



ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο (2 μονάδες)

Να εξεταστεί αν το παρακάτω σύστημα έχει λύση.

$$-x + y + z + q = 0, \quad 2y - x = 1, \quad 2x + y + z + 2q = 2, \quad x + 3z + 3q = 1$$

ΘΕΜΑ 2^ο (2 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2$. Να βρεθούν :

α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα.

(1 μονάδα)

β) Το πεδίο τιμών και να γίνει μια πρόχειρη γραφική της παράστασης.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3^ο (2 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(a, \ln a)$ με $a > 0$ και η εφαπτομένη της συνάρτησης $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ ταυτίζονται, τότε να αποδείξετε ότι το a είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο (2,5 μονάδες)

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

α) $\int x^{n-1} \ln(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{R} \quad (1,5 \text{ μονάδα}),$

β) $\int_0^\infty x e^{-x^2} dx \quad (1 \text{ μονάδα}).$

ΘΕΜΑ 5^ο (2 μονάδες)

Να υπολογιστούν οι παραστάσεις :

α) $\frac{d}{dx}(x^x) \quad (1 \text{ μονάδα}),$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+2)} \quad (1 \text{ μονάδα}).$

- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων. Τα θέματα ΔΕΝ επιστρέφονται.
- Όλες οι πράξεις πρέπει να υπάρχουν αναλυτικά στην κόλλα σας. Απαντήσεις που εμφανίζουν κατευθείαν τα τελικά αποτελέσματα ΔΕΝ βαθμολογούνται. Βαθμολογούνται μόνο ΠΛΗΡΕΙΣ, ΣΩΣΤΕΣ και ΚΑΛΟΓΡΑΜΜΕΝΕΣ απαντήσεις.
- Προσοχή στην σύνταξη και τον μαθηματικό φορμαλισμό. (π.χ. το $e^{-\infty}$ δεν υπάρχει! Υπάρχει μόνο το $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)
- Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών, επιπέδου Δημοτικού – Γυμνασίου, έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλων των γραπτών!!!
- Διάρκεια εξετάσεων : 1 ώρα και 45 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

$$-x + y + z + q = 0$$

$$-x + 2y = 1$$

$$2x + y + z + 2q = 2$$

$$x + 3z + 3q = 1$$

Το σύστημα γράφεται στην μορφή $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$

$$\text{όπου } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ q \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Για να έχει λύση θα πρέπει $|\mathbf{A}| \neq 0$. Υπολογίζω την ορίζουσα $|\mathbf{A}|$ με την μέθοδο των αλγεβρικών συμπληρωμάτων. Επιλέγω την 2^η γραμμή επειδή έχει τα περισσότερα μηδενικά.

$$|\mathbf{A}| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-3) = 3 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = (1)(4) = 4$$

$$\text{Η ορίζουσα λοιπόν είναι } |\mathbf{A}| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} = (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 5 \neq 0$$

Άρα το σύστημα ΕΧΕΙ λύση.

ΘΕΜΑ 2^ο

$$f(x) = \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 \quad \text{Το πεδίο ορισμού είναι όλο το } \mathbb{R}$$

$$\alpha) f'(x) = 2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right) \left(x - \frac{x^3}{3}\right)' = 2 \left(x - \frac{x^3}{3}\right) (1 - x^2)$$

$$\text{Η } f'(x) \text{ μηδενίζεται όταν } 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\text{και όταν } x - \frac{x^3}{3} = 0 \Leftrightarrow x \left(1 - \frac{x^2}{3}\right) = 0$$

$$\text{που ισχύει όταν } x = 0 \text{ ή όταν } 1 - \frac{x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{Η } f'(x) \text{ μηδενίζεται λοιπόν όταν το } x \text{ είναι } -\sqrt{3}, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad \sqrt{3}$$

Μονοτονία

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$(1-x^2)$	-	-	+	+	-	-	
$\left(x-\frac{x^3}{3}\right)$	+	-	-	+	+	-	-
$f'(x)$	-	+	-	+	-	+	
$f(x)$	φθίνουσα	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα	φθίνουσα	αύξουσα	

Στο σημείο $x = -\sqrt{3}$ η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο. $f(-\sqrt{3}) = \left(-\sqrt{3} - \frac{(-\sqrt{3}^3)}{3}\right)^2 = \left(-\sqrt{3} - \frac{-3\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 0$

Στο σημείο $x = -1$ η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο. $f(-1) = \left(-1 - \frac{(-1^3)}{3}\right)^2 = \left(-1 + \frac{1}{3}\right)^2 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Στο σημείο $x = 0$ η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο. $f(0) = \left(0 - \frac{(0)}{3}\right)^2 = 0$

Στο σημείο $x = 1$ η $f(x)$ έχει τοπικό μέγιστο. $f(1) = \left(1 - \frac{(1^3)}{3}\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

Στο σημείο $x = \sqrt{3}$ η $f(x)$ έχει τοπικό ελάχιστο. $f(\sqrt{3}) = \left(\sqrt{3} - \frac{(\sqrt{3}^3)}{3}\right)^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 0$

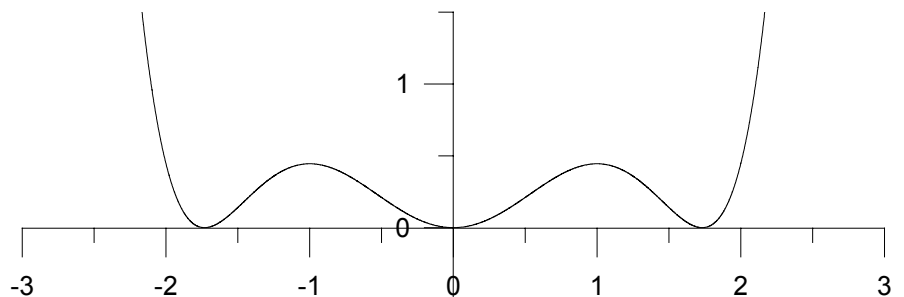
β)

Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2 = +\infty$$

άρα δεν υπάρχουν οριζόντιες ασύμπτωτες. Επίσης δεν υπάρχουν ούτε κατακόρυφες γιατί το πεδίο ορισμού της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Άρα το πεδίο τιμών της είναι από το μικρότερο ελάχιστο έως το άπειρο. Δηλαδή το διάστημα $[0, +\infty)$

Η γραφική παράσταση της $f(x)$ είναι



ΘΕΜΑ 3^ο

Η εξίσωση της εφαπτομένης της $g(x) = \ln x$ στο σημείο $A(a, \ln a)$ είναι

$$y - \ln a = \frac{1}{a}(x - a) \Rightarrow y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1$$

Αντίστοιχα η εξίσωση της εφαπτομένης της $h(x) = e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ είναι

$$y - e^\beta = e^\beta(x - \beta) \Rightarrow y = e^\beta x + e^\beta(1 - \beta)$$

Εφόσον οι δύο ευθείες ταυτίζονται θα πρέπει

$$\frac{1}{a} = e^\beta \quad \text{και} \quad \ln a - 1 = e^\beta(1 - \beta)$$

Από την πρώτη έχουμε $\frac{1}{a} = e^\beta \Rightarrow \beta = -\ln a$ και αντικαθιστώντας στην δεύτερη βρίσκουμε

$$\ln a - 1 = e^\beta(1 - \beta) \Rightarrow \ln a - 1 = \frac{1}{a}(1 + \ln a) \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{a}\right) \ln a = 1 + \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{a-1}{a} \ln a = \frac{a+1}{a} \Rightarrow \ln a = \frac{a+1}{a-1}$$

και τελικά

$$\frac{a+1}{a-1} - \ln a = 0$$

Το αριστερό μέρος της τελευταία σχέσης είναι η $f(a)$, άρα το a είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha) \int x^{n-1} \ln(x) dx, \quad \forall n \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \int x^{n-1} \ln(x) dx &= \int \left(\frac{1}{n} x^n \right)' \ln(x) dx = \frac{1}{n} \left[x^n \ln(x) - \int x^n (\ln(x))' dx \right] + c = \frac{1}{n} \left[x^n \ln(x) - \int x^n \frac{1}{x} dx \right] + c = \\ &= \frac{1}{n} \left[x^n \ln(x) - \int x^{n-1} dx \right] + c = \frac{1}{n} \left[x^n \ln(x) - \frac{1}{n} x^n \right] + c = \frac{x^n [n \ln(x) - 1]}{n^2} + c \end{aligned}$$

Προφανώς τα παραπάνω ΔΕΝ ισχύουν για $n = 0$ γιατί το x^{-1} δεν μπορεί να γραφεί σαν παράγωγος του $\frac{1}{0}x^0$!!!

$$\text{Για } n = 0 \text{ έχουμε } \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \int (\ln(x))' \ln(x) dx = \frac{1}{2} [\ln(x)]^2 + c$$

$$\beta) \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x e^{-x^2} dx$$

Βρίσκουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int x e^{-x^2} dx$. Θέτω $u = x^2$, άρα $du = 2x dx$

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{1}{2} e^{-u} + c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$$

$$\text{Άρα έχουμε} \quad \int_0^a x e^{-x^2} dx = \left[-\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \right]_0^a = \left(-\frac{1}{2} e^{-a^2} \right) - \left(-\frac{1}{2} e^{-0} \right) = \frac{1}{2} (1 - e^{-a^2})$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow \infty} (1 - e^{-a^2}) = \frac{1}{2}$$

ΘΕΜΑ 5^{ov}

$$\alpha) \frac{d}{dx} (x^x) \quad (1 \text{ μονάδα}),$$

Έστω $y = x^x$, θέλουμε να υπολογίσουμε την $\frac{dy}{dx} = y'$

$$y = x^x \Leftrightarrow \ln y = \ln x^x \Leftrightarrow \ln y = x \ln x$$

Παραγωγίζω και τα δύο μέλη ως προς x

$$\frac{d}{dx} (\ln y) = \frac{d}{dx} (x \ln x) \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = 1 \cdot \ln x + x \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln x + 1 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = y (\ln x + 1) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = x^x (\ln x + 1)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x+2)} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{L'Hospital}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1 + 0 = 1$$