

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με χρήση πινάκων

$$-x + y - 2z = 4, \quad -2x + y - 2z = 3, \quad x - y + z = -2$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$. Να βρεθούν α) Το πεδίο ορισμού της f , και β) η $\frac{df}{dx}$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Να μελετηθεί η μονοτονία της σε όλο το πεδίο ορισμού και να βρεθούν τα ακρότατα. Να σχεδιαστεί πρόχειρα η γραφική της παράσταση

ΘΕΜΑ 4^ο

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος, στη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, δίνεται από την σχέση

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (4.1)$$

Όπου m η μάζα αδρανείας του σώματος, v η ταχύτητά του και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Στην Κλασική Μηχανική, όπου η ταχύτητα v είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με την c , η κινητική ενέργεια δίνεται από την γνωστή σχέση

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.2)$$

Αποδείξτε ότι η σχέση (4.2) χρησιμοποιώντας την σχέση (4.1).

Υπόδειξη: Αναπτύξτε σε σειρά Taylor την (4.1) λαμβάνοντας υπόψη ότι το κλάσμα v^2/c^2 είναι πάρα πολύ μικρό.

ΘΕΜΑ 5^ο

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int x \ln(x) dx$

β) $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1} dx$

ΘΕΜΑ 6^ο

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$

β) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

- Τα θέματα είναι ισοδύναμα, κάθε θέμα βαθμολογείται με 2 μονάδες (σύνολο 12 μονάδες)
- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- Διάρκεια εξετάσεων 2 ώρες

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα εξισώσεων με χρήση πινάκων

$$-x + y - 2z = 4, \quad -2x + y - 2z = 3, \quad x - y + z = -2$$

Το σύστημα των εξισώσεων μπορεί να γραφεί ως γινόμενο πινάκων της μορφής

$$\begin{array}{r} -x + y - 2z = 4 \\ -2x + y - 2z = 3 \\ x - y + z = -2 \end{array} \Leftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}, \text{ όπου } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ και } \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Η λύση του συστήματος είναι $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y}$

Βρίσκουμε πρώτα τον αντίστροφο του πίνακα $\mathbf{A}$

1^η μέθοδος

Γράφουμε τον πίνακα στην μορφή

$$\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζω την 1^η γραμμή με -1

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Προσθέτω την 1^η επί 2 στην 2^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Αφαιρώ την 1^η από την 3^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζω την 2^η γραμμή με -1

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Προσθέτω την 2^η στην 1^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Πολλαπλασιάζω την 3^η γραμμή με -1

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Προσθέτω την 3^η επί 2 στην 2^η

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \end{array}$$

Άρα ο αντίστροφος του $\mathbf{A}$ είναι $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

2^{ος} τρόπος

Βρίσκω τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων.

$$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Η ορίζουσα του πίνακα είναι $|\mathbf{A}| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 = -1$

Άρα ο αντίστροφος είναι $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Αφού βρήκαμε τον αντίστροφο πίνακα η λύση του συστήματος είναι

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{Y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{και τελικά βρίσκουμε} \quad \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{array}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$. Να βρεθούν α) Το πεδίο ορισμού της f , και β) η $\frac{df}{dx}$

α)

Λόγω του $\ln(x)$ θα πρέπει $x > 0$. Ο παρανομαστής επίσης θα πρέπει να μην είναι μηδέν, άρα $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι $x \in (0, \infty) - \{1\}$

β)

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} = f' &= \frac{(x \ln x)'(x^2 - 1) - (x \ln x)(x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2} = \frac{[\ln x + 1](x^2 - 1) - (x \ln x)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 \ln x + x^2 - \ln x - 1 - 2x^2 \ln x}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{x^2 - \ln x - 1 - x^2 \ln x}{(x^2 - 1)^2} \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2 - x$. Να μελετηθεί η μονοτονία της σε όλο το πεδίο ορισμού και να βρεθούν τα ακρότατα. Να σχεδιαστεί πρόχειρα η γραφική της παράσταση

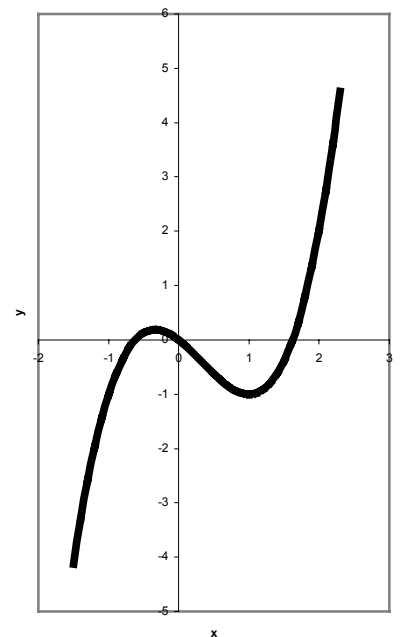
Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το σύνολο $\mathbb{R}$

Η παράγωγος της f είναι $f' = 3x^2 - 2x - 1$ και έχει ρίζες στα σημεία $x = -\frac{1}{3}$ και $x = 1$

Η παράγωγος είναι θετική εκτός των ριζών και αρνητική εντός

Άρα η συνάρτηση f είναι αύξουσα στο τμήμα $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, φθίνουσα στο $\left(-\frac{1}{3}, 1\right)$ και αύξουσα στο $(1, \infty)$.

Στο σημείο $x = -\frac{1}{3}$ έχει τοπικό μέγιστο και στο σημείο $x = 1$ τοπικό ελάχιστο.



ΘΕΜΑ 4^ο

Η κινητική ενέργεια ενός σώματος, στη Θεωρία της Σχετικότητας του Einstein, δίνεται από την σχέση

$$E_k = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) \quad (4.1)$$

Όπου m η μάζα αδρανείας του σώματος, v η ταχύτητά του και c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Στην Κλασική Μηχανική, όπου η ταχύτητα v είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με την c , η κινητική ενέργεια δίνεται από την γνωστή σχέση

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (4.2)$$

Αποδείξτε ότι η σχέση (4.2) χρησιμοποιώντας την σχέση (4.1). **Υπόδειξη:** Αναπτύξτε σε σειρά Taylor την (4.1) λαμβάνοντας υπόψη ότι το κλάσμα $\frac{v^2}{c^2}$ είναι πάρα πολύ μικρό.

Θέτω $x = \frac{v^2}{c^2}$. Επειδή η ταχύτητα v είναι πάρα πολύ μικρή σε σχέση με την c , το κλάσμα $x = \frac{v^2}{c^2}$ είναι πάρα πολύ μικρό. Αναπτύσσω την (4.1) σε σειρά Taylor ως προς x στην θέση $x_0 = 0$

$$E_k(x) = E_k(0) + E_k'(0)x + \frac{1}{2!}E_k''(0)x^2 + \dots \text{ και κρατάω όρους μέχρι πρώτης τάξης ως προς } x, \text{ δηλαδή}$$

$$E_k(x) = E_k(0) + E_k'(0)x$$

Η $E_k(0)$ (δηλαδή η σχέση (4.1) για $x = 0$) είναι $E_k(0) = 0$

$$\text{Η } E_k'(x) = \frac{dE_k(x)}{dx} = mc^2 \left[\frac{1}{2} \frac{1}{(1-x)^{3/2}} \right]. \text{ Άρα για } x=0 \text{ η } E_k'(0) = \frac{1}{2}mc^2$$

$$\text{Έτσι τελικά έχουμε } E_k(x) = E_k(0) + E_k'(0)x = \frac{1}{2}mc^2x$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του $x = \frac{v^2}{c^2}$ στην προηγούμενη σχέση βρίσκουμε την σχέση της Κλασικής Μηχανικής $E_k = \frac{1}{2}mv^2$.

ΘΕΜΑ 5^ο

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα α) $\int x \ln(x) dx$

$$\beta) \int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1} dx$$

$$\begin{aligned} \alpha) \int x \ln(x) dx &= \int \left(\frac{1}{2} x^2 \right)' \ln(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x^2 [\ln(x)]' dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x^2 \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \int \frac{1}{2} x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2 = \frac{1}{4} x^2 [2 \ln(x) - 1] \end{aligned}$$

$$\beta) \int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1} dx = \int \left(x + \frac{3x + 1}{x^2 - 1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{3x + 1}{x^2 - 1} dx = \int x dx + \int \left(\frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} \right) dx$$

Βρίσκουμε $A = 2, B = 1$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 1} dx &= \int x dx + \int \left(\frac{2}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) dx = \int x dx + \int \frac{2}{x - 1} dx + \int \frac{1}{x + 1} dx = \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2 \ln|x - 1| + \ln|x + 1| \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 6^ο

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα

α) $\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx$

β) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

α)

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)] dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} dx - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = \pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx$$

Για να υπολογίσω το $\int_0^{2\pi} \cos(2x) dx$ θέτω $u = 2x$, $du = 2dx$

$$\int_0^{2\pi} \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int_0^{4\pi} \cos(u) du = \frac{1}{2} [\sin(u)]_0^{4\pi} = 0 \quad \text{Άρα} \quad \int_0^{2\pi} \sin^2(x) dx = \pi$$

β)

Θα υπολογίσω πρώτα το $\int_0^M x e^{-x} dx$

$$\int x e^{-x} dx = \int x (e^{-x})' dx = x e^{-x} - \int (x)' e^{-x} dx = x e^{-x} - \int e^{-x} dx = x e^{-x} - e^{-x} = e^{-x} (x - 1)$$

$$\text{Άρα} \quad \int_0^M x e^{-x} dx = [e^{-x} (x - 1)]_0^M = e^{-M} (M - 1) - e^{-0} (0 - 1) = e^{-M} (M - 1) + 1$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x e^{-x} dx &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M x e^{-x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} [e^{-M} (M - 1) + 1] = 1 + \lim_{M \rightarrow \infty} [e^{-M} (M - 1)] = 1 + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M - 1}{e^M} = 1 + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{d(M - 1)/dM}{de^M/dM} = \\ &= 1 + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{e^M} = 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$