

=1cm

Ανιχνεύοντας τον αριθμό των επιπλέον χωρικών διαστάσεων στο φάσμα ακτινοβολίας των μελανών οπών

Παναγιώτα Καντή

(Ευρωπαϊκό Κέντρο Πυρηνικών Ερευνών – CERN
Πανεπιστήμιο Οξφόρδης)

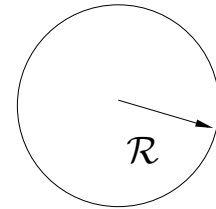
Δομή της ομιλίας :

1. Εισαγωγή
2. Εκπομπή ακτινοβολίας **Hawking** από μία $(4 + n)$ Δ Μελανή Οπή σε μεμβράνη
 - Βαθμωτά πεδία, φερμιόνια και μποζονικά πεδία βαθμίδας
 - Σχετικοί Ρυθμοί Εκπομπής
3. Εκπομπή ακτινοβολίας **Hawking** από μία $(4 + n)$ Δ Μελανή Οπή στον επιπλέον χώρο
4. Συμπεράσματα

Σε συνεργασία με τον **John March-Russell** (Oxford) **PRD '02, '03**
και τον **Chris M. Harris** (Cambridge) **JHEP '03**

Εισαγωγή

- Επιπλέον χωρικές διαστάσεις: Μια ιδέα που προτάθηκε από τους **Kaluza & Klein** (1921/1926) σύμφωνα με την οποία, εκτός των συνηθισμένων 3 χωρικών διαστάσεων, υπάρχουν περισσότερες που δεν μπορούν να ανιχνευθούν λόγω του πολύ μικρού μεγέθους τους \mathcal{R}



- Οι Θεωρίες Υπερχορδών (1975-90):

Θεωρίες Υπερχορδών
στις 10 Διαστάσεις
με $\mathcal{R} = l_P = 10^{-33}$ cm



Βαρυτική Θεωρία του **Einstein**
στις 4 Διαστάσεις με έξτρα όρους
από τις επιπλέον διαστάσεις

Που οδηγούν σε ...

- (i) Νέες Λύσεις Μελανών Οπών: Με πλουσιότερη δομή και χαρακτηριστικά από τις αντίστοιχες της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας

Π. Κ. & Κ. Ταμβάκης, PRD '95, PLB '97;

Π. Κ., Ν. Μαυρόματος, Ι. Ρίζος, Ε. Winstanley & Κ. Ταμβάκης, PRD '96, '98;

Π. Κ. & Ε. Winstanley, PRD '00;

- (ii) Νέες Κοσμολογικές λύσεις: Απαλλαγμένες από Αρχικές (Big-Bang) ή Τελικές (Big-Crunch) Ανωμαλίες ή με Κλειστές Χρονικές Τροχιές

Π. Κ., Ι. Ρίζος & Κ. Ταμβάκης, PRD '99; Π. Κ. & Κ. Βαγιονάκης, PRD '99

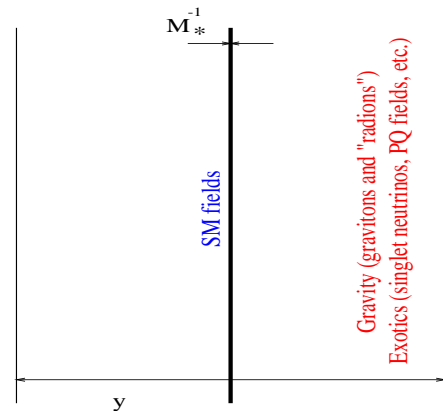
Εισαγωγή

- Οι Νέες Θεωρίες με Επιπλέον Χωρικές Διαστάσεις (1998): Υποθέτουν την ύπαρξη τέτοιων διαστάσεων με μέγεθος μεγαλύτερο (ή πολύ μεγαλύτερο) από το μήκος του **Planck**, l_P (Horava & Witten; Arkani-Hamed, Dimopoulos & Dvali; Antoniadis & ADD; Randall & Sundrum)

Κίνητρο: Να δοθεί εξήγηση στο πρόβλημα της ιεραρχίας: $\frac{M_P}{M_{EW}} \sim 10^{16}$

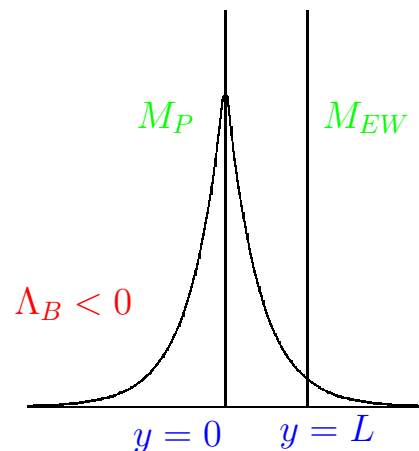
- Θεωρίες με Μεγάλες Επιπλέον Διαστάσεις: $l_P \leq \mathcal{R} \leq 1 \text{ mm}$

- Μια 4Δ Μembrάνη με όλα τα πεδία του Standard Model και ενεργειακή κλίμακα για την βαρύτητα $M_P = 10^{19} \text{ GeV}$
- Ένα $(4 + n)\Delta$ 'Εξτρα Χώρο' (**Bulk**) με βαρυτόνια και ενεργειακή κλίμακα για την βαρύτητα $M_{EW} = 10^3 \text{ GeV}$
- Προκύπτει ότι: $M_P^2 \simeq \mathcal{R}^n M_{EW}^{2+n}$



- Θεωρίες με 'Καμπυλωμένες' Επιπλέον Διαστάσεις: $l_P \leq \mathcal{R} \leq \infty$

- Δύο Μembrάνες είναι απαραίτητες
- Ο 'Εξτρα χώρος είναι γεμάτος με μία αρνητική κοσμολογική σταθερά Λ_B
- Ο χωρόχρονος είναι καμπυλωμένος
- Ισχύει ότι: $M_P = e^{kL} M_{EW}$



Εισαγωγή

- Θεωρίες με Μεγάλες Επιπλέον Διαστάσεις: Πώς μπορούν να συνδυαστούν με την ιδέα των Μελανών Οπών;
- Λύσεις Μελανών Οπών: Κατά τη διάρκεια της βαρυτικής κατάρρευσης ύλης επάνω στη μεμβράνη, αναμένουμε και πάλι τον σχηματισμό μιας μελανής οπής

Στις 4 διαστάσεις, οι Μελανές Οπές εμφανίζονται στην φύση με μια μεγάλη ποικιλία οριζόντων: $r_H = (10^{14} - 10^{-33}) \text{ cm}$



Εάν επιπλέον διαστάσεις με $\mathcal{R} \gg l_P$ υπάρχουν,



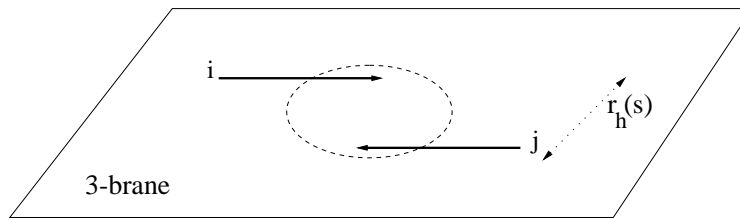
- Μεγάλες μελανές οπές με $r_H \gg \mathcal{R}$ είναι 4Δ αντικείμενα
- Μικρές μελανές οπές με $r_H \ll \mathcal{R}$ είναι $(4+n)-\Delta$ αντικείμενα

- Δημιουργία Μελανών Οπών: Οι μελανές οπές δημιουργούνται από τη βαρυτική κατάρρευση ύλης
 - στο αρχέγονο σύμπαν: διαταραχές στην πυκνότητα ενέργειας
 - στο σημερινό σύμπαν: σκέδαση σωματιδίων υψηλής ενέργειας στους επιταχυντές και την ατμόσφαιρα της γης
(Banks & Fischler; Giddings & Thomas; Dimopoulos & Landsberg)

Εισαγωγή

- Σημαντική Διαφορά: Μια μελανή οπή μπορεί να μελετηθεί κλασικά εάν η μάζα της είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του **Planck**

- στις 4 Διαστάσεις: $M_{BH} > M_P \simeq 10^{19}$ GeV
- στις $4 + n$ Διαστάσεις: $M_{BH} > M_* \geq 1$ TeV



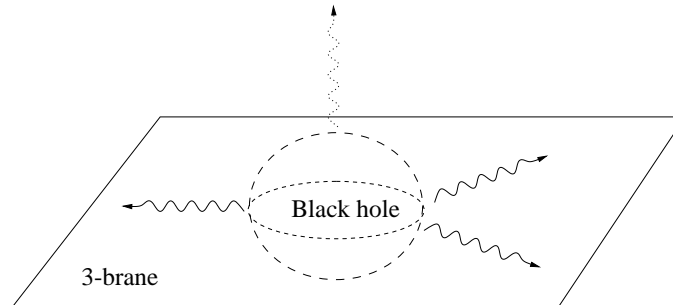
Εάν $b < r_H$, για την ενέργεια κέντρου μάζας \sqrt{s} των σωματιδίων, τότε θα δημιουργηθεί μια μελανή οπή με μάζα $M = (0.58 - 0.84) \sqrt{s}$
(Penrose; D'Eath & Payne; Thorne; Eardley & Giddings; Yoshino & Nambu)

- Φάσεις της ζωής μιας μελανής οπής: Ένα αρχικά μη συμμετρικό, περιστρεφόμενο αντικείμενο που εξελίσσεται: (Giddings & Thomas)

- **Φάση απογύμνωσης:** απόρριψη όλων των επιπλέον χωρικών αριθμών (M, Q, A) – ‘αόρατη ενέργεια’ (15% της συνολικής ενέργειας)
- **Spin-down φάση:** Απώλεια στροφορμής – ‘ορατή ενέργεια’ (25% της συνολικής ενέργειας)
- **Φάση Schwarzschild:** Ακτινοβολία **Hawking** – ‘ορατή ενέργεια’ (60% της συνολικής ενέργειας)
- **Φάση Planck:** Αρχίζει όταν $M_{BH} \simeq M_*$ – λίγα χβάντα υψηλής ενέργειας

Εισαγωγή

- Η φάση Schwarzschild: μια σφαιρικά συμμετρική $(4 + n)$ -διάστατη μελανή οπή



με μετρικό τανυστή (Myers & Perry)

$$ds^2 = - - \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{n+1} \right] dt^2 + \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{n+1} \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{2+n}^2$$

όπου

$$d\Omega_{2+n}^2 = d\theta_{n+1}^2 + \sin^2 \theta_{n+1} \left(d\theta_n^2 + \sin^2 \theta_n \left(\dots + \sin^2 \theta_2 \left(d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\varphi^2 \right) \dots \right) \right)$$

- Ακτίνα Ορίζοντα:

$$r_H = \frac{1}{\sqrt{\pi} M_*} \left(\frac{M}{M_*} \right)^{\frac{1}{n+1}} \left(\frac{8\Gamma(\frac{n+3}{2})}{n+2} \right)^{1/(n+1)}$$

- Θερμοκρασία:

$$T_{BH} = \frac{(n+1)}{4\pi r_H}$$

Εισαγωγή

• Ακτινοβολία Hawking: Δημιουργία ζεύγους σωματιδίων έξω από τον ορίζοντα – το αντισωματίδιο πέφτει στη ΜΟ, το σωματίδιο διαφεύγει

Πάντα; Όχι ακριβώς... Εάν θεωρήσουμε ένα βαθμωτό σωματίδιο της μορφής:

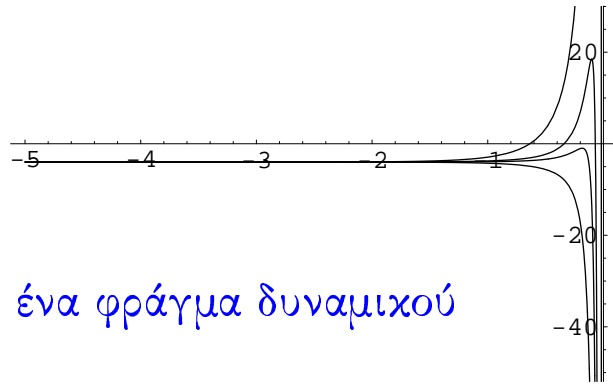
$$\phi(t, r, \theta_i, \varphi) = e^{-i\omega t} R_{\omega\ell}(r) \tilde{Y}_\ell(\Omega)$$

τότε,

$$\left(-\frac{d^2}{dy^2} + r^{2n+4} \left[-\omega^2 + \frac{\ell(\ell+n+1)h(r)}{r^2} \right] \right) R(y) = 0$$

όπου $y \propto \ln h(r)$ είναι η “tortoise” συντεταγμένη με

$$h(r) = 1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{n+1}$$



Άρα, στην περιοχή $r > r_H$, υπάρχει ένα φράγμα δυναμικού εξαρτώμενο από τα (ω, ℓ, n)

Αυτό που τελικά παρατηρούμε είναι ένα φάσμα ακτινοβολίας ενός σχεδόν μέλανος σώματος με ρυθμό εκπομπής

$$\frac{dE(\omega)}{dt} = \sum_{\ell} \frac{\sigma_{\ell}(\omega) \omega}{(\exp(\omega/T_{BH}) \mp 1)} \frac{d^{n+3}k}{(2\pi)^{n+3}}$$

όπου $\sigma_{\ell}(\omega)$ είναι ο συντελεστής γκρίζου σώματος ...

Εισαγωγή

... ή αλλιώς, η ενεργός διατομή διέλευσης: (Gubser, Klebanov & Tseytlin)

$$\sigma_\ell(\omega) = \frac{2^n \pi^{(n+1)/2} \Gamma[(n+1)/2]}{n! \omega^{n+2}} \frac{(2\ell + n + 1) (\ell + n)!}{\ell!} |\mathcal{A}_\ell|^2$$

\mathcal{A}_ℓ : συντελεστής διέλευσης του σωματιδίου για το παραπάνω υπόβαθρο

- Σωματίδια στον Έξτρα Χώρο: Βαθμωτά Σωματίδια, Βαρυτόνια (;)
- Σωματίδια στη Μembrάνη: Βαθμωτά Σωματίδια και Βαρυτόνια (βασικής κατάστασης), Φερμιόνια και Μποζόνια Βαθμίδας (✓)

Τα σωματίδια στη μεμβράνη ζουν σε ένα 4Δ υπόβαθρο - προβολή του $(4+n)$ -διάστατου χώρου επάνω στη μεμβράνη: $\theta_i = \pi/2$ για $i \geq 2$

$$ds_4^2 = - \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{n+1} \right] dt^2 + \left[1 - \left(\frac{r_H}{r} \right)^{n+1} \right]^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Στις 4 διαστάσεις, ο συντελεστής γκρίζου σώματος παίρνει την απλή μορφή

$$\hat{\sigma}_\ell(\omega) = \frac{\pi}{\omega^2} (2\ell + 1) |\hat{\mathcal{A}}_\ell|^2$$

Ο $\hat{\mathcal{A}}_\ell$ εξαρτάται από τον αριθμό n των επιπλέον διαστάσεων που προβάλλονται επάνω στη μεμβράνη

Ακτινοβολία Hawking από ΜΟ σε μεμβράνη

- ‘Ορατή Ακτινοβολία’: Βαθμωτά ($s = 0$), Φερμιονικά ($s = 1/2$) και μποζονικά πεδία Βαθμίδας ($s = 1$)
- Γενική (Master) Εξίσωση: Ακολουθώντας την μέθοδο Newman-Penrose, υποθέτουμε ότι:

$$\Psi_s = e^{-i\omega t} e^{im\varphi} \Delta^{-s} P_s(r) S_{s,j}^m(\theta)$$

όπου $Y_{s,j}^m = e^{im\varphi} S_{s,j}^m(\theta)$ είναι οι spin-weighted σφαιρικές αρμονικές συναρτήσεις, και j ο κβαντικός αριθμός της ολικής στροφορμής

Η γενική εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου με σπιν s στον καμπύλο 4Δ χωρόχρονο της μεμβράνης μπορεί να γραφεί (Harris & Π. Κ.)

$$\Delta^s \frac{d}{dr} \left(\Delta^{1-s} \frac{dP_s}{dr} \right) + \left[\frac{\omega^2 r^2}{h} + 2i\omega sr - \frac{is\omega r^2 h'}{h} - \Lambda_{sj} \right] P_s(r) = 0$$

όπου $\Delta = hr^2$ και $\Lambda_{sj} = j(j+1) - s(s-1)$.

Η ακτινική αυτή εξίσωση είναι δύσκολο να λυθεί αναλυτικά \Rightarrow ακολουθούμε μια προσεγγιστική μέθοδο: (Π. Κ. & March-Russell)

- βρίσκουμε τη λύση Κοντά στον Ορίζοντα ($r \simeq r_H$)
- βρίσκουμε τη λύση Μακριά από τον Ορίζοντα ($r \gg r_H$)
- ενώνουμε τις δύο λύσεις με συνεχή τρόπο στην ενδιάμεση περιοχή

Ακτινοβολία Hawking από ΜΟ σε μεμβράνη

- Κοντά στον Ορίζοντα: Αλλαγή μεταβλητής $r \rightarrow h(r)$, και:
- Συνοριακή Συνθήκη: σε $r \simeq r_H$, μόνο εισερχόμενες καταστάσεις

↓

$$P_K(h) = A_h h^\alpha (1-h)^\beta F(a, b, c; h) \simeq A_h e^{-i\omega y}$$

όπου $a = \alpha + \beta + \frac{s+n(1-s)}{(n+1)}$, $b = \alpha + \beta$, και $c = 1 - s + 2\alpha$, με

$$\alpha = -\frac{i\omega r_H}{n+1}, \quad \beta = \frac{1}{2(n+1)} \left[1 - 2s - \sqrt{(1+2j)^2 - 4\omega^2 r_H^2 - 8is\omega r_H} \right]$$

- Μακριά από τον Ορίζοντα: Θέτουμε $r \gg r_H$ ή $h \simeq 1$, και παίρνουμε μια **confluent** υπεργεωμετρική εξίσωση με λύση

$$P_M(r) = e^{-i\omega r} r^{j+s} \left[B_+ M(j-s+1, 2j+2, 2i\omega r) + B_- U(j-s+1, 2j+2, 2i\omega r) \right]$$

όπου M και U οι συναρτήσεις **Kummer**. Στο άπειρο:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} P_M(r) \longrightarrow A_\infty^{(in)} \frac{e^{-i\omega r}}{r^{1-2s}} + A_\infty^{(out)} \frac{e^{i\omega r}}{r} + \dots$$

Ακτινοβολία Hawking από μία $(4 + n)$ ΜΟ

Οι δύο ασυμπτωτικές λύσεις δείχνουν διαφορετικές αλλά ...

- Η ένωση των δύο λύσεων: Αναπτύσσουμε τη λύση KO στο όριο $r \gg r_H$, αναπτύσσουμε τη λύση MO στο όριο $\omega r \ll 1$, και:

$$P_K(r) \simeq C_1 r^j + C_2 r^{-(j+1)}, \quad P_M(r) \simeq \tilde{C}_1 r^j + \tilde{C}_2 r^{-(j+1)}$$

Η ταύτιση των αντίστοιχων συντελεστών προσδιορίζει τους λόγους:

$$\frac{B_+}{A_h} = \frac{1}{r_H^{j+s}} \frac{\Gamma(1-s+2\alpha) \Gamma(-2\beta + \frac{1-2s}{n+1})}{\Gamma(\alpha - \beta + 1 - s) \Gamma(\alpha - \beta + \frac{1-2s}{n+1})}$$

$$\frac{B_-}{A_h} = \frac{r_H^{j-s+1} (2i\omega)^{2j+1} \Gamma(1-s+2\alpha) \Gamma(2\beta - \frac{1-2s}{n+1}) \Gamma(j-s+1)}{\Gamma(\alpha + \beta) \Gamma(\alpha + \beta + \frac{s+n(1-s)}{n+1}) \Gamma(2j+1)}$$

- Συντελεστής Διέλευσης: Ορίζεται ως:

$$|\mathcal{A}_j|^2 = \frac{\text{ingoing energy flux at horizon}}{\text{ingoing energy flux at infinity}}$$

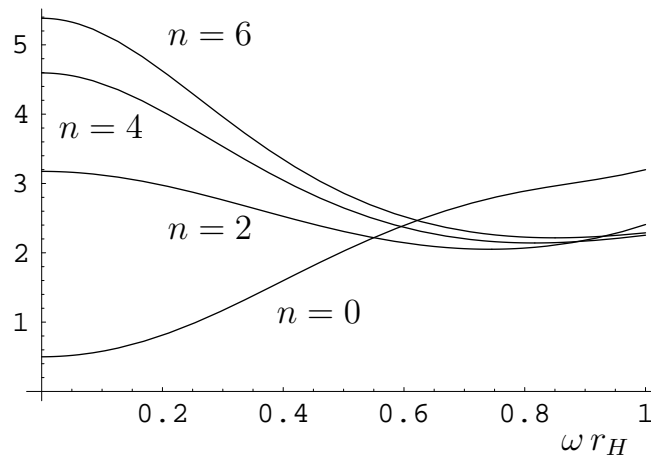
και εκφράζεται συναρτήσει των λόγων B_{\pm}/A_h

Ακτινοβολία Hawking από ΜΟ σε μεμβράνη

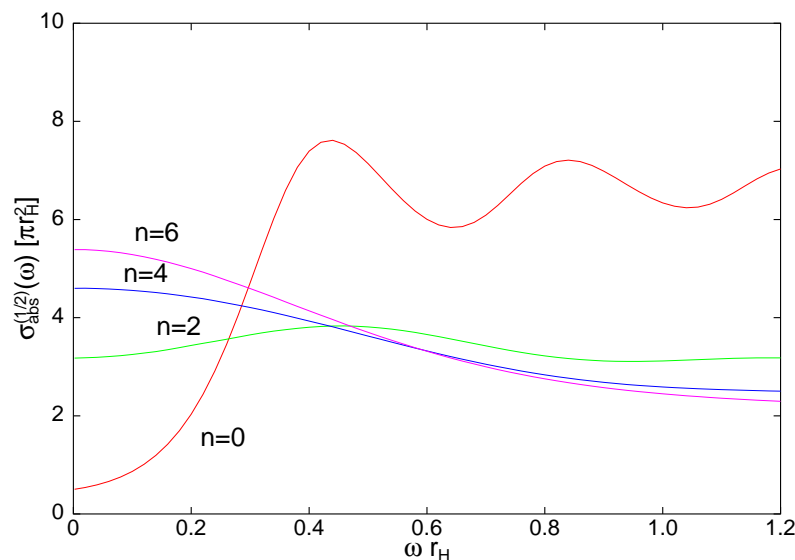
- Οι αναλυτικές εκφράσεις ισχύουν μόνο για χαμηλές και ενδιάμεσες ενέργειες – στην ένωση των λύσεων υποθέσαμε ότι $\omega r_H \ll 1$

Π. χ. για τα φερμιόνια βρίσκουμε ότι ο $\sigma_\ell(\omega)$ έχει την μορφή

$$\sigma_{\text{abs}}^{(1/2)}(\omega) [\pi r_H^2]$$

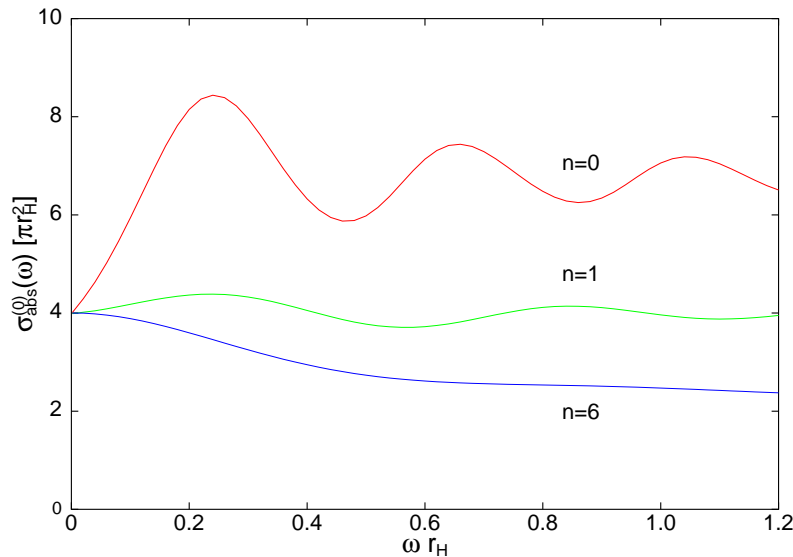


- Για αποτελέσματα που ισχύουν σε όλες τις ενεργειακές κλίμακες, χρησιμοποιούμε αριθμητική ανάλυση (Harris & Π. Κ.)

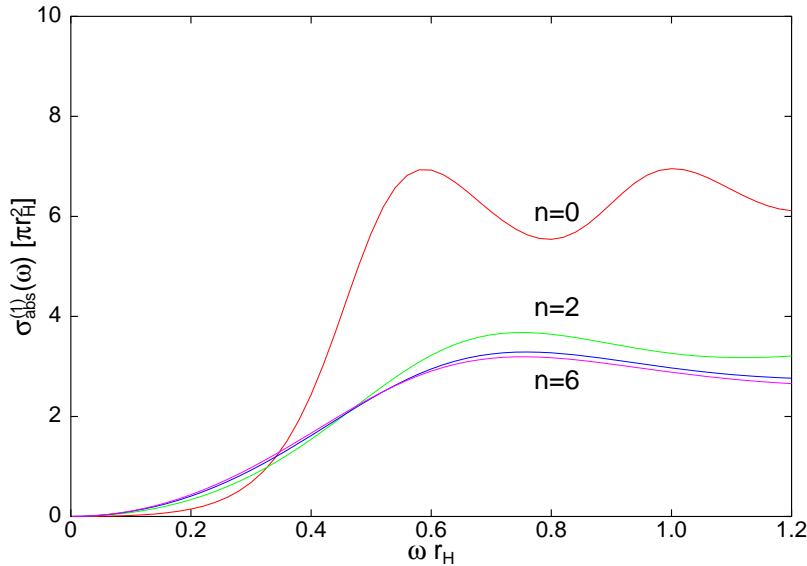


Ακτινοβολία Hawking από ΜΟ σε μεμβράνη

- Με τον ίδιο τρόπο, για τα βαθμωτά σωματίδια, βρίσκουμε:



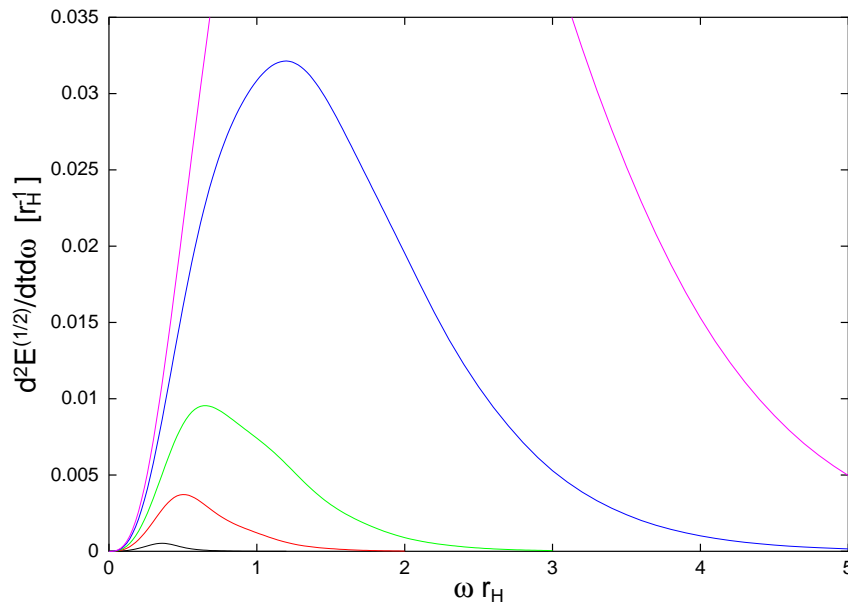
- ... και για τα μποζόνια βαθμίδας:



- Διαφορετική συμπεριφορά στις χαμηλές ενέργειες, ίδια συμπεριφορά στις υψηλές ενέργειες: $\hat{\sigma} \rightarrow \pi r_c^2(n)$ (Sanchez; Emparan, Horowitz & Myers)

Ακτινοβολία Hawking από ΜΟ σε μεμβράνη

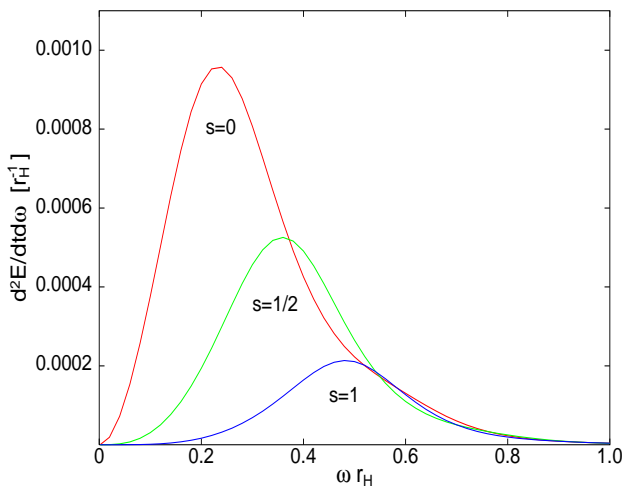
- Ρυθμός Εκπομπής Ακτινοβολίας: Η αριθμητική ανάλυση μας δίνει:



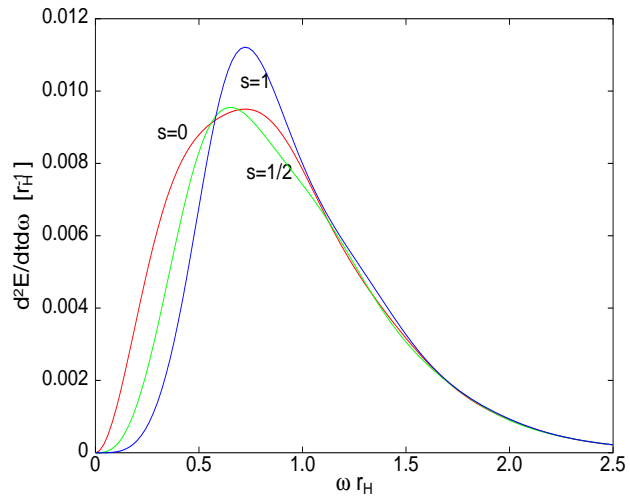
- Ο ρυθμός εκπομπής ακτινοβολίας ενισχύεται όσο το n αυξάνεται – λόγω της αύξησης της θερμοκρασίας T_{BH}
- Τόσο το ύψος όσο και το πλάτος των καμπυλών αυξάνεται καθώς το n μεγαλώνει
- Παρατηρείται μια μετατόπιση τύπου **Wien** της κορυφής της κάθε καμπύλης προς μεγαλύτερες τιμές ενέργειας
- Το ποσό της ακτινοβολούμενης ενέργειας αποτελεί συνάρτηση του αριθμού των επιπλέον χωρικών διαστάσεων που υπάρχουν στην φύση

Ακτινοβολία Hawking από ΜΟ σε μεμβράνη

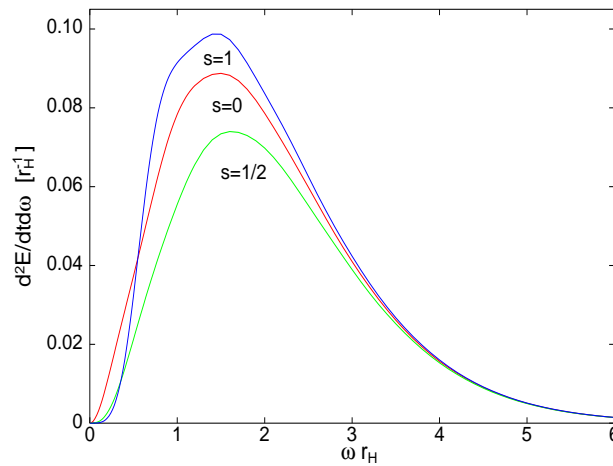
- Σχετικοί Ρυθμοί Εκπομπής: Πώς αλλάζουν με το n ; (Harris & Π. Κ.)



$(n = 0)$ 1 : 0.55 : 0.23



$(n = 2)$ 1 : 0.91 : 0.91



$(n = 6)$ 1 : 0.84 : 1.06

- Και το είδος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας εξαρτάται από το n

Ακτινοβολία Hawking στον $(4 + n)$ Χώρο

- Εκπομπή Βαθμωτών σωματιδίων: Η απλούστερη περίπτωση.

Υποθέτουμε και πάλι ότι: $\phi(t, r, \theta_i, \varphi) = e^{-i\omega t} R_{\omega\ell}(r) \tilde{Y}_\ell(\Omega)$ και παίρνουμε:

$$\frac{h(r)}{r^{n+2}} \frac{d}{dr} \left[h(r) r^{n+2} \frac{dR}{dr} \right] + \left[\omega^2 - \frac{h(r)}{r^2} \ell(\ell + n + 1) \right] R = 0$$

Για την εύρεση αναλυτικής λύσης, ακολουθούμε την ίδια προσεγγιστική μέθοδο

- Κοντά στον Ορίζοντα: $R_K(h) = A_- h^\alpha (1 - h)^\beta F(a, b, c; h)$

με $a = b = \alpha + \beta$ και $c = 1 + 2\alpha$, όπου

$$\alpha = -\frac{i\omega r_H}{n+1}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \sqrt{\left(l + \frac{n+1}{2}\right)^2 - (\omega r_H)^2}$$

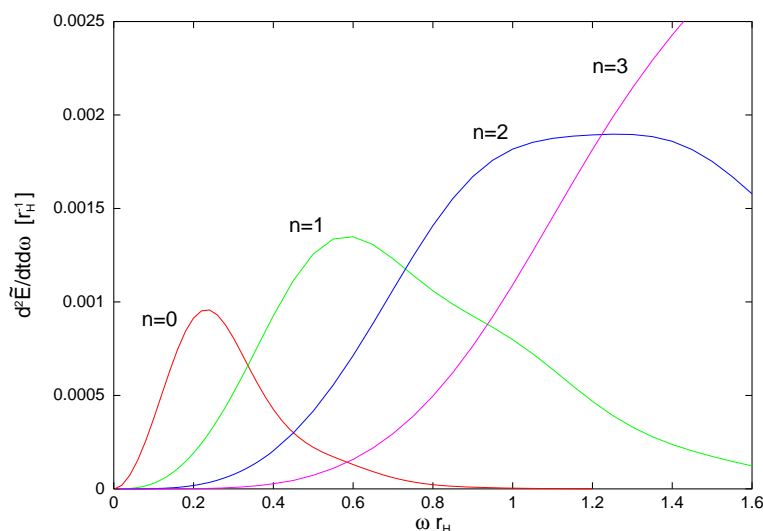
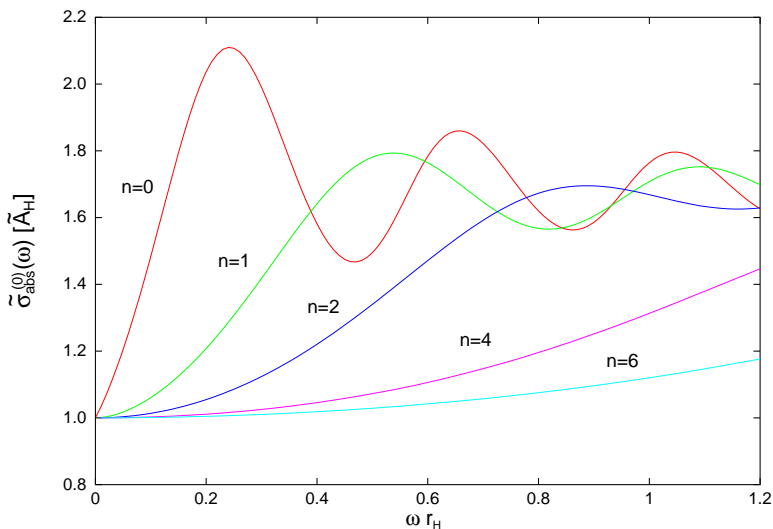
- Μακριά από τον Ορίζοντα:

$$R_M(r) = \frac{B_+}{r^{(n+1)/2}} J_{\ell+(n+1)/2}(\omega r) + \frac{B_-}{r^{(n+1)/2}} Y_{\ell+(n+1)/2}(\omega r)$$

- Τα αποτελέσματα περιγράφουν με ικανοποιητική ακρίβεια τη συμπεριφορά του $\sigma_\ell(\omega)$ και του ρυθμού εκπομπής μέχρι ενδιάμεσες τιμές ενέργειας

Ακτινοβολία Hawking στον $(4 + n)$ Χώρο

- Αριθμητική ανάλυση: Τα ακριβή αποτελέσματα είναι:



- Έξτρα Χώρος ή Μεμβράνη; Πού εκπέμπεται η περισσότερη ενέργεια;

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
Bulk/Brane	1.0	0.40	0.24	0.22	0.24	0.33	0.52	0.93

Συμπεράσματα

- Η ανίχνευση της ακτινοβολίας Hawking από μία μελανή οπή θα είναι ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα, εκδήλωση ενός ημι-κλασικού φαινομένου
- Εάν επιπλέον χωρικές διαστάσεις υπάρχουν, ο ρυθμός εκπομπής ακτινοβολίας από μικρές, πολυδιάστατες μελανές οπές μπορεί να μας αποκαλύψει πόσες τέτοιες διαστάσεις υπάρχουν στη φύση
- Η εύρεση του συντελεστή γκριζου σώματος για κάθε τύπο σωματιδίου είναι απαραίτητη για τον ακριβή προσδιορισμό του φάσματος
- Τόσο το ποσό όσο και το είδος της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας εξαρτάται από τον αριθμό των χωρικών διαστάσεων
- Η εκπομπή ενέργειας στον Έξτρα Χώρο παραμένει πάντα μικρότερη από αυτή στη μεμβράνη όμως θα πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν στον προσδιορισμό του παρατηρήσιμου φάσματος