1 Βασικά Στοιχεία Δυναμικής Κοσμολογίας

Στα πλαίσια της Κοσμολογικής Αρχής μπορούμε να παράγουμε τις διαφορικές εξισώσεις της κοσμολογικής εξέλιξης είτε απεύθείας και με αυστηρότητα από τις εξισώσεις πεδίου της ΓΘΣ είτε χρησιμοποιώντας Νευτώνεια προσέγγιση. Το τελευταίο είναι δυνατόν λόγω του ότι η Κοσμολογική Αρχή μας επιτρέπει να θεωρήσουμε στοιχειώδεις όγκους μεγέθους τέτοιου ώστε να ισχύει η Νευτώνεια βαρύτητα, ως τυπικούς κοσμικούς όγκους.

1.1 Εξισώσεις Friedmann

Η βασικότερη διαφορική εξίσωση που περιγράφει την δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος, είναι η 1η εξίσωση Friedmann, η οποία αντιπροσωπεύει την εξίσωση διατήρησης της ενέργειας:

$$\boxed{\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho}{3} - \frac{kc^2}{R^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}} \tag{1}$$

όπου $R(t)$ είναι ο παράγοντας κλίμακας του Σύμπαντος (η συνάρτηση του χρόνου σύμφωνα με την οποία μεταβάλλεται το μέγεθος του Σύμπαντος), ρ είναι η πυκνότητα υλο-ενέργειας του Σύμπαντος, k την καμπυλότητα του χώρου και έχουμε βάλει και την συμμετοχή του όρου της Κοσμολογικής Σταθεράς, Λ, που εισήχθη αυθαίρετα από τον Αϊνστάιν για να πάρει στατικές λύσεις για την εξέλιξη του Σύμπαντος. Στο δεξί μέρος της εξίσωσης έχουμε τους 3 όρους που συνεισφέρουν στην δυναμική του Σύμπαντος, δηλαδή στο ρυθμό μεταβολής του παράγοντα κλίμακας, R.

Μια δεύτερη σημαντική εξίσωση, απαραίτητη για την λύση της εξίσωσης Friedmann είναι η εξίσωση συνέχειας (fluid equation), η οποία περιγράφει πως εξελίσσεται η πυκνότητα της υλοενέργειας σε ένα διαστελλόμενο Σύμπαν. Αυτή προκύπτει από το 1^o νόμο της θερμοδυναμικής (δεν θα το δείξουμε σε αυτό το μάθημα):

$$\boxed{\dot{\rho} + 3\frac{\dot{R}}{R}\left[\rho + \frac{P}{c^2}\right] = 0} \tag{2}$$

Χρειαζόμαστε επίσης και μια καταστατική εξίσωση που να συνδέει την πυκνότητα με την πίεση της υλοενέργειας του Σύμπαντος, $P = P(\rho)$, για να μπορέσουμε να λύσουμε το παραπάνω σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων και να πάρουμε την δυναμική εξέλιξη του Σύμπαντος, δηλαδή την συνάρτηση $R = f(t, \rho, k, \Lambda)$.

Μία ακόμα εξίσωση που είναι σημαντική για την μελέτη της δυναμικής του Σύμπαντος, είναι η 2η εξίσωση Friedmann, η οποία προκύπτει επίσης και από τον συνδυασμό των παραπάνω εξισώσεων, δηλαδή οι 3 αυτές εξισώσεις είναι ανά δύο ανεξάρτητες.

Παραγωγίζοντας την εξ.(1) και χρησιμοποιώντας την εξ.(2) μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι:

$$\boxed{\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3P}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}} \tag{3}$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι εάν κάποια συνιστώσα της ύλης στο σύμπαν έχει πίεση, αυτή θα συνεισφέρει στην αύξηση της βαρυτικής δύναμης (όπως μας διδάσκει η ΓΘΣ έχει θετική συνεισφορά μαζί με την πυκνότητα στο αριστερό μέρος της εξίσωσης) και άρα στην επιβράδυνση της διαστολής. Επιπλέον βλέπουμε ότι σε απουσία κοσμολογικής σταθεράς, $\Lambda = 0$, το σύμπαν πάντα θα επιβραδύνετε ($\ddot{R} < 0$). Εάν όμως η κοσμολογική σταθερά είναι μη-μηδενική και θετική και εάν $\Lambda \geq 4\pi(G/c^2)(\rho + 3P/c^2)$ ή εάν για το κυρίαρχο ρευστό ισχύει $(\rho + 3P/c^2) < 0$, τότε η επιβράδυνση γυρνάει σε επιτάχυνση της διαστολής.

1.2 Καταστατική Εξίσωση

Όπως έχουμε ήδη πει το σύμπαν διαστέλλεται ομογενώς και ισοτροπικά και επομένως και αδιαβατικά, δηλαδή δεν υπάρχει διαφορική ροή θερμότητας από μια περιοχή σε άλλη. Αυτό σημαίνει ότι όπως το σύμπαν διαστέλλεται, ψύχεται ομογενώς επίσης. Και εφόσον ξεκίνησε από μια υπέρθερμη κατάσταση είναι φανερό ότι σε διαφορετικές εποχές της θερμικής του εξέλιξης, διαφορετικά είδη σωματιδίων, κάθε ένα με την δική του καταστατική εξίσωση, κυριαρχούν στην δυναμική εξέλιξη του σύμπαντος. Πχ. τα σχετικιστικά σωματίδια θα κυριαρχούν στην πρώιμη υπέρθερμη κατάσταση, ενώ η βαρυονική ή ψυχρή σκοτεινή ύλη στην ύστερη ψυχρότερη περίοδο.

Μπορούμε να ορίσουμε μια γενικευμένη καταστατική εξίσωση, $p = p(\rho)$, που να ισχύει για όλες τις εποχές, παραμετροποιώντας την με μια παράμετρο w (που ονομάζεται και *παράμετρος της καταστατικής εξίσωσης*) ως εξής:

$$p = w\langle v^2\rangle\rho \tag{4}$$

όπου $\langle v^2\rangle$ είναι η διασπορά ταχυτήτων των στοιχείων του όποιου ρευστού. Όταν κάποια σωματίδια είναι σχετικιστικά, δηλαδή η θερμοκρασία του σύμπαντος είναι πολύ μεγαλύτερη της μάζας ηρεμίας τους (όταν δηλαδή $k_b T \gg m_\circ v^2$, με $v^2 \simeq c^2$), τότε έχουν την καταστατική εξίσωση της ακτινοβολίας $p = 1/3\rho c^2$ οπότε $w = 1/3$. Όταν τα σωματίδια είναι μη-σχετικιστικά (δηλαδή όταν $k_b T \sim m_\circ v^2$ με $v^2 \ll c^2$) τότε η πίεση τους είναι αμελητέα και ισχύει η προσέγγιση της 'σκόνης', δηλαδή $w = 0$.

Εάν τώρα συνδυάσουμε την εξ. (4) με την εξίσωση ρευστού (εξ. 2) παίρνουμε την γενικευμένη σχέση μεταξύ πυκνότητας οποιουδήποτε ρευστού (σε οποιαδήποτε χαρακτηριστική εποχή στην εξέλιξη του σύμπαντος) και του παράγοντα κλίμακας, R, συναρτήσει της παραμέτρου w:

$$\rho \propto R^{-3(1+w)} \tag{5}$$

Εάν δε κανονικοποιήσουμε την εξέλιξη της σε σχέση με τη τιμή της στον παρόντα χρόνο, έχουμε:

$$\rho_i = \rho_{i,0}\left(\frac{R_0}{R}\right)^{-3(1+w)} . \tag{6}$$

όπου $\rho_{i,0}$ είναι η πυνότητα ενέργειας της συνιστώσας i στον παρόντα χρόνο.

Οπλισμένοι με την σχέση (5) μπορούμε πλέον να λύσουμε την εξίσωση του Friedmann για να πάρουμε την κοσμολογική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας, αλλά και να υπολογίσουμε την ηλικία του σύμπαντος.

1.3 Μοντέλο Einstein deSitter ($\Lambda = k = 0$)

Ως κλασσικά κοσμολογικά μοντέλα νοούνται αυτά χωρίς την παρουσία Κοσμολογικής σταθεράς ($\Lambda = 0$), και χαρακτηρίζονται από την τιμή της παραμέτρου καμπυλότητας, k. Έχουμε δηλαδή μια, μια-προς-μια αντιστοιχία μεταξύ των μοντέλων και της γεωμετρίας του χώρου, όπως αυτή χαρακτηρίζεται από τον παράγοντα k. Το απλούστερο μοντέλο είναι αυτό που περιέχει μόνο ύλη, και επομένως $\Omega_{m,0} = 1$, αλλά φυσικά και ακτινοβολία στο αρχέγονο Σύμπαν, και χαρακτηρίζεται από επίπεδη γεωμετρία. Αυτό το Σύμπαν διαστέλλεται επ'άπειρον και συνήθως θεωρείται ότι είναι χωρικά άπειρο, αν και υπάρχουν και πεπερασμένες (πχ. τοροειδείς) επιφάνειες με επίπεδη γεωμετρία. Παρόλο που οι παρατηρήσεις των διαταραχών θερμοκρασίας του υποβάθρου μικροκυμάτων έχουν δείξει ότι πράγματι το σύμπαν έχει μηδενική χωρική καμπυλότητα ($k = 0$), και επομένως η γεωμετρία που διέπει το κοσμικό χώρο είναι η Ευκλείδεια, το απλό αυτό μοντέλο δεν ισχύει μιας και παρατηρήσεις υπερκαινοφανών αστέρων SNIa έχουν δείξει ότι το Σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα, οπότε και $\Lambda > 0$.

Η εξίσωση Friedmann για αυτό το μοντέλο γράφεται:

$$\frac{\dot{R}^2}{R^2} = \frac{8\pi G\rho_m}{3} \tag{7}$$

που είναι πολύ εύκολο να την λύσουμε χρησιμοποιώντας την εξ.(4), όπου βέβαια η παράμετρος, w, της καταστατικής εξίσωσης μπορεί να πάρει τιμές $w = 0$ για την συνιστώσα της ύλης και τιμή $w = -1/3$ για την συνιστώσα της ακτινοβολίας. Ολοκληρώνοντας τελικά την παραπάνω εξίσωση παίρνουμε την λύση για την χρονική εξέλιξη του παράγοντα κλίμακας:

$$\boxed{R(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}} \tag{8}$$

Διαφορίζοντας την εξίσωση αυτή, διαιρώντας κατά μέλη με την ίδια, τότε στον παρόντα χρόνο παίρνουμε την ηλικία του Σύμπαντος σε αυτό το κοσμολογικό μοντέλο, $t_0^{EdS} = \frac{2}{3H_0}$.

Επίσης εάν αντικαταστήσουμε το παράγοντα κλίμακας από την εξ.(8) στην εξ.(7) βρίσκουμε πως εξελίσσετε η πυκνότητα της ύλης με τον χρόνο.

$$\boxed{\rho = \frac{1}{6\pi G t^2 (1+w)^2}} \tag{9}$$

1.4 Κοσμολογικές Παράμετροι

1.4.1 Κρίσιμη Πυκνότητα

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για την μελέτη διαφορετικών κοσμολογικών μοντέλων να ορίσουμε με έναν συστηματικό και παραμετροποιημένο τρόπο όλες τις παραμέτρους που επηρεάζουν την δυναμική του Σύμπαντος. Για αυτό το σκοπό θα ορίσουμε την 'συνολική (ή κρίσιμη) πυκνότητα', που είναι η συνολική πυκνότητα όλων των πραγματικών ή εικονικών ρευστών που συνυπάρχουν στο Σύμπαν (στην περίπτωση του μοντέλου με $k = \Lambda = 0$ ονομάζεται 'κρίσιμη' πυκνότητα) και η τιμή της βρίσκεται από την εξ.(1) λύνοντας ως προς την πυκνότητα:

$$\rho_{\rm cr} = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{10}$$

που στο παρόν χρόνο ($t = t_0$), όπου $H = H_0$, έχει τιμή:

$$\rho_{cr,0} = 1.88 \times 10^{-29} h^2 \text{ gm cm}^{-3} = 2.78 h^{-1} \times 10^{11} M_\odot (h^{-1}\text{Mpc})^{-3}$$

1.4.2 Σταθερά του Hubble

Η παράμετρος του Hubble (εξ.;;) στην παρούσα εποχή ($t = t_0$) ονομάζεται σταθερά του Hubble, δηλαδή $H(t = t_0) = H_0$, και έχει τιμή:

$$H_0 = 74 \pm 4 \text{ km s}^{-1}\text{Mpc}^{-1} \tag{11}$$

(πχ. Riess et al. 2011; Chávez et al 2012). Κυρίως για ιστορικούς λόγους, μιας και η τιμή της σταθεράς του Hubble ήταν για πολλά χρόνια παρατηρησιακά αβέβαιη (με αβεβαιότητα $\sim 50\%$), είθισται να παρουσιάζεται σε παραμετρική μορφή:

$$H_\circ = 100\ h\ \frac{\text{km}}{\text{sec Mpc}} = \frac{1}{9.78 \text{ Gyr's}} \times\ h \tag{12}$$

όπου η παράμετρος h, σύμφωνα με την σημερινή τιμή της σταθεράς H_0 έχει τιμή $h = 0.74$.

1.4.3 Κοσμολογική Σταθερά

Παρόλο που το μοντέλο με μη-μηδενική κοσμολογική σταθερά υπάρχει ως μαθηματική δυνατότητα από τον ίδιο τον θεμελιωτή της ΓΘΣ, τον Αϊνστάιν, πρόσφατα έχει αποκτήσει τεράστιο ενδιαφέρον λόγω των παρατηρήσεων υπερκαινοφανών αστέρων τύπου SNIa που έχουν δείξει ότι το σύμπαν διαστέλλεται επιταχυνόμενα (δηλαδή $\Lambda > 0$), γεγονός που προϋποθέτει μια συνιστώσα της δυναμικής εξέλιξης του σύμπαντος να έχει καταστατική εξίσωση με αρνητική πίεση· όπως είναι η περίπτωση της Κοσμολογική σταθεράς.

1.5 Το Σύμπαν του Αϊνστάϊν

Αρχικά η Κοσμολογική σταθερά εισήχθη αυθαίρετα από τον Αϊνστάιν στις εξισώσεις πεδίου της ΓΘΣ, εφαρμοζόμενων στο κοσμολογικό υπόβαθρο υπό την υπόθεση της ομοιογένειας και ισοτροπίας, για να επιτύχει στατικές λύσεις, μιας και οι λύσεις που εξάγονταν προέβλεπαν ένα δυναμικά εξελισσόμενο σύμπαν. Για να δούμε την αναγκαιότητα εισαγωγής της Κοσμολογικής σταθεράς για τον παραπάνω δεδηλωμένο σκοπό, ας πάρουμε την αρχική εξίσωση Friedmann εξ.(3) χωρίς τον όρο του Λ. Βλέπουμε ότι για να επιτύχουμε στατική λύση , δηλαδή

$$\dot{R} = \ddot{R} = 0 ,$$

πρέπει να έχουμε

$$\rho + 3p/c^2 = 0 .$$

Αλλά όλα τα γνωστά ρευστά έχουν καταστατική εξίσωση με $\rho + 3p/c^2 > 0$. Άν όμως εισάγουμε τον όρο της Κοσμολογικής σταθεράς τότε μπορούμε να έχουμε κανονική ύλη (με την αναμενόμενη καταστατική εξίσωση) αλλά και να επιτύχουμε μια στατική λύση.

Συνδυάζοντας τις εξ. (1) και (3) και απαλείφοντας τον όρο της πυκνότητας, παίρνουμε για την στατική περίπτωση ότι:

$$P = \frac{(k/R^2 - \Lambda)c^4}{8\pi G}$$

οπότε για την περίπτωση ενός σύμπαντος που κυριαρχείται από την ύλη ($P = 0$) παίρνουμε ότι ο παράγοντας κλίμακας του Σύμπαντος δίδεται από:

$$R = (k/\Lambda_c)^{1/2} \tag{13}$$

που σημαίνει ότι για θετική τιμή του Λ_c έχουμε $k = +1$ (θετικά καμπυλωμένο - σφαιρικής γεωμετρίας - σύμπαν) ενώ για αρνητική τιμή παίρνουμε $k = -1$ (αρνητικά καμπυλωμένο - υπερβολικής γεωμετρίας -σύμπαν). Εισάγοντας την εξ.(13) στην (1) παρήγαγε ο Αϊνστάϊν την πυκνότητα ύλης αυτού του Σύμπαντος:

$$\rho = \frac{\Lambda_c c^2}{4\pi G} \tag{14}$$

όπου Λ_c, η κρίσιμη τιμή της σταθεράς Λ για την οποία $\dot{R} = \ddot{R} = 0$, έχει θετική τιμή. Παρόλη την προσπάθεια παραγωγής στατικών λύσεων, τελικά αποδείχθηκε ότι η παραπάνω λύση ήταν ασταθής σε μικρές διαταραχές του Λ_c οι οποίες αλλάζουν δραματικά την συμπεριφορά του R. Μπορούμε να το καταλάβουμε αυτό αν σκεφτούμε ότι μια μικρή διαταραχή στο παράγοντα R, για την ίδια τιμή του Λ_c, θα προκαλέσει ανάλογα με το πρόσημο της διαταραχής ένα διαστελλόμενο ή συστελλόμενο σύμπαν.

1.5.1 Φυσική Ερμηνεία της Κοσμολογικής Σταθεράς

Η Κοσμολογική Σταθερά έχει ερμηνευτεί ως η ενέργεια του κενού, που σύμφωνα με την κβαντική θεωρία πεδίου έχει καταστατική εξίσωση: $P_{vac} = -c^2 \rho_{vac}$, παρόμοια δηλαδή με αυτή της Κοσμολογικής σταθεράς (δες κεφάλαιο 3.2). Στη κλασσική θεωρία το κενό ενός συστήματος είναι η κατάσταση στην οποία τα σωματίδια παραμένουν ακίνητα, στο ελάχιστο του δυναμικού. Ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή που έχει δυναμικό $U(x) = 1/2k\mathbf{x}^2$ με $\mathbf{x} = -\mathbf{F}/k$, όπου F είναι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο ταλαντούμενο σώμα όταν έχει εκτραπεί κατά διάνυσμα x, όπου έχει ελάχιστο στο $x = 0$ με συνολική ενέργεια $E = T(x) - U(x) = 0$.

Όμως στη Κβαντομηχανική, λόγω της αρχής της αβεβαιότητας του Heisenberg, $\Delta E \Delta t \simeq h/2\pi = \hbar$, η ελαχίστη ενέργεια που μπορεί να έχει ένα σύστημα είναι πεπερασμένη. Παρομοίως στη Κβαντική Θεωρία πεδίου, το κενό, δηλαδή η κατάσταση ελαχίστης ενέργεια είναι μη μηδενική, και μπορεί να ιδωθεί ως μια κατάσταση όπου (εικονικά) σωματίδια και αντισωματίδια διαρκώς δημιουργούνται και εξαϋλώνονται (παρόλο που ούτε να παρατηρηθούν μπορούν, ούτε η ενέργεια τους να μετρηθεί). Η ύπαρξη μη μηδενικής δυναμικής ενέργειας του κενού έχει αποδειχθεί και πειραματικά με το λεγόμενο Casmir effect, και όπως όλες οι μορφές ενέργειας παράγουν βαρυτικό πεδίο, έτσι και η ενέργεια του κενού, παρόλο που λόγο του αρνητικού πρόσημου στη καταστατική της εξίσωση οι δυνάμεις που παράγονται δεν είναι ελκτικές αλλά απωστικές.