ΤΜΗΜΑ
ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ & ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ
ΣΧΟΛΗ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ
Τ. Ε. Ι. ΣΕΡΡΩΝ

Β΄ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΧΕΙΜΕΡΙΝΟΥ ΕΞΑΜΗΝΟΥ
ΑΚΑΔ. ΕΤΟΣ 2005-2006

Σέρρες, 14 ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΥ 2006

# ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

# ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Χρήστος Βοζίκης

## ΘΕΜΑ 1$^{ον}$ **(2 μονάδες)**

Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να βρεθούν :

α) Τα γινόμενα $A \cdot B$ και $B \cdot A$ (1 μονάδα)
β) Ο αντίστροφος πίνακας του $A$ (1 μονάδα)

## ΘΕΜΑ 2$^{ον}$ **(4 μονάδες)**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x^2}$ . Να βρεθούν :

α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. (1 μονάδα)
β) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. (1 μονάδα)
γ) Οι τυχόν ασύμπτωτες και το πεδίο τιμών (1 μονάδα)
δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση. (1 μονάδα)

## ΘΕΜΑ 3$^{ον}$ **(1 μονάδα)**

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος, στη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, δίνεται από την σχέση

$$E_k = mc^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (4.1)$$

Όπου m η μάζα αδρανείας του σώματος, υ η ταχύτητά του και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Στην Κλασική Μηχανική, όπου η ταχύτητα υ είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με την c, η κινητική ενέργεια δίνεται από την γνωστή σχέση

$$E_k = \frac{1}{2} m \upsilon^2 \qquad (4.2)$$

Αποδείξτε τη σχέση (4.2) χρησιμοποιώντας την σχέση (4.1).

**<u>Υπόδειξη :</u>** Αναπτύξτε σε σειρά Taylor την (4.1) λαμβάνοντας υπόψη ότι το κλάσμα $x = \upsilon^2 / c^2$ είναι πάρα πολύ μικρό. Πάρτε τόσους όρους όσους χρειάζεστε για να βγάλετε την σχέση (4.2)

## ΘΕΜΑ 4^ον^ **(3 μονάδες)**

Οι συντελεστές $A_0$ και $A_n$ του αναπτύγματος σε σειρά Fourier ενός τριγωνικού παλμού περιόδου 2π δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx \qquad\qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx, \quad n = 1,2,...$$

α) Να υπολογιστούν τα $A_0$, $A_1$, $A_2$ και $A_3$ (2 μονάδες)

β) Να βρεθεί ο γενικός τύπος για το $A_n$ (1 μονάδα)

- *Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.*
- *Βαθμολογούνται μόνο τα θέματα που είναι ολοκληρωμένα και σωστά. Π.χ. για να πάρετε την 1 μονάδα στο 4α) πρέπει να βρείτε σωστά και τα 4 ολοκληρώματα.*
- ***Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλου του γραπτού!!!***
- *Διάρκεια εξετάσεων : 1 ώρα και 45 λεπτά* **ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

| Τριγωνομετρικές ταυτότητες | | |
|---|---|---|
| $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ | $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ | $\sin\ 3x = 3\sin x\cos^2 x - \sin^3 x$ |
| $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ | $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ | $\cos\ 3x = \cos^3 x - 3\sin^2 x\cos x$ |
| $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$ | $\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$ | $\sin(x+y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$ |

| Ιδιότητες Λογαρίθμων | | |
|---|---|---|
| $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ | $\ln x^a = a\ln x$ | $e^{\ln x} = x$ |
| $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ | $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}$ | $e^{a\ln x} = x^a$ |

| Ανάπτυγμα της $f(x)$ σε σειρά Taylor (γύρω από την θέση $x_0$) |
|---|
| $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)(x-x_0)^3 + ....$ |

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1ον

Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}$. Να βρεθούν :

α) Τα γινόμενα $A\cdot B$ και $B\cdot A$ (1 μονάδα)

β) Ο αντίστροφος πίνακας του $A$ (1 μονάδα)

---

α) $$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 2+2\cdot 3\\ -2\cdot 2+2\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\ 2\end{pmatrix}$$

$B\cdot A$ Δεν μπορεί να γίνει πολλαπλασιασμός. Οι στήλες το B δεν είναι ίσες με τις γραμμές του A.

β) $A_{11}=(-1)^2|2|=2$ $A_{12}=(-1)^3|-2|=2$ $A_{21}=(-1)^3|2|=-2$ $A_{22}=(-1)^4|1|=1$ $|A|=6$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2/6 & -2/6\\ 2/6 & 1/6\end{pmatrix}$$

Επαλήθευση $$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2/6 & -2/6\\ 2/6 & 1/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/6+4/6 & -2/6+2/6\\ -4/6+4/6 & 4/6+2/6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

## ΘΕΜΑ 2ον

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x^2}$ . Να βρεθούν :

α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. (1 μονάδα)

β) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. (1 μονάδα)

γ) Οι τυχόν ασύμπτωτες και το πεδίο τιμών (1 μονάδα)

δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση. (1 μονάδα)

---

α) $$f(x)=e^{-x^2}\Rightarrow f'(x)=-2xe^{-x^2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow -2xe^{-x^2}=0\Leftrightarrow x=0$$

$\forall\, x\in\Re,\, e^{-x^2}>0$ Έτσι έχουμε $\forall\, x<0,\, f'(x)>0$ άρα η $f(x)$ είναι αύξουσα

$\forall\, x>0,\, f'(x)<0$ άρα η $f(x)$ είναι φθίνουσα

Για $x=0$ έχουμε τοπικό μέγιστο $f(0)=e^0=1$

β) $$f''(x)=-2\left[e^{-x^2}+x(-2x)e^{-x^2}\right]=-2e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)=2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{-x^2}\left(2x^2-1\right)=0\Leftrightarrow 2x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα έχουμε σημεία καμπής στα σημεία $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ και $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$

$\forall x \in \Re, e^{-x^2} > 0$

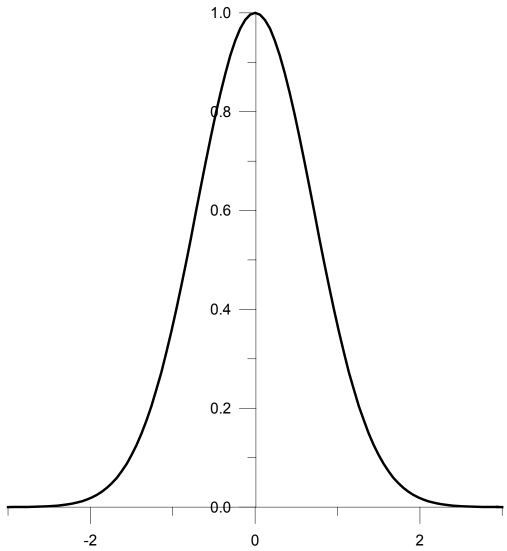
Έτσι έχουμε $\forall x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ή $x > \frac{\sqrt{2}}{2}, 2x^2 - 1 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ άρα η $f(x)$ είναι κοίλη

$\forall x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $x < \frac{\sqrt{2}}{2},\ 2x^2 - 1 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ άρα η $f(x)$ είναι κυρτή

γ) Οριζόντιες ασύμπτωτες

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = 0$$




Άρα έχει και στα δύο άκρα οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$.

Κατακόρυφες και πλάγιες ασύμπτωτες δεν έχει.

Εφόσον τα δύο πιο πάνω όρια είναι 0 και η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\Re$ αυτό σημαίνει ότι το τοπικό μέγιστο που βρήκαμε στο $x = 0$ είναι ολικό μέγιστο της συνάρτησης.
Άρα τελικά το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα $(0, 1]$

## ΘΕΜΑ 3$^{ον}$

$E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} - 1\right)$ Θέτω $x = \frac{\upsilon^2}{c^2}$, άρα έχουμε $E_k = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)$

Αναπτύσσουμε σε Taylor την $E_k$ ως προς $x$ γύρω από την θέση $x_0 = 0$. Επειδή το τελικό αποτέλεσμα που θέλουμε να βγάλουμε είναι $E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2$ θα πάρουμε μόνο όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς $x$

Έτσι έχουμε $E_k(x) = E_k(0) + E_k'(0)x$

$$E_k(0) = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-0}} - 1\right) = 0$$

$$E_k' = mc^2 \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} - 1\right)}{dx} = mc^2 \frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)}{dx} = mc^2\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-1}{1-x} = \frac{1}{2}\frac{mc^2}{(1-x)^{3/2}}$$

$$E_k'(0) = \frac{1}{2}mc^2$$

Άρα $E_k(x) = E_k(0) + E_k'(0)x = 0 + \frac{1}{2}mc^2 x \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}mc^2\frac{\upsilon^2}{c^2} \Rightarrow E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2$

## ΘΕΜΑ 4ον

Οι συντελεστές $A_0$ και $A_n$ του αναπτύγματος σε σειρά Fourier ενός τριγωνικού παλμού περιόδου 2π δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx \qquad\qquad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx, \quad n = 1,2,...$$

α) Να υπολογιστούν τα $A_0$, $A_1$, $A_2$ και $A_3$ (2 μονάδες)

β) Να βρεθεί ο γενικός τύπος για το $A_n$ (1 μονάδα)

---

α) $$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}0\right) = \pi$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$$

Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x\cos(x)dx = \int x(\sin(x))' dx = x\sin(x) - \int \sin(x)dx = x\sin(x) + \cos(x) + c$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(x)dx = \frac{2}{\pi}\left[x\sin(x) + \cos(x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\pi\sin(\pi) + \cos(\pi) - 0\sin(0) - \cos(0)\right] \Rightarrow$$

$$A_1 = \frac{2}{\pi}(0 - 1 + 0 - 1) = -\frac{4}{\pi}$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(2x)dx$$

Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x\cos(2x)dx = \frac{1}{2}\int x(\sin(2x))' dx = \frac{1}{2}\left(x\sin(2x) - \int \sin(2x)dx\right) = \frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x) + c$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(2x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}x\sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\pi\sin(2\pi) + \frac{1}{4}\cos(2\pi) - \frac{1}{2}0\sin(0) - \frac{1}{4}\cos(0)\right]$$

$$A_2 = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{4} + 0 - \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$A_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(3x)dx$$

Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x\cos(3x)dx = \frac{1}{3}\int x(\sin(3x))' dx = \frac{1}{3}\left( x\sin(3x) - \int \sin(3x)dx \right) = \frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + c$$

$$A_3 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(3x)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{3}\pi\sin(3\pi) + \frac{1}{9}\cos(3\pi) - \frac{1}{3}0\sin(0) - \frac{1}{9}\cos(0)\right]$$

$$A_3 = \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{1}{9} + 0 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{4}{9\pi}$$

β)

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx, \quad n = 1,2,...$$

Υπολογίζω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x\cos(nx)dx = \frac{1}{n}\int x(\sin(nx))' dx = \frac{1}{n}\left( x\sin(nx) - \int \sin(nx)dx \right) = \frac{1}{n}x\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx) + c$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}x\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}\pi\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}0\sin(0) - \frac{1}{n^2}\cos(0)\right]$$

$$A_n = \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) + 0 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n^2\pi}(\cos(n\pi) - 1)$$

Αν $n$ άρτιος τότε $\cos(n\pi) = 1$ ενώ αν $n$ περιττός τότε $\cos(n\pi) = -1$

Άρα $A_n = \begin{cases} 0 & n \text{ άρτιος} \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} & n \text{ περιττός} \end{cases}$