ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2012

ΘΕΜΑ 1. Σύμφωνα με το νόμο του Lambert, από το φως έντασης E που πέφτει κάθετα σε ένα ημιδιαφανές οπτικό μέσο πάχους Δz, απορροφάται ποσοστό $\frac{\Delta E}{E}$ ανάλογο του πάχους Δz. Η ένταση του ηλιακού φωτός που πέφτει στη θάλασσα μειώνεται κατά 50% σε βάθος 180m. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω νόμο, βρείτε σε πόσο βάθος η ένταση του ηλιακού φωτός μειώνεται κατά 95% της αρχικής.
($\ln 2 \approx 0.69, \quad \ln 20 \approx 3$)

Λύση
Σύμφωνα με την εκφώνηση, αν $k>0$ είναι ο συντελεστής αναλογίας, θα έχουμε

$$\frac{\Delta E}{E} = -k\Delta z \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta E}{\Delta z} = -kE \quad \Rightarrow (\Delta z \to 0) \Rightarrow \quad \frac{dE}{dz} = -kE \quad (1)$$

Η (1) αποτελεί τη διαφορική εξίσωση του προβλήματος που δίνει την ένταση E σαν συνάρτηση του βάθους z. Αν για $z=0$ είναι $E=E_0$, η λύση της (1) είναι η

$$E = E_0 e^{-kz} \qquad (2)$$

Για $z=180$ είναι $E=E_0/2$ και από την (2) προκύπτει ότι $k = \frac{\ln 2}{180}$ και η (2) γράφεται

$$E = E_0 e^{-\frac{\ln 2}{180}z} \Rightarrow \quad E/E_0 = e^{-\frac{\ln 2}{180}z}$$

Όταν μένει το 5% του φωτός (δηλαδή μείωση 95%) είναι $E/E_0=1/20$ και η παραπάνω σχέση μας δίνει

$$\frac{1}{20} = e^{-\frac{\ln 2}{180}z} \quad \Rightarrow \quad \ln(20) = \frac{z\ln 2}{180} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{180\ln 20}{\ln 2} \quad \Rightarrow \quad z \approx 780m$$

ΘΕΜΑ 2. Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$xy'' - y' - x^2 = 0, \quad y(3) = 0, \; y'(1) = 0 \qquad (x \neq 0)$$

Λύση
Έχουμε μια ΔΕ $2^{ης}$ τάξης από την οποία λείπει η άγνωστη συνάρτηση y. Θέτουμε $p = y'$ και η ΔΕ γράφεται

$$xp' - p - x^2 = 0 \quad \acute{\eta} \quad p' - \frac{1}{x}p - x = 0 \quad (1)$$

Η (1) είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης και η λύση της θα δίνεται από τον τύπο

$$p = \left\{ c + \int xe^{\int -\frac{1}{x}dx} dx \right\} e^{-\int -\frac{1}{x}dx} \quad \Rightarrow \quad p = cx + x^2 \qquad (2)$$

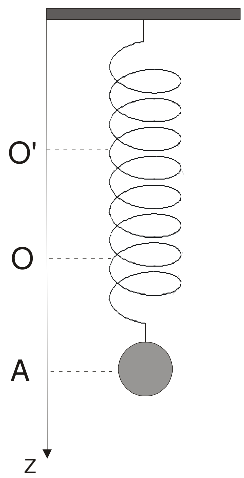
Επειδή για $x=1$ είναι $p = y' = 0$ προκύπτει από την (2) ότι c=-1 και ολοκληρώνοντάς την βρίσκουμε

$$y = \int (-x + x^2)dx = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$$

Για $x=3$ είναι $y=0$, άρα $c=-9/2$.

ΘΕΜΑ 3. Αβαρές ελατήριο σταθεράς k κρέμεται κατακόρυφα από σταθερό σημείο και στο άλλο άκρο του στερεώνουμε σώμα μάζας m. Στο σώμα επιδρά μόνο η δύναμη του ελατηρίου και το βάρος του και ισορροπεί στο σημείο Ο. Αν απομακρυνθεί από το Ο μπορεί να εκτελεί ελεύθερα ταλαντώσεις α) Δείξτε ότι η διαφορική εξίσωση που περιγράφει τις ταλαντώσεις είναι η $\ddot{z}+\frac{k}{m}z=0$, όπου z η απόσταση του σώματος από το σημείο ισορροπίας Ο. β) Βρείτε τη λύση $z=z(t)$ των ταλαντώσεων αν αρχικά το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και το ωθήσουμε με αρχική ταχύτητα υ_0. γ) Βρείτε την λύση $z=z(t)$ αν στο σώμα επιδρά επιπλέον και μια εξωτερική δύναμη της μορφής $F_{\varepsilon\xi}=F_0\sin\omega t$, όπου F_0 σταθερά και $\omega=\sqrt{k/m}$.

Λύση



α) Έστω στο Ο΄ το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος, Ο είναι η θέση ισορροπίας και Α μια τυχούσα θέση z=ΟΑ.
Στο Α θα έχουμε

$$m\ddot{z}=F_{o\lambda}=mg-k(O'O+OA)=mg-kO'O-kz$$

Όμως στη θέση ισορροπίας είναι $mg=kO'O$, άρα

$$m\ddot{z}=-kz \quad\Rightarrow\quad \ddot{z}+\omega_0^2 z=0, \quad (1) \qquad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

β) Η (1) είναι γραμμική 2^{ης} τάξης με σταθερούς συντελεστές. Το χαρακτηριστικό της πολυώνυμο είναι το $\rho^2+\omega_0^2=0$ με ρίζες $\rho_{1,2}=\pm i\omega_0$. Η γενική λύση που αντιστοιχεί είναι η

$z=c_1\cos\omega_0 t+c_2\sin\omega_0 t$ (2) και επίσης

$\dot{z}=-c_1\omega_0\sin\omega_0 t+c_2\omega_0\cos\omega_0 t$

Από τις αρχικές συνθήκες $z(0)=0,\quad \dot{z}(0)=\upsilon_0$ προκύπτει $c_1=0,\quad c_2=\upsilon_0/\omega_0$ άρα

$$z(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

γ) Η Δ.Ε. γράφεται

$m\ddot{z}=-kz+F_0\sin\omega t \quad\Rightarrow\quad \ddot{z}+\omega_0^2 z=a\sin\omega t \quad (3)$, όπου $a=F_0/m$.

Η (3) είναι μη ομογενής και η λύση της γράφεται ως η λύση (2) της ομογενούς συν μια μερική λύση, η οποία αφού $\omega=\omega_0$ (συντονισμός!) θα είναι της μορφής

$$z_\mu=t(A\cos\omega t+B\sin\omega t) \qquad (4)$$

Αντικαθιστούμε την (4) στην (3) και βρίσκουμε ότι την ικανοποιεί για $A=-a/2\omega,\quad B=0$ και η γενική λύση γράφεται

$$z=c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t-t\frac{a}{2\omega}\sin\omega t$$

Για τις αρχικές συνθήκες $z(0)=0,\quad \dot{z}(0)=\upsilon_0$ προκύπτει $c_1=0,\quad c_2=\upsilon_0/\omega_0$, άρα

$$z(t)=\frac{\upsilon_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t-t\frac{a}{2\omega}\sin\omega t$$

ΘΕΜΑ 4. Να βρεθεί η γενική λύση $z = z(x, y)$ των ΔΕΜΠ

α) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$

β) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 4\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

Λύση

α) Η ΔΕΜΠ είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης με σύστημα Β.Ε. το $\dfrac{dx}{1} = -\dfrac{dy}{2} = \dfrac{dz}{0}$.

Οι Β.Ε. εύκολα ολοκληρώνονται και δίνουν $z = c_1$ και $2x + y = c_2$. Άρα η λύση θα είναι η

$$\Phi(z, 2x + y) = 0 \text{ ή } z = f(2x + y)$$

όπου *f* αυθαίρετη συνάρτηση.

β) Χρησιμοποιώντας τους τελεστές παραγώγισης D_x, D_y, η ΔΕΜΠ γράφεται

$$(D_x^2 - 4D_xD_y + 4D_y^2)z = 0 \text{ ή } (D_x - 2D_y)^2 z = 0$$

Άρα θα είναι

$(D_x - 2D_y)z = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\partial z}{\partial x} - 2\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad z = f(2x + y)$, από το θέμα (α).

Ο τελεστής πολυώνυμο έχει επαναλαμβανόμενο παράγοντα το ($D_x - 2D_y$). Μια δεύτερη λύση θα είναι λοιπόν η $z = xg(2x + y)$ ή $z = yg(2x + y)$, όπου *g* μια δεύτερη αυθαίρετη συνάρτηση. Έτσι η γενική λύση μπορεί να γραφεί σαν

$$z = f(2x + y) + xg(2x + y) \text{ ή } z = f(2x + y) + yg(2x + y)$$