

ΑΣΤΡΟΦΥΣΙΚΗ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΞΑΣΚΗΣΗ

10/10/2012

- 1) Υποθέστε ότι ένα ιδανικό ρευστό με καταστατική εξίσωση $P = \kappa \rho^\gamma$ βρίσκεται σε ομογενές βαρυτικό πεδίο $\vec{g} = -g \hat{e}_z$ σε ισορροπία (με όλες τις μεταβλητές ανεξάρτητες των x και y), ($\kappa, \gamma \neq 0$).
- α) Βρείτε την κατανομή της πυκνότητας, εάν για $z=0$ είναι $\rho = \rho_0$.
- β) Απλοποιείστε την παραπάνω έκφραση, εάν η πυκνότητα μηδενίζεται για $z=R$.
- γ) Για ένα ισόθερμο αέριο ($P = \kappa \rho$), σε ποιά απόσταση μηδενίζεται η πυκνότητα;

- 2) Ένας αστέρας εκτελεί μόνιμη περιστροφή γύρω από άξονα συμμετρίας, με ομογενή γωνιακή ταχύτητα Ω . Υποθέστε ότι ο αστέρας είναι ένα ιδανικό ρευστό και ότι η μόνη δύναμη μάζας που δρα σε αυτό είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας $\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi$, όπου Φ το βαρυτικό δυναμικό ανά μονάδα μάζας. Δείξτε ότι σε κυλινδρικές συντεταγμένες (ϖ, φ, z) οι εξισώσεις κίνησης του ρευστού ανάγονται στο σύστημα

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varpi} + \Omega^2 \varpi$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ΣΗΜ. Προσέξτε την παραγωγή των μοναδιαίων διανυσμάτων σε κυλινδρικές συντεταγμένες!

- 3) Ως συνέχεια της προηγούμενης άσκησης (με τα ίδια δεδομένα), δείξτε πως αν το ρευστό είναι βαροτροπικό, ώστε να ορίζεται η συνάρτηση $H = \int \frac{dp}{\rho}$, τότε υπάρχει το ολοκλήρωμα κίνησης

$$\Phi - \frac{v^2}{2} + H = \text{σταθ.}$$

(σταθερό σε όλη την έκταση του αστέρα), όπου v είναι το μέτρο της ταχύτητας του ρευστού.

- 4) Ένας αστέρας εκτελεί μόνιμη περιστροφή γύρω από άξονα συμμετρίας, με μη-ομογενή γωνιακή ταχύτητα Ω . Χρησιμοποιήστε τις εξισώσεις που περιγράφουν την υδροστατική ισορροπία (στο αδρανειακό σύστημα) σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \varpi} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \varpi} + \Omega^2 \varpi$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

για να δείξετε ότι εάν η καταστατική εξίσωση είναι βαροτροπική, τότε αναγκαστικά ισχύει $\Omega = \Omega(\varpi)$, δηλαδή υπάρχει κυλινδρική διαστρωμάτωση στη γωνιακή ταχύτητα.