



## ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

### ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

#### ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup> (2 μονάδες)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$2z - y = 1, \quad z - 2x - 2y = 2, \quad x + y = -1$$

Να γραφεί το σύστημα ως γινόμενο πινάκων  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$ , όπου  $\mathbf{X}$  ο πίνακας-στήλη των αγνώστων  $(x, y, z)$ , να βρεθεί ο  $\mathbf{A}^{-1}$  (1 μονάδα) και να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον  $\mathbf{A}^{-1}$  (1 μονάδα).

#### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup> (4 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2$ . Να βρεθούν :

- α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. (1 μονάδα)
- β) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. (1 μονάδα)
- γ) Οι τυχόν ασύμπτωτες και το πεδίο τιμών (1 μονάδα)
- δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση. (1 μονάδα)

#### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup> (2 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$ .

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(a, \ln a)$  με  $a > 0$  και η εφαπτομένη της συνάρτησης  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  ταυτίζονται, τότε να αποδείξετε ότι το  $a$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup> (2 μονάδες)

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

α)  $\int e^x \sin(x) dx$       β)  $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$

- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλου του γραπτού!!!
- Διάρκεια εξετάσεων : 1 ώρα και 45 λεπτά

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Ο πίνακας  $A$  των συντελεστών είναι  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Ο πίνακας  $B$  των σταθερών  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$  και των

$$\text{αγνώστων } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του  $A$  είναι  $|A| = -1$  και ο αντίστροφος του  $A$  είναι  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

Έτσι η λύση του συστήματος είναι  $X = A^{-1}B \quad X = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{pmatrix}$

## ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

$$f(x) = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 \quad \text{Το πεδίο ορισμού είναι όλο το } \mathbb{R}$$

α)

$$f'(x) = 2 \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right) \left( \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} \right) = 2 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} (e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - e^{2x} + 2e^x e^{-x} - e^{-2x}) \Rightarrow$$

$$f'(x) = 2 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3} 4 \Rightarrow f'(x) = 8 \frac{(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^3}$$

Η  $f'(x)$  μηδενίζεται όταν  $e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$

Έχουμε επίσης

$$x < 0 \Leftrightarrow x < -x \Leftrightarrow e^x < e^{-x} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} < 0$$

και

$$x > 0 \Leftrightarrow x > -x \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^x - e^{-x} > 0$$

ενώ  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0 \Rightarrow e^x + e^{-x} > 0$

Άρα

για  $x < 0$  η  $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$  φθίνουσα

για  $x > 0$  η  $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$  αύξουσα

και στο  $x = 0$  έχουμε ελάχιστο  $f(0) = 0$

β)

$$f''(x) = 8 \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})^3 - 3(e^x + e^{-x})^2(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^6} = 8 \frac{(e^x + e^{-x})^2 - 3(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^4} =$$

$$8 \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} - 3e^{2x} + 6e^x e^{-x} - 3e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4} = 8 \frac{8 - 2e^{2x} - 2e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4} = 16 \frac{4 - e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4}$$

Η  $f''(x)$  μηδενίζεται όταν  $4 - e^{2x} - e^{-2x} = 0$

Παρατηρούμε ότι η  $4 - e^{2x} - e^{-2x} = 0$  είναι δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς  $e^{2x}$ .

Πράγματι αν πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη με  $e^{2x}$  (το οποίο πάντα είναι διάφορο του μηδενός) έχουμε  $4 - e^{2x} - e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{2x}(4 - e^{2x} - e^{-2x}) = 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - e^{4x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{4x} - 4e^{2x} + 1 = 0$

Θέτοντας  $y = e^{2x}$ , έχουμε την εξίσωση  $y^2 - 4y + 1 = 0$ , που έχει λύσεις

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} \Leftrightarrow y = 2 + \sqrt{3}$$

$$y = 2 - \sqrt{3}$$

Αρα η  $f''(x) = 0$  έχει λύσεις :

$$y = e^{2x} = 2 + \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \ln(2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$$

$$y = e^{2x} = 2 - \sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = \ln(2 - \sqrt{3}) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3})$$

Οι οποίες είναι περίπου  $x = 0,65848$  και  $x = -0,65848$

Για  $y < 2 - \sqrt{3}$  και για  $y > 2 + \sqrt{3}$ , η  $y^2 - 4y + 1 > 0$ . Αρα

για  $x < \frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3})$  και για  $x > \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})$  η

$$e^{4x} - 4e^{2x} + 1 > 0 \Leftrightarrow 4e^{2x} - e^{4x} - 1 < 0 \Leftrightarrow e^{2x}(4 - e^{2x} - e^{-2x}) < 0$$

και επειδή  $e^{2x} > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

$$4 - e^{2x} - e^{-2x} < 0 \Rightarrow 16 \frac{4 - e^{2x} - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^4} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0. \text{ Αρα η } f(x) \text{ είναι κυρτή.}$$

Αντίστοιχα για  $x \in \left(\frac{1}{2} \ln(2 - \sqrt{3}), \frac{1}{2} \ln(2 + \sqrt{3})\right)$  η  $f''(x) > 0$ , οπότε η  $f(x)$  είναι κοίλη.

γ)

Οριζόντιες ασύμπτωτες :

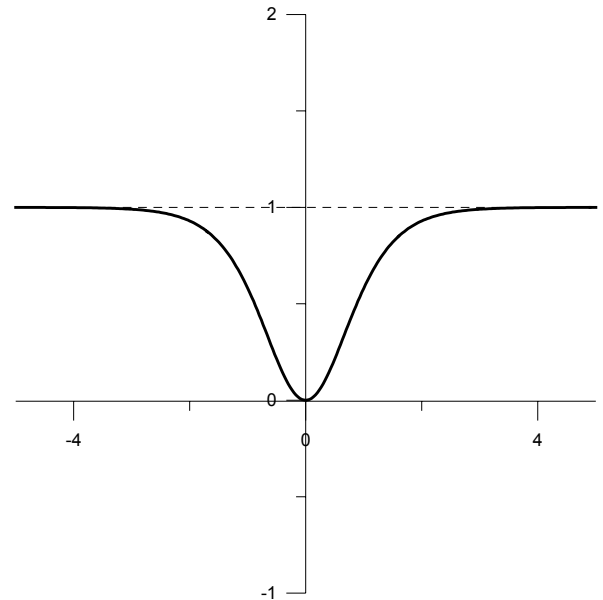
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{-x} \left( \frac{e^x}{e^{-x}} - 1 \right)}{e^{-x} \left( \frac{e^x}{e^{-x}} + 1 \right)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^x \left( 1 - \frac{e^{-x}}{e^x} \right)}{e^x \left( 1 + \frac{e^{-x}}{e^x} \right)} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \right)^2 = 1$$

Αρα για  $x \rightarrow -\infty$  και για  $x \rightarrow \infty$  η  $f(x)$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία  $y = 1$ .

Κατακόρυφες ασύμπτωτες δεν έχει γιατί  
 $\nexists x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$

Παρατηρούμε επίσης ότι η  $f(x)$  ξεκινάει από το 1 και καταλήγει ξανά στο 1, δεν έχει τοπικό μέγιστο, είναι πάντα θετική και έχει ελάχιστο στο  $x = 0$ ,  $f(0) = 0$ . Άρα το πεδίο τιμών της είναι το διάστημα  $f(x) \in [0, 1)$



δ) Η γραφική παράσταση της  $f(x)$  είναι

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>

Η εξίσωση της εφαπτομένης της  $g(x) = \ln x$  στο σημείο  $A(a, \ln a)$  είναι

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \Rightarrow y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$$

Αντίστοιχα η εξίσωση της εφαπτομένης της  $h(x) = e^x$  στο σημείο  $B(\beta, e^\beta)$  είναι

$$y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Rightarrow y = e^\beta x + e^\beta(1 - \beta)$$

Εφόσον οι δύο ευθείες ταυτίζονται θα πρέπει

$$\frac{1}{a} = e^\beta \text{ και } \ln a - 1 = e^\beta(1 - \beta)$$

Από την πρώτη έχουμε  $\frac{1}{a} = e^\beta \Rightarrow \beta = -\ln a$  και αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε

$$\ln a - 1 = e^\beta(1 - \beta) \Rightarrow \ln a - 1 = \frac{1}{a}(1 + \ln a) \Rightarrow (1 - \frac{1}{a})\ln a = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{a-1}{a}\ln a = \frac{a+1}{a} \Rightarrow \ln a = \frac{a+1}{a-1}$$

και τελικά

$$\frac{a+1}{a-1} - \ln a = 0$$

Το αριστερό μέρος της τελευταία σχέσης είναι η  $f(a)$ , άρα το  $a$  είναι ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

α)

$$\int e^x \sin(x) dx = \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)' dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx =$$

$$e^x \sin(x) - \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)' dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} = e^x \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$$

β)

Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x e^{-x^2} dx$$

Υπολογίζουμε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος  $\int_{-a}^a x e^{-x^2} dx$ Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x e^{-x^2}$  είναι περιττή συνάρτηση. Πράγματι

$$f(-x) = (-x) e^{-(-x)^2} = -x e^{-x^2} = -f(x)$$

Επειδή τα όρια του ορισμένου ολοκληρώματος είναι  $-a$  και  $a$ , το ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_{-a}^a x e^{-x^2} dx = 0$$

Άρα και το μη γνήσιο ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{-a}^a x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} 0 = 0$$