ΚΕΦ 5ο: ΟΙ ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΓΘΣ

Α. Οι Γενική Θεωρία Σχετικότητας αποτελείται από ένα σύνολο αρχών.

1. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑΣ

Ένας ελεύθερος παρατηρητής που κινείται υπό την επίδραση ενός βαρυτικού πεδίου δεν μπορεί με κανένα πείραμα να διακρίνει εάν επιταχύνεται λόγω του βαρυτικού πεδίου ή λόγω κάποιας άλλης επιτάχυνσης που ασκείται σε αυτόν (ισοδυναμία βαρύτητας με επιτάχυνση). Η αρχή αυτή ισοδυναμεί με την παραδοχή ότι η βαρυτική μάζα ισούται με τη μάζα αδράνειας.

2. ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΣΥΝΑΛΛΟΙΩΤΟΥ (ΑΡΧΗ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ)

Οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές. Η μαθηματική έκφραση αυτής της αρχής είναι ότι όλες οι εξισώσεις της φυσικής μπορούν να γραφούν σε συναλλοίωτη τανυστική μορφή, ενώ η παράγωγος που διατηρείται συναλλοίωτη είναι η συναλλοίωτη παράγωγος.

3. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΗΣ ΒΑΡΥΤΙΚΗΣ ΣΥΖΕΥΞΗΣ

Για να γράψουμε ένα φυσικό νόμο στη ΓΘΣ γενικεύουμε τον αντίστοιχο νόμο στο όριο της ΕΘΣ, χρησιμοποιώντας μόνο τους ελάχιστα απαραίτητους όρους που σχετίζονται με τη βαρύτητα

Παράδειγμα: Αν ένας νόμος γράφεται $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta}=0$ στην ΕΘΣ, τότε η γενίκευσή του είναι απλά

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$$

(η βαρύτητα εισέρχεται μόνο στη συναλλοίωτη παράγωγο μέσω των συμβόλων Christoffel).

Άλλες πιο περίπλοκες γενικεύσεις, οι οποίες καταλήγουν στο ίδιο όριο της ΕΘΣ εν απουσία βαρύτητας, όπως π.χ.

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} + g^{\beta\varepsilon} R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} T^{\gamma\delta}{}_{;\varepsilon}=0$$

δεν προτιμώνται.

4. ΑΡΧΗ ΤΗΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΑΣ

Η ΓΘΣ πρέπει να καταλήγει στις γνωστές εξισώσεις της ΕΘΣ ή της Νευτώνειας Θεωρίας για ασθενή βαρυτικά πεδία ή χαμηλές ταχύτητες και ασθενή βαρυτικά πεδία, αντιστοίχως. Δηλαδή:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{ΓΘΣ}} \arrow[r, "\frac{M}{R}\ll 1" below, "\text{και } v\ll 1" below] \arrow[d, "\frac{M}{R}\to 0" left] & \boxed{\text{Νευτώνεια Βαρύτητα}} \\
\boxed{\text{ΕΘΣ}} &
\end{tikzcd}$$

5. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΟΥ EINSTEIN

Η γενίκευση της εξίσωσης Poisson της Νευτώνειας Θεωρίας ($\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$) είναι η

$$\boxed{G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}}$$

όπου $T_{\alpha\beta}$ είναι ο τανυστής ενέργειας-ορμής.

Β. ΤΑΝΥΣΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ-ΟΡΜΗΣ

Ο τανυστής ενέργειας-ορμής είναι η γενίκευση της Νευτώνειας πυκνότητας μάζας ρ. Στη ΓΘΣ κάθε μορφή ενέργειας καμπυλώνει το χώρο. Οπότε, π.χ. για ένα ιδανικό ρευστό συνολικής πυκνότητας ενέργειας $\mathcal{E}$ και πίεσης P ο τανυστής $T_{\alpha\beta}$ γράφεται

$$\boxed{T^{\alpha\beta} = (\mathcal{E}+P)\, u^{\alpha} u^{\beta} + P g^{\alpha\beta}}$$

όπου u^{α} η 4-ταχύτητα του ρευστού.
(η ολική πυκνότητα ενέργειας $\mathcal{E}$ είναι το άθροισμα της πυκνότητας μάζας ρ (επί c^2) και όλων των άλλων ενεργειών που μπορεί να έχει ένα ρευστό (θερμική ενέργεια, ενέργεια αλληλεπίδρασης μεταξύ των ατόμων κλπ.)).

Η πυκνότητα ενέργειας που μετρά ένας παρατηρητής με 4-ταχύτητα $u^{\alpha}_{\pi\alpha\rho}$ είναι

$$\boxed{\mathcal{E}_{\pi\alpha\rho} = T_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}_{\pi\alpha\rho}\, u^{\beta}_{\pi\alpha\rho}}$$

Έτσι, για το ίδιο το ρευστό (δηλ. για έναν παρατηρητή που κινείται με την 4-ταχύτητα u^{α} του ρευστού) ισχύει

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\pi\alpha\rho} &= T_{\alpha\beta}\, u^{\alpha} u^{\beta} \\
&= (\mathcal{E}+P)\, u_{\alpha} u_{\beta} u^{\alpha} u^{\beta} + P g_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \\
&= (\mathcal{E}+P)(-1)(-1) + P(-1) \\
&= \mathcal{E}
\end{aligned}$$

Άρα, $\mathcal{E}$ είναι η πυκνότητα ενέργειας ως προς έναν παρατηρητή που κινείται μαζί με το ρευστό.

Μελετώντας τη φυσική σημασία των διαφόρων συνιστωσών του $T_{\alpha\beta}$ βρίσκουμε ότι:

$$T^{ti} = \text{ροή ενέργειας} = \frac{\text{ενέργεια}}{\text{επιφάνεια} \cdot \text{χρόνος}}$$

$$T^{it} = \text{πυκνότητα ορμής} \Leftrightarrow \text{ροή ενέργειας}$$

$$\underset{(i,j\neq t)}{T^{ij}} = \text{τανυστής τάσης} = \frac{\text{i-συνιστώσα της δύναμης ανά μονάδα επιφανείας}}{\text{κάθετα σε επιφάνεια με κάθετο διάνυσμα } /\!/ j}$$

Γ. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΤΟΥ ΤΑΝΥΣΤΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ-ΟΡΜΗΣ

Οι νόμοι διατήρησης της ενέργειας και της ορμής εκφράζονται από τη σχέση

$$\boxed{T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0}$$

(στην ΕΘΣ ισχύει $T^{\alpha\beta}{}_{,\beta} = 0$, ενώ στο Νευτώνειο όριο ανάγονται στην εξίσωση συνέχειας και τις εξισώσεις κίνησης Euler).

Δ. ΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΠΕΔΙΟΥ ΤΟΥ EINSTEIN

Θέλοντας να γενικεύσουμε την εξίσωση Poisson ($\nabla^2\varphi = 4\pi G\rho$) θα μπορούσαμε να γράψουμε πιο γενικά

$$R_{\alpha\beta} + \lambda g_{\alpha\beta} R = \kappa T_{\alpha\beta}$$

όπου λ, κ σταθερές. Εφ' όσον ισχύει $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$ θα ισχύει επίσης

$$\left(R^{\alpha\beta} + \lambda g^{\alpha\beta} R\right)_{;\beta} = 0$$

Όμως, από τις ταυτότητες Bianchi, ισχύει η σχέση

$$\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R\right)_{;\beta} = 0$$

Για να είναι οι εξισώσεις πεδίου συμβατές με τις ταυτότητες Bianchi, θα πρέπει αναγκαστικά η τιμή της σταθεράς λ να είναι

$$\lambda = -1/2$$

Επίσης, για να ανάγονται οι εξισώσεις πεδίου στην εξίσωση Poisson στο Νευτώνειο όριο θα πρέπει η σταθερά κ αναγκαστικά να είναι ίση με

$$\kappa = 8\pi G \qquad \text{(όπου θεωρούμε } c=1\text{)}$$

ή

$$\kappa = 8\pi \quad \text{για } G = c = 1.$$

Έτσι προκύπτουν οι εξισώσεις πεδίου

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

Ε. ΚΟΣΜΟΛΟΓΙΚΗ ΣΤΑΘΕΡΑ

Ακόμη πιο γενικά κι εφ' όσον $g_{\alpha\beta;\gamma} = 0$, μπορούμε να προσθέσουμε όρους ανάλογους της $g_{\alpha\beta}$ στις εξισώσεις πεδίου και να ισχύει πάλι $G_{\alpha\beta}{}^{;\beta} = 0$, δηλ. μπορούμε να γράψουμε

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R + \Lambda g_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

όπου Λ κάποια σταθερά. Η πιο γενική αυτή μορφή των εξισώσεων πεδίου χρησιμοποιείται στην κοσμολογία καθώς το Λ (κοσμολογική σταθερά) αν δεν είναι ακριβώς μηδέν, πρέπει να έχει μικρή τιμή, ώστε η επίδρασή του να γίνεται αντιληπτή μόνο σε κοσμολογικές αποστάσεις.

Εάν μεταφέρουμε τον όρο $\Lambda g_{\alpha\beta}$ στο δεξί μέλος, δηλ.

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{\Lambda}{8\pi} g_{\alpha\beta} \right)$$

τότε μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον όρο $-\frac{\Lambda}{8\pi} g_{\alpha\beta}$ ως την ενέργεια του κενού χώρου.

ΣΤ. ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΠΕΔΙΟΥ ΣΤΟ ΚΕΝΟ

Μία εναλλακτική μορφή των εξισώσεων πεδίου προκύπτει ως εξής:

$$G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$\Leftrightarrow \quad R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} R = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad R_{\alpha}{}^{\alpha} - \frac{1}{2} g_{\alpha}{}^{\alpha} R = 8\pi T_{\alpha}{}^{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad R - \frac{4}{2} R = 8\pi T \qquad (g_{\alpha}{}^{\alpha} = \delta_{\alpha}{}^{\alpha} = 4)$$

$$\Rightarrow \quad R = -8\pi T$$

όπου θέσαμε $T_{\alpha}{}^{\alpha} \equiv T$. Οπότε:

$$R_{\alpha\beta} + \frac{8\pi}{2} g_{\alpha\beta} T = 8\pi T_{\alpha\beta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R_{\alpha\beta} = 8\pi \left(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} T \right)}$$

Έτσι, στο κενό, όπου $T_{\alpha\beta} = 0$, $T = 0$ ισχύει $R = 0$ και

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = 0}$$

Η τελευταία σχέση είναι απλούστερη της $G_{\alpha\beta} = 0$.

Ζ. ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ - ΟΡΜΗΣ

Η διατήρηση του τανυστή ενέργειας-ορμής, δηλ. η εξίσωση

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$$

μπορεί να αναλυθεί σε δυο ανεξάρτητες εξισώσεις. Η μία (βαθμωτή) εξίσωση προκύπτει από την προβολή της εξίσωσης στην 4-ταχύτητα u^α, δηλ.

$$u_\alpha T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$$

$$\Rightarrow u_\alpha\left[(\varepsilon+P)_{;\beta}u^\alpha u^\beta+(\varepsilon+P)\left(u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta+u^\alpha u^\beta{}_{;\beta}\right)+P_{;\beta}g^{\alpha\beta}\right]=0$$

$$\Rightarrow -(\varepsilon+\cancel{P})_{;\beta}u^\beta+(\varepsilon+P)\left(u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta-u^\beta{}_{;\beta}\right)+\cancel{P_{;\beta}u^\beta}=0$$

Αλλά

$$u^\alpha u_\alpha=-1$$

$$\Rightarrow u^\beta(u^\alpha u_\alpha)_{;\beta}=0$$

$$\Rightarrow u^\beta u^\alpha u_{\alpha;\beta}+u^\beta u^\alpha{}_{;\beta}u_\alpha=0$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\,u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta=0$$

Οπότε προκύπτει

$$\boxed{\varepsilon_{;\beta}u^\beta+(\varepsilon+P)u^\beta{}_{;\beta}=0}$$

Η εξίσωση εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας (στην περίπτωση ισεντροπικής ροής συμπίπτει με τη διατήρηση του αριθμού των βαρυονίων). Στο Νευτώνειο όριο γίνεται

$$\frac{D\rho}{Dt}+\rho\,\mathrm{div}\vec{v}=0$$

που είναι η γνωστή εξίσωση συνέχειας της κλασσικής υδροδυναμικής.

Η άλλη (δικτυσματική) εξίσωση προκύπτει από την προβολή της $T^{\alpha\beta}{}_{;\beta}=0$ κάθετα προς την u^α. Προς τούτο, ορίζουμε τον τανυστή προβολής

$$h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$$

ο οποίος έχει την ιδιότητα

$$h_{\alpha\beta}u^\alpha = g_{\alpha\beta}u^\alpha + u_\alpha u_\beta u^\alpha$$

$$= u_\beta - u_\beta \qquad (u_\alpha u^\alpha = -1)$$

$$\Rightarrow h_{\alpha\beta}u^\alpha = 0$$

οπότε,

$$h_{\alpha\gamma}T^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow h_{\alpha\gamma}\left[(\varepsilon+P)_{;\beta}u^\alpha u^\beta + (\varepsilon+P)(u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + u^\alpha u^\beta{}_{;\beta}) + P_{;\beta}g^{\alpha\beta}\right]=0$$

$$\Rightarrow h_{\alpha\gamma}(\varepsilon+P)u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + h_{\alpha\gamma}P_{;\beta}g^{\alpha\beta} = 0$$

$$\Rightarrow (g_{\alpha\gamma}+u_\alpha u_\gamma)(\varepsilon+P)u^\alpha{}_{;\beta}u^\beta + h^\beta{}_\gamma P_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow (\varepsilon+P)u_{\gamma;\beta}u^\beta + (\varepsilon+P)u_\gamma \overset{0}{\cancel{u_\alpha u^\alpha{}_{;\beta}}}u^\beta + h^\beta{}_\gamma P_{;\beta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{\alpha;\beta}u^\beta = -\frac{h^\beta{}_\alpha P_{;\beta}}{\varepsilon+P}}$$

Η εξίσωση αυτή εκφράζει τη διατήρηση της ορμής και στο Νευτώνειο όριο γίνεται

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}P}{\rho}$$

όπου $\vec{g}$ η επιτάχυνση του πεδίου βαρύτητας, που είναι η γνωστή εξίσωση κίνησης Euler της κλασσικής υδροδυναμικής.