



ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο (2 μονάδες)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$2z - y = 1, \quad z - 2x - 2y = 2, \quad x + y = -1$$

Να γραφεί το σύστημα ως γινόμενο πινάκων $A \cdot X = B$, όπου X ο πίνακας-στήλη των αγνώστων (x, y, z) , να βρεθεί ο A^{-1} (1 μονάδα) και να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον A^{-1} (1 μονάδα).

ΘΕΜΑ 2^ο (5 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2$. Να βρεθούν :

- α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. (1 μονάδα)
- β) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. (1,5 μονάδες)
- γ) Οι τυχόν ασύμπτωτες και το πεδίο τιμών (1,5 μονάδες)
- δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση. (1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3^ο (1 μονάδα)

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Mac Laurin της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Το ανάπτυγμα να περιλαμβάνει μέχρι όρους 4^{ης} τάξης ως προς x

ΘΕΜΑ 4^ο (2 μονάδες)

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

α) $\int e^x \sin(x) dx$ β) $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλων των γραπτού!!!
- Διάρκεια εξέτασεων : 1 ώρα και 45 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Ο πίνακας A των συντελεστών είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας B των σταθερών $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και των

$$\text{αγνώστων } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του A είναι $|A| = -1$ και ο αντίστροφος του A είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Έτσι η λύση του συστήματος είναι $X = A^{-1}B \quad X = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{pmatrix}$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$f(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \quad \text{Το πεδίο ορισμού είναι όλο το } \mathbb{R}$$

α)

$$f'(x) = 2 \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) \left(\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \right) = 2 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} 4 \Rightarrow f'(x) = 8 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}$$

Η $f'(x)$ μηδενίζεται όταν $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

Έχουμε επίσης

$$x < 0 \Leftrightarrow x < -x \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} < 0$$

και

$$x > 0 \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0$$

ενώ $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} > 0$

Άρα

για $x < 0$ η $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ φθίνουσα

για $x > 0$ η $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ αύξουσα

και στο $x = 0$ έχουμε ελάχιστο $f(0) = 0$

β)

$$f''(x) = 8 \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})^3 - 3(e^x + e^{-x})^2(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^6} = 8 \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 3(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^4} =$$

$$8 \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - 3e^{2x} + 6e^x e^{-x} - 3e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4} = 8 \frac{8 - 2e^{2x} - 2e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4} = 16 \frac{4 - e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4}$$

Η $f''(x)$ μηδενίζεται όταν $4 - e^{2x} - e^{-2x} = 0$

Παρατηρούμε ότι η $4 - e^{2x} - e^{-2x} = 0$ είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς e^{2x} .

Πράγματι αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με e^{2x} (το οποίο πάντα είναι διάφορο του μηδενός) έχουμε $4 - e^{2x} - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(4 - e^{2x} - e^{-2x}) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - e^{4x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} - 4e^{2x} + 1 = 0$

Θέτοντας $y = e^{2x}$, έχουμε την εξίσωση $y^2 - 4y + 1 = 0$, που έχει λύσεις

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 + \sqrt{3} \\ y = 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Άρα η $f''(x) = 0$ έχει λύσεις :

$$\begin{aligned} y = e^{2x} = 2 + \sqrt{3} &\Leftrightarrow 2x = \ln(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3}) \\ y = e^{2x} = 2 - \sqrt{3} &\Leftrightarrow 2x = \ln(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Οι οποίες είναι περίπου $x = 0,65848$ και $x = -0,65848$

Για $y < 2 - \sqrt{3}$ και για $y > 2 + \sqrt{3}$, η $y^2 - 4y + 1 > 0$. Άρα

για $x < \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3})$ και για $x > \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$ η

$$e^{4x} - 4e^{2x} + 1 > 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - e^{4x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{2x}(4 - e^{2x} - e^{-2x}) < 0$$

και επειδή $e^{2x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$4 - e^{2x} - e^{-2x} < 0 \Rightarrow 16 \frac{4 - e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0. \text{ Άρα η } f(x) \text{ είναι κυρτή.}$$

Αντίστοιχα για $x \in \left(\frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3}), \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})\right)$ η $f''(x) > 0$, οπότε η $f(x)$ είναι κοίλη.

γ)

Οριζόντιες ασύμπτωτες :

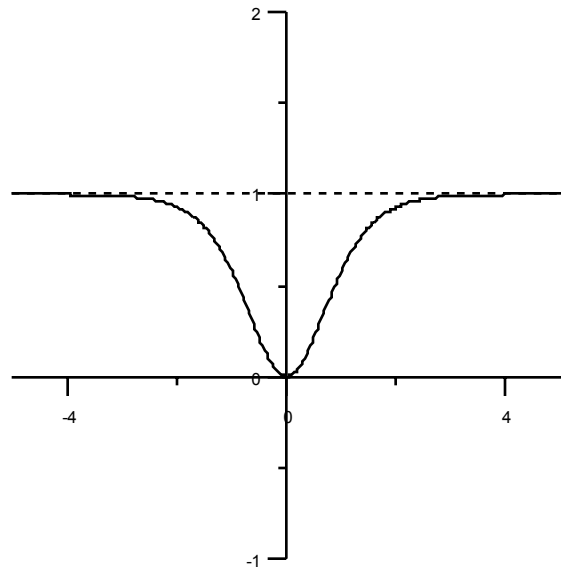
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{-x} \left(\cancel{e^x} - 1 \right)}{e^{-x} \left(\cancel{e^x} + 1 \right)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^x \left(1 - \cancel{e^{-x}} \right)}{e^x \left(1 + \cancel{e^{-x}} \right)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)^2 = 1$$

Άρα για $x \rightarrow -\infty$ και για $x \rightarrow \infty$ η $f(x)$ έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 1$.

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει γιατί δεν
 $\exists x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$

Παρατηρούμε επίσης ότι η $f(x)$ ξεκινάει από το 1 και καταλήγει ξανά στο 1, δεν έχει τοπικό μέγιστο, είναι πάντα θετική και έχει ελάχιστο στο $x = 0$, $f(0) = 0$. Άρα το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $f(x) \in [0, 1]$



δ) Η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι

ΘΕΜΑ 3^{ον}

Το ανάπτυγμα σε σειρά Mac Laurin είναι

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \dots$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους μέχρι και τέταρτης τάξης της $f(x)$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = 2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'''(x) = 2 \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = 2 \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = 4 \frac{x^3 - 3x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 4 \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 1)^3 - (x^3 - 3x)3(x^2 + 1)^2 2x}{(x^2 + 1)^6} = 4 \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x)6x}{(x^2 + 1)^4} = 4 \frac{3x^4 - 3 - 6x^4 - 18x^2}{(x^2 + 1)^4} \\ &= 4 \frac{-3x^4 - 18x^2 - 3}{(x^2 + 1)^4} = -12 \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{(x^2 + 1)^4} \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$f(0) = \ln(1) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(4)}(0) = -12$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α)

$$\int e^x \sin(x) dx = \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)' dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx =$$

$$e^x \sin(x) - \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)' dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} = e^x \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$$

β)

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x e^{-x^2} dx$$

Υπολογίζουμε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος $\int_{-a}^a x e^{-x^2} dx$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(x) = x e^{-x^2}$ είναι περιττή συνάρτηση. Πράγματι
 $f(-x) = (-x) e^{-(-x)^2} = -x e^{-x^2} = -f(x)$

Επειδή τα όρια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι $-a$ και a , το ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_{-a}^a x e^{-x^2} dx = 0$$

Άρα και το μη γνήσιο ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 0 = 0$$