

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο (2 μονάδες)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$x - 2y = 1, \quad 4y + 3z - 4x = 2, \quad x - y + z = -1$$

Να γραφεί το σύστημα ως γινόμενο πινάκων $A \cdot X = B$, όπου X ο πίνακας-στήλη των αγνώστων (x, y, z) , να βρεθεί ο A^{-1} και να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον A^{-1} .

ΘΕΜΑ 2^ο (3 μονάδες)

Να μελετηθεί πλήρως η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$. Δηλαδή να βρεθούν : α) Το πεδίο ορισμού της β) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. γ) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. δ) Τυχόν οριζόντιες ασύμπτωτες. ε) Το πεδίο τιμών και τέλος στ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

ΘΕΜΑ 3^ο (1 μονάδα)

Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 9x + 6}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \tanh x$

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

Υπολογίστε την τιμή του $\ln(11)$ με ακρίβεια 3 δεκαδικών ψηφίων χωρίς να χρησιμοποιήσετε κομπιουτεράκι! Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε σειρά Taylor.

ΘΕΜΑ 5^ο (4 μονάδες)

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int \frac{x^3}{x^2 - 1} dx \quad \beta) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} dx \quad \gamma) \int e^x \sin(x) dx \quad \delta) \int_{-2}^2 x \sqrt{x^4 + 2x^2} dx$$

- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλων των γραπτών!!!
- Διάρκεια εξετάσεων 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ & ΚΑΛΟ ΚΑΛΟΚΑΙΡΙ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 2^ο (3 μονάδες)

Να μελετηθεί πλήρως η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x^2}$. Δηλαδή να βρεθούν : α) Το πεδίο ορισμού της β) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. γ) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. δ) Τυχόν οριζόντιες ασύμπτωτες. ε) Το πεδίο τιμών και τέλος στ) Να γίνει η γραφική της παράσταση.

α) Πεδίο ορισμού = όλο το $\mathbb{R}$

β) Βρίσκω την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$

Η παράγωγος μηδενίζεται όταν $(1 - 2x^2) = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

Επίσης όταν $x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$, όταν $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0$ και όταν $x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} < 0$

Άρα η συνάρτηση είναι αντίστοιχα φθίνουσα, αύξουσα και φθίνουσα.

Στο σημείο $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}, y = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ έχει ελάχιστο και στο $x = \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ έχει μέγιστο.

γ) Βρίσκω την δεύτερη παράγωγο

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -2xe^{-x^2}(1 - 2x^2) - 4xe^{-x^2} = -2xe^{-x^2} + 4x^3e^{-x^2} - 4xe^{-x^2} = 4x^3e^{-x^2} - 6xe^{-x^2} = 2xe^{-x^2}(2x^2 - 3)$$

Η δεύτερη παράγωγος μηδενίζεται όταν $x = 0$ και όταν $2x^2 - 3 = 0$ δηλαδή όταν $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

Άρα τα σημεία $x = 0$ και $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ είναι σημεία καμπής

Το πρόσημο της δεύτερης παραγώγου θα είναι:

$$\text{Όταν } x < -\sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x(2x^2 - 3) < 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

$$\text{Όταν } -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < 0 \Rightarrow 2x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x(2x^2 - 3) > 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

$$\text{Όταν } 0 < x < \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2x^2 - 3 < 0 \Rightarrow x(2x^2 - 3) < 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

$$\text{Όταν } x > \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow 2x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x(2x^2 - 3) > 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} > 0$$

Άρα η συνάρτηση είναι αντίστοιχα : κυρτή, κοίλη, κυρτή και κοίλη

δ) Βρίσκω τα όρια της συνάρτησης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{-\infty}{\infty} \xRightarrow{L'Hospital} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \text{ Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την } y = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \xRightarrow{L'Hospital} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0 \text{ Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την } y = 0$$

ε) Εφόσον η συνάρτηση ξεκινάει από το 0 (για $x \rightarrow -\infty$) και καταλήγει στο 0 για $x \rightarrow \infty$ και εμφανίζει ελάχιστο $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ και μέγιστο $y = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}$ το πεδίο τιμών της θα είναι $y \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{2}}\right]$.

στ) Τέλος η γραφική της παράσταση είναι

