Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

15 Απριλίου 2010

- Πολλά σημαντικά επιστημονικά προβλήματα στο χώρο της φυσικής περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους (ΔΕΜΠ).
- Συνήθως το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε παριστάνεται από μια συνάρτηση περισοτέρων της μιας μεταβλητών που ικανοποιεί συγκεκριμένη μορφή εξίσωσης.
- Τα περισσότερα επιστημονικά/φυσικά προβλήματα μάλιστα περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις των οποίων η ανώτερης τάξης παράγωγος είναι δεύτερης τάξης.
- Για παράδειγμα αν ψ είναι μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x και y τότε υπάρχουν τρείς μερικές παράγωγοι της δεύτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tag{1}$$

Με βάση τις τιμές των συντελεστών των παραγώγων δεύτερης τάξης κατατάσουμε τις διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους σε **ελλειπτικές**, **παραβολικές**, **υπερβολικές**. Μια ΔΕΜΠ δεύτερης τάξης είναι της μορφής

$$A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + B\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + C\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + D\left(x, y, \psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0 \qquad (2)$$

Ανάλογα με την τιμή της ποσότητας $B^2 - 4AC$ οι ΔΕΜΠ κατατάσσονται ως:

- **Ελλειπτικές**, αν $B^2 - 4AC < 0$
- **Παραβολικές**, αν $B^2 - 4AC = 0$
- **Υπερβολικές**, αν $B^2 - 4AC > 0$

Αν οι συντελεστές A, B και C είναι συναρτήσεις των x, y τότε είναι δυνατόν μια ΔΕΜΠ να άλλαζει ‘κατηγορία’ σε διάφορες περιοχές του πεδίου ορισμού της.

Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους

Δυο κλασσικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους η *εξίσωση* **Laplace**

$$\nabla^2 \psi = 0 \tag{3}$$

και η *εξίσωση* **Poisson**

$$\nabla^2 \psi = f(x, y) \tag{4}$$

έχουν $B = 0$, $A = C = 1$, και επομένως είναι πάντοτε **ελλειπτικές**.

Η **κυματική εξίσωση**

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0 \tag{5}$$

είναι κλασσική περίπτωση **υπερβολικής** ΔΕΜΠ.

Ενώ η **εξίσωση της θερμότητας**

$$\sigma \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \tag{6}$$

είναι χαρακτηριστική περίπτωση **παραβολικής** ΔΕΜΠ.

Για την επίλυση των παραπάνω προβλημάτων απαιτούνται κατ΄ αρχάς οι κατάλληλες **συνοριακές συνθήκες** ή/και **κατάλληλες αρχικές συνθήκες**.

Παραβολικές ΔΕΜΠ

Θα παρουσιάσουμε μια μέθοδο αναλυτικής επίλυσης μιας 1D παραβολικής ΔΕΜΠ.
Εστω η ΔΕΜΠ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{και} \quad 0 \leq t < \infty \tag{7}$$

με **οριακές συνθήκες** :

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0 \quad \text{για} \quad 0 \leq t < \infty \tag{8}$$

και **αρχικές συνθήκες** :

$$u(x,0) = \phi(x), \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 1 . \tag{9}$$

Για την αναλυτική επίλυση θα θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση $u(t,x)$ μπορεί να γραφεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων η πρώτη εκ των οποίων είνα συνάρτηση **μόνο** της χρονικής μεταβλητής t και η άλλη **μόνο** της χωρικής μεταβλητής x, δηλαδή

$$u(t,x) \equiv T(t) \cdot X(x) \tag{10}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (7) λαμβάνουμε:

$$T'(t)X(x) = a^2 T(t)X''(x) \tag{11}$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως :

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda^2 \tag{12}$$

όπου λ είναι μια σταθερά αναλογίας. Με αυτό τον τρόπο έχουμε αναγάγει την αρχική παραβολική ΔΕΜΠ σε δύο κανονικές διαφορικές εξισώσεις

$$T' - \lambda^2\alpha^2 T = 0 \tag{13}$$

$$X'' - \lambda^2 X = 0 \tag{14}$$

με προφανείς λύσεις

$$T(t) = C\, e^{-\lambda^2\alpha^2 t} \tag{15}$$

$$X(x) = \tilde{A}\sin(\lambda x) + \tilde{B}\cos(\lambda x) \tag{16}$$

Η $u(t,x)$ παίρνει τη μορφή:

$$u(t,x) = Ce^{-\lambda^2\alpha^2 t}\left[\tilde{A}\sin(\lambda x) + \tilde{B}\cos(\lambda x)\right], \tag{17}$$

προφανώς με αντικατάσταση $C \cdot \tilde{A} \to A$ και $C \cdot \tilde{B} \to B$ απαλείφουμε τη σταθερά ολοκλήρωσης C.
Οι εναπομείνουσες σταθερές ολοκλήρωσης A και B θα περιοριστούν ακόμη περισσότερο με χρήση των οριακών συνθηκών (8).

- Η οριακή συνθήκη $u(0,t) = 0$ συνεπάγεται ότι $B = 0$, άρα η λύση γίνεται:

$$u(t,x) = Ae^{-\lambda^2\alpha^2 t}\sin(\lambda x), \tag{18}$$

- Η δεύτερη οριακή συνθήκη $u(1,t) = 0$ συνεπάγεται ότι:

$$e^{-\lambda^2\alpha^2 t}\sin(\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(\lambda) = 0 \tag{19}$$

με προφανείς επιτρεπτές τιμές για τη σταθερά λ τις :

$$\lambda = \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \pm n\pi \quad \text{για} \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{20}$$

Παραβολικές ΔΕΜΠ

- Επομένως, όλες οι συναρτήσεις της μορφής :

$$u_n(t,x) = A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad \text{για} \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{21}$$

αποτελούν λύσεις της ΔΕΜΠ (7), αν και οι σταθερές ολοκλήρωσης A_n θα πρέπει να υπολογισθούν με χρήση της συνθήκης αρχικών τιμών (9).

- Η γενική λύση θα είναι το άθροισμα όλων των λύσεων της μορφής (21), δηλαδή:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-(n\pi\alpha)^2 t} \sin(n\pi x) \quad \text{για} \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{22}$$

- Η συνθήκη αρχική τιμών (9), $u(x,0) = \phi(x)$ οδηγεί στη σχέση

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \tag{23}$$

Οι σταθερές A_n μπορούν να υπολογισθούν ως συνάρτηση της αρχικής συνάρτησης $\phi(x)$ αν χρησιμοποιήσουμε τη **σχέση ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων**, δηλαδή

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1/2, & m = n \end{cases} \tag{24}$$

οπότε αν πολλαπλασιάσουμε την (23) με $sin(m\pi x)$ (όπου m τυχαίος ακέραιος αριθμός) και ολοκληρώσουμε με όρια ολοκλήρωσης από 0 ως 1 λαμβάνουμε

$$\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx = \frac{1}{2}A_m \tag{25}$$

Επομένως, οι σταθερές A_n θα υπολογίζονται από ολοκληρωτικές σχέσεις της μορφής

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx \tag{26}$$

και προφανώς εξαρτώνται κατά μοναδικό τρόπο από την αρχική μορφή της συνάρτησης $\phi(x)$.

- Θα παρουσιάσουμε μια αναλυτική μέθοδο επίλυσης της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{27}$$

- Η κυματική εξίσωση αυτή μπορεί να είναι η εξίσωση ταλάντωσης μιας χορδής, με τη συνάρτηση $u(t,x)$ να παριστάνει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και c την ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων.

- Θα θεωρήσουμε μια πακτωμένη στα άκρα χορδή, που για απλότητα θα υποθέσουμε ότι έχει μήκος $\ell = 1$.
Δηλαδή οι **οριακές** συνθήκες θα είναι

$$u(t,0) = u(t,1) = 0 \quad \text{για} \quad t \geq 0 \tag{28}$$

και οι **αρχικές** θα είναι

$$u(0,x) = \phi(x) \quad \text{και} \quad u_t(0,x) = \psi(x) \quad \text{για} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \tag{29}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική του χωρισμού των μεταβλητών, δηλαδή θα γράψουμε την συνάρτηση $u(t,x)$ ως

$$u(t,x) = T(t) \cdot X(x) \tag{30}$$

όπου η T είναι συνάρτηση μόνο του χρόνου t και η X σύνάρτηση μόνο της χωρικής μεταβλητής x.
Οπότε αντικαθιστώντας στην εξίσωση (27) έχουμε:

$$\ddot{T} \cdot X = c^2 T \cdot X'' \tag{31}$$

αν χωρίσουμε την παραπάνω εξίσωση κατάλληλα

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{X''}{X} = \lambda^2 \quad \text{όπου} \quad \lambda = \text{σταθερά} \tag{32}$$

Επομένως, καταλήγουμε σε δύο κανονικές διαφορίκές εξισώσεις:

$$\ddot{T} \quad - \quad \lambda^2 c^2 T = 0 \tag{33}$$

$$X'' \quad - \quad \lambda^2 X = 0 \tag{34}$$

Υπερβολικές ΔΕΜΠ - 1D

Η γενική λύση των παραπάνω εξισώσεων είναι:

$$T(t) = \alpha_1 \cos(c\lambda t) + \alpha_2 \sin(c\lambda t) \quad (35)$$

$$X(x) = \beta_1 \cos(\lambda x) + \beta_2 \sin(\lambda x) \quad (36)$$

με βάση όμως την οριακή συνθήκη ότι $u(t,0) = u(t,1) = 0$ θα έχουμε ότι $X(0) = X(1) = 0$ που σημαίνει ότι :

$$X(0) = \beta_1 = 0 \quad (37)$$

$$X(1) = \beta_2 \sin(\lambda) = 0 \quad (38)$$

Για να ικανοποιείται η τελευταία εξίσωση, χωρίς να οδηγούμαστε σε μια τετριμμένη λύση, θα πρέπει να ισχύει

$$\lambda = n\pi \quad \text{όπου} \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (39)$$

που οδηγεί σε μια απειρία λύσεων της μορφής

$$X_n(x) = \beta_2 \sin(n\pi x)\,. \quad (40)$$

Με βάση τα προηγούμενα η λύση της εξίσωσης για τη συνάρτηση $T(t)$ γράφεται ως

$$T_n(t) = \alpha_{1,n} \cos(n\pi ct) + \alpha_{2,n} \sin(n\pi ct) \tag{41}$$

Οπότε υπάρχει ένα άπειρο σύνολο λύσεων της κυματικής εξίσωσης της μορφής

$$u_n(t,x) = T_n(t)\,X_n(x) = [A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)]\sin(n\pi x) \tag{42}$$

όπου $A_n = \alpha_{1,n}\beta_2$ και $B_n = \alpha_{2,n}\beta_2$.
Για να βρούμε μια λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες (29) θα υποθέσουμε ότι η λύση δίνεται από την υπέρθεση των άπειρων λύσεων (ή και ενός συνόλου αυτών) δηλαδή η λύση θα είναι της μορφής

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\,X_n(x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi ct) + B_n \sin(n\pi ct)]\sin(n\pi x) \end{aligned} \tag{43}$$

Από την πρώτη από τις αρχικές συνθήκες (29) πέρνουμε:

$$u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) = \phi(x) \tag{44}$$

Οι σταθερές A_n μπορούν να υπολογισθούν ως συνάρτηση της αρχικής συνάρτησης $\phi(x)$ αν χρησιμοποιήσουμε τη σχέση ορθογωνιότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, δηλαδή

$$\int_0^1 \sin(n\pi x)\sin(m\pi x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1/2, & m = n \end{cases} \tag{45}$$

οπότε αν πολλαπλασιάσουμε την (44) με $sin(m\pi x)$ (όπου m τυχαίος ακέραιος αριθμός) και ολοκληρώσουμε με όρια ολοκλήρωσης από 0 ως 1 λαμβάνουμε

$$\int_0^1 \phi(x)\sin(m\pi x)dx = A_m \int_0^1 \sin^2(m\pi x)dx = \frac{1}{2}A_m \tag{46}$$

Επομένως, οι σταθερές A_n θα υπολογίζονται από ολοκληρωτικές σχέσεις της μορφής

$$A_n = 2\int_0^1 \phi(x)\sin(n\pi x)dx \tag{47}$$

και προφανώς εξαρτώνται κατά μοναδικό τρόπο από την αρχική μορφή της συνάρτησης $\phi(x)$.
Απο τη χρήση της 2ης αρχικής συνθήκης θα καθορίσουμε την άλλη άγνωστη ποσότητα B_n, συγκεκριμένα παραγωγίζοντας θα πάρουμε:

$$u_t = \pi c\sum_{n=1}^{\infty} n\left[B_n\cos(n\pi ct) - A_n\sin(n\pi ct)\right]\sin(n\pi x) \tag{48}$$

που για $t = 0$ θα δώσει:

$$u_t(0,x) = \pi c\sum_{n=1}^{\infty} nB_n\sin(n\pi x) = \psi(x) \tag{49}$$

οπότε θα είναι:

$$B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^1 \psi(x)\sin(n\pi x)dx \quad \text{για} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

και η λύση της εξίσωσης είναι πλήρως καθορισμένη.

Υπερβολικές ΔΕΜΠ - 2D

Η εξίσωση της εγκάρσιας κίνησης μιας μεμβράνης είναι:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \tag{51}$$

$c = (p/\rho)^{1/2}$: η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων στη μεμβράνη.
Η εξίσωση (51) είναι δεύτερης τάξης ΔΕΜΠ και επομένως θα πρέπει να ορίσουμε *αρχικές* και *οριακές* συνθήκες έτσι ώστε να υπολογίσουμε μια μοναδική λύση.

- Θα μελετήσουμε μια *κυκλική μεμβράνη* με πακτωμένα τα άκρα της π.χ. επιφάνεια ενός τυμπάνου σε πολικές συντεταγμένες:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \phi^2} \right] \tag{52}$$

Υπερβολικές ΔΕΜΠ - 2D

Επειδή η μεμβράνη είναι πακτωμένη στα άκρα της η **οριακή συνθήκη** θα είναι

$$\zeta(r = R, \phi, t) = 0. \tag{53}$$

Για ευκολία θα υποθέσουμε ότι η ακτίνα της μεμβράνης $R = 1$.
Επομένως η οριακή συνθήκη (53) θα γραφεί ως:

$$\zeta(r = 1, \phi, t) = 0. \tag{54}$$

Μια κλασσική μέθοδος για την αντιμετώπιση τέτοιου είδους προβλημάτων είναι το ανάπτυγμα σε ιδιοσυναρτήσεις. Θα υποθέσουμε ότι η εγκάρσια μετατόπιση $\zeta(r, \phi, t)$ είναι δυνατόν να χωρισθεί σε γινόμενο δύο συναρτήσεων, μια εξ αυτών θα περιγράφει τη χρονικό μέρος και η άλλη το χωρικό,

$$\zeta(r, \phi, t) = G(r, \phi)D(t). \tag{55}$$

Αν αντικαταστήσουμε την σχέση (55) στην εξίσωση (52) μπορούμε να χωρίσουμε το χωρικό από το χρονικό τμήμα της εξίσωσης

$$\frac{1}{D}\frac{d^2D(t)}{dt^2} = c^2\frac{1}{G(r,\phi)}\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}\right] = \text{σταθερό} \equiv -\omega^2 \tag{56}$$

- Επειδή το αριστερό μερος της εξίσωσης είναι συνάρτηση **μόνο** του χρόνου και το δεξιό **μόνο** των χωρικών συντεταγμένων, θα πρέπει να είναι σταθερές και ίσες με μία ποσότητα, που ονομάσαμε $-\omega^2$.
- Επομένως το πρόβλημα ανάγεται στη λύση των παρακάτω δύο εξισώσεων

$$\frac{d^2 D}{dt^2} = -\omega^2 D \tag{57}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}G = -k^2 G \tag{58}$$

όπου $k = \omega/c$ είναι ο κυματάριθμος.

- Θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $G(r,\phi)$ χωρίζεται σε δύο συναρτήσεις. Μία συνάρτηση της ακτινικής συντεταγμένης και μία της γωνιακής, δηλαδή $G(r,\phi) = h(r)g(\phi)$. Με αντικατάσταση στην (58) λαμβάνουμε

$$\frac{r^2}{h}\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{r}{h}\frac{dh}{dr} + k^2 r^2 = -\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{d\phi^2} = \text{σταθερό} = m^2 \tag{59}$$

Υπερβολικές ΔΕΜΠ - 2D

Επομένως το πρόβλημα μας έχει αναχθεί στη λύση δύο κανονικών διαφορικών εξισώσεων

$$\frac{d^2 g}{d\phi^2} + m^2 g = 0 \tag{60}$$

$$\frac{d^2 h}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dh}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) h = 0 \tag{61}$$

Η εξίσωση (60) είναι μια κανονική διαφορική εξίσωση που περιγράφει κανονική ταλάντωση, στη συγκεκριμένη περίπτωση για την γωνιακή συντεταγμένη ϕ. Η γενική λύση της είναι

$$g(\phi) = A\sin(m\phi) + B\cos(m\phi) \tag{62}$$

Η δεύτερη εξίσωση, (61), ανάγεται στην γνωστή εξίσωση Bessel αν θεωρήσουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = kr$.

$$h'' + \frac{1}{x}h' + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) h = 0 \tag{63}$$

Η λύση της εξίσωσης (63) για την παλλόμενη μεμβράνη είναι

$$h(x) = J_m(x) = J_m(kr) \quad \text{όπου} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{64}$$

όπου $J_m(x)$ είναι η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, που στη Mathematica δίνεται απο τη συνάρτηση **BesselJ[m,x]**. Σε μορφή σειράς δίνεται απο τη σχέση:

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m \left[1 - \frac{1}{m+1}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{(m+1)(m+2)}\,\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots\right] \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!\,\Gamma(m+i+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2i} \end{aligned} \tag{65}$$

⋆⋆⋆ Οι συναρτήσεις Bessel υπακούουν σε νόμους ορθογωνιότητας ανάλογους με αυτούς των **πολυωνύμων Legendre** που είναι γνωστά από την Κβαντομηχανική.

Αν ισχύει ότι οι $J_m(kx)$ και $J_m(lx)$ (ή οι παράγωγοι τους) μηδενίζονται στα σημεία a και b τότε

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(lx)xdx = 0 \quad \text{αν} \quad k \neq l \tag{66}$$

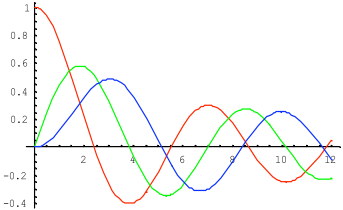
ενώ

$$\int_a^b J_m(kx)J_m(lx)xdx = \frac{x^2}{2}\left[J_m'(kx)\right]^2\Big|_a^b = \frac{x^2}{2}\left[J_{m+1}(kx)\right]^2\Big|_a^b \quad \text{αν} \quad k = l \tag{67}$$

⋆⋆⋆ Οι παραπάνω σχέσεις ορθογωνιότητας χρησιμοποιούνται συνήθως για τον υπολογισμό των συντελεστών σε αναπτύγματα συναρτήσεων σε σειρές συναρτήσεων Bessel.

Με την χρήση της Mathematica μπορούμε να δημιουργήσουμε τη γραφική παράσταση των συναρήσεων Bessel. Η εντολή είναι:

Plot[Evaluate[Table[BesselJ[n,x],{n,0,2}]],{x,0,12}, PlotStyle $->${{RGBColor[1,0,0]},{RGBColor[0,1,0]},{RGBColor[0,0,1]}}]



Σχήμα: Γραφική παράσταση των συναρτήσεων Bessel $J_0(x)$, $J_1(x)$ και $J_2(x)$.

Επομένως, η λύση της εξίσωσης (58) γράφεται στη μορφή

$$G_m(r,\phi) = J_m(kr)\,[A\sin(m\phi) + B\cos(m\phi)] \tag{68}$$

Ο δείκτης m στη συνάρτηση G_m υποδηλώνει την ύπαρξη διαφορετικών λύσεων για τις διάφορες τιμές του m.
Εως τώρα δεν χρησιμοποιήσαμε τις οριακές συνθήκες (54) ή (55), που με βάση το χωρισμό της συνάρτησης που ορίσαμε γράφεται

$$G(r=1,\phi) = h(r=1)\cdot g(\phi) = 0 \tag{69}$$

και επομένως

$$J_m(k) = 0. \tag{70}$$

Επομένως ο υπολογισμός των **ιδιοτιμών** k έχει αναχθεί στην εύρεση των ριζών της εξίσωσης (70) η καλύτερα των ριζών των συναρτήσεων Bessel.
Η κατάλληλη εντολή στη Mathematica είναι:

```
<< NumericalMath`BesselZeros`
BesselJZeros[k,m]
```

Ειναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις Bessel έχουν άπειρο αριθμό ριζών, επομένως για κάθε τιμή του m πρέπει να υπολογίσουμε ένα άπειρο αριθμό ιδιοτιμών k απο την εξίσωση (70).
Θα ακολουθήσουμε την εξής αρίθμηση για τις ιδιοτιμές k, θα τις γράφουμε στη μορφή $k_{m,n}$ όπου ο δείκτης n θα είναι η n-οστή ρίζα της m συνάρτησης Bessel.
Αντίστοιχα θα αριθμούμε και τις τιμές του $\omega = ck$ δηλαδή $\omega_{m,n}$.
Μερικές χαρακτηριστικές τιμές των ριζών των συναρτήσεων Bessel είναι:

$$
\begin{aligned}
J_0(k) = 0 \quad &: \quad k_{0,n} \sim 2.40,\ 5.52,\ 8.65 \\
J_1(k) = 0 \quad &: \quad k_{1,n} \sim 3.83,\ 7.02,\ 10.17 \\
J_2(k) = 0 \quad &: \quad k_{2,n} \sim 5.14,\ 8.42,\ 11.62
\end{aligned}
$$

Αρα οι χαμηλότερες αρμονικές συχνότητες και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις θα είναι:

$$
\begin{aligned}
&k_{0,1} = 2.40 \qquad && \omega_{0,1} = 2.40c \quad && G_0 \sim J_0(2.40r) \\
&k_{1,1} = 3.83 \qquad && \omega_{1,1} = 3.83c \quad && G_1 \sim J_1(3.83r)\left[A\sin(\phi) + B\cos(\phi)\right] \\
&k_{2,1} = 5.14 \qquad && \omega_{2,1} = 5.14c \quad && G_2 \sim J_2(5.14r)\left[A\sin(2\phi) + B\cos(2\phi)\right] \\
&k_{0,2} = 5.52 \qquad && \omega_{0,2} = 5.52c \quad && G_0 \sim J_0(5.52r)
\end{aligned}
$$

Η χρονικά εξαρτώμενη λύση της εξίσωσης (52) για συγκεκριμένες τιμές των m και n θα είναι:

$$
\begin{aligned}
\zeta_{m,n}(r,\phi,t) = J_m(k_{m,n}r) \quad &\times \quad \left[A_{m,n}\sin(m\phi) + B_{m,n}\cos(m\phi)\right] \\
&\times \quad \left[\Gamma_{m,n}\sin(\omega_{m,n}t) + \Delta_{m,n}\cos(\omega_{m,n}t)\right] \qquad (71)
\end{aligned}
$$

όπου $\omega_{m,n} = ck_{m,n}$.

Επειδή η εξίσωση (52) είναι μια *γραμμική* εξίσωση κίνησης, η γενική λύση θα είναι μια υπέρθεση των επιμέρους λύσεων (71).
Οπότε αθροίζοντας ώς προς τα m και n καταλήγουμε στην

$$\zeta(r,\phi,t) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} C_{m,n}\zeta_{m,n}(r,\phi,t) \tag{72}$$

η σε αναλυτική μορφή

$$\begin{aligned}\zeta(r,\phi,t) &= \sum_{m,n=0}^{\infty} K_{m,n}J_m(k_{m,n}r)\sin(m\phi)\left[\Gamma_{m,n}\sin(\omega_{m,n}t)+\Delta_{m,n}\cos(\omega_{m,n}t)\right]\\ &+ \sum_{m,n=0}^{\infty} L_{m,n}J_m(k_{m,n}r)\cos(m\phi)\left[\Gamma_{m,n}\sin(\omega_{m,n}t)+\Delta_{m,n}\cos(\omega_{m,n}t)\right]\end{aligned} \tag{73}$$

όπου $K_{m,n} = C_{m,n}A_{m,n}$ και $L_{m,n} = C_{m,n}B_{m,n}$.
Οι άγνωστες ποσότητες στο ανάπτυγμα (73) είναι οι (χρονικά ανεξάρτητοι) συντελεστές $K_{m,n}\Gamma_{m,n}$, $K_{m,n}\Delta_{m,n}$, $L_{m,n}\Gamma_{m,n}$ και $L_{m,n}\Delta_{m,n}$.

Αν χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα τις αρχικές συνθήκες μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές απο τις σχέσεις:

$$K_{m,n}\Gamma_{m,n} = \frac{1}{\omega_{m,n}\pi J_{m,n}}\left[I_2^{m,n} I_3^{m,n} + I_1^{m,n} I_4^{m,n}\right] \tag{74}$$

$$L_{m,n}\Gamma_{m,n} = \frac{1}{\omega_{m,n}\pi J_{m,n}}\left[I_2^{m,n} I_5^{m,n} + I_1^{m,n} I_6^{m,n}\right] \tag{75}$$

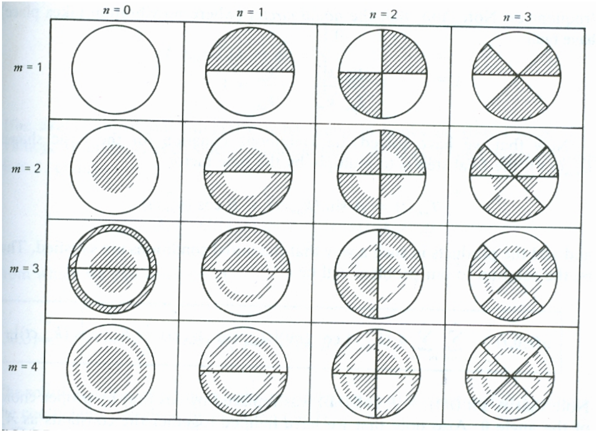
$$K_{m,n}\Delta_{m,n} = \frac{1}{\pi J_{m,n}} I_1^{m,n} I_3^{m,n} \tag{76}$$

$$L_{m,n}\Delta_{m,n} = \frac{1}{\pi J_{m,n}} I_1^{m,n} I_5^{m,n} \tag{77}$$

Οπότε απαιτείται ο υπολογισμός των παρακάτω ολοκληρωμάτων:

$$
\begin{aligned}
J_{m,n} &= \int_0^1 J_m^2(k_{m,n}r)rdr && (78)\\
I_1^{m,n} &= \int_0^1 h_1(r)J_m(k_{m,n}r)rdr && (79)\\
I_2^{m,n} &= \int_0^1 h_2(r)J_m(k_{m,n}r)rdr && (80)\\
I_3^{m,n} &= \int_0^{2\pi} g_1(\phi)\sin(m\phi)d\phi && (81)\\
I_4^{m,n} &= \int_0^{2\pi} g_2(\phi)\sin(m\phi)d\phi && (82)\\
I_5^{m,n} &= \int_0^{2\pi} g_1(\phi)\cos(m\phi)d\phi && (83)\\
I_6^{m,n} &= \int_0^{2\pi} g_2(\phi)\cos(m\phi)d\phi && (84)
\end{aligned}
$$

Παλλόμενη Κυκλική Μεμβράνη



Σχήμα: Κανονικές μορφές ταλάντωσης μια κυκλικής μεμβράνης

Παλλόμενη Κυκλική Μεμβράνη

Τα βασικά βήματα στην επίλυση του προβλήματος είναι:

1. Ο υπολογισμός των ριζών των συναρτήσεων Bessel.
2. Ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων $I_i^{m,n}$.
3. Τέλος για πρακτικούς λόγους δεν θα περιλάβουμε άπειρους όρους στο ανάπτυγμα (73), αλλά αντίθετα ένα πεπερασμένο αριθμό όρων ανάλογα με την υπολογιστική ισχύ του ΗΥ μας και την μνήμη RAM που διαθέτει.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Να δείξετε (αριθμητικά) τις σχέσεις ορθογωνιότητας (66) και (67) με χρήση της Mathematica.
2. Να γράφετε ένα πρόγραμμα που να προσομοιάζει ένα πρόβλημα διάδοσης θερμότητας με βάση την αναλυτική λύση που παρουσιάσαμε.
3. Στη συνέχεια γράψτε ένα πρόγραμμα στη Mathematica που να κάνει προσομοίωση των ταλαντώσεων μια πακτωμένης στα ακρα χορδής.
4. Γραψτε ένα προγραμμα στη Mathematica που με βάση την παραπάνω διαδικασία να κάνει προσομοίωση των ταλαντώσεων της μεμβράνης.

Η εξίσωση Poisson

$$\nabla^2 u(x,y,z) = f(x,y,z) \tag{85}$$

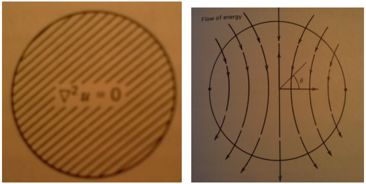
είναι θεμελιώδης ΔΕΜΠ για πολλούς κλάδους της Φυσικής για παράδειγμα βαρύτητα, ηλεκτρομαγνητισμό, μελέτης της ροής ρευστών κοκ

Θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε αναλυτικά της λύσεις της χρησιμοποιώντας τις τεχνικές που αναπτύξαμε για άλλους τύπους ΔΕΜΠ (παραβολικές, υπερβολικές).

Για αυτούς τους τύπους ΔΕΜΠ η λύση καθορίζεται αποκλειστικά από τις οριακές συνθήκες της περιοχής που γίνεται η μελέτη.

ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

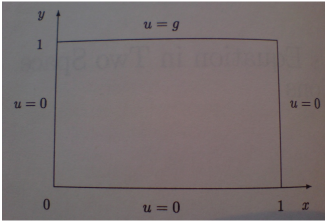
- **Πρόβλημα Dirichlet**: εδώ καθορίζουμε τις τιμές της συνάρτησης u στο σύνορο της περιοχής μελέτης. Για παράδειγμα, θεωρείστε το πρόβλημα εύρεσης της κατανομής της θερμοκρασίας στο εσωτερικό μιας περιοχής για την οποία είναι γνωστή η θερμοκρασία στο σύνορο της.
- **Πρόβλημα Neumann**: εδώ καθορίζουμε τις τιμές της συνάρτησης $\partial u/\partial n$ στο σύνορο της περιοχής μελέτης. Για παράδειγμα, θεωρείστε το πρόβλημα εύρεσης της συνεχούς ροής (ενέργειας, ηλεκτρονίων κοκ) στο εσωτερικό μιας περιοχής για την οποία είναι γνωστή η ροή (ενέργειας, ηλεκτρονίων κοκ) στο σύνορο της.



Σχήμα: (Αριστερά): Πρόβλημα Dirichlet με $u(\rho,\theta)=\sin\theta$
(Δεξιά): Πρόβλημα Neumann

Θα παρουσιάσουμε μια λύση της εξίσωσης Poisson με οριακές συνθήκες Dirichlet σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{86}$$



Οριακές συνθήκες Dirichlet σε τετράγωνο.

$$u(0, y) = u(1, y) = 0 \quad 0 \leq y \leq 1 \tag{87}$$
$$u(x, 0) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{88}$$
$$u(x, 1) = g(x) \quad 0 \leq x \leq 1 \tag{89}$$

θα κάνουμε την υπόθεση ότι η λύση μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \tag{90}$$

οπότε με ανστικατάσταση στην εξίσωση Poisson (86) πέρνουμε

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0 \tag{91}$$

και τελικά

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda \tag{92}$$

Οπότε θα αντιμετωπίσουμε τα δύο προβλήματα οριακών τιμών που προκείπτουν ξεχωριστά.

- $$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \quad \text{όπου} \quad 0 < x < 1 \quad \text{και} \quad X(0) = X(1) = 0\,, \tag{93}$$

  το πρόβλημα αυτό έχει ιδιοτιμές

  $$\lambda_k = (k\pi)^2\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{94}$$

  και ιδιοσυναρτήσεις

  $$X_k(x) = \sin(k\pi x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{95}$$

- $$Y''(y) - \lambda Y(y) = 0 \quad \text{όπου} \quad 0 < y < 1 \quad \text{και} \quad Y(0) = Y(1) = 0\,, \tag{96}$$

  Η γενική λύση της (96) για $\lambda = \beta^2$, θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός της $e^{\beta y}$ και της $e^{-\beta y}$ και λόγω της οριακής συνθήκης στο $y = 0$ η λύση θα είναι της μορφής

  $$Y(y) = \sinh(\beta y) \tag{97}$$

Αρα οι μερικές λύσεις θα έχουν τη μορφή

$$u_k(x, y) = \sin(k\pi x) \cdot \sinh(k\pi y)\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \tag{98}$$

και η γενική λύση θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των μερικών δηλαδή

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x) \sinh(k\pi y) \tag{99}$$

όπου τα c_k είναι αυθαίρετοι πραγματικοί συντελεστές.

Αν λάβουμε υπ'όψη μας την οριακή συνθήκη που δίνεται από τη σχέση (89) και υποθέσουμε ότι η $g(x)$ επιδέχεται ένα ανάπτυγμα Fourier σε ημίτονα, δηλαδή

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \sin(k\pi x) \tag{100}$$

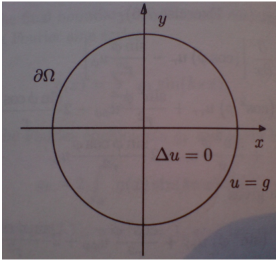
οπότε οι συντελεστές Fourier g_k θα είναι

$$g_k = 2\int_0^1 g(x)\sin(k\pi x)dx \tag{101}$$

οπότε από την οριακή συνθήκη (89) για $y = 1$ οδηγούμαστε στη σχέση:

$$c_k = g_k / \sinh(k\pi) \quad \text{για} \quad k = 1, 2, \ldots \tag{102}$$

Θα μελετήσουμε το εσωτερικό Dirichlet πρόβλημα για δίσκο.



Η **εξίσωση** Poisson **για δίσκο** είναι:

$$\nabla^2 u \equiv u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0 \quad \text{για} \quad 0 < r < \rho \tag{103}$$

Με οριακή συνθήκη:

$$u(\rho, \theta) = g(\theta) \quad \text{για} \quad 0 \leq \theta < 2\pi \tag{104}$$

Θα προσπαθήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας της μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

Κατ' αρχάς θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $g(\theta)$ είναι περιοδική και επομένως μπορεί να γραφεί με τη μορφή σειράς Fourier της μορφής:

$$g(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \right] , \tag{105}$$

όπου

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \cos(k\theta) d\phi \tag{106}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\phi) \sin(k\theta) d\phi \tag{107}$$

Θα κάνουμε την υπόθεση ότι:

$$u(r,\theta) = R(r)\cdot\Theta(\theta)\,, \tag{108}$$

οπότε η εξίσωση (103) θα γραφεί ως:

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0 \tag{109}$$

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \equiv \lambda \tag{110}$$

όπου το λ είναι ανεξάρτητο από τα r και θ. Επομένως καταλήγουμε στις κανονικές διαφορικές εξισώσεις

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0 \tag{111}$$

και

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{112}$$

Προφανώς, η συνάρτηση Θ πρέπει να είναι 2π-περιοδική ως πρός τη μεταβλητή θ. Οπότε στη ΔΕ (111) θα θέσουμε τη συνθήκη:

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \quad \text{και} \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \tag{113}$$

Υπ' αυτές τις συνθήκες θα πάρουμε ως ιδιοτιμές

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{114}$$

με ιδιοσυναρτήσεις

$$\Theta_k(\theta) = c_1 \cos(k\phi) + c_2 \sin(k\phi) \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{115}$$

όπου τα c_1 και c_2 είναι αυθαίρετες σταθερές.

- Η διαφορική εξίσωση (112) είναι γνωστή ως **εξίσωση Euler** και επιδέχεται λύσεις της μορφής:

$$R(r) = r^\beta \tag{116}$$

οπότε αντικαθιστώντας στην (112) λαμβάνουμε

$$\beta(\beta - 1)r^\beta + \beta r^\beta - k^2 r^\beta = 0\,, \tag{117}$$

που οδηγεί στη σχέση:

$$\beta = \pm k \tag{118}$$

Οπότε για $k \geq 1$ θα πάρουμε μια λύση που θα είναι γραμμικός συνδυασμός των r^{-k} και r^{k} δηλαδή

$$R(r) = c_1 r^k + c_2 r^{-k} \tag{119}$$

Ενώ για $k = \lambda = 0$ η λύση θα είναι της μορφής:

$$R(r) = c_1 \ln(r) + c_2 \tag{120}$$

Επειδή οι λύσεις στο εσωτερικό της περιοχής θα πρέπει να μην έχουν απειρισμούς οι λύσεις της μορφής r^{-k} και $\ln(r)$ που απειρίζονται στο $r = 0$ θα πρέπει να απορριφθούν. Επομένως η αποδεκτή λύση θα πρέπει να είναι της μορφής:

$$R_k(r) = c_1 r^k \quad \text{για} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{121}$$

Οπότε η γενική λύση θα είναι:

$$u(r,\theta) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(\tilde{a}_k \cos(k\phi) + \tilde{b}_k \sin(k\phi)\right) \tag{122}$$

όπου $\tilde{a}_k$ και $\tilde{b}_k$ είναι σταθερές που θα πρέπει να υπολογισθούν από την οριακή συνθήκη $u(\rho,\theta) = g(\theta)$. Με βάση τις εξισώσεις (105), (106) και (107) βρίσκουμε ότι:

$$\tilde{a}_k = a_k \rho^{-k} \quad \text{και} \quad \tilde{b}_k = b_k \rho^{-k} \tag{123}$$

- Ποιά είναι η λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 1$$
για τις παρακάτω συνοριακές συνθήκες:
  1. $u(1,\theta) = 1 + \sin(\theta) + \frac{1}{2}\cos\theta$
  2. $u(1,\theta) = 2$
  3. $u(1,\theta) = \sin\theta$
  4. $u(1,\theta) = \sin 3\theta$

  Ποιά είναι η μορφή της λύσης (γραφικά)·
- Ποιά είναι η λύση του εσωτερικού προβλήματος Dirichlet
$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \quad 0 < r < 2$$
με συνοριακή συνθήκη $u(2,\theta) = \sin\theta$. Ποιά είναι η μορφή της λύσης (γραφικά)·
- Ποιά θα ήταν η λύση του προηγούμενου προβλήματος αν άλλαζε η οριακή συνθήκη σε $u(2,\theta) = \sin(2\theta)$ και ποιά είναι η μορφή της λύσης (γραφικά)·