

ΚΕΦ. 8ο: ΣΗΜΑΝΤΙΑ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΙΜΑ
ΣΧΕΤΙΜΙΣΤΙΚΑ ΦΑΙΝΟΜΕΝΑ
ΣΤΗ ΜΕΤΡΙΚΗ SCHWARZSCHILD

A. ΜΕΤΑΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΕΡΙΑΣΤΡΟΥ ΔΕΣΜΙΑΣ ΤΡΟΧΙΑΣ

Στη ΓΘΣ ελλειπτικές τροχιές γύρω από ένα κέντρο μάζας δεν είναι κλειστές, αλλά υπάρχει μια μεταπτώση των ακίδων της τροχιάς. Για να μελετήσουμε τη μεταπτώση, πρέπει να βρούμε μια διαφορική εξίσωση που να περιγράφει την τροχιά στο χώρο π.χ. $\phi = \phi(r)$. Θα χρησιμοποιήσουμε δύο εξισώσεις:

① τον ορισμό της γεωδαιτικής στη μορφή του υποθετικού δυναμικού:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 + \tilde{V}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dz} = \pm \sqrt{2(\tilde{E} - \tilde{V})}$$

② τον ορισμό της ερωροφικής ανά μονάδα μάζας

$$l = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi}{dz} \quad (\text{στο } \theta = \pi/2)$$

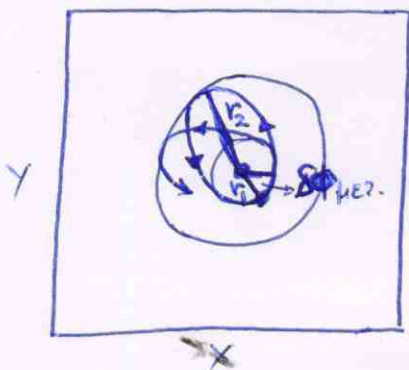
Διακρίνοντας βρίσκουμε:

$$\frac{d\phi/dz}{dr/dz} = \pm \frac{l/r^2}{\sqrt{2(\tilde{E} - \tilde{V})}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\phi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{l^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2}}$$

Αν η κίνηση γίνεται μεταξύ δύο ~~μοσχα~~
 μοσχαίων r_1 και r_2 , τότε η γωνία που
 διαγράφεται είναι $\int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr$. Αν οι r_1 και r_2
 είναι η ελάχιστη και η μέγιστη απόσταση του
 τροχιάς από το κέντρο, τότε για μια "ηλίξη"
 γωνιά, η αυτίνα που διαγράφεται από το r_1
 μέχρι των επόμενης φορά που το εωκεκτίδιο επιβρέπει
 σε απόσταση r_1 είναι (λόγω συντηρείας)

$$\Delta\phi \approx 2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{d\phi}{dr} dr$$



Στο Νευτώνειο όριο, όπου η
 ελλειπτική τροχιά εως εωκεκτίδιου
 είναι κλειστή, είναι $\Delta\phi = 2\pi$.
 Οπότε η γωνία κλεισίματος

ορίζεται ως

$$\Delta\phi_{\text{κερ.}} = \Delta\phi - 2\pi$$

Στην περίπτωση αδρανούς βαροεικού πεδίου (όπως
 του Ηλίου) η τροχιά είναι σχεδόν ελλειπτική
 με ημιάξονα a και εκκενρότητα
 $\approx \epsilon = \frac{r_2}{a} - 1 < 1$. Εάν αναζητούμε την $\Delta\phi$
 για $M/R \ll 1$ τότε βρίσκουμε

$$\Delta\phi_{\text{κερ.}} = \frac{6\pi M}{a(1-\epsilon^2)}$$

Για τον πλανήτη Ερμής η θεωρητική πρόβλεψη είναι
 $\Delta\phi_{\text{κερ.}} = 42.98''/\text{αιώνα}$, το οποίο επαληθεύεται με
 ακρίβεια $\pm 0.04''/\text{αιώνα}$.

B. Η ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Για φωτόνια, η κορυφή της τροχιάς $\varphi = \varphi(r)$ βρίσκεται ομοίως:

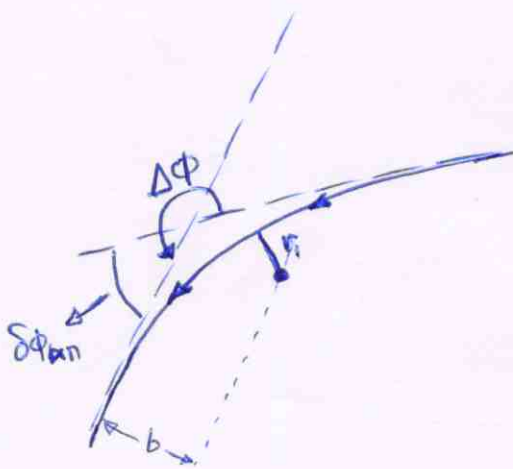
$$\begin{cases} \int \tilde{E}_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + \tilde{V}_\varphi \\ l = r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi/d\lambda}{dr/d\lambda} = \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l/r^2}{\sqrt{2(\tilde{E}_\varphi - \tilde{V}_\varphi)}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{l}{r^2} \left[e^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{l^2}{r^2} \right]^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{-1/2}}, \quad b = \left| \frac{l}{e} \right|$$

Βλέπουμε ότι η κορυφή της τροχιάς εξαρτάται από την νεωτώνιο κρούση b και όχι μετακινείται από τα λ και e .



Η γωνία απόκλισης είναι γ

$$\delta\varphi_{\pi\pi} = \Delta\varphi - \pi$$

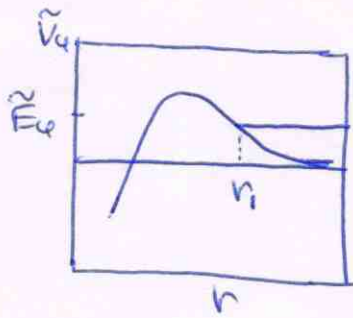
(Για Νεύτωνιο όριο $\Delta\varphi \rightarrow \pi \Rightarrow \delta\varphi_{\pi\pi} \rightarrow 0$).

Λόγω συμμετρίας:

$$\Delta\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr = 2 \int_{-\infty}^{r_1} \frac{d\varphi}{dr} dr$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2 \int_{r_1}^{\infty} \frac{d\varphi}{dr} dr}$$

όπου r_1 είναι το σημείο ελάχιστης προσέγγισης (σημείο κατάρτης).



Στο $r=r_1$, είναι: $\tilde{E}_\phi = \tilde{V}_\phi(r=r_1)$
 από την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε το v_1 , για συνάρτηση των M , e και ℓ . [ΑΣΥΜΠΤΗΤΗ]

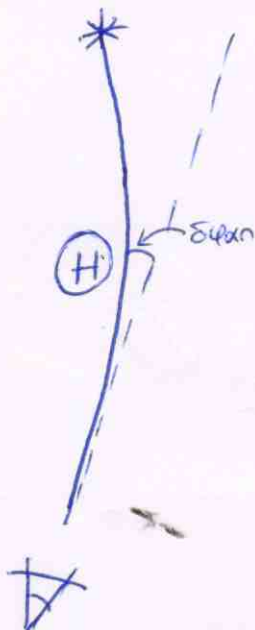
Για αδρανές βαρυτικό πεδίο βρίσκουμε ότι

$$\delta\phi_{\text{αν}} = \frac{4M}{b}$$

Για τον Ήλιο βρίσκουμε θεωρητικά:

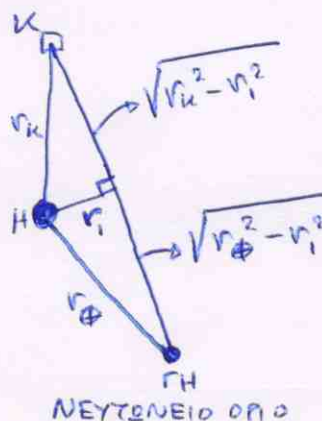
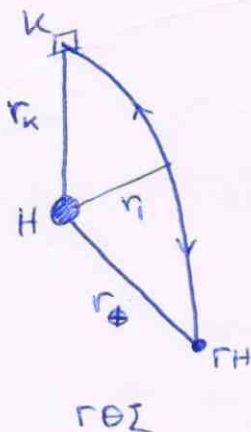
$$\delta\phi_{\text{αν}} = 1.7''$$

Αυτό επιβεβαιώθηκε πειραματικά το 1919 από τον Eddington 624 διαμήκη έυδειχσε Ηλίου.



Γ. ΧΡΟΝΙΚΗ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗ ΤΗΣ ΔΙΑΔΟΣΗΣ ΤΟΥ ΦΩΤΟΣ

Λόγω της καμπύλωσης της τροχιάς ενός φωτονίου, ο χρόνος διάδοσης είναι μεγαλύτερος σε σχέση με το Νευτώνειο όριο



θεωρήστε την ανάλυση ενός φωτονίου το οποίο ταξιδεύει από τη ΓΗ κοντά από τον Ήλιο μέχρι Κ και κατόπιν Κ και πίσω στη ΓΗ (ο καθένας μπορεί να βρεθεί π.χ. σε κάποιο πλανήτη).

Στη Νευτώνεια θεωρία, ο ολικός χρόνος για τη διαδρομή είναι

$$\Delta t_N = 2 \left(\sqrt{r_u^2 - r_1^2} + \sqrt{r_\oplus^2 - r_1^2} \right)$$

όπου r_1 είναι η απόσταση ελάχιστης προσέγγισης (που εδώ συμπίπτει με την παραμέτρο κρούσης b). Για να βρούμε τον ολικό χρόνο στη σχετικότητα χρησιμοποιούμε:

$$+e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \quad (\text{οπτικός } e)$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{d\lambda} = \frac{e}{1 - 2M/r}$$

και

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm [2(\tilde{E}_\phi - \tilde{V}_\phi)]^{1/2} \quad (\text{γεωδ. φωτ.})$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{dt}{dr} &= \frac{dt/d\lambda}{dr/d\lambda} = \pm \frac{e/(1 - 2M/r)}{[2(\tilde{E}_\phi - \tilde{V}_\phi)]^{1/2}} \\ &= \pm \frac{e/(1 - 2M/r)}{[e^2 - (1 - \frac{2M}{r})l^2/r^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dt}{d\lambda} = \pm \frac{1}{b} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right]^{-1/2}}$$

Ο ολικός χρόνος είναι

$$\Delta t = 2 \left[\int_{r_\oplus}^{r_1} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda + \int_{r_1}^{r_u} \frac{dt}{d\lambda} d\lambda \right]$$

και κάνουμε ανάπτυξη για $r_1/r_u \ll 1$ και $r_1/r_\oplus \ll 1$ βεβαιούμε:

$$\Delta t_{\text{επιπλέον}} = \Delta t - \Delta t_N$$

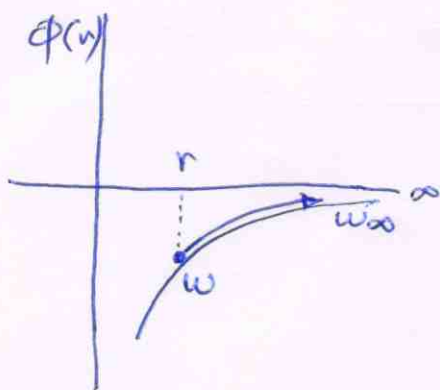
$$\Rightarrow \Delta t_{\text{επιπλέον}} \approx 4M \left[\ln \left(\frac{4r_u r_\phi}{r_i^2} \right) + 1 \right]$$

Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται χρονική καθυστέρηση Shapiro. Το 1976 χρησιμοποιήθηκαν τα διαστημόπλοια Viking όταν ήταν Άρη για να μετρηθεί η χρονική καθυστέρηση σήματος radar μεταξύ Γης και Άρη όταν αυτά περάσουν κοντά από τον Ήλιο.



Σε συνολικό χρόνο διαδρομής 41 δεπτών η χρονική καθυστέρηση λόγω ΓΘΣ μετρήθηκε ως 247 ns. Η μέτρηση αυτή επιβεβαιώνει το θεωρητικό αποτέλεσμα ως ΓΘΣ με ακρίβεια 10^{-3} .

Δ. ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΜΕΤΑΘΕΣΗ ΣΤΟ ΕΡΥΘΡΟ ΤΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΑΣ ΦΩΤΟΝΙΩΝ



Έστω ένα φωτόνιο που εκπέμπεται από απόσταση r κυρίως για κεραιές Schwarzschild, με ενέργεια

$$E = h\omega = -p^a U_a(r, \varphi)$$

όπου p^a είναι η 4-ορμή του φωτονίου ενώ $U^a(r, \varphi)$ είναι η 4-ταχύτητα ενός αμυγδάλου

παράλληλα για θέση r . Αν U^t είναι t -συμπύκνωμα της $U^a(r, \varphi)$, τότε

$$U^a(r, \varphi) = U^t(1, 0, 0, 0)$$

με κανονικοποίηση

$$U^a(r, \varphi) U_a(r, \varphi) = -1$$

$$\Rightarrow U^a(r, \varphi) U^b(r, \varphi) g_{ab} = -1$$

$$\Rightarrow (U^t)^2 g_{tt} = -1$$

$$\Rightarrow -(U^t)^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -1$$

$$\Rightarrow U^t = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow U^a(r, \varphi) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \cdot (1, 0, 0, 0)$$

Όμως, το διάνυσμα Killing t^a της κεραιάς Schwarzschild έχει συμπύκνωμα

$$t^a = (1, 0, 0, 0)$$

Άρα: $u^x_{(r)} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \cdot t^x$

οπότε

$$t\omega = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p^x t_\alpha$$

Επειδή η 4-ορμή του φωτονίου p^x είναι πάντοτε παράλληλη προς την εφαπτόμενη ευθεία σε κάθε σημείο της γεωδαιτικής του φωτονίου το $p^x t_\alpha$ διατηρείται κατά μήκος της γεωδαιτικής (όπως και το $u^x t_\alpha$ για βαρυτίδια).

Συμπεριλαμβανόμενα τα συχρότητα στο r και τα συχρότητα του φωτονίου όταν φθάσει στο άπειρο, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{t\omega}{t\omega_\infty} &= \frac{- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} p^x t_\alpha}{- \left(1 - \frac{2M}{\infty}\right)^{-1/2} p^x t_\alpha} \\ &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\infty = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \omega}$$

Διαισθητικά, ένα φωτόνιο που ξεκινά με συχρότητα ω από απόσταση r κοντά σε μια μαζική σήη ή βαρυτικό αγγείο, χάνει ενέργεια καθώς απομακρύνεται προς το άπειρο (ελαττώνεται η συχρότητα του). Βλέπουμε ότι αν ένα φωτόνιο ξεκινήσει από το $r=0$ με οποδήποτε πεπεσμένη ενέργεια $t\omega$, θα φθάσει στο άπειρο με $\omega_\infty = 0$!

