

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΑΝΑΛΥΣΗ II
(Λύσεις)

1. Αγωνιστικό αυτοκίνητο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, όπου το διάστημα που διανύει $x = x(t)$, ορίζεται ως πλεγμένη συνάρτηση του χρόνου t , από την εξίσωση $F(x, t) = x^3 - xt^2 + x - t^3 = 0$. Ζητείται να βρεθεί η θέση, η ταχύτητα και η επιτάχυνση του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t .

Λύση: Το μέτρο της ταχύτητας $v = (dx/dt)$ και της επιτάχυνσης $\alpha = (d^2x/dt^2)$ τη χρονική στιγμή t δίνονται από τις σχέσεις

$$v = \frac{3t^2 + 2tx}{1 - t^2 + 3x^2}$$

$$\alpha = \frac{2 [3t^3(t^2 + 10tx + 12x^2) - (3t + x)(1 + 3x^2)^2 + 2xt^2(3x^2 - 1)]}{(t^2 - 3x^2 - 1)^3}$$

Για $t = 1$ προκύπτει $x = 1, v = 5/3, \alpha = -2/3$.

2. Να βρεθεί η παράγωγος κατά κατεύθυνση της συνάρτησης $f(x, y) = \ln[1 + \sin^2(x - 2y)]$, στο σημείο $P_0(\pi/4, 0)$, κατά την κατεύθυνση της ευθείας $x - 2y = 2$ (προς τα θετικά x).

Λύση: Υπολογίζουμε την κλίση της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο $P(\pi/4, 0)$

$$(\nabla f)_P = \frac{2}{3}\hat{e}_x - \frac{4}{3}\hat{e}_y.$$

Η διανυσματική μονάδα κατά την ζητούμενη κατεύθυνση της ευθείας $x - 2y = 2$ είναι

$$\hat{n}_0 = \frac{2e_x + e_y}{\sqrt{5}}.$$

Τελικά η παράγωγος της συνάρτησης $f(x, y)$ κατά την ζητούμενη κατεύθυνση στο σημείο P είναι

$$D_{\hat{n}_0}f = (\nabla f)_P \cdot \hat{n}_0 = 0.$$

3. Σε ποιά από τα σημεία $P_1(1/2, 0)$, $P_2(b/a, 1)$, έχει η συνάρτηση $f(x, y) = x^2 - axy^2 + by^2 - x$, άκρα τιμή. Υπάρχουν άλλα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης και, αν υπάρχουν, πως αξιολογούνται (Δικαιολογήστε την απάντησή σας).

Λύση: Τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης $f(x, y)$ είναι

$$P_1\left(\frac{1}{2}, 0\right), P_3\left(\frac{b}{a}, \frac{\sqrt{2b-a}}{a}\right), P_4\left(\frac{b}{a}, \frac{-\sqrt{2b-a}}{a}\right),$$

ενώ το $P_2\left(\frac{b}{a}, 1\right)$ δεν είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης. Το σημείο P_1 είναι σχετικό ελάχιστο ενώ τα σημεία P_3, P_4 είναι σαγματικά, όταν ισχύει $a \geq 2b$.

4. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση της σφαίρας που είναι ομόκεντρη με την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ και εφάπτεται του επιπέδου $x + 2y - 3z - 1 = 0$.

Λύση: Η σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y + 8 = 0 \rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = 5$, επομένως έχει κέντρο το σημείο $(2, -3, 0)$ και ακτίνα $\sqrt{5}$. Η ζητούμενη σφαίρα είναι ομόκεντρη και εφάπτεται του επιπέδου $x + 2y - 3z - 1 = 0$ άρα η απόσταση του κέντρου της σφαίρας από το εφαπτόμενο επίπεδο θα είναι ίση με την ακτίνα της σφαίρας

$$R = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot (-3) - 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{5}{\sqrt{14}}.$$

Η εξίσωση της ζητούμενης σφαίρας είναι

$$(x-2)^2 + (y+3)^2 + z^2 = \frac{25}{14}$$

5. Τα Ελληνικά Ταχυδρομεία για την αποστολή ενός δέματος χρεώνουν ανάλογα με το βάρος και το μέγεθος του κουτιού. Αν τα $x, y, z \geq 0$ είναι οι ακμές ενός κουτιού που έχει σχήμα παραλληλεπιπέδου, το κουτί δεν θα χρεωθεί υπέρβαρο αν $2x + 2y + z \leq 3m$. Να βρεθεί ο μέγιστος όγκος του κουτιού που δεν θα χαρακτηριστεί υπέρβαρος.

Λύσεις: Θα μεγιστοποιήσουμε τον όγκο $V = xyz$ (με $x > 0, y > 0, z > 0$) όταν τα οι ακμές του παραλληλεπιπέδου υπακούουν ταυτόχρονα και

το δεσμό $2x + 2y + z \leq 3m$. Χρησιμοποιούμε την μέθοδο των πολλαπλασιαστών *Lagrange*

$$F(x, y, z) = V(x, y, z) + \lambda(2x + 2y + z - 300cm)$$

και θα έχουμε

$$\begin{aligned} yz &= 2\lambda \\ xz &= 2\lambda \\ xy &= \lambda \\ 2x + 2y + z &= 300cm. \end{aligned}$$

από το σύστημα αυτό προκύπτει

$$yz = xz = 2xy$$

ή $x = y$ και $z = 2x$. Επιστρέφοντας στο δεσμό υπολογίζουμε $2x + 2x + 2x = 300cm$ άρα $x = y = 50cm$ και $z = 100cm$ και ο μεγιστος όγκος θα είναι $V = 25 \times 10^4 cm^3$.

6. Αν το διανυσματικό πεδίο $\vec{E}(x, y, z)$ επαληθεύει της εξισώσεις

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z) = \rho(x, y, z),$$

όπου η $\rho(x, y, z)$ γνωστή βαθμωτή συνάρτηση και

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z) = 0,$$

δείξτε ότι (α) $\vec{E}(x, y, z) = -\nabla\varphi$ και (β) Υπολογίστε το $\nabla^2\varphi$, όταν η $\varphi(x, y, z)$ είναι επίσης βαθμωτή συνάρτηση.

Λύσεις: (α) Η στροφή της σχέσης $\vec{E} = -\nabla\varphi$ μας οδηγεί στη σχέση $\nabla \times E = \nabla \times (-\nabla\varphi)$ και εύκολα αποδεικνύουμε ότι

$$\nabla \times (\nabla\varphi) = \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

(β)

$$\nabla \cdot E = \nabla \cdot (-\nabla\varphi) = -\nabla^2\varphi = \rho(x, y, z)$$

άρα η Λαπλασιανή της φ ($\nabla^2\varphi$) είναι ίση με $-\rho(x, y, z)$.