

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$x - y + 2z = 4, \quad 2x - y + 2z = 3, \quad -x + y - z = -2$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, όπου $\mathbf{X}$ ο πίνακας-στήλη των αγνώστων (x, y, z) . Να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ και να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{A}^{-1}$.

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$ όπου $x \in [0, +\infty)$. Να βρεθούν α) Η $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, και β) το πεδίο τιμών της $f(x)$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$. Να μελετηθεί η μονοτονία της σε όλο το πεδίο ορισμού και να βρεθούν τα ακρότατα. Να σχεδιαστεί πρόχειρα η γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 4^ο

Υπολογίστε την τιμή της $\sqrt{1,1}$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων χωρίς να χρησιμοποιήσετε κομπιουτεράκι! Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε σειρά Taylor.

ΘΕΜΑ 5^ο

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int xe^{-x^2} dx \quad \beta) \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^5 \ln(x^2 + 1) dx$$

ΘΕΜΑ 6^ο

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ ορίζεται από την σχέση

$$f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx. \text{ Αντίστοιχα η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετράγωνου της } f \text{ ορίζεται από την}$$

$$f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2 dx}. \text{ Να βρεθεί η } V_{rms} \text{ της τάσης } V \text{ στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Η τάση στο}$$

εναλλασσόμενο ρεύμα δίνεται από την σχέση $V = V_0 \sin(2\pi f t)$, όπου V_0 το (σταθερό) πλάτος, f η (σταθερή) συχνότητα και t ο χρόνος. Υπόδειξη: Ολοκληρώστε για μία περίοδο ($T = 1/f$).

- Τα θέματα είναι ισοδύναμα, κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες (σύνολο 12 μονάδες)
- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλου του γραπτού!!!
- Διάρκεια εξετάσεων 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$x - y + 2z = 4 \quad , \quad 2x - y + 2z = 3 \quad , \quad -x + y - z = -2$$

Το σύστημα μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, όπου $\mathbf{X}$ ο πίνακας-στήλη των αγνώστων (x, y, z) . Να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ και να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{A}^{-1}$.

Το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων της μορφής

$$\begin{array}{l} x - y + 2z = 4 \\ 2x - y + 2z = 3 \\ -x + y - z = -2 \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y} \quad , \quad \text{όπου} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$

Βρίσκουμε πρώτα τον αντίστροφο του πίνακα $\mathbf{A}$

1^η μέθοδος

Γράφουμε τον πίνακα στην μορφή

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Αφαιρώ την 1^η επί 2 από την 2^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Προσθέτω την 1^η στην 3^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Προσθέτω την 2^η στην 1^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Προσθέτω την 3^η επί 2 στην 2^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Άρα ο αντίστροφος του $\mathbf{A}$ είναι $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2^{ος} τρόπος

Βρίσκω τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων.

$$\begin{aligned}A_{11} &= (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 & A_{12} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 & A_{13} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\A_{21} &= (-1)^3 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{22} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{23} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\A_{31} &= (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{32} &= (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{33} &= (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1\end{aligned}$$

Η ορίζουσα του πίνακα είναι $|\mathbf{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 1$

$$\text{Άρα ο αντίστροφος είναι } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Αφού βρήκαμε τον αντίστροφο πίνακα η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{και τελικά βρίσκουμε } \begin{aligned} x &= -1 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$ όπου $x \in [0, +\infty)$. Να βρεθούν α) Η $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, και β) το πεδίο τιμών της $f(x)$.

$$\begin{aligned}\alpha) \\ f(0) &= 0 \cdot e^{-0} = 0 \cdot 1 = 0\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty} = ?? \quad \text{Άρα χρησιμοποιούμε τον κανόνα του de Hospital}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

β)
Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ στα δύο άκρα του πεδίου ορισμού είναι 0. Άρα ή είναι παντού 0 (!) ή παρουσιάζει μέγιστα και ελάχιστα.

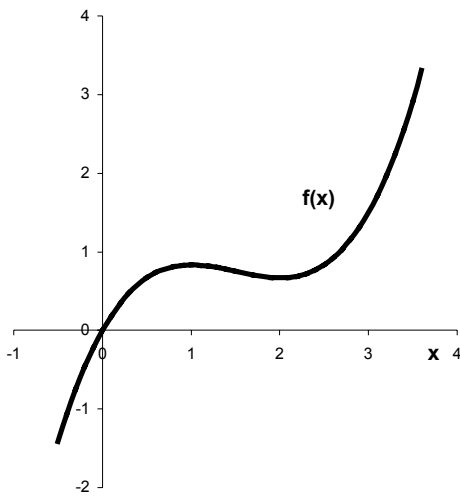
$$\text{Βρίσκουμε την παράγωγο } \frac{df}{dx} = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x). \quad \text{Η } \frac{df}{dx} = 0 \text{ μόνο όταν } x=1.$$

Άρα έχει μόνο ένα ακρότατο. Το ακρότατο είναι μέγιστο γιατί όταν $x < 1$ η $\frac{df}{dx} > 0$ και όταν $x > 1$ η $\frac{df}{dx} < 0$.

Άρα το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $[0, f(1)]$ δηλαδή το $[0, e^{-1}]$.

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$. Να μελετηθεί η μονοτονία της σε όλο το πεδίο ορισμού και να βρεθούν τα ακρότατα. Να σχεδιαστεί πρόχειρα η γραφική της παράσταση.



Το πεδίο ορισμού είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι $f(0) = 0$.

Βρίσκουμε την παράγωγο της f : $\frac{df}{dx} = x^2 - 3x + 2$

Βρίσκουμε τα ακρότατα :

$$\frac{df}{dx} = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Έχουμε λοιπόν τον πίνακα

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$				
$f'(x)$	+		-	+

τ.μ τ.ε

ΘΕΜΑ 4^ο

Υπολογίστε την τιμή της $\sqrt{1,1}$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων χωρίς να χρησιμοποιήσετε κομπιουτεράκι!

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε σειρά Taylor.

Αναπτύσσουμε σε Taylor την $f(x) = \sqrt{x}$ γύρω από την θέση $x_0 = 1$. Επιλέξαμε το $x_0 = 1$ γιατί είναι μια τιμή πολύ κοντά στην επιθυμητή της οποίας γνωρίζουμε την τετραγωνική ρίζα.

Το ανάπτυγμα Taylor δίνεται από την σχέση :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots$$

Έχουμε λοιπόν :

$$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f(1) = 1, \text{ άρα πρώτος όρος είναι ίσος με } 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2}, \text{ άρα } 2^{\text{ος}} \text{ όρος είναι } f'(1)(1,1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 0,1 = 0,05$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} \Rightarrow f''(1) = -\frac{1}{4}, \text{ άρα } 3^{\text{ος}} \text{ όρος είναι } \frac{1}{2!}f''(1)(1,1 - 1)^2 = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{4}\right) 0,1^2 = -0,00125$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-5/2} \Rightarrow f'''(1) = \frac{3}{8}, \text{ άρα } 4^{\text{ος}} \text{ όρος είναι } \frac{1}{3!}f'''(1)(1,1 - 1)^3 = \frac{1}{6} \frac{3}{8} 0,1^3 = 0,0000625$$

Προφανώς δεν χρειαζόμαστε άλλους όρους γιατί έχουμε φτάσει στην επιθυμητή ακρίβεια.

$$\text{Άρα: } \sqrt{1,1} \cong 1 + 0,05 - 0,00125 + 0,0000625 = 1,0488125$$

Πράγματι αν υπολογίσουμε με το κομπιουτεράκι την $\sqrt{1,1}$ βρίσκουμε 1,0488088

ΘΕΜΑ 5^ο

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

α) $\int x e^{-x^2} dx$

β) $\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^5 \ln(x^2 + 1) dx$

α)

$\int x e^{-x^2} dx$, θέτω $u = x^2$. Άρα $du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{1}{2x} du$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int x e^{-x^2} dx = \int x e^{-u} \frac{1}{2x} du = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} = -\frac{1}{2} e^{-x^2}$$

β)

$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^5 \ln(x^2 + 1) dx$ Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^5 \ln(x^2 + 1)$ είναι περιττή.

Πράγματι $f(-x) = (-x)^5 \ln((-x)^2 + 1) = -x^5 \ln(x^2 + 1) = -f(x)$. Άρα αφού η περιοχή ολοκλήρωσης είναι από το $-\sqrt{3}$ έως το $\sqrt{3}$ (δηλαδή από $-a$ έως a) το ολοκλήρωμα θα είναι :

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} x^5 \ln(x^2 + 1) dx = 0$$

ΘΕΜΑ 6^ο

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα διάστημα $[a,b]$ ορίζεται από την σχέση $f_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f dx$. Αντίστοιχα η τετραγωνική ρίζα της μέσης τιμής του τετράγωνου της f ορίζεται από την $f_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2 dx}$. Να βρεθεί η V_{rms} της τάσης V στο εναλλασσόμενο ρεύμα. Η τάση στο εναλλασσόμενο ρεύμα δίνεται από την σχέση $V = V_0 \sin(2\pi f t)$, όπου V_0 το (σταθερό) πλάτος, f η (σταθερή) συχνότητα και t ο χρόνος. **Υπόδειξη**: Ολοκληρώστε για μία περίοδο ($T = 1/f$).

$$\text{Το } V_{rms} \text{ θα δίνεται από την σχέση } V_{rms} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b V^2 dt} = \sqrt{\frac{V_0^2}{b-a} \int_a^b \sin^2(2\pi f t) dt}$$

$$\text{Αν ολοκληρώσουμε για μία περίοδο δηλαδή από } 0 \text{ έως } T = 1/f \text{ θα έχουμε } V_{rms} = \sqrt{V_0^2 f \int_0^{1/f} \sin^2(2\pi f t) dt}$$

$$\text{Πρέπει λοιπόν να υπολογίσουμε το } \int_0^{1/f} \sin^2(2\pi f t) dt. \text{ Θέτω } x = 2\pi f t \Rightarrow dx = 2\pi f dt.$$

$$\begin{array}{lcl} t=0 & \Leftrightarrow & x=0 \\ \text{Τα όρια ολοκλήρωσης γίνονται} & & \\ t=1/f & \Leftrightarrow & x=2\pi \end{array}$$

$$\text{Έτσι } \int_0^{1/f} \sin^2(2\pi f t) dt = \frac{1}{2\pi f} \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$$

$$\text{Για το } \int \sin^2(x) dx \text{ έχουμε } \int \sin^2(x) dx = \int \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin(2x)$$

$$\text{Άρα } \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \left[\frac{1}{2} 2\pi - \frac{1}{4} \sin(4\pi) \right] - \left[\frac{1}{2} 0 - \frac{1}{4} \sin(0) \right] = \pi$$

$$\text{Έτσι έχουμε } \int_0^{1/f} \sin^2(2\pi f t) dt = \frac{1}{2\pi f} \pi = \frac{1}{2f}$$

$$\text{Τελικά καταλήγουμε } V_{rms} = \sqrt{V_0^2 f \int_0^{1/f} \sin^2(2\pi f t) dt} = \sqrt{\frac{V_0^2}{2}}.$$

$$\text{Δηλαδή στη γνωστή σχέση } V_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$