

# Αστροφυσική

## Ασκήσεις για εξάσκηση - 2

**1)** Η λαμπρότητα ενός λευκού νάνου με τη μέγιστη δυνατή μάζα είναι  $L = 0.04L_{\odot}$ , ενώ η επιφανειακή του θερμοκρασία είναι  $T = 30,000K$ . Υπολογίστε, κατά προσέγγιση, την ακτίνα του λευκού νάνου, τη μέση πυκνότητά του και την επιτάχυνση της βαρύτητας στην επιφάνειά του, με μονάδες τις αντίστοιχες Ηλιακές ποσότητες.

**2)** Χρησιμοποιώντας την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας κάνετε μια εκτίμηση για τη σχέση μάζας-ακτίνας των λευκών νάνων α) στο μη-σχετικιστικό όριο και β) στο σχετικιστικό όριο.

**3)** Η καταστατική εξίσωση για έναν λευκό νάνο μπορεί να περιγραφεί από μια πολυτροπική εξίσωση της μορφής  $P = K\rho^{\gamma}$ , όπου  $K$  και  $\gamma$  σταθερές. Η εξίσωση της υδροστατικής ισορροπίας μπορεί να γραφεί τότε στη μορφή της γνωστής εξίσωσης Lane-Emden

$$\frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left( \xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \right) + \theta^{1/(\gamma-1)} = 0,$$

όπου  $\theta$  και  $\xi$  είναι αδιάστατες μεταβλητές, εάν γίνει ένας μετασχηματισμός μεταβλητών της μορφής

$$\begin{aligned} r &= a\xi, \\ \rho &= \rho_c \theta^{1/(\gamma-1)}, \end{aligned} \tag{1}$$

όπου  $\rho_c$  είναι η κεντρική πυκνότητα και  $a$  μία σταθερά. Να υπολογισθούν: α) η σταθερά  $a$  (και άρα η ακτίνα  $R$  του αστέρα) και β) η μάζα  $M$  του αστέρα.

**4)** Υπολογίστε το όριο μάζας του Chandrasekhar για τους λευκούς νάνους, χρησιμοποιώντας την κατάλληλη πολυτροπική εξίσωση. Δίνεται ότι για  $\gamma = 4/3$  η λύση της εξίσωσης Lane-Emden μηδενίζεται για πρώτη φορά στο  $\xi_1 = 6.9$ , όπου  $\xi_1^2 |\theta'(\xi_1)| = 2.02$ .

**5)** Θεωρήστε έναν 'αστέρα' με *κυλινδρική*, συμμετρία, σε ένα σύστημα συντεταγμένων  $(\varpi, \phi, z)$ , ο οποίος περιστρέφεται περί τον άξονά του με μη-ομογενή γωνιακή ταχύτητα  $\Omega$ . Κάνοντας τις ίδιες παραδοχές με την περίπτωση της εξίσωσης Lane-Emden, δηλαδή

$P = k\rho^\gamma$ ,  $\rho = \rho_c \theta^{1/(\gamma-1)}$ ,  $\varpi = \sqrt{\gamma k \rho_c^{\gamma-2} / [(\gamma-1)4\pi G] \xi}$  και με την επιπλέον υπόθεση  $\Omega = \sqrt{4\pi G \rho_c} \bar{\Omega}$ , δείξτε ότι η αντίστοιχη αδιάστατη εξίσωση που περιγράφει την υδροστατική ισορροπία είναι η

$$\frac{d^2\theta}{d\varpi^2} + \frac{1}{\varpi} \frac{d\theta}{d\varpi} + \theta^{1/(\gamma-1)} = 2\bar{\Omega} \frac{d}{d\xi} (\xi\bar{\Omega}).$$

**6)** Το βαρυτικό δυναμικό σε σφαιρική συμμετρία είναι  $\Phi = -GM/r$  και σχετίζεται με την επιτάχυνση της βαρύτητας μέσω της σχέσης  $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$ . Υποθέστε ότι ένας σφαιρικός αστέρας περιγράφεται από την πολυτροπική καταστατική εξίσωση  $P = K\rho^\gamma$ . α) Χρησιμοποιώντας την εξίσωση υδροστατικής ισορροπίας, βρείτε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ του βαρυτικού δυναμικού και της πυκνότητας μάζας  $\rho$ , υποθέτοντας ότι το δυναμικό μηδενίζεται στην επιφάνεια του αστέρα. β) Δώστε μια φυσική ερμηνεία στη συνάρτηση  $\theta$  της εξίσωσης Lane-Emden, που ορίζεται από τη σχέση  $\rho = \rho_c \theta^{1/(\gamma-1)}$ , όπου  $\rho_c$  είναι η κεντρική πυκνότητα του αστέρα.