

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ι

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο (2 μονάδες)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$2z - y = 1, \quad z - 2x - 2y = 2, \quad x + y = -1$$

Να γραφεί το σύστημα ως γινόμενο πινάκων $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, όπου $\mathbf{X}$ ο πίνακας-στήλη των αγνώστων (x, y, z) , να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ (1 μονάδα) και να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{A}^{-1}$ (1 μονάδα).

ΘΕΜΑ 2^ο (4 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 5$. Να βρεθούν :

- | | |
|--|---------------|
| α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα. | (1 μονάδα) |
| β) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής. | (1 μονάδα) |
| γ) Το πεδίο τιμών | (0,5 μονάδες) |
| δ) Να γίνει η γραφική της παράσταση. | (1,5 μονάδες) |

ΘΕΜΑ 3^ο (1 μονάδα)

Να βρεθούν τα όρια : α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x}$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2}$

ΘΕΜΑ 4^ο (3 μονάδες)

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

α) $\int \frac{x+2}{x^2-1} dx$ β) $\int e^x \sin(x) dx$ γ) $\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$

- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλου του γραπτού!!!
- Διάρκεια εξετάσεων : 1 ώρα και 45 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Ο πίνακας A των συντελεστών είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας B των σταθερών $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και των

$$\text{αγνώστων } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του A είναι $|A| = -1$ και ο αντίστροφος του A είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Έτσι η λύση του συστήματος είναι } X = A^{-1}B \quad X = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha) \quad f(x) = x^4 + x^3 - 5x^2 + 5 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 10x$$

$$\text{Η } f'(x) = 0 \text{ όταν } 4x^3 + 3x^2 - 10x = 0 \Leftrightarrow x(4x^2 + 3x - 10) = 0$$

$$\text{Άρα ή } x = 0 \text{ ή } 4x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\text{Η δεύτερη έχει ρίζες } x = \frac{-3 + \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 + \sqrt{169}}{8} = \frac{-3 + 13}{8} = \frac{10}{8} = 1.25$$

$$\text{και } x = \frac{-3 - \sqrt{3^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-10)}}{2 \cdot 4} = \frac{-3 - \sqrt{169}}{8} = \frac{-3 - 13}{8} = \frac{-16}{8} = -2$$

Άρα έχουμε 3 ρίζες, $x = -2, x = 0, x = 1.25$

Για $x \in (-\infty, -2)$, το $x < 0$, το $4x^2 + 3x - 10 > 0$ άρα $f'(x) = x(4x^2 + 3x - 10) < 0$ άρα η $f(x)$ φθίνουσα

Για $x \in (-2, 0)$, το $x < 0$, το $4x^2 + 3x - 10 < 0$ άρα $f'(x) = x(4x^2 + 3x - 10) > 0$ άρα η $f(x)$ αύξουσα

Για $x \in (0, 1.25)$, το $x > 0$, το $4x^2 + 3x - 10 < 0$ άρα $f'(x) = x(4x^2 + 3x - 10) < 0$ άρα η $f(x)$ φθίνουσα

Για $x \in (1.25, \infty)$, το $x > 0$, το $4x^2 + 3x - 10 > 0$ άρα $f'(x) = x(4x^2 + 3x - 10) > 0$ άρα η $f(x)$ αύξουσα

Για $x = -2$ έχουμε τοπικό ελάχιστο $f(-2) = -7$

Για $x = 0$ έχουμε τοπικό μέγιστο $f(0) = 5$

Για $x = 1.25$ έχουμε τοπικό ελάχιστο $f(1.25) = -1.58203125$

β) Η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ είναι

$$f''(x) = 12x^2 + 6x - 10$$

και έχει ρίζες

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-10)}}{2 \cdot 12} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 480}}{24} = \frac{-6 \pm \sqrt{516}}{24} = \frac{-6 \pm 22.72}{24} \Rightarrow \begin{matrix} x \approx 0.7 \\ x \approx -1.2 \end{matrix}$$

Τα αυτά είναι τα σημεία καμπής.

Έτσι στο διάστημα $x \in (-\infty, -1.2)$ η $f''(x) > 0$ και η $f(x)$ είναι κοίλη

στο διάστημα $x \in (-1.2, 0.7)$ η $f''(x) < 0$ και η $f(x)$ είναι κυρτή

και στο διάστημα $x \in (0.7, \infty)$ η $f''(x) > 0$ και η $f(x)$ είναι κοίλη

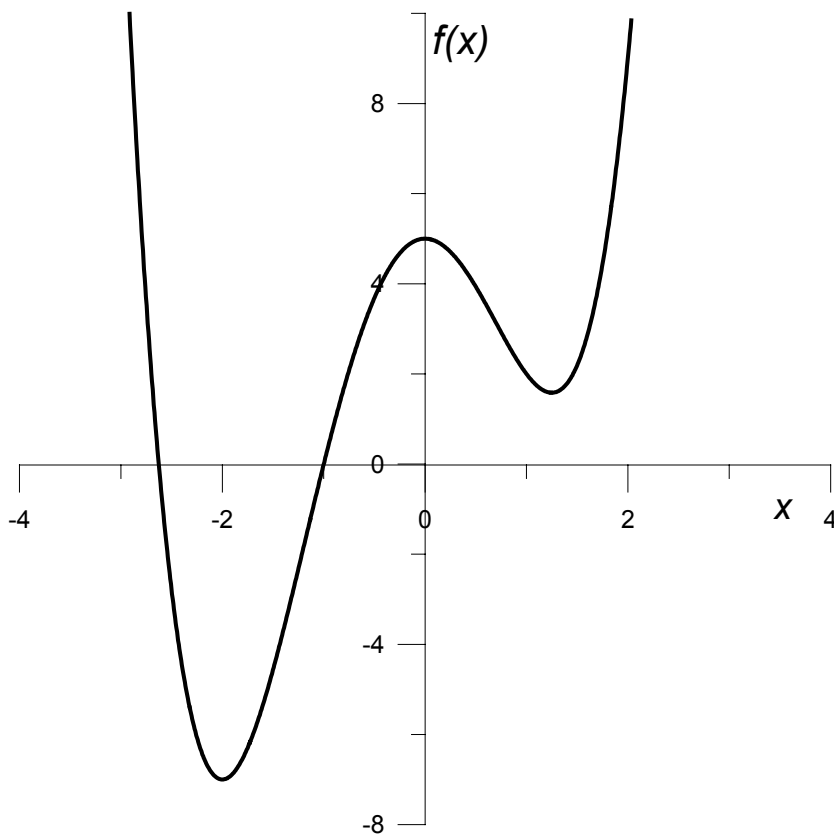
γ)

Παρατηρούμε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Επίσης ότι δεν υπάρχει αριθμός x_0 τέτοιος ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

Άρα το επάνω όριο της $f(x)$ είναι το $+\infty$, ενώ το κάτω όριο είναι το σημείο που εμφανίζεται το μικρότερο τοπικό ελάχιστο.

Δηλαδή το πεδίο τιμών είναι το διάστημα $[-7, +\infty)$

δ) Γνωρίζοντας την μονοτονία, τα ακρότατα, την καμπυλότητα και τα σημεία καμπής είναι ευκολο να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της $f(x)$



ΘΕΜΑ 3^ο

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x / \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{+\infty}{+\infty} \text{ Απροσδιόριστο. Εφαρμόζω κανόνα L' Hospital}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^{x^2}} = 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha) \int \frac{x+2}{x^2-1} dx$$

A τρόπος

Βρίσκω τις ρίζες του παρανομαστή που είναι το -1 και το 1

Προσπαθώ να γράψω το $\frac{x+2}{x^2-1}$ στην μορφή $\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$$\text{Έχω λοιπόν } \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + B}{x^2-1}$$

$$\text{Άρα } (A+B) = 1 \text{ και } -A + B = 2. \text{ Δηλαδή } A = -\frac{1}{2} \text{ και } B = \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } \int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{3}{2}}{x-1} \right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx + \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + c$$

B τρόπος

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \frac{x+1+1}{x^2-1} dx = \int \frac{x+1}{x^2-1} dx + \int \frac{1}{x^2-1} dx = \int \frac{x+1}{(x+1)(x-1)} dx - \int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1}{(x-1)} dx - \int \frac{1}{1-x^2} dx$$

$$\text{Το } \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c \text{ σύμφωνα με το τυπολόγιο που σας δόθηκε. Άρα}$$

$$\int \frac{1}{(x-1)} dx - \int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c = \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{1}{2} \ln|x-1| + c = -\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + c$$

Γ τρόπος

$$+ \int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \int \frac{x}{x^2-1} dx + \int \frac{2}{x^2-1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2-1} d(x^2) - 2 \int \frac{1}{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) - \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c =$$

$$\frac{1}{2} \ln(x^2-1) - \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| + c = \frac{1}{2} \left[\ln(x^2-1) - 2 \ln \left| \frac{x+1}{x-1} \right| \right] + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)(x-1)(x+1)^2}{(x-1)^2} \right| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{(x+1)^3}{(x-1)} \right| + c =$$
$$-\frac{1}{2} \ln|x+1| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + c$$

β)

$$\int e^x \sin(x) dx = \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)' dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx =$$

$$e^x \sin(x) - \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x)' dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι

$$\int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \sin(x) dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x) \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x \sin(x) - e^x \cos(x)}{2} = e^x \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2}$$

γ)

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

Βρίσκω πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int x e^{-x} dx = \int x (-e^{-x})' dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c = -e^{-x} (x+1) + c$$

Κατόπιν βρίσκω το ορισμένο ολοκλήρωμα με συγκεκριμένο άνω άκρο, π.χ. το u

$$\int_0^u x e^{-x} dx = \left[-e^{-x} (x+1) + c \right]_0^u = -e^{-u} (u+1) + e^{-0} (0+1) = 1 - e^{-u} (u+1)$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u x e^{-x} dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[1 - e^{-u} (u+1) \right] = 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u+1}{e^u} \quad \text{και εφαρμόζοντας τον κανόνα του}$$

L'Hospital στο τελευταίο όριο καταλήγουμε

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = 1 - \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{e^u} = 1$$