στερεού φλοιού - συμπαγότητας	72

3 Εξισώσεις διαταραχών	73
3.1 Μη - περιστρεφόμενοι και βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό	74
3.1.1 Στερεός φλοιός	79
3.1.2 Ρευστός πυρήνας	83
3.1.3 Συνοριακές συνθήκες και συνθήκες κανονικοποίησης	84
3.2 Μαγνητισμένοι αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό	85
3.3 Ταχέως περιστρεφόμενοι, ρευστοί αστέρες νετρονίων	88
3.3.1 Προσέγγιση Cowling	88
3.3.2 Αντίστροφη προσέγγιση Cowling	93
4 Ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό	99
4.1 Εξισώσεις και αριθμητικές τεχνικές	100
4.2 Επιδράσεις του στερεού φλοιού στις ταλαντώσεις	103
4.2.1 fundamental (f-) και pressure (p-) modes	105
4.2.2 shear (s-) modes	107
4.2.3 interfacial (i-) mode	107
4.2.4 torsional (t-) modes	108
4.3 Ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων	108
4.4 Αστεροσεισμολογικοί τύποι	109
4.5 Συντελεστές παλλιροιακής σύζευξης	116
4.6 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα	118
5 Ταλαντώσεις σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό	119
5.1 Εξισώσεις	119
5.2 Τοροειδείς modes	121
5.3 Σφαιροειδείς modes	125
5.4 Αστάθειες CFS σε modes του στερεού φλοιού	128
5.5 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα	132

6 Τοροειδείς ταλαντώσεις σε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων	
με στερεό φλοιό	133
6.1 Μαγνητικές ταλαντώσεις Alfvén	136
6.2 Καθολικές μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις	138
6.3 QPOs σε magnetars	141
6.4 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα	142
7 Διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις	
στην προσέγγιση Cowling	143
7.1 Εξισώσεις και αριθμητικές τεχνικές	144
7.2 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα	153
8 Σύνοψη	155
A' Εξισώσεις της Ενότητας 3.1	159
B' Απόδειξη της Σχέσης (5.6)	167

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω, από τα βάθη της καρδιάς μου, τον επιβλέποντα καθηγητή μου Κώστα Κόκκοτα, για όλα ό,σα έχει κάνει για μένα τα τελευταία δέκα χρόνια. Τού είμαι ευγνώμων για την ευκαιρία που μού έδωσε να εκπονήσω διδακτορική διατριβή σε ένα από τα πιο συναρπαστικά πεδία της σύγχρονης Αστροφυσικής. Η συμβολή του ήταν καθοριστική τόσο στην επιστημονική μου πρόοδο όσο και στην καλλιέργεια της προσωπικότητάς μου. Θα ήθελα, κατόπιν, να ευχαριστήσω τους στενούς μου συνεργάτες Νίκο Στεργιούλα, Αδαμάντιο Σταυρίδη, Hajime Sotani και Σίμο Κωνσταντινίδη για κάθε σκέψη, κάθε ιδέα, κάθε έμπνευση που μοιράστηκαν μαζί μου. Νοιώθω πολύ τυχερός που είχα την ευκαιρία να συνεργαστώ μαζί τους.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω όλα τα μέλη του Εργαστηρίου Αστρονομίας. Ιδιαίτερες ευχαριστίες οφείλω στα μέλη της τριμελούς συμβουλευτικής μου επιτροπής κ.κ. Λουκά Βλάχο και Δημήτριο Παπαδόπουλο, και στα μέλη της επταμελούς εξεταστικής μου επιτροπής κ.κ. Ιωάννη Σειραδάκη και Νικόλαο Σπύρου. Τους ευχαριστώ θερμά για την προσεχτική ανάγνωση του κειμένου της διδακτορικής διατριβής, για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους και για τη συμπαράστασή τους, υλική και ηθική, όλα αυτά τα χρόνια. Ευχαριστώ, επίσης, όλο το υπόλοιπο προσωπικό του Αστεροσκοπείο και, ιδιαίτερα, τους υπόλοιπους υποψήφιους διδάκτορες, τους συνοδοιπόρους μου σε αυτό το μακρύ και δύσκολο ταξίδι. Σε όλους εύχομαι καλή συνέχεια και καλή επιτυχία.

Τέλος, ευχαριστώ την οικογένειά μου και όλους τους φίλους μου για την πολύτιμη συμπαράσταση και την υπομονή τους καθώς χωρίς αυτές δε θα ήταν εφικτή η εκπόνηση της παρούσας διδακτορικής διατριβής. Τούς ζητώ συγγνώμη που δεν μπόρεσα να είμαι κοντά τους τόσο ό,σο θα ήθελα και ελπίζω να τους αποζημιώσω αφιερώνοντας σε αυτούς τη διδακτορική μου διατριβή.

Η διδακτορική αυτή διατριβή υποστηρίχθηκε οικονομικά κυρίως από το ερευνητικό πρόγραμμα “Ηράκλειτος” και μερικώς από το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών και από το ερευνητικό πρόγραμμα “Πυθαγόρας”. Υποστηρίχθηκε, επίσης, από τον Τομέα Θεωρητικής Αστροφυσικής του Πανεπιστημίου του Tübingen κατά τη διάρκεια δύο εξάμηνων επισκέψεών μου εκεί, μέσω του προγράμματος SFB / Tr7.

*Στην οικογένειά μου,
στους φίλους μου
και στην Ελευθερία.*

Πρόλογος

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε τη δυναμική περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων. Επικεντρωνόμαστε στην πιο διαδεδομένη κατηγορία τέτοιων σχετικιστικών αστέρων: στους αστέρες νετρονίων. Περιγράφουμε, αρχικά, τα χαρακτηριστικά τέτοιων αστέρων σε αδιατάραχτες καταστάσεις ισορροπίας. Περιγράφουμε, με άλλα λόγια, τη διαδικασία κατασκευής μοντέλων ισορροπίας αστέρων νετρονίων. Τα πιο απλά μοντέλα είναι τα στατικά, σφαιρικά μοντέλα. Σε αυτά προσθέτουμε σταδιακά επιπλέον φυσικά χαρακτηριστικά. Θεωρούμε, για παράδειγμα, αστέρες νετρονίων που περιστρέφονται (βραδέως ή / και ταχέως) ή θεωρούμε αστέρες νετρονίων εφοδιασμένους με μαγνητικά πεδία. Λαμβάνουμε, επίσης, υπόψη την πολύπλοκη εσωτερική δομή των αντικειμένων αυτών. Θεωρούμε μοντέρνες ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις για το εσωτερικό τους και δεν αγνοούμε την ύπαρξη στερεού φλοιού στα εξωτερικά στρώματά τους. Η περιγραφή όλων των μοντέλων γίνεται στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

Στη συνέχεια μελετάμε μικρές γραμμικές ταλαντώσεις τέτοιων αστέρων νετρονίων. Οι ταλαντώσεις αυτές χαρακτηρίζονται από πολλούς διαφορετικούς κανονικούς τρόπους ταλάντωσης (modes). Γενικά, όσο πιο σύνθετοι είναι οι αστέρες νετρονίων τόσο πιο πολλοί είναι και οι modes που χαρακτηρίζουν τις ταλαντώσεις τους. Υπολογίζονται οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοσυναρτήσεις για διάφορους modes, σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό και σε μη - περιστρεφόμενους μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Από το πλούσιο φάσμα ιδιοσυχνοτήτων τέτοιων αστέρων ζεχωρίζουμε τους modes του στερεού φλοιού και επικεντρωνόμαστε σε αυτούς. Στο τέλος περιγράφουμε την προσπάθειά μας για υπολογισμό modes σε ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων.

Η μελέτη αυτή έχει πολλούς και διάφορους στόχους. Πρώτα από όλα προσπαθεί να εξηγήσει διάφορες ανεξήγητες αστρονομικές παρατηρήσεις. Για παράδειγμα έχει στόχο να συμβάλει στην ερμηνεία παρατηρούμενων QPOs (Quasi - Periodic Oscillations) σε SGRs (Soft Gamma - ray Repeaters). Έπειτα, προσπαθεί να συνεισφέρει στην παγκόσμια προσπάθεια για ανίχνευση βαρυτικών κυμάτων καθώς γνωρίζουμε ότι παλλόμενοι αστέρες νετρονίων είναι πιθανές πηγές τέτοιων κυμάτων. Τέλος, σε αστέρες νετρονίων όπου επικρατούν ακραίες φυσικές συνθήκες δοκιμάζονται όλες οι σύγχρονες φυσικές θεωρίες μας: οι βαρυτικές θεωρίες μας, οι θεωρίες μας για την κατάσταση της ύλης σε υπερ - πυρηνικές πυκνότητες κ.ά.

Όπως προαναφέραμε, καταρχάς παρουσιάζουμε τον τρόπο κατασκευής ρεαλιστικών μοντέλων αστέρων νετρονίων. Αυτό γίνεται στο Κεφάλαιο 2 της διατριβής. Παρουσιάζουμε τον τρόπο κατασκευής στατικών, σφαιρικών αστέρων νετρονίων, βραδέως ή / και ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων και μαγνητισμένων αστέρων νετρονίων. Μας ενδιαφέρουν, ιδιαίτερα, αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Αποδεικνύεται ότι η παρουσία του στερεού φλοιού δεν επηρεάζει ούτε τις εξισώσεις ισορροπίας του ρευστού αλλά ούτε και τις γενικές ιδιότητες των αστρικών μοντέλων (μάζες, ακτίνες κ.τ.λ.).

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε γραμμικές ταλαντώσεις (μικρές διαταραχές) τέτοιων αστέρων. Στις περισσότερες περιπτώσεις υιοθετούμε την προσέγγιση Cowling δηλαδή ενδιαφερόμαστε μόνο για τις διαταραχές του αστρικού ρευστού και αγνοούμε τις διαταραχές του ίδιου του χωρόχρονου. Σε μία μόνο περίπτωση ακολουθούμε την αντίστροφη διαδικασία και αυτό γίνεται όταν μελετάμε τους w-modes ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων όπου αγνοούμε τις διαταραχές του αστρικού ρευστού και εξετάζουμε μόνο τις διαταραχές του χωρόχρονου.

Στα Κεφάλαια 4, 5 και 6 παρουσιάζουμε τα αριθμητικά μας αποτελέσματα. Στο πρώτο από αυτά, εξοικειώνουμε τον αναγνώστη με τις ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους μη - μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Στο δεύτερο υπολογίζουμε τις επιδράσεις της αστρικής περιστροφής πάνω στους διάφορους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης του στερεού φλοιού και συγχρίνουμε τα αποτελέσματά μας με προϋπάρχοντα Νευτώνεια αποτελέσματα. Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε ταλαντώσεις σε

μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό και επιχειρούμε συσχέτιση των αποτελεσμάτων μας με πρόσφατα αποτελέσματα για QPOs σε SGRs.

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζουμε κάποια αποτελέσματα από διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις. Οι διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις απαιτούνται για τη μελέτη ταλαντώσεων σε ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Ωστόσο, για τέτοιους αστέρες οι προσομοιώσεις αυτές παρουσιάζουν αριθμητικές αστάθειες. Για αυτόν τον λόγο περιοριζόμαστε σε διδιάστατες προσομοιώσεις μόνο μη - περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων για τις οποίες εξάγουμε αξιόπιστα αποτελέσματα.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

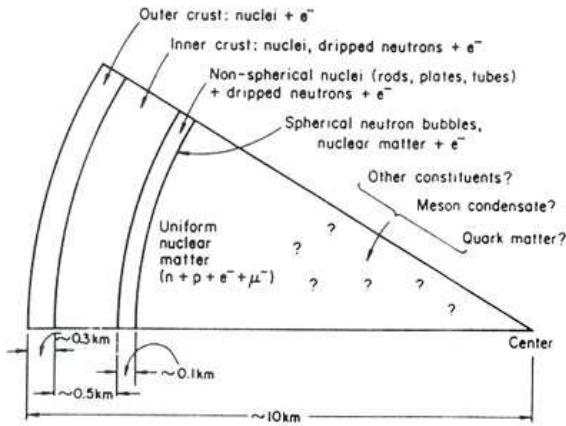
Η παρούσα διατριβή έχει ως κεντρικό ερευνητικό αντικείμενο τους περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες. Πιο συγκεκριμένα, επιχειρεί να δώσει απάντηση σε διάφορα ερωτήματα γύρω από τις ταλαντώσεις περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων και, γενικά, προσπαθεί να περιγράψει τη δυναμική τέτοιων αντικειμένων.

Σχετικιστικούς αποκαλούμε τους αστέρες που έχουν μεγάλες μάζες M και μικρές ακτίνες R , τέτοιες ώστε $GM/Rc^2 > 10^{-2}$ όπου G είναι η παγκόσμια σταθερή της βαρύτητας και c είναι η σταθερή ταχύτητα του φωτός. Για παράδειγμα οι αστέρες νετρονίων (neutron stars) έχουν μάζες συγκρίσιμες με τη μάζα του Ήλιου, $M \sim M_{\odot}$, ακτίνες μερικές δεκάδες χιλιόμετρα, $R \sim 10$ km, και υπερ - πυρηνικές κεντρικές πυκνότητες, $\rho \sim 10^{15}$ gr/cm³ οπότε γι' αυτούς $GM/Rc^2 \simeq 0.2$ (βλέπε π.χ. Shapiro & Teukolsky 1983, Σπύρου 1995, Glendenning 1997, [104, 105, 106]). Οι αστέρες αυτοί περιγράφονται ορθότερα στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας (ΓΤΣ) αν και Νευτώνεις προσεγγίσεις πολλές φορές αποδεικνύονται ικανοποιητικά ακριβείς. Συνήθως ως σχετικιστικοί αστέρες εννοούνται οι αστέρες νετρονίων αλλά ακόμη και οι λευκοί νάνοι (white dwarfs) θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως σχετικιστικοί. Υπάρχουν βεβαίως και άλλου είδους σχετικιστικοί αστέρες με ισχυρά βαρυτικά πεδία. Τέτοιοι είναι για παράδειγμα οι αστέρες quark (quark stars) ή οι υβριδικοί αστέρες (hybrid stars) (βλέπε π.χ. [104, 105, 106]). Οι αστέρες νετρονίων, ωστόσο, αποτελούν το “τυπικό μοντέλο” σχετικιστικών αστέρων στη σύγχρονη Αστροφυσική και με αυτούς, κατά κύριο λόγο, θα ασχοληθούμε στη συνέχεια.

Όταν αναφερόμαστε, πάντως, σε αστέρες νετρονίων, δεν αναφερόμαστε μόνο στις συνθήκες ισορροπίας και στη δυναμική του αστρικού ρευστού. Στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, κάθε μορφή ύλης - ενέργειας επηρεάζει τη γεωμετρία του τετραδιάστατου χωρόχρονου και, αντίστροφα, η γεωμετρία του χωρόχρονου καθορίζει τις κινήσεις της ύλης - ενέργειας. Με αυτήν τη λογική, οι αστέρες νετρονίων είναι φυσικά συστήματα στα οποία η υλοενέργεια και η γεωμετρία του χωρόχρονου αλληλοεξαρτώνται και αλληλοεπηρεάζονται. Για παράδειγμα, η ΓΘΣ προβλέπει ότι κινήσεις στο εσωτερικό αστέρων νετρονίων (π.χ. ταλαντώσεις τους) προκαλούν διαταραχές στη γεωμετρία του χωρόχρονου και αυτές οι διαταραχές διαδίδονται με τη μορφή χυμάτων και με την ταχύτητα του φωτός μακριά από την πηγή τους. Αυτές οι διαδιδόμενες διαταραχές είναι τα λεγόμενα βαρυτικά κύματα και μεταφέρουν πολύτιμες πληροφορίες για τις πηγές από τις οποίες προήλθαν, δηλαδή για το εσωτερικό των αστέρων νετρονίων, για τα διπλά συστήματα μελανών οπών κ.ά. (βλέπε π.χ. Misner, Thorne & Wheeler 1973, [101]).

Το βασικό μειονέκτημα των βαρυτικών χυμάτων είναι η ασθενής αλληλεπίδρασή τους με την ύλη και, κατά συνέπεια, η δυσκολία ανίχνευσής τους. Ακόμη και βίαιες, καταστροφικές βαρυτικές διεργασίες (όπως π.χ. η βαρυτική κατάρρευση αστέρων ή η συγχώνευση μελανών οπών) παράγουν βαρυτικά κύματα που είναι δύσκολο ως αδύνατο να ανιχνευθούν. Η βαρυτική ακτινοβολία που φτάνει στη Γη είναι εξαιρετικά ασθενής και, συνήθως, χάνεται μέσα στον περιβάλλοντα θόρυβο των οργάνων παρατήρησης. Η προσπάθειά μας να ανιχνεύσουμε βαρυτικά κύματα θα διευκολύνονταν αν γνωρίζαμε τη μορφή που θα έπρεπε να έχουν τα βαρυτικά αυτά κύματα. Υπάρχουν ειδικές, εξελιγμένες τεχνικές (π.χ. οι τεχνικές matched filtering) που μπορούν να ανιχνεύσουν ένα σήμα χρυμμένο μέσα σε θόρυβο, όταν η μορφή του αναμενόμενου σήματος είναι λίγο - πολύ γνωστή (βλέπε π.χ. Jaradowski & Królak 2005, [98]).

Επομένως, το αντικείμενο της θεωρητικής μελέτης των πηγών βαρυτικής ακτινοβολίας είναι η ακριβέστερη κατά το δυνατό πρόβλεψη της μορφής των εκπεμπόμενων βαρυτικών χυμάτων από τις διάφορες πηγές. Η ανίχνευση των βαρυτικών χυμάτων αποτελεί πρόκληση για την τεχνολογία της εποχής μας αλλά και ένα νέο “παράθυρο” μελέτης του Σύμπαντος. Η ανίχνευση αυτή καθίσταται δυνατή μόνο εφόσον υπάρξουν



Σχήμα 1.1: Εσωτερική δομή ρεαλιστικών μοντέλων αστέρων νετρονίων.

αξιόπιστα θεωρητικά μοντέλα που περιγράφουν τον τρόπο δημιουργίας των βαρυτικών κυμάτων. Επιπλέον, αν τα βαρυτικά κύματα ανιχνευθούν και αναλυθούν, θα μπορούν να δώσουν πολύτιμες πληροφορίες για τις πηγές από τις οποίες εκπέμφθηκαν. Θα μπορούν, για παράδειγμα, να μας εξηγήσουν τι συμβαίνει στο υπέρπυκνο εσωτερικό των αστέρων νετρονίων, πώς ακριβώς συγχωνεύονται τα διπλά συστήματα μελανών οπών, πώς “γεννιούνται” οι αστέρες νετρονίων, πώς εξελίσσονται, πώς καταρρέουν στα τελευταία στάδια της ζωής τους κ.ά.

Στην παρούσα εργασία, λοιπόν, προσπαθούμε να μελετήσουμε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, δηλαδή αστέρες νετρονίων με εσωτερική δομή, με στερεό φλοιό, με μαγνητικά πεδία, περιστρεφόμενους με μεγάλες ταχύτητες κ.ά. Φυσικά, η πλήρης περιγραφή που θα περιλάμβανε όλες τις επιμέρους ιδιότητές τους θα ήταν πολύ δύσκολο να καλυφθεί στα πλαίσια μιας διατριβής. Για αυτό και χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις· για παράδειγμα μελετάμε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό αλλά βραδέως περιστρεφόμενους. Ή, μελετάμε ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων αλλά χωρίς στερεό φλοιό. Οι επιδράσεις της περιστροφής μελετούνται πάντα ξεχωριστά από τις επιδράσεις των μαγνητικών πεδίων. Σε ρεαλιστικά μοντέλα μη - περιστρεφόμενων μη - μαγνητισμένων αστέρων νετρονίων, θεωρούμε, συνήθως, έναν κεντρικό ρευστό πυρήνα ακτίνας αρκετών χιλιομέτρων, που περιβάλλεται από έναν, πολύ λεπτότερο, εξωτερικό στερεό φλοιό πάχους $\simeq 1 \text{ km}$ (βλέπε και Σχήμα 1.1).

Οι αστέρες νετρονίων, όπως όλα τα φυσικά συστήματα, όταν διαταράσσονται και απομακρύνονται από τη θέση ισορροπίας τους, αντιδρούν, προσπαθούν να επανέλθουν σε αυτήν και εν τέλει πάλλονται με συγκεκριμένους τρόπους. Αυτοί οι συγκεκριμένοι τρόποι, οι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (normal ή quasi - normal modes of oscillation ή απλά modes), έχουν ιδιαίτερη αστροφυσική σημασία. Η κατάταξή τους γίνεται ανάλογα με το ποιές είναι, κάθε φορά, οι κυρίαρχες δυνάμεις που προσπαθούν να επαναφέρουν τους αστέρες στην αρχική κατάσταση ισορροπίας τους. Σε αστέρες νετρονίων που θεωρούμε ότι αποτελούνται από ρευστό, οι δυνάμεις επαναφοράς μπορούν να προέρχονται από πιέσεις οπότε λέμε ότι οι αστέρες πάλλονται με τις ιδιοσυχνότητες και με τις ιδιοσυναρτήσεις των p-modes (pressure modes). Όλοι οι αστέρες νετρονίων πάλλονται και με έναν βασικό, θεμελιώδη τρόπο, τον f-mode (fundamental mode) ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο μέλος του συνόλου των p-modes. Οι δυνάμεις επαναφοράς μπορούν να είναι επίσης δυνάμεις βαρύτητας οπότε κατατάσσουμε αυτού του είδους τις ταλαντώσεις ως g-modes (gravity modes) (βλέπε π.χ. Unno et al. 1979, [103]). Στις επόμενες παραγράφους περιγράφουμε αναλυτικότερα τις διάφορες “οικογένειες” (τα διάφορα σύνολα) modes που συναντώνται σε αστέρες νετρονίων.

Όπως είπαμε και προηγουμένως, στους αστέρες νετρονίων, δυναμική έχει τόσο το αστρικό ρευστό όσο και ο χωρόχρονος (μέσα στον οποίο υπάρχει αυτό το ρευστό). Όπως, λοιπόν, το αστρικό ρευστό μπορεί και πάλλεται, το ίδιο μπορεί να κάνει και ο χωρόχρονος. Έχει, δηλαδή, κι αυτός τους δικούς του τρόπους ταλάντωσης, τους δικούς του modes. Μάλιστα, οι ταλαντώσεις του αστρικού ρευστού είναι άρρηκτα συνδεδεμένες (είναι συζευγμένες) με τις ταλαντώσεις του χωρόχρονου. Οι ίδιοι τρόποι ταλάντωσης του χωρόχρονου ονομάζονται w-modes (wave modes) (Kokkotas & Schutz 1992, [94]).

Οι ταλαντώσεις των αστέρων νετρονίων με στερεό φλοιό χαρακτηρίζονται από τους ρευστούς fundamental (f-), pressure (p-) και gravity (g-) modes, αλλά και από νέους modes που οφείλονται αποκλειστικά και μόνο στον στερεό φλοιό, δηλαδή από τους interfacial (i-), από τους shear (s-) και από τους torsional (t-) modes (βλέπε π.χ. McDermott, Van Horn & Hansen 1988, [2]). Οι i- και οι s-modes είναι modes σφαιροειδούς τύπου όπως είναι άλλωστε και οι f-, p- και g-modes, ενώ οι t-modes είναι

modes τοροειδούς τύπου (ο σφαιροειδής και ο τοροειδής τύπος ταλαντώσεων ορίζονται λίγο παρακάτω). Οι s- και οι t-modes είναι, ουσιαστικά, η ίδια μορφή κυμάτων, εγκάρσια κύματα του στερεού φλοιού, ενώ οι i-modes, από την άλλη, οφείλουν την ύπαρξή τους στη διεπιφάνεια (interface) του ρευστού πυρήνα με τον στερεό φλοιό.

Οι διάφοροι κανονικοί τρόποι ταλάντωσης (modes) είναι ουσιαστικά διαδιδόμενες διαταραχές. Για παράδειγμα, ο f-mode συνίσταται σε διαταραχές της πυκνότητας, $\delta\rho$, της πίεσης, δp , και των συνιστώσων της ταχύτητας, δu^i , που διαδίδονται με συγκεκριμένο τρόπο (συγκεκριμένο τρόπο ως προς την ακτινική διεύθυνση r , τις γωνιακές διευθύνσεις θ και ϕ και ως προς το χρόνο t). Η γραμμική διαταραχή ενός οποιουδήποτε βαθμωτού μεγέθους, π.χ. της πυκνότητας, σε έναν σφαιρικό αστέρα, μπορεί να γραφεί με τη βοήθεια των γνωστών βαθμωτών σφαιρικών αρμονικών, $Y_{\ell m}$, ως εξής:

$$\delta\rho(t, r, \theta, \phi) = \delta\rho(r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{i\sigma t}. \quad (1.1)$$

Ξέρουμε ότι για τις σφαιρικές αρμονικές ισχύει (βλέπε π.χ. Jackson 1962, [99]):

$$Y_{\ell m}(\pi - \theta, \pi + \phi) = (-1)^\ell Y_{\ell m}(\theta, \phi). \quad (1.2)$$

Ο μετασχηματισμός αυτός, από $x := (\theta, \phi)$ σε $-x := (\pi - \theta, \pi + \phi)$, είναι ουσιαστικά ένας μετασχηματισμός στροφής πάνω σε μια σφαίρα και ονομάζεται μετασχηματισμός parity. Όταν για μια συνάρτηση P είναι $P(-x) = (-1)^\ell P(x)$ λέμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει άρτια (even) parity. Όμοια, όταν για μια συνάρτηση A είναι $A(-x) = (-1)^{\ell+1} A(x)$ λέμε ότι η συνάρτηση αυτή έχει περιττή (odd) parity. Όλα τα βαθμωτά μεγέθη (άρα και όλες οι βαθμωτές διαταραχές όπως η $\delta\rho$) αναπτύσσονται με τη βοήθεια των βαθμωτών σφαιρικών αρμονικών και επομένως έχουν άρτια parity.

Οι διαταραχές διανυσματικών ή τανυστικών μεγεθών, από την άλλη, μπορούν να εχφραστούν με τη βοήθεια γενικότερων, διανυσματικών ή τανυστικών αρμονικών (vector ή tensor harmonics), αντίστοιχα (βλέπε π.χ. [99]). Αυτές μπορούν να είναι είτε άρτιας parity είτε περιττής parity. Για παράδειγμα, η γραμμική διαταραχή της ταχύτητας, σε έναν σφαιρικό αστέρα, μπορεί να γραφεί ως ένα άθροισμα διαταραχών άρτιας parity:

$$\delta u^i(t, r, \theta, \phi) = \left[S(r), H(r) \frac{\partial}{\partial\theta}, H(r) \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\phi} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{i\sigma t}, \quad (1.3)$$

και διαταραχών parity:

$$\delta u^i(t, r, \theta, \phi) = \left[0, T(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, -T(r) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_{\ell m}(\theta, \phi) e^{i\sigma t}. \quad (1.4)$$

Αν όλες οι διαταραχές που περιγράφουν έναν mode έχουν άρτια parity τότε ο mode αυτός χαρακτηρίζεται ως σφαιροειδής ή mode άρτιας parity. Αντίστοιχα, αν όλες οι διαταραχές που περιγράφουν έναν mode έχουν περιττή parity τότε ο mode αυτός χαρακτηρίζεται ως τοροειδής ή mode περιττής parity. Παραδείγματος χάρη, ο f-mode περιγράφεται από διαταραχές της πυκνότητας και της πίεσης της μορφής (1.1) και από διαταραχές της ταχύτητας της μορφής (1.3) (οπότε είναι σφαιροειδής) ενώ κάθε t-mode περιγράφεται από διαταραχές της ταχύτητας της μορφής (1.4) (οπότε είναι τοροειδής).

Φυσικά, οι αστέρες νετρονίων μπορούν να περιστρέφονται, αργά ή γρήγορα, ανάλογα με το στάδιο αστρικής εξέλιξης στο οποίο βρίσκονται. Εικάζεται ότι οι θερμοί πρωτο - αστέρες νετρονίων (proto - neutron stars), περιστρέφονται πάρα πολύ γρήγορα, με συχνότητες αρκετών εκατοντάδων ή και χιλιάδων Hz, και σταδιακά, καθώς ακτινοβολούν ενέργεια και ψύχονται, επιβραδύνονται σε μικρότερες συχνότητες, μερικών Hz ως μερικών εκατοντάδων mHz (βλέπε π.χ. [104, 105, 106]). Το πότε ακριβώς σχηματίζεται στερεός φλοιούς, σε έναν ψυχόμενο και επιβραδυόμενο πρωτο - αστέρα νετρονίων, δεν είναι απολύτως γνωστό· γενικά, όμως, εκτιμάται ότι η ψύξη είναι μια πολύ γρήγορη και αποτελεσματική διαδικασία που διαρκεί λίγες μόνο ώρες, σε αντίθεση με την επιβράδυνση της περιστροφής που είναι μια μακρόχρονη, και σίγουρα πιο αργή, διαδικασία που διαρκεί από μερικές χιλιάδες ως μερικά εκατομμύρια χρόνια. Υπάρχουν, λοιπόν, νέοι, ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων, με στερεό φλοιού, και με συχνότητες από μερικές δεκάδες ως και μερικές εκατοντάδες Hz. Στους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων εμφανίζονται νέες δυνάμεις επαναφοράς, π.χ. η δύναμη Coriolis. Αυτόματα εμφανίζονται και νέες “οικογένειες” modes, π.χ. οι rotational modes (r-modes) (Papaloizou & Pringle 1978, [93]).

Τα μαγνητικά πεδία των αστέρων νετρονίων θεωρούνται συνήθως διπολικά, με εντάσεις $10^{11} - 10^{13}$ Gauss για συνηθισμένους αστέρες νετρονίων - pulsars ή εντάσεις μεγαλύτερες από $10^{14} - 10^{15}$ Gauss για ισχυρά μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων - magnetars. Τα ισχυρά αυτά μαγνητικά πεδία θεωρείται ότι σχηματίζονται κατά τα

στάδια της α- στρικής κατάρρευσης: αστέρες με τυπικά μαγνητικά πεδία, καταρρέουν και μειώνουν τον όγκο τους και την επιφάνειά τους κατά αρκετές τάξεις μεγέθους. Ωστόσο, η συνολική μαγνητική ροή στην επιφάνεια ενός αστέρα πρέπει να διατηρείται. Αυτό σημαίνει ισχυρότερα μαγνητικά πεδία κατανεμημένα σε μικρότερες σφαιρικές επιφάνειες. Σε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων, μπορούν να υπάρξουν κι άλλοι modes στους οποίους οι δυνάμεις επαναφοράς είναι μαγνητικές δυνάμεις. Οι modes αυτοί ονομάζονται Alfvén modes και διαδίδονται με την ομώνυμη ταχύτητα (ταχύτητα Alfvén, $v_A^2 = B^2/4\pi\rho$, βλέπε π.χ. Jackson 1962, Βλάχος 2000, [99, 107]).

Ας δούμε, λοιπόν, συγκεντρωτικά ποιές “οικογένειες” κανονικών τρόπων ταλάντωσης (modes) μπορούμε να συναντήσουμε σε αστέρες νετρονίων. Σε μη - περιστρεφόμενους μη - μαγνητισμένους ρευστούς αστέρες νετρονίων μπορούμε να συναντήσουμε (βλέπε π.χ. Unno et al. 1979, [103]):

- τους fundamental, f-modes (ℓf): είναι σφαιροειδείς modes με ιδιοσυχνότητες λίγων kHz. Οι ιδιοσυχνότητές τους είναι ανάλογες της μέσης πυκνότητας των αστέρων, $\sigma_f \sim \sqrt{M/R^3}$.
- τους pressure, p-modes (ℓp_n): είναι, επίσης, modes σφαιροειδούς τύπου, με ιδιοσυχνότητες μερικών kHz και (χυρίως) ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις. Οι $n = 0$ modes αυτής της οικογένειας είναι ουσιαστικά οι f-modes ενώ οι p-modes έχουν $n = 1 \dots \infty$. Οι ανώτεροι αρμονικοί p-modes έχουν και υψηλότερες συχνότητες, $\sigma_{p_n} > \sigma_f \sim c_s$ όπου c_s είναι η ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων.
- τους gravity, g-modes (ℓg_n): είναι, και αυτοί, σφαιροειδείς modes που εμφανίζονται σε θερμούς αστέρες. Έχουν χαμηλές ιδιοσυχνότητες από μερικά Hz ως και μερικές εκατοντάδες Hz.

Αν θεωρήσουμε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό, έχουμε επιπλέον “οικογένειες” (βλέπε π.χ. McDermott, Van Horn & Hansen 1988, [2]):

- τους interfacial, i-modes (ℓi): είναι σφαιροειδείς modes με πολύ χαμηλές ιδιοσυχνότητες μερικών δεκάδων Hz. Εκτελούν (χυρίως) εγκάρσιες κινήσεις στην περιοχή του στερεού φλοιού. Σχετίζονται με διεπιφάνειες (interfaces) όπως αυτή

του ρευστού πυρήνα με τον στερεό φλοιό (ή αυτή του στερεού φλοιού με έναν ρευστό ωκεανό, λιωμένου υλικού από τον στερεό φλοιό, που πιθανώς υπάρχει πάνω απ' αυτόν).

- τους shear, s-modes (ℓs_n): είναι επίσης σφαιροειδείς modes με ιδιοσυναρτήσεις παρόμοιες με αυτές των i-modes αλλά ιδιοσυχνότητες πολύ μεγαλύτερες ($\sigma_s \gtrsim 500 \text{ Hz} \sim v_s$). Είναι εγκάρσια κύματα που διαδίδονται στον στερεό φλοιό με ταχύτητες, v_s , ίσες περίπου με 1000 km/sec .
- τους torsional, t-modes (ℓt_n): είναι modes τοροειδούς τύπου με ιδιοσυναρτήσεις αυστηρά περιορισμένες στον στερεό φλοιό. Οι θεμελιώδεις t-modes, ℓt_0 , έχουν χαμηλές ιδιοσυχνότητες, $30 - 100 \text{ Hz}$. Οι ανώτεροι ακτινικοί αρμονικοί t-modes έχουν πολύ υψηλότερες ιδιοσυχνότητες, παραπλήσιες με εκείνες των s-modes.

Ο χωρόχρονος έχει τη δική του “οικογένεια” κανονικών τρόπων ταλαντωσης (Kokkotas & Schutz 1992, [94]). Οι ταλαντώσεις του χαρακτηρίζονται από:

- τους wave, w-modes (ℓw_n): μπορούν να είναι είτε σφαιροειδείς είτε τοροειδείς και έχουν αρκετά υψηλές ιδιοσυχνότητες, $\sigma_w > 5 \text{ kHz}$.

Σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, εμφανίζεται μία ακόμη “οικογένεια” modes (Papaloizou & Pringle 1978, [93]). Εκεί έχουμε:

- τους rotational, r-modes (ℓr_n): είναι modes τοροειδούς τύπου, η δύναμη επαναφοράς για αυτούς είναι η δύναμη Coriolis και οι ιδιοσυχνότητές τους είναι ανάλογες της περιστροφικής συχνότητας των αστέρων, $\sigma_r \sim \Omega$.

Τέλος, σε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων συναντούμε (βλέπε π.χ. Jackson 1962, Βλάχος 2000, [99, 107]):

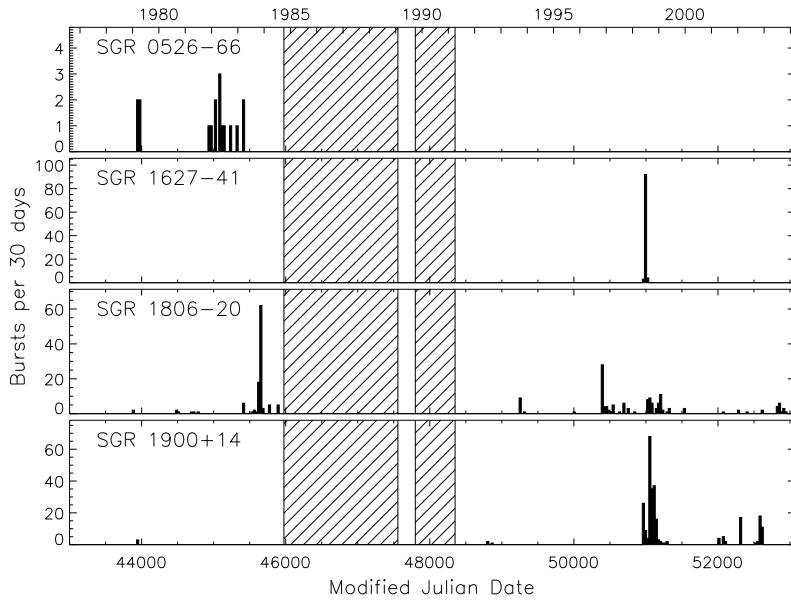
- τους Alfvén, a-modes (ℓa_n): αυτοί μπορούν να είναι σφαιροειδείς ή τοροειδείς, διαδίδονται με τις χαρακτηριστικές ταχύτητες Alfvén, v_A , και έχουν, εν γένει, πολύ μικρές ιδιοσυχνότητες. Οι ιδιοσυχνότητές τους είναι ανάλογες της έντασης του μαγνητικού πεδίου, $\sigma_A \sim v_A \sim B$. έτσι, για ισχυρά μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων, οι ιδιοσυχνότητες αυτών των modes είναι αρκετά υψηλότερες.

1.1 Ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους μη - μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό μελετήθηκαν τόσο στη Νευτώνεια Βαρυτική Θεωρία (βλέπε π.χ. Hansen & Cioffi 1980, McDermott, Van Horn & Hansen 1988, [1, 2]) όσο και στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας (βλέπε π.χ. Schumaker & Thorne 1983, Yoshida & Lee 2002, Samuelsson & Andersson 2007, [3, 4, 5]). Οι παραπάνω βασικές διερευνητικές μελέτες επεκτάθηκαν σταδιακά και συμπεριέλαβαν επιδράσεις της αστρικής περιστροφής (βλέπε π.χ. Strohmayer 1991, Lee & Strohmayer 1996, Vavoulidis et al. 2007, Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [6, 7, 8, 9]) και μαγνητικές επιδράσεις (βλέπε π.χ. Carroll et al. 1986, Duncan 1998, Messios, Papadopoulos & Stergioulas 2001, Piro 2005, Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [10, 11, 12, 13, 14]). Για λόγους που θα γίνουν κατανοητοί παρακάτω, οι περισσότερες από αυτές τις μελέτες επικεντρώθηκαν σε τοροειδείς torsional modes (που συμβολίζονται ως ℓt_n) και μόνο λίγες ασχολήθηκαν με σφαιροειδείς interfacial (ℓi) ή / και shear (ℓs_n) modes.

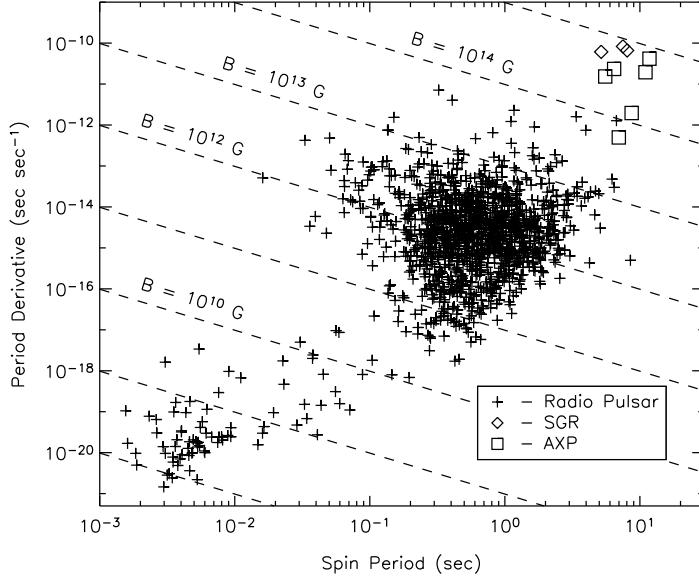
Αφορμή για τις παραπάνω μελέτες στάθηκαν οι ανακαλύψεις περιοδικοτήτων σε radio - pulsars στα τέλη της δεκαετίας του '70 και στις αρχές της δεκαετίας του '80 (βλέπε π.χ. Boriakoff 1976, Cordes 1976, Ferguson & Seiradakis 1978, [15, 16, 17]). Τον Μάρτιο του 1979 μια γιγαντιαία έκλαμψη ακτίνων γάμμα, που έλαβε χώρα στην αστρική πηγή SGR 0526-66, απετέλεσε αντικείμενο συστηματικής έρευνας. Στην ουρά τής καμπύλης φωτός της ανακαλύφθηκαν περιοδικότητες που δεν είχαν σαφή προέλευση (Barat et al. 1983, [18]). Τα επόμενα χρόνια διατυπώθηκαν διάφορες θεωρίες για την εξήγηση των ιδιοτήτων της έκλαμψης αυτής: ανάμεσα στις θεωρίες αυτές ήταν και η θεωρία των magnetars η οποία στηρίχθηκε εν μέρει σε ταλαντώσεις στερεού φλοιού ισχυρά μαγνητισμένων αστέρων νετρονίων (Duncan & Thompson 1992, Thompson & Duncan 1995, [19, 20]). Η παρατήρηση της ύπαρξης τόσο ισχυρών μαγνητικών πεδίων στα SGPs (Soft Gamma - ray Repeaters) (βλέπε π.χ. Kouveliotou et al. 1998, [22] επιβεβαίωσε και ουσιαστικά καινιέρωσε το μοντέλο των magnetars. Είκοσι περίπου χρόνια μετά από την πρώτη έκλαμψη του 1979, μία δεύτερη υπερ - ενεργητική

έκλαμψη τράβηξε την προσοχή των πειραματικών και των θεωρητικών αστροφυσικών· ήταν η έκλαμψη του Αυγούστου του 1998 από το SGR 1900+14. Ωστόσο, η πιο ενεργητική έκλαμψη ακτίνων γάμμα που καταγράφηκε μέχρι σήμερα συνέβη πρόσφατα, τον Δεκέμβριο του 2004 (SGR 1806-20). Μάλιστα, συνοδεύτηκε από ανακαλύψεις ημι-περιοδικών ταλαντώσεων (Quasi - Periodic Oscillations, QPOs) που αναθέρμαναν το θεωρητικό ενδιαφέρον για τις ταλαντώσεις στερεού φλοιού σε ισχυρά μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων (βλέπε π.χ. Israel et al. 2005, Strohmayer & Watts 2005, Watts & Strohmayer 2006, Strohmayer & Watts 2006, [23, 24, 25, 26]).



Σχήμα 1.2: Δραστηριότητα τεσσάρων επιβεβαιωμένων SGRs τα τελευταία τριάντα χρόνια. Σκιασμένες περιοχές υποδηλώνουν χρονιές κατά τις οποίες δεν υπήρχαν κατάλληλες ενεργές ανιχνευτικές διατάξεις. Βλέπε Woods & Thompson (2006) [21].

Το Σχήμα 1.2 δείχνει τη δραστηριότητα τεσσάρων επιβεβαιωμένων SGRs τα τελευταία τριάντα χρόνια. Σκιασμένες περιοχές υποδηλώνουν χρονιές κατά τις οποίες δεν υπήρχαν κατάλληλες ενεργές ανιχνευτικές διατάξεις. Στο σχήμα δεν συμπεριλαμβάνεται η μεγάλη έκλαμψη του SGR 1806-20 που συνέβη τον Δεκέμβριο του 2004. Στο Σχήμα 1.3, με διακεκομμένες γραμμές, δίνονται οι γεωμετρικοί τόποι σταθερής μαγνητικού πεδίου, όπως αυτή υπολογίζεται θεωρητικά για ακτινοβολία περιστρεφόμενου



Σχήμα 1.3: Μαγνητικά πεδία για radio - pulsars, Anomalous X - ray Pulsars (AXPs) και SGRs. Οι εντάσεις υπολογίζονται με βάση την αύξηση των περιόδων περιστροφής των αντικειμένων αυτών λόγω ακτινοβολίας μαγνητικού διπόλου $(B \propto \sqrt{P\dot{P}})$. Βλέπε Woods & Thompson (2006) [21].

μαγνητικού διπόλου. Στο ίδιο σχήμα έχουν τοποθετηθεί radio - pulsars, Anomalous X - ray Pulsars (AXPs) και SGRs των οποίων είναι γνωστή η περίοδος περιστροφής P και ο ρυθμός αύξησής της, \dot{P} . Οι περισσότεροι radio - pulsars έχουν ισχυρά μαγνητικά πεδία, $B \simeq 10^{11} - 10^{13}$ Gauss, αλλά τα μαγνητικά πεδία των SGRs είναι πάρα πολύ ισχυρότερα, $B \simeq 10^{15}$ Gauss.

1.1.1 Περιοδικότητες σε radio - pulsars

Οι ανακαλύψεις περιοδικοτήτων σε radio - pulsars, στα τέλη της δεκαετίας του '70 και στις αρχές της δεκαετίας του '80, ανέδειξαν, ως ενδιαφέρον θέμα προς διερεύνηση, τις ταλαντώσεις στο εσωτερικό αστέρων νετρονίων και, ιδιαίτερα, τις ταλαντώσεις του στερεού φλοιού τους. Για παράδειγμα, οι Boriakoff (1976), Cordes (1976) και Ferguson & Seiradakis (1978) [15, 16, 17] ανακάλυψαν περιοδικότητες στη μικροδομή των παλμών (pulse microstructure), στους pulsars PSR 2016+28 και PSR 1133+16, με περιόδους

$P_\mu \simeq 1$ msec. Σε αρκετούς pulsars ανακαλύφθηκαν επιπλέον σήματα: υποπαλμοί (subpulses) με περιόδους $P_2 \simeq 10 - 50$ msec και μετακινήσεις των υποπαλμών (subpulse drifts) με περιόδους $P_3 \simeq 2 - 20P_1$ (όπου P_1 είναι οι περίοδοι περιστροφής των pulsars) (βλέπε και Manchester & Taylor 1977, [102]).

Ο Van Horn (1980) [27] υποστήριξε ότι πολλές από αυτές τις περιοδικότητες θα μπορούσαν να οφείλονται σε ταλαντώσεις αστέρων νετρονίων. Μάλιστα ξεχώρισε, ως πιο ενδιαφέροντες, τους $\ell = 0$ και 1 p-modes, καθώς για αυτούς υπολόγισε ιδιοπεριόδους $P \lesssim 0.1 - 1$ msec, και τους ύφεμελιώδεις torsional modes, για τους οποίους υπολόγισε ιδιοπεριόδους $P \simeq 20$ msec. Συνέδεσε τους πρώτους με τις παρατηρούμενες περιοδικότητες των μικροπαλμών και τους δεύτερους με αυτές των υποπαλμών. Πρότεινε, επίσης, εξηγήσεις για τις μετακινήσεις των υποπαλμών και για άλλα παρατηρούμενα φαινόμενα, χρησιμοποιώντας την αστρική περιστροφή και ερμηνεύοντας τις επιδράσεις, που αυτή έχει, πάνω στους p- και στους t-modes αστέρων νετρονίων.

Λίγο αργότερα, οι Hansen & Cioffi (1980) [1], ωθούμενοι από τις προτάσεις του Van Horn (1980) [27], εστίασαν την προσοχή τους στις torsional ταλαντώσεις στερεού φλοιού αστέρων νετρονίων και πρότειναν τους προσεγγιστικούς τύπους:

$$\ell P_0 \simeq \frac{2\pi [\ell(\ell+1)]^{-1/2} R}{v_s} \simeq 60 [\ell(\ell+1)]^{-1/2} \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right) \text{ msec}, \quad (1.5\alpha')$$

$$\ell P_n \simeq \frac{2n^{-1} \Delta r}{v_s} \simeq 2n^{-1} \left(\frac{\Delta r}{1 \text{ km}} \right) \text{ msec}, \quad (1.5\beta')$$

για τις ιδιοπεριόδους των ύφεμελιωδών ($n = 0$) και των ανωτέρων ακτινικών αρμονικών ($n \geq 1$) torsional modes. Στις παραπάνω σχέσεις R και Δr είναι η αστρική ακτίνα και το πάχος του στερεού φλοιού σε χιλιόμετρα και v_s είναι η, σχεδόν σταθερή, ταχύτητα των shear κυμάτων στον στερεό φλοιό ($v_s \simeq 10^3$ km/sec). Για ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, οι παραπάνω τύποι δίνουν $\ell P_0 \lesssim 20$ msec και $\ell P_n \lesssim 2$ msec. Τα αποτελέσματα αυτά επαλήθευσαν αργότερα οι McDermott, Van Horn & Hansen (1988) [2] σε μια πιο ολοκληρωμένη μελέτη ταλαντώσεων ρεαλιστικών μοντέλων αστέρων νετρονίων.

Η επίδραση της αστρικής περιστροφής ελήφθη υπόψη πρώτα από τον Strohmayer (1991) [6] και στη συνέχεια από τους Lee & Strohmayer (1996) [7]. Ήδη, ο Van Horn

(1980) [27] είχε προτείνει ότι ο περιστροφικός διαχωρισμός modes του στερεού φλοιού, με διαφορετικό αρμονικό δείκτη m , θα μπορούσε να ευθύνεται για τις παρατηρούμενες μετακίνησεις των υποπαλμών σε pulsars. Ωστόσο, το ενδιαφέρον των Strohmayer (1991) [6] και Lee & Strohmayer (1996) [7] εστιάστηκε άλλού. Εστιάστηκε στους μηχανισμούς απόσβεσης των torsional modes στερεού φλοιού και στις μη - επιτρεπτές διασταυρώσεις (avoided crossings) μεταξύ των διαφόρων modes. Μετά από μια προσεχτική ανάλυση, ο Strohmayer (1991) [6] κατέληξε στον εξής τύπο για τις περιστροφικές διορθώσεις, σ_1 , των ιδιοσυχνοτήτων, σ_0 , των torsional modes:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \sigma_0 + \frac{m}{\ell(\ell+1)}\Omega, \quad (1.6)$$

δηλαδή $\sigma_1 = m\Omega / [\ell(\ell+1)]$, όπου Ω είναι η αστρική περιστροφική συχνότητα.

Οι μαγνητικές επιδράσεις μελετήθηκαν λίγα χρόνια νωρίτερα (Carroll et al. 1986, [10]) με ένα απλουστευμένο αστρικό μοντέλο κυλινδρικής συμμετρίας. Μελετήθηκαν modes που εντοπίζονται κυρίως στον στερεό φλοιό και στον ρευστό ωκεανό: t-, s- και i-modes, τοροειδείς (Alfvén) α -modes και σφαιροειδείς (magneto / gravity) m/g-modes. Βρέθηκε ότι, ένα ομογενές κάθετο μαγνητικό πεδίο B_0 επηρεάζει περισσότερο τους i-, α - και g-modes: οι g-modes, υπάρχουν μόνο στο μη - μαγνητικό όριο, $B_0 = 0$, και γίνονται m/g-modes όταν $B_0 \neq 0$ ενώ οι ιδιοπερίοδοί τους μειώνονται όταν αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου, $P_{\text{m/g}} \sim B_0^{-1}$. Παρόμοια βρέθηκε να επηρεάζονται και οι i- και α -modes ($P \sim B_0^{-1}$). Οι α -modes είναι modes ίδιας προέλευσης με τους m/g-modes, όπως ακριβώς είναι οι t-modes με τους s-modes.

Στο μεταξύ, οι Schumaker & Thorne (1983) [3] περιέγραψαν τις torsional ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Ως τότε, οι σχετικιστικές επιδράσεις υπολογίζονται χονδρικά: τα Νευτώνεια αποτελέσματα διορθώνονται, συνήθως, με τη βοήθεια ενός κατάλληλου παράγοντα M/R . Εκτίμησαν, επίσης, τη βαρυτική ακτινοβολία που θα εκπέμπονταν από τις τετραπολικές ($\ell = 2$) ταλαντώσεις αυτής της μορφής:

$$h \simeq 6 \left(\frac{GM_{\text{cr}}}{rc^2} \right) \left(\frac{v_s}{c} \right)^3 \beta \simeq 10^{-28} \left(\frac{10 \text{ kpc}}{r} \right) \left(\frac{\beta}{10^{-3}} \right). \quad (1.7)$$

h είναι το πλάτος του βαρυτικού κύματος, $M_{\text{cr}} \simeq 0.1M_{\odot}$ είναι η μάζα του στερεού

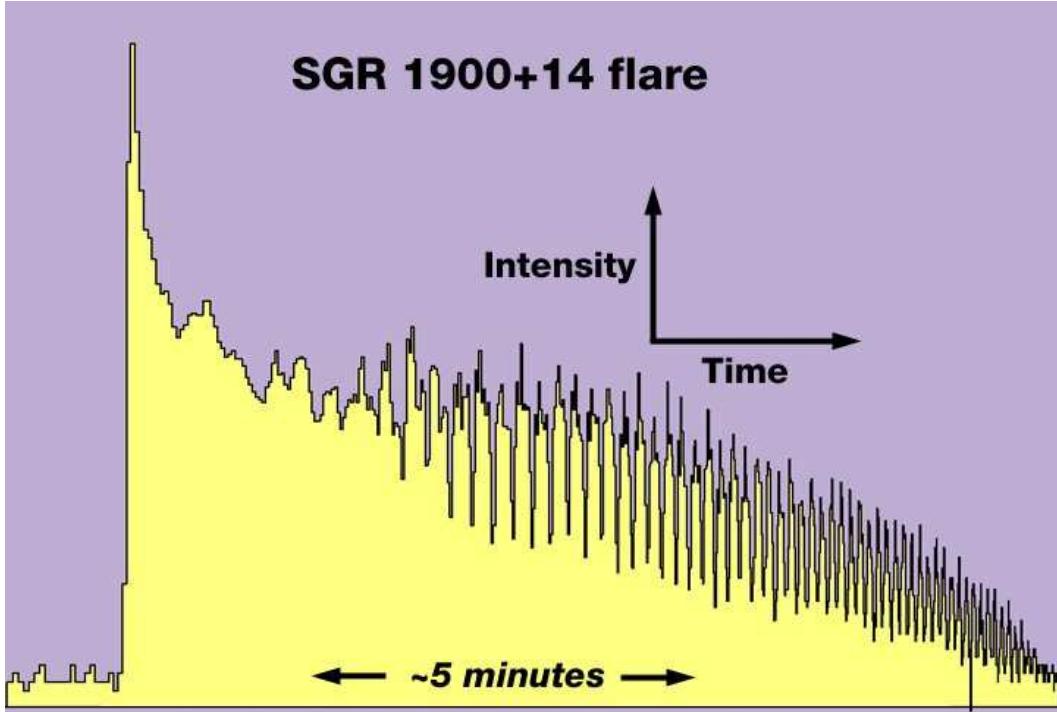
φλοιού, v_s η ταχύτητα των shear κυμάτων στον στερεό φλοιό, r η απόσταση από τη Γη και β το πλάτος των torsional ταλαντώσεων - πηγών της βαρυτικής ακτινοβολίας. Παρά το ότι περιέλαβε μόνο τους περιττής πάριτυ, torsional modes του στερεού φλοιού και παρά την απαισιόδοξη εκτίμηση της εκπεμπόμενης βαρυτικής ακτινοβολίας, η μελέτη των Schumaker & Thorne (1983) [3] ήταν θεμελιώδης, πρωτοποριακή και απετέλεσε εφαλτήριο για περαιτέρω μελέτες.

Οι Yoshida & Lee (2002) [4] χρησιμοποίησαν για πρώτη φορά, όσο αφορά modes του στερεού φλοιού, την προσέγγιση Cowling. Η προσέγγιση αυτή αγνοεί τις διαταραχές του χωρόχρονου και λαμβάνει υπόψη μόνο τις διαταραχές του ρευστού (Cowling 1941, [90]). Συνέχριναν Νευτώνεια και σχετικιστικά αποτελέσματα για συγκεκριμένες καταστατικές εξισώσεις. Οι διαφορές που βρήκαν ήταν περισσότερο ποσοτικές και λιγότερο ποιοτικές. Για παράδειγμα υπολόγισαν ότι οι σχετικές σχετικιστικές διορθώσεις $\delta\sigma/\sigma := (\sigma_N - \sigma_{GR})/\sigma_{GR}$ των ιδιοσυχνοτήτων διαφόρων modes θα ήταν, στις περισσότερες περιπτώσεις, μικρότερες από $\simeq 0.1$. Ωστόσο υπολόγισαν, επίσης, ότι οι δύο interfacial modes i_1 και i_2 , κατά τη μεταφορά μας από τη Νευτώνεια στη σχετικιστική περίπτωση, θα αντάλλαζαν χαρακτήρες.

1.1.2 Ήμι - περιοδικές ταλαντώσεις σε SGRs

Tα Soft Gamma - ray Repeaters (SGRs) είναι πηγές που (επαναλαμβανόμενα) εκπέμπουν μαλακές ακτίνες γάμμα (βλέπε π.χ. Σχήμα 1.2). Περιστασιακά, στα αντικείμενα αυτά καταγράφονται υπερ - ενεργητικές εκλάμψεις με φωτεινότητες που φτάνουν τα $10^{44} - 10^{46}$ erg/sec. Οι εκλάμψεις αυτές ανιχνεύονται και σε ακτίνες X και οι καμπύλες φωτός τους αποτελούνται από μια αρχική, σύντομη, φασματικά σκληρή κορυφή, ακολουθούμενη από μια αποσβενύμενη, φασματικά μαλακότερη ουρά, που διαρκεί μερικές εκατοντάδες δευτερόλεπτα (βλέπε π.χ. Σχήμα 1.4).

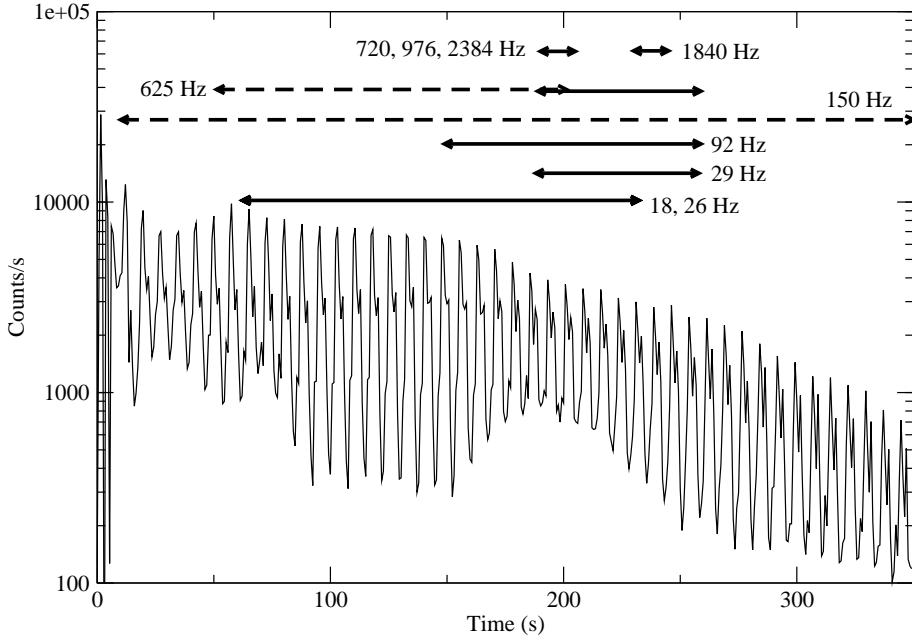
Τρεις τέτοιες γιγαντιαίες, υπερ - ενεργητικές εκλάμψεις έχουν καταγραφεί μέχρι σήμερα. Η πρώτη συνέβη τον Μάρτιο του 1979 στο SGR 0526-66 και ανιχνεύτηκε από τους δορυφόρους Prognoz και Venera (Mazets et al. 1979, [28]), η δεύτερη συνέβη τον Αύγουστο του 1998 στο SGR 1900+14 (Σχήμα 1.4) και ανιχνεύτηκε από τον δορυφόρο RXTE (Rossi X - ray Timing Explorer) (βλέπε π.χ. Hurley et al. 1999, [29]) και



Σχήμα 1.4: Καμπύλη φωτός της γιγαντιαίας έκλαμψης του SGR 1900+14 που συνέβη τον Αύγουστο του 1998. Η στιγμιαία αρχική έκλαμψη ($\Delta t \lesssim 1\text{sec}$) ακολουθήθηκε από μια μακράς διαφρείας ουρά ($\Delta t \simeq 5\text{ min}$) η οποία αποκάλυψε την περίοδο περιστροφής του magnetar και διάφορες Quasi - Periodic Oscillations (QPOs).

η τρίτη συνέβη τον Δεκέμβριο του 2004 στο SGR 1806-20 και ανιχνεύτηκε από τους δορυφόρους RXTE και RHESSI (Ramaty High - Energy Solar Spectroscopic Imager) (βλέπε π.χ. Terasawa et al. 2005, [30]).

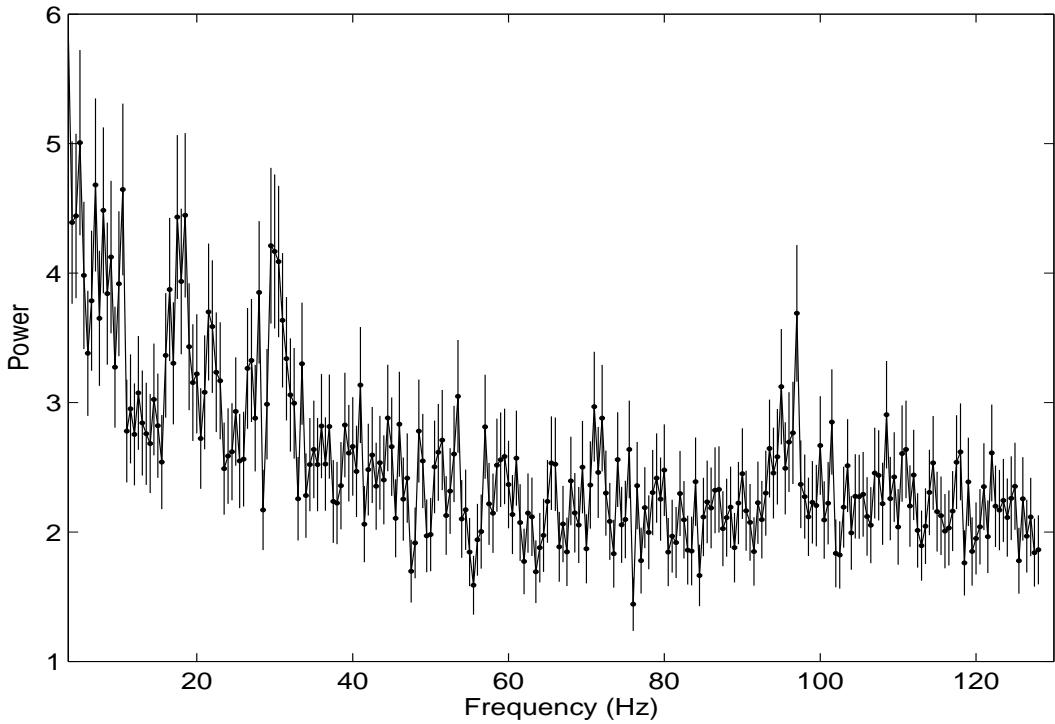
Οι Barat et al. (1983) [18] ανέλυσαν δεδομένα από τους δορυφόρους Prognoz, Venera 11 και Venera 12 και βρήκαν ότι η έκλαμψη του 1979 περιείχε κάποια μορφή περιοδικότητας με περίοδο περίπου 23msec (συχνότητα περίπου 43Hz). Για την επόμενη χρονικά έκλαμψη, αυτήν του 1998, που είχε μέγιστη φωτεινότητα $\simeq 10^{44}\text{ erg/sec}$, οι Strohmayer & Watts (2005) [24] ανέλυσαν δεδομένα από τον δορυφόρο RXTE και ανακάλυψαν Quasi - Periodic Oscillations (QPOs) με συχνότητες περίπου 28, 53.5, 84 και 155 Hz. Για την πιο πρόσφατη έκλαμψη, αυτήν του 2004 από το SGR 1806-20, μέγιστης φωτεινότητας $\simeq 10^{46}\text{ erg/sec}$, οι Israel et al. (2005) [23] ανέλυσαν δεδομένα από τον δορυφόρο RXTE και ανακάλυψαν τρεις QPOs με συχνότητες περίπου 18, 30



Σχήμα 1.5: Καμπύλη φωτός της γιγαντιαίας έκλαμψης του SGR 1806-20 που συνέβη τον Δεκέμβριο του 2004. Τα βέλη δείχνουν τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία εμφανίστηκαν QPOs και δίπλα τους αναγράφονται οι συχνότητες αυτών των QPOs. Σημειώνονται, όλες οι ανακαλυφθείσες QPOs, είτε αυτές ανακαλύφθηκαν στα δεδομένα του δορυφόρου RXTE είτε ανακαλύφθηκαν στα δεδομένα του δορυφόρου RHESSI. Βλέπε Strohmayer & Watts (2006) [26].

και 92 Hz. Αργότερα, οι Watts & Strohmayer (2006) [25] χρησιμοποιώντας δεδομένα από τον δορυφόρο RHESSI επιβεβαίωσαν τις δύο από τις τρεις αυτές συχνότητες και ανακάλυψαν δύο ακόμη, γύρω στα 26 και στα 625 Hz. Τέλος, με δεδομένα του δορυφόρου RXTE, οι Strohmayer & Watts (2006) [26] επιβεβαίωσαν πολλές από τις παραπάνω συχνότητες και ανακάλυψαν και αρχετές νέες, περίπου στα 150, στα 1840 και, με λιγότερη σιγουριά, στα 720 και στα 2384 Hz. Συγκεντρώνοντας όλα τα παραπάνω, υπενθυμίζουμε:

- στο SGR 0526-66 ανακαλύφθηκε μια χαμηλή συχνότητα στα 43 Hz,



Σχήμα 1.6: Ανάλυση της καμπύλης φωτός από την έκλαμψη του SGR 1806-20. Παρατηρούνται κορυφές περίπου στις συχνότητες των 18, των 30 και των 92Hz. Βλέπε Israel et al. (2005) [23].

- στο SGR 1900+14 ανακαλύφθηκαν τέσσερις χαμηλές συχνότητες στα 28, 53.5, 84 και 155Hz,
- στο SGR 1806-20 ανακαλύφθηκαν πέντε χαμηλές συχνότητες στα 18, 26, 30, 92 και 150 Hz και τέσσερις υψηλές συχνότητες στα 625, 720, 1840 και 2384 Hz (βλέπε και Watts & Strohmayer 2007a, Watts & Strohmayer 2007b, [31, 32] καθώς και Σχήματα 1.5, 1.6).

Ήδη από την πρώτη ανακάλυψη ημι - περιοδικής ταλάντωσης σε έκλαμψη από SGR [18] εκφράστηκε η άποψη ότι αυτή θα μπορούσε να προέρχεται από torsional ταλαντώσεις στερεού φλοιού κάποιου αστέρα νετρονίων. Δεκαπέντε χρόνια αργότερα, ο Duncan (1998) [11], σε μία σχεδόν προφητική εργασία¹, εστερνίστηκε την παραπάνω

¹Λίγους μήνες μετά τη δημοσίευση της εργασίας του, τον Αύγουστο του 1998, έλαβε χώρα η

άποψη και μελέτησε τις torsional ταλαντώσεις στερεού φλοιού σε σχετικιστικούς, ισχυρά μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων. Μεταξύ άλλων, πρότεινε ότι οι περίοδοι των θεμελιωδών torsional modes, σε ρεαλιστικούς αστέρες νετρονίων, θα έπρεπε να δίνονται από την εμπειρική - προσεγγιστική σχέση:

$$P(2t_0) \simeq 33.6R_{10} \frac{0.87 + 0.13M_{1.4}R_{10}^{-2}}{(1.71 - 0.71M_{1.4}R_{10}^{-1})^{1/2}} \text{ msec}, \quad (1.8)$$

όπου $R_{10} := R/10 \text{ km}$ και $M_{1.4} := M/1.4M_\odot$, με R και M την ακτίνα και τη μάζα των αστέρων. Επίσης, υπολόγισε ότι οι “μη - μαγνητικοί” περίοδοι, P_0 , των torsional modes θα έπρεπε να μεταβάλλονται από την παρουσία ενός μαγνητικού πεδίου, B , σύμφωνα με την προσεγγιστική σχέση:

$$\frac{P}{P_0} \simeq \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{-1/2} \simeq \left[1 + (B/B_\mu)^2 \right]^{-1/2}, \quad (1.9)$$

όπου $B_\mu := (4\pi\mu_0)^{1/2}$ και όπου μ_0 είναι ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους (shear modulus) του στερεού φλοιού. Η πρώτη προσεγγιστική ισότητα δικαιολογείται από τη Σχέση (1.5α'): $P \sim v_s^{-1} \sim \mu^{-1/2}$ (αφού $v_s := (\mu/\rho)^{1/2}$). Για τη δεύτερη προσεγγιστική ισότητα έχει ληφθεί υπόψη η συνεισφορά της μαγνητικής τάσης στον συντελεστή γραμμικού ιξώδους: $\mu = \mu_0 + B^2/4\pi$.

Σύντομα έγινε αντιληπτό ότι η αλληλεπίδραση στερεού φλοιού - μαγνητικού πεδίου έπρεπε να μελετηθεί διεξοδικότερα. Ένα πρώτο βήμα προς αυτήν την κατεύθυνση έκαναν οι Messios, Papadopoulos & Stergioulas (2001) [12] οι οποίοι μελέτησαν τις torsional ταλαντώσεις στερεού φλοιού σχετικιστικών μαγνητισμένων αστέρων νετρονίων. Ένα πρώτο συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν ήταν ότι οι σχετικιστικές διορθώσεις για τους torsional modes (με ή χωρίς μαγνητικό πεδίο) ήταν σημαντικές. Συγκεκριμένα, κατέληξαν σε μια σχετικιστική παραλλαγή της βασικής σχέσης των Hansen & Cioffi (1980) [1] (Σχέση 1.5α') για τις περιόδους των θεμελιωδών torsional modes:

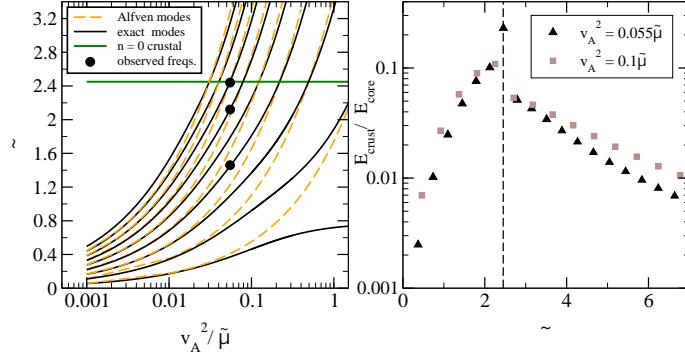
$$P \simeq 34 \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right) \text{ msec}. \quad (1.10)$$

δεύτερη γιγαντιαία έκλαμψη από SGR, η έκλαμψη του SGR 1900+14, πιο ενεργητική από την πρώτη, αυτήν που έλαβε χώρα τον Μάρτιο του 1979 στο SGR 0526-66 και στην οποία αναφερόταν στην εν λόγω εργασία του!

Επιπρόσθετα, θεώρησαν ένα ακτινικά συμμετρικό, μονοπολικό μαγνητικό πεδίο και παρατήρησαν ότι, αυξανομένης της έντασης του μαγνητικού πεδίου, οι περίοδοι των θεμελιωδών torsional modes επίσης αυξάνονταν. Το αποτέλεσμα αυτό ήταν σε πλήρη αντίθεση με την παλαιότερη εκτίμηση από τον Duncan (1998) [11] και έτσι αποδείχτηκε ότι η μορφολογία του μαγνητικού πεδίου ήταν ένας παράγοντας που έπρεπε να ληφθεί πολύ σοβαρά υπόψη αφού μπορούσε να μας οδηγήσει σε πολύ διαφορετικά αποτελέσματα. Βελτίωση της παραπόνω μελέτης ήταν η μελέτη των Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [14] η οποίοι θεώρησαν πιο ρεαλιστικά, αξονικά συμμετρικά, διπολικά μαγνητικά πεδία.

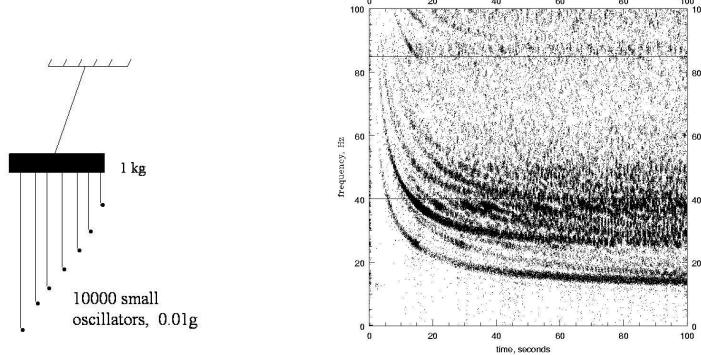
Η σύζευξη (coupling) του στερεού φλοιού με το μαγνητικό πεδίο δεν είχε ληφθεί σοβαρά υπόψη στις παραπόνω μελέτες. Ο Levin (2006) [33] υποστήριξε ότι διεγερμένοι μηχανικοί modes του στερεού φλοιού αποσβέννυνται πολύ γρήγορα, σε λιγότερο από 1 sec, καθώς προκαλούν μαγνητικούς Alfvén modes προς τον εσωτερικό ρευστό πυρήνα του αστέρα. Αντιπρότεινε την ύπαρξη καθολικών (global) μαγνητοελαστικών modes. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας ένα απλό δοκιμαστικό μοντέλο, απέδειξε ότι και αυτοί οι μαγνητοελαστικοί modes αποσβέννυνται πάρα πολύ γρήγορα, λόγω της ύπαρξης ενός συνεχούς μαγνητοϋδροδυναμικών modes στον ρευστό πυρήνα. Παρέμενε, λοιπόν, το ερώτημα: από πού προέρχονταν οι παρατηρούμενες QPOs; Ο ίδιος ο Levin πρότεινε δύο εναλλακτικά φυσικά σενάρια: οι QPOs θα μπορούσαν να προέρχονται από τη μαγνητόσφαιρα του magnetar ή θα μπορούσαν να προέρχονται από ένα μαγνητικό πεδίο με ιδιαίτερη μορφολογία (π.χ. αυστηρά περιορισμένο στον στερεό φλοιό).

Οι Glampedakis, Samuelsson & Andersson (2006) [34] συμφώνησαν με τον Levin ως προς την ύπαρξη καθολικών μαγνητοελαστικών modes αλλά διαφώνησαν μαζί του ως προς τη γρήγορη απόσβεση αυτών των modes. Υπολόγισαν, μάλιστα, τέτοιους modes με ένα απλό, κυλινδρικά συμμετρικό, δοκιμαστικό μοντέλο. Βρήκαν ότι οι ιδιοσυχνότητές τους είναι, γενικά, διαφορετικές από τις ιδιοσυχνότητες των “καθαρών” modes του στερεού φλοιού. Για παράδειγμα, υπάρχουν modes με πολύ χαμηλές ιδιοσυχνότητες, συγχρίσιμες με τις παρατηρούμενες χαμηλές συχνότητες μερικών QPOs σε SGRs (π.χ. αυτές των 18 και 26 Hz). Επίσης βρήκαν ότι, από ενεργειακής άποψης, modes με



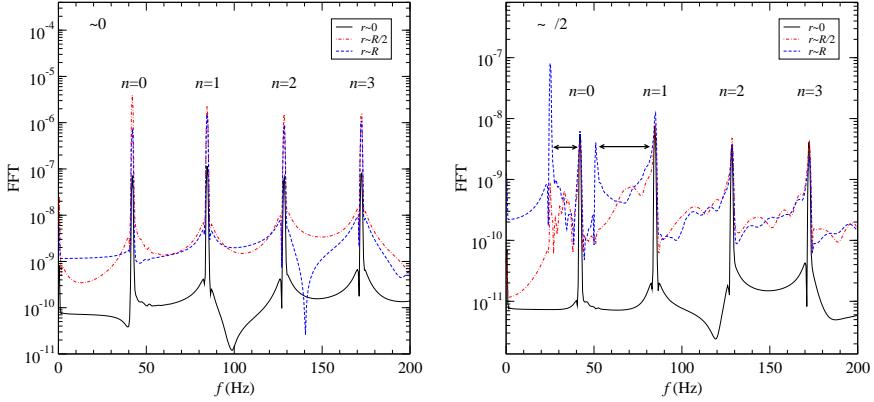
Σχήμα 1.7: Αριστερά: Ιδιοσυχνότητες, $\tilde{\sigma} = \sigma R / \sqrt{\mu}$, καθολικών μαγνητοελαστικών modes ως συνάρτηση της έντασης του μαγνητικού πεδίου, $v_A^2/\tilde{\mu}$ ($= B^2/4\pi\mu$). Στο δοκιμαστικό αυτό μοντέλο, τα B, ρ και $\mu = \tilde{\mu}\rho$ έχουν ψεωρηθεί σταθερά. Δεξιά: Ενέργεια του στερεού φλοιού ως προς την ενέργεια του ρευστού πυρήνα για τους modes του σχήματος στα αριστερά. Ενεργειακά, προτιμούνται οι modes για τους οποίους το πηλίκο $E_{\text{crust}}/E_{\text{core}}$ είναι μεγάλο. Βλέπε Glampedakis, Samuelsson & Andersson (2006) [34].

ιδιοσυχνότητες παραπλήσιες των ιδιοσυχνοτήτων των “καθαρών” modes του στερεού φλοιού είναι προτιμητέοι (βλέπε Σχήμα 1.7).



Σχήμα 1.8: Το μοντέλο του Levin. Αριστερά: ένας ταλαντωτής με συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα (ο στερεός φλοιός) συζεύγεται με ένα συνεχές ταλαντωτών (τα κύματα Alfvén στον ρευστό πυρήνα). Δεξιά: δυναμικό φάσμα (εξέλιξη του φάσματος συχνοτήτων με το χρόνο). Μετά από 100 sec, τα δύο άκρα του συνεχούς παρουσιάζονται περίπου στα 15 και στα 25 Hz. Οι οριζόντιες συνεχείς γραμμές αντιπροσωπεύουν τις ιδιοσυχνότητες των “καθαρών” modes του στερεού φλοιού. QPOs που συναντούνται γραμμές αυτές ενισχύονται. Βλέπε Levin (2007) [35].

Έναν χρόνο αργότερα, ο Levin (2007) [35] επέμεινε στην ύπαρξη του συνεχούς



Σχήμα 1.9: Μετασχηματισμός Fourier (FFT) μετά από διδιάστατη αριθμητική εξέλιξη, σε σημεία κοντά στον μαγνητικό άξονα (αριστερά) και κοντά στον ισημερινό (δεξιά). Κοντά στον μαγνητικό άξονα παρατηρούνται εξ' ολοκλήρου Upper QPOs ενώ κοντά στον ισημερινό παρατηρούνται και Lower QPOs. Βλέπε Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [37].

μαγνητοϋδροδυναμικών modes στον εσωτερικό ρευστό πυρήνα. Υποστήριξε ότι στις άκρες αυτού του συνεχούς (ή σε σημεία αποκαλούμενα σημεία αλλαγής, turning points) υπάρχουν QPOs που μπορούν να “ζήσουν” αρχετά ώστε να παρατηρηθούν. Εκτός αυτού, μετακινούμενες QPOs μέσα στο συνεχές, μπορούν να ενισχυθούν σημαντικά σε συχνότητες παραπλήσιες των συχνοτήτων των “χαθαρών” μηχανικών modes του στερεού φλοιού. Με αυτόν τον τρόπο εξήγησε την παρατήρηση QPOs σε SGRs με συχνότητες παραπλήσιες των συχνοτήτων των “χαθαρών” modes του στερεού φλοιού και, δευτερευόντως, συνέδεσε τη χαμηλή συχνότητα των 18 Hz με το χαμηλής συχνότητας άκρο του μαγνητοϋδροδυναμικού συνεχούς (βλέπε και Σχήμα 1.8).

Οι Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [37] επιβεβαίωσαν την ύπαρξη του συνεχούς του Levin εκτελώντας διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις (βλέπε Σχήμα 1.9). Θεώρησαν έναν αστέρα νετρονίων εφοδιασμένο με ένα διπολικό μαγνητικό πεδίο αλλά χωρίς στερεό φλοιό. Οι αριθμητικές προσομοιώσεις τους ανέδειξαν δύο οικογένειες QPOs: Lower (L-QPOs) και Upper (U-QPOs). Οι συχνότητες των L-

και U-QPOs έχουν τις εξής ιδιότητες:

$$f_{L_n} \simeq 0.6 \times f_{U_n}, \quad (1.11\alpha')$$

$$f_{L_n} \simeq (n+1) f_{L_0}, \quad (1.11\beta')$$

$$f_{U_n} \simeq (n+1) f_{U_0}, \quad (1.11\gamma')$$

και διαρκούν για μεγάλο χρονικό διάστημα. Πρέπει να είναι, επομένως, παρατηρήσιμες.

1.2 Συμπαγή αστρικά ζεύγη

Όπως προβλέπει η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, στα συμπαγή βαρυτικά ζεύγη (με μέλη δύο αστέρες νετρονίων, δύο μελανές οπές ή έναν αστέρα νετρονίων και μία μελανή οπή) εκπέμπεται έντονη βαρυτική ακτινοβολία. Τα μέλη ενός τέτοιου ζεύγους περιφέρονται το ένα γύρω από το άλλο και, ταυτόχρονα, διαγράφουν σπειροειδείς, σχεδόν ελλειπτικές τροχιές γύρω από το κοινό κέντρο μάζας. Η βαρυτική ακτινοβολία απομακρύνει ενέργεια από το σύστημα με αποτέλεσμα τα δύο μέλη να συγκλίνουν το ένα προς το άλλο, να πλησιάζουν το κέντρο μάζας και, μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα, να συγχωνεύονται (βλέπε π.χ. Shapiro & Teukolsky 1983, [104]). Η συχνότητα των εκπεμπόμενων βαρυτικών χυμάτων σ_{gw} είναι διπλάσια από τη χαρακτηριστική τροχιακή συχνότητα σ_{orb} ($\sigma_{\text{orb}} \sim \Omega_{\text{orb}}$, όπου $\Omega_{\text{orb}}^2 = G(M + M')/D^3$ με M και M' τις μάζες των δύο μελών και D τη μεταξύ τους απόσταση, βλέπε π.χ. [104]), αυξάνεται καθώς τα σώματα αλληλοπλησιάζονται και, από λίγα Hz που είναι αρχικά, φτάνει τις μερικές χιλιάδες Hz τη στιγμή της συγχώνευσης. Οι δύο πιο προηγμένοι επίγειοι βαρυτικοί ανιχνευτές LIGO και Virgo είναι σχεδιασμένοι να λειτουργούν σε αυτό ακριβώς το εύρος συχνοτήτων και έτσι τέτοια συγκλίνοντα ζεύγη φαντάζουν ως οι πιο κατάλληλες πηγές - στόχοι για τις εν λόγω συμβολομετρικές ανιχνευτικές διατάξεις.

Τα μέλη ενός συμπαγούς αστρικού ζεύγους μπορούν να υφίστανται και εσωτερικές, ίδιες μεταβολές. Για παράδειγμα, αν περιστρέφονται, είναι δυνατό να επιβραδύνθουν (π.χ. μέσω ακτινοβολίας μαγνητικού διπόλου) ή να συσταλούν / διασταλούν (καθώς εξελίσσονται στο εσωτερικό τους). Οι εσωτερικές αυτές μεταβολές, που απάγουν ίδια ενέργεια (self - energy) από τα μέλη του ζεύγους, επηρεάζουν την τροχιακή περίοδο

και την τροχιακή κίνηση του ζεύγους. Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η σύγκλιση του ζεύγους μπορεί να επιβραδυνθεί (ώστε $\dot{P}_{\text{orb}} > 0$) και αυτή η αύξηση στη χρονική παράγωγο της τροχιακής περιόδου θα μπορούσε να μετρηθεί (βλέπε π.χ. Spyrou 1985, Spyrou 1987, Spyrou & Kokkotas 1994, Spyrou & Stergioulas 2001, [38, 39, 40, 41]). Παρακάτω εξετάζουμε μία άλλη αιτία για την οποία θα μπορούσε να επηρεαστεί η τροχιακή περίοδος ενός συμπαγούς αστρικού ζεύγους. Αυτή η αιτία έχει να κάνει με τις αναπτυσσόμενες παλλιροιακές δυνάμεις ανάμεσα στα δύο μέλη του ζεύγους.

Τα δύο μέλη ενός τέτοιου ζεύγους καθώς πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο, ασκούν αναμεταξύ τους παλλιροιακές δυνάμεις. Ας εστιάσουμε στο ένα από τα δύο μέλη ενός τέτοιου ζεύγους. Ας υποθέσουμε ότι αυτό είναι ένας αστέρας νετρονίων και το συνοδό μέλος είναι μια μελανή οπή. Καθώς η μελανή οπή πλησιάζει, ασκεί ισχυρές παλλιροιακές δυνάμεις στον αστέρα νετρονίων. Οι δυνάμεις αυτές έχουν σαν αποτέλεσμα τη διέγερση διαφόρων modes του αστέρα νετρονίων. Η διέγερση είναι σημαντικότερη όταν συμβαίνει συντονισμός: όταν δηλαδή η συχνότητα περιφοράς του συμπαγούς ζεύγους, σ_{orb} , γίνει παραπλήσια με τη ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης, σ_{mode} , κάποιου συγκεκριμένου mode του αστέρα νετρονίων (βλέπε π.χ. Press & Teukolsky 1977, Alexander 1987, [42, 43]).

Δεδομένου ότι η συχνότητα περιφοράς σ_{orb} ενός συμπαγούς αστρικού ζεύγους είναι αρχικά μικρή, επειδή τα δύο σώματα βρίσκονται αρκετά μακριά το ένα από το άλλο, περιμένουμε πρώτα να διεγερθούν modes χαμηλών ιδιοσυχνοτήτων. Τέτοιοι είναι οι gravity modes σε ρευστούς αστέρες νετρονίων και οι interfacial και οι θεμελιώδεις torsional modes σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Όσο τα δύο σώματα πλησιάζουν το ένα το άλλο, η συχνότητα περιφοράς αυξάνεται και επομένως διεγείρονται όλο και πιο υψηλοσυχνοτικοί modes (fundamental και pressure modes σε ρευστούς αστέρες νετρονίων και shear και υψηλότεροι αρμονικοί torsional modes σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό).

Δύο στοιχεία καθορίζουν το συνολικό αποτέλεσμα της διέγερσης. Πρώτο στοιχείο είναι το πόσο θα μείνει το σύστημα σε συντονισμό. Η μεταβολή της συχνότητας περιφοράς ενός συμπαγούς αστρικού ζεύγους είναι ανάλογη της συχνότητας περιφοράς,

$\dot{\sigma}_{\text{orb}} \sim \sigma_{\text{orb}}$ (βλέπε π.χ. Shapiro & Teukolsky 1983, [104]). Όταν τα δύο σώματα είναι μακριά, η συχνότητα περιφοράς είναι μικρή και το ίδιο είναι και ο ρυθμός μεταβολής της συχνότητας αυτής. Με άλλα λόγια, χαμηλοσυχνοτικοί modes (π.χ. g- ή i-modes) διεγείρονται στα πρώτα στάδια εξέλιξης ενός τέτοιου συστήματος και η διέγερση αυτή διαφορεί αρκετούς κύκλους. Αντίθετα, όσο τα δύο σώματα πλησιάζουν, η συχνότητα περιφοράς αυξάνεται και ο ρυθμός αύξησής της, αυξάνεται κι αυτός. Σαν αποτέλεσμα, οι υψηλοσυχνοτικοί modes που διεγείρονται κατά τα τελευταία στάδια εξέλιξης ενός τέτοιου συστήματος, διεγείρονται για λίγους μόνο κύκλους. Έχουμε, λοιπόν, τόσο πιο αποτελεσματική διέγερση κάποιου mode όσο πιο χαμηλή ιδιοσυχνότητα έχει αυτός.

Ένα δεύτερο στοιχείο που καθορίζει το βαθμό διέγερσης κάποιου mode είναι το κατά πόσο η ιδιοσυνάρτηση αυτού του mode υπερκαλύπτεται (συζεύγνηται) με το παλλιρροιακό δυναμικό του συνοδεύοντος σώματος (βλέπε π.χ. Press & Teukolsky 1977, Alexander 1987, [42, 43]). Ο βαθμός αυτής της υπερκάλυψης (σύζευξης) δίνεται από έναν συντελεστή που υπολογίζεται αριθμητικά (βλέπε παρακάτω, Σχέσεις 1.12). Ο συντελεστής αυτός ονομάζεται συντελεστής παλλιρροιακής σύζευξης ή ολοκλήρωμα υπερκάλυψης (tidal coupling coefficient ή overlap integral) και, όπως υπολογίζεται για ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, είναι μεγαλύτερος για τον f-mode και μικρότερος για τους p-, g- και r-modes (βλέπε π.χ. Kokkotas & Schäfer 1994, Ho & Lai 1999, Flanagan & Racine 2007, [44, 45, 46]). Όσο αφορά modes σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό, ο συντελεστής αυτός δεν έχει υπολογιστεί.

Στην παρούσα διατριβή εκτιμάται ο βαθμός διέγερσης των σφαιροειδών modes του στερεού φλοιού σε συγκλίνοντα ζεύγη αστέρων νετρονίων. Ουσιαστικά, η αποτελεσματικότητα της διέγερσης καθορίζεται από τον συντελεστή παλιρροιακής σύζευξης (tidal coupling coefficient) $Q_{\alpha,\ell m}$ μεταξύ κάποιου mode με δείκτες $\alpha = \{njk\}$ και του παλιρροιακού δυναμικού με δείκτες $\{\ell m\}$ (βλέπε π.χ. Press & Teukolsky 1977, Alexander 1987, [42, 43]):

$$Q_{\alpha,\ell m} = \int \rho \vec{\xi}^* \cdot \nabla \left(r^\ell Y_{\ell m} \right) dV, \quad (1.12\alpha')$$

$$= \ell \int \rho r^{\ell+1} [S + (\ell+1) H] dr. \quad (1.12\beta')$$

(Για μη - περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, συντονισμός συμβαίνει μόνο όταν $\ell = j$ και $m = k$, βλέπε π.χ. [42, 43].) Στις εξισώσεις (1.12), $\vec{\xi} = \vec{\xi}(r, \theta, \phi)$ είναι η ιδιοσυνάρτηση του θεωρούμενου mode (βλέπε και Σχέσεις 1.3) με:

$$\vec{\xi} = \left(S, H \frac{\partial}{\partial \theta}, H \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_{\ell m}, \quad (1.13)$$

όπου $S = S(r)$, $H = H(r)$ και $Y_{\ell m} = Y_{\ell m}(\theta, \phi)$ είναι οι γνωστές μας σφαιρικές αρμονικές. Η κανονικοποίηση των ιδιοσυναρτήσεων γίνεται με βάση τη σχέση:

$$\int \rho \vec{\xi}^* \cdot \vec{\xi} dV = 1, \quad (1.14\alpha')$$

η οποία, χρησιμοποιώντας την αναλυτική μορφή (1.13), γράφεται:

$$\int \rho r^2 [S^2 + \ell(\ell+1)H^2] dr = 1. \quad (1.14\beta')$$

Πρέπει να τονιστεί ότι η αποτελεσματικότητα της διέγερσης εξαρτάται και από την ιδιοσυχνότητα του θεωρούμενου mode. Modes με μικρές ιδιοσυχνότητες συντονίζονται σε μικρές συχνότητες περιστροφής ενός συμπαγούς αστρικού ζεύγους. Αυτό σημαίνει μεν ότι τα δύο σώματα βρίσκονται ακόμη σχετικά μακριά το ένα από το άλλο, αλλά από την άλλη σημαίνει ότι ο συντονισμός επιμένει για αρκετές χιλιάδες περιστροφές και η μεταφερόμενη ενέργεια, από το σύστημα στον mode, είναι μεγάλη. Από αυτήν την άποψη, οι πιο ενδιαφέροντες modes του στερεού φλοιού είναι οι interfacial modes αφού οι συχνότητές τους είναι μερικές δεκάδες Hz.

1.3 Αστάθειες CFS σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων

Πόσο γρήγορα μπορούν να περιστρέφονται οι αστέρες νετρονίων; Γιατί όλοι οι παρατηρούμενοι αστέρες νετρονίων (π.χ. pulsars, magnetars) έχουν περιόδους περιστροφής από μερικά msec ως και μερικά sec; (Βλέπε π.χ. Manchester & Taylor 1977, Woods & Thompson 2006, [102, 21].) Ποιά είναι η “περιστροφική κατάσταση” των αστέρων νετρονίων κάθε στιγμή της “ζωής” τους; Τα παραπάνω ερωτήματα είναι θεμελιώδη αλλά η απάντησή τους δεν είναι εύκολη. Ξέρουμε, πάντως, ότι τα αντικείμενα αυτά δεν μπορούν να περιστρέφονται με συχνότητες μεγαλύτερες από τη συχνότητα

Kepler, $\Omega_K \simeq \sqrt{M/R^3}$ (βλέπε π.χ. Shapiro & Teukolsky 1983, Σπύρου 1995, Glendenning 1997, [104, 105, 106]). Σε συχνότητες μεγαλύτερες της συχνότητας Kepler, οι απωστικές φυγόκεντρες δυνάμεις στον ισημερινό θα γινόταν μεγαλύτερες από τις ελκτικές βαρυτικές δυνάμεις. Οι μάζες δεν θα μπορούσαν να διατηρηθούν σε ισορροπία και θα εκσφενδονιζόταν μακριά προς το διάστημα. Το όριο Kepler είναι, αδιαμφισβήτητα, το απόλυτο όριο περιστροφής για τους αστέρες νετρονίων. Είναι, όμως, και το πραγματικό όριο περιστροφής τους;

Πιθανώς, όχι. Η περιστροφή των αστέρων νετρονίων θα μπορούσε να περιοριστεί και από άλλους παράγοντες. Τέτοιοι παράγοντες είναι, για παράδειγμα, αστάθειες οδηγούμενες από την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων (gravitational - wave driven instabilities). Μικρές διαταραχές σε γρήγορα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων θα μπορούσαν να προκαλέσουν την εκπομπή βαρυτικών κυμάτων. Κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες, οι διαταραχές θα μπορούσαν να είναι ασταθείς, θα μπορούσαν δηλαδή να αυξήσουν σημαντικά το πλάτος τους και τα εκπεμπόμενα βαρυτικά κύματα θα μπορούσαν να απάγουν στροφορμή από τους περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων επιβραδύνοντάς τους σημαντικά (Chandrasekhar 1970, Friedman & Schutz 1978, [66, 67]). Από την άλλη, “ανταγωνιστικοί” μηχανισμοί θα προσπαθούσαν να αποσβέσουν τις κάθε είδους μικρές αρχικές διαταραχές. Δύο τέτοιοι μηχανισμοί είναι, για παράδειγμα, το γραμμικό και το γενικό ιξώδες (shear και bulk viscosity, αντίστοιχα). Το αν τελικά θα συμβεί αύξηση (λόγω της βαρυτικής ακτινοβολίας) ή απόσβεση (λόγω των ιξωδών) του πλάτους των αρχικών διαταραχών εξαρτάται από τις παράπλευρες φυσικές συνθήκες. Για παράδειγμα, πολύ σημαντικό ρόλο παίζουν η συχνότητα περιστροφής των αστέρων νετρονίων και η θερμοκρασία τους (βλέπε π.χ. Andersson & Kokkotas 2001, Stergioulas 2003, Andersson 2003, Kokkotas & Stergioulas 2005, [68, 69, 70, 71]).

Πώς, όμως, δρουν αυτές οι αστάθειες; Τον ακριβή τρόπο δράσης τους περιέγραψε αρχικά ο Chandrasekhar και αργότερα οι Friedman & Schutz. Έτσι, οι αστάθειες αυτές είναι γνωστές ως αστάθειες CFS. Για να κατανοήσουμε ποιοτικά τη δράση τους, θεωρούμε έναν περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων με γωνιακή ταχύτητα $\Omega > 0$. Έστω,

επίσης, μια διαταραχή αυτού του αστέρα, με χρονική και γωνιακή εξάρτηση $e^{i(\sigma t - m\phi)}$, που διαδίδεται αντίθετα από την περιστροφή του αστέρα. Η διαταραχή αυτή διαδίδεται με γωνιακή ταχύτητα σ/m και έχει, για έναν περιστρεφόμενο παρατηρητή, αρνητική στροφορμή. Όταν ο αστέρας περιστρέφεται με πολύ μεγάλη γωνιακή ταχύτητα, $\Omega > \sigma/m$, ένας μακρινός παρατηρητής βλέπει αυτήν τη διαταραχή να παρασύρεται από την αστρική περιστροφή· την βλέπει να διαδίδεται με θετική φορά και, επομένως, να έχει θετική στροφορμή. Στο περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς, ωστόσο, η διαταραχή εξακολουθεί να έχει αρνητική στροφορμή. Η συνολική στροφορμή πρέπει να διατηρείται και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του πλάτους της αρχικής διαταραχής.

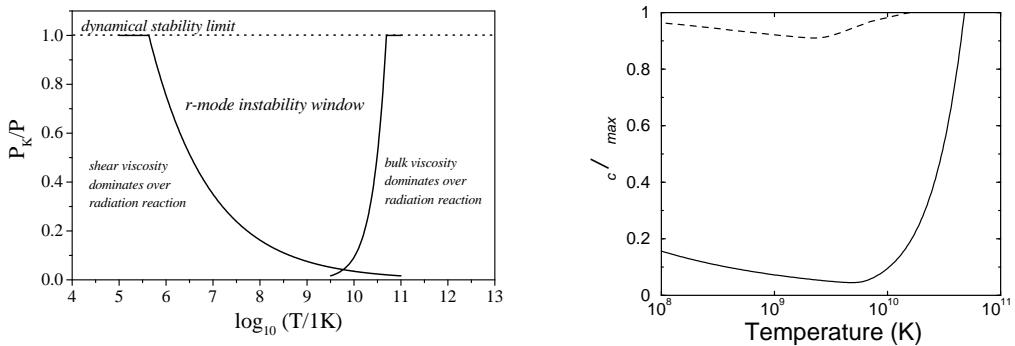
Με λίγα λόγια, μια αστάθεια CFS λαμβάνει χώρα όταν μια διαταραχή που διαδίδεται αντίθετα από την περιστροφή του αστέρα για έναν περιστρεφόμενο (rotating) παρατηρητή, φαίνεται να διαδίδεται με φορά ίδια με τη φορά περιστροφής του αστέρα, για έναν μακρινό αδρανειακό (inertial) παρατηρητή, δηλαδή όταν $\sigma_r \sigma_i < 0$. Σε μια τέτοια περίπτωση, το πλάτος της διαταραχής αυξάνεται, βαρυτικά κύματα εκπέμπονται και απάγουν στροφορμή και, τελικά, ο αστέρας επιβραδύνεται. Μέχρι πότε, όμως, επιβραδύνεται ο αστέρας; Τόσο για να λάβει χώρα μια αστάθεια CFS, όσο και για να παύσει, υπάρχει μια κρίσιμη τιμή της γωνιακής ταχύτητας του αστέρα, Ω_c . Όταν $\Omega > \Omega_c$ η αστάθεια αρχίζει να δρα ενώ όταν $\Omega < \Omega_c$ η δράση της αστάθειας παύει. Το πώς δρα η αστάθεια ενδιάμεσα δεν είναι ακόμη απολύτως γνωστό. Δεν ξέρουμε, δηλαδή, ποιά είναι η ακριβής μορφή της συνάρτησης $\Omega = \Omega(t)$. Στην παρούσα φάση, αρκούμαστε στο να γνωρίζουμε την τιμή της κρίσιμης γωνιακής ταχύτητας, Ω_c , στην οποία μια τέτοια αστάθεια ενεργοποιείται και απενεργοποιείται.

Όπως είδαμε προηγουμένως, οι modes ενός αστέρα νετρονίων είναι διαταραχές, είναι απομακρύνσεις από τη θέση ισορροπίας. Καταλαβαίνουμε εύκολα ότι οι αστάθειες που περιγράφτηκαν παραπάνω θα μπορούσαν να εφαρμοστούν για διάφορους τέτοιους modes. Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε έναν γρήγορα περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων και ας θεωρήσουμε ότι πάλλεται με τον θεμελιώδη f-mode. Ο f-mode με γωνιακή εξάρτηση $\ell = m$ που, σε έναν μη - περιστρεφόμενο αστέρα, διαδίδεται αντίθετα από τη φορά περιστροφής του αστέρα, μπορεί να συμπαρασυρθεί από την περιστροφή και μπορεί

να κινηθεί με την ίδια φορά, προκαλώντας έτσι αστάθεια CFS, παραγωγή βαρυτικών κυμάτων και επιβράδυνση του αστέρα νετρονίων. Ωστόσο, το γραμμικό και το γενικό ιξώδες στις περισσότερες περιπτώσεις προκαλούν απόσβεση της αρχικής διαταραχής προτού αυτή αναπτυχθεί. Μόνο στην περίπτωση που ο αρχικός αστέρας περιστρέφεται πάρα πολύ γρήγορα, $\Omega \gtrsim 0.9\Omega_K$, η αστάθεια CFS μπορεί να δράσει αποτελεσματικά (αν και αυτή η εικόνα αλλάζει δραστικά όταν θεωρούμε αστέρες νετρονίων που περιστρέφονται γρήγορα και διαφορικά σε μια τέτοια περίπτωση το “παράνυρο” της αστάθειας παραμένει λίγο - πολύ το ίδιο ωστόσο για αστέρες νετρονίων που περιστρέφονται διαφορικά η οριακή συχνότητα Kepler είναι πολύ μεγαλύτερη, βλέπε π.χ. Kokkotas & Stergioulas 2005, [71]). Τέτοιες μελέτες της αστάθειας των f-modes έγιναν π.χ. από τους Stergioulas & Friedman (1998), Morsink, Stergioulas & Blattning (1999) [72, 73] (βλέπε και Σχήμα 1.10).

Γρήγορα περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων, με συχνότητες λίγο μικρότερες της συχνότητας Kepler, δεν αποκλείονται από τις σύγχρονες θεωρίες αστρικής εξέλιξης. Κατά πάσα πιθανότητα, τόσο γρήγορα περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων σχηματίζονται ύστερα από βαρυτικές καταρρεύσεις περιστρεφόμενων κανονικών αστέρων. Οι αρχικοί αστέρες διατηρούν τις στροφορμές τους αλλά οι όγκοι τους μειώνονται αρκετές τάξεις μεγέθους. Σαν αποτέλεσμα, οι προκύπτοντες αστέρες νετρονίων περιστρέφονται με πάρα πολύ μεγάλες συχνότητες, της τάξης των kHz. Εκτός από πολύ γρήγορα περιστρεφόμενοι, οι πρωτο - αστέρες νετρονίων θεωρούνται και πάρα πολύ θερμοί ($T \simeq 10^{10}$ Kelvin) (βλέπε π.χ. [104, 105, 106]). Σε υψηλές θερμοκρασίες ($T \simeq 10^6 - 10^{10}$ Kelvin) και μεγάλες περιστροφικές συχνότητες ($\Omega \simeq \Omega_K$), οι μηχανισμοί απόσβεσης λόγω ιξώδους είναι αναποτελεσματικοί και αφήνουν αρκετά περιθώρια δράσης στις αστάθειες βαρυτικών κυμάτων.

Με τις εργασίες των Andersson (1998) και Friedman & Morsink (1998) [74, 75], το επιστημονικό ενδιαφέρον, ως προς τη δράση των ασταθειών CFS, μετατοπίστηκε στους τοροειδείς rotational modes των περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Μέχρι τότε οι αστάθειες αυτές μελετούνταν για σφαιροειδείς f- και p-modes καθώς θεωρούνταν ότι μόνο αυτοί θα μπορούσαν να εκπέμψουν σημαντικά ποσά βαρυτικής ακτινοβολίας.



Σχήμα 1.10: Αριστερά: Το “παράθυρο” της αστάθειας CFS για τους r-modes. Σε χαμηλές θερμοκρασίες, $T \lesssim 10^6$ Kelvin, η απόσβεση γίνεται από το γραμμικό ιξώδες (shear viscosity). Σε υψηλές θερμοκρασίες, $T \gtrsim 10^{10}$ Kelvin, γίνεται από το γενικό ιξώδες (bulk viscosity). Όταν ένας αστέρας νετρονίων βρεθεί μέσα σε αυτό το “παράθυρο” αστάθειας, η περιόδος περιστροφής του μπορεί να αυξηθεί κατά πολύ, $P_K/P \lesssim 0.1$. Δεξιά: Το “παράθυρο” αστάθειας CFS για τους f-modes (διακεκκομένη γραμμή) συγχριτικά με το αντίστοιχο “παράθυρο” για τους r-modes (συνεχής γραμμή). Βλέπε Andersson & Kokkotas (2001), Σταυρίδης (2004) [68, 108].

Οι παραπάνω ερευνητές έδειξαν ότι οι r-modes θα μπορούσαν να καταστούν ασταθείς ακόμη και για μικρές περιστροφικές συχνότητες Ω . Έδειξαν, επίσης, ότι θα μπορούσαν να εκπέμψουν σημαντικά ποσά βαρυτικών κυμάτων, κυρίως μέσω της ακτινοβολίας πολυπολικών ρευμάτων (current multipole radiation) και λιγότερο μέσω της ακτινοβολίας πολυπολικών μαζών (mass multipole radiation). Αμέσως μετά, οι Lindblom, Owen & Morsink (1998), Andersson, Kokkotas & Schutz (1999), Kokkotas & Stergioulas (1999) [76, 77, 78] έδειξαν ότι σε ρεαλιστικούς αστέρες νετρονίων, όπου τα ιξώδη “ανταγωνίζονται” τις αστάθειες CFS, οι αστάθειες CFS των r-modes θα μπορούσαν να ενεργοποιηθούν πολύ πιο εύκολα από ότι οι αντίστοιχες αστάθειες των σφαιροειδών modes. Για παράδειγμα, θα μπορούσαν να ενεργοποιηθούν σε αστέρες νετρονίων περιστρεφόμενους με γωνιακές ταχύτητες $\Omega > 0.2\Omega_K$ και με θερμοκρασίες 10^6 Kelvin $< T < 10^{10}$ Kelvin (Σχήμα 1.10).

Ας δούμε, όμως, το γιατί οι r-modes καθίστανται τόσο εύκολα ασταθείς. Οι ιδιοσυχνότητές τους, για περιστρεφόμενους (rotational) και αδρανειακούς (inertial)

παρατηρητές, είναι (βλέπε π.χ. [68]):

$$\sigma_r = +\frac{2m\Omega}{\ell(\ell+1)} > 0 \longleftrightarrow \sigma_i = \sigma_r - m\Omega = -\frac{(\ell-1)(\ell+2)m\Omega}{\ell(\ell+1)} < 0. \quad (1.15)$$

Δηλαδή, το κριτήριο έναρξης ή παύσης της αστάθειας CFS, $\sigma_r \sigma_i < 0$, ικανοποιείται για κάθε τιμή του Ω , ή αλλιώς, $\Omega_c = 0$. Από εκεί και πέρα, πρέπει να εξετάσουμε την δράση των “ανταγωνιστικών” μηχανισμών, βαρυτικής ακτινοβολίας και ιξωδών. Αν ένας mode έχει ενέργεια E και κερδίζει ή χάνει ενέργεια με ρυθμό dE/dt , τότε:

$$\frac{1}{2E} \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\tau_{gw}} + \frac{1}{\tau_{bv}} + \frac{1}{\tau_{sv}}, \quad (1.16)$$

όπου τ_{gw} , τ_{bv} , τ_{sv} οι χαρακτηριστικές χρονικές κλίμακες (timescales) αύξησης ή απόσβεσης λόγω βαρυτικών κυμάτων, γενικού ιξώδους και γραμμικού ιξώδους, αντίστοιχα. Για τους r-modes είναι, για παράδειγμα (βλέπε π.χ. [76, 77, 78]):

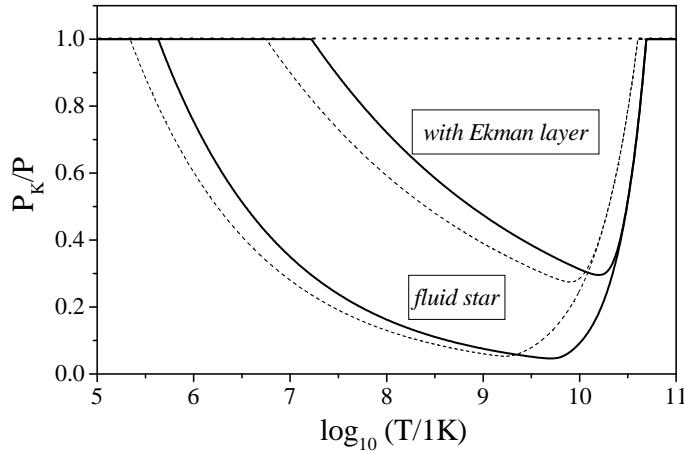
$$\tau_{gw} \simeq +47M_{1.4}^{-1}R_{10}^{-4}P_{-3}^6 \text{ sec}, \quad (1.17\alpha')$$

$$\tau_{sv} \simeq -6.7 \times 10^7 M_{1.4}^{-5/4} R_{10}^{23/4} T_9^2 \text{ sec}, \quad (1.17\beta')$$

$$\tau_{bv} \simeq -2.7 \times 10^{11} M_{1.4} R_{10}^{-1} P_{-3}^2 T_9^{-6} \text{ sec}, \quad (1.17\gamma')$$

όπου $R_{10} := R/10 \text{ km}$, $M_{1.4} := M/1.4 \text{ M}_\odot$, $P_{-3} := P/10^{-3} \text{ sec}$, $T_9 := T/10^9 \text{ Kelvin}$ με R, M, P, T την ακτίνα, τη μάζα, την περίοδο περιστροφής και τη θερμοκρασία ενός αστέρα νετρονίων. Βρίσκοντας τις ρίζες της Εξίσωσης (1.16), $dE/dt = 0$, για έναν “τυπικό” αστέρα νετρονίων ($M = 1.4 \text{ M}_\odot$, $R = 10 \text{ km}$), κάνοντας χρήση των Σχέσεων (1.17α' - 1.17γ'), παίρνουμε την καμπύλη $\Omega_c = \Omega_c(T)$ (βλέπε π.χ. Σχήμα 1.10).

Η παρουσία στερεού φλοιού μπορεί να επηρεάσει την προηγούμενη εικόνα μας για την αστάθεια των r-modes. Ο στερεός φλοιός τροποποιεί τις ιδιοσυναρτήσεις των r-modes και τις αναγκάζει να τείνουν να μηδενιστούν στη βάση του. Έτσι, τα πλάτη των r-modes διαμορφώνονται αναλόγως, μέσα σε μια περιοχή λίγων εκατοστών στη βάση της κρούστας, σε ένα “στρώμα Ekman”. Ουσιαστικά, ο στερεός φλοιός δρα σαν ένας επιπρόσθετος μηχανισμός απόσβεσης. Πρέπει, επομένως, να προσθέσουμε, στη Σχέση (1.16), μία ακόμη χρονική κλίμακα απόσβεσης, αυτήν που συνδέεται με την ύπαρξη στερεού φλοιού (ή, ισοδύναμα, με την ύπαρξη ενός στρώματος Ekman), τ_{Ek} .



Σχήμα 1.11: Διαφορά στο “παράθυρο” αστάθειας των r-modes μεταξύ ενός ρευστού αστέρα νετρονίων και ενός αστέρα νετρονίων με στερεό φλοιό (επομένως και με στρώμα Ekman). Οι συνεχείς γραμμές είναι για έναν πολυτροπικό αστέρα ενώ οι διακεκομένες γραμμές για έναν ομογενή αστέρα. Βλέπε Andersson & Kokkotas (2001) [68].

Μια πρώτη εκτίμηση, για έναν “τυπικό” πολυτροπικό αστέρα νετρονίων, έδειξαν ότι (βλέπε π.χ. Andersson & Kokkotas 2001, Andersson 2003, [68, 70], βλέπε επίσης Σχήμα 1.11):

$$\tau_{\text{Ek}} \simeq -830 T_9 P_{-3}^{1/2} \text{ sec.} \quad (1.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι ο ρόλος του στερεού φλοιού είναι αρκετά σημαντικός. Είναι απαραίτητες περισσότερες μελέτες σε σχετικιστικούς, περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό ώστε να επαληθευτεί ή να βελτιωθεί ποσοτικά η παραπάνω εκτίμηση.

Οι περισσότεροι από τους αστέρες νετρονίων που έχουν ανακαλυφθεί μέχρι σήμερα περιστρέφονται αργά, υπό την έννοια ότι η γωνιακή ταχύτητά τους, Ω , είναι κατά πολύ μικρότερη από την ταχύτητα Kepler, Ω_K , που τους αντιστοιχεί (βλέπε π.χ. [102]). Με άλλα λόγια ο λόγος $\varepsilon := \Omega/\Omega_K$ είναι κατά πολύ μικρότερος από τη μονάδα, $\varepsilon \ll 1$. Σε αυτά τα πλαίσια, μπορούμε να υεωρήσουμε την αστρική περιστροφή ως μικρή γραμμική διαταραχή της μη - περιστροφικής, στατικής κατάστασης. Αν για παράδειγμα ένας αστέρας νετρονίων περιστρέφεται με το ένα δέκατο της γωνιακής ταχύτητας Kepler, ο παραπάνω λόγος ισούται με 0.1. Υπολογίζοντας την επόμενης - τάξης διόρθωση,

βλέπουμε ότι αυτή είναι $\varepsilon^2 = (\Omega/\Omega_K)^2 = 0.01$. Βλέπουμε δηλαδή ότι αυτή δεν είναι σημαντική. Οι γραμμικές αυτές προσεγγίσεις είναι πολύ χρήσιμες στα πλαίσια της αριθμητικής σχετικότητας. Καθιστούν τα διάφορα προβλήματα πολύ πιο εύκολα επιλύσιμα, ανάγοντάς τα για παράδειγμα σε μονοδιάστατα και βιοηθούν στη συνολική ανάλυση της φυσικής του προβλήματος.

Ταλαντώσεις σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων μελετήθηκαν από τους Ruoff, Stavridis & Kokkotas (2002, 2003) [79, 80]. Οι μελέτες αυτές περιορίστηκαν στην πρώτης - τάξης περιστροφική προσέγγιση (ως προς την παράμετρο Ω/Ω_K) αλλά έλαβαν υπόψη τόσο τις διαταραχές του ρευστού όσο και τις διαταραχές του χωρόχρονου (δεν υιοθετήθηκε, δηλαδή, η απλουστευτική προσέγγιση Cowling κατά την οποία αγνοούνται οι διαταραχές του χωρόχρονου, Cowling 1941, [90]). Φυσικά, η προσέγγιση αυτή είναι κατάλληλη για βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων και δεν ισχύει για την περίπτωση των ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων, που θα θέλαμε πραγματικά να μελετήσουμε. Ωστόσο, συμπεράσματα από μια τέτοια μελέτη είναι οπωσδήποτε χρήσιμα αποτελούν οδηγό μας για οποιαδήποτε μετέπειτα μελέτη σε ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων.

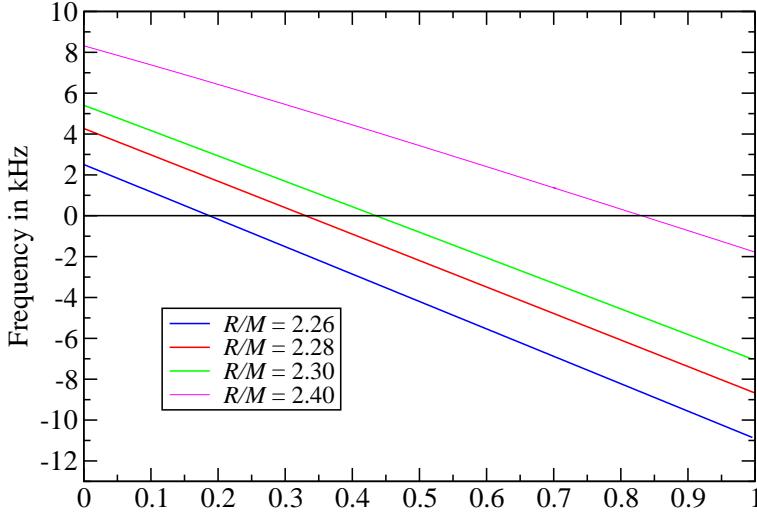
Ωστόσο, τα πράγματα είναι διαφορετικά όταν ενδιαφερόμαστε για μεγάλες περιστροφικές συχνότητες. Αν, για παράδειγμα $\Omega = 0.7\Omega_K$ τότε $\varepsilon = 0.7$ και $\varepsilon^2 = 0.49$. Οι δεύτερης - τάξης επιδράσεις, δηλαδή, είναι συγκρίσιμες (και άρα εξίσου σημαντικές) με τις επιδράσεις πρώτης - τάξης. Από τη στιγμή που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε γρήγορα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, οι προσεγγίσεις πρώτης - τάξης δεν μας είναι αρκετές. Θα μπορούσαμε να επεκτείνουμε τις προσεγγίσεις αυτές και να συμπεριλάβουμε διορθώσεις δεύτερης - τάξης, τρίτης - τάξης και γενικά προσεγγίσεις ανωτέρων τάξεων. Υπάρχει ωστόσο μια διαφορετική εναλλακτική λύση. Η λύση αυτή είναι να μελετήσουμε τους ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων (και τις ταλαντώσεις τους) σε δύο χωρικές διαστάσεις, δηλαδή με διδιάστατες αριθμητικές μεθόδους.

Ο υπολογισμός ιδιοσυχνοτήτων ταλάντωσης γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων είναι ένας σημαντικός στόχος για τη σύγχρονη Αστροφυσική και αποτελεί πρόκληση για την αριθμητική Σχετικότητα. Στα πλαίσια της Νευτώνειας Βαρυτικής

Θεωρίας υπήρξαν αρχετές μελέτες για τις αξονικά συμμετρικές ($m = 0$) ταλαντώσεις ή τις μη - αξονικά συμμετρικές ($m \neq 0$) ταλαντώσεις γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων (π.χ. Clement 1981, Ipser & Lindblom 1990, [81, 82]). Ωστόσο, στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας οι σχετικές μελέτες είναι αρκετά λιγότερες.

Για παράδειγμα, οι Stergioulas & Friedman (1998) [72] υπολόγισαν μη - αξονικά συμμετρικούς, μηδενικούς (neutral) modes γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Με άλλα λόγια, υπολόγισαν τις περιστροφικές εκείνες συχνότητες στις οποίες συγκεκριμένοι $\ell = m$ modes μηδενίζουν τις ιδιοσυχνότητές τους. Οι Yoshida & Eriguchi (2001) [83] υπολόγισαν ιδιοσυχνότητες ακτινοειδών (quasi - radial) ταλαντώσεων γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων στην προσέγγιση Cowling. Μεταξύ άλλων οι Yoshida & Eriguchi (2001) βρήκαν ότι σε πολύ γρήγορα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων παρατηρούνται μη - επιτρεπτές διασταυρώσεις (avoided crossings) μεταξύ διαφόρων modes. Οι Font, Dimmelmeier, Gupta & Stergioulas (2001) [84] μελέτησαν αξονικά συμμετρικούς ($m = 0$) modes στην προσέγγιση Cowling με έναν μη - γραμμικό αριθμητικό κώδικα. Βρήκαν τις ιδιοσυχνότητες πολλών f- και p-modes για διάφορες τιμές του αρμονικού δείκτη ℓ και για περιστροφικές συχνότητες του αστέρων $\Omega \simeq \Omega_K$, όπου Ω_K είναι η μέγιστη επιτρεπόμενη περιστροφική συχνότητα ενός αστέρα, (συχνότητα Kepler). Οι Font et al. (2002) [85] μελέτησαν τις ακτινοειδείς ταλαντώσεις γρήγορα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων, στην πλήρη σχετικιστική θεωρία. Δηλαδή, αντίθετα με τους Yoshida & Eriguchi (2001), δεν αγνόησαν τη δυναμική φύση του χωρόχρονου.

Σε μία άλλη προσέγγιση, την “αντίστροφη προσέγγιση Cowling” (Inverse Cowling Approximation, ICA, βλέπε π.χ. Andersson, Kokkotas & Schutz 1996, [95]), οι Kokkotas, Ruoff & Andersson (2004) [86] μελέτησαν w-modes βραδέως περιστρεφόμενων υπερ - συμπαγών αστέρων νετρονίων. Στην αντίστροφη προσέγγιση Cowling, όπως είναι φανερό και από το ίδιο το όνομα της προσέγγισης, αγνοούνται οι διαταραχές του αστρικού ρευστού και μελετούνται μονάχα οι διαταραχές του χωρόχρονου. Έτσι, η αντίστροφη προσέγγιση Cowling είναι χρήσιμη στην μελέτη των ίδιων ταλαντώσεων



Σχήμα 1.12: Ιδιοσυχνότητες των w-modes σε υπερ - συμπαγείς ($R < 3M$) αστέρες νετρονίων. Οι ιδιοσυχνότητες αυτές μηδενίζονται και καθίστανται CFS ασταθείς όταν οι αστέρες νετρονίων περιστρέφονται αρκετά γρήγορα ώστε να έχουν ήδη αναπτύξει εργόσφαιρες. Βλέπε Kokkotas, Ruoff & Andersson (2004) [86].

του χωρόχρονου, δηλαδή των w-modes. Οι Kokkotas, Ruoff & Andersson βρήκαν ότι οι w-modes καθίστανται CFS ασταθείς σε περιστρεφόμενα υπερ - συμπαγή ($R < 3M$) αστέρια όταν ήδη αυτά έχουν αναπτύξει εργόσφαιρα (βλέπε π.χ. Σχήμα 1.12). Συσχέτισαν έτσι, αυτήν την CFS αστάθεια των w-modes με την (παλαιότερα) προταθείσα “αστάθεια εργοπεριοχής” (ergoregion instability, βλέπε π.χ. Friedman 1979, [87]).

1.4 Σύνοψη

Στο κεφάλαιο αυτό παραθέσαμε μία σειρά εργασιών - μελετών που αφορούν, ως επί το πλείστον, ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Σύμφωνα με την σημερινή μας εικόνα για την αστρική εξέλιξη και την αστρική δομή, περιμένουμε ότι οι radio - pulsars και οι magnetars είναι αστέρες νετρονίων που περιβάλλονται από έναν τέτοιο στερεό φλοιό. Παρατηρούμενες περιοδικότητες στην ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία των αντικειμένων αυτών (subpulses, micropulses, QPOs) ερμηνεύονται ως ταλαντώσεις του στερεού φλοιού τους και ενισχύουν τη σημερινή εικόνα που έχουμε

για τη φύση τους (Ενότητα 1.1).

Τα θεωρητικά μοντέλα που αναπτύσσονται παράλληλα με τις (όλο και πιο ακριβείς) παρατηρήσεις μας γίνονται (κι αυτά) ολοένα και πιο λεπτομερή: οι Νευτώνεις περιγραφές χάνουν τη θέση τους από (σωστότερες) σχετικιστικές, τα ομογενή μαγνητικά πεδία εγκαταλείπονται και αντ' αυτών θεωρούνται διπολικά, λαμβάνονται υπ' όψη οι επιδράσεις της αστρικής περιστροφής, οι επιδράσεις της πραγματικής εσωτερικής δομής κ.ο.κ. Στα πλαίσια της θεωρητικής αυτής προσπάθειας, μελετούμε στη διατριβή αυτή, ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους και βραδέως περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό (Κεφάλαια 4 και 5). Επίσης, μελετούμε μαγνητισμένους (μη - περιστρεφόμενους) αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό (Κεφάλαιο 6). Προηγουμένως, περιγράφουμε τις εξισώσεις δομής τέτοιων αστέρων νετρονίων (Κεφάλαιο 2) και παράγουμε τις μαθηματικές εξισώσεις με τις οποίες περιγράφονται οι ταλαντώσεις τους (Κεφάλαιο 3).

Μία άλλη ενδιαφέρουσα πτυχή της θεωρίας ταλαντώσεων σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων είναι η ύπαρξη και η εμφάνιση (ή όχι) ασταθειών CFS (Ενότητα 1.3). Είδαμε ότι, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι f-modes, οι r-modes και οι w-modes. Ωστόσο η μελέτη της αστάθειας αυτών προϋποθέτει διδιάστατες μαθηματικές και αριθμητικές τεχνικές. Τέτοιες μελέτες επιχειρούμε (μαθηματικά) στις Ενότητες 3.3.1, 3.3.2 και (αριθμητικά) στο Κεφάλαιο 7. Επίσης, στο Κεφάλαιο 5 επιχειρούμε μία πρώτη διερεύνηση των ασταθειών CFS διαφόρων modes του στερεού φλοιού.

Κεφάλαιο 2

Μοντέλα αστέρων νετρονίων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τη διαδικασία κατασκευής μοντέλων αστέρων νετρονίων στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Εν γένει η κατασκευή μοντέλων εξαρτάται από μια σειρά παραμέτρων όπως για παράδειγμα από την περιστροφή, την παρουσία μαγνητικών πεδίων, τις εναλλακτικές καταστατικές εξισώσεις κ.ά. Αφετηρία μας είναι οι μη - περιστρεφόμενοι μη - μαγνητισμένοι αστέρες νετρονίων, οι οποίοι περιγράφονται μαθηματικά από ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης - τάξης, τις εξισώσεις Tolman - Oppenheimer - Volkov (TOV) (βλέπε π.χ. Shapiro & Teukolsky 1983, Σπύρου 1995, Glendenning 1997, [104, 105, 106]). Το σύστημα αυτό πρέπει να λυθεί αριθμητικά, αφού πρώτα καθοριστούν οι απαραίτητες φυσικές συνοριακές συνθήκες (Ενότητα 2.1).

Στο επόμενο βήμα εισάγουμε την αστρική περιστροφή (Ενότητες 2.2 και 2.3). Αυτή υπεισέρχεται ως μία μικρή παράμετρος όταν θεωρούμε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Υπενθυμίζουμε ότι ο ταχύτατα περιστρεφόμενος pulsar (PSR 1937+21) έχει περίοδο περιστροφής $P \simeq 1.56$ msec ενώ η περίοδος Kepler για έναν αστέρα νετρονίων είναι αρκετά μικρότερη, $P_K \simeq 0.5$ msec. Με άλλα λόγια, ακόμη και για τον ταχύτερα περιστρεφόμενο pulsar η παράμετρος $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$ είναι αρκετά μικρή ($\varepsilon \simeq 0.3$) και για βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων η παράμετρος αυτή είναι ακόμη πιο μικρή. Μπορούμε, επομένως, να αναπτύσσουμε τις εξισώσεις που περιγράφουν αξονικά συμμετρικά (περιστρεφόμενα) μοντέλα αστέρων νετρονίων ως προς αυτήν τη μικρή παράμετρο $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$.

Αναπτύσσοντας τις αξονικά συμμετρικές λύσεις σε τάξεις ως προς ε (Hartle 1967, [47]), κατασκευάζουμε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων (πρώτης - τάξης ως προς ε) και ταχύτερα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων (δεύτερης - τάξης ως προς ε) με βάση τους μη - περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων (μηδενικής - τάξης ως προς ε). Ο στερεός φλοιός υπεισέρχεται στις εξισώσεις κατασκευής μόνο σε δεύτερη τάξη ως προς ε . Οι μη - περιστρεφόμενοι και οι βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων επηρεάζονται από την παρουσία του στερεού φλοιού μόνο μέσω της μη - μηδενικής τιμής του συντελεστή γραμμικού iέωδους (shear modulus) μ (Quintana 1976, [49]). Για ταχύτατα περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, έχουμε τον αριθμητικό κώδικα RNS (Rotating Neutron Star) των Stergioulas & Friedman (1995) [50] που είναι διδιάστατος και συνεπής σε κάθε τάξη ως προς ε . Για ταχύτατους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό, δεν υπάρχει κάποιος αντίστοιχος κώδικας κατασκευής αν και οι σχετικές διδιάστατες εξισώσεις είναι γνωστές ήδη από τις αρχές της προηγούμενης δεκαετίας (Priou 1992, [51]). Μοντέλα περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων θα χρησιμοποιήσουμε στα Κεφάλαια 5 και 7.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τον τρόπο κατασκευής μαγνητισμένων αστέρων νετρονίων ακολουθώντας τη μέθοδο των Konno, Obata & Kojima (1999) [54] και χρησιμοποιούμε μια μέθοδο παρόμοια με αυτή του Hartle για περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων (Ενότητα 2.4). Ακόμα και για magnetars, ισχυρά μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων, η πρώτης - τάξης προσέγγιση είναι ικανοποιητική, αφού η μαγνητική ενέργειά τους είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερη από τη δυναμική τους ενέργεια, και έτσι περιοριζόμαστε μόνο σε αυτήν την προσέγγιση. Τους αστέρες αυτούς θα τους χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 6 όπου θα μελετήσουμε τις επιδράσεις του μαγνητικού πεδίου στις τοροειδείς ταλαντώσεις του στερεού φλοιού τους.

Κλείνουμε το κεφάλαιο, με μια αναφορά στις καταστατικές εξισώσεις που χρησιμοποιούμε σε αυτήν τη διατριβή. Θεωρούμε τόσο πολυτροπικές όσο και ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις (Ενότητα 2.5), ξεχωρίζουμε τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά τους (ακτίνα, μάζα, σχετικό πάχος στερεού φλοιού, αδιαβατικός δείκτης κ.ά.) και κατασκευάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό σύνολο ρεαλιστικών μοντέλων αστέρων νετρονίων.

2.1 Στατικοί, σφαιρικοί αστέρες νετρονίων

Ένας στατικός, σφαιρικός αστέρας νετρονίων περιγράφεται από τη μετρική (βλέπε π.χ. Misner, Thorne & Wheeler 1973, [101]):

$$ds^2 = -e^{2\nu}dt^2 + e^{2\lambda}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.1)$$

όπου τα (αποκαλούμενα) “βαρυτικά δυναμικά” $\nu = \nu(r)$ και $\lambda = \lambda(r)$ προσδιορίζονται από τις εξισώσεις TOV (βλέπε π.χ. [101, 104, 105, 106]):

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (2.2\alpha')$$

$$\frac{d\nu}{dr} = e^{2\lambda} \left(4\pi r p + \frac{M(r)}{r^2} \right), \quad (2.2\beta')$$

$$\frac{dp}{dr} = -(\rho + p) \frac{d\nu}{dr}. \quad (2.2\gamma')$$

$M(r)$ είναι η μάζα εντός ακτίνας r . Για αυτήν ισχύει η σχέση:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2M(r)}{r}. \quad (2.3)$$

Η πυκνότητα ενέργειας, $\rho = \rho(r)$, και η πίεση, $p = p(r)$, συνδέονται με μια καταστατική εξισωση (Equation of State, EoS), μια εξισωση της μορφής $p = p(\rho)$. Οι διαφορικές εξισώσεις TOV, Eξισώσεις (2.2), συμπληρώνονται από τις οριακές συνθήκες:

$$\nu|_R = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2M}{R} \right), \quad (2.4\alpha')$$

$$p|_R = 0. \quad (2.4\beta')$$

Οι εξισώσεις TOV ολοκληρώνονται αριθμητικά από το χέντρο του αστέρα, $r = 0$ ($\nu = \nu_0, \lambda = \lambda_0, M(r) = 0, \rho = \rho_0$ και $p = p_0$) ως την επιφάνειά του, $r = R$ ($\nu = \nu_R, \lambda = \lambda_R, M(r) = M, \rho = 0$ και $p = 0$) λαμβάνοντας υπόψη ότι, έξω από τον αστέρα, ο χωρόχρονος περιγράφεται από τη μετρική Schwarzschild ([101, 104, 105, 106]):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2, \quad (2.5)$$

δηλαδή λαμβάνοντας υπόψη ότι $e^{2\nu_R} = 1 - 2M/R$ και $e^{2\lambda_R} = (1 - 2M/R)^{-1}$.

2.2 Βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων

Η μετρική ενός βραδέως περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων, σε πρώτης - τάξης προσέγγιση ως προς $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$, έχει τη μορφή (Hartle 1967, [47]):

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi. \quad (2.6)$$

Η συνάρτηση $\omega = \omega(r)$ προσδιορίζεται από την εξίσωση παράσυρσης των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς (dragging of inertial frames of reference) (βλέπε [47]):

$$\frac{d^2\varpi}{dr^2} - \left(\nu' + \lambda' - \frac{4}{r} \right) \frac{d\varpi}{dr} - 16\pi e^{2\lambda} (\rho + p) \varpi = 0, \quad (2.7)$$

με την οριακή συνθήκη στην επιφάνεια του αστέρα:

$$\varpi|_R = \Omega - \frac{2J}{R^3}. \quad (2.8)$$

Στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιείται μια νέα μεταβλητή $\varpi = \varpi(r)$ η οποία ορίζεται από τη σχέση:

$$\varpi := \Omega - \omega. \quad (2.9)$$

Για τη μετρική αυτή και διατηρώντας την πρώτης - τάξης προσέγγιση, η τετρα - ταχύτητα του αστρικού ρευστού είναι:

$$u^\alpha = [e^{-\nu}, 0, 0, \Omega e^{-\nu}]. \quad (2.10)$$

Οι είναι η γωνιακή ταχύτητα (ή περιστροφική συχνότητα) του αστέρα που ορίζεται από τη σχέση $\Omega := u^\phi/u^t$. Εδώ αξίζει να σημειωθεί ότι η μετρική (2.6) και η τετρα - ταχύτητα (2.10) περιγράφονται στο σύστημα αναφοράς ενός αδρανειακού παρατηρητή. Ένας παρατηρητής που περιστρέφεται μαζί με τον αστέρα μετράει γωνία $\varphi = \phi - \Omega t$ και έτσι η μετρική και η τετρα - ταχύτητα για εκείνον είναι:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 + 2\varpi r^2 \sin^2 \theta dt d\varphi, \quad (2.11)$$

και:

$$u^\alpha = [e^{-\nu}, 0, 0, 0]. \quad (2.12)$$

Αριθμητικά, ολοκληρώνουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση δεύτερης - τάξης (2.7) από το κέντρο ($r = 0, \omega = \omega_0$) ως την επιφάνεια ($r = R, \omega = \omega_R$) του αστέρα, απαιτώντας να ικανοποιείται η συνθήκη $\omega_R = \Omega - 2J/R^3$ και έχοντας δεδομένες τις συναρτήσεις $\nu = \nu(r), \lambda = \lambda(r), \rho = \rho(r)$ και $p = p(r)$ από την επίλυση των εξισώσεων TOV (Ενότητα 2.1). Ένα εκ των Ω, J (συνήθως το Ω) λαμβάνεται ως ελεύθερη παράμετρος που καθορίζει το ποσό της αστρικής περιστροφής και το άλλο (συνήθως το J) προσδιορίζεται μονότιμα και πάλι μέσω της σχέσης $\omega_R = \Omega - 2J/R^3$.

2.3 Ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων

2.3.1 Δεύτερης - τάξης προσέγγιση ως προς $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$

Σε δεύτερης - τάξης προσέγγιση ως προς Ω/Ω_K , η μετρική παίρνει τη γενικότερη μορφή (Hartle 1967, [47]):

$$ds^2 = -[e^{2\nu}(1+2h) - r^2 \sin^2 \theta \omega^2] dt^2 + e^{2\lambda} \left(1 + \frac{2m}{r - 2M(r)}\right) dr^2 + r^2 (1+2k) d\theta^2 + r^2 (1+2k) \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (2.13)$$

όπου οι νεοεμφανιζόμενες συναρτήσεις $h = h(r, \theta), m = m(r, \theta)$ και $k = k(r, \theta)$ αναπτύσσονται ως εξής (βλέπε [47]):

$$h = h_0 + h_2 P_2, \quad (2.14\alpha')$$

$$m = m_0 + m_2 P_2, \quad (2.14\beta')$$

$$k = k_2 P_2. \quad (2.14\gamma')$$

$P_2 = P_2(\theta)$ είναι το πολυώνυμο Legendre δεύτερης - τάξης, το οποίο δίνεται από τον τύπο (βλέπε π.χ. Jackson 1962, [99]):

$$P_2 = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{2} \sin^2 \theta. \quad (2.15)$$

Οι συναρτήσεις $h_0 = h_0(r)$ και $m_0 = m_0(r)$ είναι οι μονοπολικές ($\ell = 0$) διορθώσεις του στατικού, σφαιρικού, μη - περιστρεφόμενου αστέρα και, όπως δείχνουμε στη συνέχεια, προσδιορίζονται από το μονοπολικό τμήμα του πολυπολικού αναπτύγματος των εξισώσεων Einstein. Αντίστοιχα, οι συναρτήσεις $h_2 = h_2(r), m_2 = m_2(r)$ και

$k_2 = k_2(r)$ αποτελούν τετραπολικές ($\ell = 2$) διορθώσεις και προσδιορίζονται από το τετραπολικό τμήμα του πολυπολικού αναπτύγματος των εξισώσεων Einstein. Με άλλα λόγια, υπολογίζονται οι εξισώσεις Einstein $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ με βάση τη μετρική (2.13). Διατηρούνται όροι μέχρι και δεύτερης - τάξης ως προς Ω οπότε οι εξισώσεις γράφονται στη μορφή:

$$(G_{\alpha\beta})_0 + (G_{\alpha\beta})_2 = 8\pi [(T_{\alpha\beta})_0 + (T_{\alpha\beta})_2]. \quad (2.16)$$

Οι μονοπολικοί ($\ell = 0$) όροι έχουν διαφορετική γωνιακή εξάρτηση από τους τετραπολικούς ($\ell = 2$) όρους και έτσι η παραπάνω εξισώση διασπάται σε δύο επιμέρους εξισώσεις:

$$(G_{\alpha\beta})_0 = 8\pi (T_{\alpha\beta})_0, \quad (2.17\alpha')$$

$$(G_{\alpha\beta})_2 = 8\pi (T_{\alpha\beta})_2. \quad (2.17\beta')$$

Πιο συγκεκριμένα, το μονοπολικό μέρος των εξισώσεων Einstein μας δίνει τρεις εξισώσεις (Quintana 1976, [49]):

$$G_t^t = 8\pi T_t^t:$$

$$\frac{1}{6}j^2r^2(\varpi')^2 - \frac{2}{3}(j^2)'r\varpi^2 - \frac{2}{r^2}\frac{dm_0}{dr} = 8\pi \left[\frac{\rho+p}{p\Gamma}p'\zeta_0^r + (\rho+p)(e_c^c)_0 \right], \quad (2.18\alpha')$$

$$G_r^r = 8\pi T_r^r:$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}j^2r^2(\varpi')^2 - \left(2\nu' + \frac{1}{r}\right)\frac{2m_0}{r^2} + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)\frac{2}{r}\frac{dh_0}{dr} \\ & = -8\pi \left[p'\zeta_0^r + \Lambda(e_c^c)_0 + 2\mu \left(\frac{m_0}{r - 2M(r)} + \frac{d\zeta_0^r}{dr} + \lambda'\zeta_0^r \right) \right], \end{aligned} \quad (2.18\beta')$$

$$G_\theta^\theta + G_\phi^\phi = 8\pi (T_\theta^\theta + T_\phi^\phi):$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2h_0}{dr^2} + \left[3\nu' - \frac{1}{r} - \frac{r^2}{r - 2M(r)}4\pi(\rho + p) \right] \frac{dh_0}{dr} - \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) \frac{1}{r - 2M(r)} \frac{dm_0}{dr} \\ & \quad + \left[(1 - 8\pi r^2\rho) \left(\nu' + \frac{1}{r} \right) + \frac{2}{r} \right] \frac{m_0}{(r - 2M(r))^2} \\ & \quad - \frac{8\pi r}{r - 2M(r)}2\mu \left[\frac{m_0}{r - 2M(r)} + \frac{d\zeta_0^r}{dr} + \left(\lambda' - \frac{1}{r} \right) \zeta_0^r \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \frac{r^3}{r - 2M(r)} j^2(\varpi')^2 + \frac{1}{3} \frac{r^2}{r - 2M(r)} (j^2)' \varpi^2 \left(1 - \frac{\mu}{\rho + p} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.18\gamma')$$

Αντίστοιχα, το τετραπολικό μέρος των εξισώσεων Einstein μας δίνει πέντε εξισώσεις (Quintana 1976, [49]):

$$G_t^t = 8\pi T_t^t:$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left(2\frac{d^2k_2}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{dk_2}{dr}\right) - \left(\frac{M(r)}{r}\right)' 2\frac{dk_2}{dr} - \frac{6m_2}{r^2(r-2M(r))} - \frac{4k_2}{r^2} \\ & - \frac{2}{r^2}\frac{dm_2}{dr} + \frac{2}{3}(j^2)' r\varpi^2 - \frac{1}{6}j^2r^2(\varpi')^2 = 8\pi \left[\frac{\rho+p}{p\Gamma} p' \zeta_2^r + (\rho+p)(e_c^c)_2 \right], \quad (2.19\alpha') \end{aligned}$$

$$G_r^r = 8\pi T_r^r:$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left(2\nu' + \frac{2}{r}\right) \frac{dk_2}{dr} + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \frac{2}{r} \frac{dh_2}{dr} \\ & - \frac{6h_2}{r^2} - \frac{4k_2}{r^2} - \frac{2m_2}{r^2} \left(2\nu' + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{6}j^2r^2(\varpi')^2 \\ & = -8\pi \left[p' \zeta_2^r + \Lambda(e_c^c)_2 + 2\mu \left(\frac{m_2}{r-2M(r)} + \frac{d\zeta_2^r}{dr} + \lambda' \zeta_2^r \right) \right], \quad (2.19\beta') \end{aligned}$$

$$G_r^\theta = 8\pi T_r^\theta:$$

$$\begin{aligned} & \frac{dh_2}{dr} + \frac{dk_2}{dr} + \left(\nu' - \frac{1}{r}\right) h_2 - \left(\nu' + \frac{1}{r}\right) \frac{m_2}{r-2M(r)} \\ & = 8\pi r^2 \mu \left[\frac{1}{r(r-2M(r))} \zeta_2^r + \frac{d\zeta_2^\theta}{dr} \right], \quad (2.19\gamma') \end{aligned}$$

$$G_\theta^\theta - G_\phi^\phi = 8\pi \left(T_\theta^\theta - T_\phi^\phi \right):$$

$$h_2 + \frac{m_2}{r-2M(r)} - \frac{1}{6}j^2r^4(\varpi')^2 + \frac{1}{3}(j^2)'r^3\varpi^2 \left(1 - \frac{\mu}{\rho+p}\right) = 16\pi\mu r^2\zeta_2^\theta, \quad (2.19\delta')$$

$$G_\theta^\theta + G_\phi^\phi = 8\pi \left(T_\theta^\theta + T_\phi^\phi \right):$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{d^2v_2}{dr^2} - 4\pi(\rho+p) \frac{dv_2}{dr} - \left(\nu' + \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{dm_2}{dr} \\ & + \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right) \left(3\nu' - \frac{1}{r}\right) \frac{1}{r} \frac{dh_2}{dr} + \frac{4v_2}{r^3} - \frac{h_2}{r^3} \\ & + \frac{1}{r^2} \left[(1 - 8\pi r^2 \rho) \left(\nu' + \frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r} \right] \frac{m_2}{r-2M(r)} \\ & - \frac{8\pi}{r} 2\mu \left[\frac{m_2}{r-2M(r)} + h_2 - v_2 + \frac{d\zeta_2^r}{dr} + \left(\lambda' - \frac{1}{r}\right) \zeta_2^r + 3\zeta_2^\theta \right] \\ & + \frac{1}{2} j^2 r (\varpi')^2 - \frac{1}{3} (j^2)' \varpi^2 \left(1 - \frac{\mu}{\rho+p}\right) = 0. \quad (2.19\epsilon') \end{aligned}$$

Στις παραπάνω εξισώσεις (2.18) και (2.19), $j = j(r)$ είναι μια νέα μεταβλητή που ορίζεται από τη σχέση (βλέπε [49]):

$$j := e^{-\nu-\lambda}, \quad (2.20)$$

και:

$$\Lambda := \beta - \frac{2}{3}\mu, \quad (2.21)$$

όπου $\mu = \mu(r)$ είναι ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους (shear modulus) και $\beta = \beta(r)$ ο συντελεστής γενικού ιξώδους (bulk modulus). Σε ορισμένες εξισώσεις χρησιμοποιείται η μεταβλητή $v_2 = v_2(r)$ η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά ένας γραμμικός συνδυασμός των h_2 και k_2 :

$$v_2 := h_2 + k_2. \quad (2.22)$$

Επίσης παρατηρούμε ότι εμφανίζονται τρεις νέες μεταβλητές, οι $\zeta_0^r = \zeta_0^r(r)$, $\zeta_2^r = \zeta_2^r(r)$ και $\zeta_2^\theta = \zeta_2^\theta(r)$ οι οποίες, ανάλογα με τις Εξισώσεις (2.14), ορίζονται μέσα από τα αναπτύγματα (βλέπε [49]):

$$\zeta^r = \zeta_0^r + \zeta_2^r P_2, \quad (2.23\alpha')$$

$$\zeta^\theta = \zeta_2^\theta \frac{dP_2}{d\theta}. \quad (2.23\beta')$$

Το e_c^c υπολογίζεται, με τη σειρά του, μέσα από τη σχέση (βλέπε [49]):

$$\begin{aligned} e_c^c &= (e_c^c)_0 + (e_c^c)_2 P_2 \\ &= 2k + \frac{m}{r - 2M(r)} + \frac{\partial \zeta^r}{\partial r} + \left(\frac{2}{r} + \lambda' \right) \zeta^r + \frac{\partial \zeta^\theta}{\partial \theta} + \cot \theta \zeta^\theta + \frac{1}{2} \varpi^2 e^{-2\nu} r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Ανατρέχοντας στη Σχετικιστική Θεωρία Ελαστικότητας που θεμελιώθηκε και εφαρμόστηκε σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων από τους Carter & Quintana τη δεκαετία του '70 (π.χ. Carter & Quintana 1972, Quintana 1976, [48, 49]), βλέπουμε ότι η μεθοδολογία που ακολουθούν είναι η εξής: στη μετρική ενός περιστρεφόμενου αστέρα νετρονίων $g_{\alpha\beta}$, Εξισωση (2.13), αντιστοιχεί μια μετρική μη - περιστρεφόμενου αστέρα, $g_{\alpha\beta}^*$:

$$ds^{*2} = g_{\alpha\beta}^* dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.25)$$

και μέσω αυτών ορίζονται η Eulerian και η Lagrangian διαταραχές της μετρικής:

$$h_{\alpha\beta} := \delta g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^*, \quad (2.26)$$

$$Dg_{\alpha\beta} = \delta g_{\alpha\beta} + \mathcal{L}_\zeta g_{\alpha\beta}. \quad (2.27)$$

Ακολούθως υπολογίζονται το ίχνος e_c^c του τανυστή σχετικής τάσης καθώς και οι συνιστώσες του τανυστή shear, $s_{\alpha\beta}$:

$$e_c^c = \frac{1}{2} \left[\gamma^{*\alpha\beta} (h_{\alpha\beta} + 2\nabla_{(\alpha}\zeta_{\beta)}) + \frac{(h_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi})^2}{-g_{tt}^* g_{\phi\phi}^*} \right] + \mathcal{O}(\Omega^4), \quad (2.28)$$

$$s_{ab} = \frac{1}{2} \left(Dg_{ab} - \frac{2}{3} e_c^c \gamma_{ab}^* \right) + \mathcal{O}(\Omega^4), \quad (2.29)$$

$$s_{\phi\phi} = \frac{1}{2} \left[Dg_{\phi\phi} - \frac{2}{3} e_c^c \gamma_{\phi\phi}^* + \frac{(h_{t\phi} + \Omega g_{\phi\phi})^2}{-g_{tt}^*} \right] + \mathcal{O}(\Omega^4). \quad (2.30)$$

Εισάγωντας τις συνιστώσες αυτές στον τανυστή ενέργειας - ορμής:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta}, \quad (2.31)$$

και λύνοντας τις εξισώσεις Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (2.32)$$

για το χωρόχρονο που περιγράφεται από τη μετρική (2.13) και για το ρευστό που περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας - ορμής (2.31), και διατηρώντας μόνο τους δεύτερης - τάξης (ως προς Ω) όρους στα προκύπτοντα αναπτύγματα, πάρνουμε τις παραπάνω Εξισώσεις (2.18) και (2.19).

2.3.2 Διδιάστατη προσέγγιση

Οι προηγούμενες μέθοδοι δίνουν ικανοποιητικά αποτελέσματα όταν επιθυμούμε να είμαστε συνεπείς σε πρώτη ή / και σε δεύτερη τάξη ως προς $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$. Αν, όμως, επιθυμούμε να είμαστε συνεπείς σε κάθε τάξη ως προς ε θα πρέπει να εγκαταλείψουμε τις προσπάθειές μας για δημιουργία μοντέλων περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων μέσα από πολυπολικά αναπτύγματα. Θα πρέπει, αναπόφευκτα, να κατασκευάσουμε αξονικά συμμετρικές λύσεις σε δύο διαστάσεις.

Σε μια τέτοια περίπτωση, η μετρική έχει τη μορφή:

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{2\psi} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2, \quad (2.33)$$

όπου $\nu = \nu(r, \theta)$, $\mu = \mu(r, \theta)$, $\psi = \psi(r, \theta)$ και $\omega = \omega(r, \theta)$. Ο χωρόχρονος περιγράφεται μοναδικά από τις τέσσερις αυτές συναρτήσεις (βαρυτικά δυναμικά) που υπολογίζονται αριθμητικά από τη λύση των εξισώσεων Einstein, $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$, και των εξισώσεων διατήρησης ενέργειας - ορμής, $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$. Οι εξισώσεις αυτές είναι πεπλεγμένες, μη - γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (δεύτερης τάξης οι $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$, πρώτης τάξης οι $\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0$), ιδιαίτερα μακροσκελείς, και δεν τις παραθέτουμε σε αυτήν την εργασία. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στην εργασία του Priou (1992) [51] όπου λαμβάνεται υπόψη και η ύπαρξη του στερεού φλοιού:

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta}. \quad (2.34)$$

Στην περίπτωση ρευστών αστέρων νετρονίων ($\mu = 0$) που περιστρέφονται ταχέως υπάρχουν αριθμητικοί κώδικες που λύνουν τις εξισώσεις Einstein (μαζί με τις εξισώσεις του ρευστού) σε ένα διδιάστατο αριθμητικό πλέγμα. Δηλαδή δίνουν τις τιμές των διαφόρων δυναμικών σε κάθε σημείο (i, j) του πλέγματος: $\nu = \nu_{i,j}$, $\mu = \mu_{i,j}$ κ.ο.κ. Στην παρούσα διατριβή χρησιμοποιήσαμε έναν από αυτούς τους αριθμητικούς κώδικες (Stergioulas & Friedman 1995, [50])¹, για να δημιουργήσουμε το αξονικά συμμετρικό μοντέλο ενός ταχέως περιστρεφόμενου, ρευστού αστέρα νετρονίων.

Είναι χρήσιμο, ωστόσο, να αναφερθούμε σε δύο άλλα σημεία που έχουν να κάνουν με τη μετρική (2.33). Το πρώτο είναι όταν το αστέρι δεν περιστρέφεται. Στο όριο αυτό $\psi = \mu$, $\omega = 0$ και, επιπλέον, $\nu = \nu(r)$ και $\mu = \mu(r)$. Αναγόμαστε, με λίγα λόγια, στην ισοτροπική μετρική (βλέπε π.χ. [101]):

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (2.35)$$

για έναν στατικό, σφαιρικό αστέρα νετρονίων, και όχι στη μετρική (2.1), που είναι “τύπου Schwarzschild”.

¹Ο αριθμητικός κώδικας RNS (Rotating Neutron Star) είναι διαθέσιμος στην ιστοσελίδα <http://www.gravity.phys.uwm.edu/rns/>

Δεύτερο σημείο που χρίζει αναφοράς είναι η ερμηνεία της μετρικής (2.33) στα πλαίσια του Arnowitt - Deser - Misner (ADM) φορμαλισμού των εξισώσεων Einstein. Στον φορμαλισμό αυτόν “φωλιάζουμε” τριδιάστατες χωρικές επιφάνειες μέσα στον τετραδιάστατο χωρόχρονο. Η μετάβαση από τη μία επιφάνεια στην άλλη γίνεται με τη συνάρτηση lapse, A , ενώ η κίνηση πάνω στις επιφάνειες γίνεται με το διάνυσμα shift, B_i . Οι τριδιάστατες επιφάνειες χαρακτηρίζονται από την τριδιάστατη μετρική γ_{ij} ενώ η μετρική του τετραδιάστατου χωρόχρονου γράφεται με την παρακάτω μορφή (βλέπε π.χ. [101]):

$$ds^2 = - (A^2 - B_i B^i) dt^2 + 2B_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (2.36)$$

όπου οι λατινικοί δείκτες i, j παίρνουν τιμές από 1 ως 3 για τις συντεταγμένες r, θ και ϕ , αντίστοιχα. Συγκρίνοντας τις μετρικές (2.33) και (2.36), εύκολα συμπεραίνουμε ότι:

$$B_i = (0, 0, -e^{2\psi} r^2 \sin^2 \theta \omega), \quad (2.37)$$

$$\gamma^{ij} B_j = B^i = (0, 0, -\omega), \quad (2.38)$$

$$A = e^\nu, \quad (2.39)$$

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\mu} r^2 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2\psi} r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Ακολούθως υπολογίζουμε την εξωγενή καμπυλότητα (extrinsic curvature), K_{ij} , και το ίχνος, K , αυτής (βλέπε π.χ. Ruoff, Stavridis & Kokkotas 2002, [79]):

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \frac{1}{2A} \mathcal{L}_B \gamma_{ij} = \frac{1}{2A} (\nabla_i B_j + \nabla_j B_i) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{e^{-\nu+2\psi}}{2} r^2 \sin^2 \theta \partial_r \omega & -\frac{e^{-\nu+2\psi}}{2} r^2 \sin^2 \theta \partial_\theta \omega \\ -\frac{e^{-\nu+2\psi}}{2} r^2 \sin^2 \theta \partial_r \omega & 0 & 0 \\ -\frac{e^{-\nu+2\psi}}{2} r^2 \sin^2 \theta \partial_\theta \omega & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$K := K^i_i = \gamma^{ij} K_{ij} = 0. \quad (2.42)$$

Στον ADM φορμαλισμό θα αναφερθούμε και στη συνέχεια. Θα τον χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα στην Ενότητα 3.3.2 όπου θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τις εξισώσεις Einstein σε κατάλληλη μορφή για αριθμητική επίλυση σε δύο διαστάσεις.

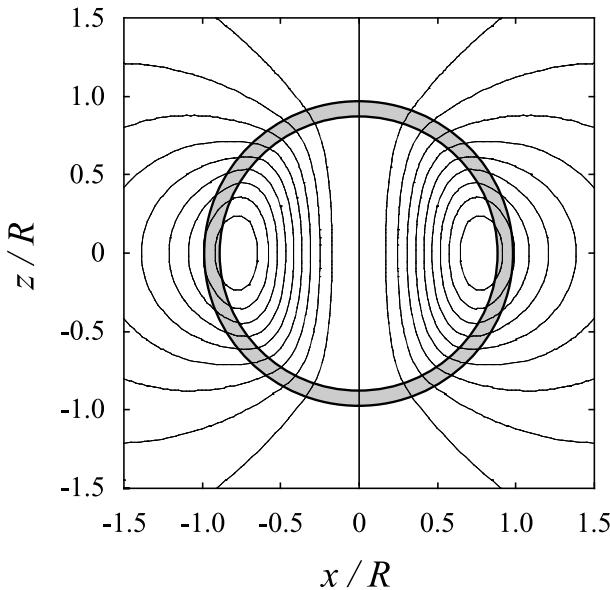
2.4 Μαγνητισμένοι αστέρες νετρονίων

Ένας μαγνητισμένος αστέρας νετρονίων δεν υπόκειται σχηματικές παραμορφώσεις και η μετρική που τον περιγράφει είναι η ίδια με αυτήν ενός στατικού, σφαιρικού αστέρα νετρονίων (βλέπε π.χ. Konno, Obata & Kojima 1999, [54]):

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.43)$$

Η τετρα - ταχύτητα του αστρικού ρευστού που προκύπτει σύμφωνα με την παραπάνω μετρική είναι η εξής:

$$u^\alpha = [e^{-\nu}, 0, 0, 0]. \quad (2.44)$$



Σχήμα 2.1: Μαγνητικές γραμμές ενός αξονικά συμμετρικού, πολοειδούς μαγνητικού πεδίου σε έναν σφαιρικό αστέρα νετρονίων με στερεό φλοιό (βλέπε π.χ. Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]).

Θεωρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο του αστέρα είναι ένα αξονικά συμμετρικό, πολοειδές μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από ένα τετρα - ρεύμα $J_\alpha = [0, 0, 0, J_\phi]$. Καθώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίσο με μηδέν στην ιδανική μαγνητοϋδροδυναμική προσέγγιση, το ηλεκτρομαγνητικό τετρα - δυναμικό έχει και αυτό μόνο ϕ - συνιστώσα, $A_\alpha = [0, 0, 0, A_\phi]$. Τα δύο τετρα - διανύσματα J_α και A_α συνδέονται μέσω των εξισώσεων

Maxwell (βλέπε π.χ. Jackson 1962, [99]):

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 4\pi J^\alpha. \quad (2.45)$$

Ο $F_{\alpha\beta}$ ονομάζεται τανυστής Faraday και συνδέεται με το τετρα - δυναμικό A_α με τη σχέση (βλέπε π.χ. [99]):

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha. \quad (2.46)$$

Πιο αναλυτικά, το ανάπτυγμα της Εξίσωσης (2.45) δίνει μια διδιάστατη ελλειπτική διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (Konno, Obata & Kojima 1999, [54]):

$$e^{-2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial r^2} A_\phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} A_\phi + e^{-2\lambda} (\nu' - \lambda') \frac{\partial}{\partial r} A_\phi - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi = -4\pi J_\phi. \quad (2.47)$$

Οι συναρτήσεις $J_\phi = J_\phi(r, \theta)$ και $A_\phi = A_\phi(r, \theta)$ εκφράζονται με τη βοήθεια των πολυωνύμων Legendre ως εξής (βλέπε [54]):

$$J_\phi = \sum_{\ell_M=1}^{\infty} j_{\ell_M} \sin \theta \frac{dP_{\ell_M}}{d\theta}, \quad (2.48\alpha')$$

$$A_\phi = \sum_{\ell_M=1}^{\infty} \alpha_{\ell_M} \sin \theta \frac{dP_{\ell_M}}{d\theta}, \quad (2.48\beta')$$

όπου $j_{\ell_M} = j_{\ell_M}(r)$, $\alpha_{\ell_M} = \alpha_{\ell_M}(r)$ και όπου η τιμή του ℓ_M καθορίζει τη γεωμετρία του μαγνητικού πεδίου. Για διπολικό μαγνητικό πεδίο είναι $\ell_M = 1$ οπότε εισάγοντας τις Σχέσεις (2.48) στην Εξίσωση (2.47) και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\sin \theta \frac{dP_{\ell_M}}{d\theta} \right) - \cot \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_{\ell_M}}{d\theta} \right) = -\ell_M (\ell_M + 1) \sin \theta \frac{dP_{\ell_M}}{d\theta}, \quad (2.49)$$

για $\ell_M = 1$, καταλήγουμε στη μονοδιάστατη συνήθη διαφορική εξίσωση (Konno, Obata & Kojima 1999, [54]):

$$e^{-2\lambda} \frac{d^2 \alpha_1}{dr^2} + e^{-2\lambda} (\nu' - \lambda') \frac{d\alpha_1}{dr} - \frac{2}{r^2} \alpha_1 = -4\pi j_1. \quad (2.50)$$

Για το εσωτερικό του αστέρα η συνάρτηση $\alpha_1 = \alpha_1(r)$ υπολογίζεται αριθμητικά από την παραπάνω εξίσωση. Για το εξωτερικό του αστέρα υπάρχει η γνωστή αναλυτική λύση (βλέπε π.χ. Wasserman & Shapiro 1983, [52]):

$$\alpha_1 = -\frac{3\mu_b}{8M^3} r^2 \left[\ln \left(1 - \frac{2M}{r} \right) + \frac{2M}{r} + \frac{2M^2}{r^2} \right], \quad (2.51)$$

όπου μια είναι η μαγνητική διπολική ροπή που μετράει ένας παρατηρητής στο άπειρο. Οι δύο λύσεις, εσωτερική και εξωτερική, πρέπει να ταιριάζουν ομαλά στην επιφάνεια του αστέρα και αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση α_1 πρέπει να είναι συνεχής και με συνεχή πρώτη παράγωγο στο σημείο $r = R$:

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(\varepsilon\sigma\omega)} \Big|_R &= \alpha_1^{(\varepsilon\xi\omega)} \Big|_R, \\ \frac{d\alpha_1}{dr} (\varepsilon\sigma\omega) \Big|_R &= \frac{d\alpha_1}{dr} (\varepsilon\xi\omega) \Big|_R. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Η κατανομή του τετρα-ρεύματος $j_1 = j_1(r)$, που εμφανίζεται στην Εξίσωση (2.50), δεν μπορεί να είναι εντελώς αυθαίρετη αλλά οφείλει να πληρεί μια συνθήκη ολοκληρωσιμότητας (βλέπε π.χ. Bonazzola, Gourgoulhon, Salgado & March 1993, [53]) και αυτό περιορίζει τη συναρτησιακή της μορφή. Στην παρούσα μελέτη ακολουθούμε τους Konno, Obata & Kojima (1999) [54] και χρησιμοποιούμε την κατανομή:

$$j_1 = f_0 r^2 (\rho + p). \quad (2.53)$$

f_0 είναι σταθερά που προσδιορίζεται μονότιμα από την εφαρμογή των Συνθηκών (2.52). Οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου $H_r = H_r(r, \theta)$ και $H_\theta = H_\theta(r, \theta)$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (βλέπε π.χ. [54]):

$$H_r = -\frac{e^\lambda}{\sqrt{4\pi}r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\phi = \frac{e^\lambda \cos \theta}{\sqrt{\pi}r^2} \alpha_1, \quad (2.54\alpha')$$

$$H_\theta = \frac{e^{-\lambda}}{\sqrt{4\pi} \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} A_\phi = -\frac{e^{-\lambda} \sin \theta}{\sqrt{4\pi}} \frac{d\alpha_1}{dr}, \quad (2.54\beta')$$

παίρνοντας υπόψη ότι $H_\alpha = B_\alpha / \sqrt{4\pi}$ και ότι:

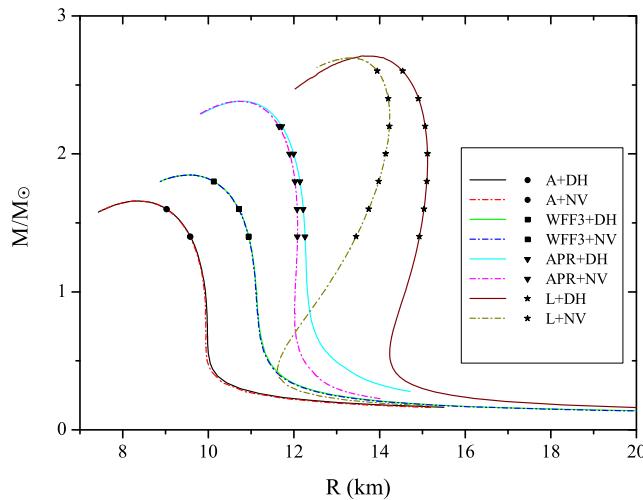
$$B_\alpha = \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\beta F^{\gamma\delta}. \quad (2.55)$$

$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ είναι ο τανυστής Levi - Civita που σχετίζεται με τη μετρική (2.43). Τέλος, στο βόρειο πόλο του αστέρα νετρονίων ($\theta = 0, r = R$) είναι $B_\theta = 0$ και έτσι η ένταση του μαγνητικού πεδίου $B^2 = B_\alpha B^\alpha = B_r B^r + B_\theta B^\theta$ εκεί είναι:

$$\alpha_1|_R = \frac{R^2}{2} B. \quad (2.56)$$

2.5 Καταστατικές εξισώσεις

Οι πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις δίνουν, συνήθως, αρχετά καλές πρώτες εκτιμήσεις των αποτελεσμάτων που ψάχνουμε. Η χρήση παραμέτρων μάς επιτρέπει να δημιουργούμε ακόμη και τα “πολυτροπικά ισοδύναμα” των πραγματικών καταστατικών εξισώσεων και έτσι, από δυναμικής άποψης, τα αποτελέσματα της μελέτης με βάση πολυτροπικά μοντέλα είναι ποιοτικά σωστά και ποσοτικά πολύ κοντά στα πραγματικά αποτελέσματα.



Σχήμα 2.2: Καμπύλες $M - R$ (μάζας - ακτίνας) για μοντέλα αστέρων νετρονίων με ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις. Συνδυάζονται οι καταστατικές εξισώσεις A, WFF3, APR και L για τον εσωτερικό ρευστό πυρήνα, με τις καταστατικές εξισώσεις DH και NV για τον εξωτερικό στερεό φλοιό. Στις soft καταστατικές εξισώσεις (A, WFF3) ο φλοιός δεν αλλάζει σημαντικά την καμπύλη $M - R$. Αντίθετα, στις stiff καταστατικές εξισώσεις (APR, L), η επιλογή της καταστατικής εξίσωσης για τον φλοιό (DH, NV) μπορεί να επιφέρει αξιοσημείωτες διαφοροποιήσεις (βλέπε π.χ. Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]).

Για πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, χρησιμοποιούμε 34 μοντέλα αστέρων νετρονίων συνδυάζοντας τις ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις A, WFF3, APR ή L για τον ρευστό πυρήνα (βλέπε [57, 58, 59, 60]) με τις καταστατικές εξισώσεις DH ή NV για

τον στερεό φλοιό (βλέπε [61, 62]). Για κάθε έναν από τους οχτώ προκύπτοντες συνδυασμούς, κατασκευάζουμε μια ακολουθία μοντέλων αρχίζοντας από ένα μοντέλο μικρής μάζας, περίπου ίσης με $1.4M_{\odot}$ και φτάνοντας, σε βήματα $0.2M_{\odot}$, στο μοντέλο μέγιστης μάζας που επιτρέπει η εκάστοτε καταστατική εξίσωση. Αυτό το μοντέλο μέγιστης μάζας είναι $\gtrsim 1.6, 1.8, 2.2$ και $2.6M_{\odot}$ για τις καταστατικές εξίσωσεις A, WFF3, APR και L, αντίστοιχα (Σχήμα 2.2). Στον Πίνακα 2.1 παρουσιάζονται οι γενικές ιδιότητες (bulk properties) των 34 αυτών μοντέλων.

Η χρήση ρεαλιστικών καταστατικών εξίσωσεων αποτελεί επιτακτική ανάγκη για τη σύγχρονη Αστροφυσική. Οι αστρονομικές ανιχνευτικές διατάξεις (είτε πρόκειται για ανιχνευτικές διατάξεις ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας, είτε για ανιχνευτικές διατάξεις βαρυτικής ακτινοβολίας) συνεχώς βελτιώνονται και μάς δίνουν ολοένα πιο λεπτομερείς μετρήσεις και πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα. Η θεωρητική μας γνώση οφείλει να ακολουθήσει (και να επικουρήσει, παράλληλα) αυτήν την τεχνολογική πρόοδο. Οι παλαιότερες εκτιμήσεις “τάξης μεγέθους” πρέπει να αντικατασταθούν από (όσο το δυνατό) ποσοτικά ακριβείς εκτιμήσεις· η ανταμοιβή θα είναι σίγουρα μεγάλη (βλέπε π.χ. Spyrou 1987, [39]). Για παράδειγμα, οι πολυτροπικές καταστατικές εξίσωσεις είναι χρήσιμες για “πρώτες εκτιμήσεις” ή για “εκτιμήσεις τάξης μεγέθους” αλλά για πραγματικά χρήσιμα αποτελέσματα, που θα μπορούσαν να συγχριθούν και να ελεγχθούν με τα παρατηρησιακά δεδομένα, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ρεαλιστικές καταστατικές εξίσωσεις. Μάλιστα, ακόμη κι αυτές οι καταστατικές εξίσωσεις πρέπει να χρησιμοποιούνται με επιφύλαξη και μεγάλη προσοχή (βλέπε π.χ. Spyrou & Stergioulas 2002, [63], όπου με ορθή και συνεπή χρήση μιας καταστατικής εξίσωσης, εξηγείται η παράξενη συμπεριφορά “backbending” στη ροπή αδράνειας ενός αστέρα νετρονίων που περιστρέφεται ολοένα και πιο αργά²).

²Βλέπε και Glendenning 1997 [106] όπου υποτίθεται ότι ο αστέρας επιβραδύνεται επειδή χάνει κινητική ενέργεια (όχι, δύναμη, και μάζα - ενέργεια).

Πίνακας 2.1: Μάζες M (σε M_{\odot}), ακτίνες R (σε km), συμπαγότητες M/R και σχετικά πάχη στερεού φλοιού $\Delta r/R$ (%) για 34 διαφορετικά μοντέλα αστέρων νετρονίων. Οι δείκτες στις ονομασίες των μοντέλων υποδηλώνουν τη μάζα τους.

Model	R	M/R	$\Delta r/R$ (%)	Model	R	M/R	$\Delta r/R$ (%)
A+DH ₁₄	9.49	0.218	4.88	A+NV ₁₄	9.48	0.218	6.34
A+DH ₁₆	8.95	0.264	3.40	A+NV ₁₆	8.94	0.264	4.46
WFF3+DH ₁₄	10.82	0.191	6.04	WFF3+NV ₁₄	10.81	0.191	7.84
WFF3+DH ₁₆	10.61	0.223	4.72	WFF3+NV ₁₆	10.61	0.223	6.12
WFF3+DH ₁₈	10.03	0.265	3.40	WFF3+NV ₁₈	10.03	0.265	4.42
APR+DH ₁₄	12.10	0.171	7.14	APR+NV ₁₄	11.93	0.173	9.06
APR+DH ₁₆	12.09	0.195	5.84	APR+NV ₁₆	11.95	0.198	7.46
APR+DH ₁₈	12.03	0.221	4.78	APR+NV ₁₈	11.92	0.223	6.12
APR+DH ₂₀	11.91	0.248	3.88	APR+NV ₂₀	11.82	0.250	4.98
APR+DH ₂₂	11.65	0.279	3.04	APR+NV ₂₂	11.58	0.280	3.92
L+DH ₁₄	14.66	0.141	9.20	L+NV ₁₄	13.57	0.152	10.8
L+DH ₁₆	14.78	0.160	7.80	L+NV ₁₆	13.82	0.171	9.26
L+DH ₁₈	14.83	0.179	6.62	L+NV ₁₈	13.99	0.190	7.94
L+DH ₂₀	14.81	0.199	5.64	L+NV ₂₀	14.09	0.210	6.80
L+DH ₂₂	14.72	0.221	4.76	L+NV ₂₂	14.10	0.230	5.80
L+DH ₂₄	14.54	0.244	3.98	L+NV ₂₄	14.02	0.253	4.88
L+DH ₂₆	14.12	0.272	3.20	L+NV ₂₆	13.68	0.281	3.92

2.5.1 Πολυτροπικές σχέσεις πίεσης - πυκνότητας

Στα επόμενα κεφάλαια της διδακτορικής αυτής διατριβής, χρησιμοποιούμε συχνά απλές πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις της μορφής (βλέπε π.χ. Tooper 1964, [55]):

$$p = K\rho^{\gamma}, \quad (2.57)$$

ή αδιαβατικές καταστατικές εξισώσεις της μορφής (βλέπε π.χ. Tooper 1965, [56]):

$$p = K\rho_B^{\gamma}, \quad (2.58\alpha')$$

$$\rho = \rho_B + np, \quad (2.58\beta')$$

όπου $\rho = \rho(r)$ είναι η πυκνότητα μάζας - ενέργειας, $\rho_B = \rho_B(r)$ είναι η πυκνότητα βαρυονικής μάζας και $p = p(r)$ είναι η πίεση. Οι σταθερές K , γ και n είναι η πολυτροπική σταθερά, ο πολυτροπικός εκθέτης και ο πολυτροπικός δείκτης, αντίστοιχα. Μεταξύ του πολυτροπικού εκθέτη και του πολυτροπικού δείκτη ισχύει η σχέση:

$$\gamma = 1 + \frac{1}{n}. \quad (2.59)$$

Για την απόδειξη της σχέσης (2.58β') σκεφτόμαστε ως εξής: μία συνήθης φυσική παραδοχή για το θεωρούμενο φυσικό σύστημα (εδώ, για το ρευστό, για τον αστέρα

νετρονίων) είναι η διατήρηση της συνολικής βαρυονικής μάζας του. Ας θεωρήσουμε ότι ένας τυπικός, στοιχειώδης όγκος του αστρικού ρευστού έχει πυκνότητα ενέργειας ρ , πυκνότητα βαρυονικής μάζας ρ_B και πυκνότητα εσωτερικής θερμοδυναμικής ενέργειας $\rho_B \Pi$. Τότε, υποθέτοντας διατήρηση του αριθμού των βαρυονίων ή αμελητέα παρουσία αντιύλης (βλέπε π.χ. Fock 1964, Chandrasekhar 1965, [100, 64]), γράφουμε:

$$\rho = \rho_B + \rho_B \Pi. \quad (2.60)$$

Π είναι η εσωτερική θερμοδυναμική ενέργεια ανά μονάδα μάζας. Στη Γενική Θεωρία της Σχετικότητας, οι φυσικές ιδιότητες του στοιχειώδους αυτού όγκου καθορίζονται πλήρως από τον τανυστή ενέργειας - ορμής του. Θεωρώντας ότι ο στοιχειώδης μας όγκος αποτελείται από ιδανικό / τέλειο ρευστό (perfect fluid), με $T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}$, αποκλείουμε εξ αρχής την ύπαρξη μηχανισμών απόσβεσης και μεταφοράς θερμότητας και περιμένουμε ότι ο όγκος αυτός θα εκτελεί αποκλειστικά ισεντροπικές (αδιαβατικές) κινήσεις. Αυτό πράγματι συμβαίνει και αποδεικνύεται από τον σχετικιστικό νόμο διατήρησης ενέργειας - ορμής (βλέπε παρακάτω και Chandrasekhar 1969, [65]).

Ο νόμος διατήρησης ενέργειας - ορμής, $\nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0$, αφού αναπτυχθεί και συσταλεί με u^α ($u^\alpha \nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0$), δίνει:

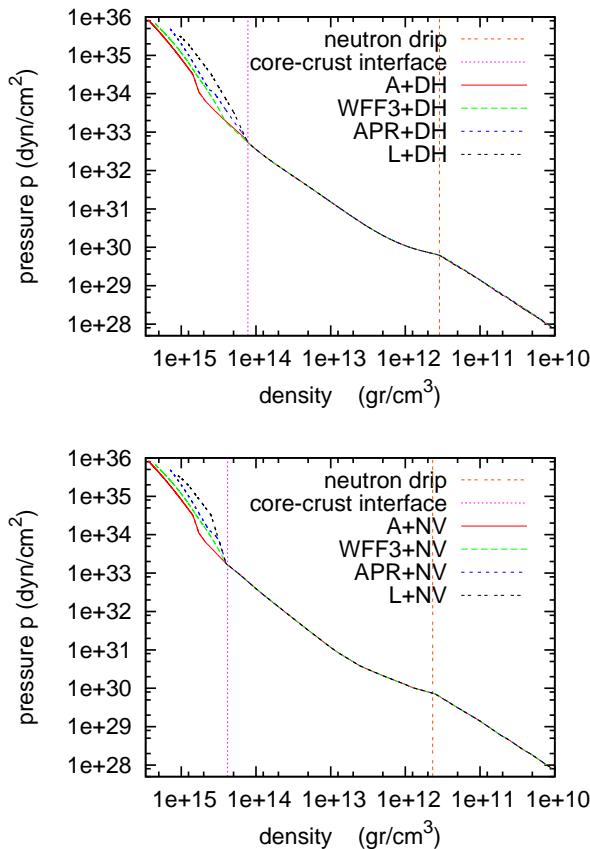
$$\nabla_\alpha (\rho_B u^\alpha) \left(1 + \Pi + \frac{p}{\rho_B} \right) + \rho_B u^\alpha \left[\partial_\alpha \Pi + p \partial_\alpha \left(\frac{1}{\rho_B} \right) \right] = 0. \quad (2.61)$$

Η παραπάνω εξίσωση ουσιαστικά μάς λέει ότι η διατήρηση της μάζας και η διατήρηση της εντροπίας δεν είναι ανεξάρτητες στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Πραγματικά, διατήρηση της μάζας σημαίνει $\nabla_\alpha (\rho_B u^\alpha) = 0$ και τότε η εξίσωση (2.61) συνεπάγεται $u^\alpha [\partial_\alpha \Pi + p \partial_\alpha (1/\rho_B)] = 0$ δηλαδή έχουμε να κάνουμε με ισεντροπικές (αδιαβατικές) μεταβολές του συστήματος. Ο πρώτος νόμος της θερμοδυναμικής, για τέτοιου είδους μεταβολές ($dS = 0 \rightarrow dQ = 0$), γράφεται:

$$0 = dQ = TdS = d\Pi + pd \left(\frac{1}{\rho_B} \right). \quad (2.62)$$

Θεωρώντας μια σχέση πίεσης - πυκνότητας της μορφής $p = K \rho_B^\gamma$ (βλ. σχέση 2.58α'), η εξίσωση (2.62) λύνεται αναλυτικά ως προς Π και δίνει $\rho_B \Pi = p / (\gamma - 1) = np$. Έτσι, υπολογίζεται η πυκνότητα μάζας - ενέργειας: $\rho = \rho_B + \rho_B \Pi = \rho_B + np$ (δηλαδή η σχέση

2.60 καταλήγει στη σχέση $2.58\beta'$). Στο Νευτώνειο όριο μπορούμε να παραλείψουμε τον δεύτερο όρο στο δεξιό μέλος της σχέσης (2.60) ($\rho = \rho_B$). Μπορούμε να υποθέσουμε, με λίγα λόγια, ότι μόνο η βαρυονική μάζα συνεισφέρει στη συνολική μάζα - ενέργεια του στοιχειώδους όγκου. Σ' αυτήν την περίπτωση ισχύει η συνθήκη διατήρησης της μάζας, $\nabla_\alpha (\rho_B u^\alpha) = 0$, ανεξάρτητα από τη συνθήκη των ισεντροπικών κινήσεων και οι σχέσεις (2.58) ανάγονται στη σχέση (2.57). Τέλος, στο Νευτώνειο όριο, η σχέση $\nabla_\alpha (\rho_B u^\alpha) = 0$ ανάγεται στη γνωστή μας εξίσωση συνέχειας.

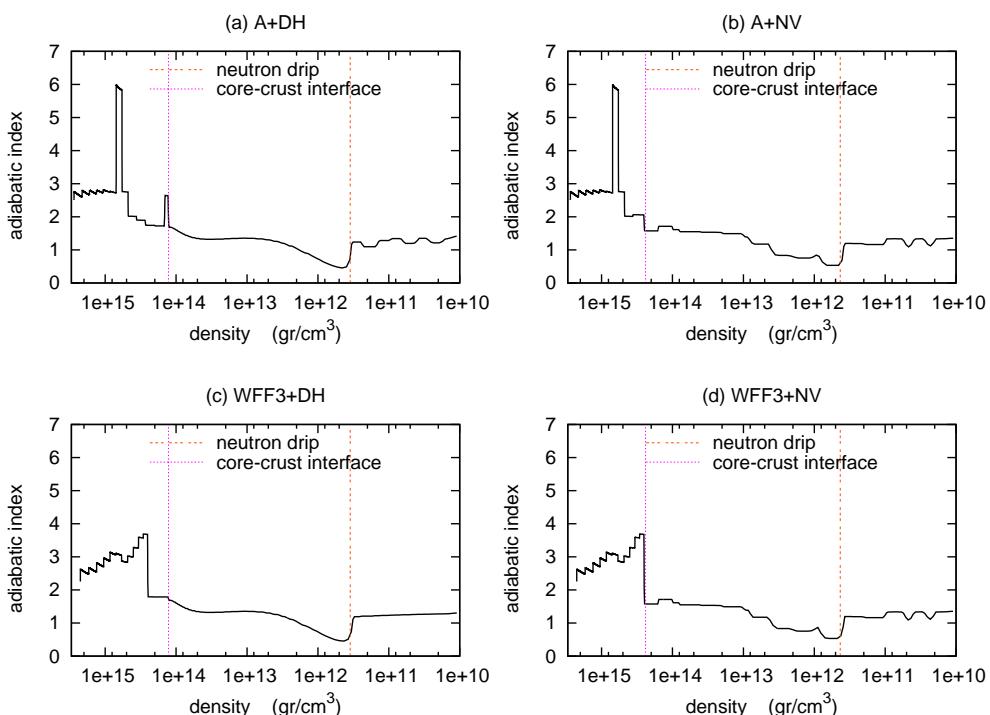


Σχήμα 2.3: Οχτώ διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις (σχέσεις πίεσης - πυκνότητας), που προκύπτουν από τον συνδυασμό τεσσάρων καταστατικών εξισώσεων για τον πυρήνα (A, WFF3, APR, L) με δύο καταστατικές εξισώσεις για τον στερεό φλοιό (DH, NV).

2.5.2 Ρεαλιστικές σχέσεις πίεσης - πυκνότητας

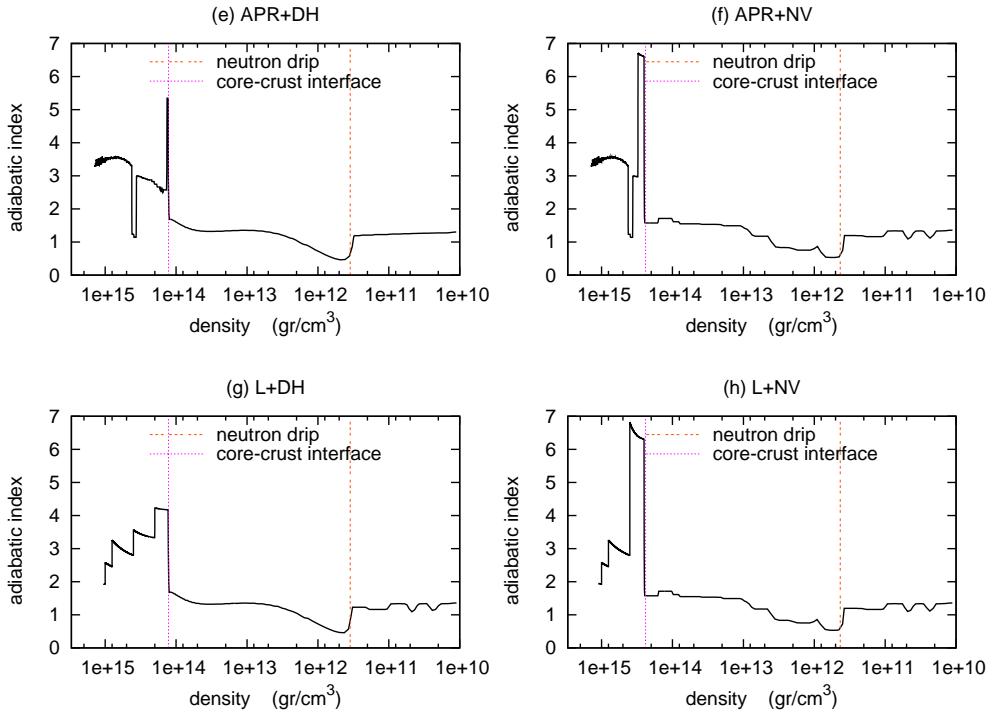
Οι καταστατικές εξισώσεις για τα 34 παραπάνω μοντέλα αστέρων νετρονίων φαίνονται στο Σχήμα 2.3. Και εδώ παρατηρούμε τη μετάβαση από soft καταστατικές εξισώσεις (A) προς stiff καταστατικές εξισώσεις (L). Όσο αφορά τις δύο καταστατικές εξισώσεις στερεού φλοιού (DH και NV), παρατηρούμε ότι η μεν πρώτη ξεκινάει σε πυκνότητες $\simeq 1.28 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$ ενώ η δεύτερη ξεκινάει σε πυκνότητες $\simeq 2.4 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$. Επίσης, οι δύο καταστατικές εξισώσεις στερεού φλοιού διαφέρουν και στο σημείο neutron drip. Στην πρώτη αυτό παρουσιάζεται σε πυκνότητες $\simeq 3.5 \times 10^{11} \text{ gr/cm}^3$ ενώ στην δεύτερη σε πυκνότητες $\simeq 4.3 \times 10^{11} \text{ gr/cm}^3$.

2.5.3 Αδιαβατικοί δείκτες



Σχήμα 2.4: Κατανομή του αδιαβατικού δείκτη, Γ , για τέσσερα διαφορετικά ρεαλιστικά αστρικά μοντέλα. Σε μεγάλες πυκνότητες παρατηρούμε σημαντικές διαφορές αλλά σε πυκνότητες όπου υπάρχει στερεός φλοιός, οι διαφορές αυτές αμβλύνονται.

Σε έναν παλλόμενο αστέρα, οι διαταραχές της πίεσης και της πυκνότητας συνδέονται,



Σχήμα 2.5: Όπως και στο Σχήμα 2.4 αλλά για τις καταστατικές εξισώσεις APR και L.

συνήθως, με την ταχύτητα του ήχου, c_s^2 : $\delta p = c_s^2 \delta \rho$. Η ταχύτητα του ήχου, με τη σειρά της, εκφράζεται με τη βοήθεια του αδιαβατικού δείκτη, Γ , ο οποίος υπολογίζεται από την κατάσταση ισορροπίας: $\Gamma := (\rho + p) / p (dp/d\rho)$ (βλέπε και σχέση 3.17 καθώς και, για παράδειγμα, Douchin & Haensel 2001, [61]).

Η μεταβολή του αδιαβατικού δείκτη, Γ , σε συνάρτηση με την πυκνότητα, για οχτώ διαφορετικές καταστατικές εξισώσεις φαίνεται στο Σχήμα 2.4. Στον εσωτερικό ρευστό πυρήνα, σε μεγάλες πυκνότητες, οι καταστατικές εξισώσεις έχουν αρκετές διαφορές μεταξύ τους. Αυτό αντανακλάται και στις πολύ διαφορετικές μορφές του αδιαβατικού δείκτη, Γ . Αντίθετα, σε μικρότερες πυκνότητες, στον στερεό φλοιό, οι διαφορές των καταστατικών εξισώσεων είναι μικρότερες. Μάλιστα, γνωρίζουμε ότι στα πολύ εξωτερικά στρώματα των αστέρων νετρονίων, σε πυκνότητες μικρότερες του neutron drip, ο αδιαβατικός δείκτης τείνει στην τιμή $4/3$. Στη διεπαφή ρευστού πυρήνα - στερεού φλοιού και στο σημείο neutron drip ο αδιαβατικός δείκτης υφίσταται απότομες αλλαγές.

2.5.4 Συντελεστές γραμμικού ιξώδους

Για την DH καταστατική εξίσωση στερεού φλοιού, ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους δίνεται, με αρκετή ακρίβεια, από τη σχέση (Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]):

$$\mu = (0.021 + 0.376\rho_{14} + 3.130\rho_{14}^2 - 4.718\rho_{14}^3 + 2.468\rho_{14}^4) \times 10^{30} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}, \quad (2.63)$$

ενώ για την NV καταστατική εξίσωση στερεού φλοιού, ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους δίνεται, με πολύ καλή ακρίβεια, από τη σχέση (Duncan 1998, [11]):

$$\mu = 1.267\rho_{14}^{4/5} \times 10^{30} \frac{\text{erg}}{\text{cm}^3}. \quad (2.64)$$

2.5.5 Σχέσεις σχετικού πάχους στερεού φλοιού - συμπαγότητας

Το σχετικό πάχος του στερεού φλοιού, $\Delta r/R$, και η συμπαγότητα, M/R , σε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, συνδέονται άμεσα. Οι Samuelsson & Andersson (2007) [5] καταλήγουν σε μια προσεγγιστική σχέση της μορφής:

$$\frac{\Delta r}{R} \simeq \left(\frac{\beta}{\alpha} e^{2\lambda} + 1 \right)^{-1}, \quad (2.65)$$

όπου $\beta = M/R$ και $e^{-2\lambda} = 1 - 2\beta$. Για πολυτροπικά μοντέλα με $\Gamma = 4/3$ βρίσκουν $\alpha \simeq 0.019$ ενώ για ρεαλιστικά μοντέλα με καταστατική εξίσωση στερεού φλοιού DH, βρίσκουν $\alpha \simeq 0.02326$.

Χρησιμοποιώντας τη Σχέση (2.65) των Samuelsson & Andersson, βρίσκουμε για τα δικά μας μοντέλα (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$\alpha_{\text{DH}} \simeq 0.0199, \quad (2.66)$$

$$\alpha_{\text{NV}} \simeq 0.0264. \quad (2.67)$$

Συνδέοντας τα $\Delta r/R$ και M/R λίγο διαφορετικά βρίσκουμε τις παρακάτω προσεγγιστικές σχέσεις (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$\ln(\Delta r/R) \simeq -7.95 (\pm 0.04) M/R - 1.28 (\pm 0.01), \quad \text{για την DH EoS, (2.68)}$$

$$\ln(\Delta r/R) \simeq -7.84 (\pm 0.03) M/R - 1.04 (\pm 0.01), \quad \text{για την NV EoS, (2.69)}$$

που είναι λίγο πιο ακρίβεις για τα συγκεκριμένα αστρικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε.

Κεφάλαιο 3

Εξισώσεις διαταραχών

Στο κεφάλαιο αυτό μελετούμε γραμμικές (μικρού πλάτους) ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων. Οι μαθηματικές εξισώσεις που περιγράφουν αυτές τις ταλαντώσεις είναι γνωστές ως εξισώσεις διαταραχών. Αρχικά επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό (Ενότητα 3.1) και στη συνέχεια μελετούμε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό (Ενότητα 3.2). Προηγουμένως επαληθεύουμε τις υπάρχουσες εξισώσεις για μη - περιστρεφόμενους, μη - μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό και δίνουμε ιδιαίτερη έμφαση στις διορθώσεις που επιφέρει η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας στις Νευτώνειες εξισώσεις.

Στη συνέχεια (Ενότητα 3.3) μελετούμε γραμμικές ταλαντώσεις σε ταχέως περιστρεφόμενους ρευστούς αστέρες νετρονίων (αστέρες νετρονίων χωρίς στερεό φλοιό). Συγκεκριμένα, στην Παράγραφο 3.3.1 αγνοούμε τη δυναμική φύση του χωρόχρονου και μελετούμε τις ίδιες ταλαντώσεις του ρευστού (προσέγγιση Cowling) ενώ στην Παράγραφο 3.3.2, κάνουμε ακριβώς το αντίθετο, αγνοούμε τη δυναμική φύση του αστρικού ρευστού και επικεντρωνόμαστε στις ίδιες ταλαντώσεις του χωρόχρονου (αντίστροφη προσέγγιση Cowling).

3.1 Μη - περιστρεφόμενοι και βραδέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Θεωρούμε έναν βραδέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων (Κεφάλαιο 2, Ενότητα 2.2) που περιγράφεται από τη μετρική (Hartle 1967, [47]):

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\omega r^2 \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (3.1)$$

όπου ν , λ και ω είναι συναρτήσεις της ακτινικής συντεταγμένης r . Οι συναρτήσεις αυτές είναι λύσεις των εξισώσεων Tolman - Oppenheimer - Volkoff (TOV) (βλέπε π.χ. Misner, Thorne & Wheeler 1973, [101]):

$$\begin{aligned} e^{2\lambda} &= \left(1 - \varepsilon \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}, & \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{d\nu}{dr} &= e^{2\lambda} \left(4\pi r \varepsilon p + \frac{M(r)}{r^2}\right), & \frac{dp}{dr} &= -(\rho + \varepsilon p) \frac{d\nu}{dr}, \\ \frac{d\lambda}{dr} &= \varepsilon e^{2\lambda} \left(4\pi r \rho - \frac{M(r)}{r^2}\right), \end{aligned} \quad (3.2\alpha'), \quad (3.2\beta'), \quad (3.2\gamma')$$

και μιας ακόμη εξισωσης που περιγράφει την παράσυρση των αδρανειακών συστημάτων αναφοράς (βλέπε [47]):

$$\frac{d^2\varpi}{dr^2} - \left(\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} - \frac{4}{r}\right) \frac{d\varpi}{dr} - 16\pi e^{2\lambda} (\rho + p) \varpi = 0, \quad (3.3)$$

όπου ορίζουμε $\varpi := \Omega - \omega$, ρ και p είναι η πυκνότητα ενέργειας και η πίεση, αντίστοιχα, $M(r)$ είναι η μάζα εντός ακτίνας r και Ω είναι η περιστροφική συχνότητα του αστέρα. Σε μια σχετικιστική προσέγγιση, όπως η δική μας, η παράμετρος ε ισούται με 1. Η παρουσία της ε διώ έχει σκοπό να αναδείξει το Νευτώνειο όριο κατά το οποίο $\varepsilon \rightarrow 0$. Τότε, σύμφωνα με τις εξισώσεις (3.2), $\lambda \rightarrow 0$, $d\nu/dr \rightarrow M(r)/r^2$, $dp/dr \rightarrow -\rho d\nu/dr$ και $d\lambda/dr \rightarrow 0$. Επιπλέον, στο Νευτώνειο όριο, $\omega \rightarrow 0$ ή, ισοδύναμα, $\varpi \rightarrow \Omega$ και $d\varpi/dr \rightarrow 0$.

Οι εξισώσεις που περιγράφουν τις ταλαντώσεις προκύπτουν από τη γραμμική διαταραχή του νόμου διατήρησης ενέργειας - ορμής:

$$\delta \left(\nabla^\beta T_{\alpha\beta} = 0 \right), \quad (3.4)$$

όπου (βλέπε π.χ. Schumaker & Thorne 1983, [3]):

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta}. \quad (3.5)$$

Οι συνιστώσες της διαταραγμένης τετρα - ταχύτητας δίνονται από τη σχέση:

$$\delta u^\alpha = \mathcal{L}_u \xi^\alpha, \quad (3.6)$$

όπου ξ^α είναι το διάνυσμα μετατόπισης και ο τανυστής ιξώδους $S_{\alpha\beta}$ δίνεται από τη σχέση (βλέπε π.χ. [3]):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mathcal{L}_u S_{\alpha\beta}, \quad (3.7)$$

όπου $\sigma_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής του ρυθμού μεταβολής του ιξώδους. Ουσιαστικά ο $\sigma_{\alpha\beta}$ είναι η παράγωγος Lie του τανυστή ιξώδους κατά μήκος των κοσμικών γραμμών (βλέπε και Carter & Quintana 1972, [48]) και υπολογίζεται από την εξίσωση:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(P_\beta^\gamma \nabla_\gamma u_\alpha + P_\alpha^\gamma \nabla_\gamma u_\beta \right) - \frac{1}{3} P_{\alpha\beta} \nabla_\gamma u^\gamma, \quad (3.8)$$

όπου $P_{\alpha\beta}$ είναι ο προβολικός τανυστής:

$$P_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta. \quad (3.9)$$

Την θυμίζουμε ότι εργαζόμαστε στην προσέγγιση Cowling καθώς παραλείπουμε τις διαταραχές των εξισώσεων Einstein ($\delta G_{\alpha\beta} = 8\pi\delta T_{\alpha\beta}$) και, επιπρόσθετα, μηδενίζουμε όλες τις διαταραχές της μετρικής στις εξισώσεις μας.

Επιλέγουμε να δουλεύουμε σε ένα περιστρεφόμενο σύστημα αναφοράς όπου (βλέπε π.χ. Schumaker & Thorne 1983, Yoshida & Lee 2002, [3, 4]):

$$\delta u^\alpha = e^{-\nu} \partial \xi^\alpha / \partial t, \quad (3.10)$$

$$\sigma_{\alpha\beta} = e^{-\nu} \partial S_{\alpha\beta} / \partial t. \quad (3.11)$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (3.5) - (3.11), ο νόμος διατήρησης ενέργειας - οριμής (3.4) δίνει τρεις δεύτερης - τάξης διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους για τις τρεις συνιστώσες του διανύσματος μετατόπισης $\xi^r = \xi^r(t, r, \theta, \phi)$, $\xi^\theta = \xi^\theta(t, r, \theta, \phi)$ και

$\xi^\phi = \xi^\phi(t, r, \theta, \phi)$. Αυτές οι εξισώσεις είναι σχετικαστικές, ανάλογες των Νευτρόνειων εξισώσεων (35) - (39) του Strohmayer (1991) [6]. Ορίζοντας το διάνυσμα μεταπόπισης:

$$\xi^i = (\xi^r, \xi^\theta, \xi^\phi) := \left(\tilde{\xi}^r, \frac{\tilde{\xi}^\theta}{r}, \frac{\tilde{\xi}^\phi}{r \sin \theta} \right), \quad (3.12)$$

παίρνουμε τις εξισώσεις (A1) - (A7) των Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis (2008) [9]:

$$\begin{aligned}
& - e^{2\varepsilon(\lambda-\nu)} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial t^2} + \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} c_s^2 r \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial r \partial t} \sin \theta \\
& + e^{-2\varepsilon\nu} \left((2 + \varepsilon c_s^2) \varpi + \varepsilon r \left(\frac{d\varpi}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) (1 + \varepsilon c_s^2) - \varepsilon \Gamma r \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta \\
& = \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{A_r \Gamma p}{\rho + \varepsilon p} \alpha + \varepsilon c_s^2 \frac{d\nu}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} \\
& + \varepsilon \left(c_s^2 \left(\frac{d^2 \nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right) - (\Gamma - 1) \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right) \tilde{\xi}^r - \frac{\mu}{\rho + \varepsilon p} \\
& \times \left[\frac{1}{3} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2\varepsilon \frac{d\lambda}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\alpha - \varepsilon \left(\frac{d\nu}{dr} + 3 \frac{d\lambda}{dr} \right) \tilde{\xi}^r \right) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} + \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} \right. \\
& + e^{2\varepsilon\lambda} \nabla^2 \tilde{\xi}^r - \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d^2 \nu}{dr^2} - \varepsilon \frac{d^2 \lambda}{dr^2} - \varepsilon \frac{4}{3} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \varepsilon \frac{4}{3r} \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{4}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) \tilde{\xi}^r \\
& - \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{2}{3r} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta} \\
& - \left(\frac{2 \cot \theta}{r^2} + \varepsilon \frac{2 \cot \theta}{3r} \frac{d\nu}{dr} \right) \tilde{\xi}^\theta - \left(\frac{2}{r^2 \sin \theta} + \varepsilon \frac{2}{3r \sin \theta} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi} \Big] \\
& + \frac{\varepsilon \mu}{\rho + \varepsilon p} e^{-2\varepsilon\nu} \left[\frac{2}{3} r \left(\frac{d\varpi}{dr} + \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \right) \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta \right. \\
& \left. + \frac{11}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta - \frac{1}{3} r \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial r \partial t} \sin \theta - 2e^{2\varepsilon\lambda} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial \phi \partial t} \right], \quad (3.13\alpha')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-2\varepsilon\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial t^2} + \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} c_s^2 \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \theta \partial t} \sin \theta + e^{-2\varepsilon\nu} (2 + \varepsilon c_s^2) \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \cos \theta \\
& = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \varepsilon c_s^2 \frac{d\nu}{dr} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\rho + \varepsilon p} \\
& \times \left[\frac{1}{3r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{e^{-2\varepsilon\lambda}}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial r} + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\xi}^\theta}{r} \right) + \nabla^2 \tilde{\xi}^\theta + \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{2}{3r} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} \right. \\
& - \left(e^{-2\varepsilon\lambda} \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{\xi}^\theta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi} \Big] \\
& + \frac{\varepsilon \mu}{\rho + \varepsilon p} e^{-2\varepsilon\nu} \left[\frac{11}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \cos \theta - \frac{1}{3} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \theta \partial t} \sin \theta - 2 \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial \phi \partial t} \right], \tag{3.13\beta'}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-2\varepsilon\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial t^2} - \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} r \varpi \frac{\partial \chi}{\partial t} \sin \theta + \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} c_s^2 \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi \partial t} - e^{-2\varepsilon\nu} 2 \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial t} \cos \theta \\
& - e^{-2\varepsilon\nu} \left(2 \varpi + \varepsilon r \left(\frac{d\varpi}{dr} - 2 \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) + \varepsilon c_s^2 r \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta \\
& = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} + \varepsilon c_s^2 \frac{d\nu}{dr} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} - \frac{\mu}{\rho + \varepsilon p} \\
& \times \left[\frac{1}{3r \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \frac{e^{-2\varepsilon\lambda}}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial r} + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} - \frac{\tilde{\xi}^\phi}{r} \right) + \nabla^2 \tilde{\xi}^\phi \right. \\
& + \left(\frac{2}{r^2 \sin \theta} + \varepsilon \frac{2}{3r \sin \theta} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} \\
& - \left(e^{-2\varepsilon\lambda} \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{\xi}^\phi + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \phi} \Big] \\
& + \frac{\varepsilon \mu}{\rho + \varepsilon p} e^{-2\varepsilon\nu} \left[-r \left(\frac{d\varpi}{dr} + \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} - \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{3} \frac{d\lambda}{dr} \right) \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta - \frac{14}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta \right. \\
& - \left. \frac{13}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial t} \cos \theta - \frac{1}{3} r \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial r \partial t} \sin \theta - \frac{1}{3} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta \partial t} \sin \theta - \frac{8}{3} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi \partial t} \right], \tag{3.13\gamma'}
\end{aligned}$$

όπου:

$$\chi := -\frac{\Gamma p}{\rho + \varepsilon p} \alpha - \frac{\tilde{\xi}^r}{\rho + \varepsilon p} \frac{dp}{dr} = -c_s^2 \alpha + \frac{d\nu}{dr} \tilde{\xi}^r, \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \alpha &:= \nabla_i \xi^i = \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} + \left(\frac{2}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} + \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} \right) \tilde{\xi}^r \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} \tilde{\xi}^\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &:= \nabla_i \nabla^i \\ &= e^{-2\varepsilon\lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

και όπου:

$$c_s^2 := \frac{\Gamma p}{\rho + \varepsilon p}, \quad (3.17)$$

είναι η ταχύτητα των ηχητικών κυμάτων.

Όταν επικεντρωνόμαστε σε σφαιροειδούς τύπου ταλαντώσεις, μπορούμε να γράψουμε για το διάνυσμα μετατόπισης:

$$\xi^i = \left[rS, H \frac{\partial}{\partial \theta}, H \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] Y_{\ell m} e^{i\sigma t}, \quad (3.18\alpha')$$

ενώ όταν επικεντρωνόμαστε σε τοροειδούς τύπου ταλαντώσεις, μπορούμε να γράψουμε:

$$\xi^i = \left[0, T \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, -T \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_{\ell m} e^{i\sigma t}. \quad (3.18\beta')$$

Στο Παράρτημα A' περιγράφουμε αναλυτικά τη διαδικασία που ακολουθούμε από εδώ και πέρα. Με λίγα λόγια, αντικαθιστούμε τις παραπάνω εκφράσεις των ξ^i στις Εξισώσεις (3.13), παίρνουμε ένα σύστημα διαφορικών εξισώσων δεύτερης - τάξης και, στη συνέχεια, ορίζοντας νέες συναρτήσεις, γράφουμε το σύστημα αυτό ως σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης - τάξης. Στην επόμενη παράγραφο, παραλείποντας τις ενδιάμεσες πράξεις, παραθέτουμε απ' ευθείας, τις νέες μας συναρτήσεις και το νέο μας σύστημα εξισώσεων.

3.1.1 Στερεός φλοιού

Για να περιγράψουμε τις ταλαντώσεις στην περιοχή του στερεού φλοιού, χρησιμοποιούμε τις ακόλουθες συναρτήσεις (Lee & Strohmayer 1996, Yoshida & Lee 2002, [7, 4]):

$$z_1^j = S^j, \quad (3.19\alpha')$$

$$\begin{aligned} z_2^j &= 2\alpha_1 e^{-\varepsilon\lambda} \frac{d}{dr} \left(r e^{\varepsilon\lambda} S^j \right) \\ &\quad + \left(\Gamma - \frac{2}{3}\alpha_1 \right) \left\{ \frac{e^{-\varepsilon\lambda}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 e^{\varepsilon\lambda} S^j \right) - \ell(\ell+1) H^j \right\}, \end{aligned} \quad (3.19\beta')$$

$$z_3^j = H^j, \quad (3.19\gamma')$$

$$z_4^j = \alpha_1 \left(e^{-2\varepsilon\lambda} r \frac{dH^j}{dr} + S^j \right), \quad (3.19\delta')$$

$$z_5^j = T^j, \quad (3.19\epsilon')$$

$$z_6^j = \alpha_1 e^{-2\varepsilon\lambda} r \frac{dT^j}{dr}. \quad (3.19\tau')$$

Αυτές οι συναρτήσεις είναι οι συναρτήσεις (31) - (36) των Yoshida & Lee (2002) [4] και, στο Νευτώνειο όριο, ανάγονται στις συναρτήσεις (53), (16), (15) των Lee & Strohmayer (1996) [7].

Χρησιμοποιώντας αυτές τις συναρτήσεις, μπορούμε να ξαναγράψουμε τις τρεις κύριες εξισώσεις μας ως ένα σύστημα έξι συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης - τάξης, από τις οποίες τέσσερις περιγράφουν τις σφαιροειδείς διαταραχές και δύο περιγράφουν τις τοροειδείς διαταραχές. Σε μηδενική τάξη ως προς το Ω/Ω_K ($j = 0$), αυτό το σύστημα έχει τη μορφή (Lee & Strohmayer 1996, Yoshida & Lee 2002, [7, 4]):

$$r \frac{dz_1^0}{dr} = - \left(1 + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \varepsilon U_2 \right) z_1^0 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^0 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell(\ell+1) z_3^0, \quad (3.20\alpha')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_2^0}{dr} &= \left\{ \left(-3 - \varepsilon U_2 + U_1 - e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4\frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^0 \\ &\quad + \left(V_2 - 4\frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^0 \\ &\quad + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2\frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell(\ell+1) z_3^0 + e^{2\varepsilon\lambda} \ell(\ell+1) z_4^0, \end{aligned} \quad (3.20\beta')$$

$$r \frac{dz_3^0}{dr} = -e^{2\varepsilon\lambda} z_1^0 + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_4^0, \quad (3.20\gamma')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_4^0}{dr} &= - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^0 \\ &\quad - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^0 \\ &\quad - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_4^0, \end{aligned} \quad (3.20\delta')$$

$$r \frac{dz_5^0}{dr} = \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_6^0, \quad (3.20\epsilon')$$

$$r \frac{dz_6^0}{dr} = - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \right\} z_5^0 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_6^0. \quad (3.20\tau')$$

Αυτές οι εξισώσεις είναι οι εξισώσεις (25) - (30) των Yoshida & Lee (2002) [4] και ανάγονται στις εξισώσεις (54) - (57) και (68) - (69) των Lee & Strohmayer (1996) [7] στο Νευτώνειο όριο. Οι πρώτες τέσσερις εξισώσεις περιγράφουν σφαιροειδείς ταλαντώσεις ενώ οι τελευταίες δύο εξισώσεις περιγράφουν τοροειδείς ταλαντώσεις.

Κατ' αντιστοιχία με τους Yoshida & Lee (2002) [4], οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στις Εξισώσεις (3.20) είναι οι εξής:

$$\alpha_1 = \frac{\mu}{p}, \quad \alpha_2 = \Gamma - \frac{2}{3}\alpha_1, \quad \alpha_3 = \Gamma + \frac{4}{3}\alpha_1, \quad (3.21)$$

$$V_1 = \frac{\rho + \varepsilon p}{p} r \frac{d\nu}{dr}, \quad V_2 = \frac{\rho}{p} r \frac{d\nu}{dr}, \quad (3.22)$$

$$U_1 = \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\nu}{dr} \right), \quad U_2 = \varepsilon r \frac{d\lambda}{dr}, \quad (3.23)$$

$$c_1 = \frac{M}{R^3} r e^{-2\varepsilon\nu} \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Στο Νευτώνειο όριο, $\varepsilon \rightarrow 0$ και $d\nu/dr \rightarrow g$ όπου $g = M(r)/r^2$ είναι η βαρυτική επιτάχυνση με $dp/dr \rightarrow -\rho g$. Έτσι, οι συντελεστές (3.22) - (3.24) ανάγονται στους εξής:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \frac{\rho}{p} r g = - \frac{d \ln p}{d \ln r} = V, \quad (3.25)$$

$$U_1 \rightarrow g^{-1} \frac{d}{dr} (rg) = \frac{r^2}{M(r)} \frac{d}{dr} \left(\frac{M(r)}{r} \right) = \frac{d \ln M(r)}{d \ln r} - 1 = U - 1, \quad (3.26)$$

$$c_1 \rightarrow \frac{M}{R^3} r g^{-1} = \left(\frac{r}{R} \right)^3 \frac{M}{M(r)}. \quad (3.27)$$

Αυτοί οι συντελεστές μάς είναι πολύ γνώριμοι από τη Νευτώνεια θεωρία, βλέπε για

παράδειγμα τις σχέσεις (35) των Lee & Strohmayer (1996) [7] ή τις σχέσεις (15) των McDermott, Van Horn & Hansen (1988) [2].

Σε πρώτη τάξη ως προς το Ω/Ω_K ($j = 1$), το σύστημα των εξισώσεων μας λαμβάνει τη μορφή (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$r \frac{dz_1^1}{dr} = - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \varepsilon U_2 \right) z_1^1 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^1, \quad (3.28\alpha')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_2^1}{dr} = & \left\{ \left(-3 - \varepsilon U_2 + U_1 - e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^1 \\ & + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^1 \\ & + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^1 + e^{2\varepsilon\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^1 \\ & + \left\{ -2e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \varepsilon \mathcal{A} \right\} z_1^0 \\ & + \{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1 + \varepsilon \mathcal{B}\} z_3^0 + \varepsilon \mathcal{C} z_4^0, \end{aligned} \quad (3.28\beta')$$

$$r \frac{dz_3^1}{dr} = -e^{2\varepsilon\lambda} z_1^1 + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_4^1, \quad (3.28\gamma')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_4^1}{dr} = & - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^1 \\ & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^1 \\ & - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_4^1 \\ & + \left\{ \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \varepsilon \mathcal{D} \right\} z_1^0 + \varepsilon \mathcal{E} z_2^0 \\ & + \left\{ -2c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \varepsilon \mathcal{F} \right\} z_3^0, \end{aligned} \quad (3.28\delta')$$

$$r \frac{dz_5^1}{dr} = \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_6^1, \quad (3.28\epsilon')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_6^1}{dr} = & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \right\} z_5^1 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_6^1 \\ & + \left\{ 2c_1 \bar{\sigma}_0 V_1 \left[-\bar{\sigma}_1 + \frac{m \bar{\omega}}{\ell (\ell + 1)} \right] + \varepsilon \mathcal{G} \right\} z_5^0, \end{aligned} \quad (3.28\tau')$$

όπου (β λέπε [9]):

$$\mathcal{A} = e^{-2\nu+2\lambda} (\alpha_1 - \alpha_2) r^2 m \sigma_0 \varpi, \quad (3.29\alpha')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= e^{-2\nu} \left[\left(\frac{\rho}{p} + 1 + \alpha_2 \right) r^3 m \sigma_0 \frac{d\varpi}{dr} \right. \\ &\quad - \left[\left(\left(\frac{\rho}{p} + 1 \right) (\Gamma + 1) + \alpha_2 \right) r \frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{3} \frac{r}{p} \frac{d\mu}{dr} \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(\alpha_1 - \alpha_2) \right] r^2 m \sigma_0 \varpi \right], \end{aligned} \quad (3.29\beta')$$

$$\mathcal{C} = e^{-2\nu+2\lambda} \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_1} - 1 \right) r^2 m \sigma_0 \varpi, \quad (3.29\gamma')$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= e^{-2\nu} \left[\left(\frac{\rho}{p} + 1 - \alpha_1 \right) \frac{r^3 m \sigma_0}{\ell(\ell+1)} \frac{d\varpi}{dr} \right. \\ &\quad - \left[\left(\frac{\rho}{p} + 1 - \alpha_1 \right) r \frac{d\nu}{dr} + \frac{r}{p} \frac{d\mu}{dr} \right. \\ &\quad \left. \left. + 2 \left(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \right) \right] \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)} \right], \end{aligned} \quad (3.29\delta')$$

$$\mathcal{E} = e^{-2\nu} \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} - 1 \right) \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)}, \quad (3.29\epsilon')$$

$$\mathcal{F} = e^{-2\nu} \left(-4\alpha_1 + \left(2\alpha_3 - \alpha_2 + \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_3} \right) \ell(\ell+1) \right) \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)}, \quad (3.29\tau')$$

$$\mathcal{G} = e^{-2\nu} 2\alpha_1 (\ell-1)(\ell+2) \frac{r^2 m \sigma_0 \varpi}{\ell(\ell+1)}. \quad (3.29\zeta')$$

Οι εξισώσεις (3.28), εφοδιασμένες με τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες, αποτελούν ένα πρόβλημα ιδιοτιμών και δίνουν το σ_1 , την πρώτης - τάξης διόρθωση λόγω περιστροφής στην ιδιοσυχνότητα και τα z_i^1 ($i = 1 \dots 6$), τις πρώτης - τάξης διορθώσεις λόγω περιστροφής στις ιδιοσυναρτήσεις. Κατ' αντιστοιχία με τα προηγούμενα, οι πρώτες τέσσερις αφορούν τους σφαιροειδείς interfacial και shear modes ενώ οι δύο τελευταίες αφορούν τους τοροειδείς torsional modes. Παύλες πάνω από τα σ_0, σ_1 και ω υποδεικνύουν αδιάστατες ποσότητες, που αναφέρονται σε μονάδες $\sqrt{M/R^3}$, για παράδειγμα, $\bar{\sigma}_0 := \sigma_0 / \sqrt{M/R^3}$. Στο Νευτώνειο όριο, αυτές οι εξισώσεις ανάγονται στις εξισώσεις (58) - (61) και (70) - (71) των Lee & Strohmayer (1996) [7].

3.1.2 Ρευστός πυρήνας

Για να περιγράψουμε τις ταλαιπώσεις στην περιοχή του ρευστού πυρήνα, χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις (Lee & Strohmayer 1996, Yoshida & Lee 2002, [7, 4]):

$$y_1^j = S^j, \quad (3.30\alpha')$$

$$y_2^j = \left(r \frac{d\nu}{dr} \right)^{-1} \frac{\delta p^j}{\rho + \varepsilon p} \stackrel{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{\delta p^j}{gr\rho}. \quad (3.30\beta')$$

Οι μηδενικής και πρώτης - τάξης σφαιροειδές εγκάρσιες συναρτήσεις $H^0 = H^0(r)$ και $H^1 = H^1(r)$ συνδέονται με τα y_1^j, y_2^j μέσω των σχέσεων (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$H^0 = \frac{y_2^0}{c_1 \bar{\sigma}_0^2}, \quad (3.31\alpha')$$

$$\begin{aligned} H^1 = & \frac{y_2^1}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} + \left\{ \frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} + \varepsilon \mathcal{H} \right\} \frac{y_1^0}{\ell(\ell+1)} \\ & + \left\{ \frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} \left(\frac{1}{\ell(\ell+1)} - \frac{\bar{\sigma}_1}{m\bar{\omega}} \right) + \varepsilon \frac{1}{\ell(\ell+1)} \mathcal{I} \right\} \frac{y_2^0}{c_1 \bar{\sigma}_0^2}, \end{aligned} \quad (3.31\beta')$$

βλέπε τις σχέσεις (44) των Yoshida & Lee (2002) [4] για μη - περιστρεφόμενους σχετικιστικούς αστέρες και τις σχέσεις (81), (86) - (87) των Lee & Strohmayer (1996) [7] για περιστρεφόμενους Νευτώνειους αστέρες.

Σε μηδενική τάξη ως προς το Ω/Ω_K ($j = 0$), το σύστημα των εξισώσεων (3.13) με $\mu = 0$ μπορεί να αναμορφωθεί σε ένα σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης - τάξης για τις συναρτήσεις y_1^0 και y_2^0 (Yoshida & Lee 2002, [4]):

$$r \frac{dy_1^0}{dr} = - \left(3 - \frac{V_1}{\Gamma} + \varepsilon U_2 \right) y_1^0 - \left(\frac{V_1}{\Gamma} - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} \right) y_2^0, \quad (3.32\alpha')$$

$$r \frac{dy_2^0}{dr} = \left(e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 + r A_r \right) y_1^0 - (U_1 + r A_r) y_2^0, \quad (3.32\beta')$$

όπου A_r είναι η σχετικιστική διαχρίνουσα Schwarzschild:

$$A_r = \frac{1}{\rho + \varepsilon p} \frac{d\rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma p} \frac{dp}{dr}. \quad (3.33)$$

Όμοια, σε πρώτη τάξη ως προς το Ω/Ω_K ($j = 1$), το σύστημά μας για τις συναρτή-

σεις y_1^1 και y_2^1 είναι το εξής (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$\begin{aligned} r \frac{dy_1^1}{dr} &= - \left(3 - \frac{V_1}{\Gamma} + \varepsilon U_2 \right) y_1^1 - \left(\frac{V_1}{\Gamma} - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} \right) y_2^1 \\ &+ \left\{ \frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} + \varepsilon \mathcal{H} \right\} y_1^0 + \left\{ \left[\frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} - \ell(\ell+1) \frac{2\bar{\sigma}_1}{\bar{\sigma}_0} \right] + 2\varepsilon \mathcal{I} \right\} \frac{y_2^0}{c_1 \bar{\sigma}_0^2}, \quad (3.34\alpha') \\ r \frac{dy_2^1}{dr} &= \left(e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 + r A_r \right) y_1^1 - (U_1 + r A_r) y_2^1 \\ &+ 2e^{2\varepsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 y_1^0 - \left\{ \frac{2m\bar{\omega}}{\bar{\sigma}_0} + \varepsilon \mathcal{H} \right\} y_2^0, \end{aligned} \quad (3.34\beta')$$

όπου (β λέπε [9]):

$$\mathcal{H} = \left(\frac{d\bar{\omega}}{dr} - 2 \frac{d\nu}{dr} \bar{\omega} \right) \frac{rm}{\sigma_0}, \quad (3.35\alpha')$$

$$\mathcal{I} = e^{-2\nu} r^2 m \sigma_0 \bar{\omega}. \quad (3.35\beta')$$

Στο Νευτώνειο όριο $\varepsilon \rightarrow 0$, $V_1 \rightarrow V$, $\bar{\omega} \rightarrow \Omega$ και οι εξισώσεις (3.32) και (3.34) ανάγονται στις εξισώσεις (82) - (83) και (84) - (85) των Lee & Strohmayer (1996) [7], αντίστοιχα. Στο σχετικιστικό όριο για μη - περιστρεφόμενους αστέρες, $\Omega \rightarrow 0$, αναγόμαστε στις εξισώσεις (42) - (43) των Yoshida & Lee (2002) [4].

3.1.3 Συνοριακές συνθήκες και συνθήκες κανονικοποίησης

Στο κέντρο του αστέρα ($r = 0$), οι ιδιοσυναρτήσεις y_1^j και y_2^j πρέπει να είναι ομαλές. Αναπτύσσοντας σε κατάλληλες σειρές, $y_i = \sum_0^n \alpha_{i,n} r^n$, και εκτελώντας τις σχετικές αλγεβρικές πρόζεις, βρίσκουμε (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$c_1 \bar{\sigma}_0^2 y_1^j - \ell y_2^j + F^j = 0, \quad (3.36)$$

όπου (β λέπε [9]):

$$F^0 = 0, \quad (3.37\alpha')$$

$$F^1 = \frac{2m\bar{\omega}}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma_1}{m\bar{\omega}} - \frac{1}{\ell} \right) c_1 \bar{\sigma}_0^2 y_1^0. \quad (3.37\beta')$$

Στην επιφάνεια του αστέρα ($r = R$), η Λανγκραντζιανή διαταραχή της πίεσης πρέπει να μηδενίζεται ($\Delta p = 0$). Αυτό τελικά οδηγεί στην εξής απλή σχέση μεταξύ των ιδιοσυναρτήσεων y_1^j και y_2^j (β λέπε π.χ. [2, 7, 4]):

$$y_1^j - y_2^j = 0. \quad (3.38)$$

Στη διεπιφάνεια (interface) ρευστού πυρήνα - στερεού φλοιού, απαιτούμε συνέχεια των συνιστώσων της πρόσφυσης (traction). Αυτό ερμηνεύεται με τις συνθήκες άλματος (jump conditions) (βλέπε π.χ. [2, 7, 4]):

$$z_1^j = y_1^j, \quad (3.39\alpha')$$

$$z_2^j = V_1 \left(y_1^j - y_2^j \right), \quad (3.39\beta')$$

$$z_4^j = 0, \quad (3.39\gamma')$$

για τους σφαιροειδείς modes, και:

$$z_6^j = 0, \quad (3.40)$$

για τους τοροειδείς modes.

Τέλος, κανονικοποιούμε τις, μηδενικής και πρώτης - τάξης, ιδιοσυναρτήσεις επιβάλλοντάς τους τις συνθήκες:

$$y_1^0 = 1, \quad (3.41\alpha')$$

$$y_1^1 = 0, \quad (3.41\beta')$$

αντίστοιχα, στην επιφάνεια του αστέρα.

3.2 Μαγνητισμένοι αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Όπως αναφέραμε στην Ενότητα 2.4, ένας μαγνητισμένος αστέρας νετρονίων περιγράφεται από την ίδια μετρική με αυτήν ενός στατικού, σφαιρικού αστέρα νετρονίων (βλέπε π.χ. Konno, Obata & Kojima 1999, [54]):

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\lambda} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.42)$$

Και σε αυτήν την περίπτωση, οι εξισώσεις που περιγράφουν τις ταλαντώσεις προκύπτουν από τη γραμμική διαταραχή του νόμου διατήρησης ενέργειας - ορμής $\delta(\nabla^\beta T_{\alpha\beta}) = 0$ όπου τώρα ο τανυστής ενέργειας - ορμής είναι (βλέπε π.χ. Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]):

$$T_{\alpha\beta} = (\rho + p) u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta} - 2\mu S_{\alpha\beta} + H^2 u_\alpha u_\beta + \frac{1}{2} H^2 g_{\alpha\beta} - H_\alpha H_\beta, \quad (3.43)$$

με τους τρεις τελευταίους όρους να οφείλονται στο μαγνητικό πεδίο.

Εστιάζοντας σε αξονικά συμμετρικές, τοροειδούς τύπου ταλαντώσεις, είναι:

$$\delta\rho = \delta p = 0, \quad (3.44)$$

$$\delta u^t = \delta u^r = \delta u^\theta = 0, \quad (3.45)$$

για τις διαταραχές του αστρικού ρευστού, και:

$$\delta H^t = \delta H^r = \delta H^\theta = 0, \quad (3.46)$$

για τις διαταραχές του μαγνητικού πεδίου. Οι μόνες μη - μηδενικές διαταραχές, δu^ϕ και δH^ϕ , είναι συναρτήσεις του χρόνου, t , και των χωρικών συντεταγμένων, r και θ , και συνδέονται μέσω της εξίσωσης μαγνητικής επαγωγής (magnetic induction equation) (βλέπε π.χ. [14]):

$$\nabla_\beta \left(u^\alpha H^\beta - u^\beta H^\alpha \right) = 0. \quad (3.47)$$

Η γραμμική διαταραχή της εξίσωσης αυτής δίνει (βλέπε π.χ. [14]):

$$\frac{\partial \delta H^\phi}{\partial t} = e^\nu \left(H^r \frac{\partial \delta u^\phi}{\partial r} + \nu' H^r \delta u^\phi + H^\theta \frac{\partial \delta u^\phi}{\partial \theta} \right). \quad (3.48)$$

Εναλλακτικά, χρησιμοποιώντας τη σχέση ορισμού για το διάνυσμα μετατόπισης, $\delta u^\phi = e^{-\nu} \partial \xi^\phi / \partial t$, και ολοκληρώνοντας ως προς το χρόνο, η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$\delta H^\phi = H^r \frac{\partial \xi^\phi}{\partial r} + H^\theta \frac{\partial \xi^\phi}{\partial \theta}. \quad (3.49)$$

Με τη βοήθεια της τελευταίας αυτής σχέσης, ο νόμος διατήρησης ενέργειας - οριμής δίνει την ακόλουθη δεύτερης - τάξης διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους (βλέπε π.χ. Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^\phi &= \frac{e^{2\nu}}{\rho + p + e^{2\lambda} (H^r)^2 + (r H^\theta)^2} \times \left\{ e^{-2\lambda} \mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right. \\ &+ e^{-2\lambda} \left[\left(\frac{4}{r} + \nu' - \lambda' \right) \mu + \mu' \right] \frac{\partial}{\partial r} + 3 \frac{\mu}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ &+ (H^r)^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} + (H^\theta)^2 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2 H^r H^\theta \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \\ &+ \left[\left(2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} H^\theta + \left(\nu' + \frac{2}{r} \right) H^r \right) H^r + H^r H_{,r}^r + H^\theta H_{,\theta}^r \right] \frac{\partial}{\partial r} \\ &\left. + \left[\left(2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} H^\theta + \left(\nu' + \frac{2}{r} \right) H^r \right) H^\theta + H^r H_{,r}^\theta + H^\theta H_{,\theta}^\theta \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \xi^\phi. \quad (3.50) \end{aligned}$$

Στη συνέχεια, η ϕ - συνιστώσα του διανύσματος μετατόπισης γράφεται ως εξής ([14]):

$$\xi^\phi = i\sigma \mathcal{Y} e^{i\sigma t} b, \quad (3.51)$$

όπου $b = b(\theta)$ είναι η συνάρτηση:

$$b = \frac{1}{\sin \theta} \frac{dP_\ell}{d\theta}, \quad (3.52)$$

και $P_\ell = P_\ell(\cos \theta)$ είναι το πολυώνυμο Legendre τάξης ℓ . Η παραπάνω εξίσωση (3.50) ανάγεται τότε σε μία μονοδιάστατη εξίσωση για την ακτινική συνάρτηση $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}(r)$ (Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]):

$$\begin{aligned} & \left[\mu + (1 + 2\Lambda_1) \frac{a_1^2}{\pi r^4} \right] \frac{d^2 \mathcal{Y}}{dr^2} \\ & + \left\{ \left(\frac{4}{r} + \nu' - \lambda' \right) \mu + \mu' + (1 + 2\Lambda_1) \frac{a_1}{\pi r^4} [(\nu' - \lambda') a_1 + 2a_1'] \right\} \frac{d\mathcal{Y}}{dr} \\ & + \left\{ \left[\left(\rho + p + (1 + 2\Lambda_1) \frac{a_1^2}{\pi r^4} \right) e^{2\lambda} - \frac{\Lambda_1 a_1'^2}{2\pi r^2} \right] \sigma^2 e^{-2\nu} \right. \\ & - (\Lambda - 2) \left(\frac{\mu e^{2\lambda}}{r^2} - \frac{\Lambda_1 a_1'^2}{2\pi r^4} \right) \\ & \left. + (2 + 5\Lambda_1) \frac{a_1}{2\pi r^4} \{(\nu' - \lambda') a_1' + a_1''\} \right\} \mathcal{Y} = 0, \end{aligned} \quad (3.53)$$

όπου ($\beta\lambda\pi\varepsilon$ [14]):

$$\Lambda = \ell(\ell + 1), \quad (3.54)$$

$$\Lambda_1 = -\frac{\ell(\ell + 1)}{(2\ell - 1)(2\ell + 3)}. \quad (3.55)$$

Ορίζοντας, στη συνέχεια, δύο νέες μεταβλητές, τις \mathcal{Y}_1 και \mathcal{Y}_2 (Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]):

$$\mathcal{Y}_1 \equiv \mathcal{Y} r^{1-\ell}, \quad (3.56)$$

$$\mathcal{Y}_2 \equiv \left[\mu + (1 + 2\Lambda_1) \frac{a_1^2}{\pi r^4} \right] e^{\nu-\lambda} \frac{d\mathcal{Y}}{dr} r^{2-\ell}, \quad (3.57)$$

η παραπάνω εξίσωση (3.53) γράφεται ως σύστημα δύο συνήθων διαφορικών εξισώσεων

πρώτης - τάξης ([14]):

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dr} = -\frac{\ell-1}{r}\mathcal{Y}_1 + \frac{\pi r^3}{\pi r^4 \mu + (1+2\Lambda_1)a_1^2} e^{-\nu+\lambda} \mathcal{Y}_2, \quad (3.58\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Y}_2}{dr} &= - \left[\left(\rho + p + (1+2\Lambda_1) \frac{a_1^2}{\pi r^4} - \Lambda_1 e^{-2\lambda} \frac{a_1'^2}{2\pi r^2} \right) \sigma^2 r e^{2(\lambda-\nu)} \right. \\ &\quad - (\Lambda-2) \left(\frac{\mu e^{2\lambda}}{r} - \frac{\Lambda_1 a_1'^2}{2\pi r^3} \right) + (2+5\Lambda_1) \frac{a_1 e^{2\lambda}}{\pi r^3} \left(\frac{a_1}{r^2} - 2\pi j_1 \right) \left. \right] e^{\nu-\lambda} \mathcal{Y}_1 \\ &\quad - \frac{\ell+2}{r} \mathcal{Y}_2. \end{aligned} \quad (3.58\beta')$$

Το παραπάνω σύστημα εξισώσεων λύνεται ως ένα πρόβλημα ιδιοτιμών θέτοντας τις απαραίτητες συνοριακές συνθήκες. Αυτές είναι: α) κανονικότητα στο κέντρο του αστέρα:

$$\mathcal{Y}_2 = (\ell-1) \left[\mu + (1+2\Lambda_1) \frac{\alpha_c^2}{\pi} \right] e^\nu \mathcal{Y}_1, \quad (3.59\alpha')$$

β) συνέχεια της πρόσφυσης στη διεπιφάνεια ρευστού πυρήνα - στερεού φλοιού (δηλαδή στη βάση του στερεού φλοιού):

$$\mathcal{Y}_2^{(-)} = \mathcal{Y}_2^{(+)}, \quad (3.59\beta')$$

και γ) μηδενισμός της πρόσφυσης στην επιφάνεια του αστέρα:

$$\mathcal{Y}_2 = 0. \quad (3.59\gamma')$$

3.3 Ταχέως περιστρεφόμενοι, ρευστοί αστέρες νετρονίων

3.3.1 Προσέγγιση Cowling

Όπως προαναφέραμε, μπορούμε να μελετήσουμε τις ταλαντώσεις αστέρων νετρονίων στην προσέγγιση Cowling (Cowling 1941, [90]). Σε αυτήν την προσέγγιση (Cowling Approximation, CA) μηδενίζουμε τις διαταραχές της μετρικής και αγνοούμε τις διαταραγμένες εξισώσεις Einstein. Οι βασικές εξισώσεις μας προέρχονται από τον νόμο διατήρησης ενέργειας - ορμής:

$$\nabla_\beta T_\alpha^\beta = 0, \quad (3.60)$$

ο οποίος, όταν γραμμικοποιείται, δίνει:

$$\nabla_\beta t_\alpha^\beta = g_{\delta\epsilon} T_\alpha^\epsilon g^{\beta\gamma} \delta\Gamma_{\beta\gamma}^\delta + T_\gamma^\beta \delta\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + \nabla_\gamma T_\alpha^\beta h_\beta^\gamma, \quad (3.61)$$

όπου $t_{\alpha\beta}$ είναι οι διαταραχές των συνιστώσων του τανυστή ενέργειας - ορμής $T_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ είναι οι διαταραχές των συνιστώσων του μετρικού τανυστή $g_{\alpha\beta}$ και $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ είναι οι διαταραχές των συμβόλων Christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$. Στην προσέγγιση Cowling, λοιπόν, $h_{\alpha\beta} = 0$ και συνεπώς:

$$\delta\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}(\nabla_\alpha h_{\beta\delta} + \nabla_\beta h_{\alpha\delta} - \nabla_\delta h_{\alpha\beta}) = 0. \quad (3.62)$$

Έτσι, το δεξιό μέλος της εξίσωσης (3.61) μηδενίζεται και μένουμε με την εξίσωση:

$$\nabla_\beta t_\alpha^\beta = 0. \quad (3.63)$$

Έχουμε, πιο αναλυτικά:

$$\nabla_\beta t_\alpha^\beta = \partial_\beta t_\alpha^\beta - \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta t_\beta^\gamma + \Gamma_{\beta\gamma}^\gamma t_\alpha^\beta = 0. \quad (3.64)$$

Για έναν ταχέως περιστρεφόμενο αστέρα που περιγράφεται από τη μετρική (2.33), υπάρχουν είκοσι μη - μηδενικά σύμβολα Cristoffel. Το ανάπτυγμα της εξίσωσης (3.64) μάς δίνει τέσσερις εξισώσεις εξέλιξης (evolution equations) για τις συνιστώσες t_t^t, t_r^t, t_θ^t και t_ϕ^t του τανυστή ενέργειας - ορμής:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t_t^t &= -\frac{\partial}{\partial r} t_t^r - \frac{\partial}{\partial \theta} t_t^\theta - imt_t^\phi \\ &\quad - (\Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi) t_t^r - (\Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta + \Gamma_{\theta\phi}^\phi) t_t^\theta \\ &\quad + \Gamma_{tt}^r t_r^t + \Gamma_{t\phi}^\phi t_r^\phi + \Gamma_{tt}^\theta t_\theta^t + \Gamma_{t\phi}^\theta t_\theta^\phi + \Gamma_{tr}^\phi t_\phi^r + \Gamma_{t\theta}^\phi t_\phi^\theta, \end{aligned} \quad (3.65\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t_r^t &= -\frac{\partial}{\partial r} t_r^r - imt_r^\phi - (\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\phi}^\phi) t_r^r \\ &\quad + \Gamma_{rt}^t t_t^t + \Gamma_{r\phi}^\phi t_t^\phi + \Gamma_{r\theta}^\theta t_\theta^t + \Gamma_{rt}^\phi t_\phi^t + \Gamma_{r\phi}^\theta t_\phi^\theta, \end{aligned} \quad (3.65\beta')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t_\theta^t &= -\frac{\partial}{\partial \theta} t_\theta^\theta - imt_\theta^\phi - (\Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\phi}^\phi) t_\theta^\theta \\ &\quad + \Gamma_{\theta t}^t t_t^t + \Gamma_{\theta\phi}^\phi t_t^\phi + \Gamma_{\theta r}^r t_r^r + \Gamma_{\theta t}^\phi t_\phi^t + \Gamma_{\theta\phi}^\theta t_\phi^\theta, \end{aligned} \quad (3.65\gamma')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} t_\phi^t &= -\frac{\partial}{\partial r} t_\phi^r - \frac{\partial}{\partial \theta} t_\phi^\theta - imt_\phi^\phi \\ &\quad - (\Gamma_{rt}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{r\theta}^\theta) t_\phi^r - (\Gamma_{\theta t}^t + \Gamma_{\theta r}^r + \Gamma_{\theta\theta}^\theta) t_\phi^\theta \\ &\quad + \Gamma_{\phi r}^t t_t^r + \Gamma_{\phi\theta}^\theta t_t^\theta + \Gamma_{\phi t}^r t_r^t + \Gamma_{\phi\phi}^\theta t_\theta^r + \Gamma_{\phi t}^\theta t_\theta^t + \Gamma_{\phi\phi}^\theta t_\phi^\theta. \end{aligned} \quad (3.65\delta')$$

Τπενθυμίζουμε ότι ο μεικτός τανυστής ενέργειας - ορμής:

$$t_\alpha^\beta = \begin{pmatrix} t_t^t & t_t^r & t_t^\theta & t_t^\phi \\ t_r^t & t_r^r & t_r^\theta & t_r^\phi \\ t_\theta^t & t_\theta^r & t_\theta^\theta & t_\theta^\phi \\ t_\phi^t & t_\phi^r & t_\phi^\theta & t_\phi^\phi \end{pmatrix}, \quad (3.66)$$

δεν είναι συμμετρικός. Αυτό σημαίνει ότι έχει δεκαέξι διαφορετικές συνιστώσες τις οποίες πρέπει να γνωρίζουμε. Τέσσερις από αυτές, αυτές που βρίσκονται στην πρώτη στήλη του, δίνονται από το σύστημα (3.65). Οι υπόλοιπες υπολογίζονται μέσω αυτών των τεσσάρων (βλέπε παρακάτω) και, εν τέλει, το σύστημα (3.65) κλείνει και μπορεί να μελετηθεί η χρονική του εξέλιξη. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να γνωρίζουμε όλες τις συνιστώσες του t_α^β , κάθε χρονική στιγμή.

Τπενθυμίζουμε ότι ο τανυστής ενέργειας - ορμής για ένα ιδανικό ρευστό ορίζεται ως εξής:

$$T_\alpha^\beta = (\rho + p) u_\alpha u^\beta + p \delta_\alpha^\beta, \quad (3.67)$$

ενώ η καθαρά περιστροφική κίνηση του αστέρα καθορίζει τη μορφή της τετρα - ταχύτητάς του:

$$u^\alpha = (u^t, 0, 0, u^\phi). \quad (3.68)$$

Η γωνιακή ταχύτητα του αστέρα ορίζεται με τη σχέση $\Omega := u^\phi/u^t$. Η γραμμικοποίηση του τανυστή ενέργειας - ορμής (3.67), πάντα στην προσέγγιση Cowling, δίνει:

$$t_\alpha^\beta = u_\alpha u^\beta (\delta\rho + \delta p) + (\rho + p) (u_\alpha \delta u^\beta + u^\beta \delta u_\alpha) + \delta_\alpha^\beta \delta p. \quad (3.69)$$

$\delta\rho$ και δp είναι η διαταραγμένη πυκνότητα και η διαταραγμένη πίεση, αντίστοιχα, ενώ δu_a είναι οι συνιστώσες της διαταραγμένης τετρα - ταχύτητας. Διαπιστώνουμε εύκολα ότι μεταξύ των διαφόρων συνιστωσών του t_α^β και λόγω των σχέσεων (3.68) και $\Omega = u^\phi/u^t$,

ισχύουν οι ακόλουθες απλές αλγεβρικές σχέσεις:

$$t_r^\theta = 0, \quad (3.70\alpha')$$

$$t_\theta^r = 0, \quad (3.70\beta')$$

$$t_r^\phi = \Omega t_r^t, \quad (3.70\gamma')$$

$$t_\theta^\phi = \Omega t_\theta^t, \quad (3.70\delta')$$

$$t_\theta^\theta = t_r^r. \quad (3.70\epsilon')$$

Πέντε, ακόμη, συνιστώσες t_α^β μπορούν και εκφράζονται με τη βοήθεια των t_t^t, t_r^t, t_θ^t και t_ϕ^t , χρησιμοποιώντας τη σχέση ορθοκανονικότητας:

$$t_\alpha^\beta = g_{\alpha\delta} g^{\beta\gamma} t_\gamma^\delta, \quad (3.71)$$

που, αναπτυσσόμενη, δίνει τις παρακάτω σχέσεις:

$$t_t^r = g_{tt} g^{rr} t_r^t + g_{t\phi} g^{rr} t_r^\phi = (g_{tt} + g_{t\phi} \Omega) g^{rr} t_r^t, \quad (3.72\alpha')$$

$$t_t^\theta = g_{tt} g^{\theta\theta} t_\theta^t + g_{t\phi} g^{\theta\theta} t_\theta^\phi = (g_{tt} + g_{t\phi} \Omega) g^{\theta\theta} t_\theta^t, \quad (3.72\beta')$$

$$t_\phi^r = g_{\phi t} g^{rr} t_r^t + g_{\phi\phi} g^{rr} t_r^\phi = (g_{\phi t} + g_{\phi\phi} \Omega) g^{rr} t_r^t, \quad (3.72\gamma')$$

$$t_\phi^\theta = g_{\phi t} g^{\theta\theta} t_\theta^t + g_{\phi\phi} g^{\theta\theta} t_\theta^\phi = (g_{\phi t} + g_{\phi\phi} \Omega) g^{\theta\theta} t_\theta^t, \quad (3.72\delta')$$

και:

$$t_t^\phi = \frac{g_{tt} g^{\phi t}}{1 - g_{t\phi} g^{\phi t}} t_r^t + \frac{g_{tt} g^{\phi\phi}}{1 - g_{t\phi} g^{\phi\phi}} t_\phi^t + \frac{g_{t\phi} g^{\phi\phi}}{1 - g_{t\phi} g^{\phi\phi}} t_\phi^\phi. \quad (3.72\epsilon')$$

Τέλος, οι δύο απομένουσες συνιστώσες t_r^r και t_ϕ^ϕ προσδιορίζονται από την αδιαβατική συνθήκη, $t_r^r = \delta p = c_s^2 \delta \rho$, και εκφράζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} t_r^r = & - c_s^2 \frac{1 + e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2}{1 - c_s^2 e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2} t_t^t \\ & - c_s^2 \frac{2\Omega - \omega + e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 \omega}{1 - c_s^2 e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2} t_\phi^t, \end{aligned} \quad (3.73\alpha')$$

και:

$$\begin{aligned} t_\phi^\phi = & + e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 t_t^t \\ & + \left[2\Omega - \omega + e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 \omega \right] t_\phi^t \\ & + \left[1 - e^{-2\nu+2\psi} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 \right] t_r^r. \end{aligned} \quad (3.73\beta')$$

Οι πέντε σχέσεις (3.70), οι πέντε σχέσεις (3.72) και οι δύο σχέσεις (3.73), μαζί με τις τέσσερις εξισώσεις (3.65) αποτελούν ένα σύστημα δεκαέξι εξισώσεων με δεκαέξι αγνώστους. Αυτό το σύστημα περιγράφει με μοναδικό τρόπο τη χρονική εξέλιξη των αρχικών διαταραχών t_α^β .

Στην προσέγγιση Cowling μπορούμε εύκολα να συνδέουμε τις άγνωστες συναρτήσεις t_α^β με τις, φυσικά πιο κατανοητές, διαταραχές $\delta\rho, \delta p$ και δu_α . Μάλιστα, αυτό γίνεται αναλυτικά, σύμφωνα με τις παρακάτω σχέσεις:

$$\delta\rho = u_\beta u^\alpha t_\alpha^\beta, \quad (3.74\alpha')$$

$$\delta p = \frac{1}{3} P_\beta^\alpha t_\alpha^\beta, \quad (3.74\beta')$$

$$\delta u_\alpha = -\frac{1}{\rho+p} u_\gamma P_\alpha^\beta t_\beta^\gamma, \quad (3.74\gamma')$$

όπου P_α^β είναι, υπενθυμίζουμε, ο προβολικός τανυστής:

$$P_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta + u_\alpha u^\beta. \quad (3.75)$$

Αντίστροφα, η φυσική ερμηνεία των μεταβλητών t_α^β , που χρησιμοποιούμε, φαίνεται στις παρακάτω σχέσεις:

$$t_t^t \simeq -\delta\rho + (\text{όροι } \delta\rho, \delta p, \delta u_\phi, \text{ τάξης } \Omega), \quad (3.76\alpha')$$

$$t_r^t \simeq (\rho+p) \delta u_r, \quad (3.76\beta')$$

$$t_\theta^t \simeq (\rho+p) \delta u_\theta, \quad (3.76\gamma')$$

$$t_\phi^t \simeq (\rho+p) \delta u_\phi + (\text{όροι } \delta\rho, \delta p, \delta u_\phi, \text{ τάξης } \Omega), \quad (3.76\delta')$$

$$t_r^r = \delta p, \quad (3.76\epsilon')$$

$$t_\phi^\phi = \delta p + (\text{όροι } \delta\rho, \delta p, \delta u_\phi, \text{ τάξης } \Omega). \quad (3.76\tau')$$

Στο Νευτώνειο όριο, το σύστημα των εξισώσεων μας, (3.65), ανάγεται στη διαταραχή της εξισωσης της συνέχειας:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \delta p &= -c_s^2 \left[\frac{\partial}{\partial r} (\rho \delta u_r) + \frac{2}{r} (\rho \delta u_r) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho \delta u_\theta) + \frac{\cot \theta}{r^2} (\rho \delta u_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho \delta u_\phi) \right], \quad (3.77\alpha') \end{aligned}$$

και στις διαταραχές των εξισώσεων Euler:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta u_r) = -\frac{\partial}{\partial r} \delta p + \frac{1}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial r} \delta p + \frac{2\Omega}{r} (\rho \delta u_\phi), \quad (3.77\beta')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta u_\theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta} \delta p + \frac{1}{\gamma p} \frac{\partial p}{\partial \theta} \delta p + 2\Omega \cot \theta (\rho \delta u_\phi), \quad (3.77\gamma')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \delta u_\phi) = -\frac{\partial}{\partial \phi} \delta p - 2\Omega r \sin^2 \theta (\rho \delta u_r) - 2\Omega \sin \theta \cos \theta (\rho \delta u_\theta). \quad (3.77\delta')$$

Το σύστημα αυτό είναι πρώτης - τάξης, δύο διαστάσεων και φαίνεται να είναι ακατάλληλο για αριθμητικές προσομοιώσεις αφού, τα σχετικά αριθμητικά σχήματα που χρησιμοποιήθηκαν για την εξέλιξή του αποδείχθηκαν ασταθή.

Αντ' αυτού κατασκευάζουμε μια δεύτερης - τάξης διδιάστατη διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta p = & c_s^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \delta p + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\gamma p} \frac{dp}{dr} \right) \frac{\partial}{\partial r} \delta p + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \delta p + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta p \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \delta p - \frac{1}{\gamma p} \left[\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 \right] \delta p \right\}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

η οποία αποδεικνύεται πολύ πιο πρόσφορη για αριθμητικές προσομοιώσεις.

3.3.2 Αντίστροφη προσέγγιση Cowling

Στην αντίστροφη προσέγγιση Cowling (Inverse Cowling Approximation, ICA) αγνοούμε τις διαταραχές του αστρικού ρευστού και λαμβάνουμε υπόψη μόνο τις διαταραχές του χωρόχρονου (Andersson, Kokkotas & Schutz 1996, [95]). Οι ταλαντώσεις του χωρόχρονου, όπως είδαμε στην Εισαγωγή, μάς δίνουν τους w-modes (Kokkotas & Schutz 1992, [94]) που μπορούν να είναι είτε σφαιροειδείς (άρτιας parity) είτε τοροειδείς (περιττής parity). Οι βασικές εξισώσεις μας είναι, φυσικά, οι εξισώσεις Einstein:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}, \quad (3.79)$$

οι οποίες γραμμικοποιούνται και δίνουν:

$$\begin{aligned} & \nabla^\gamma \nabla_\gamma h_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta h_\gamma^\gamma - 2\nabla_{(\beta} \nabla^{\gamma} h_{\alpha)\gamma} + 2R^\gamma_\alpha{}^\delta_\beta h_{\gamma\delta} - 2R^\gamma_{(\beta} h_{\alpha)\gamma} \\ & + g_{\alpha\beta} \left(\nabla^\gamma \nabla^\delta h_{\gamma\delta} - \nabla^\delta \nabla_\delta h_\gamma^\gamma \right) + R_\gamma^\gamma h_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta} R^{\gamma\delta} h_{\gamma\delta} = -16\pi t_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Όπως και πριν, $h_{\alpha\beta}$ είναι οι γραμμικές διαταραχές των συνιστωσών του μετρικού τανυστή $g_{\alpha\beta}$ και $t_{\alpha\beta}$ είναι οι γραμμικές διαταραχές των συνιστωσών του τανυστή ενέργειας - ορμής $T_{\alpha\beta}$. Η αντίστροφη προσέγγιση Cowling σημαίνει ακριβώς ότι θέτουμε $t_{\alpha\beta} = 0$.

Για έναν ταχέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων, οι διαταραγμένες εξισώσεις Einstein (3.80) δίνουν ένα σύστημα δέκα πεπλεγμένων μερικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης - τάξης για τις διαταραχές της μετρικής, $h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}(t, r, \theta, \phi)$:

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} h_{tt} & h_{tr} & h_{t\theta} & h_{t\phi} \\ * & h_{rr} & h_{r\theta} & h_{r\phi} \\ * & * & h_{\theta\theta} & h_{\theta\phi} \\ * & * & * & h_{\phi\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{00} & h_{01} & h_{02} & h_{03} \\ * & h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ * & * & h_{22} & h_{23} \\ * & * & * & h_{33} \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

(Οι αστερίσκοι μάς υπενθυμίζουν τη συμμετρικότητα αυτού του τανυστή.)

Για έναν μη - περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων, οι δέκα εξισώσεις αποσυζεύγνηνται και, στη θέση τους, παίρνουμε δύο ομάδες εξισώσεων. Η πρώτη ομάδα περιλαμβάνει τις πολικές (polar) διαταραχές της μετρικής ($h_{tt}, h_{tr}, h_{t\theta}, h_{rr}, h_{r\theta}, h_{\theta\theta}, h_{\phi\phi}$) και η δεύτερη ομάδα περιλαμβάνει τις αξονικές (axial) διαταραχές της μετρικής ($h_{t\phi}, h_{r\phi}, h_{\theta\phi}$). Καθώς είναι πιο δύσκολο να μελετήσουμε (θεωρητικά ή / και αριθμητικά) μία ομάδα επτά πεπλεγμένων διαφορικών εξισώσεων, περιοριζόμαστε στις τρεις εξισώσεις που περιγράφουν τις αξονικές διαταραχές.

Απλοποιούμε ακόμη περισσότερο τις εξισώσεις μας, μη λαμβάνοντας υπόψη, προς το παρόν, την καμπυλότητα του χωρόχρονου. Με άλλα λόγια, δουλεύουμε με τη μετρική του επίπεδου χωρόχρονου:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (3.82)$$

Επιλέγοντας την απλή μετρική βγάζουμε χρήσιμα, ποιοτικά συμπεράσματα· έπειτα, επαναφέρουμε τους όρους καμπυλότητας (π.χ. τον όρο $e^{2\nu}$ μπροστά από το dt^2 της μετρικής κ.ά.) και ανακτούμε τις σχετικιστικές, ποσοτικά σωστές εξισώσεις.

Οι διαταραγμένες εξισώσεις Einstein μάς δίνουν, μετά από όλα αυτά, τρεις εξισώσεις:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] h_{t\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) h_{r\phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{\theta\phi} = 0, \quad (3.83\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) h_{t\phi} - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \right) \right] h_{r\phi} \\ - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{\theta\phi} = 0, \quad (3.83\beta') \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{t\phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} \\ - r \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right) h_{\theta\phi} = 0. \quad (3.83\gamma') \end{aligned}$$

Οστόσο, δύο μόνο από αυτές είναι ανεξάρτητες: η εξίσωση (3.83α') είναι αποτέλεσμα των άλλων δύο (Regge & Wheeler 1957, [91]). Το σύστημα δεν αποτελείται από δύο εξισώσεις για τρεις αγνώστους διότι υπάρχει μία ακόμη εξίσωση από την επιλογή της συνθήκης βαθμίδας (gauge condition).

Η πιο δημοφιλής συνθήκη βαθμίδας είναι η Regge - Wheeler (RW) gauge:

$$h_{\theta\phi} = 0. \quad (3.84)$$

Με αυτήν την επιλογή, οι εξισώσεις (3.83) απλοποιούνται μεν, αλλά συνεχίζουν να παρουσιάζουν αριθμητικές αστάθειες κατά την επίλυσή τους:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] h_{t\phi} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) h_{r\phi} = 0, \quad (3.85\alpha') \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) h_{t\phi} - \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \right) \right] h_{r\phi} = 0, \quad (3.85\beta') \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{t\phi} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} = 0. \quad (3.85\gamma') \end{aligned}$$

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε επίσης ότι δύο μόνο από τις τρεις εξισώσεις είναι ανεξάρτητες. Επιπλέον, η παρουσία όρων όπως ο $\partial^2 h_{r\phi} / \partial t \partial r$ στην πρώτη εξίσωση, ο $\partial^2 h_{t\phi} / \partial t \partial r$ στη δεύτερη εξίσωση και ο $\partial^2 h_{t\phi} / \partial t \partial \theta$ στην τρίτη εξίσωση καθιστούν την αριθμητική επίλυση - χρονική εξέλιξη του παραπάνω συστήματος εξαιρετικά δύσκολη και επίφοβη. Συνήθως, τέτοιοι όροι οδηγούν σε καταστροφικές αριθμητικές αστάθειες (numerical instabilities).

Εξετάζουμε, στη συνέχεια, μια ακόμη συνθήκη βαθμίδας, τη Hilbert - Lorentz (HL) gauge:

$$\nabla^\beta h_{\alpha\beta} = 0, \quad (3.86)$$

που, σε πλήρη ανάπτυξη, μεταφράζεται, για τις αξονικές διαταραχές της μετρικής:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{t\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) h_{r\phi} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{\theta\phi}. \quad (3.87)$$

Οι εξισώσεις (3.83) τώρα γράφονται ως:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{r\phi} &= \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - 4 \right] \right\} h_{r\phi} \\ &\quad - \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{\theta\phi}, \end{aligned} \quad (3.88\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} h_{\theta\phi} &= \frac{2}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} \\ &\quad + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} - 3 \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) - 1 \right] \right\} h_{\theta\phi}. \end{aligned} \quad (3.88\beta')$$

Είναι προφανές ότι έχουν τη μορφή κυματικών εξισώσεων (δεύτερης - τάξης χρονικές παράγωγοι από αριστερά, δεύτερης - τάξης χωρικές παράγωγοι από δεξιά) και δεν περιέχουν μικτές χρονικές - χωρικές παραγώγους. Η Hilbert - Lorentz gauge είναι, λοιπόν, φαινομενικά, πιο κατάλληλη για αριθμητικές προσομοιώσεις ταλαντώσεων του χωρόχρονου. Ας συγκρίνουμε, όμως, τις δύο συνθήκες βαθμίδας (RW και HL) και από μια άλλη οπτική γωνία.

Ανατρέχουμε στον ADM φορμαλισμό των εξισώσεων Einstein. Οι εξισώσεις που θεμελιώνουν αυτόν τον φορμαλισμό είναι οι εξής:

$$\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + \nabla_j \beta_i + \nabla_i \beta_j, \quad (3.89\alpha')$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} &= -\nabla_i \nabla_j \alpha + K_{ik} \nabla_j \beta^k + K_{kj} \nabla_i \beta^k + \beta^k \nabla_k K_{ij} \\ &\quad + \alpha \left[R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{ik}K_j^k - 8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2}\gamma_{ij} {}^{(4)}T \right) \right], \end{aligned} \quad (3.89\beta')$$

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi T_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta, \quad (3.89\gamma')$$

$$\nabla_j K_i^j - \nabla_i K = -8\pi T_{\alpha i} n^\alpha. \quad (3.89\delta')$$

Η πρώτη εξίσωση διέπει τη χρονική εξέλιξη της τριδιάστατης μετρικής, η δεύτερη εξίσωση τη χρονική εξέλιξη της εξωγενούς καμπυλότητας, η τρίτη εξίσωση εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας (Hamiltonian constraint) και η τελευταία τη διατήρηση της ορμής (momentum constraint).

Όπως και πριν, γραμμικοποιούμε και τις τέσσερις παραπάνω εξισώσεις. Παραθέτουμε εδώ, αντιπροσωπευτικά, τη γραμμικοποιημένη μορφή της εξίσωσης (3.89α'), που εξελίσσει χρονικά τις διαταραχές της τριδιάστατης μετρικής, h_{ij} , σε συνάρτηση με τις διαταραχές α της συνάρτησης lapse A , τις διαταραχές β_i του διανύσματος shift B_i , τις διαταραχές k_{ij} της εξωγενούς καμπυλότητας K_{ij} και τις διαταραχές $\delta\Gamma_{ij}^k$ των συμβόλων Cristoffel Γ_{ij}^k :

$$\partial_t h_{ij} = \partial_j \beta_i + \partial_i \beta_j - 2 \left(A k_{ij} + K_{ij} \alpha + \Gamma_{ij}^k \beta_k + B_k \delta \Gamma_{ij}^k \right). \quad (3.90)$$

Για έναν μη - περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων, για την απλή επίπεδη μετρική (3.82) και για τις αξονικές διαταραχές της μετρικής, οι γραμμικοποιημένες εξισώσεις ADM δίνουν:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{r\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \beta_\phi - 2 k_{r\phi}, \quad (3.91\alpha')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\theta\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \beta_\phi - 2 k_{\theta\phi}, \quad (3.91\beta')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k_{r\phi} &= -\frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \right) h_{r\phi} \\ &\quad + \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right] h_{\theta\phi}, \end{aligned} \quad (3.91\gamma')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} k_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \right) h_{\theta\phi}. \quad (3.91\delta')$$

Πάλι, έχουμε περισσότερους αγνώστους από τον αριθμό των εξισώσεων. Την εξίσωση που λείπει μάς την προμηθεύει η συνθήκη βαθμίδας.

Επιλέγοντας τη συνθήκη βαθμίδας Regge - Wheeler, δηλαδή $h_{\theta\phi} = 0$, αναγόμαστε

στο σύστημα:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{r\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \beta_\phi - 2k_{r\phi}, \quad (3.92\alpha')$$

$$0 = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \beta_\phi - 2k_{\theta\phi}, \quad (3.92\beta')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} k_{r\phi} = -\frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \right) h_{r\phi}, \quad (3.92\gamma')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} k_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi}, \quad (3.92\delta')$$

ενώ με τη συνθήκη βαθμίδας Hilbert-Lorentz, δηλαδή $\nabla^\beta h_{\alpha\beta} = 0$, που τώρα αναπτύσσεται ως εξής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \beta_\phi = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) h_{r\phi} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{\theta\phi}, \quad (3.93)$$

αναγόμαστε στο σύστημα:

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{r\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \beta_\phi - 2k_{r\phi}, \quad (3.94\alpha')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} h_{\theta\phi} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \beta_\phi - 2k_{\theta\phi}, \quad (3.94\beta')$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} k_{r\phi} &= -\frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + 2 \right) h_{r\phi} \\ &\quad + \frac{1}{2r^2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \right] h_{\theta\phi}, \end{aligned} \quad (3.94\gamma')$$

$$\frac{\partial}{\partial t} k_{\theta\phi} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} - 2 \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) h_{r\phi} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \right) h_{\theta\phi}. \quad (3.94\delta')$$

Συγχρίνοντας τα δύο προκύπτοντα συστήματα, (3.92) και (3.94), παρατηρούμε ότι, στο πρώτο, πρέπει να λύνουμε την ελλειπτική εξίσωση (3.92β') σε κάθε χρονικό βήμα εξέλιξης. Το χαρακτηριστικό αυτό είναι σαφώς ανεπιθύμητο, καθώς καθιστά επισφαλή την ευσταθή αριθμητική εξέλιξη του συστήματος αλλά και υπολογιστικά είναι χρονοβόρο. Το δεύτερο σύστημα, αντίθετα, δεν περιέχει κάποιον επικίνδυνο όρο και φαντάζει πιο κατάλληλο για αριθμητικές διδιάστατες προσομοιώσεις.

Κεφάλαιο 4

Ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Στις ενότητες που ακολουθούν παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους μη - μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Χρησιμοποιούμε μοντέλα αστέρων νετρονίων με μοντέρνες ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις και λύνουμε τις σχετικιστικές εξισώσεις διαταραχών που περιγράφουν τέτοιου είδους ταλαντώσεις (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]). Συγχρίνουμε τα αποτελέσματά μας με Νευτώνειες και σχετικιστικές μελέτες που χρησιμοποίησαν παλαιότερες καταστατικές εξισώσεις [2, 4] και επεκτείνουμε μελέτες που περιορίστηκαν στους τοροειδείς torsional modes του στερεού φλοιού [5, 14]. Στην Ενότητα 4.1 περιγράφουμε αριθμητικές τεχνικές που χρησιμοποιούμε για την επίλυση των βασικών εξισώσεων. Στην Ενότητα 4.2 μελετούμε ποιοτικά τις επιδράσεις του στερεού φλοιού στις αστρικές ταλαντώσεις χρησιμοποιώντας απλές πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις. Στην Ενότητα 4.3 μελετούμε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων. Παρατηρούμε πώς διαμορφώνονται τα αποτελέσματά μας όταν λαμβάνουμε υπόψη την πραγματική εσωτερική δομή των αστέρων νετρονίων. Στην Ενότητα 4.4 χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα αποτελέσματά μας και κατασκευάζουμε χρήσιμους εμπειρικούς τύπους για αστεροσεισμολογία. Τέλος, στην Ενότητα 4.5 υπολογίζουμε τους συντελεστές παλιρροιακής σύζευξης για διάφορους σφαιροειδείς modes σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό.

4.1 Εξισώσεις και αριθμητικές τεχνικές

Όπως αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι γραμμικές ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους μη - μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό περιγράφονται από τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (Yoshida & Lee 2002, Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [4, 9]):

$$r \frac{dz_1^0}{dr} = - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + U_2 \right) z_1^0 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^0 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^0, \quad (4.1\alpha')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_2^0}{dr} = & \left\{ \left(-3 - U_2 + U_1 - e^{2\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^0 \\ & + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^0 \\ & + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^0 + e^{2\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^0, \end{aligned} \quad (4.1\beta')$$

$$r \frac{dz_3^0}{dr} = -e^{2\lambda} z_1^0 + \frac{e^{2\lambda}}{\alpha_1} z_4^0, \quad (4.1\gamma')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_4^0}{dr} = & - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^0 \\ & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^0 \\ & - (3 + U_2 - V_2) z_4^0, \end{aligned} \quad (4.1\delta')$$

$$r \frac{dz_5^0}{dr} = \frac{e^{2\lambda}}{\alpha_1} z_6^0, \quad (4.1\epsilon')$$

$$r \frac{dz_6^0}{dr} = - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \right\} z_5^0 - (3 + U_2 - V_2) z_6^0. \quad (4.1\zeta')$$

Οι τέσσερις πρώτες εξισώσεις περιγράφουν σφαιροειδείς ταλαντώσεις ενώ οι δύο τελευταίες εξισώσεις περιγράφουν τοροειδείς ταλαντώσεις. Μάλιστα παρατηρούμε ότι μπορούμε να λύσουμε ξεχωριστά τις μεν από τις δε. Λύνοντας το σύστημα (4.1α')-(4.1δ') προσδιορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις $z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0$ και τις ιδιοσυχνότητες $\sigma_{0,\text{sph}}$ διαφόρων σφαιροειδών modes ενώ λύνοντας το σύστημα (4.1ε')-(4.1ζ') προσδιορίζουμε τις ιδιοσυναρτήσεις z_5^0, z_6^0 και τις ιδιοσυχνότητες $\sigma_{0,\text{tor}}$ διαφόρων τοροειδών modes.

Ουσιαστικά, επίλυση των παραπάνω εξισώσεων σημαίνει εύρεση της ακτινικής συμπεριφοράς των z_i^0 ($i = 1 \dots 6$) (πέρα από την εύρεση των ιδιοσυχνοτήτων σ_0). Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας τις φυσικές συνθήκες στα διάφορα σύνορα (κέντρο του

αστέρα, επιφάνεια του αστέρα και βάση του στερεού φλοιού) και επιλέγοντας μια συνθήκη κανονικοποίησης (βλέπε Κεφάλαιο 3, Υποενότητα 3.1.3, Συνοριακές συνθήκες και συνθήκες κανονικοποίησης). Τα $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, V_1, V_2, U_1, U_2, c_1, \lambda$ θεωρούνται γνωστά: είναι συναρτήσεις της ακτινικής συντεταγμένης r και εξαρτώνται μόνο από το αστρικό μοντέλο του οποίου μελετούμε τις ταλαντώσεις. Ο αρμονικός δείκτης ℓ είναι η μόνη (βαθμωτή) παράμετρος που έχουμε.

Στον εσωτερικό ρευστό πυρήνα ($\mu = 0$), οι εξισώσεις μας είναι λίγο διαφορετικές. Εκεί έχουμε να λύσουμε τις δύο διαφορικές εξισώσεις (Yoshida & Lee 2002, Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [4, 9]):

$$r \frac{dy_1^0}{dr} = - \left(3 - \frac{V_1}{\Gamma} + U_2 \right) y_1^0 - \left(\frac{V_1}{\Gamma} - \frac{\ell(\ell+1)}{c_1 \bar{\sigma}_0^2} \right) y_2^0, \quad (4.2\alpha')$$

$$r \frac{dy_2^0}{dr} = \left(e^{2\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 + r A_r \right) y_1^0 - (U_1 + r A_r) y_2^0, \quad (4.2\beta')$$

για τις συναρτήσεις $y_1^0 = y_1^0(r)$ και $y_2^0 = y_2^0(r)$. Το A_r θεωρείται, κι αυτό, γνωστή συνάρτηση του r .

Η αριθμητική τεχνική που ακολουθούμε για την επίλυση του όλου προβλήματος έχει ως εξής: στο κέντρο ($r = 0$) του αστέρα, επιλέγουμε τυχαία μια τιμή για τα y_1^0 ($y_1^0 = y_1^0, \text{ini}$) και σ_0 ($\sigma_0 = \sigma_0, \text{ini}$) και αυτόματα η τιμή του y_2^0 δίνεται μέσα από τη συνθήκη:

$$y_2^0 = \frac{c_1 \bar{\sigma}_0^2}{\ell} y_1^0, \quad (4.3)$$

([4, 9], βλέπε Ενότητα 3.1.3). Με αυτές τις τιμές για τα y_1^0 και y_2^0 ολοκληρώνουμε αριθμητικά (με τη μέθοδο Runge - Kutta τέταρτης - τάξης) τις εξισώσεις (4.2) ως τη βάση του στερεού φλοιού ($r = R_C$). Εκεί εφαρμόζουμε τις συνθήκες άλματος (jump conditions):

$$z_1^0 = y_1^0, \quad (4.4\alpha')$$

$$z_2^0 = V_1 (y_1^0 - y_2^0), \quad (4.4\beta')$$

$$z_4^0 = 0, \quad (4.4\gamma')$$

([4, 9], Ενότητα 3.1.3) και, ουσιαστικά, μεταβαίνουμε από τα y_1^0, y_2^0 στα $z_1^0, z_2^0, z_3^0, z_4^0$. Στη συνάρτηση z_3^0 δίνουμε, στη βάση του στερεού φλοιού, μια τυχαία τιμή $z_3^0 = z_{3,\text{ini}}^0$

και συνεχίζουμε ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (4.1) ως την επιφάνεια του αστέρα ($r = R$).

Γενικά, μετά από την ολοκλήρωση των εξισώσεων (4.1) μέσα στον στερεό φλοιό παίρνουμε $z_4^0 \neq 0$ στην επιφάνεια του αστέρα. Για να ικανοποιήσουμε τη συνθήκη άλματος $z_4^0 = 0$, μεταβάλλουμε την τιμή του $z_{3,\text{ini}}^0$ και βρίσκουμε τη σωστή εκείνη τιμή (χρησιμοποιούμε μια αριθμητική μέθοδο π.χ. τη μέθοδο διχοτόμησης ή τη μέθοδο γραμμικής παρεμβολής) για την οποία, μετά την ολοκλήρωση, μηδενίζεται το z_4^0 στην επιφάνεια του αστέρα.

Ξαναεφαρμόζουμε τις συνθήκες άλματος στην επιφάνεια του αστέρα και επανερχόμαστε στα αρχικά μας y_1^0, y_2^0 :

$$y_1^0 = z_1^0, \quad (4.5\alpha')$$

$$y_2^0 = z_1^0 - \frac{z_2^0}{V_1}. \quad (4.5\beta')$$

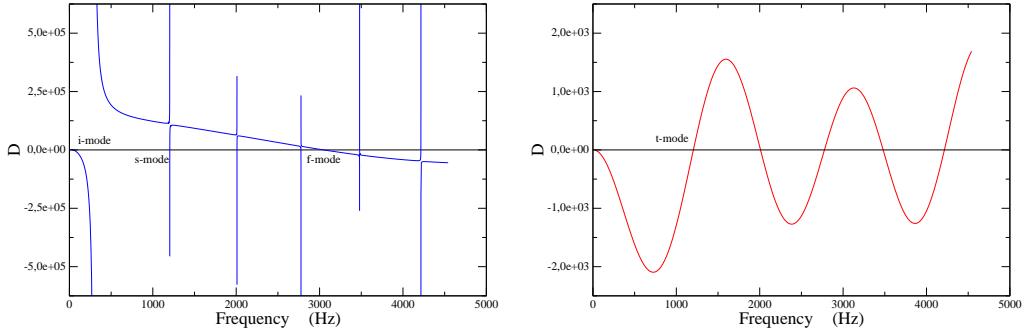
Εξετάζουμε, τέλος, κατά πόσο ικανοποιείται εκεί η συνθήκη:

$$D := y_1^0 - y_2^0 = 0. \quad (4.6)$$

Αν η συνθήκη αυτή όντως ικανοποιείται, η συχνότητα $\sigma_{0,\text{ini}}$ είναι μια ιδιοσυχνότητα του προβλήματος. Αν όχι, επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για διαφορετικές τιμές του $\sigma_{0,\text{ini}}$.

Για τις τοροειδείς ταλαντώσεις, η αριθμητική τεχνική που ακολουθούμε είναι παρόμοια και λίγο πιο απλή: ολοκληρώνουμε τις εξισώσεις (4.1ε')-(4.1τ') από τη βάση του στερεού φλοιού μέχρι την επιφάνεια του αστέρα. Οι συνθήκες προσδιορισμού των ιδιοσυχνοτήτων είναι, σε αυτήν την περίπτωση, $z_6^0 = 0$ και στα δύο αυτά σύνορα.

Στο Σχήμα 4.1 μεταβάλλουμε τη συχνότητα $\sigma = \sigma_{0,\text{ini}}$ και παρατηρούμε πώς μεταβάλλεται το D (όπου $D := y_1^0 - y_2^0$ στην περίπτωση σφαιροειδών ταλαντώσεων και $D := z_6^0$ στην περίπτωση τοροειδών ταλαντώσεων). Το αριστερό σχήμα αναφέρεται σε σφαιροειδείς ταλαντώσεις ενώ το δεξιό σχήμα αναφέρεται σε τοροειδείς ταλαντώσεις. Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν $D = 0$ συναντούμε κάποιον mode. Στην περίπτωση των σφαιροειδών ταλαντώσεων βρίσκουμε έναν f-mode, p-modes (δε συμπεριλαμβάνονται στο σχήμα, εμφανίζονται σε μεγαλύτερες συχνότητες), s-modes και έναν i-mode. Στην



Σχήμα 4.1: Εύρεση ιδιοσυχνοτήτων (σημείων όπου η ποσότητα D γίνεται ίση με μηδέν) σφαιροειδών (αριστερά) και τοροειδών (δεξιά) modes. Το αστρικό μοντέλο που χρησιμοποιείται είναι το $A + DH_{14}$ και $\ell = 2$. (Παράβλεπε με πρώτες γραμμές των Πινάκων 4.2, 4.3 και 4.4)

περίπτωση των τοροειδών ταλαντώσεων βρίσκουμε t-modes (περισσότερες λεπτομέρειες για όλους αυτούς τους modes ακολουθούν παρακάτω).

4.2 Επιδράσεις του στερεού φλοιού στις ταλαντώσεις

Στην ενότητα αυτή μελετούμε τις επιδράσεις του στερεού φλοιού στις αστρικές ταλαντώσεις χρησιμοποιώντας απλές πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις. Σκοπός μας είναι να αναδείξουμε, χυρίως ποιοτικά και λιγότερο ποσοτικά, τα νέα χαρακτηριστικά αυτών των ταλαντώσεων (σε σχέση με τις ταλαντώσεις σε ρευστούς αστέρες νετρονίων, χωρίς στερεό φλοιό). Βλέπε π.χ. και McDermott, Van Horn & Hansen (1988) [2].

Κατασκευάζουμε έναν πολυτροπικό αστέρα νετρονίων (Κεφάλαιο 2 και Ενότητα 2.5) με καταστατική εξισώση $p = K\rho^2$ ($\gamma = 2$), κεντρική πυκνότητα $\rho_0 \simeq 2 \times 10^{15} \text{ gr/cm}^3$, ακτίνα $R \simeq 10.1 \text{ km}$ και μάζα $M \simeq 2.036 \text{ km} \simeq 1.4 M_\odot$ ($M/R \simeq 0.2$).

Αρχικά θεωρούμε τον αστέρα χωρίς στερεό φλοιό ($\mu = 0$) και υπολογίζουμε αριθμητικά τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοσυναρτήσεις των ταλαντώσεων που τον χαρακτηρίζουν. Στους πίνακες και στα σχήματα που ακολουθούν υποθέτουμε $\ell = 2$ (θεωρούμε, δηλαδή, τετραπολικές ταλαντώσεις) και, όταν αυτό δεν ισχύει, η τιμή του ℓ υπονοείται από τον συμβολισμό (π.χ., με βάση τον συμβολισμό ℓp_n , ο $\ell = 1$ δεύτερος

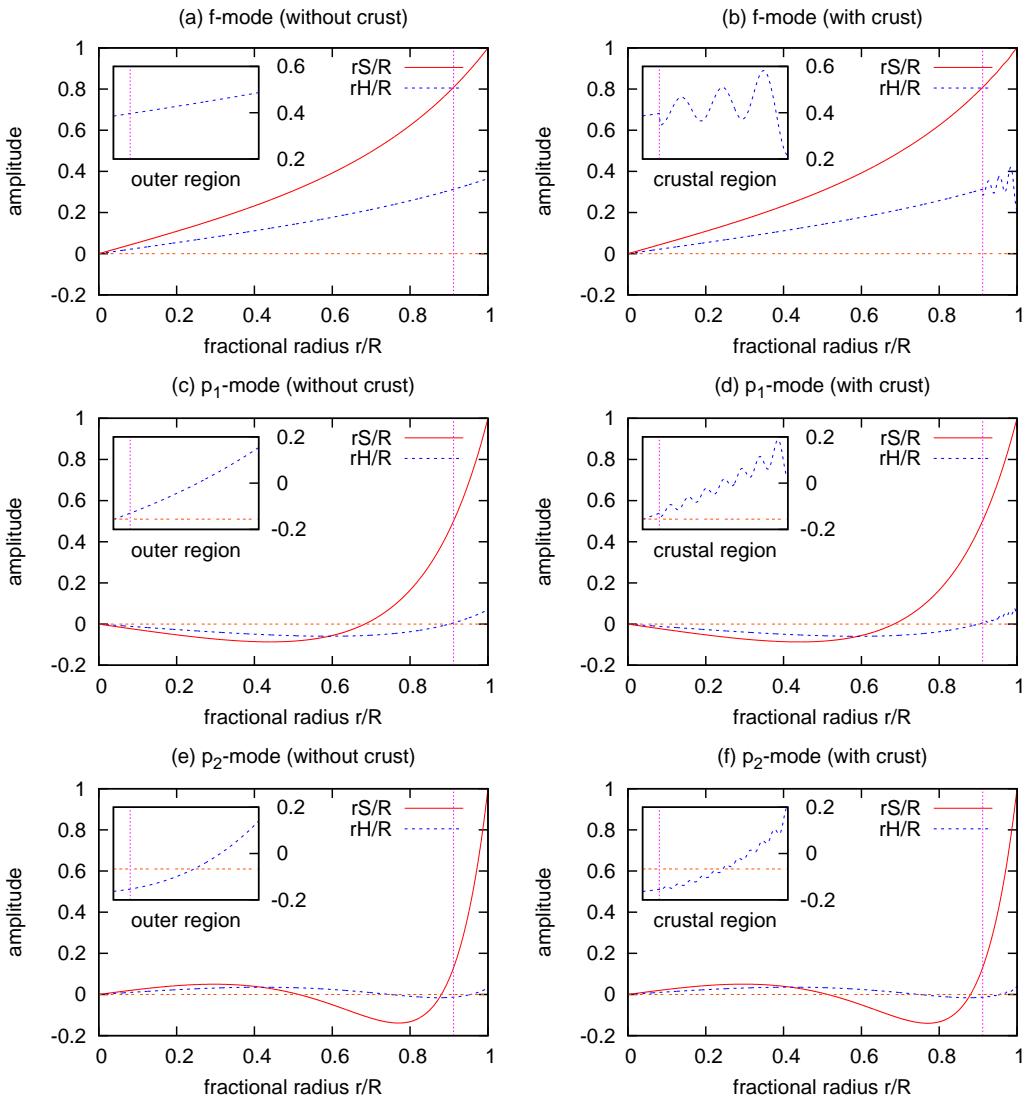
αρμονικός p-mode συμβολίζεται ως ${}_1p_2$). Επίσης θεωρούμε ότι ο αδιαβατικός δείκτης είναι ίσος με τον πολυτροπικό, $\Gamma = \gamma = 2$, και, με αυτήν τη θεώρηση, αποκλείουμε από τη μελέτη μας τους g-modes. Όπως λοιπόν περιμένουμε, οι ταλαντώσεις του αστέρα μας θα χαρακτηρίζονται μόνο από τον f-mode και από την οικογένεια των p-modes.

Πίνακας 4.1: Ιδιοσυχνότητες ($\sigma_0^2/\pi G\bar{\rho}$), για πολυτροπικό αστέρα, σφαιροειδών modes (αριστερά) και τοροειδών modes (δεξιά), χωρίς στερεό φλοιό ($\mu = 0$) και με στερεό φλοιό ($\mu \neq 0$).

Sph. Mode	$(\mu = 0)$	$(\mu \neq 0)$	Tor. Mode	$(\mu = 0)$	$(\mu \neq 0)$	Hz
p_2	42.95624	42.97240				12033
p_1	19.16461	19.16684				8037
s_7	—	4.86596	t_7	—	4.86604	4050
f	3.65406	3.65418				3509
s_3	—	0.96968	t_3	—	0.96985	1808
s_2	—	0.45974	t_2	—	0.45998	1245
s_1	—	0.13565	t_1	—	0.13600	676
i	—	0.00101				58
			t_0	—	0.00033	33

Οι ιδιοσυχνότητες των f- και p-modes φαίνονται στον Πίνακα 4.1 και οι ιδιοσυναρτήσεις τους φαίνονται στο αριστερό μέρος του Σχήματος 4.2. Πιο συγκεκριμένα, στον Πίνακα 4.1 αναγράφονται οι κανονικοποιημένες τιμές των ιδιοσυχνοτήτων, σ_0^2 , σε μονάδες $\pi G\bar{\rho}$ όπου $\bar{\rho} = 3M/4\pi R^3$ είναι η μέση πυκνότητα του αστέρα. Για να εξετάσουμε την ορθότητα του αριθμητικού μας κώδικα, θέτουμε $\Gamma = 5/3$ για τον αδιαβατικό δείκτη και βρίσκουμε $\sigma_0^2/\pi G\bar{\rho} = 3.57774, 15.64009$ και 35.20865 για τους f-, p₁- και p₂-mode, αντίστοιχα, αποτελέσματα που είναι σε εξαιρετική συμφωνία με εκείνα του Robé (1968) [92].

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι ο πολυτροπικός μας αστέρας περιβάλλεται εξωτερικά από έναν στερεό φλοιό ($\mu \neq 0$) σε πυκνότητες μικρότερες των $2.4 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$. Αυτό συνεπάγεται έναν στερεό φλοιό με λογικό πάχος, $\Delta r \simeq 0.89 \text{ km}$. Η παρουσία του στερεού φλοιού επιδρά με δύο τρόπους στις ταλαντώσεις των αστέρων: αλλάζει ελαφρά τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοσυναρτήσεις των ήδη υπαρχόντων f- και p-modes και δημιουργεί νέους κανονικούς τρόπους ταλάντωσης, τους s-, i- και t-modes, τους οποίους δε συναντούμε σε αστέρες άνευ στερεού φλοιού και τους οποίους μελετούμε



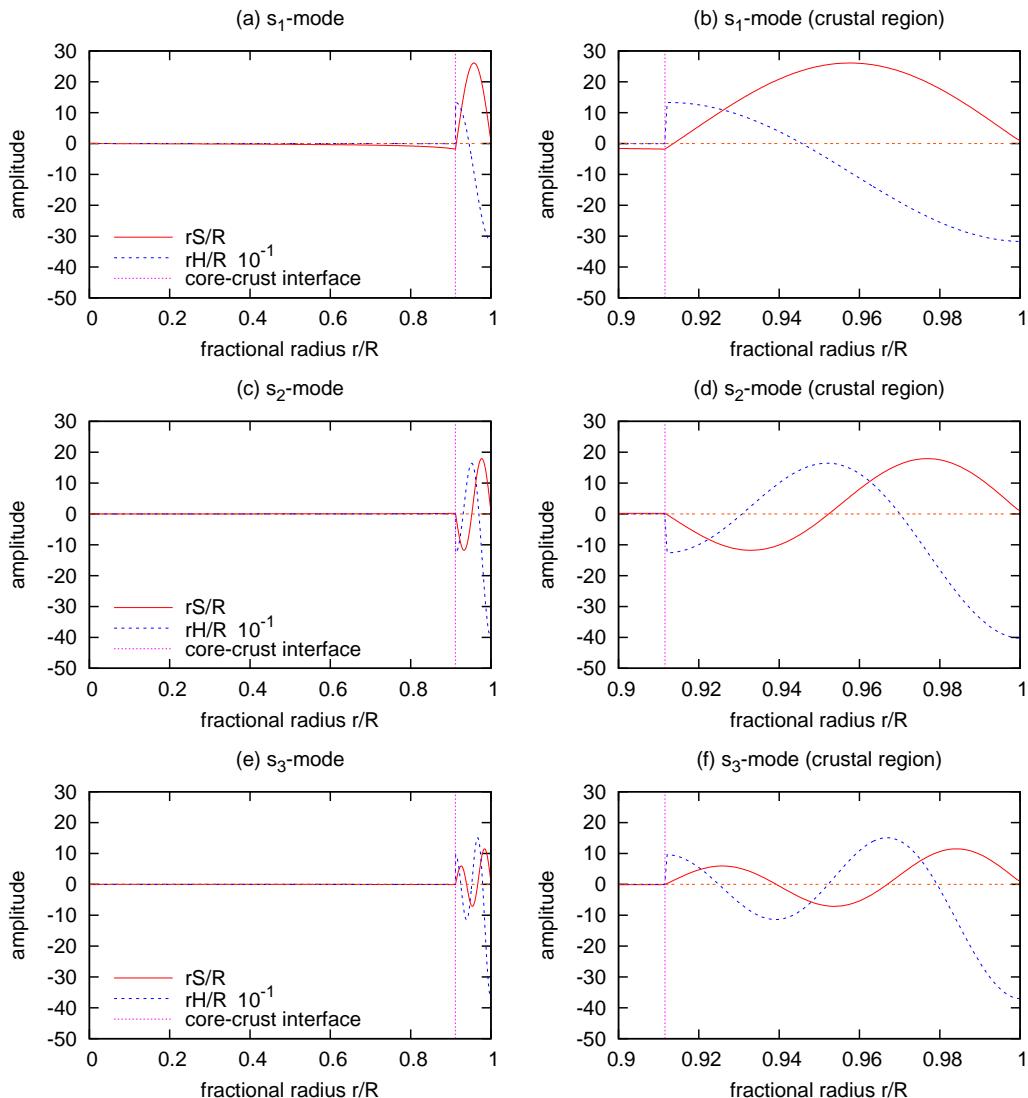
Σχήμα 4.2: Ιδιοσυναρτήσεις των f- και p-modes, για πολυτροπικό αστέρα, χωρίς στερεό φλοιό (αριστερά) και με στερεό φλοιό (δεξιά).

εκτενώς στη συνέχεια.

4.2.1 fundamental (f-) και pressure (p-) modes

Οι ιδιοσυχνότητες των f- και p-modes δεν αλλάζουν αισθητά (Πίνακας 4.1). Η ακτινική ιδιοσυνάρτηση $S = S(r)$ επίσης δεν αλλάζει αισθητά και, μόνο στην εγκάρσια ιδιοσυνάρτηση $H = H(r)$, διακρίνουμε χάποια διαφοροποίηση. Διακρίνουμε, δηλαδή,

μια ταλαντωτική συμπεριφορά της ιδιοσυνάρτησης H στην περιοχή του στερεού φλοιού. Μάλιστα, για υψηλότερες p -αρμονικές, αυτή η ταλαντωτικά συμπεριφορά μειώνεται σε πλάτος και σε μήκος και η ύπαρξη στερεού φλοιού γίνεται όλο και πιο δυσδιάκριτη (Σχήμα 4.2, δεξιά).



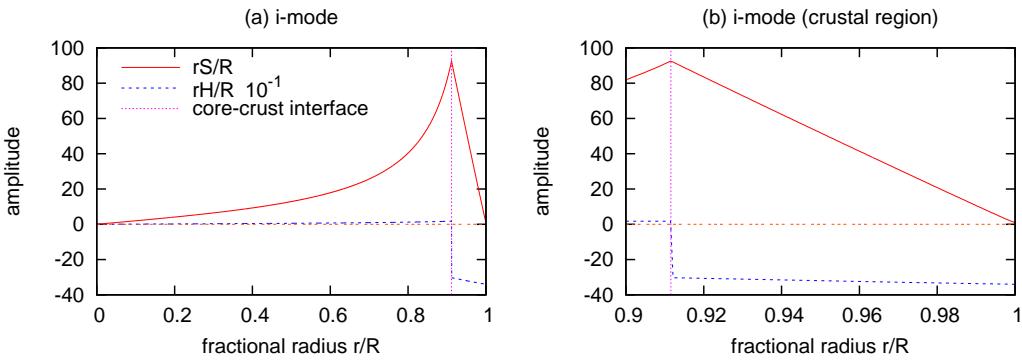
Σχήμα 4.3: Ιδιοσυναρτήσεις των s -modes, για πολυτροπικό αστέρα, σε όλο τον όγκο του (αριστερά) και στην περιοχή του στερεού φλοιού του (δεξιά).

4.2.2 shear (s-) modes

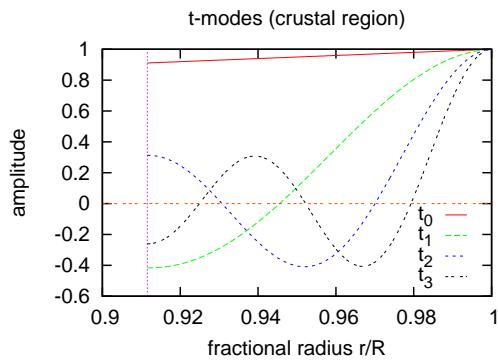
Οι s-modes είναι μια οικογένεια modes που συναντούμε αποκλειστικά σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Είναι modes σφαιροειδούς τύπου, όπως οι f- και οι p-modes, αλλά έχουν δύο σημαντικές διαφορές από αυτούς. Πρώτη διαφορά είναι ότι το πλάτος τους είναι μεγάλο κυρίως στην περιοχή του στερεού φλοιού (Σχήμα 4.3, αριστερά). Στον πυρήνα του αστέρα οι ιδιοσυναρτήσεις τους είναι μεν πεπερασμένες αλλά είναι και πολύ μικρότερες από ότι στον στερεό φλοιό. Δεύτερη διαφορά είναι ότι αντιπροσωπεύουν κυρίως εγκάρσιες και λιγότερο ακτινικές κινήσεις, $H \gg S$. Στο Σχήμα 4.3 φαίνεται χαρακτηριστικά ότι η εγκάρσια συνιστώσα, H , του ιδιοδιανύσματος μετατόπισης είναι τουλάχιστον δέκα φορές μεγαλύτερη από την ακτινική του συνιστώσα, S . Οι ιδιοσυχνότητες των s-modes φαίνονται στον Πίνακα 4.1. Εστιάζοντας στα ποιοτικά χαρακτηριστικά των ιδιοσυχνοτήτων αυτών, βλέπουμε ότι οι πρώτοι s-modes έχουν συχνότητες χαμηλότερες από εκείνη του f-mode ενώ οι υψηλότεροι αρμονικοί έχουν συχνότητες συγκρίσιμες με εκείνες των p-modes.

4.2.3 interfacial (i-) mode

Ο i-mode είναι άλλος ένας κανονικός τρόπος ταλάντωσης σφαιροειδούς τύπου που συναντούμε μόνο σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Ο i-mode δεν έχει υψηλότερους ακτινικούς αρμονικούς, i_n , όπως έχουν π.χ. οι p-, οι s- και οι t-modes. Και σε αυτόν επικρατούν οι εγκάρσιες κινήσεις (Σχήμα 4.4) αλλά το κυριότερο χαρακτηριστικό του είναι η ακμή που σχηματίζει η ακτινική του ιδιοσυνάρτηση, S , ακριβώς στη βάση του στερεού φλοιού. Επίσης, τόσο η ακτινική, όσο και η εγκάρσια ιδιοσυνάρτησή του, δεν έχουν ούτε έναν μηδενικό κόμβο (node). Η ιδιοσυχνότητά του είναι αρκετά χαμηλή, μερικές δεκάδες Hz (Πίνακας 4.1). Όλα αυτά τα χαρακτηριστικά καθιστούν τον i-mode ιδιαίτερα ενδιαφέροντα, τόσο στην περίπτωση των QPOs από SGRs όσο και στην περίπτωση των συμπαγών αστρικών ζευγών (Κεφάλαιο 1).



Σχήμα 4.4: Ιδιοσυνάρτηση του i-mode, για πολυτροπικό αστέρα, σε όλο τον όγκο του (αριστερά) και στην περιοχή του στερεού φλοιού του (δεξιά).



Σχήμα 4.5: Ιδιοσυναρτήσεις των t-modes, για πολυτροπικό αστέρα, στην περιοχή του στερεού φλοιού του.

4.2.4 torsional (t-) modes

Τέλος, οι t-modes είναι, αντίθετα με όλους τους προηγούμενους, modes τοροειδούς τύπου. Οι modes αυτοί εκτελούν αποκλειστικά εγκάρσιες κινήσεις ($S = 0$) και οι ιδιοσυχνότητές τους είναι παραπλήσιες με εκείνες των s-modes ($t_n \simeq s_n$ για $n \geq 1$). Εξαίρεση αποτελεί ο πρώτος, θεμελιώδης t-mode, ο t_0 , ο οποίος έχει πολύ χαμηλή ιδιοσυχνότητα, μερικές δεκάδες Hz (Πίνακας 4.1 και Σχήμα 4.5).

4.3 Ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων

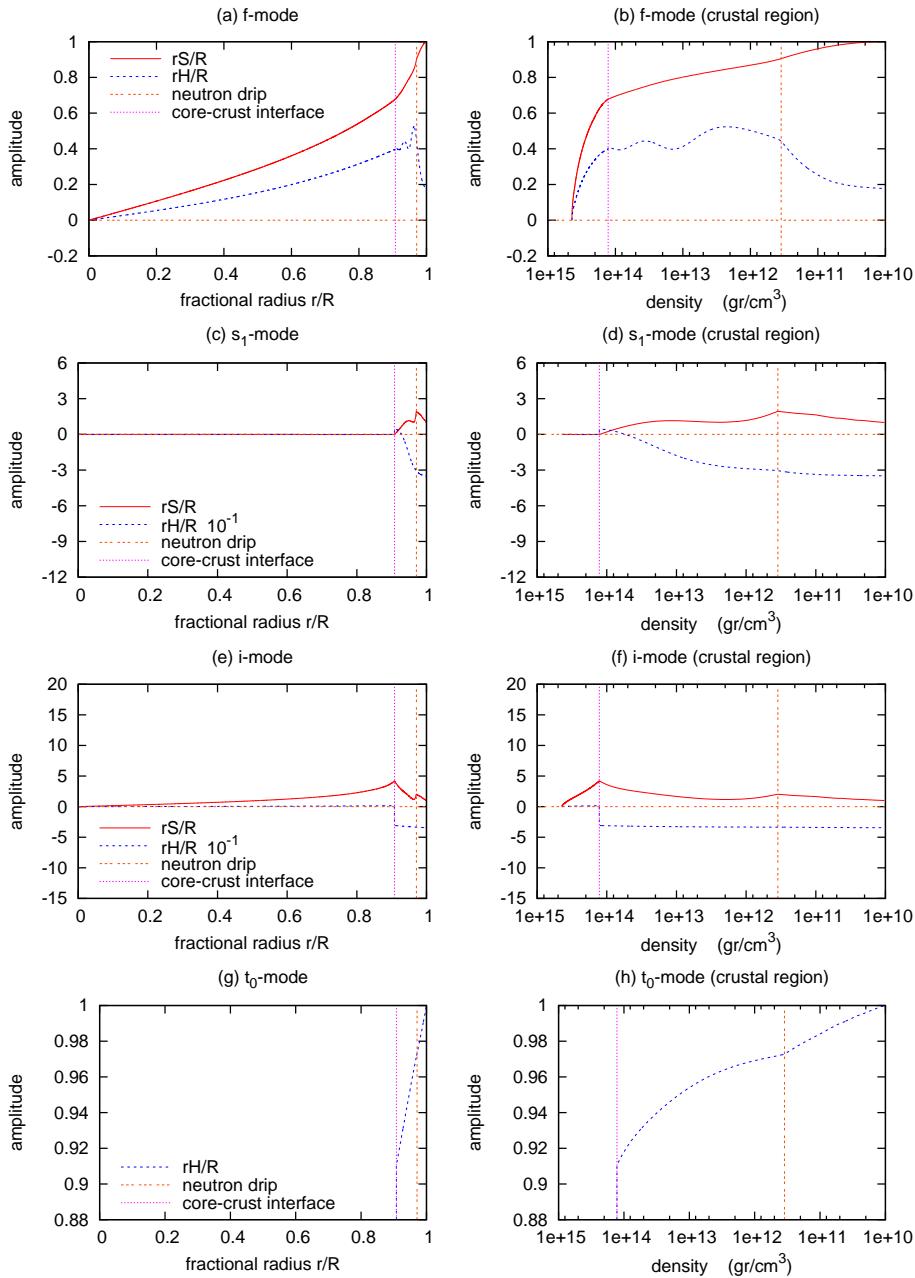
Στην ενότητα αυτή θα θεωρήσουμε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων (Κεφάλαιο 2 και Ενότητα 2.5). Ποιοτικά, δεν περιμένουμε μεγάλες διαφορές. Τα γενικά χαρακτηρι-

στικά για όλους τους modes είναι λίγο-πολύ τα ίδια: ταλαντωτική συμπεριφορά στην εγκάρσια ιδιοσυνάρτηση για τον f-mode, κυρίαρχες εγκάρσιες κινήσεις και αυστηρός περιορισμός στον στερεό φλοιό για τους s-modes, τον i-mode και τους t-modes (Σχήματα 4.6 και 4.7). Ωστόσο, η ύπαρξη του σημείου απελευθέρωσης των νετρονίων από τους πυρήνες (neutron drip point) είναι κάτι παραπάνω από φανερή. Δεξιά στο Σχήμα 4.6, για το μοντέλο L+DH₁₄ και σε πυκνότητα $\rho \simeq 3.5 \times 10^{11} \text{ gr/cm}^3$, οι ιδιοσυναρτήσεις όλων των modes διαμορφώνονται με χαρακτηριστικό τρόπο. Το ίδιο συμβαίνει στο Σχήμα 4.7, για το μοντέλο L+NV₁₄, σε πυκνότητα $\rho \simeq 4.3 \times 10^{11} \text{ gr/cm}^3$.

Οι ιδιοσυχνότητες των f-, p₁ και p₂ modes φαίνονται στον Πίνακα 4.2, όπως αυτές υπολογίζονται κανονικά ($\mu \neq 0$) και όπως υπολογίζονται αν θεωρήσουμε μηδενικό το shear modulus ($\mu = 0$). Βλέπουμε ότι οι διαφορές είναι πολύ μικρές, ανεπαίσθητες. Επιβεβαιώνεται δηλαδή η ποιοτική εικόνα της προηγούμενης ενότητας. Προχωρώντας στον Πίνακα 4.3 παρατηρούμε ότι οι interfacial modes έχουν όντως πολύ χαμηλές συχνότητες, μερικές δεκάδες Hz. Μάλιστα, οι ιδιοσυχνότητές τους εξαρτώνται αρκετά από την τιμή του αρμονικού δείκτη ℓ , αντίθετα με τους shear modes (τελευταίες στήλες του ίδιου πίνακα) των οποίων οι ιδιοσυχνότητες είναι σχεδόν ανεξάρτητες από την τιμή του ℓ . Σχεδόν ανεξάρτητες από την τιμή του αρμονικού δείκτη ℓ είναι και οι ιδιοσυχνότητες των ανώτερων ακτινικών αρμονικών των τοροειδών torsional modes (Πίνακας 4.4). Παρατηρούμε, μάλιστα, ότι οι ℓs_n σφαιροειδείς modes και οι ℓt_n τοροειδείς modes έχουν παραπλήσιες ιδιοσυχνότητες. Αυτό αντικατοπτρίζει την ίδια φύση αυτών των δύο οικογενειών modes· και οι μεν και οι δε αντιπροσωπεύουν εγκάρσια κύματα στον στερεό φλοιό, με διαφορετικές όμως πολώσεις. Τέλος, οι θεμελιώδεις τοροειδείς torsional modes, ℓt_0 , έχουν χαμηλές συχνότητες, που εξαρτώνται αρκετά από την τιμή του ℓ (Πίνακας 4.4, πρώτες στήλες).

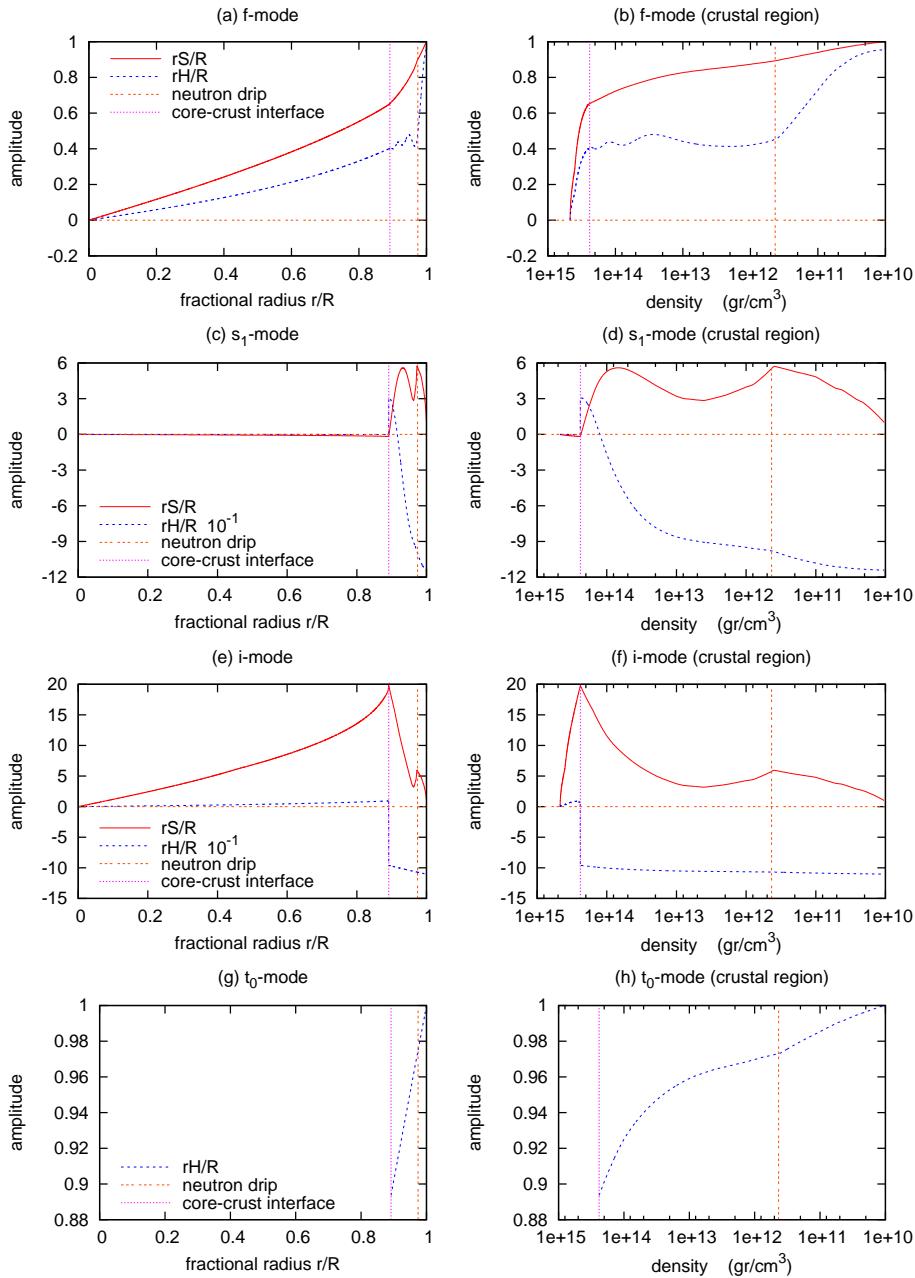
4.4 Αστεροσεισμολογικοί τύποι

Με τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας μπορούμε να κάνουμε αστεροσεισμολογία. Γενικά, προσπαθούμε να βρούμε προσεγγιστικούς τύπους που να μπορούν να μας δίνουν τις ιδιοσυχνότητες των διαφόρων modes με απλές αναλυτικές εκφράσεις.



Σχήμα 4.6: Ιδιοσυναρτήσεις διαφόρων modes, για το αστρικό μοντέλο L+DH₁₄, σε όλο τον όγκο του (αριστερά) και στην περιοχή του στερεού φλοιού του (δεξιά).

Αυτό φαίνεται πιο εύκολο για τους τοροειδείς torsional modes. Ήδη το 1980, από τα αποτελέσματα των Hansen & Cioffi (1980) [1] (βλέπε Εισαγωγή) φαίνεται ότι οι ιδιοσυχνότητες των ψεμελιωδών torsional modes προς τις ιδιοσυχνότητες των ανώτερων



Σχήμα 4.7: Ιδιοσυναρτήσεις διαφόρων modes, για το αστρικό μοντέλο L+NV₁₄, σε όλο τον όγκο του (αριστερά) και στην περιοχή του στερεού φλοιού του (δεξιά).

αρμονικών torsional modes εξαρτώνται μόνο από το σχετικό πάχος του στερεού φλοιού, $\Delta r/R$:

$$\frac{\ell t_0}{\ell t_n} \simeq \frac{[\ell(\ell+1)]^{1/2}}{\pi n} \frac{\Delta r}{R}. \quad (4.7)$$

Πίνακας 4.2: Ιδιοσυχνότητες (σε Hz) σφαιροειδών f , p_1 και p_2 modes, χωρίς στερεό φλοιό ($\mu = 0$) και με στερεό φλοιό ($\mu \neq 0$), για διάφορα αστρικά μοντέλα.

Model	$\mu = 0$			$\mu \neq 0$		
	f	p_1	p_2	f	p_1	p_2
A+DH ₁₄	3047.9	8690.1	11831.6	3047.9	8690.5	11836.8
A+DH ₁₆	3273.4	8816.6	12901.2	3273.4	8816.7	12902.2
WFF3+DH ₁₄	2608.6	7457.5	10570.5	2608.7	7457.9	10582.9
WFF3+DH ₁₆	2723.1	7660.6	11082.8	2723.1	7660.8	11085.6
WFF3+DH ₁₈	2914.9	7840.8	11239.7	2914.9	7840.9	11240.2
APR+DH ₁₄	2282.5	6368.8	9333.7	2282.5	6369.9	9366.0
APR+DH ₁₆	2342.0	6635.9	9953.4	2342.0	6636.5	9965.6
APR+DH ₁₈	2394.2	6872.1	10203.4	2394.2	6872.5	10206.9
APR+DH ₂₀	2443.0	7072.9	10280.3	2443.1	7073.4	10282.0
APR+DH ₂₂	2496.4	7226.7	10278.6	2496.4	7226.8	10279.2
L+DH ₁₄	1763.6	5539.5	6835.3	1763.6	5542.5	6916.1
L+DH ₁₆	1803.8	5663.9	7467.6	1803.9	5665.4	7527.5
L+DH ₁₈	1844.3	5731.5	7992.9	1844.3	5732.0	8023.6
L+DH ₂₀	1886.2	5760.1	8291.1	1886.3	5760.6	8301.4
L+DH ₂₂	1930.6	5765.8	8456.9	1930.6	5765.9	8459.8
L+DH ₂₄	1979.2	5761.9	8584.4	1979.2	5762.0	8585.8
L+DH ₂₆	2047.6	5765.4	8556.5	2047.6	5765.6	8557.1
A+NV ₁₄	3048.0	8697.3	11849.4	3048.0	8697.7	11855.4
A+NV ₁₆	3273.8	8819.6	12917.0	3273.8	8819.7	12918.6
WFF3+NV ₁₄	2607.6	7431.1	10509.2	2607.7	7431.9	10521.7
WFF3+NV ₁₆	2722.4	7646.4	11016.8	2722.4	7646.7	11020.7
WFF3+NV ₁₈	2914.7	7835.6	11213.1	2914.7	7835.7	11214.0
APR+NV ₁₄	2303.0	6756.1	9537.3	2303.0	6757.3	9575.5
APR+NV ₁₆	2356.8	6961.2	10242.0	2356.8	6961.9	10260.4
APR+NV ₁₈	2404.7	7130.0	10585.6	2404.7	7130.4	10591.6
APR+NV ₂₀	2450.3	7261.4	10660.4	2450.3	7261.6	10662.5
APR+NV ₂₂	2501.1	7345.0	10593.2	2501.1	7345.1	10594.1
L+NV ₁₄	1934.2	6872.1	8324.6	1934.2	6887.5	8458.2
L+NV ₁₆	1948.1	7228.8	8690.5	1948.2	7238.4	8739.4
L+NV ₁₈	1965.3	7276.3	8660.6	1965.3	7279.4	8681.6
L+NV ₂₀	1986.3	7028.0	9001.3	1986.4	7028.7	9018.4
L+NV ₂₂	2011.7	6744.4	9492.5	2011.8	6744.7	9505.5
L+NV ₂₄	2043.2	6497.2	9895.4	2043.2	6497.3	9901.7
L+NV ₂₆	2099.1	6263.9	9456.0	2099.1	6263.9	9456.5

Διερευνούμε, λοιπόν, τους θεμελιώδεις torsional modes, ℓt_0 . Χρησιμοποιούμε τις τιμές του Πίνακα 4.4 και σχηματίζουμε τα πηλίκα ιδιοσυχνοτήτων $2t_0/3t_0$ και $2t_0/4t_0$. Παρατηρούμε ότι, για όλα τα μοντέλα, τα πηλίκα αυτά ισούνται με $2/\sqrt{10} \simeq 0.6325$ και $2/\sqrt{18} \simeq 0.4714$, αντίστοιχα. Αυτό αμέσως συνεπάγεται ότι $\ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell+1)-2}$, όπως υποστηρίζουν οι Samuelsson & Andersson (2007) [5] και όχι $\ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell+1)}$, όπως θεωρείται σε άλλες μελέτες [1, 2, 13] (Κεφάλαιο 1, Ενότητα 1.1). Μπορούμε, με άλλα λόγια, να υπολογίζουμε τις ιδιοσυχνότητες των ανωτέρων αζιμουθιακών αρμονικών

Πίνακας 4.3: Ιδιοσυχνότητες (σε Hz) διαφόρων σφαιροειδών modes του στερεού φλοιού, για διάφορα αστρικά μοντέλα (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Model	$1i$	$2i$	$3i$	$1s_1$	$1s_2$	$1s_3$
A+DH ₁₄	22.5	48.0	70.5	1203.7	2009.4	2775.7
A+DH ₁₆	19.4	43.1	63.7	1527.4	2549.4	3523.9
WFF3+DH ₁₄	18.1	40.7	60.1	940.6	1570.6	2165.3
WFF3+DH ₁₆	17.7	39.4	58.2	1098.8	1833.9	2531.8
WFF3+DH ₁₈	17.1	38.1	56.3	1363.7	2275.3	3144.0
APR+DH ₁₄	19.9	41.9	61.2	759.8	1268.9	1748.1
APR+DH ₁₆	17.4	37.8	55.6	858.5	1433.4	1976.6
APR+DH ₁₈	16.8	36.3	53.4	963.6	1608.4	2219.7
APR+DH ₂₀	18.0	37.5	54.8	1080.8	1803.3	2490.8
APR+DH ₂₂	15.2	32.9	48.5	1234.6	2060.0	2846.4
L+DH ₁₄	15.1	33.3	48.7	529.0	884.2	1217.4
L+DH ₁₆	15.9	33.9	49.5	585.2	977.7	1347.9
L+DH ₁₈	13.3	29.9	44.1	646.9	1080.5	1490.7
L+DH ₂₀	14.7	31.4	46.0	711.1	1187.3	1639.6
L+DH ₂₂	12.5	28.1	41.4	786.5	1313.1	1814.0
L+DH ₂₄	13.1	28.4	41.8	872.3	1455.9	2012.5
L+DH ₂₆	13.4	28.5	41.9	992.5	1656.3	2290.8
A+NV ₁₄	20.7	45.4	66.7	950.2	1687.4	2389.9
A+NV ₁₆	19.7	43.4	63.9	1190.2	2113.2	2997.5
WFF3+NV ₁₄	19.2	42.0	61.4	739.9	1314.6	1860.3
WFF3+NV ₁₆	18.3	40.1	58.9	865.2	1536.3	2176.2
WFF3+NV ₁₈	17.6	38.7	56.9	1069.3	1898.0	2691.3
APR+NV ₁₄	18.1	39.3	57.2	615.5	1094.0	1546.8
APR+NV ₁₆	17.1	37.3	54.5	687.7	1222.0	1730.1
APR+NV ₁₈	16.2	35.5	52.0	768.8	1365.2	1934.2
APR+NV ₂₀	15.4	33.8	49.7	857.7	1522.9	2159.2
APR+NV ₂₂	14.6	32.1	47.2	973.9	1728.5	2451.8
L+NV ₁₄	16.6	35.9	52.1	482.6	858.3	1212.1
L+NV ₁₆	15.7	33.9	49.4	523.7	931.0	1316.5
L+NV ₁₈	14.8	32.2	47.1	567.0	1007.5	1426.0
L+NV ₂₀	14.1	30.7	45.0	614.3	1091.3	1545.7
L+NV ₂₂	13.4	29.4	43.1	666.6	1183.8	1678.0
L+NV ₂₄	12.8	28.1	41.3	728.7	1293.9	1835.1
L+NV ₂₆	12.3	27.0	39.7	823.7	1462.0	2074.1

($\ell \geq 3$), ψεμελιωδών ($n = 0$) torsional modes, με βάση τον προσεγγιστικό τύπο:

$$\frac{2t_0}{\ell t_0} = \frac{2}{\sqrt{\ell(\ell+1)-2}} \quad (\ell \geq 3), \quad (4.8)$$

όταν γνωρίζουμε την ιδιοσυχνότητα του $2t_0$ mode.

Για τους ανώτερους ακτινικούς αρμονικούς ($n \geq 1$), ξέρουμε, εκ των προτέρων, ότι έχουν ιδιοσυχνότητες σχεδόν ανεξάρτητες από το ℓ : γράφουμε, λοιπόν, t_n αντί για ℓt_n . Μπορούμε να προσεγγίσουμε τις ιδιοσυχνότητες των πρώτων από αυτούς ($n = 1 \dots 3$),

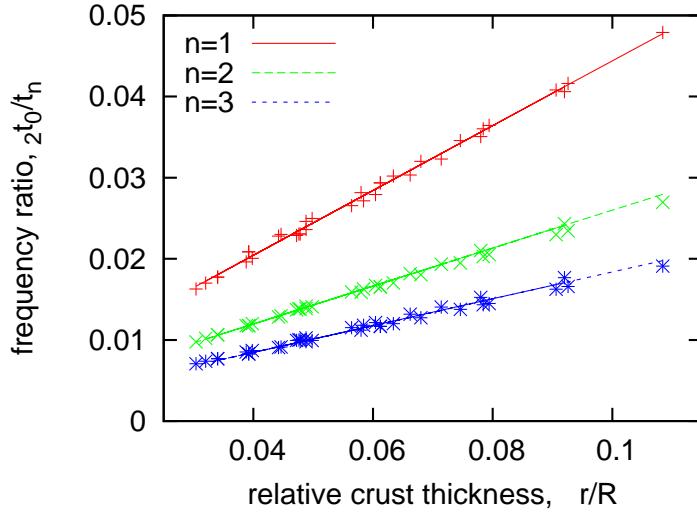
Πίνακας 4.4: Ιδιοσυχνότητες (σε Hz) διαφόρων τοροειδών torsional modes του στερεού φλοιού, για διάφορα αστρικά μοντέλα (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Model	${}_2t_0$	${}_3t_0$	${}_4t_0$	${}_1t_1$	${}_1t_2$	${}_1t_3$
A+DH ₁₄	28.4	44.9	60.3	1203.9	2009.4	2775.7
A+DH ₁₆	27.1	42.9	57.5	1527.6	2549.4	3523.9
WFF3+DH ₁₄	26.3	41.6	55.7	940.7	1570.6	2165.4
WFF3+DH ₁₆	25.2	39.8	53.4	1099.0	1834.0	2531.8
WFF3+DH ₁₈	24.2	38.3	51.3	1363.8	2275.3	3144.0
APR+DH ₁₄	24.6	38.8	52.1	760.0	1268.9	1748.2
APR+DH ₁₆	23.3	36.9	49.5	858.7	1433.5	1976.6
APR+DH ₁₈	22.2	35.1	47.1	963.7	1608.4	2219.7
APR+DH ₂₀	21.2	33.5	45.0	1080.9	1803.4	2490.8
APR+DH ₂₂	20.1	31.8	42.6	1234.7	2060.1	2846.4
L+DH ₁₄	21.5	34.0	45.6	529.2	884.2	1217.4
L+DH ₁₆	20.5	32.5	43.6	585.3	977.7	1347.9
L+DH ₁₈	19.6	31.0	41.6	647.0	1080.6	1490.7
L+DH ₂₀	18.9	29.9	40.1	711.2	1187.4	1639.6
L+DH ₂₂	18.1	28.7	38.5	786.6	1313.2	1814.0
L+DH ₂₄	17.5	27.7	37.1	872.3	1456.0	2012.5
L+DH ₂₆	16.9	26.7	35.8	992.6	1656.3	2290.8
A+N _V ₁₄	28.7	45.4	60.9	950.5	1687.5	2390.0
A+N _V ₁₆	27.4	43.3	58.1	1190.4	2113.3	2997.5
WFF3+N _V ₁₄	26.7	42.2	56.6	740.2	1314.7	1860.4
WFF3+N _V ₁₆	25.4	40.2	53.9	865.4	1536.4	2176.3
WFF3+N _V ₁₈	24.4	38.6	51.7	1069.5	1898.0	2691.4
APR+N _V ₁₄	25.2	39.8	53.4	615.8	1094.2	1546.9
APR+N _V ₁₆	23.8	37.6	50.5	688.0	1222.1	1730.2
APR+N _V ₁₈	22.6	35.7	47.9	769.0	1365.3	1934.3
APR+N _V ₂₀	21.4	33.9	45.5	857.9	1523.0	2159.3
APR+N _V ₂₂	20.3	32.1	43.1	974.1	1728.6	2451.9
L+N _V ₁₄	23.2	36.6	49.2	483.0	858.5	1212.3
L+N _V ₁₆	21.8	34.5	46.3	524.0	931.1	1316.6
L+N _V ₁₈	20.7	32.7	43.9	567.2	1007.6	1426.1
L+N _V ₂₀	19.7	31.1	41.8	614.5	1091.3	1545.8
L+N _V ₂₂	18.8	29.7	39.8	666.7	1183.9	1678.1
L+N _V ₂₄	18.0	28.4	38.1	728.8	1294.0	1835.2
L+N _V ₂₆	17.2	27.2	36.5	823.8	1462.1	2074.1

με βάση των τύπο:

$$\frac{\ell t_0}{t_n} = \frac{1}{\alpha(n-1)+1} \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)-2}}{2} \left(\beta \frac{\Delta r}{R} + \gamma \right), \quad (4.9)$$

όπου α , β και γ είναι παράμετροι που εξαρτώνται από την καταστατική εξίσωση του στερεού φλοιού (Πίνακας 4.5). Μπορούμε, βεβαίως, να χρησιμοποιήσουμε τους τύπο (4.9) ανεξάρτητα από την καταστατική εξίσωση του στερεού φλοιού (τελευταία σειρά του σχετικού πίνακα) αλλά τότε, όπως διαπιστώνουμε, υπάρχει πιθανότητα να σφάλουμε



Σχήμα 4.8: Λόγοι ιδιοσυχνοτήτων, $2t_0/t_n$, για $n = 1, 2$ και 3 , για τα 34 ρεαλιστικά αστρικά μοντέλα που χρησιμοποιούμε, σε συνάρτηση με το σχετικό πάχος του στερεού φλοιού, $\Delta r/R$. Οι γραμμές αναπαριστούν τον αναλυτικό προσεγγιστικό τύπο $\ell t_0/t_n = (1/0.708199(n-1)+1) \left(\sqrt{\ell(\ell+1)-2}/2 \right) (0.399283(\Delta r/R) + 0.00446907)$ (όπου $\ell = 2$) (βλέπε Τύπο 4.9 και Πίνακα 4.5).

μέχρι και 3.6%.

Πίνακας 4.5: Τιμές των παραμέτρων α , β και γ , για τον σεισμολογικό εμπειρικό τύπο (4.9). Μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια τις παραμέτρους αυτούς όταν επικεντρωνόμαστε στην DH ή στην NV καταστατική εξίσωση για τον στερεό φλοιό.

EoS	α	β	γ	max. error (%)
DH	0.656146	0.392604	0.00436097	$\simeq 1.5$
NV	0.760252	0.389087	0.005558507	$\simeq 1.1$
DH-NV	0.708199	0.399283	0.00446907	$\simeq 3.6$

Στο Σχήμα 4.5 φαίνεται πόσο καλά προσεγγίζονται οι λόγοι $2t_0/t_n$ από τον αναλυτικό προσεγγιστικό τύπο:

$$\frac{2t_0}{t_n} = \frac{1}{0.708199(n-1)+1} \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)-2}}{2} \left(0.399283 \frac{\Delta r}{R} + 0.00446907 \right), \quad (4.10)$$

για τα 34 ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων που χρησιμοποιούμε. Αν επικεντρωθούμε σε μοντέλα με συγκεκριμένη καταστατική εξίσωση στερεού φλοιού, DH ή NV, μπορούμε να προσεγγίσουμε τις πραγματικές τιμές για αυτούς τους λόγους με ακόμη μεγαλύτερη ακρίβεια.

4.5 Συντελεστές παλλιροιακής σύζευξης

Όπως είπαμε και στην Εισαγωγή, γνωρίζοντας την ακριβή μορφή της ιδιοσυνάρτησης ενός mode μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή παλλιροιακής σύζευξης του (ή, αλλιώς, το ολοκλήρωμα υπερχάλυψή του). Όσο πιο μεγάλη είναι η τιμή αυτού του ολοκληρώματος, τόσο πιο αποτελεσματική είναι η διέγερση αυτού του mode στα συμπαγή αστρικά ζεύγη (βλέπε π.χ. Press & Teukolsky 1977, Alexander 1987, [42, 43]). Το ολοκλήρωμα αυτό δίνεται από τη σχέση (βλέπε π.χ. [42, 43]):

$$Q = \ell \int_0^R \rho r^{\ell+1} [S + (\ell + 1) H] dr, \quad (4.11)$$

όπου $\rho = \rho(r)$ είναι η αστρική πυκνότητα, ℓ είναι ο γνωστός αρμονικός δείκτης και $S = S(r)$, $H = H(r)$ είναι η ακτινική και η εγκάρσια ιδιοσυνάρτηση ενός σφαιροειδούς mode ($\xi^i = [S, H\partial/\partial\theta, H\sin^{-1}\theta\partial/\partial\phi] Y_{\ell m} e^{i\sigma t}$). Η παρουσία της πυκνότητας ρ μέσα στο ολοκλήρωμα Q προμηνύει ότι το ολοκλήρωμα αυτό θα παίρνει μεγάλες τιμές για modes που έχουν σχετικά μεγάλα πλάτη προς το εσωτερικό του αστέρα, εκεί όπου επικρατούν μεγάλες πυκνότητες.

Παρακάτω, στον Πίνακα 4.6, υπολογίζουμε τους συντελεστές παλλιροιακής σύζευξης για διάφορους σφαιροειδείς modes σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Συγκεκριμένα, υπολογίζουμε τους συντελεστές αυτούς για τους $\ell = 2$, f-, p₁- και p₂-modes και για τους $\ell = 1$, i-, s₁- και s₂-modes. Ξέρουμε εκ των προτέρων ότι ο f-mode έχει τη μεγαλύτερη τιμή για αυτόν τον συντελεστή (βλέπε π.χ. Kokkotas & Schäfer 1995, Ho & Lai 1999, [44, 45]). Η τιμή του Q για τον f-mode είναι της τάξης της μονάδας ενώ η τιμή του Q για τους υπόλοιπους modes είναι σημαντικά μικρότερη. Οι συντελεστές παλλιροιακής σύζευξης για τους p- και i-modes είναι περίπου μία τάξη μεγέθους μικρότεροι ενώ οι συντελεστές αυτοί για τους s-modes είναι ακόμη πιο μικροί. Επίσης παρατηρούμε ότι οι ανώτεροι αρμονικοί ($n > 0$) έχουν, γενικά, μικρότερους συντελεστές Q .

Ωστόσο, όπως τονίστηκε και στην Εισαγωγή, πρέπει να ληφθεί υπόψη ο συγκεκριμένος συντελεστής Q σε συνδυασμό με την ιδιοσυχνότητα του mode για τον οποίο υπολογίζεται. Για παράδειγμα, η τιμή του Q για τον f-mode είναι αρκετά μεγάλη αλλά

ο f-mode έχει επίσης μεγάλη ιδιοσυχνότητα. Αν συγκρίνουμε τους p-modes με τους i-modes, βλέπουμε ότι οι τιμές του συντελεστή Q για αυτούς είναι της ίδιας τάξης μεγέθους. Ωστόσο, οι ιδιοσυχνότητες των i-modes είναι κατά πολύ μικρότερες από αυτές των p-modes και αυτό σημαίνει ότι οι i-modes ως διεγείρονται για αρκετούς κύκλους ενός συμπαγούς αστρικού ζεύγους ενώ οι p-modes ως διεγερθούν, με την ίδια περίπου διεγερτική δύναμη, μόνο κατά τους τελευταίους κύκλους του πριν από την τελική συγχώνευση (βλέπε π.χ. [44, 45]).

Πίνακας 4.6: Συντελεστές παλλιροιακής σύζευξης για τους $\ell = 2$, f-, p_1 - και p_2 -mode, καθώς και για τους modes στερεού φλοιού, $1i$, $1s_1$ και $1s_2$ ($\ell = 1$).

Model	$2f$	$2p_1$	$2p_2$	$1i$	$1s_1$	$1s_2$
A+DH ₁₄	0.17330	-0.06682	-0.02688	0.00799	-0.00012	0.00020
A+DH ₁₆	0.15036	-0.05193	-0.02144	0.00541	0.00010	0.00004
WFF3+DH ₁₄	0.17483	-0.07224	-0.03587	0.01043	-0.00015	0.00012
WFF3+DH ₁₆	0.15785	-0.06386	-0.03264	0.00801	-0.00013	0.00028
WFF3+DH ₁₈	0.13791	-0.05249	-0.02407	0.00555	0.00011	0.00004
APR+DH ₁₄	0.17493	-0.07049	-0.01469	0.01355	-0.00018	0.00011
APR+DH ₁₆	0.16063	-0.06526	-0.04439	0.01078	-0.00016	0.00013
APR+DH ₁₈	0.14771	-0.06079	-0.04457	0.00891	-0.00012	0.00027
APR+DH ₂₀	0.13521	-0.05681	-0.04075	0.00703	0.00012	0.00012
APR+DH ₂₂	0.12192	-0.05293	-0.03520	0.00551	0.00011	0.00001
L+DH ₁₄	0.17624	-0.08975	-0.03479	0.01881	-0.00028	-0.00013
L+DH ₁₆	0.16300	-0.08569	-0.03205	0.01563	-0.00023	-0.00012
L+DH ₁₈	0.15123	-0.08032	-0.03185	0.01308	-0.00019	0.00012
L+DH ₂₀	0.14053	-0.07435	-0.02649	0.01095	-0.00016	0.00016
L+DH ₂₂	0.13040	-0.06791	-0.02733	0.00911	-0.00014	0.00038
L+DH ₂₄	0.12038	-0.06124	-0.02543	0.00756	0.00012	0.00016
L+DH ₂₆	0.10899	-0.05439	-0.02516	0.00594	0.00011	0.00002
A+NV ₁₄	0.17354	-0.06701	-0.02671	0.01353	-0.00024	0.00005
A+NV ₁₆	0.15047	-0.05119	-0.02144	0.00935	-0.00017	0.00009
WFF3+NV ₁₄	0.17488	-0.07175	-0.03733	0.01765	-0.00033	-0.00007
WFF3+NV ₁₆	0.15793	-0.06367	-0.03296	0.01347	-0.00026	0.00007
WFF3+NV ₁₈	0.13794	-0.05243	-0.02416	0.00948	-0.00018	0.00010
APR+NV ₁₄	0.17656	-0.07675	-0.03482	0.02185	-0.00041	-0.00006
APR+NV ₁₆	0.16189	-0.07059	-0.03884	0.01780	-0.00032	-0.00006
APR+NV ₁₈	0.14873	-0.06502	-0.04053	0.01444	-0.00027	0.00007
APR+NV ₂₀	0.13602	-0.05986	-0.03794	0.01198	-0.00021	0.00007
APR+NV ₂₂	0.12247	-0.05482	-0.03337	0.00935	0.00019	0.00891
L+NV ₁₄	0.18064	-0.06214	-0.04600	0.02597	-0.00061	-0.00009
L+NV ₁₆	0.16681	-0.07470	-0.07184	0.02212	-0.00048	-0.00007
L+NV ₁₈	0.15449	-0.08674	-0.04159	0.01893	-0.00039	-0.00006
L+NV ₂₀	0.14333	-0.08316	-0.01794	0.01617	-0.00033	0.00007
L+NV ₂₂	0.13281	-0.07556	-0.01056	0.01380	-0.00028	0.00007
L+NV ₂₄	0.12238	-0.06761	-0.01255	0.01168	-0.00024	0.00009
L+NV ₂₆	0.11012	-0.05924	-0.01791	0.00935	0.00020	0.00054

4.6 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους, μη - μαγνητισμένους, στατικούς, σφαιρικούς αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Συμπεράσματα ότι τέτοιοι αστέρες πάλλονται με πολλούς και διάφορους modes. Πάλλονται με τον fundamental (f-) mode, με τους pressure (p-) modes αλλά και με τους interfacial (i-), shear (s-) και torsional (t-) modes. Συγχριτικά με αστέρες νετρονίων χωρίς στερεό φλοιό, ο f- και οι p-modes δεν υφίστανται σημαντικές αλλαγές. Οι i-, s- και t-modes, από την άλλη, δεν υπάρχουν σε αστέρες νετρονίων χωρίς στερεό φλοιό.

Για ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, που χρησιμοποιούνται ευρέως σε ενδιαφέρουσες πρόσφατες μελέτες (π.χ. Samuelsson & Andersson 2007, Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [5, 14]), υπολογίσαμε τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοσυναρτήσεις διαφόρων modes. Μέχρι σήμερα, για αυτά τα ρεαλιστικά μοντέλα νετρονίων, είχαν υπολογιστεί μόνο οι ιδιοσυχνότητες και οι ιδιοσυναρτήσεις των τοροειδών torsional modes. Για τους τοροειδείς αυτούς modes κατασκευάσαμε χρήσιμους αστεροσεισμολογικούς τύπους (Πίνακας 4.5 και Τύπος 4.9). Στην παρούσα διατριβή υπολογίσαμε ιδιοσυχνότητες και ιδιοσυναρτήσεις και για όλους τους σφαιροειδείς modes: τους i-, s-, f- και p-modes (Πίνακες 4.2, 4.3 και 4.4) (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]). Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι interfacial modes. Οι ιδιοσυχνότητές τους υπολογίστηκαν ότι είναι αρκετά χαμηλές, μερικές δεκάδες Hz. Αυτόματα, οι modes αυτοί γίνονται πολύ ενδιαφέροντες για τα φυσικά σενάρια που προσπαθούν να εξηγήσουν τις παρατηρούμενες συχνότητες σε QPOs από SGRs. Οι i-modes θα μπορούσαν να παίξουν πρωταγωνιστικό ρόλο και σε φυσικά σενάρια διέγερσης ταλαντώσεων σε συγκλίνοντα συμπαγή ζεύγη. Υπολογίσαμε τους συντελεστές παλλιροιακής σύζευξης για διάφορους modes αστέρων νετρονίων με στερεό φλοιό και καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι αυτοί είναι συγχριτικά μεγάλοι για τους i-modes (Πίνακας 4.6).

Κεφάλαιο 5

Ταλαντώσεις σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για ταλαντώσεις σε βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Υπενθυμίζουμε τις σχετικές μαθηματικές εξισώσεις στην Ενότητα 5.1 και τις χρησιμοποιούμε για τοροειδείς modes στην Ενότητα 5.2. Έπειτα, συνεχίζουμε με σφαιροειδείς modes στην Ενότητα 5.3. Κατ' αντιστοιχία με το προηγούμενο κεφάλαιο, μελετούμε πρώτα ποιοτικά τις επιδράσεις της περιστροφής, χρησιμοποιώντας πολυτροπικές καταστατικές εξισώσεις και, στη συνέχεια, για πιο αξιόπιστα αποτελέσματα, χρησιμοποιούμε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων. Ποσοτικοποιούμε τις αποκλίσεις μεταξύ των Νευτρωνειων και των σχετικιστικών αποτελεσμάτων και, στην Ενότητα 5.4, μελετούμε την αστάθεια CFS για modes του στερεού φλοιού και αναφερόμαστε στην πιθανή αστροφυσική της σημασία.

5.1 Εξισώσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, λύσαμε τις μηδενικής - τάξης εξισώσεις (δηλαδή αυτές για έναν μη - περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων) και προσδιορίσαμε τις ιδιοσυχνότητες, σ_0 , και τις ιδιοσυναρτήσεις, z_i^0, y_i^0 , διαφόρων σφαιροειδών και τοροειδών modes. Σε αυτό το κεφάλαιο ψάχνουμε να βρούμε τις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις, σ_1 , και z_i^1, y_i^1 , αντίστοιχα. Ένας (βραδέως) περιστρεφόμενος αστέρας νετρονίων με στερεό

φλοιό όταν έχει ιδιοσυγχρότητες $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$ και ιδιοσυναρτήσεις $z_i = z_i^0 + z_i^1, y_i = y_i^0 + y_i^1$. Από εδώ και στο εξής, λοιπόν, θεωρούμε τα σ_0 και z_i^0, y_i^0 γνωστά (όπως αυτά υπολογίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο).

Οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις που έχουμε να λύσουμε για τα z_i^1 ($i = 1 \dots 6$) είναι οι εξής (βλέπε Ενότητα 3.1 και Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$r \frac{dz_1^1}{dr} = - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + U_2 \right) z_1^1 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^1, \quad (5.1\alpha')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_2^1}{dr} = & \left\{ \left(-3 - U_2 + U_1 - e^{2\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^1 \\ & + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^1 \\ & + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^1 + e^{2\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^1 \\ & + \left\{ -2e^{2\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \mathcal{A} \right\} z_1^0 \\ & + \{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1 + \mathcal{B}\} z_3^0 + \mathcal{C} z_4^0, \end{aligned} \quad (5.1\beta')$$

$$r \frac{dz_3^1}{dr} = -e^{2\lambda} z_1^1 + \frac{e^{2\lambda}}{\alpha_1} z_4^1, \quad (5.1\gamma')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_4^1}{dr} = & - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^1 \\ & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^1 \\ & - (3 + U_2 - V_2) z_4^1 \\ & + \left\{ \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \mathcal{D} \right\} z_1^0 + \mathcal{E} z_2^0 \\ & + \left\{ -2c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \mathcal{F} \right\} z_3^0, \end{aligned} \quad (5.1\delta')$$

$$r \frac{dz_5^1}{dr} = \frac{e^{2\lambda}}{\alpha_1} z_6^1, \quad (5.1\epsilon')$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_6^1}{dr} = & - \{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \} z_5^1 - (3 + U_2 - V_2) z_6^1 \\ & + \left\{ 2c_1 \bar{\sigma}_0 V_1 \left[-\bar{\sigma}_1 + \frac{m \bar{\omega}}{\ell (\ell + 1)} \right] + \mathcal{G} \right\} z_5^0. \end{aligned} \quad (5.1\varphi')$$

Κατά τα γνωστά, οι τέσσερις πρώτες εξισώσεις διορθώνουν τους σφαιροειδείς modes ενώ οι δύο τελευταίες εξισώσεις διορθώνουν τους τοροειδείς modes. Τα $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ κ.τ.λ. είναι συναρτήσεις του r , εξαρτώνται από το αστρικό μοντέλο που χρησιμοποιούμε και θεωρούνται γνωστά (Σχέσεις 3.29). Γνωστό θεωρούμε (εκ κατασκευής) και το $\bar{\omega}$.

Μία νέα παράμετρος, ο αρμονικός δείκτης m , εμφανίζεται στις εξισώσεις. Το παραπάνω σύστημα λύνεται με τρόπο παρόμοιο με τον τρόπο που περιγράφτηκε στην Ενότητα 4.1 και υπολογίζονται οι περιστροφικές διορθώσεις $\sigma_1 := m\Omega C_1$. Για $m = 0$ είναι πάντα $\sigma_1 = 0$ και $C_1 = 0$ με άλλα λόγια, οι αξονικά συμμετρικοί modes δεν υφίστανται περιστροφικές διορθώσεις σε αυτήν την προσέγγιση (πρώτης - τάξης ως προς Ω/Ω_K).

5.2 Τοροειδείς modes

Κατασκευάζουμε έναν πολυτροπικό αστέρα νετρονίων (Κεφάλαιο 2 και Ενότητα 2.5) με καταστατική εξίσωση $p = K\rho_B^2$, $\rho = \rho_B + p$ ($\gamma = 2$, $n = 1$), κεντρική πυκνότητα βαρυονικής μάζας $\rho_B \simeq 7.9 \times 10^{14} \text{ gr/cm}^3$, ακτίνα $R \simeq 14.15 \text{ km}$ και μάζα $M \simeq 1.4 \text{ M}_\odot$ ($M/R \simeq 0.15$). Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται από τους Font et al. (2001) [84] και έχει την κωδική ονομασία BU0.

Πριν από όλα, επαληθεύουμε τα αποτελέσματα μηδενικής - τάξης, χωρίς περιστροφή, για αστέρες νετρονίων χωρίς στερεό φλοιό. Όπως φαίνεται στον Πίνακα 5.1, ο κώδικας μας και ο κώδικας των Font et al. (2001) [84] συμφωνούν σε πολύ καλό βαθμό. Ο δικός μας κώδικας είναι γραμμικός (ως προς τις διαταραχές) ενώ αυτός των Font et al. είναι μη - γραμμικός. Επιπλέον, εμείς συνδέουμε τις διαταραχές της πίεσης και της πυκνότητας με τη σχέση $\delta p = p\Gamma\delta\rho/(\rho + p)$ ενώ οι Font et al. χρησιμοποιούν τη σχέση $\delta p = p\Gamma\delta\rho/\rho$. Κατά τα άλλα, και οι δύο κώδικες πραγματεύονται το ίδιο φυσικό πρόβλημα.

Πίνακας 5.1: Ιδιοσυχνότητες (σε Hz) διαφόρων modes, για το μοντέλο BU0, όπως αυτές υπολογίζονται από τον αριθμητικό μας κώδικα και από τον κώδικα των Font et al. (2001) [84] (σε παρενθέσεις).

ℓ	ℓf	ℓp_1	ℓp_2	ℓp_3
1	1377 (1335)	3472 (3473)	5336 (5335)	7138 (7136)
2	1882 (1846)	4105 (4100)	6028 (6019)	7865 (7867)
3	2256 (2228)	4641 (4622)	6647 (6635)	8532 (8600)

Με βάση το μοντέλο BU0, κατασκευάζουμε, στη συνέχεια, ένα Νευτώνειο μοντέλο, με κωδική ονομασία N0, το οποίο έχει 5000 φορές μικρότερη κεντρική πυκνότητα ρ_B . Ο αστέρας που προκύπτει έχει συμπαγότητα $M/R \simeq 4 \times 10^{-5}$. Προφανώς,

δεν είναι αστέρας νετρονίων, αυτό όμως δεν αποτελεί πρόβλημα για τη δοκιμή που θα πραγματοποιήσουμε. Προς το παρόν ενδιαφερόμαστε για το Νευτώνειο όριο των εξισώσεων και του κώδικά μας· τούτο θα γίνει σαφές στη συνέχεια.

Στον Νευτώνειο αστέρα N0, θεωρούμε εξωτερικά έναν στερεό φλοιού με μη - μη-δενικό συντελεστή γραφικού ιξώδους ($\sqrt{\mu/\rho} \simeq 10^3$ km/sec, βλέπε π.χ. Hansen & Cioffi 1980, [1]). Το πάχος του στερεού φλοιού ή η πυκνότητα στην οποία αυτός εμφανίζεται δεν αφορούν τον συγκεκριμένο υπολογισμό. Ο Νευτώνειος αστέρας N0, λόγω του στερεού φλοιού του, χαρακτηρίζεται από τοροειδείς torsional modes και από σφαιροειδείς interfacial και shear modes. Φυσικά, ο f-mode και οι p-modes εξακολουθούν να υπάρχουν αν και ελαφρώς διαφοροποιημένοι, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 4.

Στην ενότητα αυτή εστιάζουμε στους τοροειδείς t-modes ενώ τους σφαιροειδείς modes εξετάζουμε στην επόμενη ενότητα. Στον Πίνακα 5.2 παραθέτουμε τις ιδιοσυχνότητες, σ_0 , και τις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις, $C_1 := \sigma_1/m\Omega$, διαφόρων torsional modes. Οι τιμές των ιδιοσυχνοτήτων δεν είναι ιδιαίτερα αξιόπιστες (αφού το μοντέλο μας είναι λίγο - πολύ αφύσικο) αλλά οι τιμές για τις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις είναι ακριβώς αυτές που προβλέπονται από τη Νευτώνεια θεωρία.

Πίνακας 5.2: Ιδιοσυχνότητες, σ_0 (σε Hz), και πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις, C_1 , διαφόρων torsional modes, για το Νευτώνειο μοντέλο N0.

	$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$		$\ell = 4$	
Mode	σ_0	C_1	σ_0	C_1	σ_0	C_1	σ_0	C_1
t_0	—	—	35	0.1666	55	0.0833	74	0.05
t_1	243	0.5	245	0.1666	249	0.0833	254	0.05
t_2	481	0.5	482	0.1666	484	0.0833	487	0.05
t_3	720	0.5	721	0.1666	722	0.0833	724	0.05

Πραγματικά, οι Νευτώνεις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις των ιδιο-
συχνοτήτων των torsional modes φαίνονται στη σχέση του Strohmayer (1991) [6]:

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \sigma_0 + m\Omega C_{1,\text{New}} = \sigma_0 + \frac{m\Omega}{\ell(\ell+1)}, \quad (5.2)$$

που υποδηλώνει ότι το $C_{1,\text{New}} := \sigma_1/m\Omega$ είναι ίσο με $1/[\ell(\ell+1)]$ ανεξάρτητα από το αστρικό μοντέλο. Για παράδειγμα, $C_{1,\text{New}} = 0.5$ για $\ell = 1$, $C_{1,\text{New}} = 0.1666$ για

$\ell = 2$, $C_{1,\text{New}} = 0.0833$ για $\ell = 3$, $C_{1,\text{New}} = 0.05$ για $\ell = 4$ κ.ο.κ. Επιπλέον, οι Νευτώνειες πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις των ιδιοσυναρτήσεων των torsional modes είναι ακριβώς ίσες με μηδέν, $T^1 = 0$ (βλέπε π.χ. Strohmayer 1991 και Lee & Strohmayer 1996, [6, 7]).

Οι σχετικιστικές πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις των ιδιοσυγχρονητών των torsional modes, όπως αυτές μετρούνται από έναν συμπεριστρεφόμενο παρατηρητή, φαίνονται μέσα από τη σχέση (π.χ. Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \sigma_0 + m\Omega C_{1,\text{rel}}. \quad (5.3)$$

Ο συμπεριστρεφόμενος παρατηρητής συγκρίνει τις Νευτώνειες με τις σχετικιστικές πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις ορίζοντας $rc_r := 1 - C_{1,\text{rel}}/C_{1,\text{New}}$. Ένας αδρανειακός παρατηρητής, από την άλλη, μετράει:

$$\sigma = \sigma_0 - m\Omega + m\Omega C_{1,\text{New}} = \sigma_0 + m\Omega C'_{1,\text{New}}, \quad (5.4\alpha')$$

$$\sigma = \sigma_0 - m\Omega + m\Omega C_{1,\text{rel}} = \sigma_0 + m\Omega C'_{1,\text{rel}}, \quad (5.4\beta')$$

στη Νευτώνεια και στη σχετικιστική περίπτωση, αντίστοιχα, και ορίζει με τη σειρά του $rc_i := 1 - C'_{1,\text{rel}}/C'_{1,\text{New}}$. Εύκολα βλέπουμε ότι τα rc_r και rc_i συνδέονται με την απλή σχέση (βλέπε π.χ. [9]):

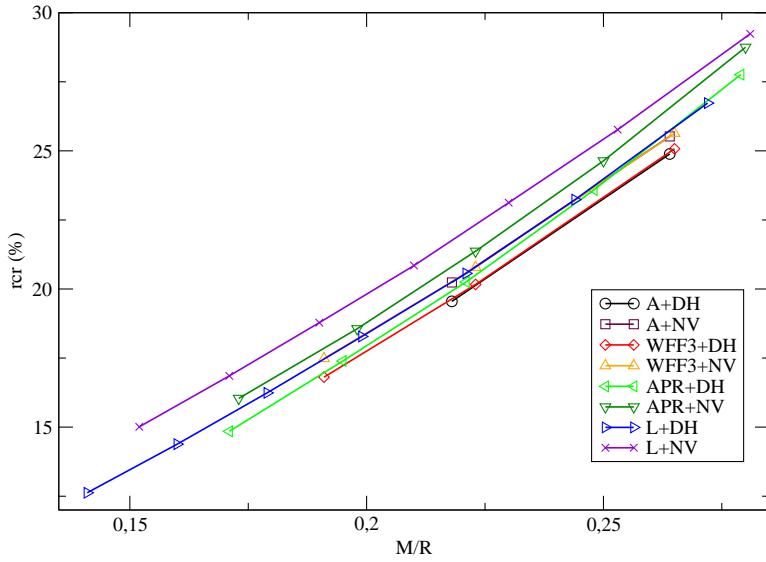
$$rc_i = -\frac{rc_r}{1/C_{1,\text{New}} - 1}. \quad (5.5)$$

Οι πρώτης - τάξης σχετικιστικές διορθώσεις στις ιδιοσυγχρονητήτες των torsional modes δίνονται και από τη σχέση (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

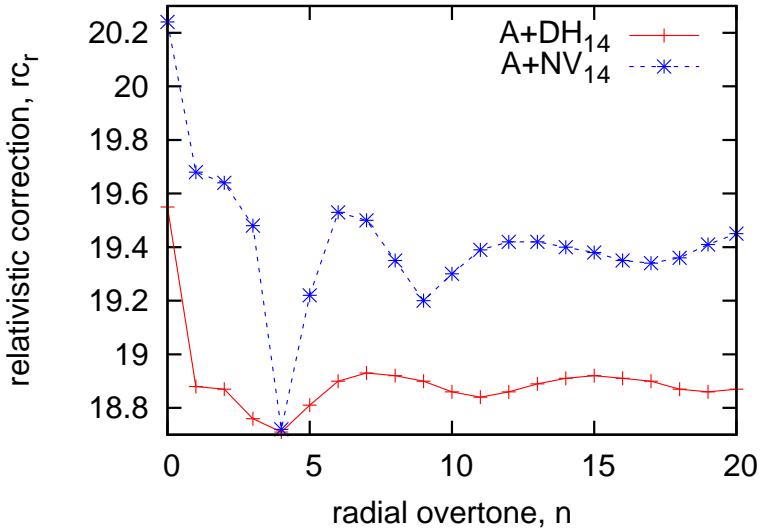
$$C_1 = \frac{1}{\Omega} \frac{\int_0^R \varpi [1/\Lambda + \varepsilon v_s^2 (1 - 2/\Lambda)] (T^0)^2 dr}{\int_0^R (T^0)^2 dr}. \quad (5.6)$$

Η απόδειξη της παραπάνω σχέσης δίνεται στο Παράρτημα B'.

Στον Πίνακα 5.3 δείχνουμε τις σχετικιστικές πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $C_{1,\text{rel}}$ για τους θεμελιώδεις $\ell = 2, 3$ και 4 torsional modes (${}_2t_0$, ${}_3t_0$, ${}_4t_0$) (βλέπε Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]), για την ομάδα των 34 μοντέλων αστέρων νετρονίων που περιγράψαμε στο Κεφάλαιο 2 και συγκεκριμένα στην Ενότητα



Σχήμα 5.1: Σχετικιστικές διορθώσεις, r_{Cr} , σε συνάρτηση με τη συμπαγότητα, M/R , για 34 μοντέλα αστέρων νετρονίων με ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).



Σχήμα 5.2: Σχετικιστικές διορθώσεις, r_{Cr} , για ανώτερους ακτινικούς αρμονικούς torsional modes, $n = 0 \dots 20$, για τα αστρικά μοντέλα $A+DH_{14}$ και $A+NV_{14}$.

2.5. Οι Νευτώνεις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $C_{1,\text{New}}$ είναι ίσες με $1/[\ell(\ell+1)]$ για όλα τα αστρικά μοντέλα, σύμφωνα με τη Σχέση (5.2) του Strohmayer (1991) [6]. Όπως περιμένουμε, για κάθε καταστατική εξίσωση, μεγαλύτερες τιμές συμπαγότητας (M/R) έχουν ως αποτέλεσμα μεγαλύτερες σχετικιστικές διορθώσεις ($r_{\text{cr}} := 1 - C_{1,\text{rel}}/C_{1,\text{New}}$). Για τη συγκεκριμένη ομάδα αστρικών μοντέλων, όπου $0.14 \lesssim M/R \lesssim 0.28$, οι σχετικιστικές διορθώσεις r_{cr} κυμαίνονται από 10% ως 30% περίπου. Σύμφωνα με τη Σχέση (5.5) και για $\ell = 2$ ($C_{1,\text{New}} = 0.1666$), ένας αδρανειακός παρατηρητής μετράει σχετικιστικές διορθώσεις $r_{\text{ci}} = -r_{\text{cr}}/5$, δηλαδή από -2% ως -6% περίπου. Αντίστοιχα, στον Πίνακα 5.4 δείχνουμε τις σχετικιστικές διορθώσεις, r_{cr} , για τους ανώτερους ακτινικούς αρμονικούς torsional modes. Στο Σχήμα 5.1 βλέπουμε τις σχετικιστικές διορθώσεις σε συνάρτηση με τη συμπαγότητα M/R . Με μια πρώτη ματιά στο σχήμα αυτό μπορούμε να αποφανθούμε ότι για τις διορθώσεις αυτές έχουμε $r_{\text{cr}} \simeq 0.9M/R$, όπου οι σχετικιστικές διορθώσεις δίνονται σε εκατοστιαία αναλογία. Τέλος, στο Σχήμα 5.2 βλέπουμε ότι οι σχετικιστικές διορθώσεις τείνουν προς μια συγκεκριμένη σταθερή τιμή για ανώτερους ακτινικούς αρμονικούς torsional modes ($n \rightarrow \infty$).

5.3 Σφαιροειδείς modes

Οι Νευτώνεις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις των ιδιοσυχνοτήτων σφαιροειδών modes δίνονται από την χλασική σχέση (βλέπε π.χ. Unno et al. 1979, Strohmayer 1991, [103, 6]):

$$C_{1,\text{New}} = \frac{\int_0^R \left[2\bar{\xi}^r \bar{\xi}^h + (\bar{\xi}^h)^2 \right] \rho r^2 dr}{\int_0^R \left[(\bar{\xi}^r)^2 + \ell(\ell+1)(\bar{\xi}^h)^2 \right] \rho r^2 dr}, \quad (5.7)$$

όπου $\bar{\xi}^r = rS^0$, $\bar{\xi}^h = rH^0$ είναι οι μηδενικής - τάξης ακτινικές ιδιοσυναρτήσεις του διανύσματος μετατόπισης (βλέπε Ενότητα 3.1).

Επανερχόμαστε στο Νευτώνειο μοντέλο N0 και υπολογίζουμε τις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις των σφαιροειδών modes που το χαρακτηρίζουν. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Είτε με την παραπάνω Σχέση (5.7), είτε λύνοντας το πρόβλημα ιδιοτιμών που περιγράφεται στο Κεφάλαιο 3 και δίνει τις διορθώσεις των ιδιοσυχνοτήτων,

Πίνακας 5.3: Νευτώνειες $(C_{1,\text{New}})$ και σχετικιστικές $(C_{1,\text{rel}})$ πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις για τους $\ell = 2, 3$ και 4 , $n = 0$ torsional modes ($2t_0, 3t_0, 4t_0$), για διάφορα μοντέλα αστέρων νετρονίων. Όπως περιμένουμε, για κάθε καταστατική εξίσωση, μεγαλύτερες τιμές συμπαγότητας (M/R) έχουν ως αποτέλεσμα μεγαλύτερες σχετικιστικές διορθώσεις ($rc_r := 1 - C_{1,\text{rel}}/C_{1,\text{New}}$) (σε %). Οι Νευτώνειες πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις ισούνται με $1/[\ell(\ell+1)]$ για όλα τα αστρικά μοντέλα. Οι σχετικιστικές διορθώσεις, rc_r , είναι σχεδόν ανεξάρτητες από το ℓ (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis, [9]).

Model	M/R	$\ell = 2$		$\ell = 3$		$\ell = 4$		rc_r
		$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	
A+DH ₁₄	0.218	0.167	0.134	0.083	0.067	0.05	0.040	19.55
A+DH ₁₆	0.264	0.167	0.125	0.083	0.063	0.05	0.038	24.89
WFF3+DH ₁₄	0.191	0.167	0.139	0.083	0.069	0.05	0.042	16.81
WFF3+DH ₁₆	0.223	0.167	0.133	0.083	0.067	0.05	0.040	20.16
WFF3+DH ₁₈	0.265	0.167	0.125	0.083	0.062	0.05	0.037	25.07
APR+DH ₁₄	0.171	0.167	0.142	0.083	0.071	0.05	0.043	14.85
APR+DH ₁₆	0.195	0.167	0.138	0.083	0.069	0.05	0.041	17.40
APR+DH ₁₈	0.221	0.167	0.133	0.083	0.066	0.05	0.040	20.26
APR+DH ₂₀	0.248	0.167	0.127	0.083	0.064	0.05	0.038	23.58
APR+DH ₂₂	0.279	0.167	0.120	0.083	0.060	0.05	0.036	27.76
L+DH ₁₄	0.141	0.167	0.146	0.083	0.073	0.05	0.044	12.63
L+DH ₁₆	0.160	0.167	0.143	0.083	0.071	0.05	0.043	14.38
L+DH ₁₈	0.179	0.167	0.140	0.083	0.070	0.05	0.042	16.24
L+DH ₂₀	0.199	0.167	0.136	0.083	0.068	0.05	0.041	18.28
L+DH ₂₂	0.221	0.167	0.132	0.083	0.066	0.05	0.040	20.56
L+DH ₂₄	0.244	0.167	0.128	0.083	0.064	0.05	0.038	23.24
L+DH ₂₆	0.272	0.167	0.122	0.083	0.061	0.05	0.037	26.73
A+NV ₁₄	0.218	0.167	0.133	0.083	0.066	0.05	0.040	20.24
A+NV ₁₆	0.264	0.167	0.124	0.083	0.062	0.05	0.037	25.52
WFF3+NV ₁₄	0.191	0.167	0.138	0.083	0.069	0.05	0.041	17.48
WFF3+NV ₁₆	0.223	0.167	0.132	0.083	0.066	0.05	0.040	20.78
WFF3+NV ₁₈	0.265	0.167	0.124	0.083	0.062	0.05	0.037	25.64
APR+NV ₁₄	0.173	0.167	0.140	0.083	0.070	0.05	0.042	16.04
APR+NV ₁₆	0.198	0.167	0.136	0.083	0.068	0.05	0.041	18.56
APR+NV ₁₈	0.223	0.167	0.131	0.083	0.066	0.05	0.039	21.37
APR+NV ₂₀	0.250	0.167	0.126	0.083	0.063	0.05	0.038	24.64
APR+NV ₂₂	0.280	0.167	0.119	0.083	0.059	0.05	0.036	28.75
L+NV ₁₄	0.152	0.167	0.142	0.083	0.071	0.05	0.043	15.01
L+NV ₁₆	0.171	0.167	0.139	0.083	0.069	0.05	0.042	16.86
L+NV ₁₈	0.190	0.167	0.135	0.083	0.068	0.05	0.041	18.78
L+NV ₂₀	0.210	0.167	0.132	0.083	0.066	0.05	0.040	20.85
L+NV ₂₂	0.230	0.167	0.128	0.083	0.064	0.05	0.038	23.12
L+NV ₂₄	0.253	0.167	0.124	0.083	0.062	0.05	0.037	25.77
L+NV ₂₆	0.281	0.167	0.118	0.083	0.059	0.05	0.035	29.24

Πίνακας 5.4: Σχετικιστικές διορθώσεις (σε %) ($rc_r := 1 - C_{1,\text{rel}}/C_{1,\text{New}}$), για τους $\ell = 1, 2$ και 3 , $n = 1, 2$ και 3 torsional modes, για διάφορα μοντέλα αστέρων νετρονίων. Οι σχετικιστικές διορθώσεις, rc_r , είναι σχεδόν ανεξάρτητες από το ℓ αλλά εξαρτώνται από το n (βλέπε και Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Model	$\ell = 1$			$\ell = 2$			$\ell = 3$		
	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
A+DH ₁₄	18.89	18.88	18.77	18.88	18.87	18.76	18.87	18.86	18.74
A+DH ₁₆	24.30	24.29	24.20	24.29	24.29	24.19	24.28	24.27	24.17
WFF3+DH ₁₄	16.11	16.10	15.97	16.10	16.09	15.96	16.09	16.08	15.93
WFF3+DH ₁₆	19.50	19.50	19.38	19.50	19.49	19.37	19.49	19.48	19.35
WFF3+DH ₁₈	24.48	24.48	24.38	24.47	24.47	24.37	24.47	24.46	24.35
APR+DH ₁₄	14.12	14.11	13.97	14.11	14.10	13.96	14.10	14.08	13.94
APR+DH ₁₆	16.69	16.68	16.56	16.69	16.68	16.55	16.68	16.66	16.52
APR+DH ₁₈	19.59	19.58	19.46	19.58	19.57	19.45	19.57	19.56	19.43
APR+DH ₂₀	22.95	22.94	22.84	22.94	22.94	22.82	22.94	22.92	22.81
APR+DH ₂₂	27.17	27.17	27.07	27.17	27.16	27.06	27.16	27.15	27.04
L+DH ₁₄	11.83	11.81	11.67	11.82	11.81	11.66	11.81	11.79	11.63
L+DH ₁₆	13.61	13.60	13.46	13.60	13.59	13.45	13.60	13.58	13.43
L+DH ₁₈	15.50	15.49	15.36	15.49	15.48	15.35	15.48	15.47	15.33
L+DH ₂₀	17.57	17.56	17.44	17.56	17.55	17.43	17.55	17.54	17.41
L+DH ₂₂	19.88	19.88	19.76	19.88	19.87	19.75	19.87	19.86	19.73
L+DH ₂₄	22.59	22.59	22.48	22.59	22.58	22.47	22.58	22.57	22.45
L+DH ₂₆	26.13	26.13	26.03	26.13	26.12	26.02	26.12	26.11	26.00
A+NV ₁₄	19.68	19.64	19.48	19.68	19.64	19.48	19.67	19.63	19.47
A+NV ₁₆	25.03	24.99	24.87	25.02	24.99	24.87	25.01	24.98	24.86
WFF3+NV ₁₄	16.90	16.86	16.67	16.90	16.85	16.66	16.89	16.84	16.65
WFF3+NV ₁₆	20.24	20.20	20.04	20.23	20.19	20.04	20.23	20.18	20.03
WFF3+NV ₁₈	25.14	25.11	24.99	25.14	25.10	24.98	25.13	25.10	24.97
APR+NV ₁₄	15.43	15.38	15.17	15.43	15.38	15.16	15.42	15.37	15.15
APR+NV ₁₆	17.98	17.93	17.75	17.97	17.92	17.74	17.96	17.91	17.73
APR+NV ₁₈	20.81	20.77	20.61	20.80	20.76	20.60	20.80	20.75	20.59
APR+NV ₂₀	24.11	24.07	23.93	24.10	24.06	23.93	24.09	24.06	23.92
APR+NV ₂₂	28.26	28.22	28.11	28.25	28.22	28.10	28.24	28.21	28.09
L+NV ₁₄	14.35	14.29	14.03	14.35	14.28	14.02	14.34	14.27	14.01
L+NV ₁₆	16.21	16.16	15.93	16.21	16.15	15.92	16.20	16.14	15.91
L+NV ₁₈	18.16	18.11	17.91	18.15	18.10	17.90	18.14	18.09	17.89
L+NV ₂₀	20.25	20.20	20.03	20.24	20.20	20.02	20.24	20.19	20.01
L+NV ₂₂	22.55	22.51	22.35	22.55	22.50	22.35	22.54	22.49	22.34
L+NV ₂₄	25.23	25.19	25.05	25.22	25.18	25.05	25.21	25.17	25.04
L+NV ₂₆	28.74	28.70	28.59	28.73	28.70	28.58	28.73	28.69	28.57

σ_1 , και τις διορθώσεις των ιδιοσυναρτήσεων, z_1^1, z_2^1, z_3^1 και z_4^1 σφαιροειδών modes. Στον Πίνακα 5.5 βλέπουμε την εξαιρετική συμφωνία των δύο μεθόδων. Η σύγκριση αυτή είναι η μοναδική που μπορεί να ελέγχει την ορθότητα του αριθμητικού μας χώδικα. Επισημαίνουμε ότι, τιμές των περιστροφικών διορθώσεων, στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας, δεν υπάρχουν στη διεύθυνη βιβλιογραφία.

Πίνακας 5.5: Πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις των σφαιροειδών f, p_1 και p_2 modes, όπως αυτές υπολογίζονται από τη Σχέση (5.7) ($C_{1,\text{New}}$) και όπως υπολογίζονται από το σχετικό πρόβλημα ιδιοτιμών που παρουσιάσαμε στο Κεφάλαιο 3 ($C_1 := \sigma_1/m\Omega$).

Mode	$C_{1,\text{New}}$	$C_1 := \sigma_1/m\Omega$
p_2	0.01279	0.01283
p_1	0.031743	0.031780
f	0.499965	0.499939

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις σχετικιστικές πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $C_{1,\text{rel}}$ για τους σφαιροειδείς interfacial, ℓi , και shear, ℓs_n , modes του στερεού φλοιού για ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων. Τα αποτελέσματα φαίνονται στους Πίνακες 5.6 και 5.7 (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

5.4 Αστάθειες CFS σε modes του στερεού φλοιού

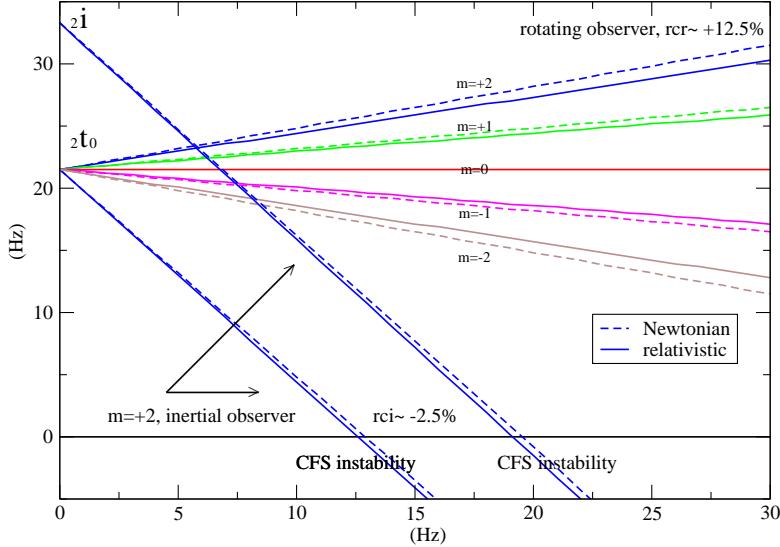
Η αστρική περιστροφή μπορεί να προκαλέσει αστάθεια σε πολλούς modes του στερεού φλοιού. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.3, σε έναν μη - περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων ($\Omega = 0$), ένας αδρανειακός και ένας περιστρεφόμενος παρατηρητής βλέπουν έναν mode (π.χ. τον $2t_0$) με την ίδια ιδιοσυχνότητα. Όταν ο αστέρας όμως περιστρέφεται ($\Omega \neq 0$) οι δύο παρατηρητές μετρούν διαφορετικές ιδιοσυχνότητες: αν ο περιστρεφόμενος παρατηρητής μετράει ιδιοσυχνότητα σ_r , ο αδρανειακός παρατηρητής μετράει ιδιοσυχνότητα $\sigma_i = \sigma_r - m\Omega$. Καθώς αυξάνεται η περιστροφική συχνότητα του αστέρα, οι ιδιοσυχνότητες των $\ell = m$ modes που μετράει ο αδρανειακός παρατηρητής μειώνονται. Τη στιγμή που αυτές μηδενίζονται λαμβάνει χώρα η Chandrasekhar - Friedman - Schutz αστάθεια (CFS) [66, 67]. Όταν λάβει χώρα μια τέτοια αστάθεια, σε κάποια χρήσιμη περιστροφική συχνότητα του αστέρα Ω_c , το πλάτος των ταλαντώσεων αυξάνε-

Πίνακας 5.6: Νευτώνειες πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $(C_{1,\text{New}})$ και σχετικιστικές πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $(C_{1,\text{rel}})$ των $\ell = 1, 2$ και 3 interfacial modes (${}_1i$, ${}_2i$, ${}_3i$) για διάφορα αστρικά μοντέλα (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Model	$\ell = 1$		$\ell = 2$		$\ell = 3$	
	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$
A+DH ₁₄	0.485	0.393	0.152	0.125	0.069	0.059
A+DH ₁₆	0.489	0.370	0.156	0.120	0.073	0.058
WFF3+DH ₁₄	0.482	0.403	0.150	0.127	0.067	0.059
WFF3+DH ₁₆	0.486	0.390	0.153	0.125	0.070	0.059
WFF3+DH ₁₈	0.490	0.369	0.157	0.120	0.074	0.058
APR+DH ₁₄	0.480	0.410	0.148	0.128	0.066	0.059
APR+DH ₁₆	0.484	0.401	0.151	0.127	0.069	0.059
APR+DH ₁₈	0.487	0.390	0.154	0.125	0.071	0.059
APR+DH ₂₀	0.489	0.375	0.156	0.122	0.073	0.059
APR+DH ₂₂	0.491	0.357	0.158	0.117	0.075	0.057
L+DH ₁₄	0.479	0.419	0.147	0.130	0.065	0.059
L+DH ₁₆	0.482	0.413	0.150	0.130	0.067	0.060
L+DH ₁₈	0.485	0.406	0.152	0.129	0.069	0.060
L+DH ₂₀	0.487	0.399	0.154	0.128	0.071	0.060
L+DH ₂₂	0.488	0.389	0.156	0.126	0.073	0.060
L+DH ₂₄	0.490	0.378	0.157	0.123	0.074	0.059
L+DH ₂₆	0.492	0.362	0.159	0.119	0.076	0.058
A+N _V ₁₄	0.480	0.385	0.147	0.121	0.065	0.056
A+N _V ₁₆	0.485	0.365	0.152	0.118	0.070	0.056
WFF3+N _V ₁₄	0.477	0.396	0.146	0.123	0.064	0.056
WFF3+N _V ₁₆	0.482	0.384	0.150	0.122	0.067	0.057
WFF3+N _V ₁₈	0.486	0.365	0.154	0.118	0.071	0.057
APR+N _V ₁₄	0.477	0.400	0.146	0.125	0.064	0.057
APR+N _V ₁₆	0.480	0.392	0.149	0.124	0.067	0.058
APR+N _V ₁₈	0.483	0.381	0.151	0.122	0.069	0.058
APR+N _V ₂₀	0.486	0.368	0.154	0.119	0.071	0.057
APR+N _V ₂₂	0.489	0.350	0.156	0.114	0.073	0.056
L+N _V ₁₄	0.479	0.406	0.147	0.126	0.064	0.057
L+N _V ₁₆	0.482	0.400	0.149	0.126	0.067	0.058
L+N _V ₁₈	0.484	0.393	0.152	0.125	0.069	0.058
L+N _V ₂₀	0.486	0.385	0.153	0.123	0.071	0.059
L+N _V ₂₂	0.488	0.375	0.155	0.122	0.072	0.058
L+N _V ₂₄	0.490	0.364	0.157	0.119	0.074	0.058
L+N _V ₂₆	0.491	0.349	0.158	0.115	0.075	0.057

Πίνακας 5.7: Νευτώνειες πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $(C_{1,\text{New}})$ και σχετικιστικές πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις $(C_{1,\text{rel}})$ των $\ell = 1, n = 1, 2$ και 3 shear modes (${}^1s_1, {}^1s_2, {}^1s_3$) για διάφορα αστρικά μοντέλα (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Model	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$	
	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$	$C_{1,\text{New}}$	$C_{1,\text{rel}}$
A+DH ₁₄	0.492	0.399	0.495	0.402	0.496	0.403
A+DH ₁₆	0.494	0.375	0.497	0.376	0.497	0.377
WFF3+DH ₁₄	0.490	0.411	0.494	0.415	0.495	0.416
WFF3+DH ₁₆	0.492	0.396	0.496	0.399	0.496	0.400
WFF3+DH ₁₈	0.494	0.374	0.497	0.375	0.497	0.376
APR+DH ₁₄	0.488	0.419	0.493	0.424	0.493	0.425
APR+DH ₁₆	0.490	0.408	0.494	0.412	0.495	0.413
APR+DH ₁₈	0.492	0.396	0.495	0.399	0.496	0.400
APR+DH ₂₀	0.493	0.380	0.496	0.383	0.497	0.383
APR+DH ₂₂	0.495	0.361	0.497	0.362	0.497	0.363
L+DH ₁₄	0.484	0.427	0.491	0.433	0.491	0.434
L+DH ₁₆	0.486	0.420	0.492	0.426	0.493	0.427
L+DH ₁₈	0.488	0.413	0.494	0.417	0.494	0.418
L+DH ₂₀	0.490	0.404	0.495	0.408	0.495	0.409
L+DH ₂₂	0.492	0.394	0.496	0.397	0.496	0.398
L+DH ₂₄	0.493	0.382	0.496	0.384	0.497	0.385
L+DH ₂₆	0.495	0.366	0.497	0.367	0.497	0.368
A+N _V ₁₄	0.492	0.395	0.496	0.399	0.496	0.400
A+N _V ₁₆	0.494	0.371	0.497	0.373	0.498	0.374
WFF3+N _V ₁₄	0.490	0.407	0.495	0.412	0.495	0.413
WFF3+N _V ₁₆	0.492	0.392	0.496	0.396	0.496	0.397
WFF3+N _V ₁₈	0.494	0.370	0.497	0.372	0.498	0.373
APR+N _V ₁₄	0.488	0.413	0.494	0.418	0.494	0.419
APR+N _V ₁₆	0.490	0.402	0.495	0.406	0.496	0.408
APR+N _V ₁₈	0.492	0.390	0.496	0.393	0.496	0.394
APR+N _V ₂₀	0.493	0.375	0.497	0.377	0.497	0.378
APR+N _V ₂₂	0.495	0.355	0.502	0.360	0.498	0.358
L+N _V ₁₄	0.486	0.416	0.493	0.422	0.493	0.424
L+N _V ₁₆	0.488	0.408	0.494	0.414	0.494	0.415
L+N _V ₁₈	0.489	0.400	0.495	0.405	0.495	0.407
L+N _V ₂₀	0.491	0.391	0.496	0.395	0.496	0.397
L+N _V ₂₂	0.492	0.381	0.496	0.385	0.497	0.386
L+N _V ₂₄	0.494	0.369	0.497	0.372	0.497	0.373
L+N _V ₂₆	0.495	0.353	0.497	0.355	0.498	0.356



Σχήμα 5.3: Ιδιοσυχνότητα (σ) ως συνάρτηση της αστρικής περιστροφικής συχνότητας (Ω) για τον $l = 2$ interfacial mode και τον $l = 2, n = 0$ torsional mode όπως αυτή μετράται από έναν αδρανειακό (inertial) και από έναν συμπεριστρεφόμενο (rotating) παρατηρητή. Οι modes αυτοί γίνονται CFS ασταθείς όταν οι ιδιοσυχνότητές τους αλλάζουν πρόσημο (μετρούμενες από τον αδρανειακό παρατηρητή). Οι σχετικιστικές διορθώσεις, είναι γενικά μικρότερες για έναν αδρανειακό παρατηρητή ($r_{ci} \leq r_{cr}$). Ωστόσο, η Γενική Σχετικότητα υποβοηθά την αστάθεια στο να εγκατασταθεί (μετατοπίζει το σημείο έναρξης της αστάθειας προς μικρότερες περιστροφικές συχνότητες Ω) (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

ται και εκπέμπεται περιστροφική ενέργεια με τη μορφή βαρυτικών χυμάτων. Το πόσο έντονη θα είναι η εκπομπή βαρυτικής ακτινοβολίας και ποιά θα είναι η ακριβής μορφή των εκπεμπόμενων βαρυτικών χυμάτων είναι δύσκολο να υπολογιστεί. Ωστόσο, αυτό που είναι δυνατό να υπολογιστεί, είναι οι κρίσιμες τιμές της περιστροφικής συχνότητας των αστέρων νετρονίων, Ω_c , στις οποίες ενεργοποιείται αυτή η αστάθεια. Όπως είπαμε και στην Εισαγωγή, η αστάθεια CFS μελετήθηκε αρχικά για τους σφαιροειδείς f- και p-modes. Στη συνέχεια, ιδιαίτερη προσοχή δόθηκε στην αστάθεια των τοροειδών r-modes περιστρεφόμενων ρευστών αστέρων νετρονίων. Όσο αφορά modes του στερεού φλοιού, οι Yoshida & Lee (2001) [96] υπέδειξαν την ύπαρξη τέτοιας αστάθειας

για τους τοροειδείς torsional modes. Στην παρούσα διατριβή δείχνουμε ότι και στους σφαιροειδείς interfacial modes θα μπορούσε να συμβεί η αστάθεια CFS, σε σχετικά χαμηλές περιστροφικές συχνότητες Ω (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Στο Σχήμα 5.3 δείχνουμε την αστάθεια αυτή για τον $\ell = 2, n = 0$ torsional mode και τον $\ell = 2$ interfacial mode. Βλέπουμε, λοιπόν, ότι για περιστροφικές συχνότητες μερικών δεκαδών Hz, τόσο οι σφαιροειδείς interfacial modes όσο και οι τοροειδείς torsional modes ικανοποιούν τη συνθήκη της CFS αστάθειας (μηδενίζονται οι ιδιοσυχνότητές τους ως προς έναν αδρανειακό παρατηρητή). Το αν πραγματικά μπορεί να λάβει χώρα μια τέτοια αστάθεια χρειάζεται επιπλέον μελέτη. Παρατηρούμε επίσης ότι η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας υποβοηθά την εφαρμογή της αστάθειας. Αν υπολογίσουμε τις κρίσιμες τιμές περιστροφικής συχνότητας στα πλαίσια της Νευτώνειας και της σχετικιστικής θεωρίας, τότε βλέπουμε ότι $\Omega_{c,rel} < \Omega_{c,New}$.

5.5 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό μελετήσαμε τις ταλαντώσεις στερεού φλοιού βραδέως περιστρεψόμενων αστέρων νετρονίων. Επεκτείναμε προηγούμενες Νευτώνειες μελέτες (Strohmayer 1991, Lee & Strohmayer 1996, [6, 7]) και συμπεριλάβαμε τις απαραίτητες σχετικιστικές διορθώσεις. Έπολογίσαμε τις πρώτης - τάξης περιστροφικές διορθώσεις, στις ιδιοσυχνότητες και στις ιδιοσυναρτήσεις, τόσο για τους τοροειδείς torsional modes (Πίνακες 5.3 και 5.4) όσο και για τους σφαιροειδείς interfacial και shear modes (Πίνακες 5.6 και 5.7). Αυτές αποδείχθηκε ότι είναι περίπου 10 - 30% ανάλογα με το πόσο σχετικιστικά αστρικά μοντέλα θεωρούμε (Πίνακες 5.3, 5.4 και Σχήματα 5.1, 5.2).

Επίσης, σε αυτό το κεφάλαιο δείξαμε ότι τόσο οι τοροειδείς torsional modes όσο και οι σφαιροειδείς interfacial modes μπορούν να γίνουν CFS ασταθείς για σχετικά μικρές ($\Omega \simeq 10 - 20 \text{ Hz}$) περιστροφικές συχνότητες των αστέρων νετρονίων (Σχήμα 5.3). Τα παραπάνω αποτελέσματα δημοσιεύτηκαν πρόσφατα στις εργασίες Vavoulidis, Stavridis, Kokkotas & Beyer (2007) και Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis (2008) [8, 9].

Κεφάλαιο 6

Τοροειδείς ταλαντώσεις σε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε αριθμητικά αποτελέσματα για τοροειδείς ταλαντώσεις σε μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Η ύπαρξη μαγνητικού πεδίου μάς οδηγεί στη μελέτη των μαγνητικών ταλαντώσεων Alfvén (Ενότητα 6.1) ενώ ο στερεός φλοιός στα εξωτερικά στρώματα του αστέρα εκτελεί, όπως είδαμε σε προηγούμενα κεφάλαια, μεταξύ άλλων, torsional ελαστικές ταλαντώσεις. Στην πραγματικότητα οι τοροειδείς ταλαντώσεις σε τέτοιους αστέρες νετρονίων είναι μεικτού χαρακτήρα, μαγνητικού και ελαστικού· αναφερόμαστε, λοιπόν, από εδώ και πέρα σε αυτές, ως καθολικές (global) μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις (Ενότητα 6.2).

Παρατηρούμε, ωστόσο, ότι σε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, όπου ο στερεός φλοιός έχει πολύ μικρό πάχος ($\Delta r/R \simeq 0.10$), ο μαγνητικός χαρακτήρας των ταλαντώσεων αυτών είναι κυρίαρχος και υποσκελίζει τον ελαστικό (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2006, [36]). Θα μπορούσαμε, δηλαδή, να πούμε ότι σε τέτοιου είδους αστέρες νετρονίων παρατηρούμε ελαφρώς “διαμορφωμένες” Alfvén ταλαντώσεις. Συνδέουμε, έτσι, τα αποτελέσματά μας, με αυτά των Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [37] για (“καθαρές”, χωρίς διαμόρφωση από το στερεό φλοιό) Alfvén QPOs σε magnetars και τα χρησιμοποιούμε για την εξαγωγή φυσικών συμπερασμάτων για αυτά τα αστρικά αντικείμενα (Ενότητα 6.3).

Την πενθυμίζουμε, εν συντομίᾳ, το μαθηματικό πρόβλημα που περιγράφει τις τοροειδείς καθολικές μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις σε αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό (Κεφάλαιο 3, Ενότητα 3.2). Έχουμε το σύστημα των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (βλέπε Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [14]):

$$\frac{d\mathcal{Y}_1}{dr} = -\frac{\ell-1}{r}\mathcal{Y}_1 + \frac{\pi r^3}{\pi r^4 \mu + (1+2\Lambda_1)a_1^2} e^{-\nu+\lambda} \mathcal{Y}_2, \quad (6.1\alpha')$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{Y}_2}{dr} = & - \left[\left(\rho + p + (1+2\Lambda_1) \frac{a_1^2}{\pi r^4} - \Lambda_1 e^{-2\lambda} \frac{a_1'^2}{2\pi r^2} \right) \sigma^2 r e^{2(\lambda-\nu)} \right. \\ & - (\Lambda-2) \left(\frac{\mu e^{2\lambda}}{r} - \frac{\Lambda_1 a_1'^2}{2\pi r^3} \right) + (2+5\Lambda_1) \frac{a_1 e^{2\lambda}}{\pi r^3} \left(\frac{a_1}{r^2} - 2\pi j_1 \right) \left. \right] e^{\nu-\lambda} \mathcal{Y}_1 \\ & - \frac{\ell+2}{r} \mathcal{Y}_2, \end{aligned} \quad (6.1\beta')$$

με:

$$\Lambda := \ell(\ell+1), \quad \Lambda_1 := -\frac{\ell(\ell+1)}{(2\ell-1)(2\ell+3)}, \quad (6.2)$$

και με συνοριακές συνθήκες, στο κέντρο του αστέρα:

$$\mathcal{Y}_2 = (\ell-1) \left[\mu + (1+2\Lambda_1) \frac{\alpha_c^2}{\pi} \right] e^\nu \mathcal{Y}_1, \quad (6.3\alpha')$$

στη βάση του στερεού φλοιού:

$$\mathcal{Y}_2^{(-)} = \mathcal{Y}_2^{(+)}, \quad (6.3\beta')$$

και στην επιφάνεια του αστέρα:

$$\mathcal{Y}_2 = 0. \quad (6.3\gamma')$$

Ας δούμε, πριν απ' όλα, ένα απλό δοκιμαστικό μοντέλο για τοροειδείς ταλαντώσεις στην περιοχή του στερεού φλοιού ενός μαγνητισμένου αστέρα νετρονίων (βλέπε π.χ. Piro 2005, Glampedakis, Samuelsson & Andersson 2006, [13, 34]). Οι τοροειδείς ταλαντώσεις περιγράφονται από τις διαταραχές των εξισώσεων Euler (βλέπε π.χ. [13, 34] καθώς και Carroll et al. 1986, [10]):

$$-\sigma^2 \xi_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \delta \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi\rho} \left[\left(\nabla \times \delta \vec{B} \right) \times \vec{B} \right]_i, \quad (6.4)$$

όπου:

$$\delta \sigma_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \right). \quad (6.5)$$

Όπως καταλαβαίνουμε, μελετούμε το πρόβλημα στα πλαίσια της Νευτώνειας θεωρίας. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η πυκνότητα, ρ , ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους, μ , και το μαγνητικό πεδίο, $\vec{B} = B\hat{z}$, είναι σταθερά. Οι (εγκάρσιες) τοροειδείς ταλαντώσεις έχουν διανύσματα μετατόπισης $\vec{\xi} = \xi_x\hat{x} + \xi_y\hat{y}$ όπου $\xi_x = \xi_x(x, y, z)$ και $\xi_y = \xi_y(x, y, z)$, με $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$. Λόγω της σχέσης $\delta\vec{B} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B})$ είναι:

$$\delta\vec{B} = B \left(\frac{\partial \xi_x}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial \xi_y}{\partial z} \hat{y} \right). \quad (6.6)$$

Μετά απ' όλα αυτά, η Σχέση (6.4) γίνεται (βλέπε π.χ. [10, 13, 34]):

$$-\sigma^2 \xi_i = v_s^2 \left(\frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2} + \nabla_{\perp}^2 \xi_i \right) + v_A^2 \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial z^2}, \quad (6.7)$$

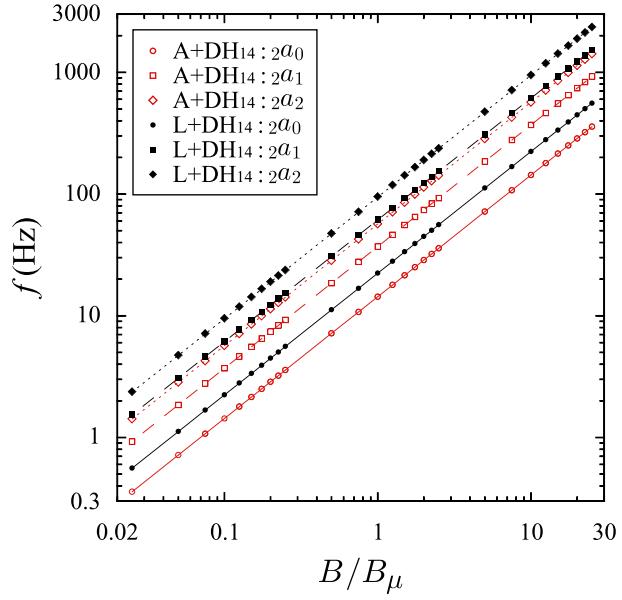
όπου $v_s^2 = \mu/\rho$ είναι η ταχύτητα των shear κυμάτων στον στερεό φλοιό, $v_A^2 = B^2/4\pi\rho$ είναι η ταχύτητα των κυμάτων Alfvén και $\nabla_{\perp}^2 := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. Από την Εξίσωση (6.7) παίρνουμε την εξίσωση διασποράς (dispersion relation):

$$\sigma^2 = v_s^2 (k_z^2 + k_{\perp}^2) + v_A^2 k_z^2, \quad (6.8)$$

αντικαθιστώντας $\nabla_{\perp} = ik_{\perp}$ και $\partial/\partial z = ik_z$.

Προσεγγιστικά, μπορούμε να θέσουμε $k_{\perp} \simeq \sqrt{\ell(\ell+1)}/R$ και $k_z \simeq n\pi/\Delta r$ όπου R είναι η ακτίνα του αστέρα και Δr είναι το πάχος του στερεού του φλοιού. Για μικρά πάχη στερεού φλοιού είναι $k_{\perp} \ll k_z$ και η παραπάνω σχέση διασποράς γίνεται: $\sigma^2 = (v_s^2 + v_A^2) k_z^2$. Έχουμε, δηλαδή, κύματα Alfvén, που διαδίδονται κατά μήκος των δυναμικών γραμμών αλλά είναι “διαμορφωμένα” από τον στερεό φλοιό. Επίσης βλέπουμε ότι για ισχυρά μαγνητικά πεδία, $v_A^2 \gg v_s^2$, είναι $\sigma \simeq v_A k_z \sim B$.

Στους Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis (2006) [36] λύνεται ένα αντίστοιχο πρόβλημα. Χρησιμοποιούνται οι σχετικιστικές Εξισώσεις (6.1) και λαμβάνεται υπόψη μία πιο ρεαλιστική τοπολογία για το μαγνητικό πεδίο, δηλαδή θεωρείται ένα διπολικό, αξονικά συμμετρικό μαγνητικό πεδίο που εκτείνεται ως το κέντρο του αστέρα. Τα αποτελέσματά τους συμφωνούν, ποιοτικά, με τα αποτελέσματα προηγούμενων μελετών (π.χ. Glampedakis, Samuelsson & Andersson 2006, [34]).



Σχήμα 6.1: Συχνότητες f (σε Hz) των Alfvén ταλαντώσεων, $2a_n$, με $n = 0, 1$ και 2 , για διάφορες εντάσεις μαγνητικού πεδίου B ($B_\mu = 4 \times 10^{15}$ Gauss) και για δύο διαφορετικά αστρικά μοντέλα (A+DH₁₄ και L+DH₁₄) (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2006, [36]).

6.1 Μαγνητικές ταλαντώσεις Alfvén

Στην πρώτη αυτή ενότητα αγνοούμε την ύπαρξη του στερεού φλοιού (ουσιαστικά θέτουμε $\mu = 0$ στις Εξισώσεις 6.1 και 6.3α') και υπολογίζουμε αριθμητικά τις μαγνητικές ταλαντώσεις Alfvén (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2006, [36]). Οι συχνότητες των ταλαντώσεων αυτών αποδεικνύονται ανάλογες της έντασης του μαγνητικού πεδίου, B , και μπορούν να γραφούν ως (βλέπε [36]):

$$2a_n = 2\beta_n \left(\frac{B}{B_\mu} \right), \quad (6.9)$$

όπου οι συντελεστές $2\beta_n$ εξαρτώνται από τις παραμέτρους του αστρικού μοντέλου ενώ $B_\mu = 4 \times 10^{15}$ Gauss.

Το Σχήμα 6.1 δείχνει συχνότητες διαφόρων Alfvén ταλαντώσεων ($2a_n$ με $n = 0, 1$ και 2), για εντάσεις μαγνητικού πεδίου $B \simeq 10^{14} - 10^{17}$ Gauss και για δύο διαφορετικά αστρικά μοντέλα μάζας $1.4M_\odot$, τα A+DH₁₄ και L+DH₁₄. Η γραμμική συμπεριφορά των συχνοτήτων είναι προφανής. Οι τιμές των συντελεστών $2\beta_n$, για αυτά τα δύο αλλά

Πίνακας 6.1: Τιμές των συντελεστών ${}_2\beta_n$ (σε Hz) για τις $n = 0, 1$ και 2 Alfvén ταλαντώσεις, για διάφορα μοντέλα αστέρων νετρονίων με ρεαλιστικές καταστατικές εξισώσεις (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2006, [36]).

Model	M/R	${}_2\beta_0$	${}_2\beta_1$	${}_2\beta_2$	Model	M/R	${}_2\beta_0$	${}_2\beta_1$	${}_2\beta_2$
A+DH ₁₄	0.218	14.3	37.0	56.7	A+NV ₁₄	0.218	14.3	36.9	56.5
A+DH ₁₆	0.264	10.8	26.7	40.5	A+NV ₁₆	0.264	10.8	26.6	40.3
WFF3+DH ₁₄	0.191	16.8	44.5	68.1	WFF3+NV ₁₄	0.191	16.8	44.4	68.0
WFF3+DH ₁₆	0.223	13.9	35.8	54.6	WFF3+NV ₁₆	0.223	13.8	35.8	54.5
WFF3+DH ₁₈	0.265	10.7	26.5	40.1	WFF3+NV ₁₈	0.265	10.7	26.4	40.0
APR+DH ₁₄	0.171	19.2	51.6	78.9	APR+NV ₁₄	0.173	18.5	49.8	76.3
APR+DH ₁₆	0.195	16.3	43.5	66.4	APR+NV ₁₆	0.198	15.8	42.1	64.4
APR+DH ₁₈	0.221	13.9	36.6	55.7	APR+NV ₁₈	0.223	13.6	35.5	54.2
APR+DH ₂₀	0.248	11.8	30.3	46.1	APR+NV ₂₀	0.250	11.5	29.6	45.0
APR+DH ₂₂	0.279	9.7	24.2	36.6	APR+NV ₂₂	0.280	9.5	23.7	35.8
L+DH ₁₄	0.141	22.3	61.4	94.6	L+NV ₁₄	0.152	20.2	56.6	86.9
L+DH ₁₆	0.160	19.6	53.3	81.9	L+NV ₁₆	0.171	17.7	49.1	75.2
L+DH ₁₈	0.179	17.3	46.5	71.3	L+NV ₁₈	0.190	15.7	42.7	65.5
L+DH ₂₀	0.199	15.3	40.6	62.1	L+NV ₂₀	0.210	13.9	37.2	57.2
L+DH ₂₂	0.221	13.5	35.2	53.9	L+NV ₂₂	0.230	12.3	32.3	49.7
L+DH ₂₄	0.244	11.8	30.1	46.0	L+NV ₂₄	0.253	10.8	27.7	42.5
L+DH ₂₆	0.272	10.0	24.8	37.5	L+NV ₂₆	0.281	9.2	22.7	34.4

και για τα υπόλοιπα 32 μοντέλα, φαίνονται στον Πίνακα 6.1 για $n = 0, 1$ και 2 .

Από τον Πίνακα 6.1 βλέπουμε ότι οι τιμές των συντελεστών ${}_2\beta_n$ μειώνονται, όταν αυξάνεται η συνολική μάζα, M , κάποιου αστρικού μοντέλου. Για διαφορετικά αστρικά μοντέλα ίσης μάζας, μεγαλύτερες συμπαγότητες M/R δίνουν μικρότερες τιμές για τους συντελεστές ${}_2\beta_n$. Γενικά, μπορούμε να προσεγγίζουμε τους συντελεστές αυτούς με τις παρακάτω σχέσεις:

$${}_2a_0 \simeq 43.90 \left[1 - 4.33 \left(\frac{M}{R} \right) + 5.50 \left(\frac{M}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{B}{B_\mu} \right), \quad (6.10\alpha')$$

$${}_2a_1 \simeq 129.7 \left[1 - 4.63 \left(\frac{M}{R} \right) + 6.13 \left(\frac{M}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{B}{B_\mu} \right), \quad (6.10\beta')$$

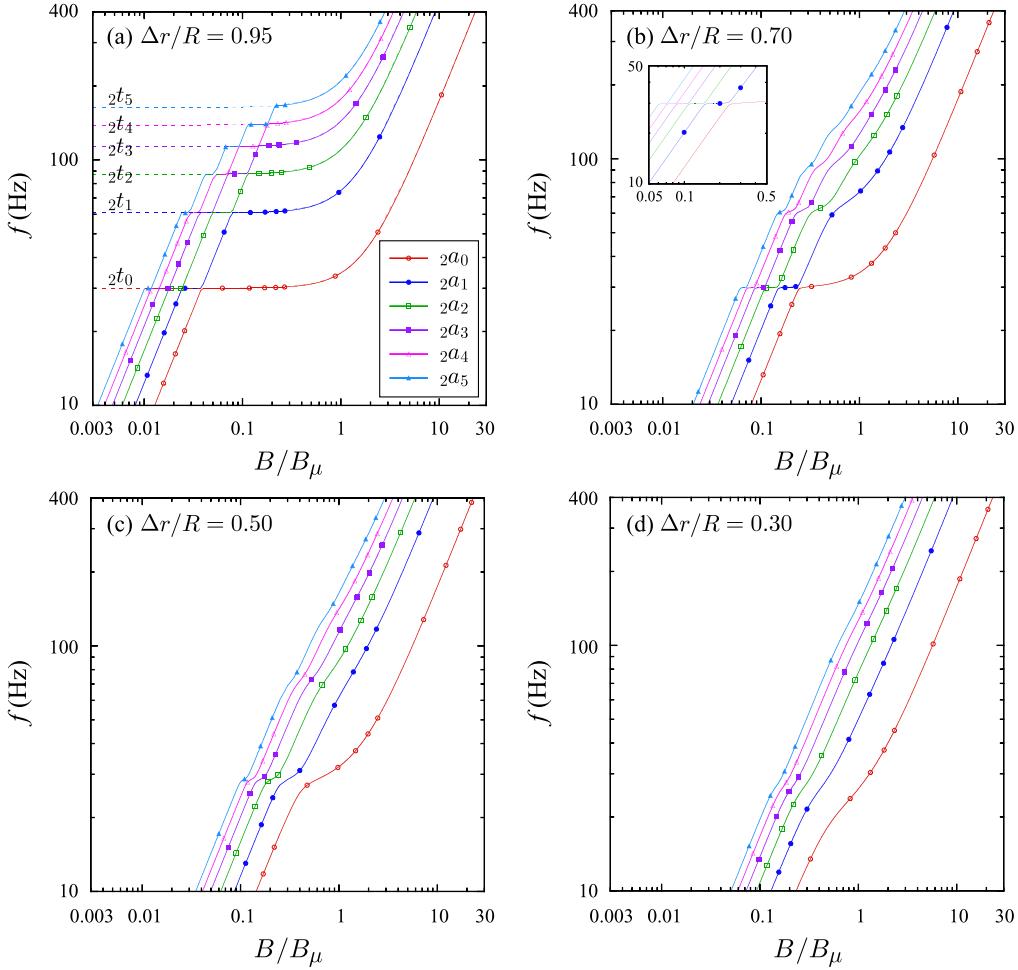
$${}_2a_2 \simeq 200.0 \left[1 - 4.64 \left(\frac{M}{R} \right) + 6.12 \left(\frac{M}{R} \right)^2 \right] \left(\frac{B}{B_\mu} \right). \quad (6.10\gamma')$$

6.2 Καθολικές μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις

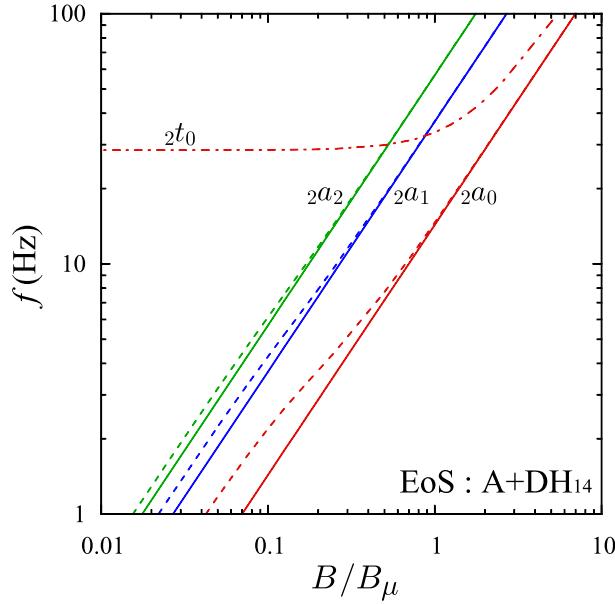
Πώς επηρεάζει, όμως, η ύπαρξη του στερεού φλοιού τις μαγνητικές ταλαντώσεις Alfvén; Και, αντιστρόφως, πώς επηρεάζονται οι torsional ελαστικές ταλαντώσεις του στερεού φλοιού από την ύπαρξη των μαγνητικών ταλαντώσεων Alfvén; Για την απάντηση αυτών των ερωτημάτων, κατασκευάζουμε ένα δοκιμαστικό, πολυτροπικό αστρικό μοντέλο του οποίου ο στερεός φλοιός έχει μεταβλητό πάχος. Το μοντέλο έχει μάζα $M \simeq 1.4 M_{\odot}$, ακτίνα $R \simeq 10.4 \text{ km}$ και πολυτροπικό δείκτη $n = 1$. Ο συντελεστής γραμμικού ιξώδους στον στερεό φλοιό δίνεται, όπως συνηθίζεται (βλέπε π.χ. Hansen & Cioffi 1980, [1]), από τον τύπο $\sqrt{\mu/\rho} \simeq 10^3 \text{ km/sec}$.

Θεωρούμε αρχικά ότι όλος ο αστέρας είναι στερεός ($\Delta r/R = 1.0$). Σε αυτήν την περίπτωση η εξάρτηση των συχνοτήτων των μαγνητοελαστικών ταλαντώσεων, $2t_n$, από την ένταση του μαγνητικού πεδίου φαίνεται με διακεκομένες γραμμές στο Σχήμα 6.2 (a). Για ασθενή μαγνητικά πεδία οι ταλαντώσεις έχουν κυρίως ελαστικό χαρακτήρα και οι συχνότητές τους μένουν σχεδόν ανεπηρέαστες από τις μαγνητικές επιδράσεις. Για ισχυρά μαγνητικά πεδία, $B \gtrsim B_{\mu}$, ωστόσο, επηρεάζονται δραστικά και αυξάνονται σε πολύ μεγάλες τιμές. Όταν ελλατώνουμε το πάχος του στερεού φλοιού, $\Delta r/R = 0.95$, και για ασθενή μαγνητικά πεδία, εμφανίζονται διαφορετικού είδους ταλαντώσεις με έντονο χαρακτήρα μαγνητικών ταλαντώσεων Alfvén (συνεχείς ευθείες γραμμές, αριστερά και κάτω στο Σχήμα 6.2 (a)). Για ισχυρότερα μαγνητικά πεδία, $B \gtrsim 0.1B_{\mu}$, οι ταλαντώσεις $2t_n$ δεν επηρεάζονται από την ύπαρξη του μικροσκοπικού ρευστού πυρήνα. Ουσιαστικά, για όλες τις τιμές της έντασης του μαγνητικού πεδίου έχουμε καθολικές μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις μεικτού χαρακτήρα ωστόσο, σε ασθενή μαγνητικά πεδία υπερισχύει ο μαγνητικός χαρακτήρας Alfvén ενώ σε ισχυρά μαγνητικά πεδία υπερισχύει ο χαρακτήρας των $2t_n$.

Για μικρότερα πάχη στερεού φλοιού τα πράγματα είναι λιγότερο ξεκάθαρα. Για τις ίδιες εντάσεις μαγνητικού πεδίου, οι ταλαντώσεις με χαρακτήρα Alfvén έχουν τώρα πολύ χαμηλότερες συχνότητες. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού ο ρευστός πυρήνας έχει τώρα μεγαλύτερη ακτίνα και οι συχνότητές των ταλαντώσεων Alfvén είναι, προσεγγιστικά, αντιστρόφως ανάλογες της ακτίνας αυτής. Έτσι, παρατηρώντας το Σχήμα 6.2,



Σχήμα 6.2: Συχνότητες f (σε Hz) μαγνητοελαστικών ταλαντώσεων ($\ell = 2$ και $n = 0 \dots 5$), για διάφορες εντάσεις μαγνητικού πεδίου B ($B_\mu = 4 \times 10^{15}$ Gauss). Χρησιμοποιείται ένα δοκιμαστικό, πολυτροπικό αστρικό μοντέλο του οποίου ο στερεός φλοιός έχει μεταβλητό πάχος, από (a) $\Delta r/R = 0.95$ ως (d) $\Delta r/R = 0.30$ (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2006, [36]).



Σχήμα 6.3: Συχνότητες f (σε Hz) μαγνητοελαστικών ταλαντώσεων, για $\ell = 2$ και $n = 0, 1$ και 2 , για διάφορες εντάσεις μαγνητικού πεδίου B ($B_\mu = 4 \times 10^{15}$ Gauss), για το ρεαλιστικό αστρικό μοντέλο A+DH₁₄. Με διακεκομένες γραμμές αναπαριστώνται οι καθολικές μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις, με συνεχείς γραμμές οι Alfvén ταλαντώσεις ενώ φαίνεται και η μαγνητοελαστική ταλάντωση στην περίπτωση που το μαγνητικό πεδίο περιορίζεται στον στερεό φλοιό ($2t_0$) (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2006, [36]).

διαπιστώνουμε ότι οι ευθείες συνεχείς γραμμές, που αντιπροσωπεύουν αυτές τις ταλαντώσεις, μετατοπίζονται σταδιακά από τα αριστερά προς τα δεξιά καθώς προχωρούμε από την περίπτωση (a) προς την περίπτωση (d). Συναντώνται με τις ταλαντώσεις $2t_n$ σε ολοένα και μεγαλύτερες τιμές του B υποσκελίζοντας σε μεγάλο ποσοστό τον ελαστικό χαρακτήρα των ταλαντώσεων.

Γίνεται αμέσως αντιληπτό ότι σε ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, όπου $\Delta r/R \ll 0.30$, έχουμε μια κατάσταση που μοιάζει με όσα παρουσιάζονται στο Σχήμα 6.2(d). Πραγματικά, όπως φαίνεται στο Σχήμα 6.3, για το αστρικό μοντέλο A+DH₁₄, οι καθολικές μαγνητοελαστικές ταλαντώσεις έχουν έναν κυρίαρχο Alfvén χαρακτήρα. Στην ουσία, μόνο σε πολύ μικρές εντάσεις μαγνητικού πεδίου, $B \lesssim 0.1B_\mu$, μπορούμε να διακρίνουμε κάποια διαφορά μεταξύ των καθολικών μαγνητοελαστικών και των Alfvén συχνοτήτων.

6.3 QPOs σε magnetars

Οι συχνότητες των μαγνητοελαστικών ταλαντώσεων που βρίσκουμε με την παρούσα μέθοδο, δεν είναι, σίγουρα, οι ακριβέστερες δυνατές. Μια μαθηματικά πιο σωστή και ακριβής αντιμετώπιση του προβλήματος αυτού είναι η επίλυση της διδιάστατης Εξίσωσης (3.50). Πραγματικά, η διδιάστατη αυτή εξίσωση (χωρίς τον στερεό φλοιό, $\mu = 0$) λύνεται αριθμητικά από τους Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [37] οι οποίοι βρίσκουν δύο οικογένειες μαγνητικών ταλαντώσεων που τις ονομάζουν L_n και U_n (Lower και Upper ταλαντώσεις). Ανεξάρτητα από την ένταση του μαγνητικού πεδίου και από το θεωρούμενο αστρικό μοντέλο, οι συχνότητες των Lower και Upper ταλαντώσεων ικανοποιούν τη σχέση $L_n \simeq 0.6U_n$.

Συγκρίνουμε, τώρα, τις συχνότητες που βρίσκουμε με τη μέθοδό μας, ${}_2a_n$, με τις συχνότητες L_n και U_n των Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [37]. Στον Πίνακα 6.2 βλέπουμε τα σχετικά αποτελέσματα. Παρατηρούμε ότι, σε όλες τις περιπτώσεις:

$$U_0 \simeq 1.8 \times {}_2a_0, \quad (6.11\alpha')$$

$$U_n \simeq 1.3 \times {}_2a_n. \quad (6.11\beta')$$

Δεδομένης, μάλιστα, της σχέσης $L_n \simeq 0.6U_n$ έχουμε, επιπλέον:

$$L_0 \simeq 1.1 \times {}_2a_0, \quad (6.12\alpha')$$

$$L_n \simeq 0.8 \times {}_2a_n. \quad (6.12\beta')$$

Πίνακας 6.2: Συχνότητες (σε Hz) των Upper ταλαντώσεων Alfvén, U_n , (Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [37]), των μαγνητοελαστικών ταλαντώσεων $2a_n$ (Sotani, Kokkotas, Stergioulas & Vavoulidis 2007, [36]) και οι λόγοι τους, $U_n/2a_n$, για διάφορα μοντέλα αστέρων νετρονίων και για $B = B_\mu$.

Model	U_0	$2a_0$	ratio	U_1	$2a_1$	ratio	U_2	$2a_2$	ratio
A+DH ₁₄	25.0	14.3	1.75	49.4	37.0	1.33	74.4	56.7	1.31
A+DH ₁₆	18.3	10.8	1.69	35.7	26.7	1.34	54.0	40.5	1.33
WFF3+DH ₁₄	29.8	16.8	1.77	59.2	44.5	1.33	89.8	68.1	1.31
WFF3+DH ₁₈	18.0	10.7	1.68	35.5	26.5	1.34	53.3	40.1	1.33
APR+DH ₁₄	34.1	19.2	1.78	68.6	51.6	1.32	104.6	78.9	1.32
APR+DH ₂₀	20.6	11.8	1.75	40.3	30.3	1.33	61.0	46.1	1.32
L+DH ₁₄	40.8	22.3	1.82	81.6	61.4	1.32	123.8	94.6	1.30
L+DH ₂₀	27.8	15.3	1.82	54.7	40.6	1.34	82.6	62.1	1.33

6.4 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετήσαμε ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Υπολογίσαμε ιδιοσυχνότητες και ιδιοσυναρτήσεις λύνοντας ένα μονοδιάστατο πρόβλημα ιδιοτιμών (Εξισώσεις 6.1, 6.2 και συνοριακές συνθήκες 6.3) και συγχρίναμε τα αποτελέσματά μας με άλλες πρόσφατες διδιάστατες μελέτες (Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [37]).

Βρήκαμε ότι σε έναν μαγνητισμένο ρεαλιστικό αστέρα νετρονιών, με σχετικά λεπτό στερεό φλοιό ($\Delta r/R \lesssim 0.1$), οι τοροειδείς μαγνητοελαστικοί modes έχουν χυρίως μαγνητικό και ελάχιστα ελαστικό χαρακτήρα (Σχήμα 6.3). Επιπλέον, η μονοδιάστατη μέθοδος λύσης που ακολουθήσαμε, αν και δεν ήταν η απόλυτα σωστή, αποδείχθηκε αρκετά αξιόπιστη. Οι λύσεις της μεθόδου μας και οι λύσεις της, πιο σωστής μαθηματικά, μεθόδου των Sotani, Kokkotas & Stergioulas (2007) [37] διαφέρουν μόνο κατά έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα (Σχέσεις 6.11 και 6.12).

Κεφάλαιο 7

Διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις στην προσέγγιση Cowling

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζουμε κάποια πρώτα (μη - δημοσιεύσιμα) αποτελέσματα από διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις. Οι διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις είναι απαραίτητες στη μελέτη ταλαντώσεων ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Με λίγα λόγια, μια διδιάστατη αριθμητική προσομοίωση μάς δείχνει πώς εξελίσσονται (στον χρόνο $t > 0$) οι αρχικές (στις δύο χωρικές διαστάσεις $r > 0$, $0 < \theta < \pi/2$ ή $\rho > 0$, $0 < z < \infty$) διαταραχές σε έναν αστέρα νετρονίων. Για μη - περιστρεφόμενους και βραδέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων μπορούμε και αναγόμαστε σε ευκολότερα, μονοδιάστατα προβλήματα (βλέπε π.χ. Κεφάλαια 4, 5 και 6) αλλά αυτό είναι δύσκολο και πολύπλοκο για περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων.

Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 2, όταν θέλουμε να κατασκευάσουμε έναν ταχέως περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων εγκαταλείπουμε τις μονοδιάστατες μεθόδους πολυπολικών αναπτυγμάτων και χρησιμοποιούμε διδιάστατες μεθόδους κατασκευής. Το ίδιο κάνουμε και όταν θέλουμε να μελετήσουμε ταλαντώσεις ταχέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων. Για να είμαστε συνεπείς σε κάθε τάξη ως προς Ω/Ω_K , και εφόσον ενδιαφερόμαστε για αστέρες νετρονίων που περιστρέφονται σχεδόν στο δριό Kepler, $\Omega \simeq \Omega_K$, πρέπει να λύσουμε το πρόβλημα σε δύο χωρικές διαστάσεις.

Οστόσο οι διδιάστατες προσομοιώσεις είναι δύσκολες στον χειρισμό τους καθώς,

συνήθως, παρουσιάζουν αριθμητικές αστάθειες (numerical instabilities). Οι αριθμητικές αστάθειες είναι, ουσιαστικά, αριθμητικά σφάλματα που διαδίδονται μέσα στον αριθμητικό μας κώδικα, σταδιακά αυξάνονται και, εν τέλει, καταστρέφουν τις προσομοιώσεις μας. Οι αριθμητικές αυτές αστάθειες μπορούν να είναι είτε εγγενείς (μπορούν να οφείλονται, δηλαδή, στην ίδια την αριθμητική μέθοδο) είτε μπορούν να οφείλονται σε κακή εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών.

Αυτό συμβαίνει και στις δικές μας προσομοιώσεις για ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων. Δείχνουμε, στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, πώς μια τέτοια αστάθεια καταστρέψει την αριθμητική εξέλιξη του συστήματός μας (Σχήμα 7.5). Προηγουμένως παρουσιάζουμε ευσταθείς διδιάστατες προσομοιώσεις για μη - περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων.

7.1 Εξισώσεις και αριθμητικές τεχνικές

Οι ταχέως περιστρεφόμενοι αστέρες νετρονίων περιγράφονται, στην προσέγγιση Cowling, από δύο διδιάστατες εξισώσεις κυματικής μορφής (Κεφάλαιο 3.3, Ενότητα 3.3.1). Στο μη - περιστρεφόμενο όριο, $\Omega = 0$, η μία από τις δύο εξισώσεις εκφυλίζεται, και απομένει μία σχετικά απλή κυματική εξίσωση. Η εξίσωση αυτή είναι η εξής (βλέπε π.χ. Vavoulidis, [88]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} t_0^0 &= c_s^2 \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial r^2} t_1^1 - \left(\frac{2}{r} + 4 \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{\partial}{\partial r} t_1^1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} t_1^1 - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} t_1^1 \right. \\ &- \left(\frac{d^2 \nu}{dr^2} + 3 \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\mu}{dr} - \frac{m^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) t_1^1 \\ &\left. + \frac{d\nu}{dr} \frac{\partial}{\partial r} t_0^0 + \left(\frac{d^2 \nu}{dr^2} + 3 \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{d\nu}{dr} \frac{d\mu}{dr} \right) t_0^0 \right\}, \end{aligned} \quad (7.1)$$

όπου τα $\nu = \nu(r)$ και $\mu = \mu(r)$ χαρακτηρίζουν τη μετρική ενός μη - περιστρεφόμενου αστέρα (σε ισοτροπικές συντεταγμένες):

$$ds^2 = -e^{2\nu} dt^2 + e^{2\mu} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (7.2)$$

και $c_s^2 = c_s^2(r)$ είναι η ταχύτητα του ήχου, η οποία συνδέει τα $t_0^0 = t_0^0(t, r, \theta)$ και $t_1^1 = t_1^1(t, r, \theta)$:

$$t_1^1 = -c_s^2 t_0^0. \quad (7.3)$$

(Της πενθυμίζουμε ότι το t_0^0 είναι, ουσιαστικά, η διαταραχή της πυκνότητας και το t_1^1 είναι η διαταραχή της πίεσης, βλέπε Ενότητα 3.3.1, Σχέσεις 3.76, οπότε η παραπάνω σχέση υποδηλώνει την αδιαβατικότητα των ταλαντώσεων).

Στο Νευτώνειο όριο, η εξίσωση αυτή έχει την ίδια δομή και είναι λίγο πιο απλή:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta p = & c_s^2 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} \delta p + \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{\Gamma p} \frac{dp}{dr} \right) \frac{\partial}{\partial r} \delta p + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \delta p + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \delta p \right. \\ & \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \delta p - \frac{1}{\Gamma p} \left[\frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dp}{dr} - \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dr} \right)^2 \right] \delta p \right\}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

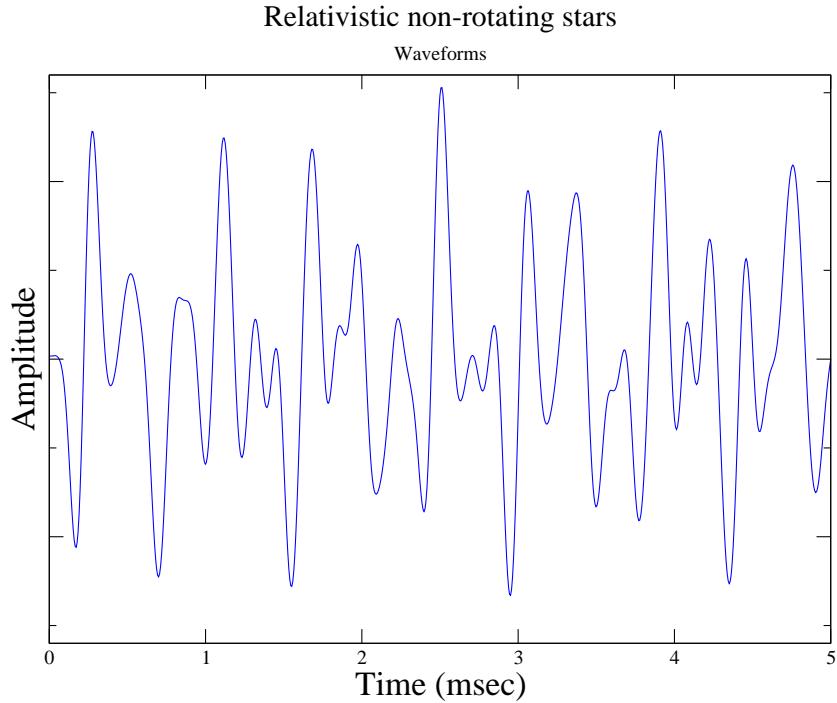
όπου $p = p(r)$ είναι η αδιατάραχτη πυκνότητα, $\delta p = \delta p(t, r, \theta)$ είναι η γραμμική διαταραχή της πυκνότητας Γ είναι ο αδιαβατικός δείκτης.

Εξελίσσουμε τη διδιάστατη αυτή εξίσωση αριθμητικά, χρησιμοποιώντας κεντρικές διαφορές (centered differences), τόσο για τη δεύτερη - τάξης χρονική παράγωγο στο αριστερό μέλος της, όσο και για τις χωρικές παραγώγους (δεύτερης αλλά και πρώτης - τάξης) στο δεξιό μέλος της και πάρνουμε έτσι ένα αριθμητικό σχήμα τριών επιπέδων (3 - level numerical scheme). Στα όρια του αριθμητικού μας πλέγματος εφαρμόζουμε τις απαραίτητες αριθμητικές συνοριακές συνθήκες, οι οποίες είναι ουσιαστικά απόρροια των αντίστοιχων φυσικών συνοριακών συνθηκών.

Για παράδειγμα, θεωρούμε μια κάθετη τομή του αστέρα νετρονίων και από αυτήν επιλέγουμε μόνο το πρώτο τεταρτημόριο ($0 < r < R$, $0 < \theta < \pi/2$). Προσαρμόζουμε στο τεταρτημόριο αυτό ένα αριθμητικό πλέγμα με ακτινική διαμέριση Δr και γωνιακή διαμέριση $\Delta \theta$: r_i , $i = 0 \dots N_r$ και θ_j , $j = 0 \dots N_\theta$. Σε κάθε κόμβο (node) του πλέγματος (r_i, θ_j) γνωρίζουμε τις αδιατάραχτες ποσότητες $\rho_{i,j}$, $\rho_{i,j}$ κ.τ.λ. Η Εξίσωση (7.4) γράφεται, σε διαχριτή μορφή, ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{\delta p_{i,j}^{k+1} - 2\delta p_{i,j}^k + \delta p_{i,j}^{k-1}}{\Delta t^2} = & (c_s^2)_{i,j} \left\{ \frac{\delta p_{i+1,j}^k - 2\delta p_{i,j}^k + \delta p_{i-1,j}^k}{\Delta r^2} \right. \\ & + \left(\frac{2}{r_i} - \frac{1}{\Gamma p_{i,j}} \left(\frac{dp}{dr} \right)_{i,j} \right) \frac{\delta p_{i+1,j}^k - \delta p_{i-1,j}^k}{2\Delta r} \\ & + \frac{1}{r_i^2} \frac{\delta p_{i,j+1}^k - 2\delta p_{i,j}^k + \delta p_{i,j-1}^k}{\Delta \theta^2} + \frac{\cot \theta_j}{r_i^2} \frac{\delta p_{i,j+1}^k - \delta p_{i,j-1}^k}{2\Delta \theta} \\ & \left. - \frac{m^2}{r_i^2 \sin^2 \theta_j} \delta p_{i,j}^k - \frac{1}{\Gamma p_{i,j}} \left[\left(\frac{d^2 p}{dr^2} \right)_{i,j} + \frac{2}{r_i} \left(\frac{dp}{dr} \right)_{i,j} - \frac{1}{p_{i,j}} \left(\frac{dp}{dr} \right)_{i,j}^2 \right] \delta p_{i,j}^k \right\}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Βλέπουμε ότι μπορούμε να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς $\delta p_{i,j}^{k+1}$ αν γνωρίζουμε τις τιμές του δp σε όλα τα σημεία $(i, j) = (r_i, \theta_j)$ στα δύο προηγούμενα χρονικά επίπεδα t^k και t^{k+1} . Στην αριθμητική εξέλιξη συμετέχουν, δηλαδή, τρία χρονικά - επίπεδα και για αυτό το παραπάνω αριθμητικό σχήμα χαρακτηρίζεται ως σχήμα τριών - επιπέδων.



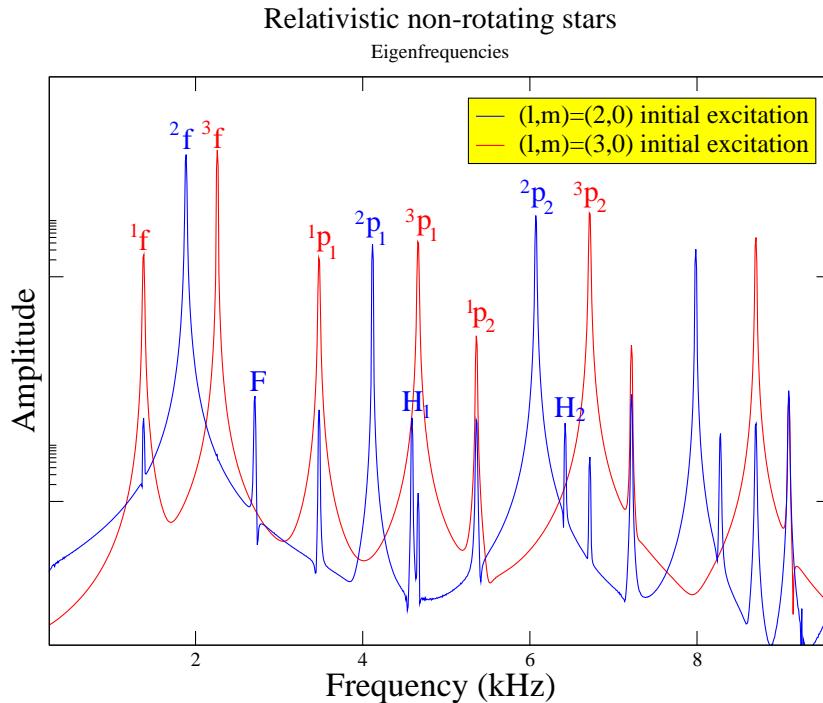
Σχήμα 7.1: Χρονική εξέλιξη μικρών διαταραχών με διδιάστατη αριθμητική προσομοίωση (Vavoulidis 2002, [88]). Ο σχετικιστικός αστέρας που χρησιμοποιείται είναι ο αστέρας με κωδική ονομασία BU0 και είναι ο ίδιος με αυτόν που χρησιμοποιούν οι Font et al. (2001) [84].

Η αριθμητική εξέλιξη είναι ευσταθής για μεγάλο χρονικό διάστημα (ουσιαστικά επ' άπειρο). Σε ένα σημείο του αστέρα, π.χ. στο σημείο $r = R/2$, $\theta = \pi/4$, καταγράφουμε πως μεταβάλλεται η μεταβλητή δp με την πάροδο του χρόνου. Παίρνουμε, με άλλα λόγια μια χρονοσειρά, $\delta p = \delta p(t, r = R/2, \theta = \pi/4)$, ο μετασχηματισμός Fourier της οποίας αποκαλύπτει πολλές ιδιοσυχνότητες ταλάντωσης του αστέρα (βλέπε π.χ. Vavoulidis 2002, [88]). Στο Σχήμα 7.1 παρουσιάζουμε μια τέτοια χρονοσειρά για την αριθμητική εξέλιξη της πλήρους σχετικιστικής εξίσωσης (όχι της παραπάνω Νευτώνειας Εξίσωσης

7.4) και για τον αστέρα με χωδική ονομασία BU0 που χρησιμοποιούν οι Font et al. (2001) [84]. Η μακράς διαρκείας ευστάθεια της αριθμητικής εξέλιξης είναι παραπάνω από φανερή. Πρέπει να σημειώσουμε ότι η μακράς διαρκείας ευστάθεια του αριθμητικού μας σχήματος είναι σημαντικό ζητούμενο. Όσο μεγαλύτερη είναι η χρονοσειρά μας, τόσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση των ιδιοσυχνοτήτων που εμπεριέχει. Η ακρίβεια στη μέτρηση των ιδιοσυχνοτήτων είναι ανάλογη της συνολικής διάρκειας της χρονοσειράς:

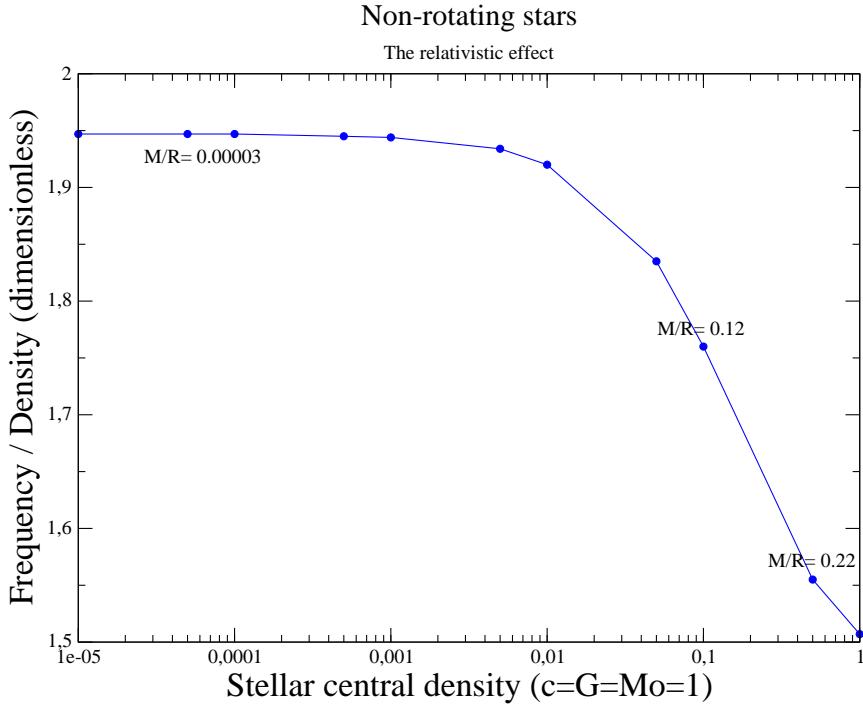
$$\Delta\sigma \sim \frac{1}{T_{\text{total}}}. \quad (7.6)$$

Με άλλα λόγια, χρειαζόμαστε όσο το δυνατό πιο ευσταθή αριθμητικά σχήματα ώστε να πάρουμε όσο το δυνατό πιο ακριβή και αξιόπιστα αποτελέσματα.



Σχήμα 7.2: Μετασχηματισμός Fourier της χρονοσειράς του Σχήματος 7.1. Φαίνονται διάφορες ιδιοσυχνότητες, θεμελιώδεις και αρμονικές (f και p). Οι θεμελιώδεις ιδιοσυχνότητες συμβολίζονται ως ℓf ενώ οι αρμονικές συμβολίζονται ως ℓp_n . Οι ακτινικές ιδιοσυχνότητες ($\ell = 0$) συμβολίζονται ως F, H1 και H2 για τον θεμελιώδη, τον πρώτο αρμονικό και τον δεύτερο αρμονικό mode, αντίστοιχα. Οι ιδιοσυχνότητες αυτές βρέθηκαν ύστερα από διδιάστατη προσομοίωση της εξέλιξης αρχικών διαταραχών (Vavoulidis 2002, [88]) και συμφωνούν σε πάρα πολύ καλό βαθμό με τα αποτελέσματα των Font et. (2001) [84].

Στο Σχήμα 7.2 δείχνουμε τι προκύπτει όταν μετασχηματίζουμε κατά Fourier την χρονοσειρά του Σχήματος 7.1. Παρατηρούμε μια πλειάδα ιδιοσυχνοτήτων, θεμελιωδών (f-modes) και ανώτερων ακτινικών αρμονικών (p-modes) για ακτινικές ($\ell = 0$) αλλά και για μη - ακτινικές ($\ell \geq 1$) ταλαντώσεις. Οι ιδιοσυχνότητες αυτές συμφωνούν σε πάρα πολύ καλό βαθμό με τα αποτελέσματα των Font et. (2001) [84]. Παρατηρούμε ότι η επιλογή των αρχικών συνθηκών είναι επίσης σημαντική. Μπορούμε να διεγείρουμε σχεδόν αποκλειστικά τους modes περιττού ℓ ή τους modes άρτιου ℓ επιλέγοντας κατάλληλα τις αρχικές μας διαταραχές. Από την άλλη, μια Γκαουσιανή αρχική διαταραχή της μορφής $e^{-[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{1/2}}$ (όπου $\vec{x}_0 = [x_0, y_0, z_0]$ το διάνυσμα θέσης ενός τυχαίου σημείου μέσα στον αστέρα όπου η διαταραχή γίνεται μέγιστη) διεγείρει συνήθως πολλούς διαφορετικούς, περιττού και άρτιου ℓ , modes.



Σχήμα 7.3: Συμπεριφορά των ιδιοσυχνοτήτων των f-modes στο Νευτώνειο όριο. Προχωρώντας προς όλο και πιο Νευτώνεια αστρικά μοντέλα, από δεξιά προς αριστερά, οι ιδιοσυχνότητες των f-modes γίνονται συναρτήσεις μόνο της μέσης αστρικής πυκνότητας.

Στη συνέχεια συγχρίνουμε τα σχετικιστικά αποτελέσματα με αποτελέσματα από το Νευτώνειο όριο. Με τον ίδιο αριθμητικό κώδικα εξελίσσουμε μια σειρά αστρικών

μοντέλων με μειούμενες συμπαγότητες M/R . Θεωρούμε αρχικά έναν έντονα σχετικιστικό αστέρα, με $M/R \gtrsim 0.25$ και καταλήγουμε σε αστέρες πολύ ασθενούς βαρύτητας $M/R \rightarrow 0$. Στο Σχήμα 7.3 δείχνουμε τα αποτελέσματά μας. Ουσιαστικά επαληθεύουμε ένα γνωστό συμπέρασμα της Νευτώνειας Θεωρίας: οι ιδιοσυχνότητες των f-modes ενός αστέρα εξαρτώνται ως επί το πλείστον από τη μέση πυκνότητά του. Έτσι, πάνω και αριστερά στο Σχήμα 7.3 βλέπουμε ότι ο λόγος της ιδιοσυχνότητας του f-mode προς τη μέση πυκνότητα του αστέρα τείνει σε μια συγκεκριμένη τιμή, ίση περίπου με 1.95. Αντιθέτως, για σχετικιστικά μοντέλα (κάτω και δεξιά στο Σχήμα 7.3), η γραμμική αυτή σχέση παύει να υφίσταται.

Σε μια άλλη παραλλαγή του αριθμητικού μας κώδικα, εξελίσσουμε ένα πρώτης - τάξης σύστημα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους (πρώτης - τάξης και ως προς τον χρόνο και ως προς τον χώρο). Χρησιμοποιούμε έξι μεταβλητές Q που είναι συναρτήσεις των σφαιρικών συντεταγμένων (t, r, θ, ϕ) (αν και μπορούμε να γράψουμε, πολύ εύκολα, το παραπάνω σύστημα και σε κυλινδρικές συντεταγμένες (t, ρ, z, ϕ)). Οι μεταβλητές $Q_1 \dots Q_6$ είναι αντίστοιχες των μεταβλητών t_α^β που ορίστηκαν στην Ενότητα 3.3.1. Είναι, ουσιαστικά, οι διαταραχές των συνιστώσων του ταυνυστή ενέργειας - ορμής (Vavoulidis 2002, Kokkotas & Vavoulidis 2005, [88, 89]):

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \\ * & Q_5 & \Omega Q_3 & \Omega Q_4 \\ * & * & Q_6 & 0 \\ * & * & * & Q_6/r^2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \delta T^{tt} & \delta T^{t\phi} & \delta T^{tr} & \delta T^{t\theta} \\ * & \delta T^{\phi\phi} & \delta T^{\phi r} & \delta T^{\phi\theta} \\ * & * & \delta T^{rr} & \delta T^{r\theta} \\ * & * & * & \delta T^{\theta\theta} \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Το σύστημά μας είναι το εξής (Vavoulidis 2002, Kokkotas & Vavoulidis 2005, [88, 89]):

$$\begin{aligned} Q_{1,t} = & -Q_{2,\phi} - Q_{3,r} - Q_{4,\theta} \\ & - \left[e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega) \omega_{,r} + \beta_{,r} + 2\mu_{,r} + 3\nu_{,r} + \frac{2}{r} \right] Q_3 \\ & - \left[e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega) \omega_{,\theta} + \beta_{,\theta} + 2\mu_{,\theta} + 3\nu_{,\theta} + \cot \theta \right] Q_4, \quad (7.8\alpha') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{2,t} = & \Omega^2 Q_{1,\phi} - 2\Omega Q_{2,\phi} - \Omega Q_{3,r} - \Omega Q_{4,\theta} \\
& + \left[e^{-2\nu+2\mu} (\Omega - \omega)^2 - \frac{e^{-2\beta+2\mu}}{r^2 \sin^2 \theta} \right] Q_{6,\phi} \\
& - \left[e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega) \omega \omega_{,r} + (\Omega - \omega)_{,r} + (3\Omega - 2\omega) \beta_{,r} \right. \\
& \quad \left. + 2\Omega \mu_{,r} + (\Omega + 2\omega) \nu_{,r} + (2\Omega - \omega) \frac{2}{r} \right] Q_3 \\
& - \left[e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega) \omega \omega_{,\theta} \nu_{,\theta} + (\Omega - \omega)_{,\theta} + (3\Omega - 2\omega) \beta_{,\theta} \right. \\
& \quad \left. + 2\Omega \mu_{,\theta} + (\Omega + 2\omega) (3\Omega - 2\omega) \cot \theta \right] Q_4,
\end{aligned} \tag{7.8\beta'}$$

$$\begin{aligned}
Q_{3,t} = & -\Omega Q_{3,\phi} - Q_{6,r} \\
& - \left\{ e^{-2\mu+2\nu} \nu_{,r} + e^{-2\mu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta \left[(\Omega^2 - \omega^2) \left(\frac{1}{r} + \beta_{,r} \right) - \omega \omega_{,r} \right] \right\} Q_1 \\
& - e^{-2\mu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta \left[\omega_{,r} - 2(\Omega - \omega) \left(\frac{1}{r} + \beta_{,r} \right) \right] Q_2 \\
& - \left[\nu_{,r} + 2\mu_{,r} + e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 \left(\frac{1}{r} + \beta_{,r} \right) \right] Q_6,
\end{aligned} \tag{7.8\gamma'}$$

$$\begin{aligned}
Q_{4,t} = & -\Omega Q_{4,\phi} - \frac{1}{r^2} Q_{6,\theta} \\
& - \frac{1}{r^2} \left\{ e^{-2\mu+2\nu} \nu_{,\theta} + e^{-2\mu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta [(\Omega^2 - \omega^2) (\cot \theta + \beta_{,\theta}) - \omega \omega_{,\theta}] \right\} Q_1 \\
& - \frac{1}{r^2} e^{-2\mu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta [\omega_{,\theta} - 2(\Omega - \omega) (\cot \theta + \beta_{,\theta})] Q_2 \\
& - \frac{1}{r^2} \left[\nu_{,\theta} + 2\mu_{,\theta} + e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 (\cot \theta + \beta_{,\theta}) \right] Q_6,
\end{aligned} \tag{7.8\delta'}$$

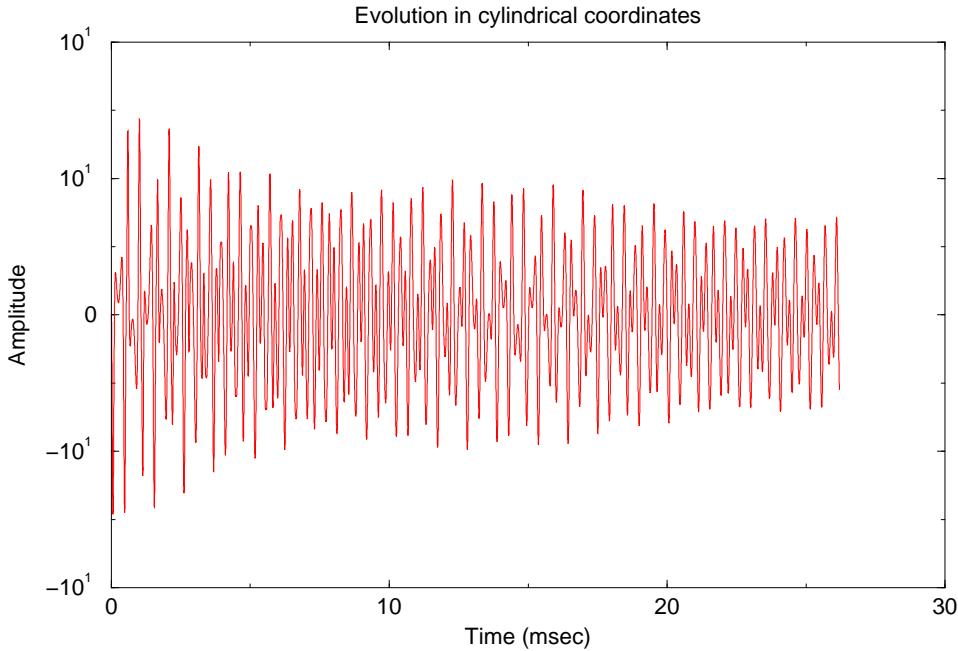
με την αλγεβρική σχέση:

$$\begin{aligned}
Q_6 = & \frac{e^{-2\mu+2\nu} c_s^2}{1 - e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega)^2 c_s^2} \times \\
& \times \{ [1 + e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega^2 - \omega^2)] Q_1 - 2e^{-2\nu+2\beta} r^2 \sin^2 \theta (\Omega - \omega) Q_2 \},
\end{aligned} \tag{7.9}$$

να συνδέει τη μεταβλητή Q_6 με τις Q_1 και Q_2 .

Στο Σχήμα 7.4 παρουσιάζουμε την αριθμητική εξέλιξη του παραπάνω συστήματος σε κυλινδρικές συντεταγμένες και για έναν μη - περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων (Vavoulidis 2002, [88]). Βλέπουμε ότι η χρονική αυτή εξέλιξη είναι ευσταθής. Μάλιστα παρατηρούμε μία μείωση στο πλάτος των ταλαντώσεων (damping) το οποίο, κατά

Time Evolution of Axisymmetric Modes

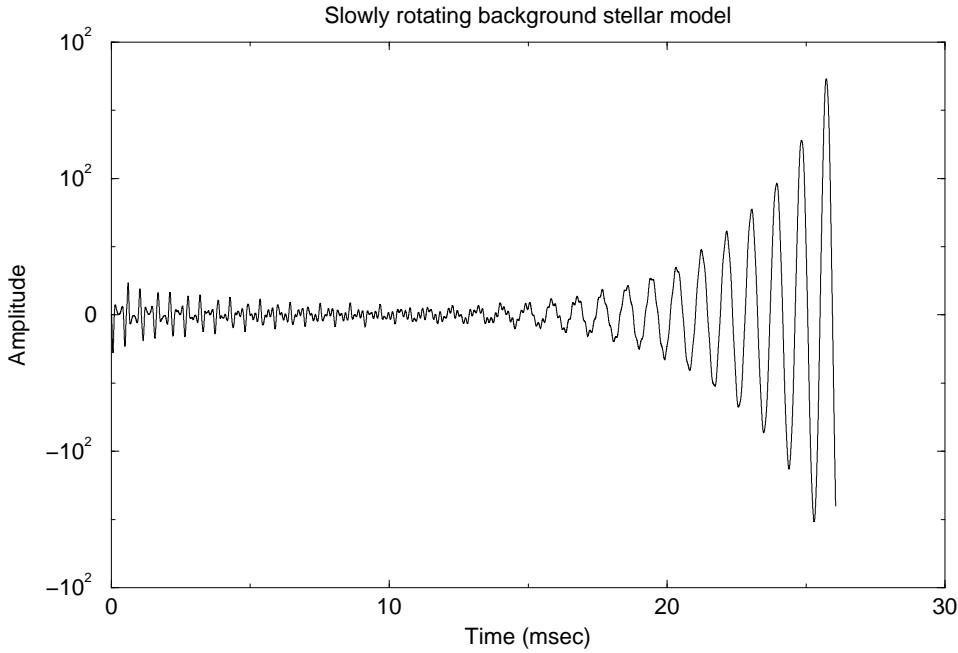


Σχήμα 7.4: Χρονοσειρά από διδιάστατη αριθμητική εξέλιξη σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Παρατηρούμε μια σταδιακή μείωση του πλάτους της ταλάντωσης λόγω της μη-σωστής αριθμητικής εφαρμογής των συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια του αστέρα (Vavoulidis 2002, [88]).

πάσα πιθανότητα, οφείλεται στη μη - σωστή εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών στην επιφάνεια του αστέρα. Ουσιαστικά, προσπαθούμε να καλύψουμε, με ένα τετραγωνικό πλέγμα (ρ_i, z_j) , έναν κυκλικό δίσκο. Όσο πιο καλά διαμερισμένο είναι το τετραγωνικό μας πλέγμα, τόσο πιο μικρό είναι το σφάλμα που κάνουμε και τόσο πιο μικρή η απόβεση. Ωστόσο, πλήρης ταύτιση των δύο συνόρων είναι αδύνατη. Ο μετασχηματισμός FFT μάς δίνει και πάλι σωστές ιδιοσυχνότητες για το μοντέλο BU0. Η μικρή, όμως, διάρκεια της αριθμητικής εξέλιξης (μετά από μερικά msec το πλάτος της ταλάντωσης μηδενίζεται) δεν μάς επιτρέπει τον υπολογισμό των ιδιοσυχνοτήτων με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια.

Τέλος, δοκιμάζουμε να εξελίξουμε το Σύστημα (7.8) για περιστρεφόμενους ($\Omega \neq 0$) αστέρες νετρονίων. Δίνουμε στο αστρικό μοντέλο BU0 μια πολύ μικρή συχνότητα περιστροφής, τέτοια ώστε ο λόγος της πολικής ακτίνας του, r_p , προς την ισημερινή

Time Evolution of Axisymmetric Modes



Σχήμα 7.5: Διδιάστατη αριθμητική εξέλιξη σε κυλινδρικές συντεταγμένες (όπως και στο Σχήμα 7.4) αλλά για περιστρεφόμενο αστέρα νετρονίων (BU0, με λόγο αξόνων $r_p/r_e = 0.99$). Παρατηρούμε ότι μετά από μικρό χρονικό διάστημα το πλάτος της ταλάντωσης αυξάνεται απεριόριστα και η αριθμητική μας εξέλιξη καταστρέφεται (Vavoulidis 2002, [88]).

ακτίνα του, r_e , να είναι ίσος με 0.99 και προχωρούμε στην αριθμητική ολοκλήρωση του συστήματος. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.5, μετά από μερικές ταλαντώσεις, το πλάτος αυξάνεται εκθετικά και η αριθμητική μας εξέλιξη καταστρέφεται. Η ύπαρξη αυτής της αριθμητικής αστάθειας δεν μας επιτρέπει να εξελίξουμε ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες για μεγάλα χρονικά διαστήματα και κάνει αδύνατη την εύρεση ιδιοσυχνοτήτων τους μέσω μετασχηματισμών Fourier.

7.2 Συμπεράσματα - Αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό αναπαράγαμε παλαιότερα αριθμητικά αποτελέσματα χρησιμοποιώντας διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις. Περιοριστήκαμε σε μη - περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων αφού για περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων οι αριθμητικές προσομοιώσεις υπήρξαν ασταθείς. Για μη - περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, η χρονική εξέλιξη / ολοκλήρωση διδιάστατων μερικών διαφορικών εξισώσεων της μορφής (7.1) ή (7.4) υπήρξε ευσταθής. Η αριθμητική μέθοδος που χρησιμοποιήθηκε ήταν μία μέθοδος κεντρικών διαφορών, τριών χρονικών επιπέδων (βλέπε, για παράδειγμα, εξίσωση 7.5).

Για μη - περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων επαληθεύτηκαν ιδιοσυχνότητες πολλών f- και p-modes (Σχήμα 7.2). Επαληθεύτηκε, επίσης, η συμπεριφορά των ιδιοσυχνοτήτων αυτών των modes στο Νευτώνειο όριο (Σχήμα 7.3). Χρησιμοποιήθηκε, εναλλακτικά, ένα σύστημα εξισώσεων πρώτης - τάξης σε κυλινδρικές συντεταγμένες (σύστημα εξισώσεων 7.8) το οποίο αποδείχθηκε ευσταθές αλλά με αρκετή απόσβεση. Ωστόσο για περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων, η αριθμητική εξέλιξη και αυτού του συστήματος υπήρξε ασταθής.

Κεφάλαιο 8

Σύνοψη

Στο τελευταίο αυτό κεφάλαιο συνοψίζουμε τα αποτελέσματά μας, επισημαίνομε την πρωτοτυπία τους και καθορίζουμε τη χρησιμότητά τους στη σύγχρονη Αστροφυσική.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετήσαμε ταλαντώσεις σε μη - περιστρεφόμενους μη - μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Είδαμε ότι η παρουσία του στερεού φλοιού έχει μικρές επιδράσεις στους f- και στους p-modes· αλλάζει ελαφρά τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιοσυναρτήσεις τους. Ωστόσο, νέες οικογένειες modes παρουσιάζονται εξαιτίας του στερεού φλοιού· το φάσμα ιδιοσυχνοτήτων εμπλουτίζεται με σφαιροειδείς interfacial και shear modes και με τοροειδείς torsional modes. Οι interfacial, shear και torsional modes εντοπίζονται κυρίως στον στερεό φλοιό (οι ιδιοσυναρτήσεις τους έχουν μικρό πλάτος στον εσωτερικό ρευστό πυρήνα), εκτελούν κυρίως εγκάρσιες κινήσεις ($\delta u^r \ll \delta u^\theta, \delta u^\phi$) και έχουν σχετικά μικρές ιδιοσυχνότητες.

Τυπολογίσαμε ιδιοσυχνότητες και ιδιοσυναρτήσεις διαφόρων σφαιροειδών και τοροειδών modes για 34 μοντέρνα ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων (Πίνακες 4.2, 4.3 και 4.4). Πολλά από αυτά τα μοντέλα χρησιμοποιήθηκαν σε πρόσφατες μελέτες (Messios, Papadopoulos & Stergioulas 2001, Samuelsson & Andersson 2007, Sotani, Kokkotas & Stergioulas 2007, [12, 5, 14]) στις οποίες υπολογίστηκαν ιδιοσυχνότητες και ιδιοσυναρτήσεις μόνο τοροειδών torsional modes. Με τη μελέτη μας συμπληρώσαμε τις παραπάνω μελέτες υπολογίζοντας ιδιοσυχνότητες και ιδιοσυναρτήσεις και σφαιροειδών modes. Ιδιαίτερα ενδιαφέρουσες είναι οι ιδιοσυχνότητες των $\ell = 1$ interfacial modes. Οι ιδιοσυχνότητες αυτές είναι λίγες δεκάδες Hz και θα μπορούσαν να σχετίζονται με

παρατηρούμενες χαμηλές συχνότητες QPOs σε SGRs.

Με βάση τις υπολογιζόμενες ιδιοσυχνότητες για τους τοροειδείς torsional modes κατασκευάσαμε χρήσιμους εμπειρικούς σεισμολογικούς τύπους (π.χ. τύπος 4.9 και Πίνακας 4.5). Διαπιστώσαμε ότι για τους θεμελιώδεις torsional modes είναι $\ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell+1) - 2}$ (Samuelsson & Andersson 2007, [5]) και όχι $\ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell+1)}$ όπως είχε θεωρηθεί αρχικά. Η κατασκευή σωστών σεισμολογικών τύπων είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τη σωστή αναγνώριση και ταυτοποίηση συχνοτήτων QPOs σε SGRs. Για παράδειγμα, στο SGR 1900+14 παρατηρήθηκαν QPOs στα 28, 53, 84 και 155 Hz περίπου. Θεωρώντας ότι $\ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell+1)}$ οι συχνότητες αυτές ταυτοποιούνται ως οι ιδιοσυχνότητες των $\ell = 2, 4, 7$ και 13 θεμελιωδών torsional modes. Όταν όμως θεωρούμε $\ell t_0 \sim \sqrt{\ell(\ell+1) - 2}$, οι συχνότητες αυτές ταυτοποιούνται ως οι ιδιοσυχνότητες των $n = 0, \ell = 2, 4, 6$ και 11 torsional modes.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 εκτιμήσαμε τον συντελεστή παλιρροιακής σύζευξης για διάφορους σφαιροειδείς modes. Ο συντελεστής αυτός βρέθηκε, όπως αναμενόταν, μεγαλύτερος για τους f-modes. Για τους σφαιροειδείς p- και i-modes ο συντελεστής παλιρροιακής σύζευξης βρέθηκε περίπου μια τάξη μεγέθους μικρότερος. Για τους σφαιροειδείς s-modes βρέθηκε, λογικά, ακόμη πιο μικρός αφού αυτοί οι τελευταίοι modes εντοπίζονται κυρίως στον στερεό φλοιού, σε αρκετά μικρές πυκνότητες. Ωστόσο, οι interfacial modes, δεδομένου ότι έχουν πολύ χαμηλές ιδιοσυχνότητες, αναμένεται να διεγερθούν περισσότερο κατά την εξέλιξη ενός συκλίνοντος συμπαγούς αστρικού ζεύγους. Φυσικά, το θέμα αυτό χρειάζεται μια πιο ολοκληρωμένη, λεπτομερή και ακριβή διερεύνηση.

Στο Κεφάλαιο 5 μελετήσαμε τις επιδράσεις της αστρικής περιστροφής πάνω στις σφαιροειδείς και στις τοροειδείς ταλαντώσεις στερεού φλοιού αστέρων νετρονίων. Περιοριστήκαμε στην προσέγγιση της αργής περιστροφής όπου θεωρείται ότι οι αστέρες παραμένουν σφαιρικά συμμετρικοί. Δεν θεωρήσαμε, επίσης, την ανάμιξη σφαιροειδών και τοροειδών modes. Η περιστροφή έχει ως αποτέλεσμα την αλλαγή των ιδιοσυχνοτήτων και των ιδιοσυναρτήσεων των διαφόρων modes. Η μελέτη μας είναι η πρώτη σχετικιστική μελέτη πάνω στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Είναι ουσιαστικά επέκταση,

από τη Νευτώνεια Θεωρία στη Γενική Σχετικότητα, των μελετών των Strohmayer 1991 και Lee & Strohmayer (1996) [6, 7].

Συγκεκριμένα, ο εκφυλισμός των διαφόρων ιδιοσυχνοτήτων ως προς τον αζιμουθιακό δείκτη m άρεται και οι ιδιοσυχνότητες μεταβάλλονται σύμφωνα με τη σχέση $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 = \sigma_0 + m\Omega / [\ell(\ell+1)]$. Η σχέση αυτή είναι ακριβής στα πλαίσια της Νευτώνειας Θεωρίας Βαρύτητας αλλά τροποποιείται στα πλαίσια της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Βρήκαμε ότι, για ρεαλιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων, οι σχετικιστικές διορθώσεις στην παραπάνω σχέση μπορούν να είναι από 10 ως 30% (Πίνακες 5.3 και 5.4). Εξαρτώνται, όπως είναι φυσικό, από το πόσο σχετικιστικά μοντέλα αστέρων νετρονίων θεωρούμε, δηλαδή από την συμπαγότητα, τον λόγο M/R της μάζας προς την ακτίνα των μοντέλων αυτών (Σχήμα 5.1).

Ένα ενδιαφέρον φαινόμενο που συμβαίνει σε περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό είναι ότι διάφοροι modes μπορούν να γίνουν CFS ασταθείς ακόμη και σε μικρές περιστροφικές συχνότητες μερικών Hz. Βρήκαμε, για παράδειγμα, ότι οι θεμελιώδεις torsional modes ή/και οι interfacial modes μπορούν να γίνουν ασταθείς σε συχνότητες περιστροφής περίπου $10\text{Hz} < \Omega < 20\text{Hz}$ (Σχήμα 5.3). Οι συχνότητες αυτές, αν και αρκετά μικρότερες από τις συχνότητες Kepler, είναι ασυνίθιστα μεγάλες για παρατηρούμενους αστέρες νετρονίων (radio - pulsars, magnetars κ.ά.) Ωστόσο, θα μπορούσαν να υπάρχουν τέτοιες σε σχετικά νέους αστέρες νετρονίων που μόλις σχηματίστηκαν μετά από μια βαρυτική κατάρρευση ή από συγχώνευση δύο άλλων αστέρων νετρονίων. Μία τέτοιας μορφής αστάθεια θα μπορούσε να δράσει σε τέτοιους αστέρες και θα μπορούσε να ορίσει ένα ανώτερο όριο στις συχνότητες περιστροφής παρατηρούμενων αστέρων νετρονίων.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετήσαμε, τέλος, μαγνητισμένους αστέρες νετρονίων με στερεό φλοιό. Βρήκαμε ότι η παρουσία ισχυρού μαγνητικού πεδίου μπορεί να επιφέρει σημαντικές αλλαγές στο φάσμα ιδιοσυχνοτήτων ενός τέτοιου αστέρα νετρονίων (Σχήμα 6.2). Πιθανότατα, σε ρεαλιστικούς αστέρες νετρονίων, όπου ο στερεός φλοιός είναι ένα μικρό μόνο μέρος του συνολικού όγκου του αστέρα, θα παρατηρούσαμε μόνο modes μαγνητικού χαρακτήρα (Σχήμα 6.3). Εναλλακτικά, modes ελαστικού χαρακτήρα

θα μπορούσαν να παρατηρηθούν αν το πεδίο κατά κάποιο τρόπο περιορίζονται μόνο στον στερεό φλοιό και δεν διαπερνούσε τον εσωτερικό ρευστό πυρήνα. Ο τρόπος που συζεύγνηνται το μαγνητικό πεδίο και ο στερεός φλοιός, η μορφολογία του μαγνητικού πεδίου, η συμπεριφορά και ο χαρακτήρας των διαφόρων modes μέσα σε έναν μαγνητισμένο αστέρα νετρονίων με στερεό φλοιό είναι επίκαιρα ερωτήματα της σύγχρονης Αστροφυσικής και η μελέτη μας στοχεύει να δώσει εξηγήσεις σε ορισμένα από αυτά.

Στο τελευταίο κεφάλαιο περιγράψαμε τις προσπάθειές μας να μελετήσουμε ταλαντώσεις σε ρευστούς, ταχέως περιστρεφόμενους αστέρες νετρονίων με διδιάστατες αριθμητικές προσομοιώσεις. Οι προσομοιώσεις αυτές, γενικά, αντιμετώπισαν αριθμητικές αστάθειες· μόνο στην περίπτωση μη - περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων καταφέραμε να εξελίξουμε ευσταθώς και για μεγάλο χρονικό διάστημα τις αρχικές μας διαταραχές (Σχήματα 7.1 και 7.2).

Παράρτημα A'

Εξισώσεις της Ενότητας 3.1

Οι σχετικιστικές εξισώσεις (στην προσέγγιση Cowling) που περιγράφουν γραμμικές ταλαντώσεις του στερεού φλοιού βραδέως περιστρεφόμενων αστέρων νετρονίων είναι οι εξισώσεις (A1) - (A7) των Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis (2008) [9]:

$$\begin{aligned}
& - e^{2\varepsilon(\lambda-\nu)} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial t^2} + \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} c_s^2 r \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial r \partial t} \sin \theta \\
& + e^{-2\varepsilon\nu} \left((2 + \varepsilon c_s^2) \varpi + \varepsilon r \left(\frac{d\varpi}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) (1 + \varepsilon c_s^2) - \varepsilon \Gamma r \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta \\
& = \frac{\partial \chi}{\partial r} - \frac{A_r \Gamma p}{\rho + \varepsilon p} \alpha + \varepsilon c_s^2 \frac{d\nu}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} \\
& + \varepsilon \left(c_s^2 \left(\frac{d^2 \nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right) - (\Gamma - 1) \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 \right) \tilde{\xi}^r - \frac{\mu}{\rho + \varepsilon p} \\
& \times \left[\frac{1}{3} \frac{\partial \alpha}{\partial r} + 2\varepsilon \frac{d\lambda}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\alpha - \varepsilon \left(\frac{d\nu}{dr} + 3 \frac{d\lambda}{dr} \right) \tilde{\xi}^r \right) \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} + \frac{2}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} \right. \\
& + e^{2\varepsilon\lambda} \nabla^2 \tilde{\xi}^r - \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{1}{3} \frac{d^2 \nu}{dr^2} - \varepsilon \frac{d^2 \lambda}{dr^2} - \varepsilon \frac{4}{3} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} + \varepsilon \frac{4}{3r} \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{4}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) \tilde{\xi}^r \\
& - \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{2}{3r} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta} \\
& - \left(\frac{2 \cot \theta}{r^2} + \varepsilon \frac{2 \cot \theta}{3r} \frac{d\nu}{dr} \right) \tilde{\xi}^\theta - \left(\frac{2}{r^2 \sin \theta} + \varepsilon \frac{2}{3r \sin \theta} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi} \Big] \\
& + \frac{\varepsilon \mu}{\rho + \varepsilon p} e^{-2\varepsilon\nu} \left[\frac{2}{3} r \left(\frac{d\varpi}{dr} + \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} - \frac{d\nu}{dr} \right) \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta \right. \\
& \left. + \frac{11}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \sin \theta - \frac{1}{3} r \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial r \partial t} \sin \theta - 2e^{2\varepsilon\lambda} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial \phi \partial t} \right], \tag{A'.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-2\varepsilon\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial t^2} + \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} c_s^2 \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \theta \partial t} \sin \theta + e^{-2\varepsilon\nu} (2 + \varepsilon c_s^2) \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \cos \theta \\
& = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + \varepsilon c_s^2 \frac{d\nu}{dr} \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} - \frac{\mu}{\rho + \varepsilon p} \\
& \times \left[\frac{1}{3r} \frac{\partial \alpha}{\partial \theta} + \frac{e^{-2\varepsilon\lambda}}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial r} + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} - \frac{\tilde{\xi}^\theta}{r} \right) + \nabla^2 \tilde{\xi}^\theta + \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{2}{3r} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \theta} \right. \\
& - \left(e^{-2\varepsilon\lambda} \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{\xi}^\theta - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi} \Big] \\
& + \frac{\varepsilon \mu}{\rho + \varepsilon p} e^{-2\varepsilon\nu} \left[\frac{11}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial t} \cos \theta - \frac{1}{3} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \theta \partial t} \sin \theta - 2 \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial \phi \partial t} \right], \tag{A'.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^{-2\varepsilon\nu} \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial t^2} - \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} r \varpi \frac{\partial \chi}{\partial t} \sin \theta + \varepsilon e^{-2\varepsilon\nu} c_s^2 \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi \partial t} - e^{-2\varepsilon\nu} 2 \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial t} \cos \theta \\
& - e^{-2\varepsilon\nu} \left(2 \varpi + \varepsilon r \left(\frac{d\varpi}{dr} - 2 \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) + \varepsilon c_s^2 r \frac{d\nu}{dr} \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta \\
& = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} + \varepsilon c_s^2 \frac{d\nu}{dr} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} - \frac{\mu}{\rho + \varepsilon p} \\
& \times \left[\frac{1}{3r \sin \theta} \frac{\partial \alpha}{\partial \phi} + \frac{e^{-2\varepsilon\lambda}}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \left(\frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial r} + \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} - \frac{\tilde{\xi}^\phi}{r} \right) + \nabla^2 \tilde{\xi}^\phi \right. \\
& + \left(\frac{2}{r^2 \sin \theta} + \varepsilon \frac{2}{3r \sin \theta} \frac{d\nu}{dr} \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial \phi} \\
& - \left(e^{-2\varepsilon\lambda} \left(\frac{2}{r^2} + \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{\xi}^\phi + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \phi} \Big] \\
& + \frac{\varepsilon \mu}{\rho + \varepsilon p} e^{-2\varepsilon\nu} \left[-r \left(\frac{d\varpi}{dr} + \left(\frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} - \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{3} \frac{d\lambda}{dr} \right) \varpi \right) \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta - \frac{14}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial t} \sin \theta \right. \\
& - \left. \frac{13}{3} \varpi \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial t} \cos \theta - \frac{1}{3} r \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^r}{\partial r \partial t} \sin \theta - \frac{1}{3} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta \partial t} \sin \theta - \frac{8}{3} \varpi \frac{\partial^2 \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi \partial t} \right], \tag{A'.3}
\end{aligned}$$

όπου:

$$\chi := -\frac{\Gamma p}{\rho + \varepsilon p} \alpha - \frac{\tilde{\xi}^r}{\rho + \varepsilon p} \frac{dp}{dr} = -c_s^2 \alpha + \frac{d\nu}{dr} \tilde{\xi}^r, \quad (\text{A'.4})$$

$$\begin{aligned} \alpha &:= \nabla_i \xi^i = \frac{\partial \tilde{\xi}^r}{\partial r} + \left(\frac{2}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} + \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} \right) \tilde{\xi}^r \\ &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{\xi}^\theta}{\partial \theta} + \frac{\cot \theta}{r} \tilde{\xi}^\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{\xi}^\phi}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (\text{A'.5})$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 &:= \nabla_i \nabla^i = e^{-2\varepsilon\lambda} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} \right) \frac{\partial}{\partial r} \right] \\ &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \end{aligned} \quad (\text{A'.6})$$

$$c_s^2 := \frac{\Gamma p}{\rho + \varepsilon p}. \quad (\text{A'.7})$$

Στο Νευτώνειο όριο ($\varepsilon \rightarrow 0$ και $\varpi \rightarrow \Omega$) οι εξισώσεις αυτές ανάγονται στις εξισώσεις (35) - (39) του Strohmayer (1991) [6].

Στις παραπάνω εξισώσεις αντικαθιστούμε τις συνιστώσες του διανύσματος $\tilde{\xi}^i$ με τα αναπτύγματα (ακολουθούμε τους Lee & Strohmayer 1996, [7]):

$$\tilde{\xi}^i = (\tilde{\xi}^r, \tilde{\xi}^\theta, \tilde{\xi}^\phi) = r \sum_{\ell} \left[S_{\ell}, H_{\ell} \frac{\partial}{\partial \theta} + T_{\ell} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}, H_{\ell} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} - T_{\ell} \frac{\partial}{\partial \theta} \right] Y_{\ell m} e^{i\sigma t}. \quad (\text{A'.8})$$

Για τις διαταραχές της πίεσης και της πυκνότητας (που είναι βαθμωτά μεγέθη) έχουμε τα αναπτύγματα (βλέπε π.χ. [7]):

$$\delta p = \sum_{\ell} \delta p_{\ell} Y_{\ell m} e^{i\sigma t}, \quad (\text{A'.9})$$

$$\delta \rho = \sum_{\ell} \delta \rho_{\ell} Y_{\ell m} e^{i\sigma t}. \quad (\text{A'.10})$$

(Τα $S_{\ell}, H_{\ell}, T_{\ell}, \delta p_{\ell}$ και $\delta \rho_{\ell}$ είναι συναρτήσεις της ακτινικής συντεταγμένης r .) Χρησιμοποιούμε, επιπλέον, τη γνωστή ιδιότητα των σφαιρικών αρμονικών:

$$\frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_{\ell m}}{\partial \phi^2} = -\ell(\ell+1) Y_{\ell m}. \quad (\text{A'.11})$$

Μετά από μερικές πράξεις, οι Εξισώσεις (A'.1) - (A'.3) παίρνουν τις μορφές:

$$\sum_{\ell} \left\{ A_{\ell m}^{(1)} Y_{\ell m} + B_{\ell m}^{(1)} \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} + C_{\ell m}^{(1)} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \right\} = 0, \quad (\text{A'.12})$$

$$\sum_{\ell} \left\{ (\alpha_{\ell m} + \tilde{\alpha}_{\ell m} \cos \theta) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} - (\beta_{\ell m} + \tilde{\beta}_{\ell m} \cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} + \eta_{\ell m} \sin \theta Y_{\ell m} \right\} = 0, \quad (\text{A'.13})$$

$$\sum_{\ell} \left\{ (\beta_{\ell m} + \tilde{\beta}_{\ell m} \cos \theta) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} + (\alpha_{\ell m} + \tilde{\alpha}_{\ell m} \cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} + \zeta_{\ell m} \sin \theta Y_{\ell m} \right\} = 0, \quad (\text{A'.14})$$

όπου, για παράδειγμα:

$$\tilde{\alpha}_{\ell m} = -2ri\sigma T_{\ell} \varpi + 4\varepsilon v_s^2 ri\sigma T_{\ell} \varpi, \quad (\text{A'.15})$$

$$\begin{aligned} \beta_{\ell m} &= -r\sigma^2 T_{\ell} + \frac{7}{3}\varepsilon v_s^2 rm\sigma T_{\ell} \varpi - v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} r \frac{d^2 T_{\ell}}{dr^2} \\ &\quad - v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) r \frac{dT_{\ell}}{dr} + v_s^2 e^{2\varepsilon\nu} \frac{\Lambda - 2}{r} T_{\ell}, \end{aligned} \quad (\text{A'.16})$$

$$\eta_{\ell m} = \frac{\Lambda}{3}\varepsilon v_s^2 ri\sigma T_{\ell} \varpi, \quad (\text{A'.17})$$

και όπου $v_s^2 := \mu / (\rho + \varepsilon p)$ και $\Lambda := \ell(\ell+1)$. Τα $A_{\ell m}^{(1)}, B_{\ell m}^{(1)}, C_{\ell m}^{(1)}, \alpha_{\ell m}, \tilde{\beta}_{\ell m}, \zeta_{\ell m}$ είναι, από την άλλη, εκφράσεις των σφαιροειδών $S_{\ell}, H_{\ell}, \delta p_{\ell}, \delta \rho_{\ell}$. Στην Εξίσωση (A'.12) χρησιμοποιούμε την πρώτη από τις ακόλουθες δύο ιδιότητες των σφαιρικών αρμονικών:

$$\sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} = \ell J_{\ell+1 m} Y_{\ell+1 m} - (\ell+1) J_{\ell m} Y_{\ell-1 m}, \quad (\text{A'.18})$$

$$\cos \theta Y_{\ell m} = J_{\ell+1 m} Y_{\ell+1 m} + J_{\ell m} Y_{\ell-1 m}, \quad (\text{A'.19})$$

όπου:

$$J_{\ell m} := \sqrt{\frac{\ell^2 - m^2}{4\ell^2 - 1}} \quad \text{για } \ell \geq |m| \quad \text{και} \quad J_{\ell m} = 0 \quad \text{για } \ell < |m|. \quad (\text{A'.20})$$

Έχουμε λοιπόν:

$$\sum_{\ell} \left\{ A_{\ell m}^{(1)} Y_{\ell m} + B_{\ell m}^{(1)} [\ell J_{\ell+1 m} Y_{\ell+1 m} - (\ell+1) J_{\ell m} Y_{\ell-1 m}] + imC_{\ell m}^{(1)} Y_{\ell m} \right\} = 0, \quad (\text{A'.21})$$

ή, ισοδύναμα (αλλάζουμε τον αθροιστικό δείκτη):

$$\sum_{\ell} \left\{ \left[A_{\ell m}^{(1)} + B_{\ell-1 m}^{(1)} (\ell-1) J_{\ell m} - B_{\ell+1 m}^{(1)} (\ell+2) J_{\ell+1 m} + imC_{\ell m}^{(1)} \right] Y_{\ell m} \right\} = 0. \quad (\text{A'.22})$$

Έτσι, από την Εξίσωση (A'.12) παίρνουμε τελικά:

$$A_{\ell m}^{(1)} + imC_{\ell m}^{(1)} + J_{\ell m} (\ell-1) B_{\ell-1 m}^{(1)} - J_{\ell+1 m} (\ell+2) B_{\ell+1 m}^{(1)} = 0. \quad (\text{A'.23})$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε την παράσταση (βλέπε π.χ. [7]):

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta E\xi.(A'.13))}{\partial \theta} + \frac{\partial E\xi.(A'.14)}{\partial \phi} \right], \quad (A'.24)$$

η οποία δίνει την εξίσωση:

$$\sum_{\ell} \left\{ \ell(\ell+1) \alpha_{\ell m} Y_{\ell m} - (\tilde{\beta}_{\ell m} + \zeta_{\ell m}) \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \phi} \right. \\ \left. + (\tilde{\alpha}_{\ell m} - \eta_{\ell m}) \sin \theta \frac{\partial Y_{\ell m}}{\partial \theta} + [\ell(\ell+1) \tilde{\alpha}_{\ell m} - 2\eta_{\ell m}] \cos \theta Y_{\ell m} \right\} = 0. \quad (A'.25)$$

Χρησιμοποιούμε ξανά τις Ιδιότητες (A'.18) - (A'.19) των σφαιρικών αρμονικών στην Εξίσωση (A'.25) και αυτή γίνεται τελικά:

$$\ell(\ell+1) \alpha_{\ell m} - im \left(\tilde{\beta}_{\ell m} + \zeta_{\ell m} \right) + J_{\ell m} (\ell+1) [(\ell-1) \tilde{\alpha}_{\ell-1 m} - \eta_{\ell-1 m}] \\ + J_{\ell+1 m} \ell [(\ell+2) \tilde{\alpha}_{\ell+1 m} + \eta_{\ell+1 m}] = 0. \quad (A'.26)$$

Με όμοιο τρόπο, η παράσταση:

$$\frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\partial (\sin \theta E\xi.(A'.14))}{\partial \theta} - \frac{\partial E\xi.(A'.13)}{\partial \phi} \right], \quad (A'.27)$$

καταλήγει στην εξίσωση:

$$\ell(\ell+1) \beta_{\ell m} + im (\tilde{\alpha}_{\ell m} + \eta_{\ell m}) + J_{\ell m} (\ell+1) [(\ell-1) \tilde{\beta}_{\ell-1 m} - \zeta_{\ell-1 m}] \\ + J_{\ell+1 m} \ell [(\ell+2) \tilde{\beta}_{\ell+1 m} + \zeta_{\ell+1 m}] = 0. \quad (A'.28)$$

Στα επόμενα αγνοούμε τις $\ell \pm 1$ διορθώσεις στις Εξισώσεις (A'.23), (A'.26) και (A'.28).

Έτσι, για παράδειγμα, η απλοποιημένη μορφή της Εξίσωσης (A'.28):

$$\ell(\ell+1) \beta_{\ell m} + im (\tilde{\alpha}_{\ell m} + \eta_{\ell m}) = 0, \quad (A'.29)$$

με χρήση των Σχέσεων (A'.15), (A'.16) και (A'.17), δίνει (βλέπε Vavoulidis et al. 2007, Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [8, 9]):

$$-\sigma^2 T_{\ell} = v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \left[\frac{d^2 T_{\ell}}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT_{\ell}}{dr} - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda-2}{r^2} T_{\ell} \right] \\ - 2m\sigma\varpi \left[\frac{1}{\Lambda} + \varepsilon v_s^2 \left(1 - \frac{2}{\Lambda} \right) \right] T_{\ell}. \quad (A'.30)$$

Στη συνέχεια, αναπτύσσουμε τα σ και T (δεν δείχνουμε, πλέον, τον δείκτη ℓ) σε σειρές ως προς $\varepsilon (= \Omega/\Omega_K)$:

$$\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_j = \sigma_0 + \varepsilon \sigma_1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A'.31})$$

$$T = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j T^j = T^0 + \varepsilon T^1 + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{A'.32})$$

τα αντικαθιστούμε στη $\Sigma\chi\epsilon\sigma\eta$ (A'.30) και από τους μηδενικής - τάξης ($j = 0$) όρους παίρνουμε (βλέπε Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$-\sigma_0^2 T^0 = v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \left[\frac{d^2 T^0}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT^0}{dr} - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r^2} T^0 \right], \quad (\text{A'.33})$$

ενώ από τους πρώτης - τάξης ($j = 1$) όρους παίρνουμε (βλέπε [9]):

$$\begin{aligned} & -\sigma_0^2 T^1 - 2\sigma_0 \sigma_1 T^0 \\ &= v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \left[\frac{d^2 T^1}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT^1}{dr} - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r^2} T^1 \right] \\ & - 2m\sigma_0 \varpi \left[\frac{1}{\Lambda} + \varepsilon v_s^2 \left(1 - \frac{2}{\Lambda} \right) \right] T^0. \end{aligned} \quad (\text{A'.34})$$

Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις (βλέπε π.χ. Yoshida & Lee 2002, [4]):

$$z_5^j = T^j, \quad (\text{A'.35})$$

$$z_6^j = \alpha_1 e^{-2\varepsilon\lambda} r \frac{dT^j}{dr}, \quad (\text{A'.36})$$

για $j = 0, 1$ και γράφουμε τις παραπάνω Εξισώσεις (A'.33) και (A'.34) ως συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης - τάξης (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Για $j = 0$ έχουμε, λοιπόν, το σύστημα (βλέπε π.χ. Yoshida & Lee 2002, [4]):

$$r \frac{dz_5^0}{dr} = \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_6^0, \quad (\text{A'.37})$$

$$r \frac{dz_6^0}{dr} = - \{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \} z_5^0 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_6^0, \quad (\text{A'.38})$$

ενώ για $j = 1$ έχουμε το σύστημα (Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$r \frac{dz_5^1}{dr} = \frac{e^{2\varepsilon\lambda}}{\alpha_1} z_6^1, \quad (\text{A'.39})$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_6^1}{dr} = & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 - \alpha_1 (\ell - 1) (\ell + 2) \right\} z_5^1 - (3 + \varepsilon U_2 - V_2) z_6^1 \\ & + \left\{ 2c_1 \bar{\sigma}_0 V_1 \left[-\bar{\sigma}_1 + \frac{m \bar{\omega}}{\ell (\ell + 1)} \right] + \varepsilon \mathcal{G} \right\} z_5^0, \end{aligned} \quad (\text{A'.40})$$

με τις διάφορες συναρτήσεις α_1, c_1, V_1 κ.τ.λ. να δίνονται στο Κεφάλαιο 3 και συγκεκριμένα στην Ενότητα 3.1.1 (ή, βλέπε Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]).

Η διαδικασία είναι παρόμοια για τις σφαιροειδείς ταλαντώσεις: οι απλοποιημένες Εξισώσεις (A'.23) και (A'.26):

$$A_{\ell m}^{(1)} + imC_{\ell m}^{(1)} = 0, \quad (\text{A'.41})$$

$$\ell(\ell + 1) \alpha_{\ell m} - im \left(\tilde{\beta}_{\ell m} + \zeta_{\ell m} \right) = 0, \quad (\text{A'.42})$$

μάς δίνουν δύο δεύτερης - τάξης, πεπλεγμένες, συνήθεις διαφορικές εξισώσεις για τα S_ℓ και H_ℓ . Στη συνέχεια, τα S και H αναπτύσσονται σε σειρές (βλέπε π.χ. Σχέσεις A'.31, A'.32) και δίνουν δύο επιμέρους εξισώσεις, μία μηδενικής - τάξης ως προς ε ($j = 0$) και μία πρώτης - τάξης ως προς ε ($j = 1$). Ορίζοντας ξανά νέες συναρτήσεις:

$$z_1^j = S^j, \quad (\text{A'.43})$$

$$\begin{aligned} z_2^j = & 2\alpha_1 e^{-\varepsilon\lambda} \frac{d}{dr} \left(r e^{\varepsilon\lambda} S^j \right) \\ & + \left(\Gamma - \frac{2}{3}\alpha_1 \right) \left\{ \frac{e^{-\varepsilon\lambda}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^3 e^{\varepsilon\lambda} S^j \right) - \ell(\ell + 1) H^j \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A'.44})$$

$$z_3^j = H^j, \quad (\text{A'.45})$$

$$z_4^j = \alpha_1 \left(e^{-2\varepsilon\lambda} r \frac{dH^j}{dr} + S^j \right), \quad (\text{A'.46})$$

παιρνουμε ένα σύστημα μηδενικής - τάξης ($\beta\lambda\epsilon\pi\pi$ π.χ. Yoshida & Lee 2002, [4]):

$$r \frac{dz_1^0}{dr} = - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \epsilon U_2 \right) z_1^0 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^0 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^0, \quad (\text{A'.47})$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_2^0}{dr} = & \left\{ \left(-3 - \epsilon U_2 + U_1 - e^{2\epsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^0 \\ & + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^0 \\ & + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^0 + e^{2\epsilon\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^0, \end{aligned} \quad (\text{A'.48})$$

$$r \frac{dz_3^0}{dr} = -e^{2\epsilon\lambda} z_1^0 + \frac{e^{2\epsilon\lambda}}{\alpha_1} z_4^0, \quad (\text{A'.49})$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_4^0}{dr} = & - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^0 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^0 \\ & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^0 - (3 + \epsilon U_2 - V_2) z_4^0 \end{aligned} \quad (\text{A'.50})$$

και ένα σύστημα πρώτης - τάξης ($\beta\lambda\epsilon\pi\pi$ Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$r \frac{dz_1^1}{dr} = - \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} + \epsilon U_2 \right) z_1^1 + \frac{1}{\alpha_3} z_2^1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \ell (\ell + 1) z_3^1, \quad (\text{A'.51})$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_2^1}{dr} = & \left\{ \left(-3 - \epsilon U_2 + U_1 - e^{2\epsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0^2 \right) V_1 + 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (3\alpha_2 + 2\alpha_1) \right\} z_1^1 \\ & + \left(V_2 - 4 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_2^1 \\ & + \left\{ V_1 - 2\alpha_1 \left(1 + 2 \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right) \right\} \ell (\ell + 1) z_3^1 + e^{2\epsilon\lambda} \ell (\ell + 1) z_4^1 \\ & + \left\{ -2e^{2\epsilon\lambda} c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \epsilon \mathcal{A} \right\} z_1^0 + \{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1 + \epsilon \mathcal{B}\} z_3^0 + \epsilon \mathcal{C} z_4^0, \end{aligned} \quad (\text{A'.52})$$

$$r \frac{dz_3^1}{dr} = -e^{2\epsilon\lambda} z_1^1 + \frac{e^{2\epsilon\lambda}}{\alpha_1} z_4^1, \quad (\text{A'.53})$$

$$\begin{aligned} r \frac{dz_4^1}{dr} = & - \left(-V_1 + 6\Gamma \frac{\alpha_1}{\alpha_3} \right) z_1^1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3} z_2^1 \\ & - \left\{ c_1 \bar{\sigma}_0^2 V_1 + 2\alpha_1 - 2 \frac{\alpha_1}{\alpha_3} (\alpha_2 + \alpha_3) \ell (\ell + 1) \right\} z_3^1 - (3 + \epsilon U_2 - V_2) z_4^1 \\ & + \left\{ \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \epsilon \mathcal{D} \right\} z_1^0 + \epsilon \mathcal{E} z_2^0 \\ & + \left\{ -2c_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\sigma}_1 V_1 + \frac{2mc_1 \bar{\sigma}_0 \bar{\omega} V_1}{\ell (\ell + 1)} + \epsilon \mathcal{F} \right\} z_3^0. \end{aligned} \quad (\text{A'.54})$$

Παράρτημα B'

Απόδειξη της Σχέσης (5.6)

Στο Παράρτημα αυτό αποδεικνύουμε τη Σχέση (5.6) που δίνει τις πρώτης - τάξης σχετικιστικές διορθώσεις, C_1 , στις ιδιοσυχνότητες των torsional modes. Χρησιμοποιούμε μία μέθοδο που εφάρμοσαν οι Yoshida & Kojima (1997) [97] σε παρόμοιο μαθηματικό πρόβλημα.

Ξεκινούμε με την Εξίσωση (A'.34) του Παραρτήματος A' (βλέπε και Vavoulidis, Kokkotas & Stavridis 2008, [9]):

$$\begin{aligned} & - \sigma_0^2 T^1 - 2\sigma_0\sigma_1 T^0 \\ & = v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \left[\frac{d^2 T^1}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT^1}{dr} - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r^2} T^1 \right] \\ & - 2m\sigma_0\varpi \left[\frac{1}{\Lambda} + \varepsilon v_s^2 \left(1 - \frac{2}{\Lambda} \right) \right] T^0. \end{aligned} \quad (\text{B'.1})$$

Πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση αυτή με τη συζυγή συνάρτηση T^{0*} και ολοκληρώνουμε σε όλο τον όγκο του αστεριού. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} & - \int_0^R \sigma_0^2 T^1 T^{0*} dr - \int_0^R 2\sigma_0\sigma_1 T^0 T^{0*} dr \\ & = \int_0^R v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \left[\frac{d^2 T^1}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT^1}{dr} \right. \\ & \left. - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r^2} T^1 \right] T^{0*} dr - \int_0^R 2m\sigma_0\varpi \left[\frac{1}{\Lambda} + \varepsilon v_s^2 \left(1 - \frac{2}{\Lambda} \right) \right] T^0 T^{0*} dr. \end{aligned} \quad (\text{B'.2})$$

Αλλά, λόγω της ορθοκανονικότητας των ιδιοσυναρτήσεων, για τη μηδενικής - τάξης

ως προς το $\varepsilon = \Omega/\Omega_K$ Εξίσωση (A'.33), ισχύει:

$$\begin{aligned} - & \int_0^R \sigma_0^2 T^0 T^{0*} dr = \int_0^R \left\{ v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \right. \\ & \times \left. \left[\frac{d^2 T^0}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT^0}{dr} - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r^2} T^0 \right] \right\} T^{0*} dr, \end{aligned} \quad (\text{B'.3})$$

που συνεπάγεται:

$$\begin{aligned} - & \int_0^R \sigma_0^2 T^1 T^{0*} dr = \int_0^R \left\{ v_s^2 e^{2\varepsilon(\nu-\lambda)} \right. \\ & \times \left. \left[\frac{d^2 T^1}{dr^2} + \left(\frac{4}{r} + \varepsilon \frac{d\nu}{dr} - \varepsilon \frac{d\lambda}{dr} + \frac{1}{\mu} \frac{d\mu}{dr} \right) \frac{dT^1}{dr} - e^{2\varepsilon\lambda} \frac{\Lambda - 2}{r^2} T^1 \right] \right\} T^{0*} dr, \end{aligned} \quad (\text{B'.4})$$

αφήνοντας τη ζητούμενη ολοκληρωτική σχέση για το $C_1 := \sigma_1/m\Omega$ (αντικαθιστούμε την Εξίσωση B'.4 στην Εξίσωση B'.2):

$$C_1 = \frac{1}{\Omega} \frac{\int_0^R \varpi [1/\Lambda + \varepsilon v_s^2 (1 - 2/\Lambda)] (T^0)^2 dr}{\int_0^R (T^0)^2 dr}. \quad (\text{B'.5})$$

Μάλιστα, στο Νευτώνειο όριο ($\varepsilon \rightarrow 0, \varpi \rightarrow \Omega$), η σχέση αυτή γίνεται:

$$C_1 = \frac{1}{\Lambda} = \frac{1}{\ell(\ell+1)}, \quad (\text{B'.6})$$

δηλαδή ανάγεται στη γνωστή, Νευτώνεια σχέση του Strohmayer (1991) [6].

Βιβλιογραφία

- [1] Hansen C. J., Cioffi D. F.
Torsional oscillations in neutron star crusts
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **238**:740-742, 1980
- [2] McDermott P. N., Van Horn H. M., Hansen C. J.
Nonradial oscillations of neutron stars
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **325**:725-748, 1988
- [3] Schumaker B. L., Thorne K. S.
Torsional oscillations of neutron stars
Mon. Not. R. Astron. Soc. **203**, 457-489 (1983)
- [4] Yoshida S., Lee U.
Nonradial oscillations of neutron stars with a solid crust
Analysis in the relativistic Cowling approximation
Astronomy & Astrophysics **395**, 201-208 (2002)
- [5] Samuelsson L., Andersson N.
Neutron star asteroseismology.
Axial crust oscillations in the Cowling approximation
Mon. Not. R. Astron. Soc. **374**, 256-268 (2007)
- [6] Strohmayer T. E.
Oscillations of rotating neutron stars
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **372**:573-591, 1991

- [7] Lee U., Strohmayer T. E.
*Nonradial oscillations of rotating neutron stars:
the effects of the Coriolis force*
Astronomy & Astrophysics **311**, 155-171 (1996)
- [8] Vavoulidis M., Stavridis A., Kokkotas K. D., Beyer H.
Torsional oscillations of slowly rotating relativistic stars
Mon. Not. R. Astron. Soc. **377**, 1553-1556 (2007)
- [9] Vavoulidis M., Kokkotas K. D., Stavridis A.
Crustal oscillations of slowly rotating relativistic stars
Mon. Not. R. Astron. Soc. **384**, 1171-1184 (2008)
- [10] Carroll B. W. et al.
Oscillation spectra of neutron stars with strong magnetic fields
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **305**:767-783, 1986
- [11] Duncan R. C.
Global seismic oscillations in soft gamma repeaters
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **498**:L45-L49, 1998
- [12] Messios N., Papadopoulos D. B., Stergioulas N.
Torsional oscillations of magnetized relativistic stars
Mon. Not. R. Astron. Soc. **328**, 1161-1168 (2001)
- [13] Piro A. L.
Shear waves and giant - flare oscillations from soft gamma - ray repeaters
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **634**:L153-L156, 2005
- [14] Sotani H., Kokkotas K. D., Stergioulas N.
Torsional oscillations of relativistic stars with dipole magnetic fields
Mon. Not. R. Astron. Soc. **375**, 261-277 (2007)

[15] Boriakoff V.

Pulsar AP 2016+28: High - frequency periodicity in the pulse microstructure
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **208**:L43-L46, 1976

[16] Cordes J. M.

Correlation analyses of microstructure and noiselike intensity fluctuations from pulsar 2016+28
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **208**:944-954, 1976

[17] Ferguson D. C., Seiradakis J. H.

A detailed, high time resolution study of high frequency radio emission from PSR 1133+16
Astronomy & Astrophysics **64**, 27-42 (1978)

[18] Barat C. et al.

Fine time structure in the 1979 March 5 gamma ray burst
Astronomy & Astrophysics **126**, 400-402 (1983)

[19] Duncan R. C., Thompson C.

*Formation of very strongly magnetized neutron stars:
Implications for gamma - ray bursts*
THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **392**:L9-L13, 1992

[20] Thompson C., Duncan R. C.

*The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars -
I. Radiative mechanism for outbursts*
Mon. Not. R. Astron. Soc. **275**, 255-300 (1995)

[21] Woods P. M., Thompson C.

*Soft gamma repeaters and anomalous X - ray pulsars:
magnetar candidates*
in “Compact stellar X - ray sources” (2006)

[22] Kouveliotou C. et al.

An X - ray pulsar with a superstrong magnetic field

in the soft γ - ray repeater SGR 1806-20

Nature **393**, 235-237 (1998)

[23] Israel G. L. et al.

The discovery of rapid x - ray oscillations

in the tail of the SGR 1806-20 hyperflare

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **628**:L53-L56, 2005

[24] Strohmayer T. E., Watts A. L.

Discovery of fast x - ray oscillations

during the 1998 giant flare from SGR 1900+14

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **632**:L111-L114, 2005

[25] Watts A. L., Strohmayer T. E.

Detection with RHESSI of high - frequency x - ray oscillations

in the tail of the 2004 hyperflare from SGR 1806-20

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **637**:L117-L120, 2006

[26] Strohmayer T. E., Watts A. L.

The 2004 hyperflare from SGR 1806-20:

Further evidence for global torsional vibrations

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **653**:593-601, 2006

[27] Van Horn H. M.

Micropulses, drifting subpulses,

and nonradial oscillations of neutron stars

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **236**:899-903, 1980

[28] Mazets E. P. et al.

Observations of a flaring x - ray pulsar in Dorado

Nature **282**, 587-589 (1979)

[29] Hurley K. et al.

A giant periodic flare from the soft gamma - ray repeater SGR 1900+14
Nature **397**, 41-43 (1999)

[30] Terasawa T. et al.

*Repeated injections of energy in the first 600ms
of the giant flare of SGR 1806-20*
Nature **434**, 1110-1111 (2005)

[31] Watts A. L., Strohmayer T. E.

Neutron star oscillations and QPOs during magnetar flares
Advances in Space Research **40**:1446-1452 (2007)

[32] Watts A. L., Strohmayer T. E.

*High frequency oscillations during magnetar flares
Evidence for neutron star vibrations*
Astrophys Space Sci **308**:625-629 (2007)

[33] Levin Y.

*QPOs during magnetar flares
are not driven by mechanical normal modes of the crust*
Mon. Not. R. Astron. Soc. **368**, L35-L38 (2006)

[34] Glampedakis K., Samuelsson L., Andersson N.

*Elastic or magnetic? A toy model
for global magnetar oscillations
with implications for quasi - periodic oscillations during flares*
Mon. Not. R. Astron. Soc. **371**, L74-L77 (2006)

[35] Levin Y.

On the theory of magnetar QPOs
Mon. Not. R. Astron. Soc. **377**, 159-167 (2007)

- [36] Sotani H., Kokkotas K. D., Stergioulas N., Vavoulidis M.
Torsional oscillations of relativistic stars with dipole magnetic fields
II. Global Alfvén modes
 astro-ph/0611666
- [37] Sotani H., Kokkotas K. D., Stergioulas N.
Alfvén QPOs in magnetars
 astro-ph/0710.1113
- [38] Spyrou N.
The possibility of contracting collapsed stars
 Astronomy & Astrophysics **149**, 283-290 (1985)
- [39] Spyrou N.
Self - energy losses in the binary pulsar PSR 1913+16
 Astronomy & Astrophysics **174**, 355-356 (1987)
- [40] Spyrou N. K., Kokkotas K. D.
Gravitational radiation from pairs of realistic, nonaccreting compact stars
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **431**:254-263, 1994
- [41] Spyrou N. K., Stergioulas N.
Evolutionary self - energy - loss effects in compact binary systems
Importance of rapid rotation and of equation of state
 Astronomy & Astrophysics **366**, 598-604 (2001)
- [42] Press W. H., Teukolsky S. A.
On formation of close binaries by two - body tidal capture
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **213**:183-192, 1977
- [43] Alexander M. E.
Tidal resonances in binary star systems
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **227**, 843-861 (1987)

- [44] Kokkotas K. D., Schäfer G.
Tidal and tidal - resonant effects in coalescing binaries
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **275**, 301-308 (1995)
- [45] Ho W. C. G., Lai D.
Resonant tidal excitations of rotating neutron stars in coalescing binaries
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **308**, 153-166 (1999)
- [46] Flanagan É. É., Racine É.
*Gravitomagnetic resonant excitation of Rossby modes
in coalescing neutron star binaries*
 PHYSICAL REVIEW D **75**, 044001 (2007)
- [47] Hartle J. B.
Slowly rotating relativistic stars I. Equations of structure
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **150**:1005-1029, 1967
- [48] Carter B., Quintana H.
Foundations of general relativistic high - pressure elasticity theory
 Proc. R. Soc. Lond. A **331**, 57-83 (1972)
- [49] Quintana H.
The structure equations of a slowly rotating, fully relativistic solid star
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **207**:279-288, 1976
- [50] Stergioulas N., Friedman J. L.
*Comparing models of rapidly rotating relativistic stars
constructed by two numerical methods*
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **444**:306-311, 1995
- [51] Priou D.
*The perturbations of a fully general relativistic and rapidly rotating
neutron star I. Equations of motion for the solid crust*
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **254**, 435-452 (1992)

[52] Wasserman I., Shapiro S. L.

*Masses, radii, and magnetic fields of pulsating x - ray sources:
is the “standard” model self - consistent?*

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **265**:1036-1046, 1983

[53] Bonazzola S., Gourgoulhon E., Salgado M., Marck J. A.

*Axisymmetric rotating relativistic bodies:
a new numerical approach for “exact” solutions*

Astronomy & Astrophysics **278**, 421-443 (1993)

[54] Konno K., Obata T., Kojima Y.

Deformation of relativistic magnetized stars

Astronomy & Astrophysics **352**, 211-216 (1999)

[55] Tooper R. F.

General relativistic polytropic fluid spheres

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **140**:434-459, 1964

[56] Tooper R. F.

Adiabatic fluid spheres in general relativity

THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **142**:1541-1562, 1965

[57] Pandharipande V. R.

Hyperonic matter

Nuclear Physics **A178**, 123-144 (1971)

[58] Wiringa R. B., Fiks V., Fabrocini A.

Equation of state for dense nucleon matter

PHYSICAL REVIEW C **38**, 1010 (1988)

[59] Akmal A., Pandharipande V. R., Ravenhall D. G.

Equation of state of nucleon matter and neutron star structure

PHYSICAL REVIEW C **58**, 1804 (1998)

- [60] Pandharipande V. R., Smith R. A.
Nuclear matter calculations with mean scalar fields
 PHYSICS LETTERS B **59**, 15 (1975)
- [61] Douchin F., Haensel P.
A unified equation of state of dense matter and neutron star structure
 Astronomy & Astrophysics **380**, 151-167 (2001)
- [62] Negele J. W., Vautherin D.
Neutron star matter at sub - nuclear densities
 Nuclear Physics **A207**, 298-320 (1973)
- [63] Spyrou N. K., Stergioulas N.
Spin - down of relativistic stars with phase transitions and PSR J0537-6910
 Astronomy & Astrophysics **395**, 151-160 (2002)
- [64] Chandrasekhar S.
The post - Newtonian equations of hydrodynamics in general relativity
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **142**:1488-1512, 1965
- [65] Chandrasekhar S.
Conservation laws in general relativity and in the post - Newtonian approximations
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **158**:45-54, 1969
- [66] Chandrasekhar S.
Solutions of two problems in the theory of gravitational radiation
 PHYSICAL REVIEW LETTERS **24**, 611-615 (1970)
- [67] Friedman J. L., Schutz B. F.
Secular instability of rotating Newtonian stars
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **222**:281-296, 1978

- [68] Andersson N., Kokkotas K. D.
The r-mode instability in rotating neutron stars
 International Journal of Modern Physics D, Vol. 10, 381-441 (2001)
- [69] Stergioulas N.
Rotating stars in relativity
 Living reviews in relativity (2003)
- [70] Andersson N.
Gravitational waves from instabilities in relativistic stars
 Class. Quantum Grav. **20**, R105-R144 (2003)
- [71] Kokkotas K. D., Stergioulas N.
Gravitational waves from compact sources
 gr-qc/0506083
- [72] Stergioulas N., Friedman J. L.
Nonaxisymmetric neutral modes in rotating relativistic stars
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **492**:301-322, 1998
- [73] Morsink S. M., Stergioulas N., Blattnig S. R.
Quasi - normal modes of rotating relativistic stars:
Neutral modes for realistic equations of state
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **510**:854-861, 1999
- [74] Andersson N.
A new class of unstable modes of rotating relativistic stars
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **502**:708-713, 1998
- [75] Friedman J. L., Morsink S. M.
Axial instability of rotating relativistic stars
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **502**:714-720, 1998

- [76] Lindblom L., Owen B. J., Morsink S. M.
Gravitational radiation instability in hot young neutron stars
 PHYSICAL REVIEW LETTERS **80**, 4843-4846 (1998)
- [77] Andersson N., Kokkotas K., Schutz B. F.
Gravitational radiation limit on the spin of young neutron stars
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **510**:846-853, 1999
- [78] Kokkotas K. D., Stergioulas N.
Analytic description of the r-mode instability in uniform density stars
 Astronomy & Astrophysics **341**, 110-116 (1999)
- [79] Ruoff J., Stavridis A., Kokkotas K. D.
Evolution equations for the perturbations of slowly rotating relativistic stars
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **332**, 676-688 (2002)
- [80] Ruoff J., Stavridis A., Kokkotas K. D.
*Inertial modes of slowly rotating relativistic stars
 in the Cowling approximation*
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **339**, 1170-1182 (2003)
- [81] Clement M. J.
*Normal modes of oscillation for rotating stars
 I. The effect of rigid rotation on four low - order pulsations*
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **249**:746-760, 1981
- [82] Ipser J. R., Lindblom L.
The oscillations of rapidly rotating Newtonian stellar models
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **355**:226-240, 1990
- [83] Yoshida S., Eriguchi Y.
Quasi - radial modes of rotating stars in general relativity
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **322**, 389-396 (2001)

- [84] Font J. A., Dimmelmeier H., Gupta A., Stergioulas N.
*Axisymmetric modes of rotating relativistic stars
in the Cowling approximation*
Mon. Not. R. Astron. Soc. **325**, 1463-1470 (2001)
- [85] Font J. A. et al.
*Three - dimensional general relativistic hydrodynamics
II. Long - term dynamics of single relativistic stars*
PHYSICAL REVIEW D **65**, 084024 (2002)
- [86] Kokkotas K. D., Ruoff J., Andersson N.
W-mode instability of ultracompact relativistic stars
PHYSICAL REVIEW D **70**, 043003 (2004)
- [87] Friedman J. L.
Ergosphere instability
Commun. Math. Phys. **63**, 243-255 (1979)
- [88] Vavoulidis M.
Perturbations of rapidly rotating relativistic stars
in “Gravity, Astrophysics & Strings at the Black Sea” (2002)
- [89] Kokkotas K. D., Vavoulidis M.
Rotating relativistic stars: two problems
Journal of Physics: Conference Series **8**, 71-80 (2005)
- [90] Cowling T. G.
The non - radial oscillations of polytropic stars
Mon. Not. R. Astron. Soc. **101**, 367-375 (1941)
- [91] Regge T., Wheeler J. A.
Stability of a Schwarzschild singularity
PHYSICAL REVIEW **108**, 1063-1069 (1957)

- [92] Robe H.
Les oscillations non radiales des polytropes
 ANNALES D'ASTROPHYSIQUE, **t. 31**, 475-482, 1968
- [93] Papaloizou J., Pringle J. E.
Non - radial oscillations of rotating stars
and their relevance to the short - period oscillations of cataclysmic variables
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **182**, 423-442 (1978)
- [94] Kokkotas K. D., Schutz B. F.
W-modes - A new family of normal modes of pulsating relativistic stars
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **255**, 119-128 (1992)
- [95] Andersson N., Kokkotas K. D., Schutz B. F.
Space - time modes of relativistic stars
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **280**, 1230-1234 (1996)
- [96] Yoshida S., Lee U.
r-modes of neutron stars with a solid crust
 THE ASTROPHYSICAL JOURNAL, **546**:1121-1125, 2001
- [97] Yoshida S., Kojima Y.
Accuracy of the relativistic Cowling approximation in slowly rotating stars
 Mon. Not. R. Astron. Soc. **289**, 117-122 (1997)
- [98] Jaranowski P., Królak A.
Gravitational - wave data analysis.
Formalism and sample applications: the Gaussian case
 Living reviews in relativity (2005)
- [99] Jackson J. D.
Classical electrodynamics
 John Wiley & Sons (1962)

- [100] Fock V.
The theory of space, time and gravitation
 Pergamon Press (1964)
- [101] Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.
Gravitation
 W. H. Freeman and Company (1973)
- [102] Manchester R. N., Taylor J. H.
Pulsars
 W. H. Freeman and Company (1977)
- [103] Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H.
Nonradial oscillations of stars
 University of Tokyo Press (1979)
- [104] Shapiro S. L., Teukolsky S. A.
Black holes, white dwarfs and neutron stars
 John Wiley & Sons (1983)
- [105] Σπύρου Ν. Κ.
Αρχές αστρικής εξέλιξης
 Α. Π. Θ. (1995)
- [106] Glendenning N. K.
Compact stars
 Springer (1997)
- [107] Βλάχος Λ.
Φυσική πλάσματος
 Τζιόλας (2000)
- [108] Σταυρίδης Α.
Μη ακτινικές ταλαντώσεις βραδέως περιστρεφόμενων σχετικιστικών αστέρων
 Διδακτορική διατριβή (2004)

Bιογραφικό σημείωμα

Προσωπικά στοιχεία

- Όνοματεπώνυμο: Μιλτιάδης Βαβουλίδης
- Ημερομηνία γέννησης: 16 Φεβρουαρίου 1977
- Τόπος γέννησης: Δράμα, Ελλάδα

Τποψήφιος διδάκτωρ

- Διεύθυνση: Εργαστήριο Αστρονομίας, GR-54124, Θεσσαλονίκη, Ελλάδα
- Τηλέφωνο: +30 2310 99 8141
- Τηλεομοιότυπο: +30 2310 99 5384
- Ηλεκτρονικό ταχυδρομείο: miltos@astro.auth.gr
- Γλώσσες: Ελληνική (μητρική), Αγγλική (First Certificate)

Εκπαίδευση & Πτυχία

- 11.1999: Πτυχίο Φυσικής, Α.Π.Θ.

Προηγούμενες θέσεις

- 09.1994 - 11.1999: Α.Π.Θ., Προπτυχιακός φοιτητής
- 11.1999 - 09.2001: Α.Π.Θ., Μεταπτυχιακός φοιτητής
- 09.2001 - 12.2007: Α.Π.Θ., Τποψήφιος διδάκτωρ

Τποτροφίες & Βραβεία

- 09.1994: I.K.Y., Βραβείο Επίδοσης
- 09.2000: I.K.Y., Τποτροφία διάρκειας 3 ετών
- 11.2002: Ηράκλειτος, Τποτροφία διάρκειας 2.5 ετών

Εμπειρία διδασκαλίας

- 09.2002 - : Επικουρική διδασκαλία στο μεταπτυχιακό μάθημα Υπολογιστικά Μαθηματικά, Α.Π.Θ.
- 03.2003 - : Επικουρική διδασκαλία στο προπτυχιακό μάθημα Αριθμητική Ανάλυση, Α.Π.Θ.
- 04.2005: Έκθεση Αστρονομίας, Κέντρο Διάδοσης Επιστημών & Μουσείο Τεχνολογίας (ΝΟΗΣΙΣ)

Ομιλίες

- 06.2002: Διεθνές Συνέδριο “Gravity, Astrophysics & Strings in the Black Sea”, Kitten, Bulgaria
- 09.2007: 8ο Πανελλήνιο Αστρονομικό Συνέδριο, Θάσος, Ελλάδα

Δημοσιεύσεις

- “Torsional oscillations of slowly rotating relativistic stars”
MNRAS, 377, 1553-1556, (2007)
- “Crustal oscillations of slowly rotating relativistic stars”
MNRAS. 384, 1171-1184, (2008)
- “Torsional oscillations of relativistic stars with dipole magnetic fields
II. Global Alfvén modes”
astro-ph/0611666
- “Rotating relativistic stars: two problems”
Journal of Physics, Conference Series 8, 71-80, (2005)
- “Perturbations of rapidly rotating relativistic stars”
Proceedings of International Conference
“Gravity, Astrophysics & Strings in the Black Sea”, Kitten, Bulgaria

Short summary in English

In this Thesis, we study the dynamics of rotating relativistic stars. We are mainly interested in the dynamics of slowly rotating stars with crusts and rapidly rotating fluid stars. We also study the dynamics of non - rotating strongly magnetized stars with crusts. After stressing the importance of our studies in modern Astrophysics (Chapter 1) we describe rotating or / and magnetized relativistic stars in equilibrium (Chapter 2). We first try to describe them with methods that involve multipole expansions. Later on, we show that two - dimensional methods are preferable. Then, we study small - amplitude pulsations of such stars. We first derive the relevant general - relativistic equations (Chapter 3). We focus on the dynamics of the fluid (we work in the Cowling approximation) and then on that of the spacetime (Inverse Cowling approximation). Subsequently, we solve these equations to obtain numerical results (Chapters 4, 5, 6 and 7). First, we present results for non - rotating neutron stars, then we move on to slowly rotating stars and finally we examine non - rotating magnetized stars with crusts.

Neutron stars with crusts are met in many astrophysical cases. For example, phenomena involving rotating neutron stars with crusts and magnetic fields are the radio - emission of pulsars and the X - ray emission of magnetars. In the physical scenario underlying these phenomena, the magnetic field lines are frozen into the crust regions and any magnetic - field perturbations induce elastic perturbations in the stellar crusts. Inversely, elastic perturbations in neutron star crusts shake the magnetic field lines and modify the lightcurves of such objects.

Rotating relativistic stars are also potential sources of gravitational radiation. It was found by Chandrasekhar, Friedman and Schutz that neutron stars could be unstable to the emission of gravitational radiation, if rotating quite rapidly. Their instability could grow high and limit their rotational periods considerably, emitting, at the same time, copious amounts of gravitational radiation. On the other hand, the description of equilibrium configurations and dynamics of rapidly rotating stars is a difficult task as it demands two - dimensional numerical techniques.

In Chapter 2 we describe how neutron star models are being constructed. We start with the easiest construction, that of a static, spherically symmetric star. We continue by describing the structure equations of a slowly rotating relativistic star. We, first, keep only linear terms in Ω (the angular velocity of the star) and construct slowly rotating - but spherically symmetric - stars. Then, we derive the structure equations in second order in Ω and we see that the crust now enters into the structure equations and plays an active role in the deformation of the star. An alternative, two - dimensional construction is then presented. Finally, we show how magnetized neutron stars are being constructed.

In Chapter 3 we consider small - amplitude pulsations of these stars. We work in the framework of General Relativity but we also adopt the Cowling approximation. We focus on pulsations of slowly rotating relativistic stars with crusts, magnetized relativistic stars with crusts and rapidly rotating fluid relativistic stars. In the case of relativistic stars with crusts, we solve eigenvalue problems while, in the case of rapidly rotating fluid stars, we work with two - dimensional evolution equations. These equations do not come straightforward; we work on Einstein equations and on the equations of the fluid in order to bring them in a good form for their numerical solution.

We present our results in Chapters 4, 5, 6 and 7. In the first one, we study pulsation modes of non - rotating, non - magnetic neutron stars with crusts. We calculate many spheroidal and toroidal modes for polytropic and for realistic neutron star models. In the next two chapters, we evaluate the effects of rotation and magnetic fields, respectively, on these modes. We compare with previous Newtonian treatments and we quantify the relativistic corrections. In the last one, we attempt to calculate modes with two - dimensional numerical evolutions but we find ourselves successful only in the case of non - rotating stars. For rotating stars, numerical instabilities take place and do not allow us to extract useful physical conclusions.