



ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

ΔΙΔΑΣΚΩΝ : Δρ. Χρήστος Βοζίκης

ΘΕΜΑ 1^ο (2 μονάδες)

Δίνεται το παρακάτω σύστημα εξισώσεων

$$2z - y = 1, \quad z - 2x - 2y = 2, \quad x + y = -1$$

α) Να γραφεί το σύστημα ως γινόμενο πινάκων $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$, όπου $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ο πίνακας-στήλη των

αγνώστων και να βρεθεί ο $\mathbf{A}^{-1}$ (1 μονάδα)

β) να λυθεί το σύστημα χρησιμοποιώντας τον $\mathbf{A}^{-1}$ (1 μονάδα).

ΘΕΜΑ 2^ο (4 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 - x^3 - x$. Να βρεθούν :

α) Η μονοτονία της και τα ακρότατα.

(1,5 μονάδες)

β) Τα διαστήματα που είναι κοίλη ή κυρτή και τα σημεία καμπής.

(1,5 μονάδες)

γ) Το πεδίο τιμών και να γίνει η γραφική της παράσταση.

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 3^ο (1 μονάδα)

Να βρεθεί το ανάπτυγμα σε σειρά Mac Laurin της συνάρτησης $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Το ανάπτυγμα να περιλαμβάνει μέχρι όρους $4^{\text{ης}}$ τάξης ως προς x

ΘΕΜΑ 4^ο (3 μονάδες)

Να βρεθούν τα ολοκληρώματα :

α) $\int e^x \cos(x) dx$

β) $\int x e^{-x^2} dx$

γ) $\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4} dx$

- Απαγορεύεται η χρήση οποιουδήποτε βιβλίου - σημειώσεων και κινητών τηλεφώνων.
- **Προσοχή! Έλλειψη βασικών γνώσεων Μαθηματικών επιπέδου Δημοτικού - Γυμνασίου έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενισμό όλων των γραπτού!!!**
- Διάρκεια εξετάσεων : 1 ώρα και 45 λεπτά

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Ο πίνακας A των συντελεστών είναι $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ο πίνακας B των σταθερών $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και των

$$\text{αγνώστων } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του A είναι $|A| = -1$ και ο αντίστροφος του A είναι $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Έτσι η λύση του συστήματος είναι } X = A^{-1}B \quad X = \begin{pmatrix} x = 0 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{pmatrix}$$

ΘΕΜΑ 2^ο

α)

Η πρώτη παράγωγος της f είναι $f'(x) = 5x^4 - 3x^2 - 1$

Ακρότατα θα έχουμε όταν $f'(x) = 0$, δηλαδή όταν $5x^4 - 3x^2 - 1 = 0$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι διτετράγωνη (δευτεροβάθμια ως προς x^2). Οι ρίζες της λοιπόν θα είναι

$$x^2 = \begin{cases} \frac{3 + \sqrt{29}}{10} \approx 0.8385 \\ \frac{3 - \sqrt{29}}{10} \approx -0.2385 \end{cases} \quad \text{Φυσικά η δεύτερη λύση απορρίπτεται γιατί δεν μπορεί το } x^2 < 0$$

$$\text{Άρα } x = \pm\sqrt{0.8385} \Rightarrow x = \pm 0.9157$$

Όταν το $-0.9157 < x < 0.9157$, το $x^2 < 0.8385$ και η $f'(x) < 0$. Άρα η $f(x)$ θα είναι φθίνουσα.

Όταν το $x < -0.9157$ ή το $x > 0.9157$, το $x^2 > 0.8385$ και η $f'(x) > 0$. Άρα η $f(x)$ θα είναι αύξουσα.

Στο σημείο $x = -0.9157$ θα έχει τοπικό μέγιστο και στο σημείο $x = 0.9157$ τοπικό ελάχιστο

β)

Η δεύτερη παράγωγος της f είναι $f''(x) = 20x^3 - 6x$

Σημεία καμπής θα έχουμε όταν $f''(x) = 0$, δηλαδή όταν $20x^3 - 6x = 0 \Rightarrow x(20x^2 - 6) = 0$

Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι $x = 0$ και $x = \pm\sqrt{\frac{6}{20}} = \pm\sqrt{0.3} \approx \pm 0.5477$

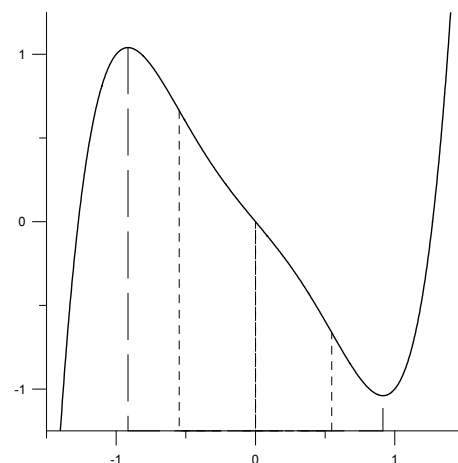
Για $x \in (-\infty, -0.5477)$ το $20x^2 - 6 > 0$, άρα η $f''(x) < 0$ και η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Για $x \in (-0.5477, 0)$ το $20x^2 - 6 < 0$, άρα η $f''(x) > 0$ και η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

Για $x \in (0, 0.5477)$ το $20x^2 - 6 < 0$, άρα η $f''(x) < 0$ και η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω.

Για $x \in (+\infty, 0.5477)$ το $20x^2 - 6 > 0$, άρα η $f''(x) > 0$ και η $f(x)$ στρέφει τα κοίλα προς τα πάνω.

γ) Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$, άρα το πεδίο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.



ΘΕΜΑ 3^{ον}

Το ανάπτυγμα σε σειρά Mac Laurin είναι

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \frac{1}{3!}f'''(0)x^3 + \frac{1}{4!}f^{(4)}(0)x^4 + \dots$$

Βρίσκουμε τις παραγώγους μέχρι και τέταρτης τάξης της $f(x)$

$$f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = 2 \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'''(x) = 2 \frac{-2x(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)2(x^2 + 1)2x}{(x^2 + 1)^4} = 2 \frac{-2x^3 - 2x - 4x + 4x^3}{(x^2 + 1)^3} = 4 \frac{x^3 - 3x}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= 4 \frac{(3x^2 - 3)(x^2 + 1)^3 - (x^3 - 3x)3(x^2 + 1)^2 2x}{(x^2 + 1)^6} = 4 \frac{3(x^2 - 1)(x^2 + 1) - (x^3 - 3x)6x}{(x^2 + 1)^4} = 4 \frac{3x^4 - 3 - 6x^4 - 18x^2}{(x^2 + 1)^4} \\ &= 4 \frac{-3x^4 - 18x^2 - 3}{(x^2 + 1)^4} = -12 \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{(x^2 + 1)^4} \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$f(0) = \ln(1) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f''(0) = 2, \quad f'''(0) = 0 \quad \text{και} \quad f^{(4)}(0) = -12$$

Άρα το ανάπτυγμα είναι

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \dots$$

ΘΕΜΑ 4^ο

$$\alpha) \int e^x \cos(x) dx$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \int (e^x)' \cos(x) dx = e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)' dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx =$$

$$e^x \cos(x) + \int (e^x)' \sin(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)' dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι

$$\int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \Leftrightarrow 2 \int e^x \cos(x) dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) \Leftrightarrow$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \frac{e^x \cos(x) + e^x \sin(x)}{2} = e^x \frac{\cos(x) + \sin(x)}{2}$$

$$\beta) \int x e^{-x^2} dx$$

Θέτουμε $u = x^2$, άρα $du = 2x dx \Rightarrow x dx = \frac{du}{2}$ και το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\int x e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-u} du = -\frac{e^{-u}}{2} + c = -\frac{e^{-x^2}}{2} + c$$

$$\gamma) \int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

Παρατηρούμε ότι για $x = 2$ (το επάνω όριο του ολοκληρώματος) ο παρονομαστής μηδενίζεται. Άρα

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2 - 4} dx = \lim_{a \rightarrow 2^-} \int_0^a \frac{1}{x^2 - 4} dx$$

Θα υπολογίσουμε πρώτα το αόριστο ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{x^2 - 4} dx$

Το $\frac{1}{x^2 - 4}$ είναι ρητή συνάρτηση και οι ρίζες του παρονομαστή είναι $x = -2$ και $x = 2$

Άρα μπορεί να γραφεί ως $\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2}$ όπου A και B σταθερές.

Υπολογίζουμε τα A και B

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-2} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-4} = \frac{A(x-2)+B(x+2)}{(x+2)(x-2)} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2-4} = \frac{Ax-2A+Bx+2B}{(x+2)(x-2)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{x^2-4} = \frac{(A+B)x+(-2A+2B)}{(x+2)(x-2)}$$

Από την τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$\left. \begin{array}{l} A+B=0 \\ -2A+2B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A=-B \\ 2B+2B=1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} A=-1/4 \\ B=1/4 \end{array} \right\} \quad \text{Άρα} \quad \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{4} \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right)$$

$$\int \frac{1}{x^2-4} dx = \frac{1}{4} \int \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x-2} \right) dx = \frac{1}{4} [-\ln|x+2| + \ln|x-2|] + c = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + c$$

Άρα το ορισμένο ολοκλήρωμα θα είναι

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-4} dx = \lim_{a \rightarrow 2^-} \int_0^a \frac{1}{x^2-4} dx = \lim_{a \rightarrow 2^-} \left[\frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right]_0^a = \frac{1}{4} \lim_{a \rightarrow 2^-} \left[\ln \frac{a-2}{a+2} - \ln(1) \right] = -\infty$$