

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ
ΣΥΝΧΡΟΤΡΟΝ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΜΑΥΡΙΔΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ

ΥΠΕΥΘΥΝΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΒΛΑΧΟΣ ΛΟΥΚΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΘΕΤΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2008

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1	ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
Κεφάλαιο 2	ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ	4
2.1	Χαμιλτονιανή Μέθοδος	4
2.2	Εκπομπή ακτινοβολίας	9
2.3	Υπολογισμός συντελεστών εκπομπής και απορρόφησης	15
2.4	Συναρτήσεις κατανομής ηλεκτρονίων	22
2.4.1	Συνάρτηση νόμου δύναμης (Power-Law)	22
2.4.2	Maxwellian	24
2.4.3	Υβριδική συνάρτηση κατανομής	24
2.5	Μετρήσιμα φυσικά μεγέθη	25
2.6	Φρακταλική διάσταση	27
Κεφάλαιο 3	ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ	28
3.1	Υπολογισμός έντασης της ακτινοβολίας για διάφορες συναρτήσεις κατανομής	28
3.2	Αποτελέσματα από κατανομή Power Law	29
3.3	Αποτελέσματα από κατανομή Maxwellian	32
3.4	Αποτελέσματα από την Υβριδική κατανομή	34
3.4.1	Μεταβολή με τη θερμοκρασία	36
3.4.2	Μεταβολή με την πυκνότητα των Θερμικών ηλεκτρονίων	37
3.4.3	Μεταβολή με τον εκθέτη της power-law	38
3.4.4	Μεταβολή με την ένταση του μαγνητικού πεδίου	38
3.4.5	Μεταβολή με την παράμετρο ϵ	39
Κεφάλαιο 4	ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΗΓΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ	40
4.1	Περιγραφή της μεθόδου	40
4.2	Αποτελέσματα	43
4.3	Φρακταλική Διάσταση	60

Περίληψη

Η ακτινοβολία που παράγεται από ηλεκτρόνια στο πλάσμα εξαιτίας της κίνησης που προκαλεί σε αυτά μαγνητικό πεδίο οδηγεί σε περίπλοκες , μη αναλυτικές σχέσεις και για αυτό αποτελεί κλάδο ο οποίος χρησιμοποιεί ιδιαίτερα υπολογιστικές και αριθμητικές μεθόδους. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι η μελέτη της ακτινοβολίας synchrotron και gyrosynchrotron σε διάφορες περιπτώσεις και εφαρμογές. Αρχικά μελετάμε την φασματική κατανομή της ακτινοβολίας που προκύπτει από διάφορες συναρτήσεις κατανομής της ενέργειας των ηλεκτρονίων και πως επιδρούν οι διάφορες μεταβλητές της κάθε κατανομής στην προκύπτουσα μορφή του φάσματος. Κάτι τέτοιο μπορεί να μας βοηθήσει να ερμηνεύσουμε τα παρατηρούμενα φάσματα από ραδιοτηλεσκόπια και να καταλήξουμε στο μέγεθος των τιμών διαφόρων φυσικών μεγεθών που αφορούν τον ήλιο. Επίσης γίνεται προσπάθεια υπολογισμού της ακτινοβολίας από τρισδιάστατη περιοχή και οπτικοποίηση των αποτελεσμάτων, χρησιμοποιώντας τιμές μαγνητικού πεδίου που προκύπτουν από επεξεργασία μαγνητογραμμάτων και επομένως περιέχουν την πολυπλοκότητα που αυτό παρουσιάζει. Κλείνοντας γίνεται μέτρηση της φρακταλικής διάστασης του πεδίου ακτινοβολίας που προκύπτει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παραγόμενη ακτινοβολία στο πλάσμα από ηλεκτρόνια που κινούνται υπό την επίδραση μαγνητικού πεδίου αποτελεί ένα συνήθη μηχανισμό παραγωγής ακτινοβολίας που απασχολεί την αστροφυσική, την ραδιοαστρονομία και τη θερμοπυρηνική φυσική. Η ακτινοβολία gyrosynchrotron είναι η ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία που εκπέμπεται από μέσης ενέργειας σχετικιστικά ηλεκτρόνια που κινούνται μέσα σε μαγνητικό πεδίο ενώ ο όρος ακτινοβολία synchrotron χρησιμοποιείται για να περιγράψει την ακτινοβολία που εκπέμπουν υψηλής ενέργειας σχετικιστικά ηλεκτρόνια. Η θεωρία της εκπομπής και απορρόφησης ακτινοβολίας synchrotron τόσο στο κενό όσο και στο πλάσμα έχει μελετηθεί αρκετά και από πολλούς συγγραφείς π.χ Ginzburg και Syrovatskii (1969) και πιστεύετε πως εξηγεί ικανοποιητικά την παρατηρούμενη εκπομπή στην περιοχή των ραδιοκυμάτων από μια ποικιλία κοσμικών πηγών. Η θεωρία της ακτινοβολίας synchrotron όμως δεν είναι άμεσα εφαρμόσιμη στην περίπτωση σχετικιστικών ηλεκτρονίων μέσης ενέργειας σε περιοχές όπου υπάρχουν ισχυρές τιμές μαγνητικού πεδίου και σε περιοχές που τα πλάσμα είναι πυκνό. Σε τέτοιες περιοχές οι κυκλοτρονικές συχνότητες που προκύπτουν για τα ηλεκτρόνια είναι μεγάλες και συγκρίσιμες σε τιμή μεγέθους με τις παρατηρούμενες ραδιοσυχνότητες, η διάδοση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων είναι ανισοτροπική και υπάρχουν περισσότεροι από ένας τρόποι διάδοσης της ακτινοβολίας. Αυτού του είδους η ακτινοβολία θεωρείται υπεύθυνη για την εκπομπή στην περιοχή των ραδιοκυμάτων από μεγάλα solar flare όπως και για την εκπομπή που παράγεται από την ατμόσφαιρα ορισμένων αστεριών και πλανητών. Για αυτούς τους λόγους είναι απαραίτητο να μελετήσουμε και να καταλάβουμε το φάσμα της ακτινοβολίας gyrosynchrotron καθώς και τη θεωρία εκπομπής και απορρόφησης της από μαγνητικά ενεργό πλάσμα.

Η θεωρία της εκπομπής ακτινοβολίας gyrosynchrotron για ένα ηλεκτρόνιο σε κυκλική τροχιά στο κενό μελετήθηκε για πρώτη φορά από τον Schott (1912). Τη θεωρία αυτή μελέτησαν στη συνέχεια και επέκτειναν οι Schwinger (1949), Takakura (1960a) και οι Landau και Lifshitz (1962) ενώ ο Takakura (1960b) επέκτεινε τη θεωρία για ελικοειδή τροχιά του ηλεκτρονίου. Το γενικό πρόβλημα της εκπομπής από φορτισμένα σωμάτια σε πλάσμα επίσης μελετήθηκε από αρκετούς συγγραφείς Twiss (1958), Eidman (1958), Liemohn (1965), Mansfield (1967). Οι παραπάνω μελέτες έδωσαν

εκφράσεις για την φασματική και γωνιακή κατανομή της ακτινοβολίας για ένα συγκεκριμένο τρόπο διάδοσης για ηλεκτρόνιο συγκεκριμένης ενέργειας. Θεωρώντας την ειδική περίπτωση ενός ομογενούς και ισότροπου μέσου διάδοσης ο Ramaty (1968) υπολόγισε μια έκφραση για τον υπολογισμό του συνολικού φάσματος της ακτινοβολίας ολοκληρώνοντας ως προς όλες τις γωνίες εκπομπής για ηλεκτρόνια σε κυκλική τροχιά.

Με αριθμητική μελέτη του φάσματος που προέκυψε έδειξε πως ο παράγοντας Lorentz για το ηλεκτρόνιο που ακτινοβολεί είναι μικρότερος από το πηλίκο της συχνότητας πλάσματος προς την κυκλοτρονική συχνότητα με αποτέλεσμα η ακτινοβολία στις χαμηλές συχνότητες να περιορίζεται έντονα. Το παραπάνω φαινόμενο είναι γνωστό ότι εμφανίζεται και στην ακτινοβολία synchrotron και αναφέρεται ως φαινόμενο Razin. Μια συνέπεια του είναι πως ο δείκτης διάθλασης του πλάσματος είναι μικρότερος από τη μονάδα.

Ο συνολικός φορμαλισμός που αφορά την εκπομπή ακτινοβολίας gyrosynchrotron από ομογενείς πηγές προερχόμενη από ηλεκτρόνια που ακολουθούν μια συγκεκριμένη ενεργειακή κατανομή και κινούνται σε ελικοειδή τροχιά αναπτύχθηκε από τον Ramaty (1969) βασισμένη στην εργασία του Liemohn (1965). Ο φορμαλισμός αυτός διατηρείται ως και σήμερα όπως όμως διορθώθηκε από τους Trulsen και Fejer (1970) οι οποίοι εντόπισαν λάθος στις σχέσεις εκπομπής και απορρόφησης του Liemohn και κατ' επέκταση και στις σχέσεις τις οποίες εξήγαγε ο Ramaty.

Οι σχέσεις στις οποίες κατέληξε ο Ramaty είναι ιδιαίτερα πολύπλοκες και ο καλύτερος τρόπος αντιμετώπισης τους είναι αριθμητικός και κατά επέκταση υπολογιστικός. Προσεγγιστικές σχέσεις για τον παραπάνω φορμαλισμό έχουν προταθεί από διάφορους συγγραφείς όπως π.χ οι Dulk και Marsh (1982) και ο Vahe Petrosian (1981), οι οποίες όμως ισχύουν για συγκεκριμένη περιοχή ενεργειών των ηλεκτρονίων, για συγκεκριμένες συναρτήσεις κατανομής και δεν λαμβάνουν υπόψη τους όλες τις αρμονικές με αποτέλεσμα πολλές φορές και σε διάφορες φυσικές εφαρμογές οι αρμονικές που λαμβάνονται υπόψη να μην έχουν σημαντική συνεισφορά στο φαινόμενο.

Καθώς οι παρατηρήσεις από τον ήλιο γίνονταν ολοένα και με υψηλότερης διακριτικής ικανότητας όργανα, νέα δεδομένα προέκυπταν. Η βασική συνάρτηση κατανομής των υψηλής σχετικιστικά ενέργειας ηλεκτρονίων που παράγουν την ακτινοβολία synchrotron είναι η συνάρτηση νόμου δύναμης (power-law) η οποία μελετήθηκε πάρα πολύ. Παρατηρήσεις όμως από ραδιοηλεκτρονικά όπως το OVRO - (Owens Valley Radio Observatory), το WSRT - (Westbork Synthesis Radio Telescope) ή το VLA - (Very Large Array) έδειξαν την ύπαρξη και θερμικού μέρους στην κατανομή των ηλεκτρονίων.

Η κατανομή Maxwell των ενεργειών των ηλεκτρονίων είχε μελετηθεί από τις πρώτες κιόλας εργασίες αλλά οι νέες παρατηρήσεις έδειχναν πως απαιτείται η χρήση μιας υβριδικής συνάρτησης κατανομής που να αποτελείται τόσο από θερμικό όσο και από μη

θερμικό μέρος. Υβριδικές συναρτήσεις κατανομής προτάθηκαν και μελετήθηκαν από αρκετούς συγγραφείς όπως Emslie και Vlahos (1980), Mok (1983), Benka και Holman (1991).

Άλλα θέματα τα οποία παρουσιάζουν πλέον ενδιαφέρον στη μελέτη της ακτινοβολίας είναι η επίδραση ενεργειακού κατωφλίου καθώς και ανώτατου ορίου στις ενέργειες των ηλεκτρονίων και πως αυτό επιδρά στην παρατηρούμενη καταγραφή της ακτινοβολίας όπως Holman (2002). Επίσης οι παρατηρήσεις έδειξαν πως η ηλιακή ατμόσφαιρα παρουσιάζει μεγάλη ανομοιογένεια και σε αυτήν εμφανίζονται μαγνητικά πεδία περίπλοκης δομής. Η ένταση του μαγνητικού πεδίου και η πυκνότητα είναι μεταβλητές από περιοχή σε περιοχή και γίνονται αριθμητικοί υπολογισμοί πάνω σε τέτοια υπολογιστικά μοντέλα. Ενώ τέλος γίνεται προσπάθεια από το σύνολο των ερευνητών να προσομοιωθεί η παρατηρούμενη εκπομπή ακτινοβολίας από ένα solar flare στην υπολογιστικά μετρούμενη.

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τα παραγόμενα φάσματα της ακτινοβολίας synchrotron για διάφορες συναρτήσεις της ενεργειακής κατανομής των ηλεκτρονίων. Ειδικότερα θα ασχοληθούμε και θα μελετήσουμε το παραγόμενο φάσμα από υβριδική συνάρτηση κατανομής και θα κάνουμε εφαρμογή της στον υπολογισμό της ακτινοβολίας που παράγεται από τρισδιάστατη ανακατασκευή μαγνητικού πεδίου από μαγνητογράμματα που παίρνουμε από τον ήλιο και κλείνοντας θα μετρήσουμε και θα συγκρίνουμε τη φρακταλική διάσταση του μαγνητικού πεδίου και του πεδίου ακτινοβολίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ

2.1 Χαμιλτονιανή Μέθοδος

Παρακάτω αντιμετωπίζετε το πρόβλημα της εκπομπής της ακτινοβολίας από φορτισμένο σωματίο με τη Χαμιλτονιανή μέθοδο. Ο τρόπος αυτός αναπτύχθηκε από τον Kolomenskii και είναι μια γενίκευση της μεθόδου που εισήγαγε ο Heitler. Το όνομα της μεθόδου προκύπτει επειδή οι συντελεστές στο ανάπτυγμα σε ιδιοκύματα για το διανυσματικό δυναμικό της ακτινοβολίας είναι οι κανονικές μεταβλητές της Χαμιλτονιανής του συστήματος.

Η Χαμιλτονιανή μέθοδος για τον υπολογισμό της ενέργειας που ακτινοβολεί ένα φορτισμένο σωματίο περιγράφεται παρακάτω. Κάθε ομογενές μέσο που παρουσιάζει διασπορά και είναι ανισότροπο όσον αφορά την ηλεκτρομαγνητική συμπεριφορά του χαρακτηρίζεται από ένα μιγαδικό διηλεκτρικό ταυστή $\underline{\epsilon}(\omega, \theta, \phi)$, όπου ω η γωνιακή συχνότητα διάδοσης και θ και ϕ είναι η πολική και αζιμουθιακή γωνία μετρημένες ως προς μια διεύθυνση αναφοράς. Για την ανάλυση που θα ακολουθήσει είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε πως ο παραπάνω ταυστής είναι ερμιτιανός δηλαδή:

$$\underline{\epsilon} = \underline{\epsilon}^* \quad (2.1)$$

όπου ο αστερίσκος δηλώνει τον μιγαδικό συζυγή και ανάστροφο. Επίσης θα θεωρήσουμε πως η μαγνητική διαπερατότητα του μέσου μ είναι ίδια με αυτή του κενού χώρου.

Ένα φορτισμένο σωματίο που κινείται σε ένα τέτοιο μέσο ακτινοβολεί ενέργεια με μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας όταν επιταχύνεται ή όταν η ταχύτητα με την οποία κινείται είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα φάσης που αντιστοιχεί στο μέσο διάδοσης. Το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που παράγονται από σωματίο με ηλεκτρικό φορτίο e , τροχιά που περιγράφεται με διάνυσμα θέσης $\vec{r}_e$ και ταχύτητα $\vec{v}$ περιγράφονται από τις εξισώσεις του Maxwell σε μονάδες του συστήματος c.g.s:

$$\nabla \times \vec{H} - \vec{D}/c = 4\pi(e/c)\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \vec{E} + \vec{B}/c = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi e \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (2.4)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \vec{B} = \vec{H} \quad (2.5)$$

όπου δ είναι η συνάρτηση δέλτα του Dirac και η τελεία συμβολίζει την παράγωγο ως προς το χρόνο $\partial/\partial t$.

Γνωρίζουμε πως για την μελέτη του προβλήματος μπορούμε να εισάγουμε τη χρήση των ηλεκτρομαγνητικών δυναμικών, $\vec{A}$ και Φ που ικανοποιούν τις σχέσεις :

$$\vec{E} = -\nabla\Phi - \vec{A}/c \quad (2.6)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.7)$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις αυτές καταλήγουν στην μορφή:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) + \epsilon \nabla\Phi/c + \epsilon \vec{A}/c^2 = 4\pi(e/c)\vec{v} \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (2.8)$$

$$-\nabla \epsilon \nabla\Phi - \nabla \epsilon \vec{A}/c = 4\pi e \cdot \delta(\vec{r} - \vec{r}_e) \quad (2.9)$$

Αφού τα δυναμικά αυτά δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένα μπορούμε να εφαρμόσουμε μια βαθμίδα Coulomb που ορίζεται :

$$\nabla \epsilon \vec{A} = 0 \quad (2.10)$$

στη βαθμίδα αυτή, Φ είναι το στατικό δυναμικό του φορτίου και το στατικό πεδίο που προκύπτει από αυτό είναι $\vec{D}_{st} = \epsilon \nabla\Phi$. Μπορεί να δεχτεί ότι το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο ακτινοβολίας $\vec{E}_{em}$ και $\vec{B}_{em}$ προκύπτουν από το διανυσματικό δυναμικό και μόνο $\vec{A}$.

Για να εκφράσουμε τις παραπάνω εξισώσεις σε κανονική μορφή είναι απαραίτητο να θεωρήσουμε μόνο το μέρος του πεδίου που βρίσκεται σε μια αρκούντως μεγάλη αλλά πεπερασμένη περιοχή όγκου $V = L^3$, όπου $L \gg$ του χαρακτηριστικού μήκους κύματος. Μέσα στον όγκο αυτό μπορούμε να γράψουμε τα δυναμικά σαν υπέρθεση των ιδιοσυναρτήσεων $\vec{A}_\lambda$ και Φ_λ .

$$\vec{A} = \sum_{\lambda} q_{\lambda}(t) \vec{A}_{\lambda}(\vec{r}) \quad (2.11)$$

$$\Phi = \sum_{\lambda} q_{o\lambda}(t) \Phi_{\lambda}(\vec{r}) \quad (2.12)$$

όπου q_{λ} και $q_{o\lambda}$ είναι οι συντελεστές των αναπτυγμάτων. Οι ιδιοσυναρτήσεις πρέπει να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες ,

$$\vec{A}_{\lambda}, \nabla \vec{A}_{\lambda}, \Phi_{\lambda}, \nabla \Phi_{\lambda} \quad (2.13)$$

περιοδικά πάνω στην επιφάνεια σ που περικλείει τον όγκο V , και να ισχύουν οι ομογενείς κυματικές εξισώσεις

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}_\lambda) - \omega_\lambda^2 \underline{\underline{\epsilon}} \vec{A}_\lambda / c^2 = 0 \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 (\nabla \Phi_\lambda) + \omega_{o\lambda}^2 \underline{\underline{\epsilon}} \nabla \Phi_\lambda / c^2 = 0 \quad (2.15)$$

όπου ω_λ^2 και $\omega_{o\lambda}^2$ είναι πραγματικές σταθερές. Αφού η απόκλιση του στροβιλισμού είναι πάντα μηδέν οι ιδιοσυναρτήσεις $\vec{A}_\lambda$ που ικανοποιούν τις παραπάνω εξισώσεις ικανοποιούν και τη βαθμίδα Coulomb.

Οι συναρτήσεις $\vec{A}_\lambda$ πρέπει να είναι ορθογώνιες με συνάρτηση βάρους $\underline{\underline{\epsilon}}$. Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω ομογενείς κυματικές εξισώσεις, τις περιοδικές συνθήκες που ορίσαμε, το θεώρημα της απόκλισης και το γεγονός ότι ο τανυστής $\underline{\underline{\epsilon}}$ είναι ερμιτιανός έχουμε:

$$\begin{aligned} (\omega_\lambda^2 - \omega_\mu^2) \int dV \vec{A}_\mu^* \underline{\underline{\epsilon}} \vec{A}_\lambda &= c^2 \int dV [\vec{A}_\lambda \nabla \times \nabla \times \vec{A}_\mu^* - \vec{A}_\mu^* \nabla \times \nabla \times \vec{A}_\lambda] = \\ c^2 \int dV \nabla [\vec{A}_\mu^* \times \nabla \times \vec{A}_\lambda - \vec{A}_\lambda^* \times \nabla \times \vec{A}_\mu] &= 0, (\lambda \neq \mu) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Όμοια εργαζόμαστε και για να δείξουμε πως είναι ορθογώνιες οι συναρτήσεις $\nabla \Phi_\lambda$ με συνάρτηση βάρους $\underline{\underline{\epsilon}}$. Για την κανονικοποίηση των ιδιοσυναρτήσεων επιλέγουμε τις συνθήκες:

$$\begin{aligned} \int dV \vec{A}_\mu^* \underline{\underline{\epsilon}} \vec{A}_\lambda &= 4\pi c^2 \delta_{\lambda\mu} \\ \int dV \nabla \Phi_\mu^* \underline{\underline{\epsilon}} \nabla \Phi_\lambda &= 4\pi c^2 \delta_{\lambda\mu} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $\vec{A}_\lambda$ και $\nabla \Phi_\mu$ για κάθε λ, μ με συνάρτηση βάρους $\underline{\underline{\epsilon}}$ μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια της διανυσματικής ταυτότητας

$$\int dV [\vec{b} \cdot \nabla \times (\nabla \times \vec{a}) - \nabla \times \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a}] = - \int d\vec{\sigma} \cdot (\vec{b} \times \nabla \times \vec{a}). \quad (2.18)$$

Θέτοντας $\vec{a} = \vec{A}_\lambda$ και $\vec{b} = \nabla \Phi_\lambda^*$ το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται με τη βοήθεια της συνοριακής συνθήκης και ο τελευταίος όρος του ολοκληρώματος όγκου μηδενίζεται με τη βοήθεια της κυματικής εξίσωσης

$$\int dV \vec{A}_\lambda^* \underline{\underline{\epsilon}} \nabla \Phi_\mu = \left[\int dV \vec{A}_\lambda \underline{\underline{\epsilon}} \nabla \Phi_\mu^* \right]^* = 0. \quad (2.19)$$

Τα αναπτύγματα των $\vec{A}$ και Φ επιτρέπουν τις εξισώσεις (2.9) και (2.10) να καταλήξουν απλώς σε βασικές εξισώσεις των q_λ και $q_{o\lambda}$. Έαν η σχέση (2.9) πολλαπλασιαστεί

με $\vec{A}_\mu^*$ και ολοκληρώνοντας σε όλο τον όγκο V και κάνοντας χρήση των σχέσεων ορθογωνιότητας που αποδείχτηκαν παραπάνω καταλήγουμε σε εξισώσεις απλού αρμονικού ταλαντωτή για κάθε q_μ

$$\ddot{q}_\mu + \omega_\mu^2 q_\mu = (e/c) \vec{v} \cdot \vec{A}_\mu^*(\vec{r}_e) \quad (2.20)$$

Το δεύτερο μέρος της παραπάνω εξίσωσης παίζει το ρόλο δύναμη διέγερσης της ταλάντωσης και εξαρτάται από το διηλεκτρικό τανυστή αφού το $\vec{A}_\mu^*$ πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση (2.14) ενώ εξαρτάται και από το χρόνο μέσα από τη χρονική εξάρτηση των $\vec{r}_e$ και $\vec{v}$. Όμοια πολλαπλασιάζουμε την (2.9) και (2.10) με $\nabla \Phi_\mu^*$ και ολοκληρώνοντας σε όλο τον όγκο V παίρνουμε

$$c \dot{q}_{o\mu} = (e/c) \vec{v} \cdot \nabla \Phi_\mu^*(\vec{r}_e) \quad (2.21')$$

$$c^2 q_{o\mu} = e \Phi_\mu^*(\vec{r}_e) \quad (2.21)$$

αντίστοιχα. Καθώς η $\vec{r}_e$ εξαρτάται από το χρόνο $\partial \Phi_\mu^*(\vec{r}_e)/\partial t = \vec{v} \cdot \nabla \Phi_\mu^*(\vec{r}_e)$ και για αυτό η (2.21') είναι περιττή καθώς προκύπτει από την παραγωγή της (2.21). Επομένως την πλήρη λύση για το στατικό και ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορούμε να την πάρουμε λύνοντας τις (2.20) και (2.21) με το κατάλληλο σύνολο $\vec{A}_\mu$ και Φ_μ για το μέσο. Επειδή τα $\vec{A}$ και Φ ορίζονται από μη συζευγμένο σύστημα εξισώσεων, το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που περιγράφουν είναι επίσης ασύζευκτα. Συγκεκριμένα το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μπορεί να ληφθεί από το διανυσματικό δυναμικό σύμφωνα με τις σχέσεις (2.7) και (2.8),

$$\vec{E}_{em} = -\vec{A}/c, \quad \vec{B}_{em} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.22)$$

Για την εφαρμογή που μας ενδιαφέρει χρειαζόμαστε την ενέργεια του πεδίου ακτινοβολίας που δίνεται από τη γενική σχέση

$$W = \frac{1}{4\pi} \int dt' \int dV (\vec{E}_{em}^* \cdot \vec{E}_{em} + \vec{B}_{em}^* \cdot \vec{B}_{em}) \quad (2.23)$$

Ο όρος της μαγνητικής ενέργειας απλοποιείται με τη βοήθεια της (2.18). Θέτοντας $\vec{a} = \vec{A}_\lambda$ και $\vec{b} = \vec{A}_\lambda^\mu$ και θυμίζοντας πως το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται από τις συνοριακές συνθήκες, και κάνοντας χρήση της (2.14) βρίσκουμε ότι

$$\int dV \nabla \times \vec{A}_\mu^* \cdot \nabla \times \vec{A}_\lambda = (\omega_\lambda^2/c^2) \int dV \vec{A}_\mu^* \cdot \vec{A}_\lambda \quad (2.24)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση κανονικοποίησης (2.17) η (2.23) γίνεται

$$W(t) = \int dt' \sum_\mu \dot{q}_\mu^* \dot{q}_\mu + \omega_\mu^2 q_\mu^* q_\mu = \frac{1}{2} \sum_\mu \dot{q}_\mu^* \dot{q}_\mu + \omega_\mu^2 q_\mu^* q_\mu = \sum_\mu w_\mu \quad (2.25)$$

Η παραπάνω έκφραση είναι όμοια με τη χαμιλτονιανή συστήματος αρμονικών ταλαντωτών.

Η πόλωση των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων μπορεί να πάρει δύο πιθανές διευθύνσεις που αντιστοιχούν στις δύο δυνατές διευθύνσεις διάδοσης των κυμάτων στο μέσο. Στις πιο πάνω εξισώσεις οι δύο αυτοί δείκτες μπορούν να σημειωθούν είτε με λ ή (μ) . Παρακάτω θα ασχοληθούμε μόνο με ένα τρόπο πόλωσης και αργότερα θα επιλέξουμε ένα συγκεκριμένο τρόπο συμβολισμού των δύο αυτών τρόπων.

Για να υπολογίσουμε το άθροισμα στη σχέση (2.25) είναι απαραίτητο να υποθέσουμε μια συγκεκριμένη μορφή των ιδιοδιανυσμάτων $\vec{A}_\mu$ που ικανοποιούν τις σχέσεις (2.13)(2.14) και (2.17). Εδώ επιλέγονται να είναι της μορφής

$$\vec{A}_\mu = \sqrt{4\pi c}(\vec{a}_\mu/n_\mu L^{3/2}) \exp[-ik_\mu \vec{r}] \quad (2.26)$$

όπου $\vec{a}_\mu$ είναι το διάνυσμα πόλωσης, n_μ είναι ο δείκτης διάθλασης και k_μ το κυματά-νυσμα. Η ορθογωνιότητα των $\vec{A}_\mu$ στον όγκο V επιβάλλει και την ορθογωνιότητα των συνιστωσών του $\vec{k}_\mu$ που δίνονται από την $k_{\mu\eta} = 2\pi\mu_\eta/L$ όπου μ_η είναι ακέραιοι και $\eta = x, y, z$. Οι συνιστώσες των a_μ και η_μ καθορίζονται από τις (2.14) και (2.17) που καταλήγουν στις

$$(c^2/\omega_\mu^2)[k_\mu^2 \vec{a}_\mu - \vec{k}_\mu(\vec{k}_\mu \vec{a}_\mu)] = \underline{\underline{\epsilon}} \vec{a}_\mu \quad (2.27)$$

$$\vec{a}_\mu^* \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \cdot \vec{a}_\mu = n_\mu^2 \quad (2.28)$$

Αφού το μήκος κύματος είναι μικρό σε σχέση με το L ($L \rightarrow \infty$), ο k -χώρος είναι προσεγγιστικά συνεχής και ο μ -χώρος μπορεί να παρασταθεί με συνεχείς σφαιρικές συντεταγμένες μ, θ, ϕ χωρίς απώλεια της γενικότητας. Επίσης εξ ορισμού $\omega n/c = k = 2\pi\mu/L$ έτσι ώστε η συχνότητα ω να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ανεξάρτητη μεταβλητή.

Ο αριθμός των ταλαντωτών στον όγκο V που ακτινοβολούν σε στερεά γωνία $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$ και στο διάστημα συχνοτήτων ω και $\omega + d\omega$ για ένα συγκεκριμένο τρόπο πόλωσης δίνεται από τη σχέση

$$V d^3\mu = \mu^2 d\mu d\Omega V = \frac{\omega^2 n^3 L^3}{(2\pi c)^3} d\omega d\Omega V = \rho d\omega d\Omega V \quad (2.29)$$

όπου $\rho(\omega, \theta, \phi)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της ακτινοβολίας.

Με μια συνεχή μεταβλητή μ η διακριτή άθροιση γίνεται ολοκλήρωση σε όλο τον όγκο ως προς τη συνεχή μεταβλητή w . Το απειροστό ποσό ενέργειας του πεδίου ακτινοβολίας δίνεται από τη σχέση

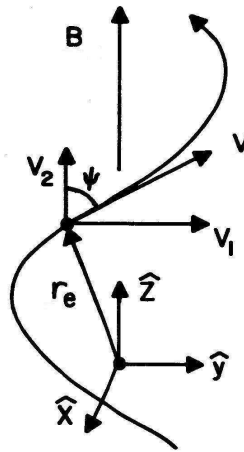
$$d^3W = w \rho d\omega d\Omega \quad (2.30)$$

όπου $w(\omega, \theta, \phi, t)$ είναι η ενέργεια εξαναγκασμένου ταλαντωτή σε $d\omega d\Omega$.

2.2 Εκπομπή ακτινοβολίας

Η θεωρία που παρατίθεται αναπτύχθηκε από τον Liemohn (1965) αρχικά αλλά περιείχε ένα λάθος που διόρθωσαν αργότερα με εργασία τους οι Trulsen και Fejer το 1970. Στην εργασία τους εξήγαγαν τις σωστές σχέσεις χρησιμοποιώντας ταχυστική ανάλυση και δείχνοντας πως το λάθος του Liemohn ήταν ότι έλαβε υπόψη του τις παραγώγους του διηλεκτρικού ταχυστή προκειμένου να μελετηθεί και η διασπορά του μέσου. Με θεώρημα που αποδεικνύουν στην εργασία τους όμως οι Trulsen και Fejer έδειξαν ότι κάτι τέτοιο δεν απαιτείται αν και στη δική τους απόδειξη μελετούν την διασπορά του μέσου. Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση του Liemohn σύμφωνα όμως με την διόρθωση των Trulsen και Fejer για να φτάσουμε στο τελικό σωστό αποτέλεσμα.

Θα αναπτύξουμε τις εξισώσεις που αφορούν την εκπομπή του φορτισμένου σωματίου μέσα σε μαγνητο - ιονισμένο μέσο που αποτελείται από ένα σταθερό χρονικά και ομογενές μαγνητικό πεδίο και ένα ομογενές ηλεκτρικά ουδέτερο πλάσμα. Ένα τέτοιο μέσο παρουσιάζει διασπορά και ανισοτροπία ως προς τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου.



Το σύστημα συντεταγμένων είναι έτσι τοποθετημένο ώστε ο άξονας z να συμπίπτει με την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$. Εάν οι συγχρούσεις παραληφθούν η τροχιά ενός ρελατιβιστικού ηλεκτρονίου μέσα στο στατικό μαγνητικό πεδίο αποτελείται από μια κυκλική κίνηση γύρω από τη διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου και μια κίνηση κατά μήκος αυτής της διεύθυνσης όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Επομένως η θέση $\vec{r}_e$ και η ταχύτητα $\vec{v}$ του ηλεκτρονίου ως προς τους άξονες x y z αντιστοιχα του σύστηματος συντεταγμένων θα δίνονται από τις εξισώσεις

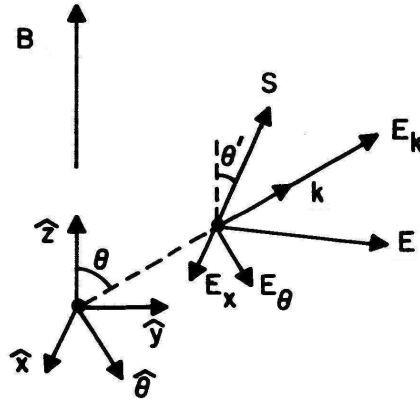
$$\gamma r_1 \cos \gamma^{-1} \omega_B t \quad \gamma r_1 \sin \gamma^{-1} \omega_B t \quad u_2 t, \quad (2.31)$$

$$-u_1 \sin \gamma^{-1} \omega_B t \quad u_1 \cos \gamma^{-1} \omega_B t \quad u_2, \quad (2.32)$$

όπου οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στις δύο συνιστώσες στις οποίες αναλύεται η ταχύτητα δηλαδή αντιστοιχα στην κάθετη και στην παράλληλη με την διεύθυνση του μαγνητικού πεδίου ενώ έχουν ληφθεί υπόψη και οι σχετικιστικές διορθώσεις στους τύπους. Επίσης εμφανίζεται η μη σχετικιστική κυκλοτρονική συχνότητα ή gyrofrequency που σχετίζεται με το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου με τη σχέση $\omega_B = eB/mc$ καθώς και η μη σχετικιστική ακτίνα $r_1 = u_1/\omega_B$. Τέλος ο σχετικιστικός παράγοντας γ ορίζεται από τις σχέσεις

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}, \quad \beta^2 = (u_1^2 + u_2^2)/c^2 \quad (2.33)$$

Το διάνυσμα διάδοσης του κύματος $\vec{k}$ σχηματίζει γωνία θ ως προς την κατεύθυνση που έχει το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου και λόγω αζιμουθιακής συμμετρίας τίθεται τυχαία στο yz επίπεδο.



Για το διάνυσμα $\vec{k}$ ισχύει

$$\vec{k} = k \hat{k} = k \sin \theta \hat{y} + k \cos \theta \hat{z} \quad (2.34)$$

όπου $\hat{k}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ είναι μοναδιαία διανύσματα. Οι συνιστώσες του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου λαμβάνονται ως προς ορθογώνιους άξονες $\hat{x}$, $\hat{\theta}$, $\hat{k}$ όπως φαίνονται στο παραπάνω σχήμα.

Ο διηλεκτρικός τανυστής για ένα μαγνητό-ιονισμένο μέσο μπορεί να έχει διάφορες μορφές ανάλογα με το ποιές ιδιότητες του πλάσματος είναι σημαντικές. Η θερμική

κίνηση, οι συγκρούσεις, η ιοντική κίνηση αλλάζουν τη μορφή του διηλεκτρικού ταχυ-
στή. Αξιοσημείωτο είναι πως ο τελεστής είναι ερμιτιανός για θερμική κίνηση ή ιοντική
κίνηση αλλά δεν είναι ερμιτιανός όταν οι συγκρούσεις λαμβάνονται υπόψη.

Η πόλωση του ηλεκτρικού διανύσματος του πεδίου και ο δείκτης διάθλασης του
μέσου προκύπτουν από τις συνιστώσες του διηλεκτρικού ταχυστή. Σύμφωνα με το
παραπάνω σχήμα οι συντελεστές πόλωσης δίνονται από τις σχέσεις

$$E_\theta/E_x = i\alpha_\theta(\omega, \theta) \quad E_k/E_x = i\alpha_k(\omega, \theta) \quad (2.35)$$

ενώ ο δείκτης διάθλασης δηλώνεται από τη συνάρτηση $n(\omega, \theta)$ όπου οι συντελεστές
πόλωσης α_θ και α_k μπορούν να είναι μιγαδικοί αλλά ο δείκτης διάθλασης πρέπει να
είναι πραγματικός στην παρακάτω λύση.

Οι συντελεστές του $\vec{a}$ και του n στο μέσο περιγράφονται από τις σχέσεις (2.27)
και (2.28) για μια συγκεκριμένη μορφή του διηλεκτρικού ταχυστή $\underline{\epsilon}$. Αφού το ηλε-
κτρικό πεδίο του κύματος πρέπει να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και το μέτρο
του διανύσματος $\vec{E}$ πρέπει να ικανοποιεί τη (2.27). Αφού η επίλυση των τεσσάρων
αλγεβρικών εξισώσεων γίνεται έμμεσα με τη θεώρηση $\vec{a} = \kappa \vec{E}/E_x$. Η σταθερά της
αναλογίας εύκολα μπορεί ναδειχτεί ότι είναι

$$\kappa = (1 + |E_\theta/E_x|^2)^{-1/2} = (1 + \alpha_\theta^2)^{-1/2}. \quad (2.36)$$

Επομένως οι συντελεστές του $\vec{a}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες του ηλεκτρονίου δί-
νονται από τις σχέσεις

$$a_x = \kappa \quad a_y = i\kappa\alpha_y \quad a_z = i\kappa\alpha_z \quad (2.37)$$

όπου

$$\begin{aligned} \alpha_y &= \alpha_\theta \cos \theta + \alpha_k \sin \theta \\ \alpha_z &= \alpha_k \cos \theta - \alpha_\theta \sin \theta \end{aligned} \quad (2.38)$$

Με τις προηγούμενες εκφράσεις που δόθηκαν για τα $\vec{A}$, $\vec{r}_e$, $\vec{v}$, $\vec{k}$ και $\vec{a}$ που δόθη-
καν από τις σχέσεις (2.26), (2.31), (2.32), (2.34), (2.37) αντίστοιχα, η δύναμη που
εξαναγκάζει την ταλάντωση της σχέσης (2.20) γίνεται

$$\begin{aligned} (e/c)\vec{v} \cdot \vec{A}^* &= -\frac{\sqrt{4\pi}iek}{nL^{3/2}}(-iu_1 \sin \gamma^{-1}\omega_B t + \alpha_y u_1 \cos \gamma^{-1}\omega_B t + \alpha_z u_2) \\ &\exp(+ik \sin \theta \quad \gamma r_1 \sin \gamma^{-1}\omega_B t + ik \cos \theta \quad u_2 t) \end{aligned} \quad (2.39)$$

Η παραπάνω έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί με τη βοήθεια του αναπτύγματος των συναρτήσεων Bessel

$$\exp(+iX \sin \phi) = \sum_{-\infty}^{+\infty} J_s(X) \exp(+is\phi) \quad (2.40)$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} & (\alpha_y \cos \phi - i \sin \phi) \exp(+iX \sin \phi) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (\alpha_y J_{s+1} + \alpha_y J_{s-1} + J_{s+1} - J_{s-1}) \exp(+is\phi) \\ & = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-J'_s + \alpha_y s J_s / X) \exp(+is\phi) \end{aligned} \quad (2.41)$$

όπου ο τόνος δηλώνει παραγωγή ως προς X . Αφού η σχέση (2.20) για εξαναγκασμένο αρμονικό ταλαντωτή έχει την απλή μορφή

$$\ddot{q} + \omega^2 q = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_s \exp(+ip_s t), \quad (2.42)$$

όπου

$$p_s(\omega, \theta) = s\omega_B/\gamma + u_2 k \cos \theta = s\omega_B/\gamma + \beta_2 \omega n(\omega, \theta) \cos \theta \quad (2.43)$$

και

$$C_s(\omega, \theta) = -\frac{\sqrt{4\pi} i e c \kappa}{n L^{3/2}} [-\beta_1 J'_s(X) + (\alpha_y s \beta_1 / X + \alpha_z \beta_2) J_s(X)], \quad (2.44)$$

με

$$X(\omega, \theta) = \gamma r_1 k \sin \theta = \gamma \beta_1 n(\omega, \theta) (\omega / \omega_B) \sin \theta \quad (2.45)$$

και

$$\beta_1 = u_1/c \quad \beta_2 = u_2/c \quad (2.46)$$

Με αρχικές συνθήκες $q = \dot{q} = 0$ τη χρονική στιγμή $t = 0$ η γενική λύση της (2.42) είναι

$$q = \sum_{-\infty}^{+\infty} q_s = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_s \left[\frac{\exp(ip_s t) - \exp(+i\omega t)}{2\omega(\omega - p_s)} + \frac{\exp(ip_s t) - \exp(-i\omega t)}{2\omega(\omega + p_s)} \right] \quad (2.47)$$

Το άθροισμα των ενεργειών όλων των τρόπων μηδενίζεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ και δίνεται από τη σχέση

$$w = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} (\dot{q}_s^* \dot{q}_s + \omega^2 q_s^* q_s) + \text{όροι ανώτερης τάξης} =$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} |C_s|^2 \left[\frac{1 - \cos(\omega - p_s T)}{(\omega - p_s)^2} + \frac{1 - \cos(\omega + p_s T)}{(\omega + p_s)^2} \right] + \text{ανώτεροι ταλαντούμενοι όροι} \quad (2.48)$$

τη χρονική στιγμή $t = T$. Στο όριο $T \rightarrow \infty$ η άθροιση καταλήγει στη συνάρτηση δέλτα του Dirac,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\omega \pm p_s T)}{\pi(\omega \pm p_s)^2 T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\omega \pm p_s T)}{\pi(\omega \pm p_s)} = \delta(\omega \pm p_s) \quad (2.49)$$

Η μέση ενέργεια που ακτινοβολείται μέσα σε όγκο V από το ηλεκτρόνιο (χωρίς συντελεστή βαρύτητας) δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w/T = \frac{\pi}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} |C_s|^2 [\delta(\omega - p_s) + \delta(\omega + p_s)], \quad (2.50)$$

όπου οι ταλαντούμενοι όροι φθίνουν σαν $1/T$. Η παραπάνω έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί. Με βάση τη σχέση $\alpha_{\theta,k}(\omega, \theta) = -\alpha_{\theta,k}(\omega, \theta + \pi)$ που ισχύει σε μαγνητο-ιονισμένο μέσο και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel μπορεί ναδειχτεί ότι $C_s(\omega, \theta) = -C_{-s}(\omega, \theta + \pi)$. Έτσι για τις ενέργειες που ενδιαφέρουν τα $\delta(\omega - p_s)$ και $\delta(\omega + p_s)$ είναι ίδια και η ακτινοβολία που εκπέμπει το ηλεκτρόνιο μπορεί να δοθεί

$$\lim_{T \rightarrow \infty} w_s/T = \pi |C_s|^2 \delta(\omega - p_s), \quad (2.51)$$

όπου $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Η συχνότητα ω και η πολική γωνία θ της εκπομπής σχετίζονται με την εξίσωση ανισότροπικής διασποράς

$$\beta_2 \cos \theta_s = (\omega - s\omega_B/\gamma)/\omega n(\omega, \theta_s). \quad (2.52)$$

Η ισχύς της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας από ένα ηλεκτρόνιο σε $d\omega d\Omega$ δίνεται από τη σχέση

$$d^3 P_s = \lim_{T \rightarrow \infty} (w_s/T) \rho d\omega d\Omega \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.53)$$

όπου ο ορισμός της μέσης ισχύος και η (2.30) χρησιμοποιούνται. Για να γίνει η ολοκλήρωση με τη συχνότητα και τη στερεά γωνία, η δέλτα συνάρτηση πρέπει να πάρει τη μορφή

$$\delta(f(x)) = \delta[(x - x_s)f'(x_s)] = |f'(x_s)|^{-1} \delta(x - x_s), \quad (2.54)$$

όπου $x = \theta$ ή ω και x_s είναι εκείνη η τιμή του θ ή ω για την οποία $\omega = p_s$. Επομένως με την πυκνότητα και την C_s να δίνονται από τις σχέσεις (2.29) και (2.44), η ισχύς που ακτινοβολείται στο μοναδιαίο διάστημα συχνότητας $d\nu = d\omega/2\pi$ δίνεται με

ολοκλήρωση από τη σχέση που θα μας απασχολήσει πολύ παρακάτω

$$dP_s/d\nu = (2\pi e^2/c\beta_2)\omega \left\{ \kappa^2 [-\beta_1 J'_s(x) + (\alpha_y s\beta_1/X + \alpha_z\beta_2)J_s(X)]^2 \right\} \quad (2.55)$$

Η παραπάνω εξίσωση υπολογίζει την εκπομπή ακτινοβολίας ανά μονάδα συχνότητας και ανά μονάδα στερεάς γωνίας για ένα ηλεκτρόνιο.

2.3 Υπολογισμός συντελεστών εκπομπής και απορρόφησης

Θεωρούμε ένα ομογενές σύστημα ενεργητικών ηλεκτρονίων που κινούνται σε ένα όπας ήδη έχουμε αναφέρει ομογενές, ψυχρό και χωρίς συγκρούσεις πλάσμα ηλεκτρονίων στο οποίο εφαρμόζεται σταθερό και ομογενές μαγνητικό πεδίο. Εάν η πυκνότητα του ηλεκτρονικού πλάσματος είναι πολύ μεγαλύτερη από αυτή των ενεργητικών ηλεκτρονίων η διάδοση κυμάτων στο σύστημα αυτό εξαρτάται μόνο από τη διαπερατότητα του μέσου.

Κύματα δύο τύπων μπορούν να διαδοθούν σε τέτοιο μέσο. Τα συνήθη τύπου κύματα ordinary mode που από εδώ και στο εξής τα σχετικά με αυτά μεγέθη θα φέρουν το δείκτη + και μη συνήθη τύπου κύματα που από εδώ και στο τα σχετικά με αυτά μεγέθη θα φέρουν το δείκτη - extraordinary mode.

Οι συνιστώσες του διηλεκτρικού ταυστή για ένα μέσο όπας αυτό που περιγράφουμε στην αρχή υπολογίζονται από τον Ginzburg το 1964. Ορίζοντας ως $F = \omega/\omega_B = \nu/\nu_B$ και $P = \omega/\omega_p = \nu/\nu_p$ έχουμε

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= 1 + P^2/(1 - F^2), \\ \epsilon_{\theta\theta} &= 1 - P^2(\sin^2 \theta - F^2)/F^2(1 - F^2), \\ \epsilon_{kk} &= 1 - P^2(\cos^2 \theta - F^2)/F^2(1 - F^2), \\ \epsilon_{x\theta} &= -\epsilon_{\theta x} = +iP^2 \cos \theta / F(1 - F^2), \\ \epsilon_{xk} &= -\epsilon_{kx} = +iP^2 \sin \theta / F(1 - F^2), \\ \epsilon_{\theta k} &= -\epsilon_{k\theta} = +iP^2 \cos \theta \sin \theta / F^2(1 - F^2),\end{aligned}\tag{2.56}$$

Με βάση τις παραπάνω συνιστώσες ο δείκτης διάθλασης υπολογίζεται από τη σχέση

$$n_{\pm}^2 = 1 + 2P^2(P^2 - F^2)/D_{\pm}\tag{2.57}$$

με $D_{\pm}$ να δίνεται από τη σχέση

$$D_{\pm} = \pm [F^4 \sin^4 \theta + 4F^2(P^2 - F^2)^2 \cos^2 \theta]^{1/2} - 2F^2(P^2 - F^2) - F^2 \sin^2 \theta.\tag{2.58}$$

και για τους δείκτες πόλωσης έχουμε

$$\alpha_{\theta\pm} = -F \cos \theta / [F^2 + P^2/(n_{\pm}^2 - 1)]\tag{2.59}$$

$$\alpha_{k\pm} = -(n_{\pm}^2 - 1)F \sin \theta / (P^2 - F^2).\tag{2.60}$$

Κάνοντας τις σχετικές αντικαταστάσεις και χρησιμοποιώντας τη βασική σχέση $\omega = 2\pi\nu$ σε κάθε περίπτωση παίρνουμε για τους δείκτες διάθλασης $n_{\pm}$ και τους συντελεστές πόλωσης $a_{\theta\pm}$ και $a_{k\pm}$ σαν συναρτήσεις της συχνότητας ν και της γωνίας

θ ανάμεσα στο κυματόνυσμα και το σταθερό μαγνητικό πεδίο B τις τελικές σχέσεις που θα χρησιμοποιήσουμε :

$$n_{\pm}^2(\theta) = 1 + \frac{2\nu_p^2(\nu_p^2 - \nu^2)}{\pm[\nu^4\nu_B^4 \sin^4 \theta + 4\nu^2\nu_B^2(\nu_p^2 - \nu^2)^2 \cos^2 \theta]^{1/2} - 2\nu^2(\nu_p^2 - \nu^2) - \nu^2\nu_B^2 \sin^2 \theta} \quad (2.61)$$

$$a_{\theta\pm}^2(\nu, \theta) = -\frac{2\nu(\nu_p^2 - \nu^2) \cos \theta}{-\nu^2\nu_B \sin^2 \theta \pm [\nu^4\nu_B^4 \sin^4 \theta + 4\nu^2(\nu_p^2 - \nu^2)^2 \cos^2 \theta]^{1/2}}, \quad (2.62)$$

$$a_{k\pm}^2(\nu, \theta) = -\frac{\nu_p^2\nu\nu_B \sin \theta - a_{\theta\pm}\nu_p^2\nu_B^2 \cos \theta \sin \theta}{\nu_p^2(\nu_B^2 \cos^2 \theta - \nu^2) - \nu^2(\nu_B^2 - \nu^2)}, \quad (2.63)$$

στις παραπάνω σχέσεις συμβολίζουμε με ν_p τη συχνότητα πλάσματος η οποία δίνεται από τη σχέση $\nu_p = e(n_e/\pi m)^{1/2}$ όπου e και m το φορτίο και η μάζα του ηλεκτρονίου ενώ n_e είναι η πυκνότητα των ηλεκτρονίων, ενώ συμβολίζουμε με ν_B τη κυκλοτρονική συχνότητα που προκαλείται από σταθερό μαγνητικό πεδίο έντασης B που δίνεται από τη σχέση $\nu_B = eB/2\pi mc$. Οι συντελεστές πόλωσης σε σχέση με τις συνιστώσες του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου δίνονται από τις σχέσεις:

$$i\alpha_{\theta} = E_{\theta}/E_x \quad (2.64)$$

$$i\alpha_k = E_k/E_x \quad (2.65)$$

όπου E_x και E_{θ} είναι οι εγκάρσιες συνιστώσες του διανύσματος της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου E της ακτινοβολίας, όπου E_{θ} η συνιστώσα που βρίσκεται στο επίπεδο ορίζεται από το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου B και το κυματόνυσμα k και E_k είναι η συνιστώσα του E κατά μήκος του κυματόνυσματος.

Οι δείκτες διάθλασης έχουν τόσο μηδενισμούς όσο και απειρισμούς και για τιμές μαγνητικού πεδίου διάφορες του μηδενός υπάρχουν συχνότητες κάτω από τη συχνότητα πλάσματος ν_p για τις οποίες ο δείκτης διάθλασης και για τους δύο τύπους κυμάτων είναι πραγματικός και μεγαλύτερος από τη μονάδα αριθμός. Έχει αποδειχτεί όμως (Pawsey-Bracewell 1955) ότι για $\theta \neq 0$ ακτινοβολία συχνότητας ν θα διαφύγει από την πηγή ραδιοκυμάτων μόνο αν για τον ordinary mode $\nu > \nu_p$ ενώ για τον extraordinary mode θα πρέπει $\nu > \nu_x$ όπου $\nu_x = (\nu_p^2 + \frac{1}{4}\nu_B^2)^{1/2} + \frac{1}{2}\nu_B$. Για τις προηγούμενες συχνότητες ο δείκτης διάθλασης είναι πραγματικός και μικρότερος από τη μονάδα αριθμός.

Όπως φαίνεται από τις παραπάνω σχέσεις που αφορούν το συντελεστή α_k , υπάρχει μια μη μηδενική διαμήκη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου της ακτινοβολίας E_k στο πλάσμα. Εκτός και αν μελετάμε τη σύζευξη μεταξύ διαμηκών ταλαντώσεων και

εκάρσιων ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, σε όλες τις άλλες περιπτώσεις η ενέργεια που αφορά τη συνιστώσα αυτή δεν θα διαφύγει από την πηγή ραδιοκυμάτων και επομένως στους υπολογισμούς μας μπορούμε να θέσουμε τον συντελεστή πόλωσης $a_{k\pm} = 0$. Αυτό δεν αποτελεί σοβαρό σφάλμα στους υπολογισμούς μας αφού από τους αριθμητικούς υπολογισμούς που περιγράφονται παρακάτω βρίσκουμε πως για το εύρος συχνοτήτων που μελετάμε ($\nu > \nu_p$) και ($\nu > \nu_x$) η εκπομπή που σχετίζεται με την συνιστώσα E_k είναι αμελητέα σε σχέση με τη συνολική εκπεμπόμενη ακτινοβολία.

Μελετάμε τώρα την ακτινοβολία που παράγεται από μονοενεργητικά ηλεκτρόνια. Εφόσον θέσουμε τον συντελεστή $a_{k\pm} = 0$ η εκπομπή ακτινοβολίας από ένα ηλεκτρόνιο τόσο για τον ordinary mode όσο και για τον extraordinary mode δίνονται από την πιο πάνω ανάλυση που όπως αναφέραμε αναπτύχθηκε από τον Liemohn και διορθώθηκε από τους Trulsen και Fejer.

Αν θεωρήσουμε πως η ταχύτητα του ηλεκτρονίου σχηματίζει γωνία ϕ με το διάνυσμα της έντασης του μαγνητικού πεδίου τότε οι παράμετροι που εισάγαμε στην αρχική μας ανάλυση β_1 που έχει να κάνει με την κάθετη συνιστώσα της ταχύτητας στο διάνυσμα της έντασης και β_2 την παράλληλη συνιστώσα παίρνουν τη μορφή

$$\beta_1 = u \sin \phi / c \quad (2.66)$$

$$\beta_2 = u \cos \phi / c \quad (2.67)$$

Παρατηρούμε ότι στη σχέση (2.45) χρειαζόμαστε το πηλίκο $\gamma\omega/\omega_B$. Χρησιμοποιώντας τη (2.52) και με αντικατάσταση των β_1 και β_2 έχουμε

$$\begin{aligned} \beta_2 \cos \theta &= (\omega - s\omega_B/\gamma)/\omega n = \\ \frac{\gamma\omega}{\omega_B} &= \frac{s}{1 - n\beta \cos \phi \cos \theta} \end{aligned} \quad (2.68)$$

θέττοντας το παραπάνω αποτέλεσμα στην (2.45) και λαμβάνοντας υπόψη ότι έχουμε δύο τύπους κυμάτων παίρνουμε την τελική σχέση για τα x_s

$$x_s = \frac{sn_{\pm}\beta \sin \phi \sin \theta}{1 - n_{\pm}\beta \cos \phi \cos \theta} \quad (2.69)$$

Ενώ τέλος λαμβάνοντας τη σχέση (2.55), την προηγούμενη σχέση, το ότι $a_{k\pm} = 0$ και τις σχέσεις (2.38) και αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε την τελική μορφή του συντελεστή εκπομπής ενός ηλεκτρονίου να είναι

$$\begin{aligned} \eta_{\pm}(\nu, \theta, \gamma, \phi) &= \frac{2\pi e^2}{c} \nu^2 \sum_{s=-\infty}^{\infty} \frac{n_{\pm}}{1 + \alpha_{\theta\pm}^2} \\ &\times [\alpha_{\theta\pm} (\frac{\cot \theta}{n_{\pm}} - \beta \frac{\cos \phi}{\sin \theta}) J_s(x_s) - \beta \sin \phi J'_s(x_s)]^2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\times \delta(\nu - \frac{s\nu_B}{\gamma} - n_{\pm}\nu\beta \cos\phi \cos\theta)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις συμβολίζουμε με β την ταχύτητα του ηλεκτρονίου σε μονάδες ταχύτητας φωτός c δηλαδή $\beta = u/c$, με γ συμβολίζουμε την ποσότητα $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, η γωνία ψ είναι η γωνία που σχηματίζει η ηλεκτρονική κατανομή σε σχέση με την κατεύθυνση της έντασης μαγνητικού πεδίου B και τέλος J_s και J'_s η συνάρτηση Bessel s τάξης και η αντίστοιχη παράγωγος της. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για όλες τις συχνότητες για τις οποίες $n^2 > 0$. Θετικές τιμές του δείκτη s αντιστοιχούν στο κανονικό φαινόμενο Doppler, αρνητικές τιμές του δείκτη αντιστοιχούν στο ανώμαλο φαινόμενο Doppler και τέλος για $s = 0$ έχουμε το φαινόμενο Cerenkov.

Η εκπομπή η που δίνεται από τη σχέση (4) αφορά την ενέργεια που χάνεται εκπεμπόμενη ως ακτινοβολία από ένα ηλεκτρόνιο ανα μονάδα συχνότητας και ανα μονάδα στερεάς γωνίας και δεν αντιστοιχεί στην παρατηρούμενη ακτινοβολία από παρατηρητή. Έχει αποδειχτεί όμως πως η παραπάνω σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως εκπομπή όγκου μιας μονοενεργειακής κατανομής ηλεκτρονίων σε μια γωνία παρατήρησης και κανονικοποιημένη σε μια τιμή του γ και γωνίας παρατήρησης ϕ .

Οι συντελεστές απορρόφησης και εκπομπής $j_{\pm}$ και $K_{\pm}$ για μια κατανομή ηλεκτρονίων ακολουθούν τις παρακάτω γενικές σχέσεις (Bekefi 1966, Melrose 1968):

$$j_{\pm}(\nu, \theta) = \int \eta_{\pm}(\nu, \theta, \gamma, \phi) f(p') d^3p' \quad (2.71)$$

με μονάδες $\text{ergs (sec sterad Hz cm}^3)^{-1}$

$$K_{\pm}(\nu, \theta) = (c^2/n\nu_2) \int \eta_{\pm}(\nu, \theta, \gamma, \phi) \frac{1}{h\nu} [f(p) - f(p')] d^3p' \quad (2.72)$$

με μονάδες cm^{-1}

όπου $f(p)d^3p$ είναι ο αριθμός των ηλεκτρονίων ανά μονάδα όγκου με ορμή που βρίσκεται σε μια σφαίρα γύρω από την τιμή p ακτίνας dp ενώ το πρόσημο του K καθορίζεται έτσι ώστε η εκπομπή φωτονίου ενέργειας $h\nu$ από ένα ηλεκτρόνιο μεταβάλλει την ορμή του από p' σε p . Εφόσον η ενέργεια του φωτονίου $h\nu$ είναι πολύ μικρότερη από την ενέργεια του ηλεκτρονίου γmc^2 , μπορούμε να θεωρήσουμε πως η ποσότητα $f(p) - f(p')$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση :

$$f(p) - f(p') = -\frac{h\nu}{pc} \beta \gamma \frac{\partial f}{\partial \gamma} + \tan \Delta\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \quad (2.73)$$

όπου $\Delta\phi$ είναι η μεταβολή της pitch angle των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν που προκύπτει από την εκπομπή φωτονίων ενέργειας $h\nu$ σε κατεύθυνση γωνίας θ και

υπολογίζεται από τη σχέση :

$$\tan \Delta\phi = \frac{h\nu}{pc} \frac{n\beta \cos \theta - \cos \phi}{\beta \sin \gamma} \quad (2.74)$$

όπως μπορεί να δεί κανείς από τις παραπάνω εξισώσεις για μια ισοτροπική κατανομή η παράγωγος ως προς την pitch angle θα είναι $\partial f / \partial \phi = 0$ και έτσι αναγκαία συνθήκη για αρνητική απορρόφηση θα είναι $\partial f / \partial \gamma > 0$. Για μη ισοτροπική κατανομή ηλεκτρονίων αρνητική απορρόφηση μπορεί να συμβεί αν $\partial f / \partial \gamma < 0$. Ειδικότερα για κάτι τέτοιο η απαραίτητη συνθήκη θα είναι $\Delta\phi \partial f / \partial \gamma > 0$ το οποίο σημαίνει ότι μια ανισοτροπική κατανομή προσφέρει στην παραγωγή ενός φωτονίου όταν μεταβαίνουμε από μια πυκνά κατοικημένη σε μια λιγότερα πυκνά κατοικημένη κατάσταση της pitch angle. Τα παραπάνω αφορούν την εμφάνιση φαινομένου maser για ανισοτροπική κατανομή. Μπορούμε επίσης σε σχέση με τα προηγούμενα να αναφέρουμε πως σε κάθε περίπτωση φαινόμενο maser θα εμφανίζεται στις χαμηλές αρμονικές της εκπομπής της gyrosynchrotron.

Θεωρούμε τώρα την ύπαρξη πηγής ραδιοκυμάτων με συνολικό όγκο V και περιέχει αριθμό ηλεκτρονίων N με ενέργειες μεγαλύτερες από μια ελάχιστη τιμή. Θεωρούμε πως η συνάρτηση κατανομής $f(p)$ μπορεί να χωριστεί σε ενεργειακό μέρος $u(\gamma)$ και γωνιακό μέρος $g(\phi)$ το γινόμενο των δύο μερών θα αναγράφεται στο εξής $f(\gamma, \phi) = u(\gamma)g(\phi)$. Επομένως ισχύει ότι :

$$f(p) = \frac{N}{V} \frac{1}{p^2} \frac{d\gamma}{dp} f(\gamma, \phi) \quad (2.75)$$

θέτουμε το πηλίκο $N_r = N/V$ και ορίζοντας το ως αριθμητική πυκνότητα των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν. Η συνάρτηση με βάση αυτά που αναφέρουμε παραπάνω πρέπει να είναι κανονικοποιημένη ως προς την ενέργεια δηλαδή τη μεταβλητή γ και ως προς την pitch angle γωνία ϕ . Ισχύει δηλαδή η σχέση :

$$2\pi \int_1^\infty d\gamma \int_{-1}^1 d(\cos \phi) f(\gamma, \phi) = 1 \quad (2.76)$$

και μεταφέρουμε την παραπάνω συνάρτηση κατανομής στα ολοκληρώματα υπολογισμού των συντελεστών εκπομπής και απορρόφησης $j_\pm$ και $K_\pm$. Τα ολοκληρώματα αυτά με τη χρήση της δέλτα συνάρτησης απλοποιούνται και παίρνουν την τελική μορφή που θα χρησιμοποιήσουμε στους αριθμητικούς υπολογισμούς μας. Έτσι για γωνία $\theta \neq \pi/2$ έχουμε:

$$j_\pm(\nu, \theta) = \frac{4\pi^2 e^2 \nu N_r}{|\cos \theta| c} \frac{1}{1 + \alpha_{\theta\pm}^2} \int_1^\infty d\gamma \times \sum_{smin}^{smax} f(\gamma, \phi_s) \beta^{-1} \left[\alpha_{\theta\pm} \left(\frac{\cot \theta}{n_\pm} - \beta \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \right) J_s(x_s) - \beta \sin \phi J'_s(x_s) \right]^2 \quad (2.77)$$

$$\begin{aligned}
K_{\pm}(\nu, \theta) &= \frac{4\pi^2 e^2 N_r}{m |\cos \theta| c \nu} \frac{1}{(1 + \alpha_{\theta\pm}^2) n_{\pm}} \int_1^{\infty} d\gamma \sum_{smin}^{smax} \beta^{-1} \\
&\times \left[-\beta \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{f(\gamma, \phi)}{\beta \gamma^2} \right) + \frac{n_{\pm} \beta \cos \theta - \cos \phi}{\beta^2 \gamma \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} f(\gamma, \phi) \right]_{\phi=\phi_s} \\
&\times \left[\alpha_{\theta\pm} \left(\frac{\cot \theta}{n_{\pm}} - \beta \frac{\cos \phi}{\sin \theta} \right) J_s(x_s) - \beta \sin \phi J'_s(x_s) \right]^2
\end{aligned} \tag{2.78}$$

όπου τα x_s δίνονται από τη σχέση (5) ενώ για τα ϕ_s και τα όρια της άθροισης s_{min} , s_{max} ισχύει ότι:

$$\cos \phi_s = \frac{1 - \frac{s\nu_B}{\gamma\nu}}{n_{\pm} \beta \cos \theta} \tag{2.79}$$

$$s_{min} = Integer \left[\frac{\gamma\nu}{\nu_B} (1 - n_{\pm} \beta \cos \theta) \right] + 1 \tag{2.80}$$

$$s_{max} = Integer \left[\frac{\gamma\nu}{\nu_B} (1 + n_{\pm} \beta \cos \theta) \right] \tag{2.81}$$

Τέλος για την περίπτωση που η γωνία $\theta = \pi/2$ η παραπάνω σχέσεις παίρνουν τη μορφή :

$$j_{\pm}(\nu, \pi/2) = \frac{4\pi^2 e^2 \nu_B N_r}{c} n_{\pm} \sum_1^{\infty} \beta_s^2 \int_{-1}^1 d \cos \phi f(\gamma_s, \phi) \Upsilon_{\pm}(\phi) \tag{2.82}$$

$$\begin{aligned}
K_{\pm}(\nu, \pi/2) &= \frac{4\pi^2 e^2 \nu_B N_r}{m c \nu^2} \sum_1^{\infty} \beta_s^2 \int_{-1}^1 d \cos \phi \Upsilon_{\pm}(\phi) \\
&\times \left[-\beta \gamma^2 \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{f(\gamma, \phi)}{\beta \gamma^2} \right) + \frac{n_{\pm} \beta \cos \theta - \cos \phi}{\beta^2 \gamma \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} f(\gamma, \phi) \right]_{\phi=\phi_s, \beta=\beta_s}
\end{aligned} \tag{2.83}$$

όπου έχουμε θέσει:

$$\Upsilon_+(\phi) = \cos^2 \phi [J_s(x_s)]^2 \tag{2.84}$$

$$\Upsilon_-(\phi) = \sin^2 \phi [J'_s(x_s)]^2 \tag{2.85}$$

$$\gamma_s = \frac{s\nu_B}{\nu} \tag{2.86}$$

$$\beta_s = (1 - \gamma_s^{-2})^{1/2} \tag{2.87}$$

$$x_s = s\beta_s n_{\pm} \sin \phi \tag{2.88}$$

Προκειμένου τώρα να απλοποιηθεί υπολογιστικά η διαδικασία μπορούμε να περάσουμε την άθροιση έξω από την ολοκλήρωση. Οι εκφράσεις των συντελεστών δεν αλλάζουν με εξαίρεση φυσικά το ότι τώρα πρώτα γίνεται η ολοκλήρωση ως προς τη γ μεταβλητή από γ_1 ως γ_2 τα οποία δίνονται από τη σχέση:

$$\gamma_{1,2} = \frac{(\frac{s\nu_B}{\nu})^2 + n_{\pm}^2 \cos^2 \theta}{(\frac{s\nu_B}{\nu}) \pm n_{\pm} |\cos \theta| [(\frac{s\nu_B}{\nu})^2 + n_{\pm}^2 \cos^2 \theta - 1]^{1/2}} \tag{2.89}$$

και στη συνέχεια ακολουθεί η άθροιση των ολοκληρωμάτων η οποία ξεκινά από μια ελάχιστη ακέραια τιμή s_{min} ως θεωρητικά στο άπειρο $s_{max} = \infty$. Η τιμή έναρξης της άθροισης καθορίζεται από την ακέραια τιμή s για την οποία ισχύει:

$$s > \left(\frac{\nu}{\nu_B}\right)(1 - n_{\pm}^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (2.90)$$

2.4 Συναρτήσεις κατανομής ηλεκτρονίων

2.4.1 Συνάρτηση νόμου δύναμης (Power-Law)

Η ακτινοβολία που εκπέμπεται από πάρα πολύ μεγάλης ενέργειας ηλεκτρόνια (ultra relativistic) δηλαδή όταν η ρελατιβιστική παράμετρος $\gamma \gg 1$ μπορεί να περιγραφεί καλά από μια ισοτροπική κατανομή ηλεκτρονίων της οποίας το ενεργειακό μέρος περιγράφεται από μια συνάρτηση δύναμης. Συγκεκριμένα το ισοτροπικό μέρος το οποίο χαρακτηρίστηκε πιο πάνω σαν $g(\phi)$ θα έχει τη μορφή $g(\phi) = 1/4\pi$. Το ενεργειακό μέρος της συνάρτησης θα έχει τη μορφή :

$$u(\epsilon) = K\epsilon^{-p} \quad (2.91)$$

όπου K η σταθερά κανονικοποίησης της συνάρτησης, ϵ η κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων και p ο εκθέτης που συνήθως η τιμή του κυμαίνεται από 3 ως 8. Εξετάζοντας τις σχέσεις που υπολογίζουν τους συντελεστές εκπομπής και απορρόφησης φαίνεται πως είναι προτιμότερο να εισάγουμε την σχετικιστική παράμετρο γ στην συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων αυτό θα γίνει αν θυμηθούμε πως η σχετικιστική κινητική ενέργεια δίνεται από τη σχέση:

$$\epsilon = (\gamma - 1)m_e c^2 \quad (2.92)$$

επομένως το ενεργειακό μέρος της συνάρτησης κατανομής θα έχει τη μορφή:

$$u(\gamma) = C(\gamma - 1)^{-p} \quad (2.93)$$

όπου C η σταθερά κανονικοποίησης της νέας συνάρτησης. Η σταθερά αυτή υπολογίζεται από την σχέση 1.11 με την ολοκλήρωση όμως ως προς την ενέργεια σε ρεαλιστικές εφαρμογές να γίνεται από μια ελάχιστη τιμή που χαρακτηρίζεται ως γ_{min} ως μια μέγιστη τιμή που χαρακτηρίζεται ως γ_{max} σύμφωνα με το Holman (2002) και όχι από το 1 ως το άπειρο. Οι τιμές αυτές του γ αντιστοιχούν στην ελάχιστη και μέγιστη τιμή ενέργειας των ηλεκτρονίων και μετατρέπονται σε τιμές του γ μέσα από την σχέση (1.27). Για τον υπολογισμό της σταθεράς έχουμε :

$$2\pi \int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} d\gamma \int_{-1}^1 d(\cos \phi) f(\gamma, \phi) = 1 \quad (2.94)$$

το παραπάνω ολοκλήρωμα χωρίζεται σε δύο μέρη. Στο γωνιακό μέρος :

$$2\pi \int_{-1}^1 d(\cos \phi) g(\phi) = 1 \quad (2.95)$$

το οποίο ισχύει για την ισοτροπική κατανομή και στο ενεργειακό μέρος :

$$\int_{\gamma_{min}}^{\gamma_{max}} u(\gamma) d\gamma = 1 \quad (2.96)$$

Με αντικατάσταση της συνάρτησης δύναμης υπολογίζω το συντελεστή κανονικοποίησης που προκύπτει ίσος με :

$$C = \frac{p-1}{\frac{1}{(\gamma_{min}-1)^{p-1}} - \frac{1}{(\gamma_{max}-1)^{p-1}}} \quad (2.97)$$

Η συνολική συνάρτηση $f(\gamma, \phi)$ για $\gamma > \gamma_{min}$ θα δίνεται από την σχέση :

$$f(\gamma, \phi) = \frac{1}{4\pi} \frac{(p-1)}{\frac{1}{(\gamma_{min}-1)^{p-1}} - \frac{1}{(\gamma_{max}-1)^{p-1}}} (\gamma-1)^{-p} \quad (2.98)$$

η οποία λόγω της ισοτροπίας που θεωρήσαμε στην κατανομή δεν εξαρτάται από την pitch angle γωνία ϕ ενώ $f(\gamma, \phi) = 0$ για $\gamma < \gamma_{min}$.

2.4.2 Maxwellian

Στην περίπτωση που τα ηλεκτρόνια βρίσκονται σε θερμική ισορροπία σε θερμοκρασία T τότε η κατανομή των ενεργειών είναι μια κατανομή που χαρακτηρίζεται ως Maxwellian. Η εκπεμπόμενη ακτινοβολία χαρακτηρίζεται ως θερμική. Για μια ισοτροπική κατανομή ηλεκτρονίων χρησιμοποιούμε τη σχετικιστική μορφή της κατανομής που δίνεται από την :

$$f(\gamma) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{mc^2}{kT}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{kT}{mc^2}\right)^{-1} \gamma (\gamma^2 - 1)^{1/2} \exp \left[\frac{-mc^2}{kT} (\gamma - 1) \right] \quad (2.99)$$

όπου γ ο σχετικιστικός παράγοντας Lorentz, k η σταθερά Boltzmann, m η μάζα του ηλεκτρονίου και c η ταχύτητα του φωτός. Η πιο πάνω συνάρτηση είναι κανονικοποιημένη και ισχύει με την προϋπόθεση ότι $kT < mc^2$ ή $T < 6 \times 10^9$.

2.4.3 Υβριδική συνάρτηση κατανομής

Συχνά σε φυσικά φαινόμενα που μελετάμε συναντάμε ηλεκτρόνια τα οποία έχουν διάφορες τιμές ενέργειας. Εκτός από τα υψηλής ενέργειας ηλεκτρόνια υπάρχουν και ηλεκτρόνια με χαμηλότερες ενέργειες. Η προέλευση των ηλεκτρονίων χαμηλής ενέργειας είναι θερμική ενώ είναι μη θερμική στα υψηλής ενέργειας ηλεκτρόνια. Την ύπαρξη τόσο θερμικών όσο και μη θερμικών ηλεκτρονίων την επιβεβαιώνουμε από την καταγραφή της έντασης της ακτινοβολίας σε συνάρτηση με τη συχνότητα της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας σε διάφορα φυσικά φαινόμενα. Για τα υψηλής ενέργειας ηλεκτρόνια η κατάλληλη συνάρτηση κατανομής είναι η συνάρτηση νόμου δύναμης αλλά για τα θερμικά ηλεκτρόνια η κατάλληλη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση Maxwellian. Για ρεαλιστικές εφαρμογές επομένως θα ήταν καλύτερο να προτιμήσουμε μια μεικτή υβριδική κατανομή που θα εμπεριέχει και τις δύο προηγούμενες κατανομές. Η θεωρία της υβριδικής κατανομής στην οποία θα αναφερθούμε προτάθηκε από τους Benka και Holman(1992). Θεωρούμε μια ισοτροπική κατανομή ηλεκτρονίων που περιέχει τόσο θερμικό (th) όσο και μη θερμικό μέρος (nt) και έχει την μορφή:

$$f(\gamma) = \left(1 - \frac{N_{nt}}{N}\right) f_{th}(\gamma) + R \frac{N_{nt}}{N} f_{nt}(\gamma), \quad (2.100)$$

όπου N και N_{nt} είναι αντίστοιχα οι αριθμητικές πυκνότητες των ηλεκτρονίων σε ολόκληρο το πλάσμα και μόνο των μη θερμικών ηλεκτρονίων ενώ θα πρέπει $N = N_{th} + N_{nt}$ με N_{th} την πυκνότητα των θερμικών ηλεκτρονίων. Ενώ οι συναρτήσεις για το θερμικό και μη θερμικό μέρος αντίστοιχα δίνονται από τις σχέσεις :

$$f_{th}(\gamma) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{mc^2}{kT}\right)^{3/2} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{kT}{mc^2}\right)^{-1} \gamma (\gamma^2 - 1)^{1/2} \exp \left[\frac{-mc^2}{kT} (\gamma - 1) \right] \quad (2.101)$$

$$f_{nt}(\gamma) = (4\pi)^{-1} (\delta - 1)(\gamma_{cr} - 1)^{\delta-1}(\gamma - 1)^{-\delta} \quad (2.102)$$

Ο αριθμός των ηλεκτρονίων που βρίσκονται σε κάθε κατάσταση εξαρτάται από τη θερμοκρασία και για τις αριθμητικές πυκνότητες του θερμικού και μη θερμικού μέρους δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \frac{N_{nt}}{N_{th}} &= (32\pi)^{1/2} \left(\frac{mc^2}{kT} \right)^{3/2} \left(1 + \frac{15}{8} \frac{kT}{mc^2} \right)^{-1} \\ &\times \frac{\gamma_{cr}(\gamma_{cr} - 1)(\gamma_{cr}^2 - 1)^{1/2}}{\delta - 1} \exp \left[\frac{-mc^2}{kT}(\gamma_{cr} - 1) \right] \end{aligned} \quad (2.103)$$

όπου :

$$\gamma_{cr} = \left(\frac{p_{cr}^2}{m^2 c^2} + 1 \right)^{1/2} = \left[\frac{\left(\frac{p_{th}}{mc} \right)^2}{\epsilon - \left(\frac{p_{th}}{mc} \right)^2 (1 - \epsilon)} + 1 \right]^{1/2} \quad (2.104)$$

όπου η παράμετρος ϵ παίρνει τιμές στην περιοχή $kT/mc^2 < \epsilon \leq 0.15$ και ορίζεται θεωρητικά ως το μέτρο της ισχύος του ηλεκτρικού πεδίου E ως προς την ένταση του πεδίου Dreicer δηλαδή ισχύει $\epsilon = E/E_D$.

Και τέλος ο συντελεστής R που καθορίζει τη συμμετοχή κάθε όρου στη συνολική συνάρτηση ορίζεται ως εξής:

$$R = \begin{cases} 0 & \gamma < \gamma_R = \gamma(p_R) \\ \sin \left[\frac{(\pi/2)(\gamma - \gamma_R)^2}{(\gamma_{cr} - \gamma_R)^2} \right] & \mu\epsilon \ p_R = p_{cr} - \frac{p_{th}}{2} \\ 1 & \gamma > \gamma_{cr} \end{cases} \quad (2.105)$$

Στις παραπάνω σχέσεις με T συμβολίζουμε τη θερμοκρασία, k η σταθερά Boltzmann, $mc^2 = 511keV$ για το ηλεκτρόνιο. Η θερμική εξίσωση ισχύει για $T < 3 \times 10^9 K$, ενώ γ_{cr} είναι η τιμή του γάμμα που σχετίζεται με την ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να έχουν τα ηλεκτρόνια για να ανήκουν στο μη θερμικού μέρους. Σχετικιστικά η θερμική ορμή μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\frac{p_{th}}{mc} = \left(\frac{mc^2}{kT} - 1 \right)^{-1/2} \quad (2.106)$$

ενώ τέλος ο συντελεστής R κάνει συνεχή τη συνάρτηση καθώς μεταβάλλεται η παράμετρος γ και οι τιμές του κυμαίνονται ομαλά από 0 ως 1.

2.5 Μετρήσιμα φυσικά μεγέθη

Για να μελετήσουμε την εκπομπή της ακτινοβολίας χρησιμοποιούμε διάφορα φυσικά μεγέθη και μονάδες που θα αναφέρουμε παρακάτω. Για μια συγκεκριμένη συχνότητα

από τον φορμαλισμό που αναπτύχθηκε παραπάνω μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή εκπομπής για κάθε τύπο $j_{\pm}(\nu, \theta)$ και απορρόφησης $K_{\pm}(\nu, \theta)$ της ακτινοβολίας. Η διαφορική εξίσωση διάδοσης της ακτινοβολίας σε μια τέτοια περίπτωση καταλήγει στην απλή μορφή :

$$\frac{dI_{\pm}(\nu, \theta)}{dr} + K_{\pm}(\nu, \theta)I_{\pm}(\nu, \theta) = j_{\pm}(\nu, \theta) \quad (2.107)$$

όπου $I_{\pm}(\nu, \theta)$ η ένταση της ακτινοβολίας. Για μια ομογενή πηγή με οπτικό βάθος L η γενική λύση της πιο πάνω εξίσωσης θα δίνεται από τη σχέση :

$$I_{\pm}(\nu, \theta) = \frac{j_{\pm}}{K_{\pm}}(1 - \exp^{-K_{\pm}L}) \quad (2.108)$$

Η συνολική ένταση της ακτινοβολίας I που υπολογίζεται στην υβριδική κατανομή είναι ίση με το άθροισμα των εντάσεων που προκύπτει από κάθε τύπο :

$$I = I_{+} + I_{-} \quad (2.109)$$

Η υπολογιζόμενη ένταση μετατρέπεται σε παρατηρούμενη μέσω της σχέσης :

$$F(\nu, \theta) = \frac{I(\nu, \theta)A}{R^2} = \frac{I(\nu, \theta)A}{2.238 \times 10^7} \text{ SFU} \quad (2.110)$$

όπου A το εμβαδόν της επιφάνειας της πηγής η οποία αν έχει όγκο V μπορούμε να γράψουμε για αυτή ότι $V = AL$ ενώ R είναι η απόσταση του παρατηρητή από την πηγή την οποία λαμβάνουμε $R = 1 \text{ A.U.}$ Η ένταση μετριέται σε μονάδες SFU δηλαδή Solar Flux Units, μονάδα για την οποία ισχύει ότι $1 \text{ SFU} = 10^{-19} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1}$. Τέλος σε κάποιες περιπτώσεις υπολογίζουμε το βαθμό πόλωσης της εκπεμπόμενης ακτινοβολίας μέσα από τη σχέση:

$$r = \frac{I_{+} - I_{-}}{I_{+} + I_{-}} \quad (2.111)$$

2.6 Φρακταλική διάσταση

Έστω ότι έχουμε ένα επίπεδο αντικείμενο S το οποίο μπορεί να εμβαπτισθεί πλήρως στις δύο διαστάσεις. Αν L είναι η διάσταση τετραγώνου που εμπεριέχει το αντικείμενο αυτό τότε το L αποτελεί μια πρώτη εκτίμηση του μήκους του αντικειμένου S . Χωρίζουμε σε πλέγμα μικρότερων τετραγωνικών κουτιών μήκους $l < L$ και ορίζουμε ως αριθμό $N(L, l)$ τον ελάχιστο αριθμό κουτιών πλευράς l που καλύπτουν πλήρως το αντικείμενο S τον οποίο και καταγράφουμε.

Όπως είναι φυσικό όταν το l είναι σχετικά μεγάλο η ως άνω κάλυψη δεν είναι δυνατό να λάβει υπόψη της και να αποδώσει σωστά οπές στο εσωτερικό του αντικειμένου, ή εσοχές στο σύνορο του μεγέθους μικρότερου από l . Πρέπει λοιπόν αν θέλουμε να περιγράψουμε σωστά τη γεωμετρική δομή του αντικειμένου να επιλέξουμε μικρότερο l και να επαναλάβουμε τη διαδικασία. Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία καθώς ο αριθμός των επαναλήψεων αυξάνει και το $l \rightarrow 0$ μπορεί να αποδειχτεί μαθηματικά ότι ανάμεσα στα μεγέθη υπάρχει η σχέση

$$N(\epsilon) = C\epsilon^{-D} \quad (2.112)$$

όπου

$$\epsilon = \frac{l}{L} \quad (2.113)$$

όπου D η γεωμετρική διάσταση του αντικειμένου και C άγνωστη σταθερά. Λογαριθμίζοντας και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης και κάνοντας λίγες πράξεις έχουμε τελικά

$$\ln N = A - D \ln l \quad (2.114)$$

όπου A σταθερά. Επομένως μπορούμε κάνοντας τη γραφική παράσταση της παραπάνω σχέσης και να υπολογίσουμε τη φρακταλική διάσταση του αντικειμένου. Ο ορισμός ισχύει για κάθε αντικείμενο οσονδήποτε διαστάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

3.1 Υπολογισμός έντασης της ακτινοβολίας για διάφορες συναρτήσεις κατανομής

Σε πρώτη φάση μελετάμε το θέμα του υπολογισμού της έντασης για κάθε τύπο κυμάτων που παράγονται τόσο για συνάρτηση τύπου power-law που περιγράφει υψηλής ενέργειας ηλεκτρόνια όσο και για συνάρτηση τύπου Maxwellian για θερμικά ηλεκτρόνια. Ο κώδικας αναπτύχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C++. Ο κώδικας υπολογίζει την ένταση της ακτινοβολίας σε ένα εύρος συχνοτήτων που ξεκινά από $\nu = 4 \times 10^8 \text{ Hz}$ ως $\nu = 2 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

Στον κώδικα χρησιμοποιείται μια τεχνική που προτείνεται από τον Holman. Το άθροισμα μπορεί να βγεί έξω από το ολοκλήρωμα και να υπολογίσουμε ένα άθροισμα ολοκληρωμάτων από μια τιμή ενέργειας που αντιστοιχεί σε ρελατιβιστικό παράγοντα γ_1 ως μια τιμή γ_2 διαφορετικά για κάθε τάξη s των συναρτήσεων Bessel και στη συνέχεια ακολουθεί η άθροιση των ολοκληρωμάτων η οποία ξεκινά από μια ελάχιστη ακέραια τιμή s_{min} ως θεωρητικά στο άπειρο $s_{max} = \infty$. Η τιμή έναρξης της άθροισης καθορίζεται από την ακέραια τιμή s για την οποία ισχύει:

$$s > \left(\frac{\nu}{\nu_B}\right)(1 - n_{\pm}^2 \cos^2 \theta)^{1/2} \quad (3.1)$$

ενώ τα όρια ενέργειας για κάθε ολοκλήρωμα δίνονται:

$$\gamma_{1,2} = \frac{(\frac{s\nu_B}{\nu})^2 + n_{\pm}^2 \cos^2 \theta}{(\frac{s\nu_B}{\nu}) \pm n_{\pm} |\cos \theta| [(\frac{s\nu_B}{\nu})^2 + n_{\pm}^2 \cos^2 \theta - 1]^{1/2}} \quad (3.2)$$

Συνοψίζοντας εργαζόμαστε ως εξής :

Ορίζω το εύρος των ενεργειών των ηλεκτρονίων που θα λάβω υπόψη μου από μια τιμή γ_{min} ως μια τιμή γ_{max} .

Για μια συγκεκριμένη συχνότητα υπολογίζουμε το δείκτη διάθλασης και τον συντελεστή α_{θ} . Για τη συγκεκριμένη συχνότητα υπολογίζω την τάξη της συνάρτησης Bessel από την οποία θα ξεκινήσω με βάση τη σχέση (2.1).

Υπολογίζω το πλήθος των συναρτήσεων που θα λάβω υπόψη μου ως εξής :

Βρίσκω τα όρια ολοκλήρωσης γ_1 και γ_2 όπως αυτά δίνονται από την (2.2) για κάθε τάξη s ξεκινώντας από την μικρότερη μέχρι κάποια μέγιστη τιμή. Θα κρατήσω όσες συναρτήσεις δίνουν όρια ολοκλήρωσης που βρίσκονται στο διάστημα γ_{min} ως γ_{max} .

Αφού βρώ το πλήθος των συναρτήσεων που θα χρησιμοποιήσω υπολογίζω για κάθε μια το ολοκλήρωμα της χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Gauss και αθροίζω όλα τα ολοκληρώματα για να πάρω την εκπομπή και την απορρόφηση με την βοήθεια των οποίων υπολογίζω τελικά την ένταση της ακτινοβολίας.

Οι παράμετροι που εισάγονται από το χρήστη είναι : Η γωνία παρατήρησης θ , ο δείκτης της συνάρτησης power-law p , η ελάχιστη και η μέγιστη ενέργεια που παρουσιάζουν τα ηλεκτρόνια σε KeV που μετατρέπονται σε γ_{min} και γ_{max} , η ένταση του μαγνητικού πεδίου B , το οπτικό βάθος της πηγής L και η πυκνότητα N των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν. Οι χρησιμοποιούμενες μονάδες είναι του συστήματος *c.g.s.*

Τα μεγέθη που υπολογίζονται από τον κώδικα είναι η ένταση του ordinary mode , η ένταση του extraordinary mode και ο δείκτης πόλωσης της ακτινοβολίας.

Ο κώδικας υπολογίζει την ένταση για συνάρτηση κατανομής power-law , για συνάρτηση τύπου Maxwellian καθώς και για την υβριδική συνάρτηση κατανομής. Οι τιμές που υπολογίζονται καταγράφονται σε αρχείο καθώς και η συχνότητα στην οποία αντιστοιχούν και παράγονται γραφικές παραστάσεις με τη βοήθεια προγράμματος γραφικών (IDL).

3.2 Αποτελέσματα από κατανομή Power Law

Οι τιμές που εισάγονται για την κατανομή Power Law είναι:

Η γωνία παρατήρησης $\theta = 45$.

Ο δείκτης της συνάρτησης power-law $p = 3$.

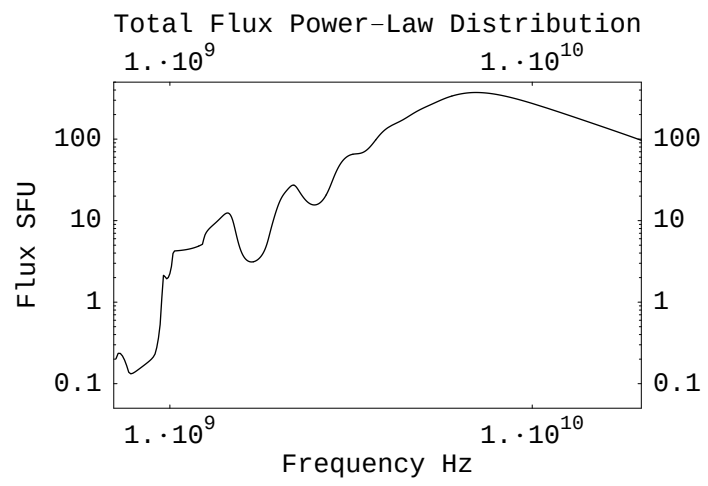
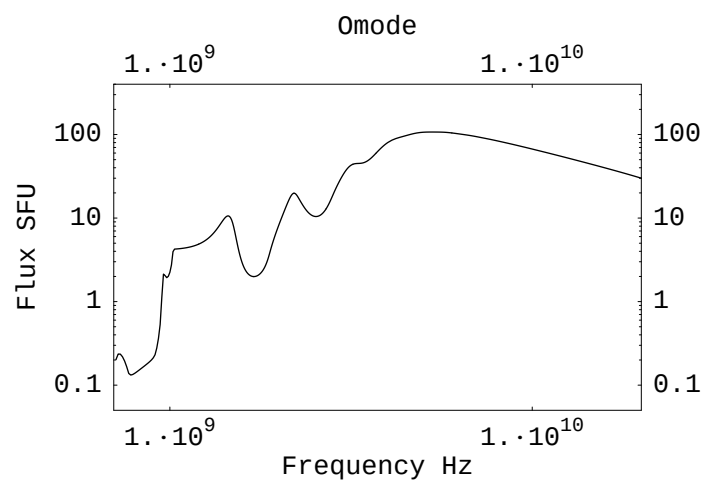
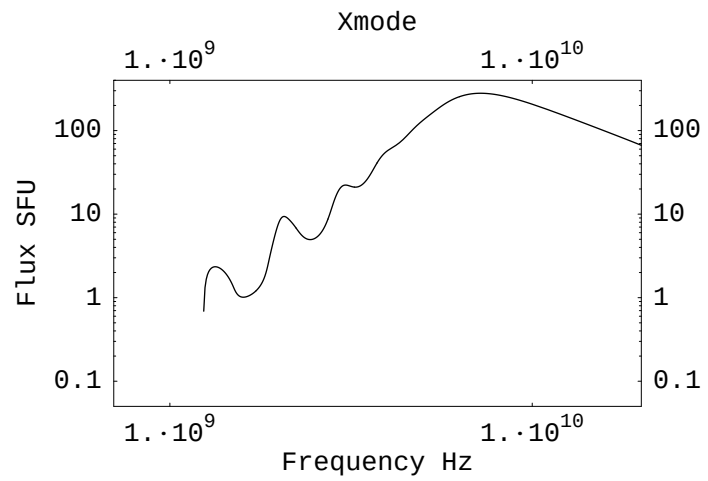
Η ελάχιστη $E_{min} = 10 KeV$ και η μέγιστη ενέργεια που παρουσιάζουν τα ηλεκτρόνια $E_{max} = 25600 KeV$.

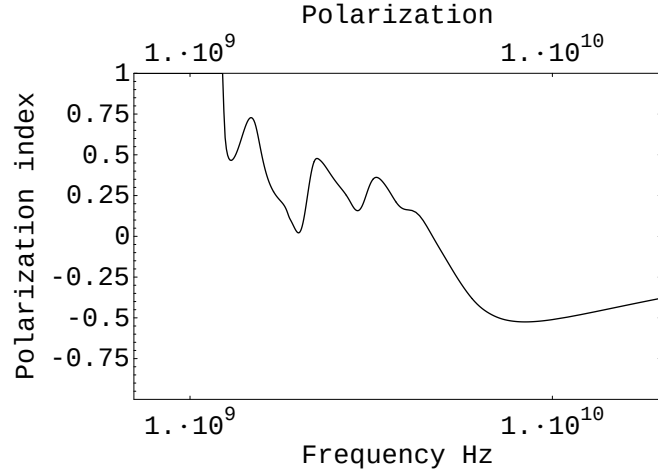
Η ένταση του μαγνητικού πεδίου $B = 300 gauss$.

Η διάσταση της πηγής $L = 1 \times 10^9 cm$.

Η πυκνότητα $N = 1 \times 10^7 cm^{-3}$ των ηλεκτρονίων που ακτινοβολούν.

Το εμβαδόν της πηγής που χρειάζεται κατά τον μετατροπή της έντασης από υπολογιζόμενη σε παρατηρούμενη δίνεται από τη σχέση $A = L \times L$. Οι παραπάνω τιμές είναι τιμές που είναι δυνατόν να παρατηρηθούν κατά τη διάρκεια ενός solar flare. Οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν για τους δύο τύπους πόλωσης , τη συνολική ακτινοβολία και την πόλωση της όπως αυτή ορίστηκε για τις παραπάνω τιμές εισόδου δίνονται παρακάτω.





Το συνολικό φάσμα που καταγράφουμε διακρίνεται σε δύο περιοχές. Τις περιοχές αυτές καθορίζει το μέγιστο της κατανομής το οποίο παρατηρούμε στην περιοχή περίπου των 7 GHz. Η περιοχή συχνοτήτων μετά το μέγιστο ονομάζεται οπτικά αραιή (optically thin) περιοχή και σε αυτή την περιοχή η απορρόφηση ακτινοβολίας δεν είναι σημαντική. Η περιοχή κάτω από το μέγιστο ονομάζεται οπτικά πυκνή (optically thick) και σ' αυτή η απορρόφηση είναι σημαντική. Η οπτικά αραιή περιοχή περιγράφεται από μια power law σχέση που έχει βρεθεί πως υπακούει στη σχέση $I \approx \nu^{-(d-1)/2}$ που δείχνει πως ο εκθέτης της περιοχής αυτής συνδέεται με τον εκθέτη της power law δ με τη σχέση $\alpha = -(\delta-1)/2$. Η οπτικά πυκνή περιοχή περιγράφεται από τη σχέση $I \approx \nu^{2.5}$ δηλαδή με σταθερό εκθέτη ανεξάρτητος του εκθέτη της power - law. Η ακτινοβολία είναι πολωμένη στον o mode στην οπτικά πυκνή περιοχή και στον x mode στην οπτικά αραιή περιοχή. Το μέγιστο του x mode είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο μέγιστο του o mode. Ειδικότερα λόγω της συχνότητας αποκοπής η ακτινοβολία είναι πολωμένη εκατό τοις εκατό στον o mode κάτω από τη συχνότητα αποκοπής ν_x .

3.3 Αποτελέσματα από κατανομή Maxwellian

Για την κατανομή Maxwellian που ορίστηκε παραπάνω εισάγουμε τις παρακάτω τιμές :

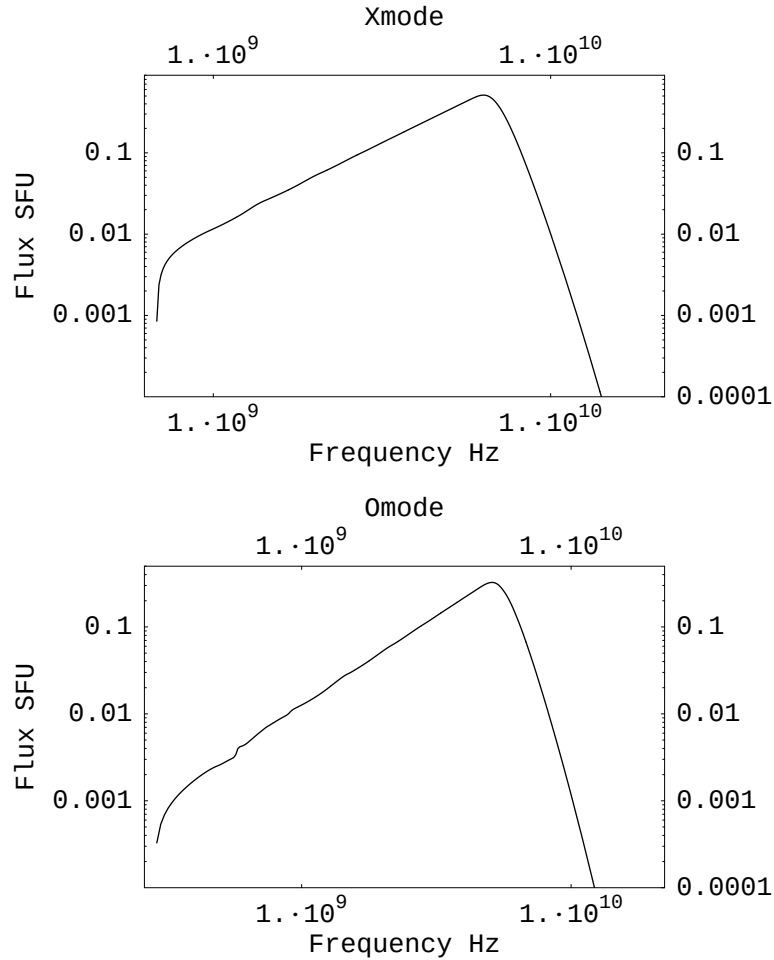
Τη θερμοκρασία $T = 2 \times 10^8 \text{ K}$

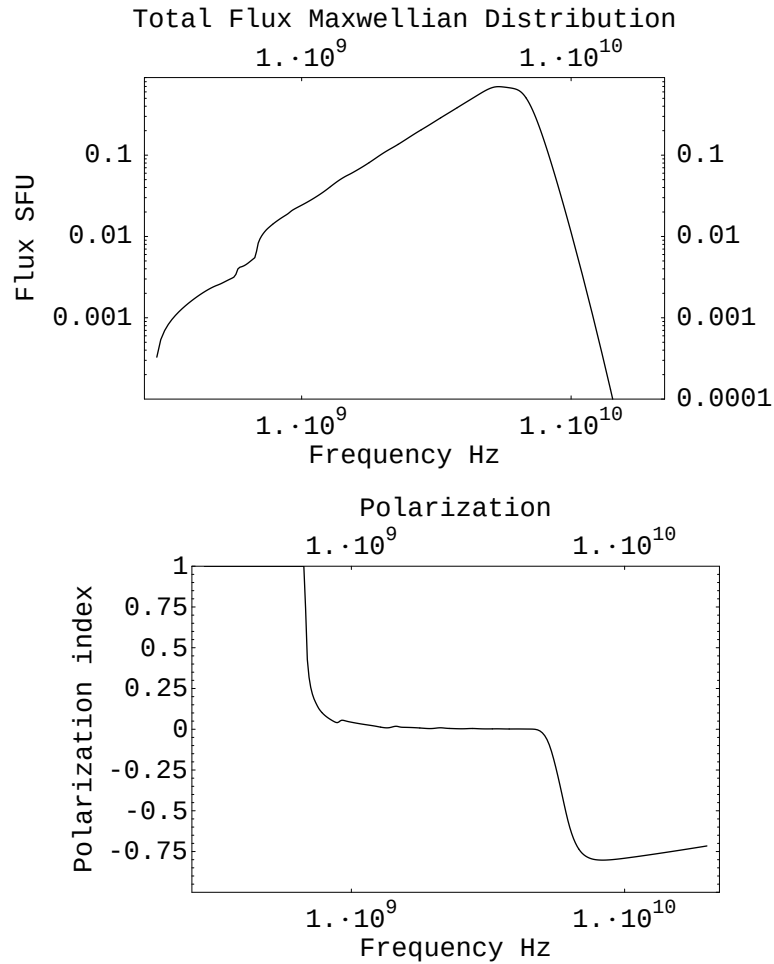
Την αριθμητική πυκνότητα των θερμικών ηλεκτρονίων $N_{th} = 10^9 \text{ cm}^{-3}$

Η διάσταση της πηγής $L = 1 \times 10^8 \text{ cm}$ η οποία στο πρόγραμμα υψώνετε στο τετράγωνο για να υπολογιστεί και το εμβαδόν που χρειάζεται στον υπολογισμό της έντασης.

Η ένταση μαγνητικού πεδίου $B = 200 \text{ gauss}$.

Οι γραφικές παραστάσεις που παίρνουμε για τους δύο τύπος πόλωσης , τη συνολική εκπομπή και την πόλωση της ακτινοβολίας και μας δείχνουν τη συνεισφορά των θερμικών ηλεκτρονίων στην ακτινοβολία κατά τη διάρκεια ενός solar flare δίνεται στα παρακάτω διαγράμματα





Παρατηρούμε πως οι μορφές του φάσματος που προκύπτει είναι παρόμοιες για τις συγκεκριμένες τιμές που μελετάμε. Παρατηρούμε μέγιστο του οποίου η τιμή είναι μικρή σχετικά με την αντίστοιχη τιμή που βρήκαμε για την κατανομή power law. Οι κλίσεις δείχνουν σταθερές. Ο συντελεστής πόλωσης δείχνει ότι σε μεγάλο εύρος συχνοτήτων η δέσμη είναι στον ίδιο βαθμό πολωμένη τόσο στον o-mode όσο και στον x-mode. Ενώ ο x-mode εκπέμπεται πιο έντονα στην αραιή περιοχή του φάσματος και ο o-mode λόγω και της συχνότητας αποκοπής κυριαρχεί στην πυκνή περιοχή του φάσματος.

3.4 Αποτελέσματα από την Υβριδική κατανομή

Στην περίπτωση της υβριδικής κατανομής υπολογίζεται η συνολική ένταση δηλαδή το άθροισμα της έντασης που προκύπτει από κάθε τύπο κυμάτων της ακτινοβολίας. Επειδή η υβριδική κατανομή θα μας απασχολήσει και σε άλλες περιπτώσεις που θα εξετάσουμε. Η βασική κατάσταση θα έχει τιμές εισόδου:

Τη θερμοκρασία $T = 7 \times 10^7 K$

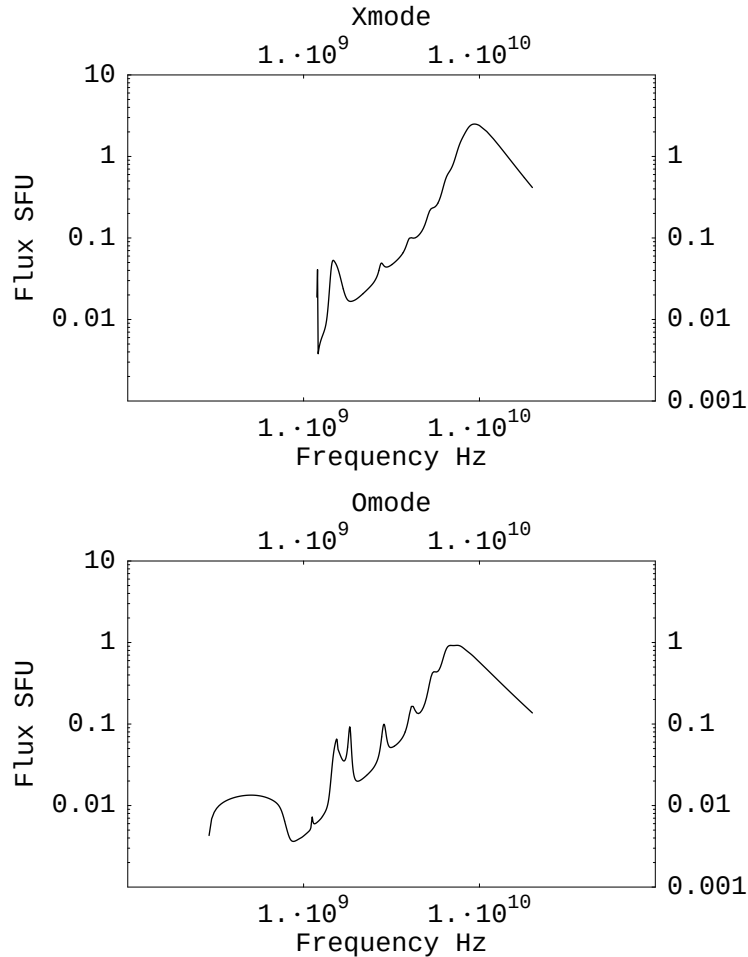
Την αριθμητική πυκνότητα των θερμικών ηλεκτρονίων και μέσω αυτών υπολογίζεται και ο αριθμός των μη θερμικών ηλεκτρονίων από τον κώδικα με βάση το φορμαλισμό που ήδη δώσαμε $N_{th} = 10^9 cm^{-3}$

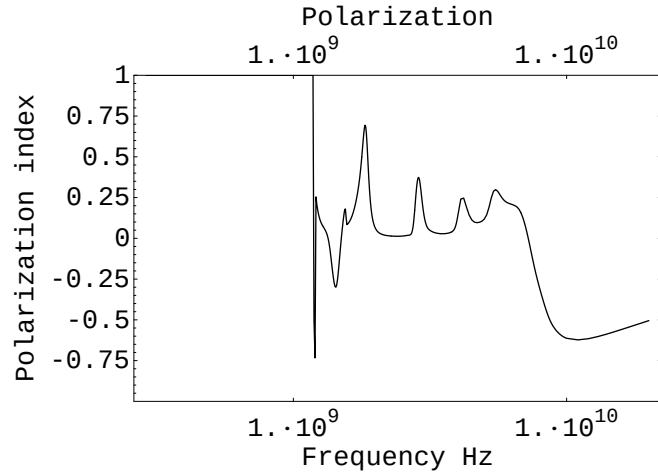
Τον εκθέτη της power law $\delta = 4$

Την παράμετρο $\epsilon = 0.06$ που θα καθορίσει με βάση τις πιο πάνω σχέσεις το γ_{crit} που αντιστοιχεί στην κρίσιμη ενέργεια στην οποία μεταβαίνουμε από την Maxwellian στην Power - Law

Η διάσταση της πηγής $L = 1 \times 10^8 cm$ η οποία στο πρόγραμμα υψώνετε στο τετράγωνο για να υπολογιστεί και το εμβαδόν που χρειάζεται στον υπολογισμό της έντασης.

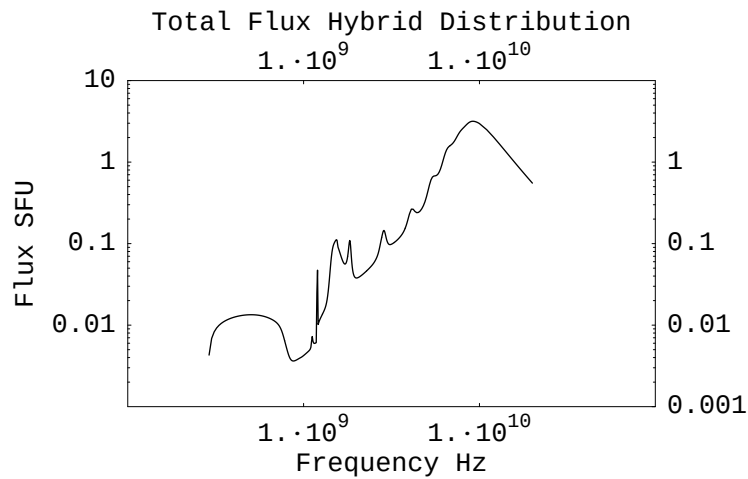
Η ένταση μαγνητικού πεδίου $B = 400 gauss$. Οι γραφικές παραστάσεις που παίρνουμε για τους δύο τύπους πόλωσης , τη συνολική εκπομπή και την πόλωση της ακτινοβολίας δίνεται στα παρακάτω διαγράμματα





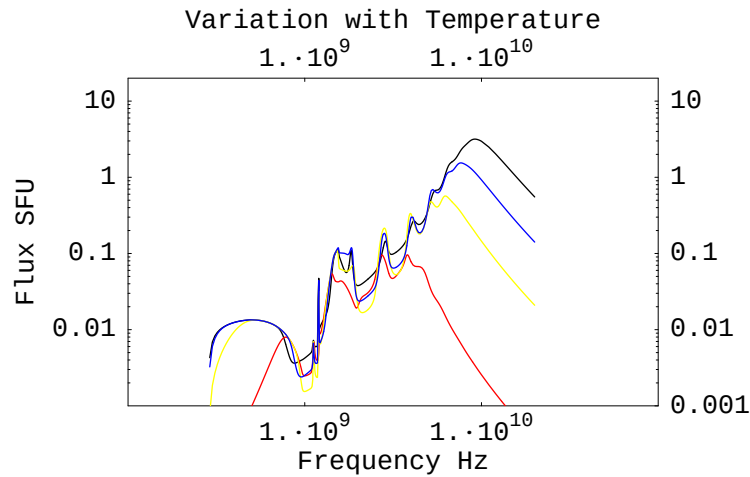
Το παρακάτω διάγραμμα που παριστάνει την συνολική εκπομπή σε συνάρτηση με τη συχνότητα αποτελεί και τη βασική κατανομή με την οποία θα ασχοληθούμε. Παρατηρούμε στην αρχή της οπτικά πυκνής περιοχής το θερμικό μέρος να εμφανίζεται ενώ στη συνέχεια κυριαρχεί το μη θερμικό μέρος (power-law) το οποίο δίνει και το μέγιστο ενώ στη συνέχεια έχουμε και πάλι την χαρακτηριστική κάθοδο που παρατηρούμε στην αραιή περιοχή για συνάρτηση power law. Στην αρχή της οπτικά πυκνής περιοχής κυριαρχεί ο o-mode ενώ στην αραιή περιοχή ο x-mode και σε μεγάλο μέρος της οπτικά πυκνής υπάρχει έντονη διακύμανση της πόλωσης.

Στη συνέχεια θα μεταβάλλουμε κάποιες τιμές εισόδου για να εξετάσουμε τη μεταβολή της παρακάτω κατανομής της έντασης προκειμένου να εξετάσουμε τις ιδιότητες της συνάρτησης.



3.4.1 Μεταβολή με τη θερμοκρασία

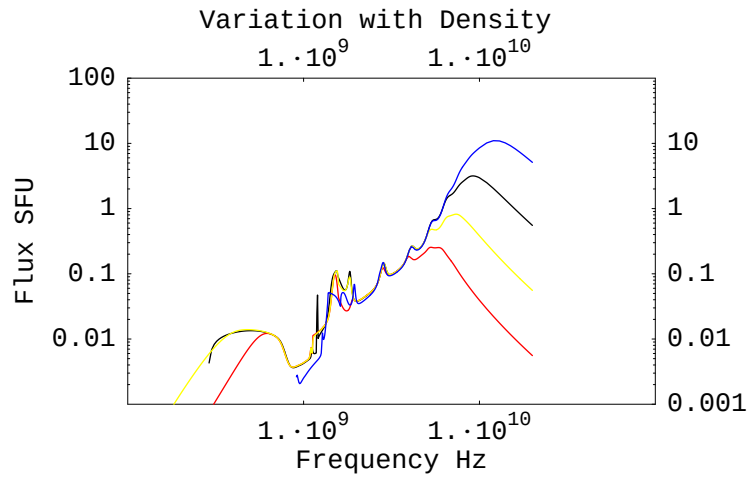
Για τις τιμές εισόδου που έχω μεταβάλλω την τιμή της θερμοκρασίας. Οι τιμές που χρησιμοποιώ είναι $0.5 \times 10^7 K$, $2 \times 10^7 K$, $4 \times 10^7 K$. Οι γραφικές παραστάσεις που προκύπτουν παρατίθενται μαζί με τη βασική κατάσταση τιμών προκειμένου να συγκριθούν και αποδίδονται με διαφορετικό χρώμα. Συγκεκριμένα με μαύρο η βασική, με κόκκινο, κίτρινο και γαλάζιο οι υπόλοιπες αντίστοιχα. Η κοινή τους γραφική παράσταση αποδίδεται παρακάτω.



Παρατηρούμε πως με την αύξηση της θερμοκρασίας το εμβαδόν που περιέχει η καμπύλη αυξάνεται καθώς οι υπολογιζόμενες τιμές της ροής SFU αυξάνονται. Επίσης έχουμε αλλαγή της θέσης του μεγίστου της καμπύλης και προέκταση της καμπύλης επίσης σε μεγαλύτερες συχνότητες.

3.4.2 Μεταβολή με την πυκνότητα των Θερμικών ηλεκτρονίων

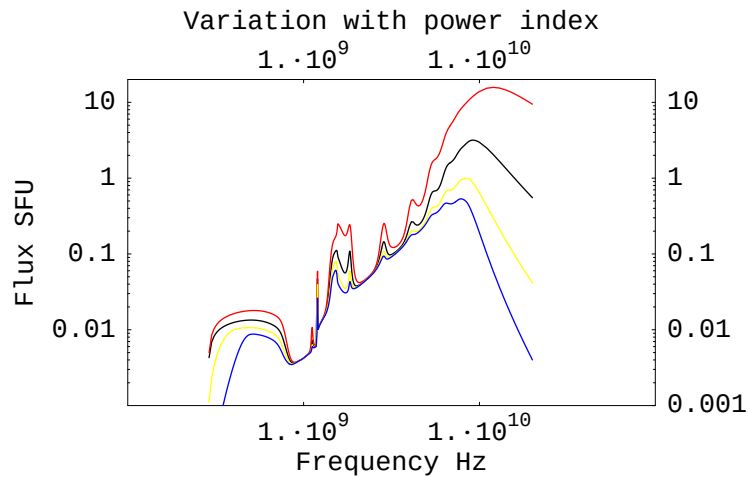
Για τις τιμές εισόδου που έχω μεταβάλλω την τιμή της πυκνότητας των θερμικών ηλεκτρονίων. Οι τιμές που χρησιμοποιώ είναι $N = 1 \times 10^7 \text{ cm}^{-3}$, $N = 1 \times 10^8 \text{ cm}^{-3}$, $N = 1 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$. Και πάλι οι γραφικές παραστάσεις παρατίθενται μαζί με τη βασική. Με μαύρο χρώμα η βασική και οι υπόλοιπες αντίστοιχα με κόκκινο, κίτρινο, γαλάζιο. Προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση.



Παρατηρούμε πως με την αύξηση της πυκνότητας των ηλεκτρονίων αυξάνεται και η τιμή της SFU, επίσης η καμπύλη μετακινείται προς τα δεξιά δηλαδή προς μεγαλύτερες συχνότητες και μαζί τους αλλάζει θέση και η συχνότητα της μέγιστης εκπομπής. Επίσης ενδιαφέρον παρουσιάζει η συχνότητα έναρξης ακτινοβολίας λόγω κυρίως της συνθήκης του ordinary mode $\nu > \nu_p$ όπου ν_p η συχνότητα πλάσματος. Στην περίπτωση που η αριθμητική πυκνότητα παίρνει την τιμή $N = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ το φαινόμενο ξεκινά από συχνότητα κοντά στο 1 GHz και στην περιοχή αυτή έχουμε πολύ μικρή ακτινοβολούμενη ροή.

3.4.3 Μεταβολή με τον εκθέτη της *power-law*

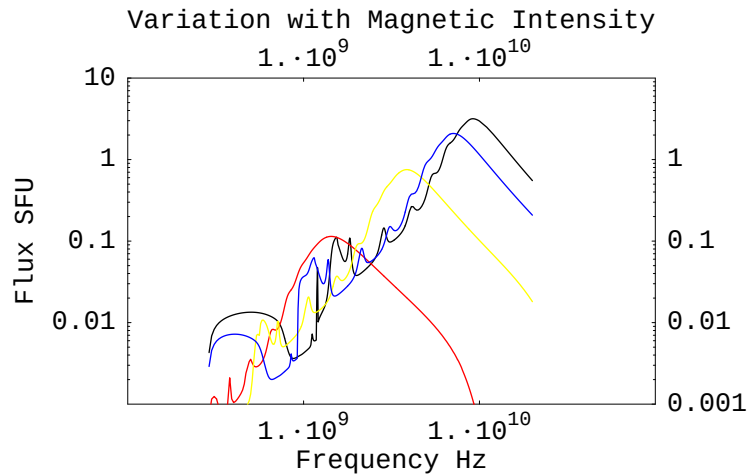
Υπολογίζω την κατανομή για εκθέτες $p = 3, 5, 6$ και τις παραθέτω με τη βασική . Και πάλι η βασική κατάσταση παριστάνεται με μαύρο χρώμα και οι υπόλοιπες με κόκκινο, κίτρινο και γαλάζιο αντίστοιχα. Προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση.



Παρατηρούμε πως με την αύξηση του εκθέτη της συνάρτησης δύναμης μειώνεται δραματικά η εκπεμπόμενη ακτινοβολία.

3.4.4 Μεταβολή με την ένταση του μαγνητικού πεδίου

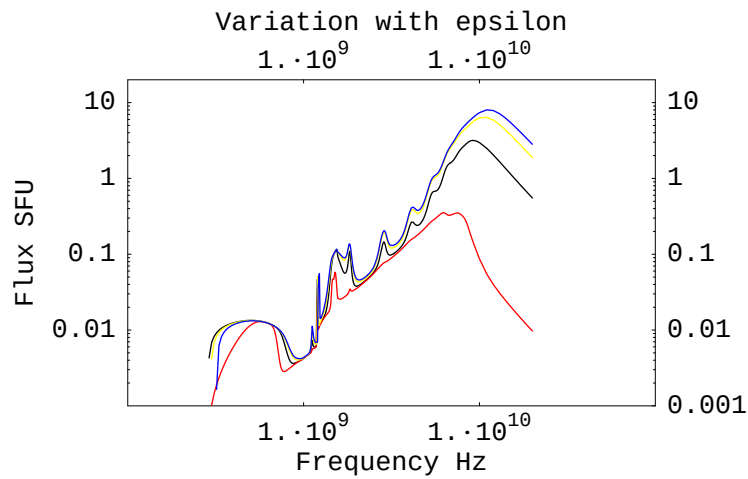
Υπολογίζω την κατανομή σε τιμές μαγνητικού πεδίου $B = 50, 150, 300, gauss$. Οι κατανομές παρατίθενται με κόκκινο, κίτρινο και γαλάζιο χρώμα αντίστοιχα. Προκύπτει το παρακάτω διάγραμμα.



Παρατηρούμε την έντονη εξάρτηση του φαινομένου από την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Για μικρές τιμές μαγνητικού πεδίου η ένταση είναι μικρή, αφορά μικρή περιοχή συχνοτήτων και έχει το μέγιστο της σε χαμηλές σχετικά συχνότητες. Η καμπύλη των $50 gauss$ εκπέμπει μέχρι λίγο κάτω από τα $10 GHz$. Καθώς αυξάνεται η ένταση του μαγνητικού πεδίου η ροή αυξάνεται σε όλες τις συχνότητες και μετατοπίζεται προς τα δεξιά. Μαζί μετατοπίζεται και η συχνότητα μέγιστης εκπομπής.

3.4.5 Μεταβολή με την παράμετρο ϵ

Η παράμετρος ϵ όπως έχουμε αναφέρει δείχνει πόσο ισχυρότερο είναι το ηλεκτρικό πεδίο ως προς την τιμή του πεδίου Dreicer. Όσο αυξάνεται η παράμετρος ϵ , μειώνεται η τιμή της ενέργειας από την οποία και μετά τα ηλεκτρόνια ακολουθούν την κατανομή power-law. Αυτό περιμένουμε να έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση της ροής με την αύξηση της παραμέτρου. Οι τιμές που χρησιμοποιήσαμε είναι $\epsilon = 0.04, 0.08, 0.1$ με χρώματα αντίστοιχα κόκκινο, κίτρινο, γαλάζιο. Προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση που επιβεβαιώνει όσα αναφέρουμε.

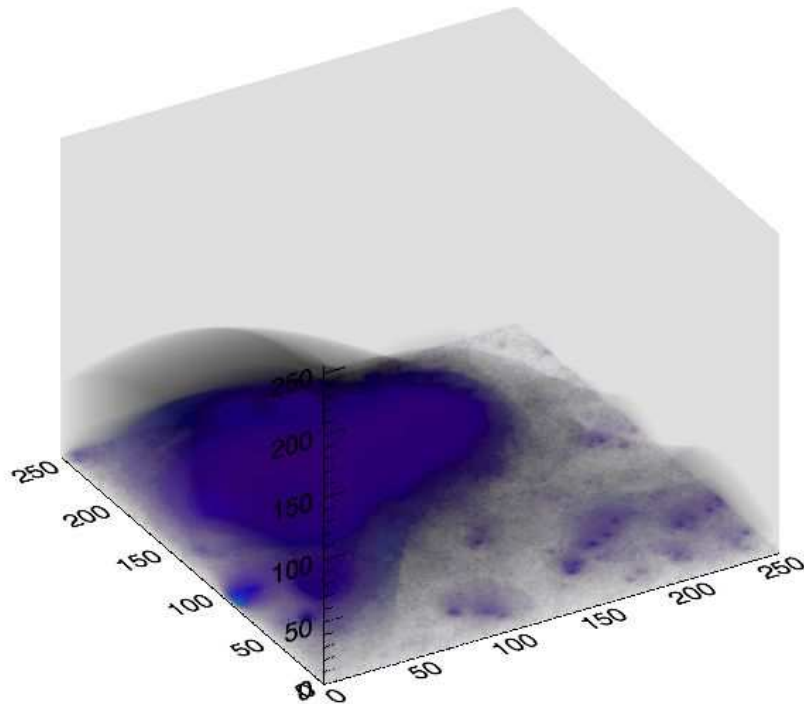


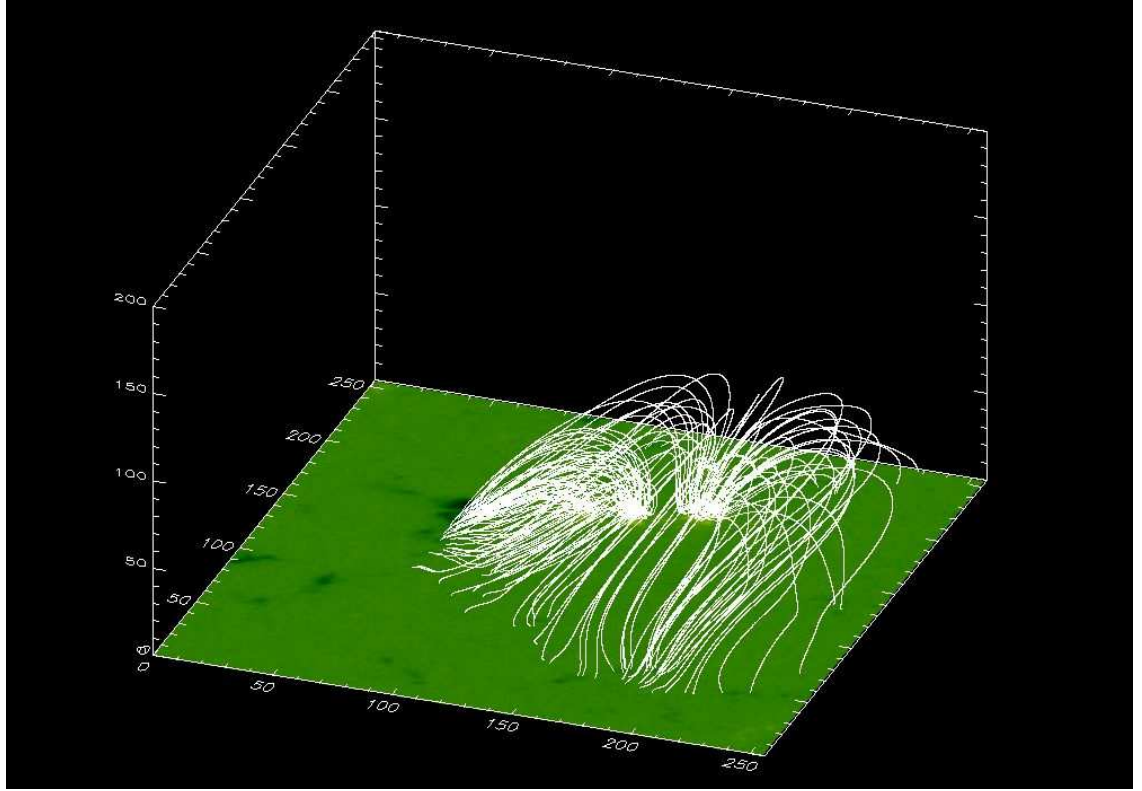
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΡΟΗΣ ΑΠΟ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΠΗΓΗ ΑΚΤΙΝΟΒΟΛΙΑΣ

4.1 Περιγραφή της μεθόδου

Σκόπος μας είναι ο υπολογισμός και η καταγραφή σε εικόνα της έντασης της ακτινοβολίας που εκπέμπεται από μια περιοχή συνολικού όγκου V σε μια συγκεκριμένη συχνότητα παρατήρησης που θα καθορίζεται από το χρήστη. Το μαγνητικό πεδίο στην περιοχή αυτή υπολογίζεται από την ανακατασκευή του τρισδιαστάτου μαγνητικού πεδίου που γίνεται από μαγνητογράμματα τα οποία λαμβάνουμε από τον ήλιο. Η μέθοδος που έχει προταθεί από διάφορους επιστήμονες (μεταξύ άλλων Allisandrakis) και κωδικοποιήθηκε με τη βοήθεια του μαθηματικού πακέτου IDL από την ερευνητική ομάδα του κυρίου Βλάχου Λουκά . Οι τιμές του μαγνητικού πεδίου λαμβάνονται έτοιμες από αρχείο που περιέχει τις τιμές του μαγνητικού πεδίου σε κάθε θέση του όγκου. Το μαγνητικό πεδίο το οποίο ανακατασκευάστηκε φαίνεται παρακάτω.





Συγκεκριμένα θεωρούμε κυβική πηγή διαστάσεων $L \times L \times L$. Η παρεχόμενη ανάλυση του όγκου γίνεται σε διαστάσεις $256 \times 256 \times 256$. Οι τιμές των συντεταγμένων εκείνουν από την τιμή μηδέν ως την τιμή 255 για κάθε άξονα δηλαδή 256 συνολικά τιμές. Επομένως κάθε άξονας υποδιαιρείται σε 255 μέρη με αποτέλεσμα να έχουμε συνολικά $255 \times 255 \times 255$ μικρότερους όγκους (voxels). Κάθε μικρός όγκος έχει την κάθε διάσταση του ίση με $L/255$ και επομένως έχει εμβαδό επιφάνειας $A = L^2/255^2$. Τα μεγέθη αυτά χρειάζονται κατά την μετατροπή της υπολογιζόμενης ροής σε παρατηρούμενη.

Ο κώδικας διαβάζει από το αρχείο την τιμή της έντασης του μαγνητικού πεδίου σε κάθε voxel και υπολογίζει στη συνέχεια θεωρώντας ως συνάρτηση κατανομής των ηλεκτρονίων την υβριδική συνάρτηση κατανομής την ένταση της ακτινοβολίας σε μια συγκεκριμένη συχνότητα που πλέον δίνεται ως εισερχόμενη τιμή .

Η υπολογιζόμενη ένταση συσχετίζεται με τους δείκτες του (i,j,k) του voxel στο οποίο υπολογίζεται. Η ένταση που υπολογίζεται στα voxel της βάσης του μαγνητογράμματος (επίπεδο μηδέν) δίνεται από τη σχέση:

$$I_{\nu_s}(\nu, \theta) = \frac{j_{\nu_s}}{K_{\nu_s}} (1 - \exp^{-K_{\nu_s} L})$$

όπου L η διάσταση της πηγής , ενώ s είναι η θέση του voxel μέσα στον όγκο ως προς την ευθεία την οποία το βλέπουμε και θεωρούμε ότι το s αυξάνεται καθώς μετακινούμαστε από τη βάση της πηγής προς την πλησιέστερη στον παρατηρητή επιφάνεια του

όγκου. Αυτό γίνεται και για τους δύο τύπους πόλωσης ordinary και extraordinary και τα αποτελέσματα προστίθενται για να βρώ τη συνολική ένταση της ακτινοβολίας.

Για το επόμενο όμως voxel θεωρούμε την πλήρη μορφή της εξίσωσης διάδοσης της ακτινοβολίας δηλαδή :

$$I_{\nu_{s+1}}(\nu, \theta) = I_{\nu_s} \exp^{-K_{\nu_{s+1}} l} + \frac{j_{\nu_{s+1}}}{K_{\nu_{s+1}}} (1 - \exp^{-K_{\nu_{s+1}} d})$$

όπου $l = L/255$ η διάσταση του voxel και d το βάθος στο οποίο βρίσκεται το συγκεκριμένο voxel δηλαδή $d = L - s * l$ με αρχή μέτρησης όπως ήδη αναφέραμε την πλησιέστερη στον παρατηρητή επιφάνεια της πηγής. Με την εξίσωση αυτή λαμβάνουμε υπόψη μας πέρα από την ακτινοβολία που παράγεται σε ένα συγκεκριμένο voxel και αυτή που διαδίδεται από το κατώτερο στα ανώτερο.

Οι τιμές που υπολογίζουμε στο κάθε ογκίδιο μετατρέπονται σε παρατηρήσιμες σε μονάδες SFU μέσω της σχέσης (1.47) με απόσταση R την απόσταση κάθε φορά από τον παρατηρητή με την πλησιέστερη επιφάνεια της πηγής στον παρατηρητή να απέχει μια αστρονομική μονάδα από τον παρατηρητή δηλαδή $R = 1A.U + d$ όπως αυτό ορίστηκε πιο πάνω.

Η εικόνα που παίρνουμε από το τελευταίο επίπεδο είναι η εικόνα που θα έπρεπε να προκύπτει από την καταγραφή ενός ραδιοτηλεσκοπίου.

Επειδή το μαγνητόγραμμα που χρησιμοποιούμε είναι με τον ήλιο να βρίσκεται σε ηρεμία χρησιμοποιούμε αντίστοιχες τιμές. Οι τιμές που εισάγονται στον κώδικα για την υβριδική συνάρτηση τώρα είναι :

Τη θερμοκρασία $T = 5 \times 10^6 \text{ K}$

Την αριθμητική πυκνότητα των θερμικών ηλεκτρονίων και μέσω αυτών υπολογίζεται και ο αριθμός των μη θερμικών ηλεκτρονίων από τον κώδικα με βάση το φορμαλισμό που ήδη δώσαμε $N_{th} = 10^9 \text{ cm}^{-3}$

Τον εκθέτη της power law $\delta = 3$

Την παράμετρο $\epsilon = 0.01$.

Η διάσταση της πηγής $L = 1 \times 10^8 \text{ cm}$.

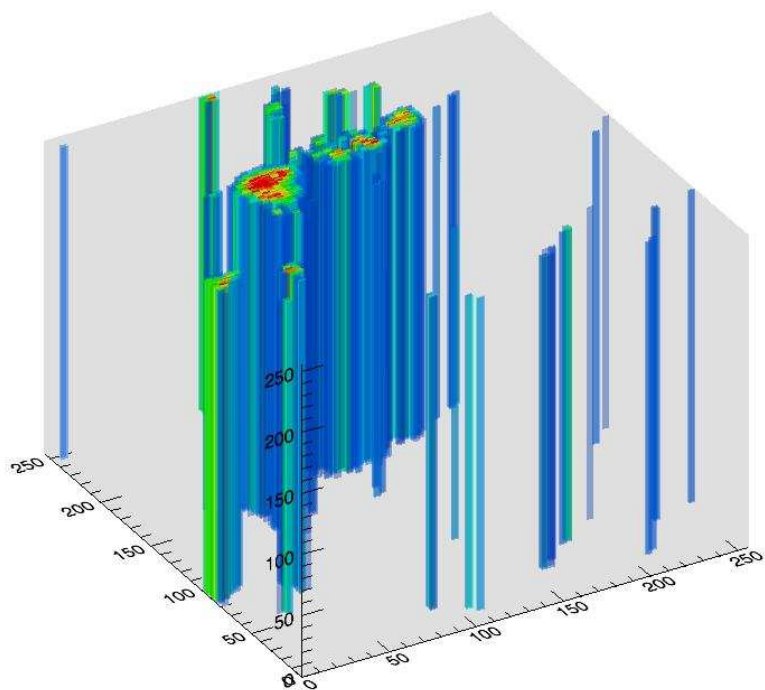
Η συχνότητα παρατήρησης 1 GHz .

Επίσης εισάγουμε το όνομα του αρχείου από το οποίο θα γίνει η ανάγνωση. Οι τιμές των γ_{min} και γ_{max} έχουν καθορισθεί σε 1.002 και 10.

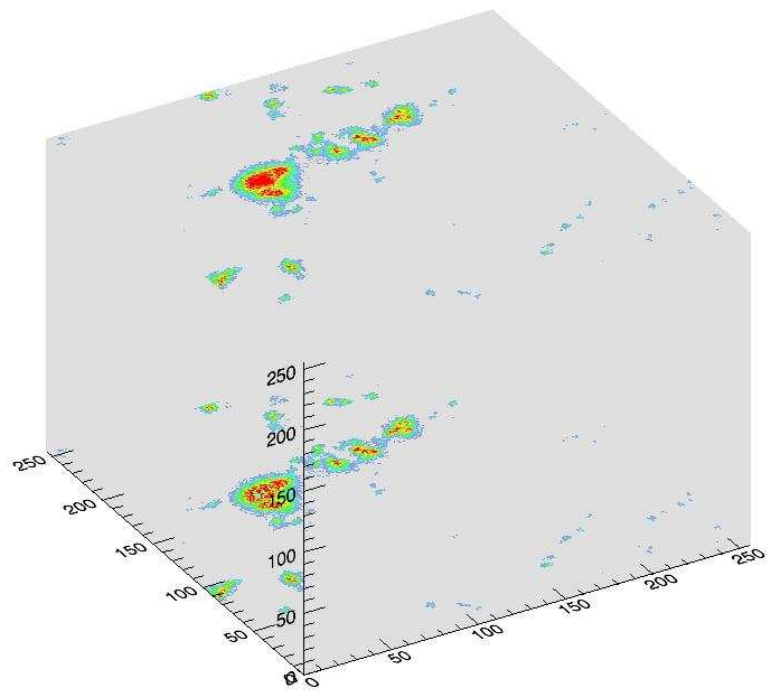
Ο υπολογισμός της έντασης επειδή για τις τιμές που μελετάμε δηλαδή με τον ήλιο σε ηρεμία δίνει σημαντικά αποτελέσματα για μαγνητικά πεδία μεγαλύτερα από 20 gauss γίνεται μόνο για εντάσεις μεγαλύτερες από την παραπάνω τιμή. Για καλύτερη αναπαράσταση των αποτελεσμάτων δεν χρησιμοποιώ την τιμή της SFU αλλά τον δεκαδικό λογάριθμο της. Τα αποτελέσματα καταγράφονται σε αρχείο το οποίο αναπαριστάται γραφικά με τη βοήθεια προγράμματος γραφικών (IDL) σε όγκο ενώ υπάρχει η δυνατότητα να ληφθούν και διάφορες τομές του όγκου αυτού σε διαφορετικά επίπεδα.

4.2 Αποτελέσματα

Από τους υπολογισμούς μας προκύπτει αρχείο που παριστάνουμε με τη βοήθεια του προγράμματος γραφικών :

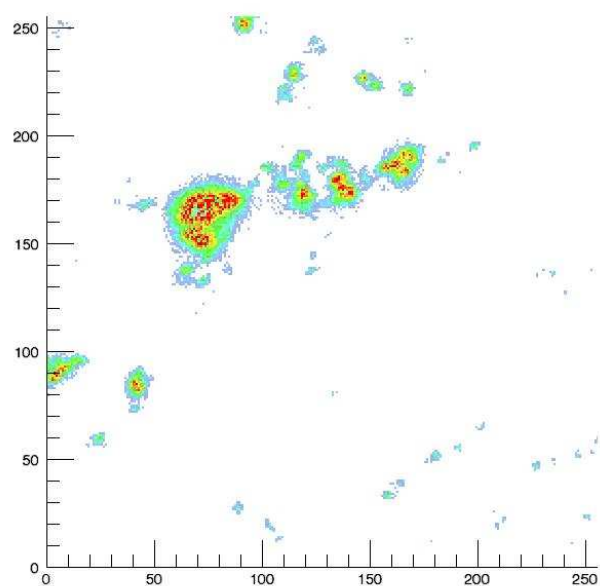


Παραπάνω βλέπουμε πως κατανέμετε στον ίδιο όγκο η συνολική παρατηρούμενη ένταση. Λαμβάνω από αυτό τον όγκο το ανώτερο και το κατώτερο επίπεδο του. Τα επίπεδα αυτά εμφανίζονται μαζί προκειμένου να συγκριθούν.

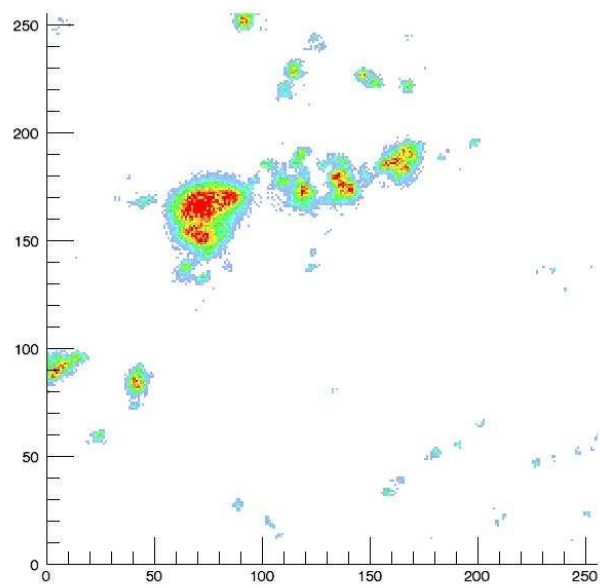


Το επίπεδο βάσης μας δίνει μια κατανομή που φαίνεται παρακάτω καθώς και το τελευταίο επίπεδο που είναι αυτό που θα παρατηρήσουμε από ένα ραδιοτηλεσκόπιο. Παρακάτω δίνονται διαδοχικά επίπεδα του όγκου αυτού

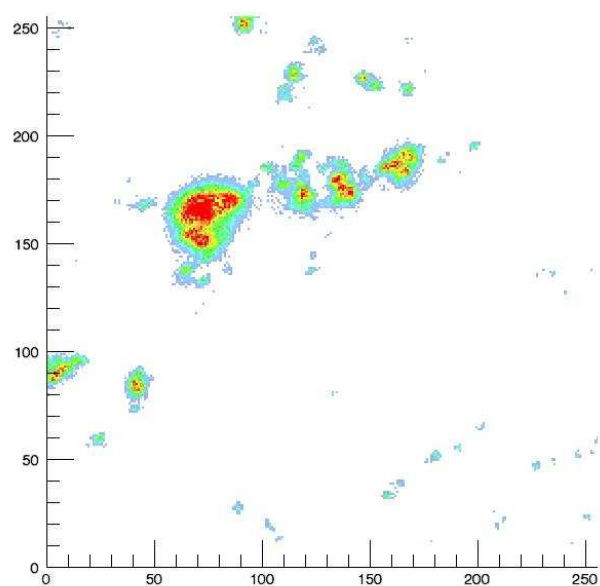
Επίπεδο 0



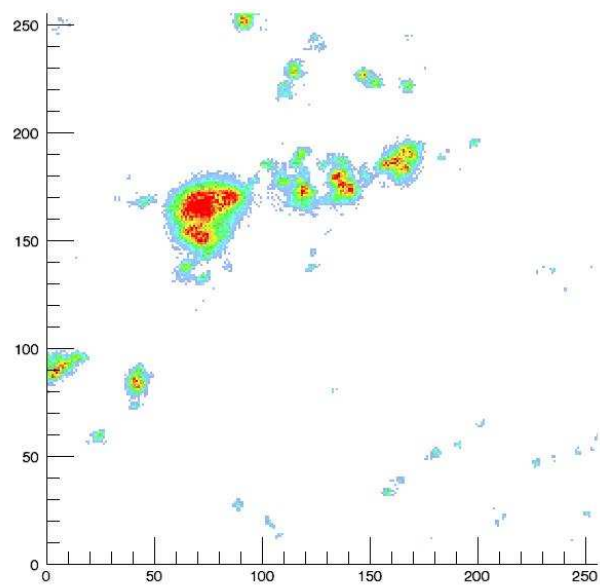
Επίπεδο 1



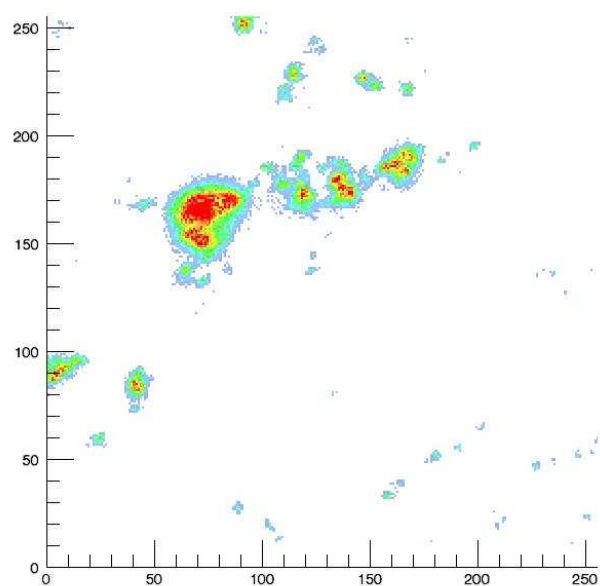
Επίπεδο 2



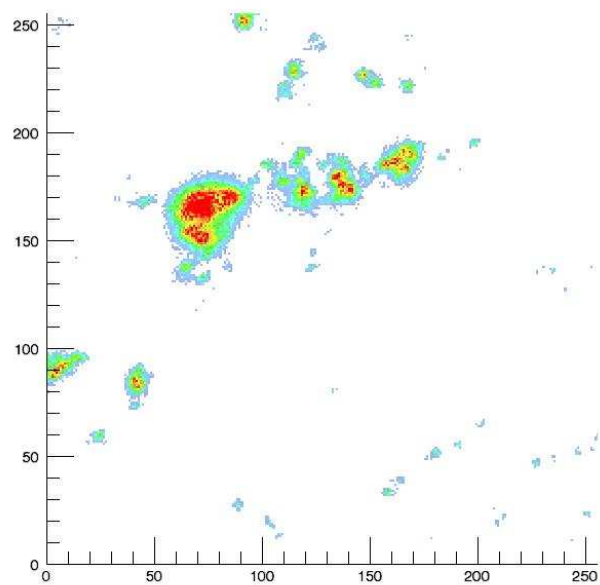
Επίπεδο 3



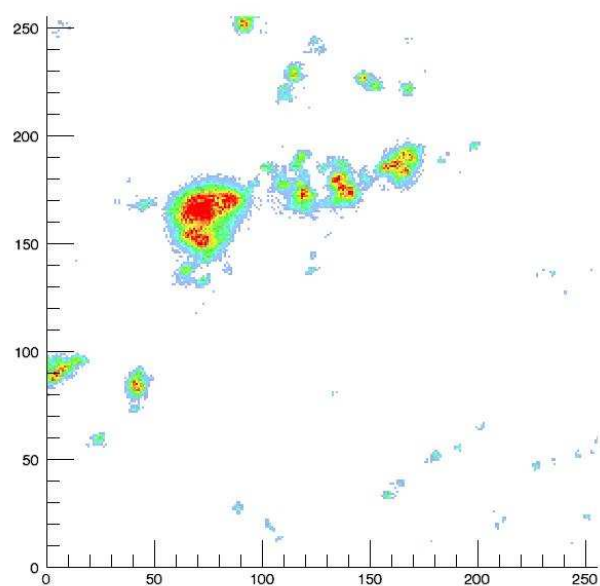
Επίπεδο 4



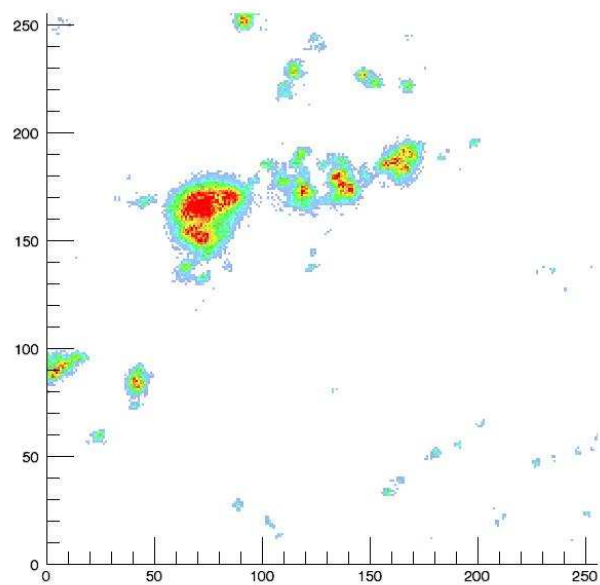
Επίπεδο 5



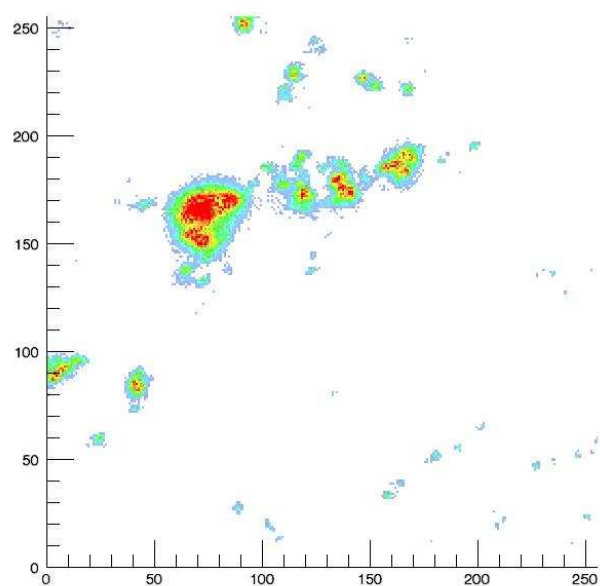
Επίπεδο 6



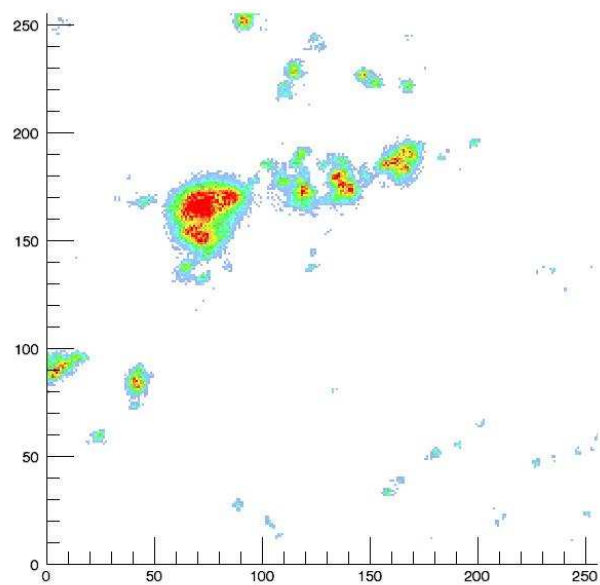
Επίπεδο 7



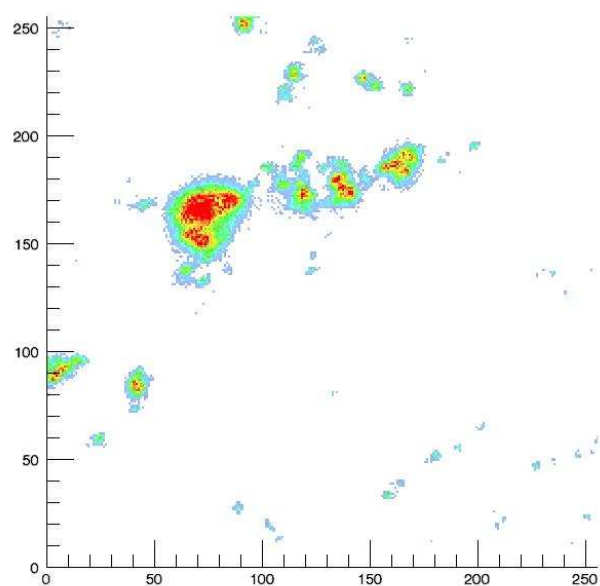
Επίπεδο 8



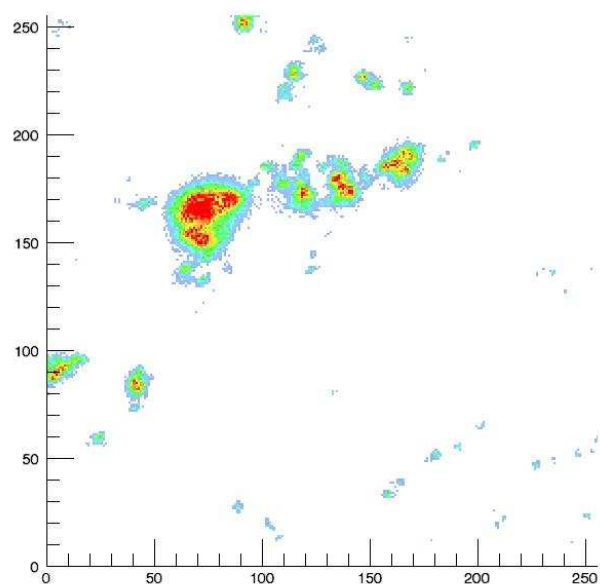
Επίπεδο 253



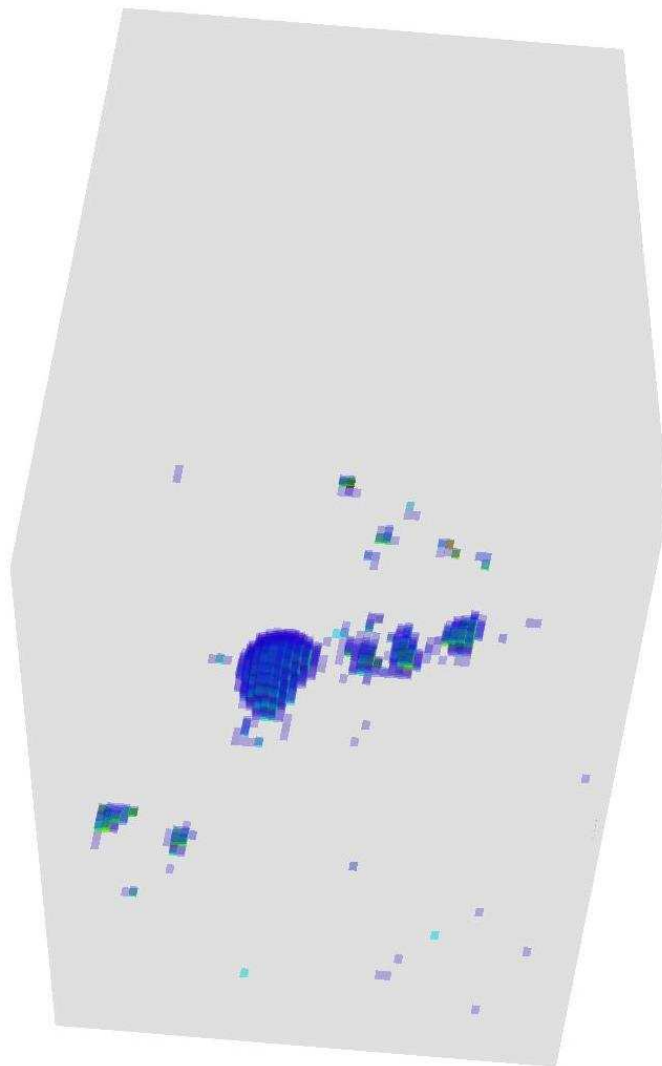
Επίπεδο 254

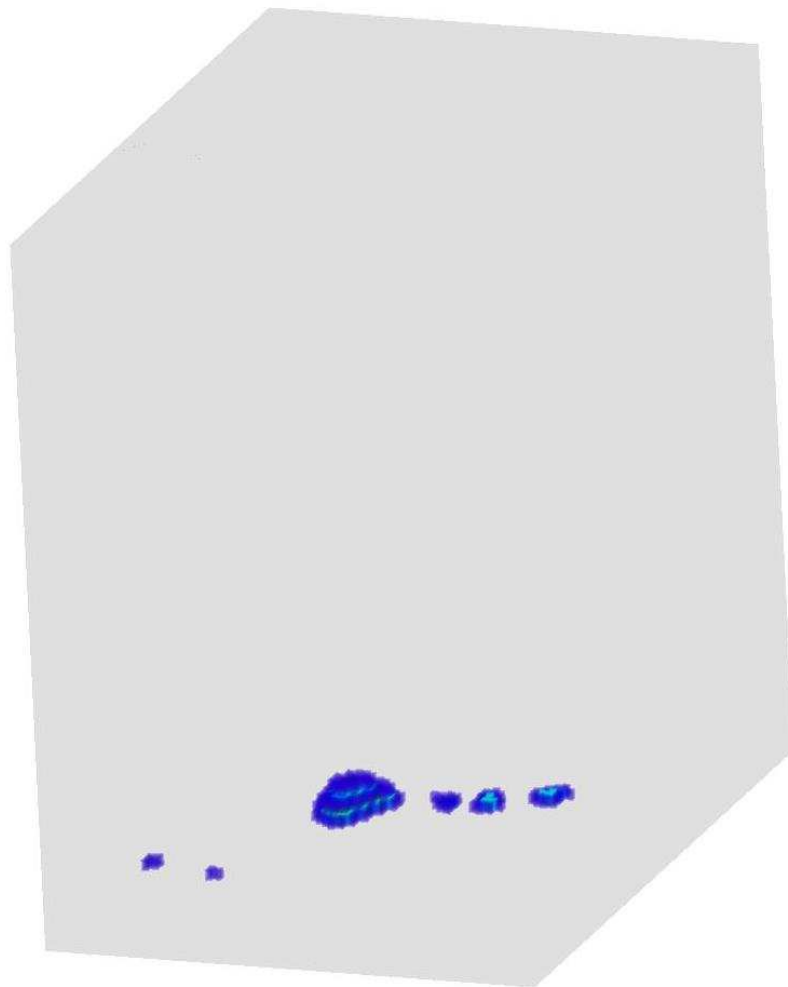


Επίπεδο 255



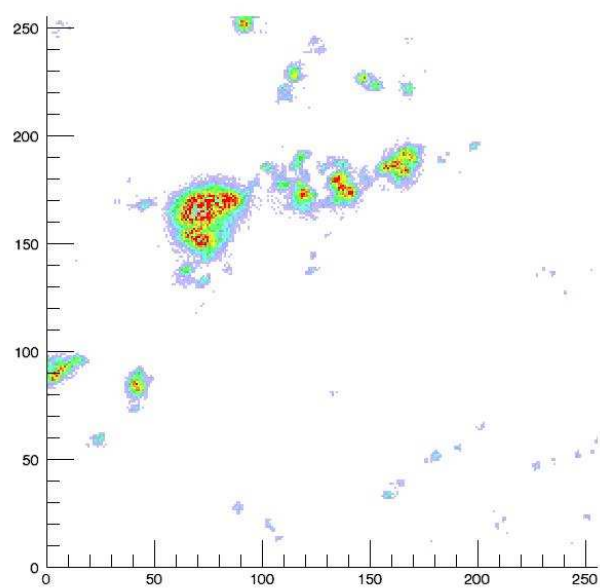
Παρατηρούμε πως η κατανομή της ακτινοβολίας καθώς αυτή διαδίδεται μέσα στον όγκο ολοκληρώνεται από τα πρώτα κιόλας επίπεδα και στη συνέχεια μένει αμετάβλητη μέχρι το τελευταίο επίπεδο. Προκειμένου να δούμε την εκπομπή κάθε επιπέδου ξεχωριστά και τι αυτό προσφέρει στην συνολική εκπομπή υπολογίζουμε την ένταση της ακτινοβολίας για δεύτερη φορά χωρίς όμως να λάβουμε υπόψη μας τη διάδοση από του κατώτερου όγκου προς τον αμέσως ανώτερο. Προκύπτει η κατανομή που βλέπουμε παρακάτω.



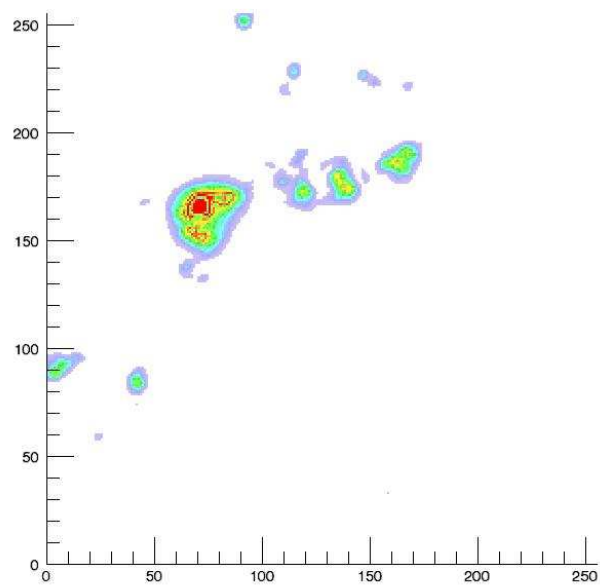


Παρατηρούμε ότι πρωτογενής ακτινοβολία παρέχεται από τα λίγα πρώτα επίπεδα και αν θέλουμε αυτό να το δούμε αναλυτικότερα παραθέτουμε όλα τα επίπεδα με μηδενική εκπομπή.

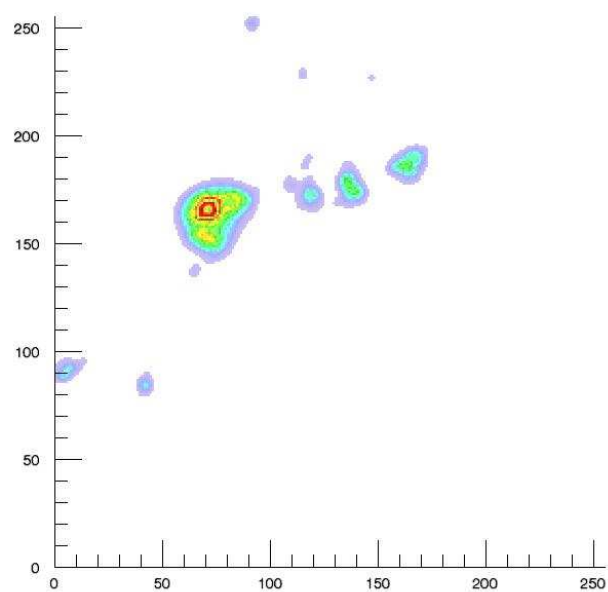
Επίπεδο 0



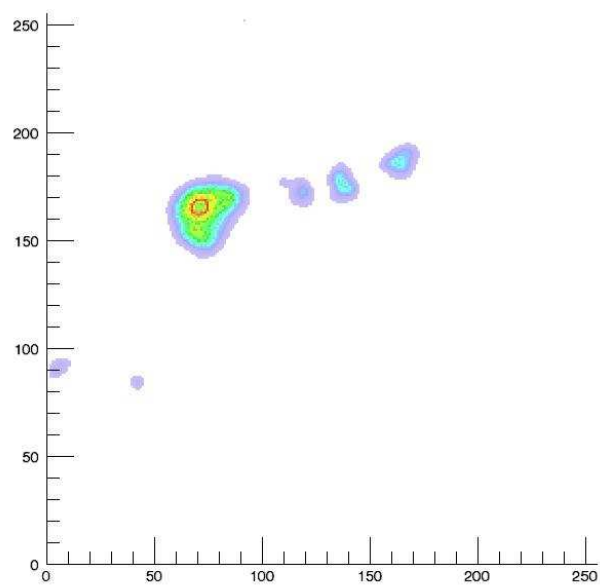
Επίπεδο 1



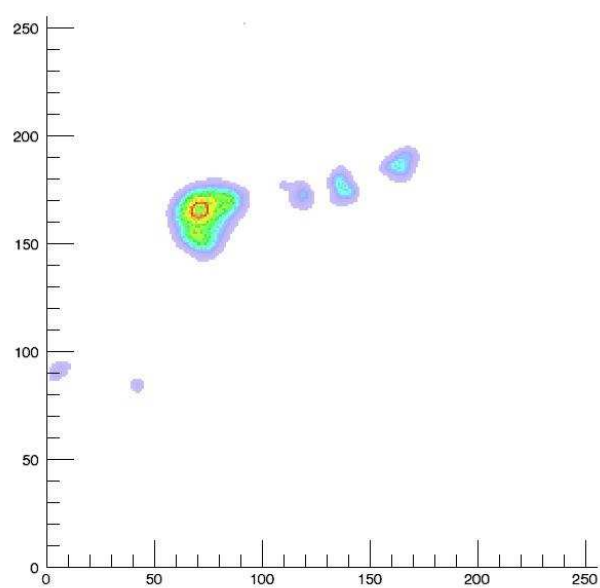
Επίπεδο 2



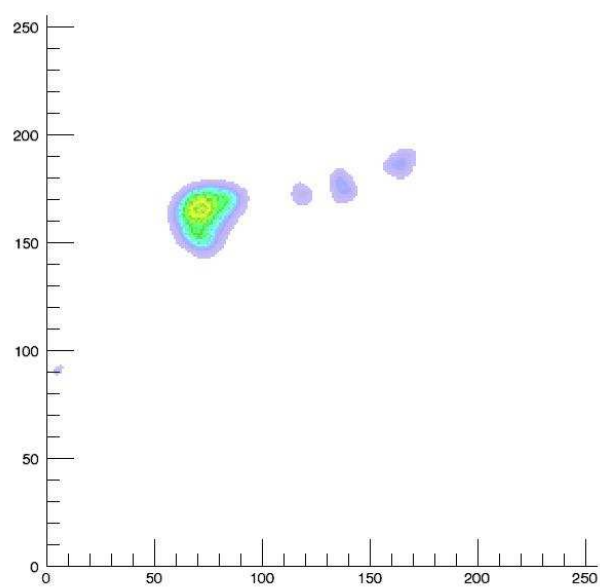
Επίπεδο 3



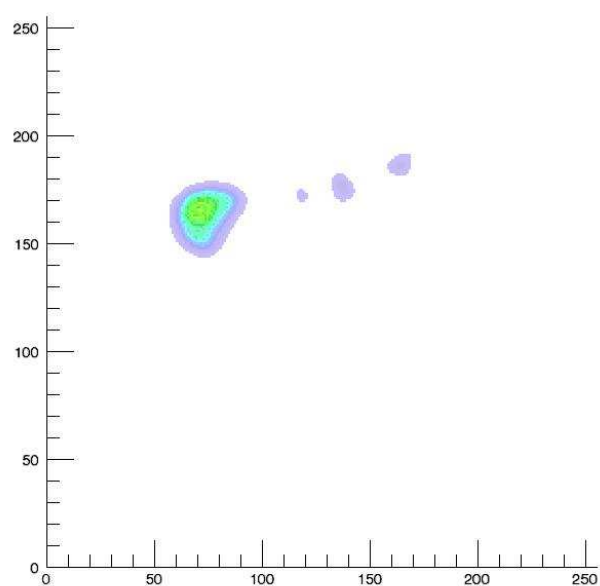
Επίπεδο 4



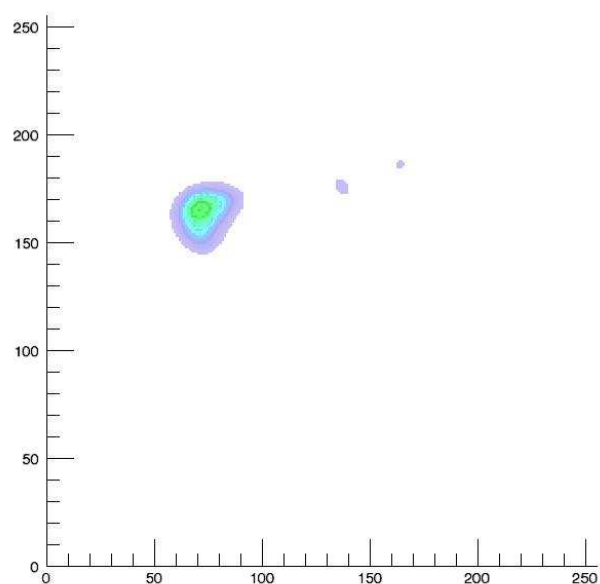
Επίπεδο 5



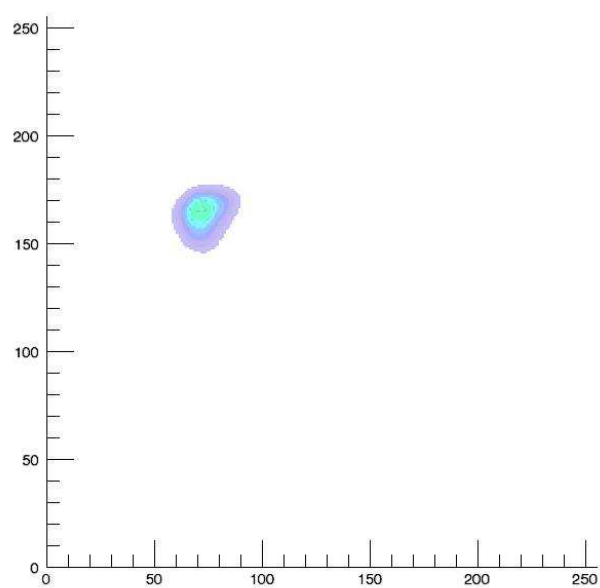
Επίπεδο 6



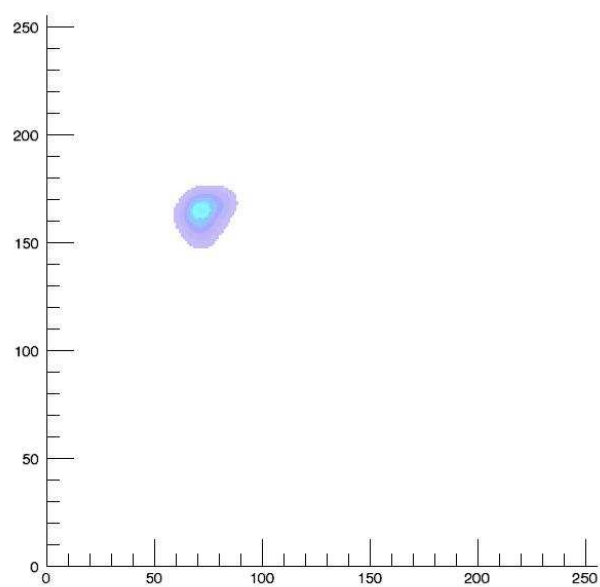
Επίπεδο 7



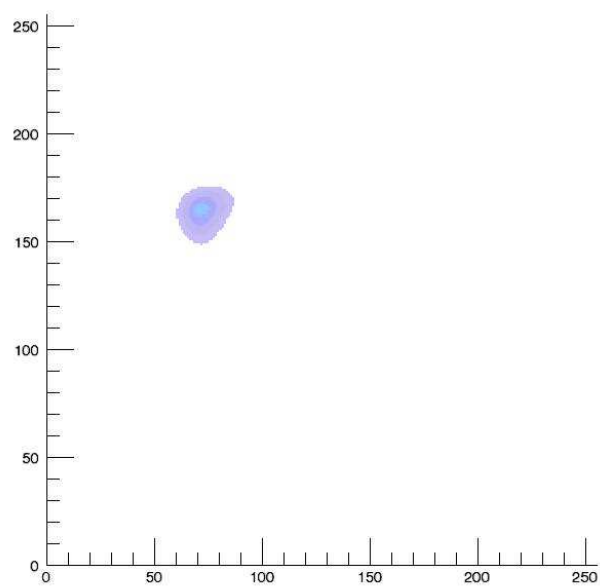
Επίπεδο 8



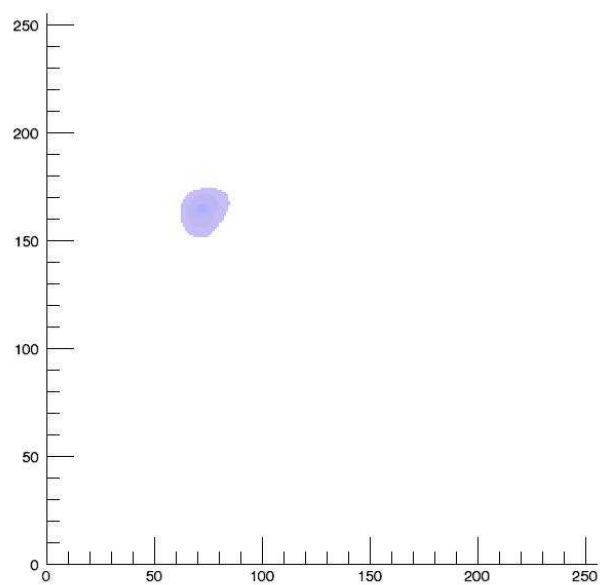
Επίπεδο 9



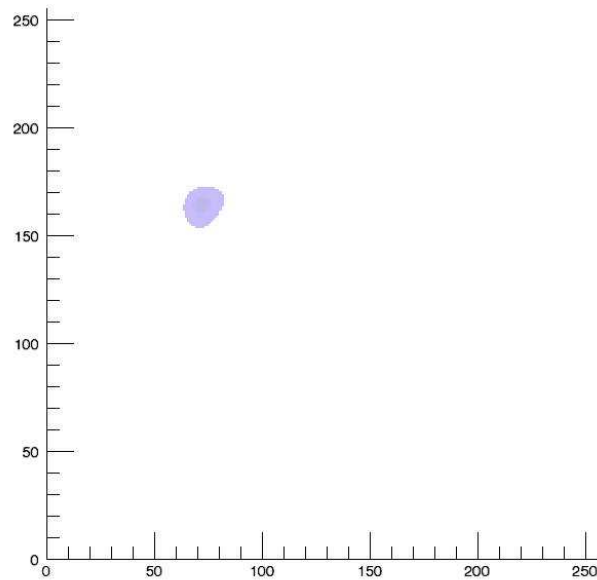
Επίπεδο 10



Επίπεδο 11



Επίπεδο 12



Παρατηρούμε πως τα πρώτα επίπεδα έχουν ιδιαίτερα μεγάλες συνεισφορές και οι παραπάνω συνεισφορές είναι αμελητέες σε σχέση με αυτές. Γι' αυτό η εικόνα που δημιουργείται από τα πρώτα επίπεδα δεν μεταβάλλεται αν και συνολικά έχουμε εκπομπή από 13 επίπεδα.

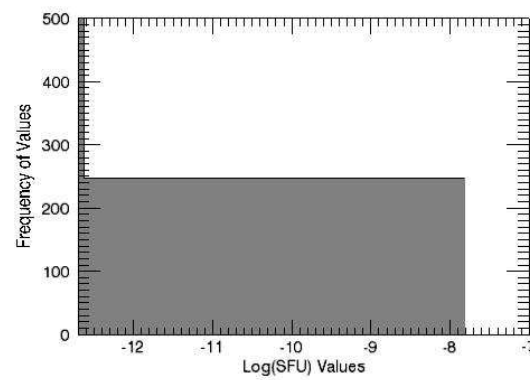
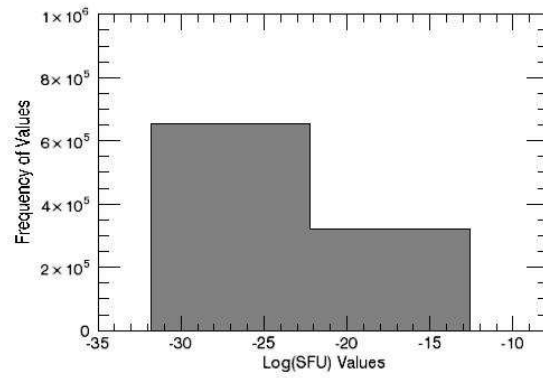
Το αν ένα στοιχείο όγκου θα εκπέμπει ακτινοβολία ή όχι καθορίζεται από τις παραμέτρους που μελετήσαμε αρχικά και επηρεάζουν την υβριδική συνάρτηση. Για πιο μικρές συχνότητες από αυτή που μελετάμε όπου κυριαρχεί το θερμικό μέρος της ακτινοβολίας μπορούν να ληφθούν υπόψη και μικρότερες τιμές μαγνητικού πεδίου. Στις πιο μεγάλες συχνότητες όπου κυριαρχεί το μη θερμικό μέρος της συνάρτησης ακόμα και σημαντικές τιμές μαγνητικού πεδίου δεν συνεισφέρουν σημαντικά στην ένταση. Ενώ σημαντική αύξηση της θερμοκρασίας κάνει όλες τις περιοχές να εκπέμπουν μεγάλες τιμές. Σημαντικό ρόλο παίζει και η πυκνότητα των σωματιών η οποία μεταβάλλει έντονα την εικόνα αυτή. Στην παρούσα μελέτη η πυκνότητα θεωρείται σταθερή σε όλο τον όγκο.

4.3 Φρακταλική Διάσταση

Στο τελευταίο μέρος της μελέτης μας θα υπολογίσουμε τη φρακταλική διάσταση του πεδίου ακτινοβολίας και αν παρουσιάζει διαφορά σε σχέση με αυτή που παρουσιάζει το αρχικό μαγνητικό πεδίο. Για τον υπολογισμό της φρακταλικής διάστασης χρησιμοποιούμε τη μέθοδο box counting η οποία ακολουθεί την εξής πορεία.

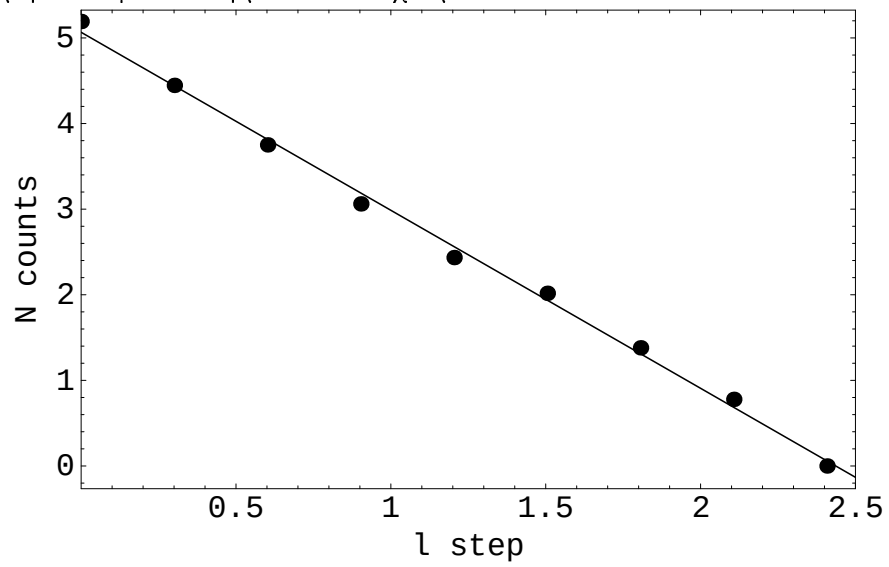
Θεωρώ πως ο υπό εξέταση όγκος αποτελεί ένα ενιαίο κύβο. Ελέγχω αν υπάρχει έστω και μια τιμή που να περιέχεται στον κύβο και να είναι μεγαλύτερη από μια τιμή κατωφλίου που δίνουμε αυθαίρετα. Αν υπάρχει έστω και μια σημειώνουμε μια επιτυχία και υποδιαιρούμε την κάθε διάσταση του κύβου σχηματίζοντας 8 μικρότερους και ίσων διαστάσεων κύβους. Μετράμε τον αριθμό των κύβων που σηματοποιήθηκαν και περιέχουν έστω και μια τιμή έντασης μεγαλύτερη από την τιμή κατωφλίου. Υποδιαιρούμε την διάσταση των νέων κύβων και επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία. Σε κάθε βήμα καταγράφουμε τον αριθμό των voxels που περιέχουν έστω και μια τιμή έντασης μεγαλύτερη από την τιμή κατωφλίου (αριθμός N) και σε σχέση με την ακμή του κάθε voxel l . Γνωρίζουμε πως όταν ακολουθούμε τη μέθοδο αυτή η διάσταση του πεδίου υπολογίζεται από τη σχέση (2.114). Ο συντελεστής αυτής της ευθείας είναι η φρακταλική διάσταση του πεδίου. Επαναλαμβάνω τη διαδικασία αυτή για διάφορες τιμές κατωφλίου προκειμένου να βρώ την καλύτερη προσέγγιση των σημείων που προκύπτουν υπολογιστικά σε ευθεία γραμμή.

Ο κώδικας που εκτελεί την παραπάνω διαδικασία αναπτύχθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού C++ και τα γραφικά έγιναν με τη βοήθεια της IDL. Πρώτα παράγουμε ιστόγραμμα με καταγραφή των διαφόρων τιμών έντασης που εμφανίζονται και σε συνάρτηση με την συχνότητα εμφάνισής τους. Οι τιμές που εμφανίζονται μέσα στον όγκο που μελετάμε έχουν λογαρίθμους που παίρνουν τιμές από -32 ως και -7.8 περίπου. Το ιστόγραμμα που προκύπτει περιέχει δύο περιοχές που φαίνονται παρακάτω. Η μια περιοχή είναι από τιμή λογαρίθμου από -32 ως -12.63 περίπου και η επόμενη φτάνει μέχρι το -7.8. Η πλειονότητα των τιμών βρίσκεται στην πρώτη περιοχή και τιμές κατωφλίου στην περιοχή αυτή δεν δίνουν καλά αποτελέσματα. Η περιοχή στην οποία θα ψάξουμε την φρακταλική διάσταση είναι η δεύτερη.



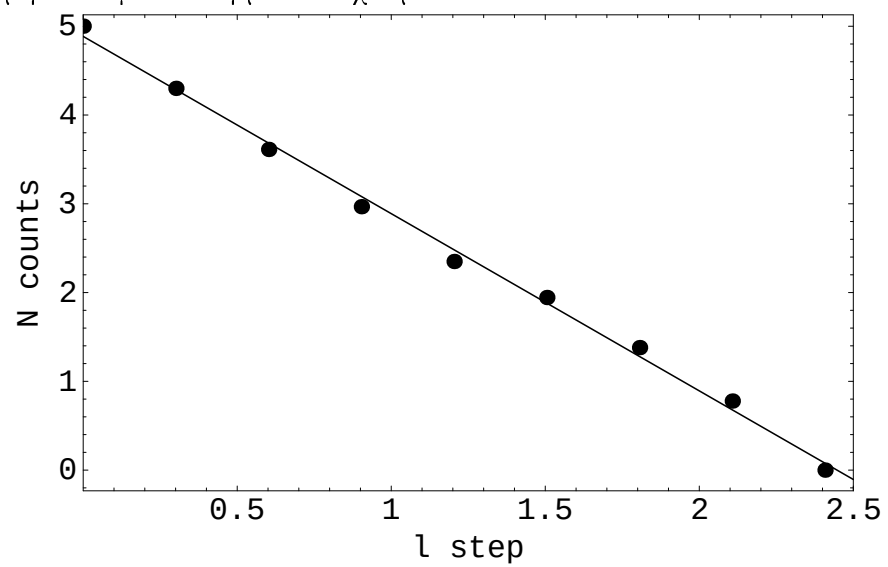
Δοκιμάζουμε για διάφορες τιμές κατωφλίου και παίρνουμε τα παρακάτω αποτελέσματα

Για τιμή κατωφλίου ίση με -12.63 έχουμε



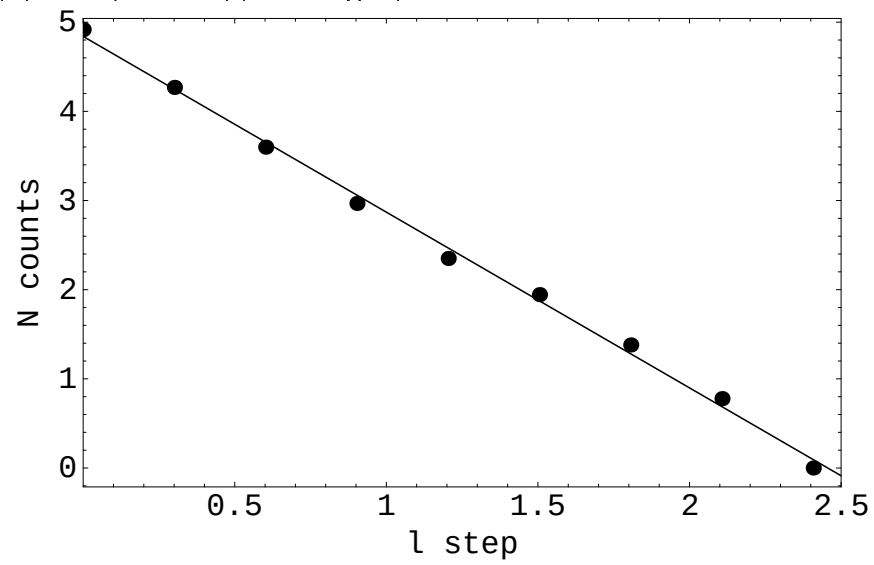
Η φρακταλική διάσταση για τη συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 2.07926$.

Για τιμή κατωφλίου ίση με -11 έχουμε



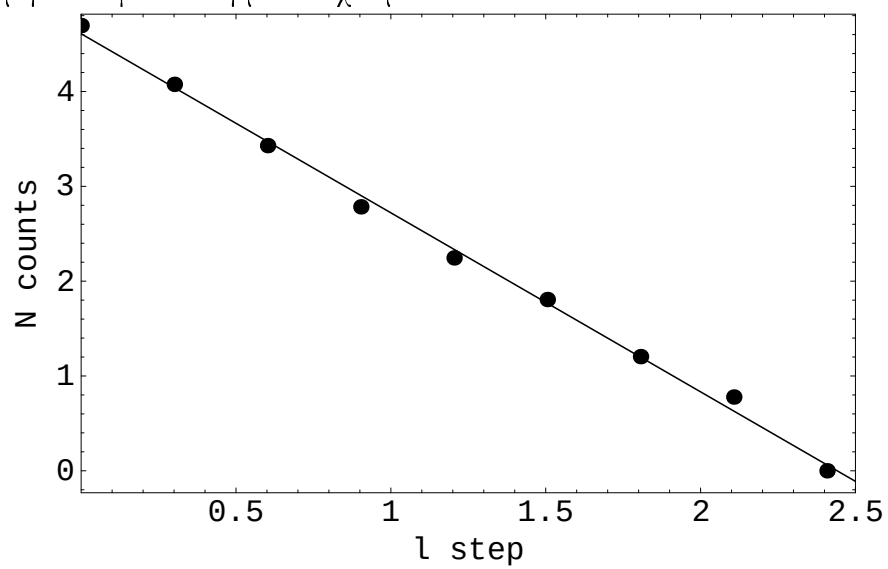
Η φρακταλική διάσταση για τη συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.99639$.

Για τιμή κατωφλίου ίση με -10 έχουμε



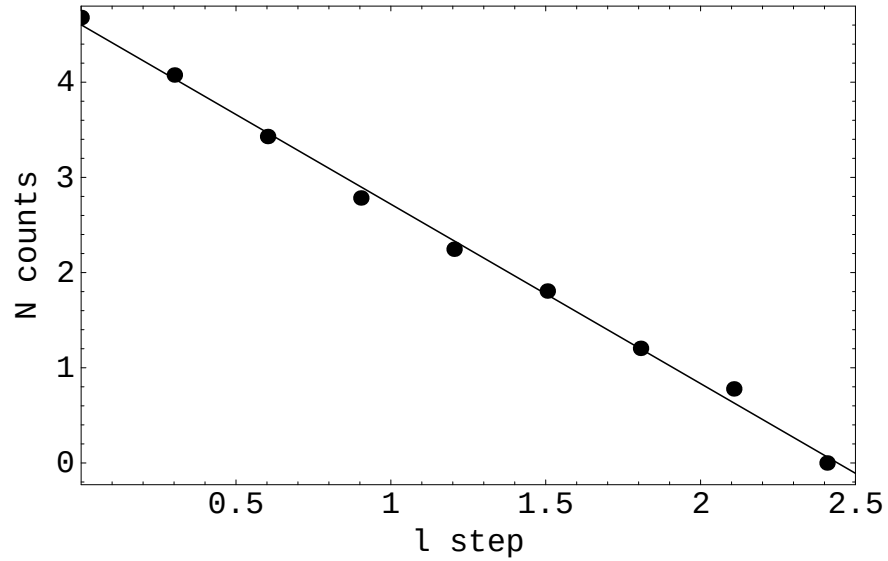
Η φρακταλική διάσταση για τη συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.97095$.

Για τιμή κατωφλίου ίση με -9 έχουμε



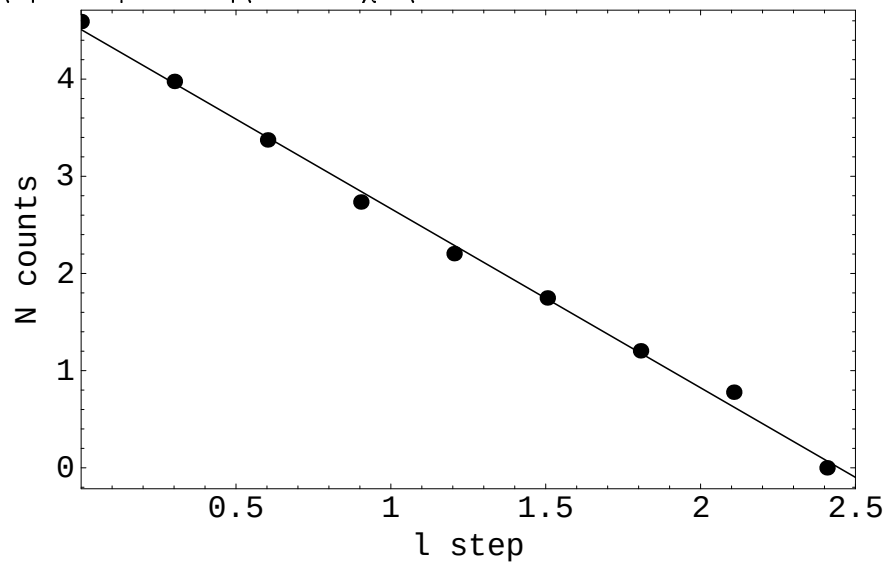
Η φρακταλική διάσταση για τη συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.88814$.

Για τιμή κατωφλίου ίση με -8.8 έχουμε



Η φρακταλική διάσταση για τη συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.88459$.

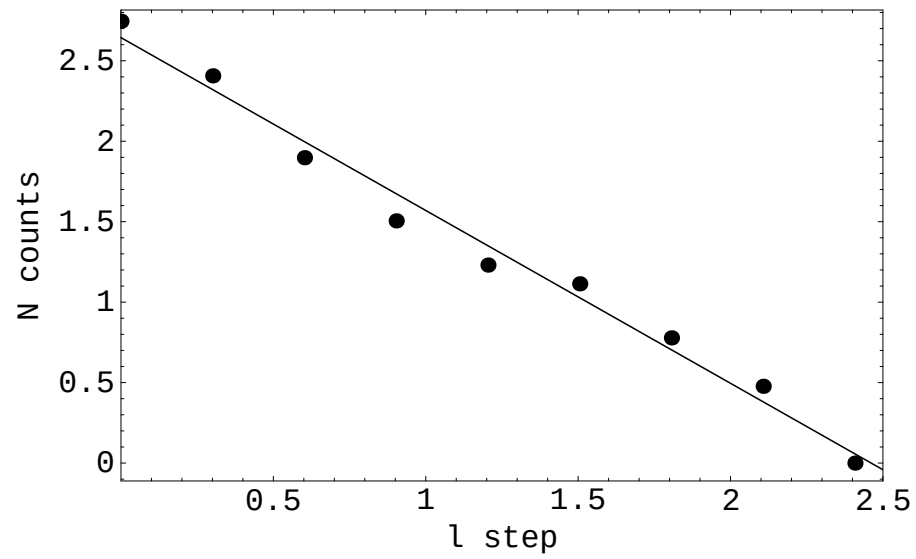
Για τιμή κατωφλίου ίση με -8.3 έχουμε



Η φρακταλική διάσταση για τη συγκεκριμένη τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.84323$. Αυτή είναι και η καλύτερη συμφωνία που παίρνουμε με ευθεία. Συνεχίζοντας τα σημεία δεν βρίσκονται πλέον σε ευθεία. Η φρακταλική διάσταση δείχνει να βρίσκεται κοντά σε συγκεκριμένη τιμή και να μην εξαρτάται από την τιμή κατωφλίου.

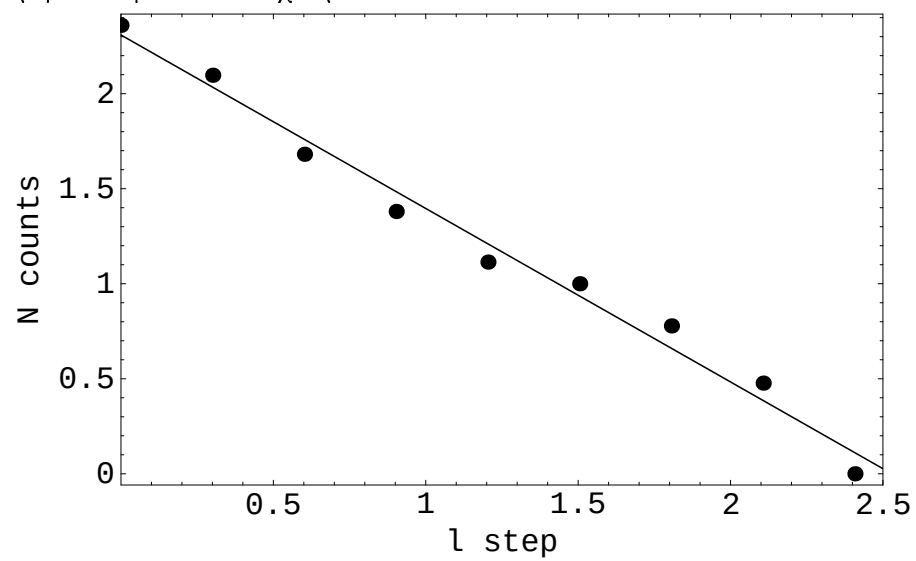
Την παραπάνω διαδικασία την επαναλαμβάνουμε και για την περίπτωση του πεδίου που πήραμε για την πρωτογενή εκπομπή χωρίς να λάβουμε υπόψη μας τη διάδοση της ακτινοβολίας.

Για τιμή κατωφλίου -12.63 έχουμε



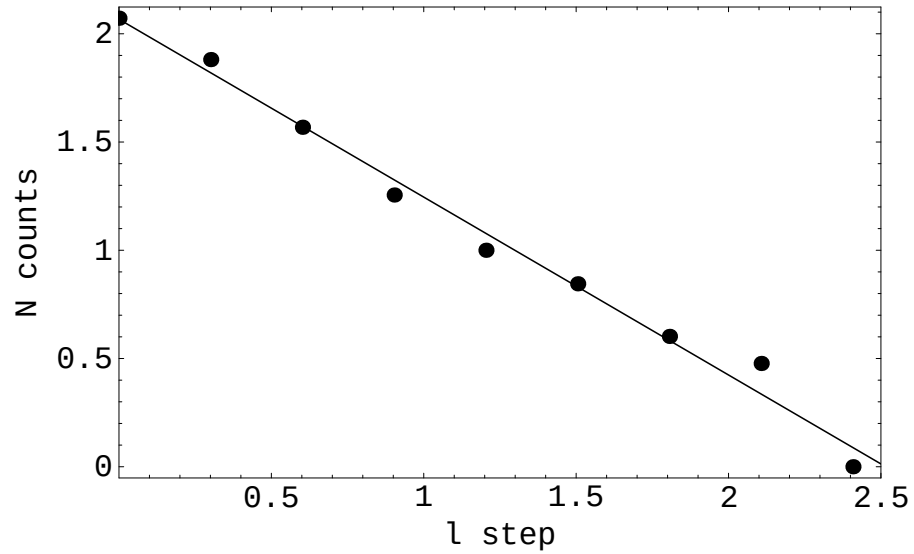
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.07419$. Όμως η προσαρμογή των σημείων στην ευθεία δεν είναι καλή.

Για τιμή κατωφλίου -10 έχουμε



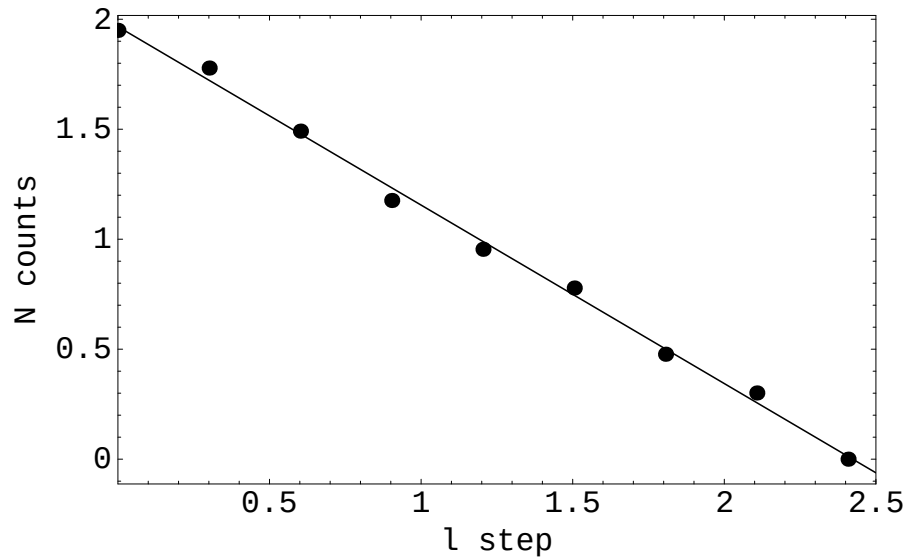
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 0.912705$. Η προσαρμογή των σημείων στην ευθεία εξακολουθεί να μην είναι καλή.

Για τιμή κατωφλίου -8.8 έχουμε



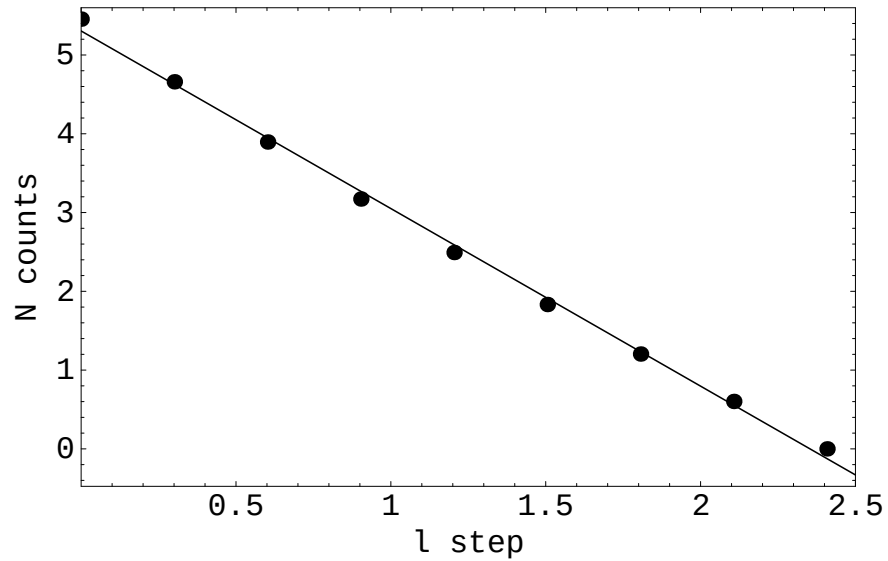
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 0.821682$. Η προσαρμογή των σημείων στην ευθεία αν και βελτιώθηκε δεν είναι καλή.

Για τιμή κατωφλίου -8.3 έχουμε



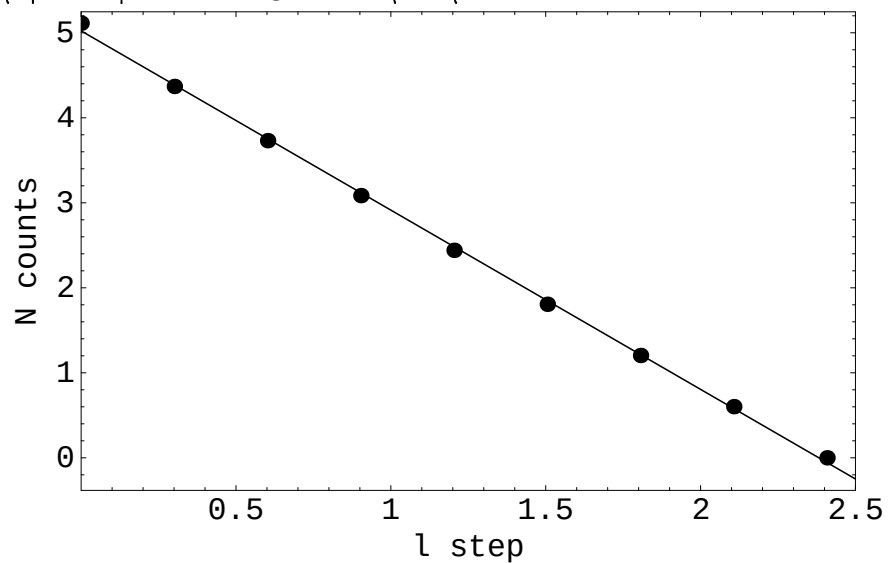
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 0.8114$. Η προσαρμογή των σημείων στην ευθεία είναι η καλύτερη που εμφανίζεται. Παρατηρούμε πως και με τη διάδοση αλλά και χωρίς αυτή για την ίδια τιμή κατωφλίου έχουμε τον καλύτερο υπολογισμό της φρακταλικής διάστασης η οποία όμως είναι τελείως διαφορετική στις δύο περιπτώσεις.

Κλείνοντας υπολογίζω την φρακταλική διάσταση του μαγνητικού πεδίου χρησιμοποιώντας την ένταση του μαγνητικού πεδίου. Ξεκινάω με τιμή κατωφλίου $B = 5$ gauss για το μαγνητικό πεδίο.



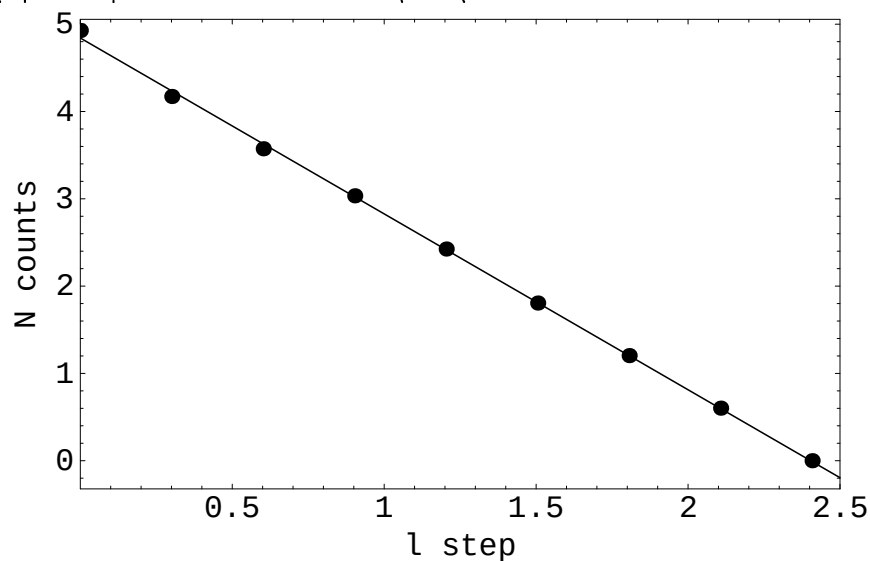
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 2.25425$.

Για τιμή κατωφλίου $B=8$ gauss παίρνουμε



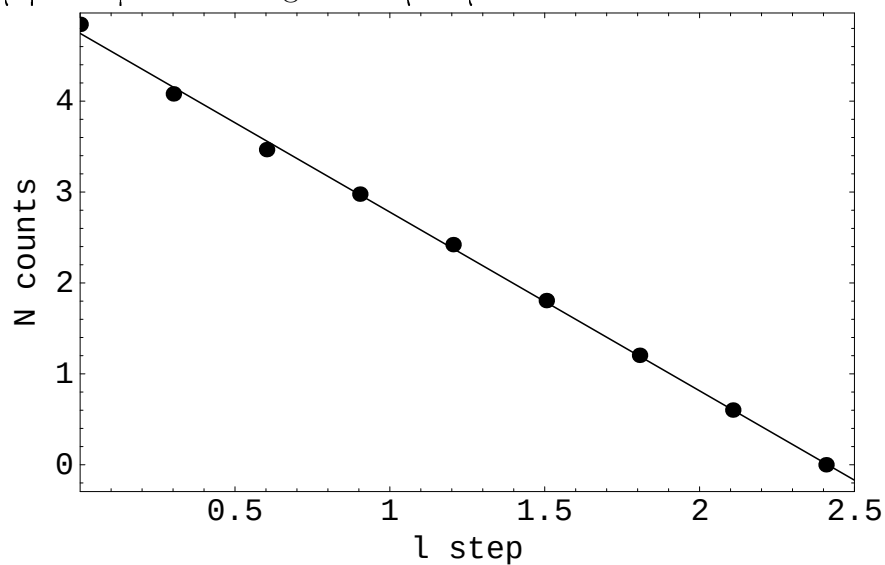
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 2.10857$. Η συμφωνία των σημείων με την ευθεία είναι πολύ καλή και επομένως πρέπει αυτή να είναι και η φρακταλική διάσταση του πεδίου.

Για τιμή κατωφλίου $B=10$ gauss παίρνουμε



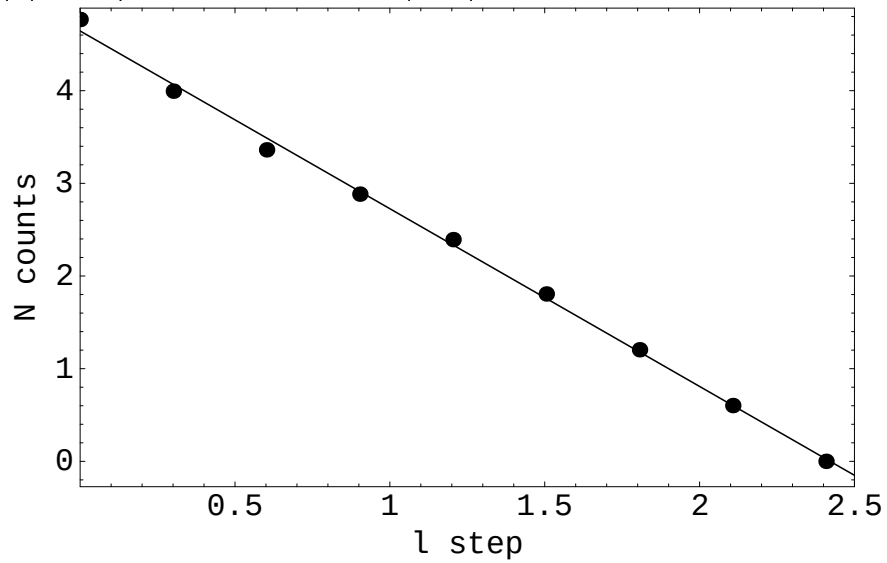
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 2.01456$. Η συμφωνία είναι και πάλι εξαιρετική αλλά η αλλαγή της φρακταλικής διάστασης με την τιμή κατωφλίου είναι μεγάλη.

Για τιμή κατωφλίου $B=11$ gauss παίρνουμε



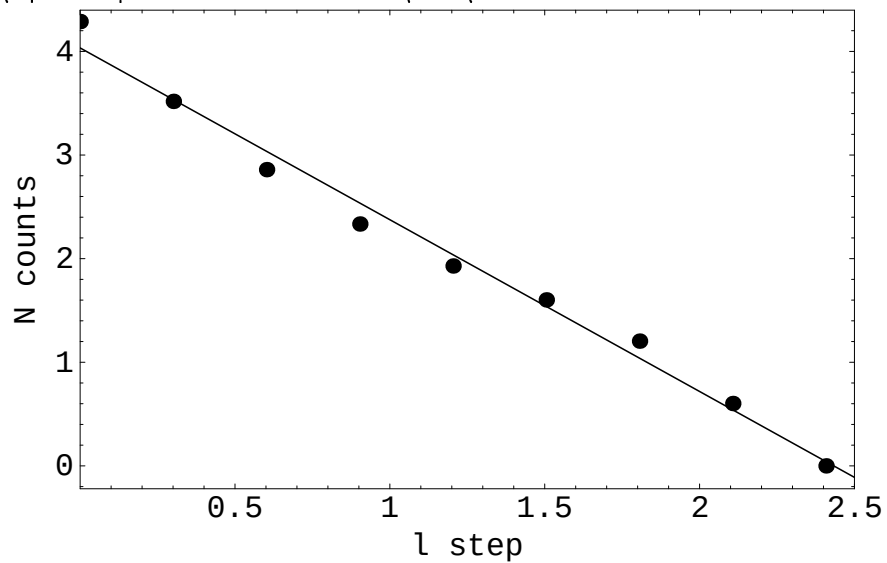
Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.96592$. Και πάλι η συμφωνία είναι καλή αλλά αλλάζει έντονα η τιμή της φρακταλικής διάστασης

Για τιμή κατωφλίου $B=12$ gauss παίρνουμε



Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.91799$.

Για τιμή κατωφλίου $B=20$ gauss παίρνουμε



Η φρακταλική διάσταση για τη παραπάνω τιμή κατωφλίου προκύπτει ίση με $\delta = 1.65783$. Η συμφωνία με την ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων πλέον δεν είναι καλή. Συνεχίζοντας για μεγαλύτερες τιμές του πεδίου παίρνουμε ολοένα μεγαλύτερη απόκλιση από την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων.

Παρατηρούμε πως το μαγνητικό πεδίο παρουσιάζει πιο ξεκάθαρα φρακταλική δομή, η οποία δείχνει να μεταβάλλεται με την τιμή κατωφλίου και να είναι κοντά στην τιμή που υπολογίσαμε για το πεδίο ακτινοβολίας στο οποίο λαμβάνουμε υπόψη μας. της διάδοση της, χωρίς όμως να είναι η ίδια.


```

////////////////////////////////////////////////////////////////
// This code calculates the intensity of gyrosynchrotron (in SFU) //
//from a volume space considering a hybrid distribution function //
// for electrons (power law and maxwellian) and creates a file //
// containing these values in every voxel of this space. //
// Input values of the magnetic field are taken from a file //
// wich is produced from extrapolation from real magnetograms. //
////////////////////////////////////////////////////////////////
#include <iostream>
#include <cmath>
#include <fstream>

using namespace std;
//error in the calculation of the integrals using gaussian quadrate
#define EPS 1.0e-12
//value of pi
#define PI 3.1415926535897932
//value of the electron charge (in CGS)
#define echarg 4.80298e-10
//value of the electron mass (in CGS)
#define emass 9.1091e-28
//value of the speed of light(in CGS)
#define clight 2.9979256e+10
//maxim order of the bessel functions
#define nsdim 10000
//value of infinity in case index of refraction is infinite
#define Inf 1.0e+40
//constant for changing intensity to SolarFluxUnits
#define Rs 2.238e+07
// Boltzmann's constant (in CGS)
#define Kboltz 1.3807e-16

// declaration of functions used in the code
/*{-----}*/

int nsminimum(int smin,double rindx,double ctheta,double rnu,
double rnub,double gammamin);

/*{-----}*/

int nsmaximum(int smin,double rindx, double ctheta,double rnu,

```

```

double rnub,double gammamax);

/*{-----}*/

double gammacritical( double epsilon ,double temp);

/*{-----}*/

double Nnthermal(double temp,double Ntherm,double epsilon,int p);

/*{-----}*/

double thermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double nonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double derthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double dernonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double qgauss(double a,double b, int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double temp,double Ntherm,double epsilon,
double(*func)(double,int ,double, double ,double,double,int,double,double,
double ,double,int,double,double,double ));

/*{-----}*/

double getindex(double rnu,double stheta,double ctheta,double rnub,

```

```

double rnup,int mode);

/*{-----}*/

double atheta(double rnu,double stheta,double ctheta,double rnub,
double rnup,int mode);

/*{-----}*/

int sminimum(double rindx, double ctheta,double rnu,double rnub);

/*{-----}*/

double g1(double rindx,double ctheta,int ns,double rnu ,double rnub);

/*{-----}*/

double g2(double rindx,double ctheta,int ns,double rnu ,double rnub);

/*{-----}*/

double cphis(int ns ,double rnu,double rindx,double g,double ctheta,
double rnub);

/*{-----}*/

double sphis(int ns ,double rnu,double rindx,double gamma,double ctheta,
double rnub);

/*{-----}*/

double dbessel(int l,double x);

/*{-----}*/

double dhipowlaw();

/*{-----}*/

double getxs(int ns ,double rnu,double gamma,double rindx,
double stheta,double ctheta,double rnub);

```

```

/*{-----}*/

double conemis(double rnu,double stheta,double ctheta,double rnub,
double rnup,int mode);

/*{-----}*/

double conabsor(double rnu,double stheta,double ctheta,double rindx,
double rnub,double rnup,int mode);

/*{-----}*/

double emissionthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double absortionthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double emissionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,double temp,
double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

double absortionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double temp,double Ntherm,double epsilon);

/*{-----}*/

void mainfunction(double *pabsortion,double *pemission , double rnu,double rnub,
double rnup,int mode,double stheta,double ctheta,double gammamin,

```

```

double gammamax,double temp,int p,double Ntherm,double epsilon,
double rnux,double depth);

/*{-----}*/

//main program
void main()

{
static float a[256][256][256];
int i,p,j,l,mode0,modeX;
double stheta,temp,ctheta,rnux,rnub,rnup,rnu,gammamin,gammamax;
double sumemission0,sumabsortion0;
double sumemissionX,sumabsortionX;
double intensitytotal,Ntherm,Nntherm,Ntotal,epsilon;
double intensity0,intensityX,area;
double *pemission0,*pabsortion0,*pemissionX,*pabsortionX;
double L,gcrit,thetd,theta,step;
float bfield,B,Bminimum,lflux;
double depth,flux;
double intensityXlast,intensity0last;

cout<<"          *****"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"          SYNCHROTRON VOLUME INTENSITY CALCULATION"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"          *****"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"Give the angle theta in degrees (0-180)= "<<endl;
cin>>thetd;
cout<<"Give a power-law power p= "<<endl;
cin>>p;
cout<<"Give the for the distance from source L (cm) "<<endl;
cin>>L;
cout<<"Give the densty of thermal electrons (cm-3)= "<<endl;
cin>>Ntherm;
cout<<"give the Temperature of electrons (K) ="<<endl;
cin>>temp;
cout<<"Give the epsilon parameter "<<endl;
cin>>epsilon;
cout<<"Give the rnu (frequency) that you want "<<endl;

```

```

cin>>rnu;
cout<<"Give the minimum magnetic field of interest = "<<endl;
cin>>Bminimum;
cout<<"Give the depth of calculation"<<endl;
cin>>depth;
//file of input values of the magnetic field
ifstream datafile ("amplitude.dat", ios::in|ios::binary );
//file for gyrosynchrotron values
ofstream myfile ("volume.dat",ios::binary);
//file for log gyrosynchrotron values
ofstream myfile1 ("logvolume.dat",ios::binary);

if (!datafile)
{ cerr<<"file could not be opened"<<endl;
exit(1);}

step = L/255;          //voxel's linear size
area=pow(step,2);      //voxel's side area
for( i=0;i<256;i++)
for( j=0;j<256;j++)
for( l=0;l<256;l++)
{
datafile.read(reinterpret_cast < char * > (&B),sizeof(B));
a[i][j][l]=B;
}

for( i=0;i<256;i++)
for( j=0;j<256;j++)
{
intensityXlast =0.0;
intensity0last =0.0;

for( l=0;l<256;l++)
{
bfield=a[i][j][l];
cout<<"value of B = "<<bfield<<endl;
if (bfield >= Bminimum)
{
//minimum energy for electrons (gamma relativistic parameter)
gammamin=1.002;
//maximum energy for electrons
gammamax=10;

```

```

//Numerical density of non thermal electrons of hybridic function
Nntherm=Nnthermal(temp,Ntherm,epsilon,p);
//Total numerical density of electrons used for calculating plasma frequency
Ntotal=Ntherm+Nntherm;
//Function call for calculating critical value of energy
gcrit=gammacritical( epsilon , temp);
//Gyro Frequency
rnub = echarg * bfield/(2*PI*emass*clight);
//Plasma Frequency
rnup = echarg*sqrt(Ntotal/(PI*emass));
//Cut-off frequency for the X-mode
rnux= (rnub/2)+sqrt(pow(rnup,2)+pow(rnub,2)/4);

//calculation of sine and cosine of theta angle

if (thetd==90)
{theta=PI/2;
stheta=1;
ctheta=0;}
else if(thetd==180)
{theta=PI;
stheta=0;
ctheta=-1;}
else

{theta=thetd*PI/180;
stheta=sin(theta);
ctheta=cos(theta);}

pemission0=&sumemission0;
pabsortion0=&sumabsortion0;
pemissionX=&sumemissionX;
pabsortionX=&sumabsortionX;

// the ordinary mode is set 1 and the extraordinary mode to -1
// in order to be called with these two values
mode0 = 1;
modeX = -1;

//mainfunction calculates emission and absotion for a voxel

```

```

//it is called for the ordinary mode and then for the extraordinarymode
mainfunction(pabsortion0, pemption0 ,rnu, rnub, rnup,mode0, stheta,
ctheta, gammamin, gammamax, temp, p, Ntherm, epsilon,rnux,depth);

mainfunction(pabsortionX, pemptionX ,rnu, rnub, rnup,modeX, stheta,
ctheta, gammamin, gammamax,temp, p, Ntherm, epsilon,rnux,depth);

//calculation of intensity of a voxel for the 0 mode
// as mentioned in paragraph 2.5 equation used 2.108

intensity0 =intensity0last*exp(-step*sumabsortion0);
intensity0 =
intensity0+sumemission0*(1-exp(-(L-l*step)*sumabsortion0))/sumabsortion0;
intensity0last= intensity0;

//calculation of intensity of a voxel for the X mode
// as mentioned in paragraph 2.5
//also calculation of the total intensity equation 2.109 paragraph 2.5

if (sumemissionX!=0 && sumabsortionX!=0 )

{
intensityX =intensityXlast*exp(-sumabsortionX*step);
intensityX=
intensityX+(sumemissionX) *(1-exp(-(L-l*step)*sumabsortionX))/sumabsortionX;
intensityXlast=intensityX;
intensitytotal=intensityX+intensity0;} else {intensitytotal =intensity0;}

flux = intensitytotal*area/Rs ;
}

//if zero values are calculated use the following values
else {
sumabsortionX=0.0;
sumemissionX=0.0;
sumemission0=0.0;
sumabsortion0=0.0;
intensityX=intensityXlast*exp(-sumabsortionX*step);
intensity0 =intensity0last*exp(-step*sumabsortion0);
intensityXlast=intensityX;
intensity0last= intensity0;

```



```

intensitytotal=intensityX+intensity0;
flux = intensitytotal*area/Rs ;
}

//writing the calculated values in an data file
myfile.write(reinterpret_cast < char * > (&flux),sizeof(flux));
myfile.seekp(0,ios::end);
if (flux==0.0) lflux=-200.0; else lflux = (float) log10(flux);
myfile1.write(reinterpret_cast < char * > (&lflux),sizeof(lflux));
myfile1.seekp(0,ios::end);

cout<<i<<" "<<j<<" "<<l<<" "<<flux<<endl;
cout<<lflux<<endl;

}}

}

//finding the number of bessel functions to include
//inside the limits of integration gammamin & gammamax
//initial value smin (lower bessel)
//function for calculating the lowest bessel
//paragraph 3.1 equation 3.1
int sminimum(double rindx, double ctheta,double rnu,double rnub)
{double aterm,bterm;
int nsfix;
bterm=1-pow((rindx*ctheta),2);
if (bterm<0) {nsfix=1;} else {
aterm=(rnu/rnub)*sqrt(bterm);
nsfix = (int) ceil(aterm);}
return nsfix;
}
/*{-----}*/
//lowest bessel upper limit greater than gammamin
int nsminimum(int smin,double rindx, double ctheta,double rnu,
double rnub,double gammamin)
{int j,nsmin;
for(j=smin;j<=nsdim;j++)
{nsmin=j;
if (g2(rindx,ctheta,j,rnu,rnub)< gammamin) continue;
else break;
}
}

```

```

return nsmin;}

/*{-----}*/
//max bessell lower limit lower than gammamax
int nsmaximum(int smin,double rindx, double ctheta,double rnu,
double rnub,double gammamax)
{int l,nsmax;
for(l=smin;l<=nsdim;l++)
{nsmax=l-1;
if (g1(rindx, ctheta,l, rnu,rnub)< gammamax ) continue;
else break ;}
return nsmax;}

/*{-----}*/
//function for the calculation of gcritical for hybrid function
//paragraph 2.4.3 equation 2.104
double gammacritical( double epsilon ,double temp)
{double pthermal,aterm,bterm,gvalue;
aterm=emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
pthermal = emass*clight/sqrt(aterm-1);
bterm=pow((pthermal/(emass*clight)),2);
gvalue = sqrt(1+(bterm/(epsilon-bterm*(1-epsilon))));
return gvalue;}

/*{-----}*/
/*computation of a(th)*/
//paragraphs theory 2.2 evaluation 2.3 equation 2.62
double atheta(double rnu,double stheta,double ctheta,double rnub,
double rnup,int mode)
{double aterm,bterm,denom,deter,athet;

aterm=-pow((rnu/rnub)*stheta,2);
bterm=2*(rnu/rnub)*ctheta*(pow((rnup/rnub),2)-pow((rnu/rnub),2));
deter=sqrt(pow(aterm,2)+pow(bterm,2));
if (mode==1) denom=aterm+deter; else denom=aterm-deter;
athet=-bterm/denom;
return athet;}

/*{-----}*/
/*computation of index of refraction n(th)*/
//paragraphs theory 2.2 evaluation 2.3 equation 2.61
double getindex(double rnu,double stheta,double ctheta,double rnub,
double rnup,int mode)
{
double aterm,bterm,cterm,denom,deter,index,rindex;

```

```

aterm=pow((rnu/rnub),2)*pow(stheta,2);
bterm=2*(pow((rnup/rnub),2)-pow((rnu/rnub),2));
cterm=bterm*(rnu/rnub)*ctheta;
deter=pow(aterm,2)+pow(cterm,2);
if (mode==1)
denom=(-aterm)-((pow((rnu/rnub),2)*bterm))+sqrt(deter);
else denom=(-aterm)-((pow((rnu/rnub),2)*bterm))-sqrt(deter);
if (denom == 0) index=Inf;else
index=1+(bterm*pow((rnup/rnub),2)/denom);
if (index<0) rindex=Inf; else
rindex=sqrt(index);
return rindex;}
/*{-----}*/
/*evaluating gamma1 and gamma2 of the integral*/
//paragraph 3.1 equation 3.2
double g1(double rindx,double ctheta,int ns,double rnu ,double rnub)
{double x,y,z,deton,denom,g1;
x=ns*(rnub/rnu);
y=rindx*fabs(ctheta);
z=x*x+y*y;
deton=y*sqrt(z-1);
denom=x+deton;
g1=z/denom;
return g1;
}
/*{-----}*/

double g2(double rindx,double ctheta,int ns,double rnu, double rnub)
{double x,y,z,deton,denom,g2;
x=ns*(rnub/rnu);
y=rindx*fabs(ctheta);
z=x*x+y*y;
deton=y*sqrt(z-1);
denom=x-deton;
g2=z/denom;
return g2;
}
/*{-----}*/
/*{evaluation cos and sin of phi's}*/
//paragraph 2.3 equation for cos 2.79
double cphis(int ns ,double rnu,double rindx,double gamma,
double ctheta,double rnub)

```

```

{double aterm,bterm,cphis,beta;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ns*(rnu/rnu)/gamma;
aterm=1.0-aterm;
bterm=rindx*beta*ctheta;
cphis=aterm/bterm;
return cphis;}

//sin is calculated uisng the identity sin2phi=1-cos2phi
double sphis(int ns ,double rnu,double rindx,double gamma,
double ctheta,double rnu)
{double sphis;
sphis=sqrt(1-pow(cphis(ns,rnu,rindx,gamma,ctheta,rnu),2));
return sphis;
}

/*{-----}*/
/*calling derivative of Bessel */
double dbessel(int l,double x)
{double bprime;
if (l==0)
bprime=-_jn(1,x);
else
bprime=0.5*(_jn(l-1,x)-_jn(l+1,x));
return bprime;
}

/*{-----}*/
// calculation of the density of nonthermal electrons
//for the hybrid function paragraph 2.4.3 equation 2.103
double Nnthermal(double temp,double Ntherm,double epsilon,int p)
{double aterm,bterm ,Nntherm,gcrit;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=pow((sqrt(aterm)),3)/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
Nntherm= Ntherm*sqrt(32*PI)*bterm;
Nntherm =
Nntherm*gcrit*(gcrit-1)*sqrt(pow(gcrit,2)-1)*exp(-aterm*(gcrit-1))/(p-1);
return Nntherm ;
}/*{-----}*/
/*thermal-nonthermal (TNT) distribution function*/
/*thermal-part of distribution function*/
//as described in paragraph 2.4.3 equation 2.101
double thermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)

```

```

{
double aterm,bterm,fthermalpart,ftotal,gcrit,pthermal;
double pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
fthermalpart =
sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*gamma*sqrt(pow(gamma,2)-1);
fthermalpart =fthermalpart *exp(-aterm*(gamma-1))*bterm;
fthermalpart =Ntherm*fthermalpart;
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=
pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma<gcrit)
Rsmooth=sin(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/(2* pow((gcrit-gRsmooth),2)));
else
if (gamma>=gcrit)Rsmooth=1;}
if (gamma >=gmin) ftotal=fthermalpart;
else ftotal=0;
return ftotal;}

/* nonthermal part of distribution function */
//as described in paragraph 2.4.3 equation 2.102
double nonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,fnonthermalpart,ftotal,gcrit,pthermal;
double pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=
pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
fnonthermalpart=
pow((gamma-1),-p)*(p-1)/((pow((gcrit-1),1-p)-pow((gmax-1),1-p))*(4*PI));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma<gcrit)

```

```

Rsmooth=sin(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/(2* pow((gcrit-gRsmooth),2)));
else
if (gamma>=gcrit)Rsmooth=1;}
fnonthermalpart=
Rsmooth*Nnthermal(temp, Ntherm, epsilon, p)*fnonthermalpart;
if (gamma >=gmin) ftotal=fnonthermalpart;
else ftotal=0;
return ftotal;}

//derivative of power law to phi
// for isotropic distributions
double dhipowlaw()
{
return 0;
}

//derivative of thermal-nonthermalpart of distribution function
// thermal part derivative with respect to gamma
//needed for equations 2.78 paragraph 2.3
double derthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)
{double aterm,bterm ,derfthermal,derftotal;
double gcrit,pthermal,pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
derfthermal =
sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*bterm*pow(gamma,2)*pow((pow(gamma,2)-1),(-1/2));
derfthermal =
derfthermal +sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*bterm*pow((pow(gamma,2)-1),(1/2));
derfthermal =
derfthermal-aterm*sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*bterm*gamma*sqrt(pow(gamma,2)-1);
derfthermal =derfthermal *exp(-aterm*(gamma-1));
derfthermal =derfthermal*Ntherm;
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma< gcrit)
Rsmooth=
PI*(gamma-gRsmooth)*cos(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/
(2* pow((gcrit-gRsmooth),2)))/ pow((gcrit-gRsmooth),2);

```

```

else Rsmooth=1;}
if (gamma >=gmin) derfttotal=derfthermal;
else derfttotal=0;
return derfttotal;
}

// derivative of nonthermal part distribution with respect to gamma
//needed for equations 2.78 paragraph 2.3
double dernonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)
{double aterm,bterm ,derfnonthermal,derfttotal;
double gcrit,pthermal,pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=
pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
derfnonthermal=
(-p)*pow((gamma-1),(-p-1))*(p-1)/((pow((gcrit-1),1-p)-pow((gmax-1),1-p))*(4*PI));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma< gcrit)
Rsmooth=sin(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/(2* pow((gcrit-gRsmooth),2)));
else Rsmooth=1;}
derfnonthermal=Rsmooth*Nnthermal(temp, Ntherm, epsilon, p)*derfnonthermal;
if (gamma >=gmin) derfttotal=derfnonthermal;
else derfttotal=0;
return derfttotal;
}

//Get x's for the bessel functions
// calculated in paragraph 2.3 equation 2.69
double getxs(int ns ,double rnu,double gamma,double rindx,
double stheta,double ctheta,double rnub)
{double aterm,bterm,beta,xs;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm = rindx*ns*beta*stheta*sphis( ns , rnu,rindx, gamma, ctheta,rnub);
bterm=1.0-(rindx*beta*ctheta*cphis(ns,rnu,rindx,gamma,ctheta,rnub));
xs=aterm/bterm;
return xs;}

//Evaluate the constant values of the integrales
//emission constant paragraph 2.3 equation 2.77

```

```

double conemis(double rnu,double stheta,double ctheta,double rnub,
double rnup,int mode)
{
double cona;
cona = 4*pow(PI,2)*pow(echarg,2)/clight;
cona=cona*rnu/ctheta;
cona=cona/(1+pow(atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode),2));
return cona;
}

//absortion constant paragraph 2.3 equation 2.78
double conabsor(double rnu,double stheta,double ctheta,double rindx,
double rnub,double rnup,int mode)
{
double cona,conb,conabsor;
cona = 4*pow(PI,2)*pow(echarg,2)/clight;
conb=cona/emass;
conabsor=conb/(rnu*rindx*abs(ctheta));
conabsor=conabsor/(1+pow(atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode),2));
return conabsor;
}

// "numerical recipes in c++" Gaussian quadrature method
//for integration of function f using 256 points
//for the calculation of integrals in paragraph 2.3
//used in equations 2.77 and 2.78
double qgauss(double a,double b, int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,
double rnub,double rnup, int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon,
double(*func)(double,int ,double, double ,double,double ,int ,double,
double ,double ,double , int ,double,double,double ))
{
int m,i,j,n;
double z1,z,pp,p3,p2,p1,xr,xm,dx,s,x[257],w[257];
n=256;
m=(n+1)/2;
xm=0.5*(b+a);
xr=0.5*(b-a);
for(i=1;i<=m;i++)
{
z=cos(3.141592654*(i-0.25)/(n+0.5));
do {
p1=1.0;
p2=0.0;

```



```

for(j=1;j<=n;j++){
p3=p2;
p2=p1;
p1=((2.0*j-1.0)*z*p2-(j-1.0)*p3)/j;
}

pp=n*(z*p1-p2)/(z*z-1.0);
z1=z;
z=z1-p1/pp;
}while(fabs(z-z1)>EPS);
x[i]=xm-xr*z;
x[n+1-i]=xm+xr*z;
w[i]=2.0*xr/((1.0-z*z)*pp*pp);
w[n+1-i]=w[i];}

s=0;
for(j=1;j<=256;j++)
{
dx=xr*x[j];
s += w[j]*((*func)( x[j],ns,rnu, rindx, ctheta, stheta, p,gmin,gmax,
                    rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon));
}
return s ;
}

//thermalemission integrand paragraph 2.3 equation 2.77
//with call to thermal part of hybrid function
double emissionthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,
double rnub,double rnup, int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,emissionthermal;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=
atheta(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode)*aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
emissionthermal=
thermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)*pow(integr,2)/beta;
return emissionthermal;
}

//thermalabsortion integrand paragraph 2.3 equation 2.78

```

```
//with call to thermal part of hybrid function
```

```
double absortionthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,double rnub,
double rnup, int mode, double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,absortionthermal,aterm,b1term;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=
atheta(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode)*aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
aterm=((rindx*beta*ctheta)-cphis(ns,rnu,rindx,gamma,ctheta,rnub));
aterm=aterm/(pow(beta,2)*gamma*sphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
b1term=(1+(1/pow(beta,2)))/gamma;
absortionthermal=
(b1term*thermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)
-derthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon))+(aterm*dhipowlaw());
absortionthermal=absortionthermal*pow(integr,2)/beta;
return absortionthermal;
}
```

```
//nonthermalemission integrand paragraph 2.3 equation 2.77
```

```
//with call to nonthermal part of hybrid function
```

```
double emissionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,double rnub,
double rnup, int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,emissionnonthermal;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=
ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis(ns,rnu,rindx,gamma,ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns,rnu,gamma,rindx,stheta,ctheta,rnub);
integr=
atheta(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode)*aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
emissionnonthermal=
nonthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)*pow(integr,2)/beta;
return emissionnonthermal;
}
```

```
//nonthermalabsortion integrand paragraph 2.3 equation 2.77
```

```

//with call to nonthermal part of hybrid function

double absortionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,double rnub,
double rnup, int mode, double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,absortionnonthermal,alterm,biterm;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=
atheta(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode)*aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
alterm=((rindx*beta*ctheta)-cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
alterm=alterm/(pow(beta,2)*gamma*sphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
biterm=(1+(1/pow(beta,2)))/gamma;
absortionnonthermal=
(biterm*nonthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)
-dernonthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon))+(alterm*dhipowlaw());
absortionnonthermal=absortionnonthermal*pow(integr,2)/beta;
return absortionnonthermal;
}

// calculation of the intensity for a given frequency for a single voxel
// and for a given mode. this function calculates the sum of integrals
//for a given B value its return is the result calculated
//for equations 2.77 and 2.78
void mainfunction(double *pabsortion,double *pemission , double rnu,double rnub,
double rnup,int mode,double stheta,double ctheta,double gammamin,double gammamax,
double temp,int p,double Ntherm,double epsilon,double rnux,double depth)
{double rindx,gmin,gmax,endpointlow,endpointhigh;
double emissiontherm,absortiontherm;
double emissionnontherm,sumemission,sumabsortion,absortionnontherm;
int ns,nsmax,nsmin,smin;

gmin=gammamin;
gmax=gammamax;
rindx = getindex(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode);
smin= sminimum( rindx, ctheta, rnu,rnub);
nsmin= nsminimum( smin, rindx, ctheta, rnu, rnub, gammamin);
nsmax=nsmaximum(smin, rindx, ctheta, rnu, rnub, gammamax);
sumabsortion=0;
sumemission=0;

```

```

for(ns = nsmin;ns<=nsmax;ns++)

{

if (mode == 1)
{if (rnup > rnu )
{sumemission=0;
sumabsortion=0;

continue;}}
else
{if (rnux > rnu)
{
sumemission=0;
sumabsortion=0;

continue;}}

endpointlow= max(g1(rindx, ctheta,ns, rnu,rnub),gammamin);
endpointhigh= min(g2(rindx, ctheta,ns, rnu,rnub),gammamax);

if (endpointlow >=endpointhigh)
{emissiontherm=0;
absortiontherm=0;
emissionnontherm=0;
absortionnontherm=0;}
else
{emissiontherm = conemis( rnu, stheta, ctheta,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax, rnub, rnup, mode ,temp,Ntherm,epsilon,emissionthermal);
absortiontherm=conabsor( rnu, stheta, ctheta,rindx,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax,rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon, absortionthermal);
emissionnontherm = conemis( rnu, stheta, ctheta,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax, rnub, rnup, mode ,temp,Ntherm,epsilon,emissionnonthermal);
absortionnontherm=conabsor( rnu, stheta, ctheta,rindx,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax,rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon, absortionnonthermal);
if ( emissiontherm >=depth && absortiontherm >=depth &&

```

```

        emissionnontherm >=depth && absortionnontherm >=depth)
{

sumemission=emissiontherm+emissionnontherm+sumemission;
sumabsortion=sumabsortion+absortiontherm+absortionnontherm;

}
else
{break;}

}
}
*pemission=sumemission;
*pabsortion=sumabsortion;

}

```

```

////////////////////////////////////////////////////////////////
// This code calculates the intensity of gyrosynchrotron (in SFU)
// from a volume space for a range of frequencies.
// The distribution of electrons is selected between
// a power-law, a maxwellian or a hybrid of both.
////////////////////////////////////////////////////////////////

#include <iostream>
#include <cmath>
#include <fstream>

using namespace std;

// error in the calculation of the integrals using gaussian quadrate
#define EPS 1.0e-12
// value of pi
#define PI 3.14159265358979323
// value of the electron charge (in CGS)
#define echarg 4.80298e-10
// value of the electron mass (in CGS)
#define emass 9.1091e-28
// value of the speed of light(in CGS)
#define clight 2.9979256e+10
// maxim order of the bessel functions
#define nsdim 10000
// value of infinity in case index of refraction is infinite
#define Inf 1.0e+40
// constant for changing intensity to SolarFluxUnits
#define Rs 2.238e+07
// Boltzmann's constant (in CGS)
#define Kboltz 1.3807e-16

//function declaration
/*{-----}*/
double turntogamma(double energy);
/*{-----}*/
int nsminimum(double smin,double rindx, double ctheta,double rnu,
double rnub,double gammamin);
/*{-----}*/
int nsmaximum(double smin,double rindx, double ctheta,double rnu,
double rnub,double gammamax);

```

```

/*{-----}*/
double gammacritical( double epsilon ,double temp);
/*{-----}*/
double Nnthermal(double temp,double Ntherm,double epsilon,int p);
/*{-----}*/
double thermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double nonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double derthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double dernonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double powlaw(int p,double gmin,double gmax,double gamma);
/*{-----}*/
double dhipowlaw();
/*{-----}*/
double derpowlaw(int p,double gmin,double gmax,double gamma);
/*{-----}*/
double qgauss(double a,double b, int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double(*func)(double,int ,double, double ,double,double ,
int ,double,double ,double ,double , int ,double,double,double ));
/*{-----}*/
double gausspowerlaw(double a,double b, int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double(*func)(double,int ,double, double ,double,double ,
int ,double,double ,double ,double , int ));
/*{-----}*/
double getindex(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode);
/*{-----}*/
double atheta(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode);
/*{-----}*/

```

```

int    sminimum(double rindx, double ctheta,
double rnu,double rnub);
/*{-----}*/
double g1(double rindx,double ctheta,int ns,
double rnu ,double rnub);
/*{-----}*/
double g2(double rindx,double ctheta,int ns,
double rnu ,double rnub);
/*{-----}*/
double cphis(int ns ,double rnu,double rindx,double g,
double ctheta,double rnub);
/*{-----}*/
double sphis(int ns ,double rnu,double rindx,double gamma,
double ctheta,double rnub);
/*{-----}*/
double dbessel(int l,double x);
/*{-----}*/
double getxs(int ns ,double rnu,double gamma,double rindx,
double stheta,double ctheta,double rnub);
/*{-----}*/
double conemis(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode);
/*{-----}*/
double conemispow(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode,double Nntherm);
/*{-----}*/
double conabsor(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rindx,double rnub,double rnup,int mode);
/*{-----}*/
double conabsorpow(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rindx,double rnub,double rnup,int mode,double Nntherm);
/*{-----}*/
double emissionthermal(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup,
int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double absortionthermal(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup,
int mode, double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/

```



```

double emissionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup,
int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double absortionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup,
int mode, double temp,double Ntherm,double epsilon);
/*{-----}*/
double emissionpowerlaw(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup, int mode);
/*{-----}*/
double absortionpowerlaw(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,
double gmin,double gmax,double rnub,double rnup, int mode);
/*{-----}*/
void mainfunction(double *pabsortion,double *pemission , double rnu,
double rnub,double rnup,int mode,double stheta,double ctheta,
double gammamin,double gammamax,double temp,int p,double Ntherm,
double epsilon,double rnux,int pr);
/*{-----}*/
void mainpowerlaw(double *pabsortion,double *pemission , double rnu,
double rnub,double rnup,int mode,double stheta,double ctheta,
double gammamin,double gammamax,int p,double rnux,double Nntherm);
/*{-----}*/
//main program
void main()
{
//file for the values of totalflux
ofstream myfile1("fluxtotal.txt",ios::out);
//file for the values of flux for the 0 mode
ofstream myfile2("flux0.txt",ios::out);
//file for the values of flux for the X mode
ofstream myfile3("fluxX.txt",ios::out);
//file for the values of polarization
ofstream myfile4("polarization.txt",ios::out);

int i,p,mode0,modeX,pr;
double stheta,temp,ctheta,bfield,rnux,rnub,rnup,rnu,gammamin,gammamax;
double sumemission0,sumabsortion0;

```

```

double sumemissionX,sumabsortionX;
double intensitytotal,Ntherm,Nntherm,Ntotal,epsilon;
double intensity0,intensityX,area;
double *pemission0,*pabsortion0,*pemissionX,*pabsortionX;
double flux,L, gcrit,thetd,theta;
double Emax,Emin,fluxX,flux0,polarization;

cout<<"*****"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"CALCULATION OF GYROSYNCHROTRON RADIATION INTENSITY"<<endl;
cout<<"          FOR VARIOUS DISTRIBUTION FUNCTIONS          "<<endl;
cout<<"*****"<<endl;
cout<<endl;
cout<<"SELECT A DISTRIBUTION FUNCTION"<<endl;
cout<<"FOR A POWER LAW  DISTRIBUTION  GIVE 1"<<endl;
cout<<"FOR A MAXWELLIAN DISTRIBUTION  GIVE 2"<<endl;
cout<<"FOR A HYBRID      DISTRIBUTION  GIVE 3"<<endl;
cin>>pr;
cout<<"give the angle theta in degrees (0-180)= "<<endl;
cin>>thetd;
cout<<"give the intensity of the magnetic field (Gauss units)"<<endl;
cin>>bfield;
cout<<"give the for the distance from source L (cm) "<<endl;
cin>>L;

switch(pr)
{
    //input data for the power-law function
case 1 :
cout<<"give a power-law power p= "<<endl;
cin>>p;
//input of index of power-law eq. 2.91 par. 2.4.1
cout<<"give the thermal electron density"<<endl;
cin>>Ntherm;
//density of thermal electrons
cout<<"give the densty of nonthermal electrons"<<endl;
cin>>Nntherm;
//denstity of nonthermal electrons
cout<<"give the lower energy Emin in KeV"<<endl;
cin>>Emin;
//lowest energy
cout<<"give the maximum energy Emax in KeV"<<endl;
cin>>Emax;

```

```

//maximum energy (energy cutoffs)
//eq. 2.98 par.2.4.1
break;
//input data for maxwellian function
case 2 :
cout<<"give the density of thermal electrons (cm-3)= "<<endl;
cin>>Ntherm;
// density of thermal electrons
//eq.2.99 par. 2.4.2
cout<<"give the Temperature of electrons (K) ="<<endl;
cin>>temp;
//Temperature of electrons
break;
//input for the hybrid function
case 3 :
cout<<"give a power-law power p= "<<endl;
cin>>p;
//index for power-law function
//nonthermal part eq.2.102 par.2.4.3
cout<<"give the epsilon parameter "<<endl;
cin>>epsilon;
//epsilon=E/E(Dreicer) eq.2.104 par.2.4.3
cout<<"give the density of thermal electrons (cm-3)= "<<endl;
cin>>Ntherm;
//density of thermal electrons
//eq.2.103 par.2.4.3
cout<<"give the Temperature of electrons (K) ="<<endl;
cin>>temp;
//temperature for the maxwellian function
break;
}
area=L*L;
//area of study
//calculation of sine and cosine of theta angle
if (thetd==90)
    {theta=PI/2;
    stheta=1;
    ctheta=0;}
    else if(thetd==180)
{theta=PI;
    stheta=0;
    ctheta=-1;}

```

```

        else
        {theta=thetd*PI/180;
        stheta=sin(theta);
        ctheta=cos(theta);}

        switch(pr)
        {
//parameters for power-law function
case 1:
Ntotal = Ntherm + Nntherm;
//total density of electrons
gammamin=turntogamma(Emin);
gammamax=turntogamma(Emax);
//Emin and Emax from eV turned
//to gamma relativistic parameter
break;
//parameters for maxwellian function
case 2:
Ntotal = Ntherm;
//minimum energy for electrons (gamma relativistic parameter)
gammamin=1.02;
//maximum energy for electrons
gammamax=10;
break;
//parameters for hybrid function
case 3:
Nntherm=Nnthermal(temp,Ntherm,epsilon,p);
//nonthermal electrons density
// eq.2.103 par2.4.3
Ntotal=Ntherm+Nntherm;
//total electrons density
//minimum energy for electrons (gamma relativistic parameter)
gammamin=1.02;
//maximum energy for electrons
gammamax=10;
//gamma critical eq.2.104 par 2.4.3
gcrit=gammacritical( epsilon , temp);
break;
        }

//Gyro Frequency
rnu = echarg * bfield/(2*PI*emass*cflight);

```

```

//Plasma Frequency
rnup = echarg*sqrt(Ntotal/(PI*emass));
//Cut-off frequency for the X-mode
rnux= (rnub/2)+sqrt(pow(rnup,2)+pow(rnub,2)/4);

for(i=1;i<=460;i++)
{if (i<=90)
rnu=i*0.1*1e8+1e8;
else if (i>90&& i<=390) rnu=(i-90)*0.01*1e9+1e9;
else if (i>390&& i<=450) rnu=(i-390)*0.1*1e9+4e9;
else if (i>450&& i<=460) rnu=(i-450)*0.1*1e10+1e10;
//frequency range for calculating intensity
if (rnup > rnu ) continue;
pemission0=&sumemission0;
pabsortion0=&sumabsortion0;
pemissionX=&sumemissionX;
pabsortionX=&sumabsortionX;
// the ordinary mode is set 1 and the extraordinary mode to -1
// in order to be called with these two values
mode0 = 1;
modeX = -1;

switch(pr)
{case 1:
mainpowerlaw(pabsortion0, pemission0 , rnu, rnub, rnup,
mode0, stheta,ctheta, gammamin, gammamax, p,rnux,Ntherm);
mainpowerlaw(pabsortionX, pemissionX , rnu, rnub, rnup,
modeX, stheta,ctheta, gammamin, gammamax, p,rnux,Ntherm);
//mainfunction calculates emission and absortion for power-law
//it is called for the ordinary mode and then for the extraordinarymode
break;
case 2:
epsilon=0.0;
p=0;
mainfunction(pabsortion0, pemission0 , rnu, rnub, rnup,
mode0, stheta, ctheta, gammamin, gammamax,temp, p, Ntherm, epsilon,rnux,pr);
mainfunction(pabsortionX, pemissionX , rnu, rnub, rnup,
modeX, stheta, ctheta, gammamin, gammamax,temp, p, Ntherm, epsilon,rnux,pr);
//mainfunction calculates emission and absortion for maxwellian
//it is called for the ordinary mode and then for the extraordinarymode
break;

```

```

case 3:
mainfunction(pabsortion0, pemption0 , rnu, rnub,
rnup,mode0, stheta, ctheta, gammamin, gammamax,temp, p, Ntherm, epsilon,rnux,pr);
mainfunction(pabsortionX, pemptionX , rnu, rnub,
rnup,modeX, stheta, ctheta, gammamin, gammamax,temp, p, Ntherm, epsilon,rnux,pr);
//mainfunction calculates emission and absortion for hybrid function
//it is called for the ordinary mode and then for the extraordinarymode
break;
}
//calculation of intensity of a voxel for the 0 mode
// as mentioned in paragraph 2.5 equation used 2.108
intensity0 =sumemission0 *(1-exp(-L*sumabsortion0))/sumabsortion0;
flux0 = intensity0 * area /Rs ;

if (sumemissionX!=0 && sumabsortionX!=0 )
{
//calculation of intensity of a voxel for the X mode
// as mentioned in paragraph 2.5 equation used 2.108
intensityX =
(sumemissionX) *(1-exp(-L*sumabsortionX))/sumabsortionX;
fluxX = intensityX * area /Rs ;
myfile3<<rnu<<" "<<fluxX<<endl;
cout<<rnu<<" "<<"fluxX = "<<fluxX<<endl;
//total intensity
intensitytotal=intensityX+intensity0;
}
else
{intensitytotal =intensity0; }
//intensity turned to flux in SFU
flux = intensitytotal * area /Rs ;

myfile1<<rnu<<" "<<flux<<endl;
myfile2<<rnu<<" "<<flux0<<endl;
if (sumemissionX==0)polarization = 1.0;
else
polarization=
(intensity0-intensityX)/(intensity0+intensityX);
//calculation of polarization
//eq.2.111 par.2.5
myfile4<<rnu<<" "<<polarization<<endl;

cout<<"rnu  "<<rnu<<"flux0 = "<<flux0<<endl;

```

```

cout<<"rnu  "<<rnu<<"polarization= "<<polarization<<endl;
cout<<"  "<<rnu<<" fluxtotal = "<<flux<<endl;

}
}
//turn energy values to relativistic factor gamma values

double turntogamma(double energy)
{double gvalue;
gvalue=(energy/511)+1;
return gvalue;}

//finding the number of bessell functions to include
//inside the limits of integration gammamin & gammamax
//initial value smin (lower bessell)
//function for calculating the lowest bessell
int sminimum(double rindx, double ctheta,double rnu,double rnub)
{double aterm,bterm;
int nsfix;
bterm=1-pow((rindx*ctheta),2);
if (bterm<0) {nsfix=1;} else {
aterm=(rnu/rnub)*sqrt(bterm);
nsfix = (int) ceil(aterm);}
return nsfix;
}

/*{-----}*/
//lowest bessell upper limit greater than gammamin
int nsminimum(int smin,double rindx, double ctheta,
double rnu,double rnub,double gammamin)
{int j,nsmin;
for(j=smin;j<=nsdim;j++)
{nsmin=j;
if (g2(rindx,ctheta,j,rnu,rnub)< gammamin) continue;
else break;
}
return nsmin;}

//max bessell lower limit lower than gammamax
int nsmaximum(int smin,double rindx, double ctheta,
double rnu,double rnub,double gammamax)
{int l,nsmax;
for(l=smin;l<=nsdim;l++)
{nsmax=l-1;

```

```

if (g1(rindx, ctheta,l, rnu,rnub)< gammamax ) continue;
else break ;}
return nsmax;}

//function for the calculation of gcritical
double gammacritical( double epsilon ,double temp)
{double pthermal,aterm,bterm,gvalue;
aterm=emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
pthermal = emass*clight/sqrt(aterm-1);
bterm=pow((pthermal/(emass*clight)),2);
gvalue = sqrt(1+(bterm/(epsilon-bterm*(1-epsilon))));
return gvalue;}

/*computation of a(th)*/
/*{-----}*/
double atheta(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode)
{double aterm,bterm,denom,deter,athet;
aterm=-pow((rnu/rnub)*stheta,2);
bterm=
2*(rnu/rnub)*ctheta*(pow((rnup/rnub),2)-pow((rnu/rnub),2));
deter=sqrt(pow(aterm,2)+pow(bterm,2));
if (mode==1) denom=aterm+deter; else denom=aterm-deter;
athet=-bterm/denom;
return athet;}
/*{-----}*/

/*computation of index of refraction n(th)*/
double getindex(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode)
{
double aterm,bterm,cterm,denom,deter,index,rindex;
aterm=pow((rnu/rnub),2)*pow(stheta,2);
bterm=2*(pow((rnup/rnub),2)-pow((rnu/rnub),2));
cterm=bterm*(rnu/rnub)*ctheta;
deter=pow(aterm,2)+pow(cterm,2);
if (mode==1)
denom=(-aterm)-((pow((rnu/rnub),2)*bterm))+sqrt(deter);
else
denom=(-aterm)-((pow((rnu/rnub),2)*bterm))-sqrt(deter);
if (denom == 0) index=Inf;else
index=1+(bterm*pow((rnup/rnub),2)/denom);
if (index<0) rindex=Inf; else

```



```

rindex=sqrt(index);
return rindex;}
/*{-----}*/
/*evaluating gamma1 and gamma2 of the integral*/
double g1(double rindx,double ctheta,int ns,double rnu ,double rnub)
{double x,y,z,deton,denom,g1;
x=ns*(rnub/rnu);
y=rindx*fabs(ctheta);
z=x*x+y*y;
deton=y*sqrt(z-1);
denom=x+deton;
g1=z/denom;
return g1;
}
/*{-----}*/

double g2(double rindx,double ctheta,int ns,double rnu, double rnub)
{double x,y,z,deton,denom,g2;
x=ns*(rnub/rnu);
y=rindx*fabs(ctheta);
z=x*x+y*y;
deton=y*sqrt(z-1);
denom=x-deton;
g2=z/denom;
return g2;
}
/*{-----}*/
/*{evaluation cos and sin of phi's}*/
double cphis(int ns ,double rnu,double rindx,
double gamma,double ctheta,double rnub)
{double aterm,bterm,cphis,beta;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ns*(rnub/rnu)/gamma;
aterm=1.0-aterm;
bterm=rindx*beta*ctheta;
cphis=aterm/bterm;
return cphis;}
double sphis(int ns ,double rnu,double rindx,
double gamma,double ctheta,double rnub)
{double sphis;
sphis=sqrt(1-pow(cphis(ns,rnu,rindx,gamma,ctheta,rnub),2));
return sphis;
}

```

```

}
/*{-----}*/
/*calling derivative of Bessel */
double dbessel(int l,double x)
{double bprime;
  if (l==0)
    bprime=-_jn(1,x);
  else
    bprime=0.5*(_jn(l-1,x)-_jn(l+1,x));
return bprime;
}
/*{-----}*/
// calculation of the density of nonthermal electrons
double Nnthermal(double temp,double Ntherm,double epsilon,int p)
{double aterm,bterm ,Nntherm,gcrit;
  aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
  bterm=pow((sqrt(aterm)),3)/(1+(15/(8*aterm)));
  gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
  Nntherm= Ntherm*sqrt(32*PI)*bterm;
  Nntherm =Nntherm*
  gcrit*(gcrit-1)*sqrt(pow(gcrit,2)-1)*exp(-aterm*(gcrit-1))/(p-1);
  return Nntherm ;
}/*{-----}*/
/*thermal-nonthermal (TNT) distribution function*/
/*thermal-part of distribution function*/

double thermal(int p,double gmin,double gmax,
double gamma,double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
  double aterm,bterm,fthermalpart,ftotal,gcrit,pthermal;
  double pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
  aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
  bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
  gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
  fthermalpart =
  sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*gamma*sqrt(pow(gamma,2)-1);
  fthermalpart =
  fthermalpart *exp(-aterm*(gamma-1))*bterm;
  fthermalpart =Ntherm*fthermalpart;
  pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
  pcritical=
  pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*

```

```

        pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma<gcrit)
Rsmooth=sin(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/
        (2* pow((gcrit-gRsmooth),2)));
else
if (gamma>=gcrit)Rsmooth=1;}
if (gamma >=gmin) ftotal=fthermalpart;
else ftotal=0;
return ftotal;}
/* nonthermal part of distribution function */

double nonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,fnonthermalpart,ftotal,gcrit,pthermal;
double pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=
pthermal/
        sqrt(epsilon-(1-epsilon)*pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
fnonthermalpart=
pow((gamma-1),-p)*(p-1)/
((pow((gcrit-1),1-p)-pow((gmax-1),1-p))*(4*PI));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma<gcrit)
Rsmooth=sin(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/
        (2* pow((gcrit-gRsmooth),2)));
else
if (gamma>=gcrit)Rsmooth=1;}
fnonthermalpart=
Rsmooth*Nnthermal(temp, Ntherm, epsilon, p)*fnonthermalpart;
if (gamma >=gmin) ftotal=fnonthermalpart;
else ftotal=0;
return ftotal;}

```

```

//derivative of power law to phi
double dhipowlaw()
{
    return 0;
}

//derivative of thermal-nonthermal part of distribution function
// thermal part derivative
double derthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)
{double aterm,bterm ,derfthermal,derftotal;
double gcrit,pthermal,pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammacritical(epsilon,temp);
derfthermal =
sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*
bterm*pow(gamma,2)*pow((pow(gamma,2)-1),(-1/2));
derfthermal =derfthermal
+ sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*
bterm*pow((pow(gamma,2)-1),(1/2));
derfthermal = derfthermal
-aterm*sqrt(2/PI)*pow((sqrt(aterm)),3)*
bterm*gamma*sqrt(pow(gamma,2)-1);
derfthermal =derfthermal *exp(-aterm*(gamma-1));
derfthermal =derfthermal*Ntherm;
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*
pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma< gcrit)
Rsmooth=
PI*(gamma-gRsmooth)*cos(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/((
2* pow((gcrit-gRsmooth),2)))/ pow((gcrit-gRsmooth),2);
else Rsmooth=1;}
if (gamma >=gmin) derftotal=derfthermal;
else derftotal=0;
return derftotal;
}

// derivative of nonthermal part distribution

```

```

double dernonthermal(int p,double gmin,double gmax,double gamma,
double temp,double Ntherm,double epsilon)
{double aterm,bterm ,derfnonthermal,derftotal;
double gcrit,pthermal,pcritical,pRsmooth,gRsmooth,Rsmooth;
aterm = emass*pow(clight,2)/(Kboltz*temp);
bterm=1/(1+(15/(8*aterm)));
gcrit=gammaacritical(epsilon,temp);
pthermal =emass*clight/sqrt(aterm-1);
pcritical=
pthermal/sqrt(epsilon-(1-epsilon)*
pow((pthermal/(emass*clight)),2));
pRsmooth=pcritical-pthermal/2;
gRsmooth=sqrt(1+pow((pRsmooth/(emass*clight)),2));
derfnonthermal=(-p)*pow((gamma-1),(-p-1))*(p-1)/
((pow((gcrit-1),1-p)-pow((gmax-1),1-p))*(4*PI));
if (gamma <= gRsmooth) Rsmooth=0;
else {if (gRsmooth <=gamma && gamma< gcrit)
Rsmooth=sin(PI*pow((gamma-gRsmooth),2)/
(2* pow((gcrit-gRsmooth),2)));
else Rsmooth=1;}
derfnonthermal=Rsmooth*
Nnthermal(temp, Ntherm, epsilon, p)*derfnonthermal;
if (gamma >=gmin) derftotal=derfnonthermal;
else derftotal=0;
return derftotal;
}
/*{-----}*/
/*power law distribution function*/
double powlaw(int p,double gmin,double gmax,double gamma)
{double f;
if (gamma >=gmin)
f=pow((gamma-1),-p)*(p-1)/
((pow((gmin-1),1-p)-pow((gmax-1),1-p))*(4*PI));
else f=0;
return f;}
//derivative of power law to gamma

double derpowlaw(int p,double gmin,double gmax,double gamma)
{double df;
if (gamma >=gmin)
df=(-p)*powlaw(p,gmin,gmax,gamma)/(gamma-1);
else df=0;

```

```

return df; }

//Get x's for the besseel functions
double getxs(int ns ,double rnu,double gamma,double rindx,
double stheta,double ctheta,double rnub)
{double aterm,bterm,beta,xs;
  beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
  aterm = rindx*ns*beta*stheta*sphis( ns , rnu,rindx, gamma, ctheta,rnub);
  bterm=1.0-(rindx*beta*ctheta*cphis(ns,rnu,rindx,gamma,ctheta,rnub));
  xs=aterm/bterm;
  return xs;}

//Get x's for the besseel functions
double conemis(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode)
{
  double cona;
  cona = 4*pow(PI,2)*pow(echarg,2)/clight;
  cona=cona*rnu/ctheta;
  cona=cona/(1+pow(atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode),2));
  return cona;
}

double conabsor(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rindx,double rnub,double rnup,int mode)
{
  double cona,conb,conabsor;
  cona = 4*pow(PI,2)*pow(echarg,2)/clight;
  conb=cona/emass;
  conabsor=conb/(rnu*rindx*abs(ctheta));
  conabsor=conabsor/(1+pow(atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode),2));
  return conabsor;
}

double conemispow(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rnub,double rnup,int mode,double Nntherm)
{
  double cona;
  cona = 4*pow(PI,2)*pow(echarg,2)*Nntherm/clight;
  cona=cona*rnu/ctheta;
  cona=cona/(1+pow(atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode),2));
  return cona;
}

```

```

double conabsorpow(double rnu,double stheta,double ctheta,
double rindx,double rnub,double rnup,int mode,double Nntherm)
{
double cona,conb,conabsor;
cona = 4*pow(PI,2)*pow(echarg,2)*Nntherm/clight;
conb=cona/emass;
conabsor=conb/(rnu*rindx*abs(ctheta));
conabsor=conabsor/(1+pow(atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode),2));
return conabsor;
}

// "numerical recipes in c++" Gaussian quadrature
// method for integration of function f
double qgauss(double a,double b, int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,
double rnub,double rnup, int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon,
double(*func)(double,int ,double, double ,double,double ,int ,double,double ,
double ,double , int ,double,double,double ))
{
    int m,i,j,n;
    double z1,z,pp,p3,p2,p1,xr,xm,dx,s,x[257],w[257];
    n=256;
    m=(n+1)/2;
xm=0.5*(b+a);
    xr=0.5*(b-a);
    for(i=1;i<=m;i++)
    {
        z=cos(3.141592654*(i-0.25)/(n+0.5));
        do {
            p1=1.0;
            p2=0.0;
            for(j=1;j<=n;j++){
                p3=p2;
                p2=p1;
                p1=((2.0*j-1.0)*z*p2-(j-1.0)*p3)/j;
            }

            pp=n*(z*p1-p2)/(z*z-1.0);
            z1=z;
            z=z1-p1/pp;
        }while(fabs(z-z1)>EPS);
        x[i]=xm-xr*z;
        x[n+1-i]=xm+xr*z;
    }
}

```

```

        w[i]=2.0*xr/((1.0-z*z)*pp*pp);
        w[n+1-i]=w[i];}

s=0;
    for(j=1;j<=256;j++)
    {
        dx=xr*x[j];
s += w[j]*((*func)( x[j],ns,rnu, rindx, ctheta, stheta, p,gmin,
                    gmax, rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon));
    }
    return s ;
}

double gausspowerlaw(double a,double b, int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,double gmin,
double gmax,double rnub,double rnup, int mode,
double(*func)(double,int ,double, double ,double,double ,int ,
double,double ,double ,double , int ))
{
    int m,i,j,n;
    double z1,z,pp,p3,p2,p1,xr,xm,dx,s,x[501],w[501];
    n=500;
    m=(n+1)/2;
xm=0.5*(b+a);
    xr=0.5*(b-a);
    for(i=1;i<=m;i++)
    {
        z=cos(3.141592654*(i-0.25)/(n+0.5));
        do {
            p1=1.0;
            p2=0.0;
            for(j=1;j<=n;j++){
                p3=p2;
                p2=p1;
                p1=((2.0*j-1.0)*z*p2-(j-1.0)*p3)/j;
            }

            pp=n*(z*p1-p2)/(z*z-1.0);
            z1=z;
            z=z1-p1/pp;
        }while(fabs(z-z1)>EPS);
        x[i]=xm-xr*z;
    }
}

```



```

        x[n+1-i]=xm+xr*z;
        w[i]=2.0*xr/((1.0-z*z)*pp*pp);
        w[n+1-i]=w[i];}

s=0;
    for(j=1;j<=500;j++)
    {
        dx=xr*x[j];
s += w[j]*((*func)( x[j],ns,rnu, rindx, ctheta, stheta, p,
                    gmin,gmax, rnub, rnup, mode));
    }
    return s ;
}

//common term on the integrand
double emissionthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,double rnub,
double rnup, int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,emissionthermal;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-
beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode)*
aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
emissionthermal=thermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)*
pow(integr,2)/beta;
return emissionthermal;
}

double absortionthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,double rnub,
double rnup, int mode, double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,absortionthermal,aterm,b1term;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)
-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=
atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode)*

```

```

aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
alterm=((rindx*beta*ctheta)-cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
alterm=alterm/(pow(beta,2)*gamma*
sphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
b1term=(1+(1/pow(beta,2)))/gamma;
absortionthermal=
(b1term*thermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)
-derthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon))+
(alterm*dhipowlaw());
absortionthermal=absortionthermal*pow(integr,2)/beta;
return absortionthermal;
}

double emissionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,double rnub,
double rnup, int mode,double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,emissionnonthermal;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)
-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=
atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode)*
aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
emissionnonthermal=nonthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)
*pow(integr,2)/beta;
return emissionnonthermal;
}

double absortionnonthermal(double gamma,int ns,double rnu,
double rindx, double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,
double rnub,double rnup, int mode, double temp,double Ntherm,double epsilon)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,absortionnonthermal,alterm,b1term;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)
/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode)*
aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
alterm=((rindx*beta*ctheta)-cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));

```

```

alterm=alterm/(pow(beta,2)*gamma*sphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
b1term=(1+(1/pow(beta,2)))/gamma;
absortionnonthermal=
(b1term*nonthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon)
-dernonthermal(p, gmin,gmax, gamma,temp,Ntherm,epsilon))
+(alterm*dhipowlaw());
absortionnonthermal=absortionnonthermal*pow(integr,2)/beta;
return absortionnonthermal;
}

double emissionpowerlaw(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,
double rnub,double rnup, int mode)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,emission;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)
/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode)*
aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
emission=powlaw(p, gmin,gmax, gamma)*pow(integr,2)/beta;
return emission;
}

double absortionpowerlaw(double gamma,int ns,double rnu,double rindx,
double ctheta,double stheta,int p,double gmin,double gmax,
double rnub,double rnup, int mode)
{
double aterm,bterm,beta,integr,xs,absortion,alterm,b1term;
beta=sqrt(1-(1/pow(gamma,2)));
aterm=ctheta/(rindx*stheta)-beta*cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub)
/ctheta;
bterm=beta*sphis(ns , rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub);
xs=getxs(ns , rnu,gamma, rindx, stheta, ctheta,rnub);
integr=
atheta( rnu, stheta, ctheta, rnub, rnup, mode)*
aterm*_jn(ns,xs)-bterm*dbessel(ns,xs);
alterm=((rindx*beta*ctheta)-cphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
alterm=alterm/(pow(beta,2)*gamma*sphis( ns, rnu, rindx, gamma, ctheta,rnub));
b1term=(1+(1/pow(beta,2)))/gamma;
absortion=
(b1term*powlaw(p, gmin,gmax, gamma)-derpowlaw( p, gmin,gmax, gamma))

```

```

+(alterm*dhipowlaw());
absortion=absortion*pow(integr,2)/beta;
return absortion;
}

void mainfunction(double *pabsortion,double *pemission , double rnu,
double rnub,double rnup,int mode,double stheta,double ctheta,
double gammamin,double gammamax,double temp,int p,double Ntherm,
double epsilon,double rnux,int pr)
{double rindx,gmin,gmax,endpointlow,endpointhigh;
double emissiontherm,absortiontherm;
double emissionnontherm,sumemission,sumabsortion,absortionnontherm;
int ns,smin,nsmin,nsmax;

gmin=gammamin;
gmax=gammamax;
rindx = getindex(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode);
smin= sminimum( rindx,  ctheta, rnu,rnub);
nsmin= nsminimum( smin, rindx,  ctheta, rnu, rnub, gammamin);
nsmax=nsmaximum(smin, rindx, ctheta, rnu, rnub, gammamax);
sumabsortion=0;
sumemission=0;

for(ns = nsmin;ns<=nsmax;ns++)

{

if (mode == 1)
{if (rnup > rnu )
{sumemission=0;
sumabsortion=0;

continue;}}
else
{if (rnux > rnu)
{
sumemission=0;
sumabsortion=0;

continue;}}

endpointlow= max(g1(rindx, ctheta,ns, rnu,rnub),gammamin);

```

```

endpointhigh= min(g2(rindx, ctheta,ns, rnu,rnub),gammamax);

if (endpointlow >=endpointhigh)
{switch(pr)
{
case 2: emissiontherm=0;
          absortiontherm=0;
          break;
case 3:emissiontherm=0;
          absortiontherm=0;
          emissionnontherm=0;
          absortionnontherm=0;
          break;

}}
else
{switch(pr)
{
case 2:
emissiontherm = conemis( rnu, stheta, ctheta,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax, rnub, rnup, mode ,temp,Ntherm,epsilon,emissionthermal);
absortiontherm=conabsor( rnu, stheta, ctheta,rindx,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax,rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon, absortionthermal);
if ( emissiontherm >= 1e-500 && absortiontherm >= 1e-500)
{
sumemission=emissiontherm+sumemission;
sumabsortion=absortiontherm+sumabsortion;
}
else
{break;}
break;
case 3:
emissiontherm = conemis( rnu, stheta, ctheta,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax, rnub, rnup, mode ,temp,Ntherm,epsilon,emissionthermal);
absortiontherm=conabsor( rnu, stheta, ctheta,rindx,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax,rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon, absortionthermal);
emissionnontherm = conemis( rnu, stheta, ctheta,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,

```

```

p,gmin,gmax, rnub, rnup, mode ,temp,Ntherm,epsilon,emissionnonthermal);
absortionnontherm=conabsor( rnu, stheta, ctheta,rindx,rnub,rnup,mode)*
qgauss(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax,rnub, rnup, mode,temp,Ntherm,epsilon, absortionnonthermal);
if ( emissiontherm >= 1e-500 && absortiontherm >= 1e-500
    && emissionnontherm >= 1e-500 && absortionnontherm >= 1e-500 )
{
sumemission=emissiontherm+emissionnontherm+sumemission;
sumabsortion=sumabsortion+absortiontherm+absortionnontherm;
}
else
{break;}
break;
}
}
}
*pemission=sumemission;
*pabsortion=sumabsortion;
}

void mainpowerlaw(double *pabsortion,double *pemission , double rnu,
double rnub,double rnup,int mode,double stheta,double ctheta,
double gammamin,double gammamax,int p,double rnux,double Nntherm)
{
double rindx,gmin,gmax,endpointlow,endpointhigh;
double emission,absortion;
double sumemission,sumabsortion;
int ns,nsmin,nsmax,smin;

gmin=gammamin;
gmax=gammamax;
rindx = getindex(rnu,stheta,ctheta,rnub,rnup,mode);
smin= sminimum( rindx, ctheta, rnu,rnub);
nsmin= nsminimum( smin, rindx, ctheta, rnu, rnub, gammamin);
nsmax=nsmaximum(smin, rindx, ctheta, rnu, rnub, gammamax);
sumabsortion=0;
sumemission=0;

for(ns = nsmin;ns<=nsmax;ns++)

{

```

```

if (mode == 1)
{if (rnup > rnu )
{sumemission=0;
sumabsortion=0;

continue;}}
} else
{if (rnux > rnu)
{
sumemission=0;
sumabsortion=0;

continue;}}

endpointlow= max(g1(rindx, ctheta,ns, rnu,rnub),gammamin);
endpointhigh= min(g2(rindx, ctheta,ns, rnu,rnub),gammamax);

if (endpointlow >=endpointhigh)
{emission=0;
absortion=0;
}
else
{emission = conemispow( rnu, stheta, ctheta,rnub,rnup,mode,Nntherm)*
gausspowerlaw(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax, rnub, rnup, mode ,emissionpowerlaw);
absortion= conabsorpow( rnu, stheta, ctheta,rindx,rnub,rnup,mode,Nntherm)*
gausspowerlaw(endpointlow,endpointhigh, ns, rnu, rindx, ctheta, stheta,
p,gmin,gmax,rnub, rnup, mode, absortionpowerlaw);

if ( emission >= 1e-80 && absortion >= 1e-80)
{

sumemission=emission+sumemission;
sumabsortion=sumabsortion+absortion;

}
else
{break;}
}
}

*pemission=sumemission;

```

```
*pabsortion=sumabsortion;  
}
```

Βιβλιογραφία

- [1] Bekefi G. *Radiation Processes in Plasmas*. New York : John Wiley and Sons, 1966.
- [2] Benka Stephen G. and Holman Gordon D. A thermal/nonthermal model for solar microwave bursts. *Astrophysical journal*, 391:854–864, June 1992.
- [3] Benka Stephen G. and Holman Gordon D. A thermal/nonthermal model for solar hard X-ray bursts. *Astrophysical journal*, 435:469–481, Nov 1994.
- [4] Dulk George A. and Marsh Kenneth A. Simplified expressions for the gyrosynchrotron radiation from mildly relativistic , nonthermal and thermal electrons. *Astrophysical Journal*, 259:350–358, Aug 1982.
- [5] Ginzburg V.L. *The propagation of electromagnetic waves in plasmas*. New York : Pergamon Press, 1964.
- [6] Holman Gordon D . The effects of high-energy cutoffs on solar flare microwave and hard X-ray spectra. *Astrophysical journal*, 586:606–616, March 2003.
- [7] Klein K.L and Trotter G. Gyrosynchrotron radiation from a source with spatially varying field and density. *Astronomy and Astrophysics*, 141:67–76, May 1984.
- [8] Landau L.D and Lifshitz E.M. *The classical theory of fields*. New York : Pergamon Press, 1962.
- [9] Liemohn H.B. Radiation from electrons in magnetoplasma. *Journal of Research - Radio Sc.*, 69D:741, 1965.
- [10] Mansfield V.N. Radiation from a charged particle spiraling in a cold magnetoplasma. *Astrophysical Journal*, 147:672, 1967.
- [11] Pawsey T.L and Bracewell R.N. *Radio Astronomy*. London : Clarendon Press, 1955.
- [12] Petrosian Vahe . Synchrotron emissivity from mildly relativistic particles. *Astrophysical journal*, 251:727–738, Dec 1981.
- [13] Ramaty Reuven. Gyrosynchrotron emission and absorption in magnetoactive plasma. *Astrophysical journal*, 158, Nov 1969.
- [14] Simões P.J.A and Costa J.E.R. Solar bursts gyrosynchrotron emission from three-dimensional sources. *Astronomy and Astrophysics*, 453:729–736, Feb 2006.

- [15] Takakura Tatsuo. Synchrotron Radiation from intermediate energy electrons and solar radio outbursts at microwave frequencies. *Astronomical Society of Japan*, 12:325, April 1960.
- [16] Trulsen J. and Fejer J.A. Radiation from a charged particle in magnetoplasma. *Journal of Plasma Physics*, 4:825–841, 1970.