ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

5η Ομάδα Προβλημάτων 7 Μαΐου 2010[1]

- ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΟΡΙΑΚΩΝ/ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΩΝ ΤΙΜΩΝ

  1. Υπολογίστε τις ιδιοσυχνότητες και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις μιας τετραγωνικής μεμβράνης πακτωμένης στα άκρα της. Το πρόβλημα περιγράφεται από την εξίσωση

     $$\nabla^2 U + \lambda G(x,y) U = 0$$

     Η συνάρτηση $G(x,y)$ σχετίζεται με την πυκνότητα της μεμβράνης. Δοκιμάστε, διαφορετικές συναρτήσεις πυκνότητας πχ πυκνότερη κεντρική περιοχή ή υψηλότερη πυκνότητα στα όρια κτλπ.

  2. Να βρεθούν οι 4 μικρότερες ιδιοτιμές του μονοδιάστατου προβλήματος Schrödinger

     $$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi}{dx^2} + V(x)\phi = \epsilon\phi$$

     για ένα σωμάτιο παγιδευμένο σε πηγάδι δυναμικού που δίνεται από τη σχέση:

     $$V(x) = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\lambda(\lambda-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\cosh^2(\alpha x)}\right)$$

     Υποθέστε ότι $\alpha = 1$, $\lambda = 4$.
     ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Οι ιδιοτιμές δίνονται αναλυτικά από τη σχέση

     $$\epsilon_n = \frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2\left[\frac{\lambda(\lambda-1)}{2} - (\lambda - 1 - n)^2\right]$$

- ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΔΕΜΠ

  1. Λύστε την εξίσωση

     $$\nabla^2 U + 4\pi^2(x^2+y^2)U = 4\pi\cos[\pi(x^2+y^2)]$$

[1] Επιστροφή ως την 31η Μαΐου

στην τετραγωνική περιοχή που ορίζεται ως : $0 \leq x \leq 0.5$ και $0 \leq y \leq 0.5$ Με οριακές συνθήκες:

$$U(x,0) = \sin(\pi x^2), \qquad U(x,0.5) = \sin[\pi(x^2 + 0.25)]$$

$$U(0,y) = \sin(\pi y^2), \qquad U(0.5,y) = \sin[\pi(y^2 + 0.25)]$$

Η αναλυτική λύση είναι: $U = \sin[\pi(x^2 + y^2)]$.

2. Ποιά είναι η λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 1$$

για τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

(α′) $u(1,\theta) = 1 + \sin(\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta$

(β′) $u(1,\theta) = 2$

(γ′) $u(1,\theta) = \sin\theta$

(δ′) $u(1,\theta) = \sin 3\theta$

Ποιά είναι η μορφή της λύσης (γραφικά)·

3. Ποιά είναι η λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 2$$

με συνοριακή συνθήκη $u(2,\theta) = \sin\theta$. Ποιά είναι η μορφή της λύσης (γραφικά)·

4. Ποιά θα ήταν η λύση του προηγούμενου προβλήματος αν άλλαζε η οριακή συνθήκη σε $u(2,\theta) = \sin(2\theta)$ και ποιά είναι η μορφή της λύσης (γραφικά)·

- ΠΑΡΑΒΟΛΙΚΕΣ ΔΕΜΠ

1. Να γράψετε ένα πρόγραμμα που να προσομοιάζει ένα πρόβλημα διάδοσης θερμότητας με βάση την αναλυτική λύση που παρουσιάσαμε στη θεωρία.

2. Λύστε αριθμητικά την εξίσωση θερμότητας, χρησιμοποιώντας *άμεσα* και *έμμεσα* σχήματα

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

με οριακές συνθήκες $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ και αρχικές $u(x,0) = x$. Μπορείτε να επιβεβαιώσετε και αναλυτικά ότι η λύση είναι

$$u = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin n\pi x}{n\pi} e^{-n^2\pi^2 t}$$

3. Λύστε αριθμητικά την εξίσωση θερμότητας, χρησιμοποιώντας *άμεσα* και *έμμεσα* σχήματα

$$u_t = u_{xx} + 1, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

με οριακές συνθήκες $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ και αρχικές $u(x,0) = 0$.

- ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΕΣ ΔΕΜΠ

1. Στη συνέχεια γράψτε ένα πρόγραμμα στη Mathematica που να κάνει προσομοίωση των ταλαντώσεων μια πακτωμένης στα ακρα χορδής.
2. Γραψτε ένα προγραμμα στη Mathematica που με βάση την παραπάνω διαδικασία να κάνει προσομοίωση των ταλαντώσεων της μεμβράνης.
3. Επιλύστε αριθμητικά την ΔΕΜΠ

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1$$

Α. Με οριακές συνθήκες $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ και αρχικές $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$.

Β. Με οριακές συνθήκες $u(0,t) = 0 = u(1,t)$ και αρχικές $u(x,0) = \sin \pi x$ $u_t(x,0) = 0$

Κάντε ανάλυση Fourier για την κάθε μια περίπτωση και σχολιάστε τα φάσματα που παρατηρείτε.

4. Μπορείτε να λύσετε το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο Lax-Wendroff·

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να λύσετε τουλάχιστον 1 ασκηση από κάθε ενότητα + την άσκηση για τη μεμβράνη
- Μπορείτε να συνεργαστείτε αλλά αν είστε 2 θα πρεπει να λύσετε 2 προβλήματα από κάθε κατηγορία κοκ